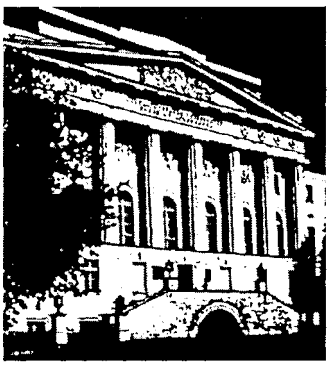
КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Серия

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

основана в 2002 году по инициативе ректора
МГУ им. М.В. Ломоносова
академика РАН В.А. Садовничего
и посвящена

250-летию
Московского университета



Уважаемый читатель!

Вы открыли одну из книг, изданных в серии «Классический университетский учебник», посвященной 250-летию Московского университета. Серия включает более 150 учебников и учебных пособий, рекомендованных к изданию Учеными советами факультетов и Редакционным советом серии.

Московский университет всегда славился своими профессорами и преподавателями, воспитавшими не одно поколение студентов, впоследствии внесших заметный вклад в развитие нашей страны, составивших гордость отечественной и мировой науки, культуры и образования. Юбилей Московского университета — выдающееся событие в жизни всей нашей страны и мирового образовательного сообщества.

Высокий уровень образования в Московском университете в первую очередь обеспечивается высоким уровнем написанных выдающимися учеными и педагогами учебников и учебных пособий, в которых сочетаются как глубина, так и доступность излагаемого материала. В этих книгах собран бесценный опыт методики и методологии преподавания, который стал достоянием не только Московского университета, но и других университетов России и всего мира.

Издание серии «Классический университетский учебник» наглядно демонстрирует тот вклад, который внес Московский университет в классическое университетское образование в нашей стране.

Решение этой благородной задачи было бы невозможным без активной помощи со стороны издательств, принявших участие в издании книг серии «Классический университетский учебник». Мы расцениваем это как поддержку ими позиции, которую занимает Московский университет в вопросах образования и науки.

Ректор Московского университета
академик РАН, профессор

В. Садовничий

В. А. Садовничий

Н.В. ЕФИМОВ

ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов математических специальностей высших учебных заведений

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2004

УДК 514.1
ББК 22.151.1
Е91

Ефимов Н. В. **Высшая геометрия.** — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 584 с. — ISBN 5-9221-0267-2.

Перед вами прекрасная книга, в которой с редкой ясностью и яркостью излагаются основы геометрии — евклидовой и неевклидовой, проективной геометрии, геометрии постоянной кривизны. Эта книга — классический учебник, выдержавший семь изданий, отличается методически продуманным и умело распределенным материалом и остается современной и своевременной.

Для студентов и аспирантов всех математических специальностей, физиков и информатиков, лекторов геометрических курсов, математиков-исследователей.

Ил. 191.

Учебное издание

ЕФИМОВ Николай Владимирович

ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *В.Е. Рокотян*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 02.04.03. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 36,5. Уч.-изд. л. 39,25. Заказ № 10891

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru; http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0267-2

9 785922 102674

ISBN 5-9221-0267-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к шестому изданию 6
Предисловие к пятому изданию 6
Предисловие к четвертому изданию 6
Предисловие к третьему изданию 7

ЧАСТЬ I
ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Глава **I. Краткий обзор исследований по основаниям геометрии** 9
§ 1. Аксиомы Евклида (nn° 1–4) 9
§ 2. Пятый постулат (nn° 5–8) 14
§ 3. Н. И. Лобачевский и его геометрия (n° 9) 30
§ 4. Формирование понятия геометрического пространства (n° 10) 33

Глава **II. Аксиомы элементарной геометрии** 39
§ 1. Геометрические элементы (n° 11) 39
§ 2. Группа I. Аксиомы связи (n° 12) 39
§ 3. Группа II. Аксиомы порядка (n° 13) 42
§ 4. Следствия из аксиом связи и порядка (nn° 14–15) 43
§ 5. Группа III. Аксиомы конгруэнтности (n° 16) 51
§ 6. Следствия из аксиом I–III (nn° 17–19) 55
§ 7. Группа IV. Аксиомы непрерывности (nn° 20–24) 68
§ 8. Группа V. Аксиома параллельности. Абсолютная геометрия (nn° 25–27) 81

Глава **III. Неевклидова теория параллельных** 85
§ 1. Определение параллельных по Лобачевскому (nn° 28–30) 85
§ 2. Особенности расположения параллельных и расходящихся прямых (nn° 31–32) 96
§ 3. Функция Лобачевского $\Pi(x)$ (n° 33) 101
§ 4. Прямые и плоскости в пространстве Лобачевского (nn° 34–35) 105
§ 5. Эквидистанта и орицикл (nn° 36–40) 112
§ 6. Эквидистантная поверхность и орисфера (nn° 41–44) 122
§ 7. Элементарная геометрия на поверхностях пространства Лобачевского (nn° 45–47) 127
§ 8. Площадь треугольника (n° 48) 138

§ 9. Доказательство логической непротиворечивости геометрии Лобачевского (nn° 49–54) 149
§ 10. Основные метрические соотношения в геометрии Лобачевского (nn° 55–62) 169
§ 11. Краткие сведения о геометрии Римана (nn° 63–68) 183

Глава **IV. Исследование аксиом элементарной геометрии** 192
§ 1. Три основные задачи аксиоматики (nn° 69–70) 192
§ 2. Непротиворечивость аксиом евклидовой геометрии (n° 71) 196
§ 3. Доказательство независимости некоторых аксиом евклидовой геометрии (nn° 72–73) 211
§ 4. Аксиома полноты (n° 74) 222
§ 5. Полнота системы аксиом евклидовой геометрии (n° 75) 227
§ 6. Аксиоматический метод в математике (n° 76) 230

ЧАСТЬ II
ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава **V. Основы проективной геометрии** 232
§ 1. Предмет проективной геометрии (nn° 77–83) 232
§ 2. Теорема Дезарга. Построение гармонических групп элементов (nn° 84–88) 238
§ 3. Порядок точек на проективной прямой (nn° 89–90) 251
§ 4. Разделенность гармонических пар; непрерывность гармонического соответствия (nn° 92–93) 259
§ 5. Аксиома непрерывности. Проективная система координат на прямой (nn° 94–97) 266
§ 6. Проективная система координат на плоскости и в пространстве (nn° 98–102) 278
§ 7. Проективное соответствие между элементами одномерных многообразий (nn° 103–105) 291
§ 8. Проективное соответствие между многообразиями двух и трех измерений (nn° 106–108) 301
§ 9. Аналитические представления проективных отображений. Инволюция (nn° 109–113) 311
§ 10. Формулы преобразования проективных координат. Сложное отношение четырех элементов (nn° 114–119) 328
§ 11. Принцип двойственности (nn° 120–124) 338
§ 12. Алгебраические кривые и пучки. Алгебраические поверхности и связки. Комплексная проективная плоскость и комплексное проективное пространство (nn° 125–130) 352
§ 13. Образы второй степени. Теория поляр (nn° 131–136) 361
§ 14. Конструктивные теоремы и задачи проективной геометрии (nn° 137–154) 377

Глава **VI. Теоретико-групповые принципы геометрии. Группы преобразований** 405
§ 1. Геометрия и теория групп (nn° 155–158) 405
§ 2. Проективная группа и ее основные подгруппы (nn° 159–167) 410
§ 3. Геометрии Лобачевского, Римана и Евклида в проективной схеме (nn° 168–174) 423

Глава **VII. Пространство Минковского** 442
§ 1. Многомерное аффинное пространство (nn° 175–188) 441
§ 2. Евклидовы пространства и пространство Минковского (nn° 189–202) 458
§ 3. Пространство событий специальной теории относительности (nn° 203–214) 473

ЧАСТЬ III
ГЕОМЕТРИЯ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Глава **VIII. Дифференциальные свойства неевклидовой метрики** 491
§ 1. Метрическая форма евклидовой плоскости (n° 215) 491
§ 2. Вычисление расстояния между двумя точками на плоскости Лобачевского (nn° 216–219) 496
§ 3. Метрическая форма плоскости Лобачевского (nn° 220–224) 508
§ 4. Внутренняя геометрия поверхности и задача Бельтрами (nn° 225–226) 525
§ 5. Геометрия на поверхности постоянной кривизны (nn° 227–228) 532
§ 6. Вывод основных метрических соотношений в геометрии Лобачевского (nn° 229–233) 545

Глава **IX. Пространственные формы геометрии постоянной кривизны** 551
§ 1. Двумерные многообразия с дифференциально-геометрической метрикой (nn° 234–238) 551
§ 2. Параболические пространственные формы (nn° 239–241) 560
§ 3. Эллиптические пространственные формы (nn° 242–245) 567
§ 4. Гиперболические пространственные формы (nn° 246–249) 570
§ 5. Теорема Гильберта (nn° 250–261) 576

Предисловие к шестому изданию

В настоящее издание внесены некоторые изменения текста пятого издания на страницах 53 (где несколько усилена аксиома III.4) и 431. Они сделаны по совету А. М. Заморзаева, которому приношу глубокую благодарность.

12 июля 1977 г. *Н. Ефимов*

Предисловие к пятому изданию

В настоящее (пятое) издание внесены небольшие изменения в отдельных местах книги, где, как нам представлялось, требовались поправки и некоторые улучшения прежнего текста.

7 июля 1970 г. *Н. Ефимов*

Предисловие к четвертому изданию

В настоящее издание включена новая глава VII, посвященная пространствам Минковского и основам специальной теории относительности. Эта глава в известной мере примыкает к главам V и VI где излагаются проективная геометрия и теоретико-групповые вопросы, но по существу ее изложение построено независимо от остального материала книги (в ней используются лишь готовые результаты главы V для доказательства линейности преобразований Лоренца). Что касается других разделов, то они, в основном, остались без изменений, если не считать местных исправлений и улучшений (которых, однако, довольно много).

Автор выражает благодарность Нгуен Кан Тоану (Вьетнам), И. А. Вайнштейну и А. М. Заморзаеву за полезные замечания и рекомендации к четвертому изданию.

26 февраля 1961 г. *Н. Ефимов*

Предисловие к третьему изданию

В третьем издании книги сделано множество отдельных исправлений и улучшений текста. Кроме того, написаны два новых раздела главы III: "Основные метрические соотношения в геометрии Лобачевского" и "Краткие сведения о геометрии Римана". Дифференциально-геометрический материал отнесен в конец книги.

Среди отдельных изменений текста следует отметить изменение формулировки аксиомы Кантора. В первом издании книги была принята несколько усиленная по сравнению с обычной формулировка этой аксиомы. Во втором издании при сохранении той же формулировки включен (в главе IV) пример неархимедовой геометрии, в которой имеет место предложение Кантора. Однако указанный пример основан на обычной формулировке канторовской аксиомы. На этот дефект обратил мое внимание А. Д. Александров. В настоящем издании аксиома Кантора дана в обычной формулировке. Ряд других дефектов изложения исправлен благодаря рецензии П. К. Рашевского, опубликованной в "Советской книге" от 10 октября 1949 года. Для подготовки третьего издания весьма существенным было обсуждение книги (повторное, после второго издания) на семинаре В. Ф. Кагана в МГУ.

Несколько слов по поводу использования книги в качестве учебного пособия по курсу оснований геометрии. В настоящем издании основной материал расположен в первых двух частях. В книге этот материал излагается систематически, почти без пропусков деталей рассуждений (за исключением доказательства некоторых теорем элементарной геометрии). Само собой разумеется, что в лекционном изложении такая детализация нецелесообразна (даже если бы на курс было отведено много часов). Наиболее трудоемкой является глава II первой части; мне кажется, что из этой главы на лекциях следует изложить формулировки аксиом и примеры строгого доказательства некоторых теорем; кроме того, следует достаточно подробно остановиться на наиболее принципиальных моментах, каковыми являются: измерение длин, эквивалентность аксиом Архимеда и Кантора аксиоме Дедекинда и значение этих аксиом для обоснования аналитической геометрии. Доказательства большинства начальных теорем элементарной геометрии целесообразно отнести к самостоятельной работе студентов с проверкой на консультациях, на семинарских занятиях или на математическом кружке.

Глава III (геометрия Лобачевского) легко поддается лекционному изложению, и материал этот студенты обычно слушают с удовольствием. Но и здесь многие вспомогательные теоремы можно дать без доказательства. Напротив, логическую непротиворечивость геометрии Лобачевского, мне кажется, следует доказать со всей подробностью как один из наиболее принципиальных вопросов курса (именно здесь целесообразно использовать точные формулировки аксиом и точно сформулировать полученный результат). Что касается главы IV, то здесь можно ограничиться общим обзором; понятие неполной аксиоматики достаточно иллюстрировать примером первой группы аксиом с реализацией на тетраэдре. Если материал главы IV излагать более подробно, то я рекомендовал бы остановиться на неархимедовых системах (с предварительным кратким изложением сущности декартовой реализации всех аксиом). Проективные понятия в курсе оснований геометрии, естественно, должны играть подсобную роль. Соответственно этому, мне кажется, из главы V достаточно взять построение проективных координат на прямой и на плоскости (опустив доказательство непрерывности гармонического соответствия и доказательство плотности проективной шкалы), аналитическое представление проективных соответствий (исключая трехмерный случай) и теорию поляр. Главу VI я рекомендовал бы изложить полностью. Материал третьей части может быть использован в работе математических кружков и семинаров.

15 апреля 1953 г. *Н. Ефимов*

Часть I
ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Глава I

КРАТКИЙ ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Аксиомы Евклида

1. Возникновение геометрических представлений относится к весьма отдаленным временам. Начальное оформление их обычно связывают с древнейшими культурами Вавилона и Египта.

С VII века (до нашей эры) начинается период развития геометрии трудами греческих ученых. В VI и V веках было получено много основных геометрических фактов. К этому же времени, видимо, сложилось понятие о доказательстве теорем.

В III столетии греки обладали уже глубокими геометрическими знаниями, причем они имели не только накопленный запас фактов, но и методы геометрических доказательств. Естественно поэтому, что в этот период возникли попытки собрать весь этот материал и расположить его в логически связном порядке.

Изложение начал геометрии предпринималось многими греческими авторами, сочинения которых до нашего времени не дошли. Повидимому, они были забыты после появления знаменитых "Начал" Евклида.

2. Евклид, один из великих геометров древности, жил в период приблизительно от 330 до 275 года. Составленные им "Начала" разделены на 13 книг, из которых пятая, седьмая, восьмая, девятая и десятая посвящены теории пропорций и арифметике (изложенным в геометрической форме), остальные являются собственно геометрическими.

Книга первая содержит условия равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольников, теорию параллельных линий и условия равновеликости треугольников и многоугольников. Во второй книге дается превращение многоугольника в равновеликий квадрат. Книга третья посвящена окружности. В четвертой книге рассматриваются вписанные и описанные многоугольники. Книга шестая трактует подобие многоугольников. В последних трех книгах изложены основы стереометрии.

Таким образом, "Начала" содержат материал собственно элементарной геометрии. Многое из того, что было уже известно во времена Евклида (например, теория конических сечений), в "Началах" не изложено.

Каждую книгу Евклид начинает с определения тех понятий, которыми ему приходится в этой книге оперировать. Первой книге предпосланы 23 определения. Мы приводим первые восемь из них.

Определение I. Точка есть то, что не имеет частей.

Определение II. Линия есть длина без ширины.

Определение III. Границы линии суть точки.

Определение IV. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.

Определение V. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

Определение VI. Границы поверхности суть линии.

Определение VII. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.

Определение VIII. Плоский угол есть взаимное наклонение двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости.

Вслед за определениями Евклид приводит постулаты и аксиомы, т. е. утверждения, принимаемые без доказательства *).

Постулаты

I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжить.

III. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.

IV. И чтобы все прямые углы были равны.

*) В разных изданиях "Начал" списки постулатов и аксиом не тождественны. Здесь приводится один из наиболее распространенных списков.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавим равные, то получим равные.

III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.

IV. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.

V. И если удвоим равные, то получим равные.

VI. И половины равных равны между собой.

VII. И совмещающиеся равны.

VIII. И целое больше части.

IX. И две прямые не могут заключать пространства.

Принадлежность некоторых из перечисленных аксиом (IV, V, VI и IX) Евклиду берется под сомнение. В иных изданиях "Начал" IV и V постулаты относят к числу аксиом, поэтому пятый постулат иногда называют XI аксиомой. Что касается принципа отнесения основных положений к постулатам или к аксиомам, то он остается по существу невыясненным.

Вслед за аксиомами Евклид излагает теоремы геометрии, располагая их в порядке логической зависимости так, чтобы каждое предложение можно было доказать на основании предыдущих предложений, постулатов и аксиом.

3. Перечисление определений и аксиом, достаточных для строго логического доказательства всех последующих теорем, называют (аксиоматическим) обоснованием геометрии.

Задача обоснования геометрии ясно поставлена Евклидом в его "Началах" и решена им с той степенью точности, какая была доступна античной древности. Более того, в дальнейшем, на протяжении многих веков, строгость евклидовых доказательств неизменно признавалась образцом для подражания.

Однако если рассматривать изложение "Начал" с точки зрения современной нам математики, то придется признать, что оно во многих отношениях неудовлетворительно.

Обратимся прежде всего к определениям Евклида; некоторые из них приведены выше.

Формулировки этих определений оперируют такими понятиями, которые сами должны быть определены, например: "граница", "длина" и т. д. Ни одно из определений I–VIII не используется в доказательствах каких-либо теорем; не будучи органически связанными с остальным материалом книги, они являются по существу бесполезными и могут быть опущены без всякого ущерба для последующих рассуждений. Эти определения являются лишь описаниями геометрических образов, к тому же выраженными в весьма наивной форме.

Что же касается постулатов и аксиом, то они в общем существенны; при доказательстве многих геометрических предложений приходится принимать во внимание, например, что прямая определяется двумя своими точками, что существует окружность произвольного радиуса и т. д. Но здесь следует обратить внимание на другое обстоятельство: даже поверхностный анализ обнаруживает, что список основных положений, принятых Евклидом без доказательства, слишком беден, чтобы служить базой для строго логического развертывания геометрии. Чтобы пояснить эту мысль, приведем некоторые примеры.

В геометрических рассуждениях постоянно приходится оперировать понятиями, которые мы привыкли выражать словами "данная точка прямой лежит между двумя другими ее точками", "две точки лежат по одну сторону от прямой", "две точки лежат по разные стороны от прямой", "точка находится внутри многоугольника" и т. д. Постулаты Евклида не дают никаких данных для обоснования этих понятий. Когда мы употребляем их в доказательстве какой-нибудь теоремы, то, имея в своем распоряжении только постулаты Евклида, вынуждены апеллировать к убедительной наглядности чертежа. Между тем в строго логическом построении геометрии каждое положение, если оно не содержится в аксиомах, должно быть доказано, каким бы очевидным оно ни казалось.

Далее следует указать, что по смыслу аксиомы VII равенство геометрических величин и фигур определяется с помощью движения. Между тем само понятие движения у Евклида не определено, и свойства движения ни в каких аксиомах не перечислены. Наконец, всякий раз, когда Евклид рассматривает две окружности, из которых одна проходит через одну внутреннюю и одну внешнюю точку относительно другой, он безоговорочно предполагает существование точек пересечения этих окружностей; точно так же в тех случаях, когда рассматривается прямая, проходящая через внутреннюю точку некоторой окружности, принимается на веру, что эти прямая и окружность пересекаются в двух точках. Несмотря на наглядную очевидность этих фактов, они должны быть доказаны. Но среди постулатов и аксиом Евклида нет таких положений, с помощью которых можно обосновать подобные доказательства.

Благодаря всему указанному убедительность логики Евклида во многих случаях подкрепляется привычками наших пространственных представлений. А это значит, что "Начала" безукоризненного логического обоснования геометрии не содержат.

4. Некоторые из недостатков евклидовых "Начал" были замечены учеными древности. Список геометрических постулатов был, в частности, расширен Архимедом, который в теории измерения длин, площадей и объемов существенно завершил изложение Евклида. В то время как Евклид устанавливает лишь отношения между длинами, площадями и объемами, показывая, например, что площади кругов относятся, как квадраты, а объемы шаров, — как кубы радиусов, Архимед дает выражения, позволяющие практически вычислять соответствующие величины. Для обоснования метрической геометрии им введены следующие пять постулатов:

I. Из всех линий, имеющих общие концы, прямая есть кратчайшая.

II. Другие же две линии, имеющие общие концы и расположенные в одной плоскости, не равны, если они обе выпуклые и одна них объемлется другой кривой и прямой, соединяющей концы, а также если кривые имеют общую часть, а остальная часть объемлется; при этом объемлемая меньше объемлющей.

III. Точно так же из всех поверхностей, имеющих общую плоскую периферию, плоскость меньше всех других.

IV. Другие же две поверхности, имеющие общую плоскую периферию, не равны, если обе они выпуклы и одна из них (или часть ее) объемлется другой поверхностью и плоскостью периферии; при этом объемлемая поверхность меньше объемлющей.

V. Сверх того, из двух неравных линий, двух неравных поверхностей или двух неравных тел бóльшая окажется меньше той величины, которую мы получим, если повторим меньшую надлежащее число раз.

Первые четыре предложения Архимеда в качестве постулатов для логического обоснования метрической геометрии неприемлемы. Они трактуют о длине линии, площади поверхности и объеме тела, а эти понятия по существу требуют определения через другие, более простые геометрические понятия. Если же эти определения надлежащим образом высказать, то утверждениям Архимеда можно дать доказательства. Поэтому нет смысла считать их постулатами.

Напротив, последнее утверждение, которое обычно просто называют постулатом Архимеда, чрезвычайно важно. Его можно высказать кратко в следующей форме: для любых двух a и b, $a < b$, существует такое целое n, что $na > b$. Этот постулат лежит в основе измерения геометрических величин, как подробно будет показано в главе II, n° 20.

И после Архимеда не прекращались попытки уточнить основные положения геометрии. Однако на протяжении многих веков к обоснованию геометрии никто не прибавил чего-либо принципиально нового сверх того, что уже было сделано Евклидом. Строгость евклидовых доказательств до XIX столетия в общем казалась достаточной. Только в конце XIX столетия была окончательно осознана идея точного логического построения геометрии и указана полная система аксиом, из которых все теоремы выводятся без всяких апелляций к наглядности наших пространственных представлений.

Необходимость пополнения списка евклидовых постулатов усматривали очень немногие геометры. Наоборот, большинство сочинений, связанных с “Началами” Евклида, имело своей задачей уменьшить число положений геометрии, принимаемых без доказательства. В этом выражалось совершенно естественное желание выяснить, при каких минимальных посылках можно развить логическим путем материал геометрии.

Один результат в этом направлении был получен без всякого труда. Именно, было замечено, что IV постулат Евклида является лишним, так как равенство прямых углов может быть доказано столь же строго, как и многие другие предложения.

Большинство сочинений, относящихся к основаниям геометрии, сводилось к попытке исключить из числа основных допущений V постулат Евклида, который казался слишком сложным, чтобы его можно было причислить к постулатам.

Исследования, посвященные V постулату, столь же древни, как и "Начала" Евклида. Завершились они только к концу XIX столетия и привели к весьма важным открытиям.

Сейчас мы сообщим некоторые сведения из истории V постулата. Это облегчит читателю понимание современных вопросов обоснования геометрии.

§ 2. Пятый постулат

5. Каждому изучавшему элементарную геометрию должна быть ясна фундаментальная роль V постулата; на нем основаны теория параллельных линий и все связанные с ней разделы: подобие фигур, тригонометрия и т. д.

Припомним последовательность начальных предложений планиметрии, чтобы заметить, где впервые используется V постулат.

В школьных учебниках прежде всего вводится сравнение геометрических образов: отрезки, углы, треугольники считаются равными, если они могут быть совмещены с помощью движения; отрезок (угол) больше другого отрезка (угла), если второй отрезок (угол) может быть наложен на часть первого. Самое понятие движения остается по существу не определенным.

Далее устанавливается ряд основных теорем, в том числе:

Теоремы о равенстве треугольников.

Теорема: в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Теорема: внешний угол треугольника больше каждого из внутренних, с ним не смежных.

Теорема: в треугольнике против большей стороны лежит больший угол (и обратная теорема).

Теоремы о перпендикулярах и наклонных.

Теорема: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других.

Особый интерес для нас представляет теорема о внутреннем и внешнем углах треугольника, на которую мы дальше неоднократно будем ссылаться. Приведем ее доказательство. Пусть дан треугольник ABC (рис. 1); нужно показать, что каждый из внешних его углов больше любого внутреннего, с ним не смежного. Установим это по отношению к внешнему углу при вершине C и внутреннему углу при вершине B.

Обозначив буквой O середину стороны BC, построим отрезок AO и на продолжении его возьмем точку A' так, чтобы было $AO = OA'$. Соединим затем точку A' с точкой C и рассмотрим треугольники AOB и $A'OC$. Эти треугольники равны, как содержащие равные углы, заключенные между соответственно равными сторонами. Из равенства рассматриваемых треугольников следует, что $\angle ABC = \angle BCA'$. Отсюда уже вытекает утверждение теоремы, так как $\angle BCA'$ составляет часть внешнего угла при вершине C.

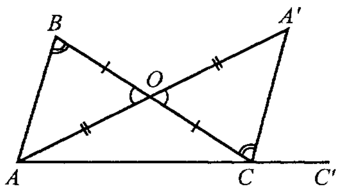


Рис. 1

Последний момент доказательства требует внимания. Именно, то, что $\angle BCA'$ является частью $\angle BCC'$ или что точка A' находится внутри $\angle BCC'$ (C' — любая точка на продолжении отрезка AC), устанавливается, по существу говоря, из наглядности чертежа. Как мы уже указывали ранее, аксиомы Евклида не дают возможности точно обосновать понятия "между", "внутри" и т. д.

Кроме того, выше использовано понятие равенства треугольников, которое тоже не обосновано, так как у Евклида не определено движение.

Таким образом, приведенное рассуждение существенно подкрепляется наглядностью чертежа.

Конечно, подобные же замечания мы могли бы сделать при выводе почти каждой геометрической теоремы. Но важно заметить, что как теорема о внутреннем и внешнем углах треугольника, так и другие перечисленные выше предложения не требуют для своего доказательства V постулата.

Вслед за установлением этих предложений формулируется определение параллельных: две прямые называются параллельными, если они не имеют общей точки.*)

Для того чтобы это определение имело силу, нужно доказать существование параллельных прямых. Доказательство легко получается с помощью известной теоремы: две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны между собой, — справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из предложения о внутреннем и внешнем углах треугольника.

В самом деле, пусть две прямые a и b составляют с прямой c прямые углы при точках A и B (рис. 2). Допустим, что прямые a

*) Напомним читателю, что сейчас речь идет о планиметрии.

и b не параллельны; обозначим через C их общую точку. Но тогда внешний угол треугольника ABC при вершине A должен бы больше внутреннего угла при вершине B, что противоречит сделанному относительно этих углов допущению. Тем самым утверждение доказано методом от противного.

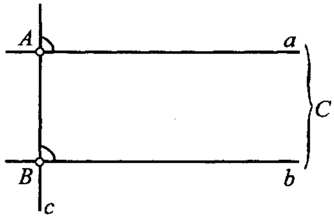


Рис. 2

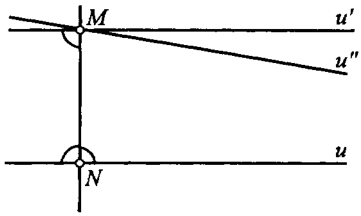


Рис. 3

Отсюда тотчас следует, что через каждую точку M можно провести прямую, параллельную к любой прямой u, не проходящей через эту точку (рис. 3). Для этого достаточно из точки M опустить на прямую u перпендикуляр MN и построить прямую u', перпендикулярную к MN в точке M. Прямая u' на основании предыдущего будет параллельна прямой u.

После того как доказано существование параллельных и установлено, что через каждую точку можно провести прямую, параллельную данной, естественно, должен быть решен вопрос: проходит ли через каждую точку плоскости только одна прямая, параллельная данной, или таких прямых существует множество.

В теории параллельных доказывается, что *через каждую точку, лежащую вне данной прямой, проходит точно одна прямая, параллельная данной.* Приведем это доказательство (рис. 3).

Пусть u — произвольная прямая, M — какая-нибудь точка, не лежащая на этой прямой, и MN — перпендикуляр к u. Обозначим через u' прямую, перпендикулярную к MN в точке M. Мы уже знаем, что u' параллельна u. Проведем через точку M произвольную прямую u'', не совпадающую с u', и докажем, что u'' не может быть параллельна прямой u. Так как прямая u'' не совпадает с прямой u', то она с какой-нибудь стороны составляет с отрезком MN острый угол. Таким образом, прямые u и u'' при пересечении прямой MN образуют внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов; но отсюда, согласно V постулату, следует, что прямые u и u'' пересекаются.

Мы видим, что *в этом доказательстве единственности параллельной существенно используется* V *постулат.* Легко усмотреть, что, обратно, V *постулат может быть доказан как теорема, если принять, что через каждую точку, лежащую вне данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

В самом деле, пусть прямые a и b (рис. 4) при пересечении их третьей прямой c образуют с некоторой стороны внутренние односторонние углы, сумма которых меньше $2d$. Нужно показать, что a и b с этой же стороны от прямой c имеют общую точку.

Обозначим углы, которые образуют прямые a и b с прямой c, через α и β, и пусть в соответствии с условием

$$\alpha + \beta < 2d. \qquad (*)$$

Пусть, кроме того, γ — угол, смежный с углом α. Проведем через точку пересечения прямых a и c прямую a' так, чтобы она составила с прямой c угол $\gamma' = \beta$.

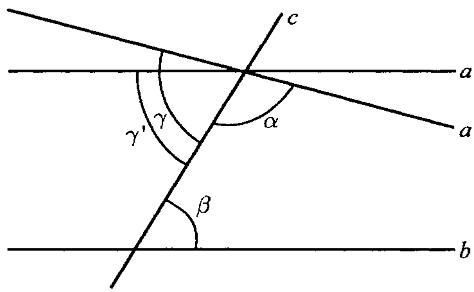


Рис. 4

Тогда прямые a и b параллельны; в самом деле, если мы допустим, что a' и b встречаются, то придем к противоречию с теоремой о внутреннем и внешнем углах треугольника. Но, приняв в качестве постулата единственность параллельной, мы должны заключить, что прямая a (как отличная от прямой a') не параллельна прямой b. Остается доказать, что a и b встречаются с той стороны, с которой расположены углы α и β. С этой целью заметим, что $\alpha+\gamma = 2d$; отсюда и из неравенства $(*)$ следует, что $\gamma > \beta$. Таким образом, прямые a и b не могут встретиться с той стороны, где лежит угол γ, так как в этом случае γ будет внутренним углом полученного треугольника, а β — его внешним углом и, следовательно, неравенство $\gamma > \beta$ окажется невозможным.

Итак, V постулат эквивалентен утверждению, что существует только одна прямая, параллельная данной и проходящая через данную точку, а последнее утверждение определяет весь строй геометрии Евклида. Отсюда, в частности, следует, что две параллельные прямые при пересечении третьей прямой образуют равные соответственные углы, что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым, и множество других теорем. Таким образом, V постулат, или, как его еще называют, постулат о параллельных, лежит в основе большинства важных предложений элементарной геометрии.

6. Возможно, что уже сам Евклид пытался доказать постулат о параллельных. В пользу этого говорит то обстоятельство, что первые 28 предложений “Начал” не опираются на V постулат; Евклид как бы старался отодвинуть применение этого постулата до тех пор, пока использование его не станет настоятельно необходимым.

Со времен Евклида до конца XIX столетия проблема V постулата являлась одной из самых популярных проблем геометрии. За этот период было предложено множество различных доказательств V постулата. Однако все они были ошибочны. Обычно авторы этих доказательств использовали какое-нибудь геометрическое утверждение, которое оказывалось столь наглядно очевидным, что проскальзывало в рассуждениях незаметно для самого автора. Вместе с тем попытка логически доказать такое утверждение, в свою очередь не опираясь на V постулат, всегда оканчивалась неудачей.

Конечно, подобные исследования не достигали намеченной цели, так как смысл проблемы заключался в освобождении евклидовой теории параллельных от *специального* постулата, и, таким образом, дело здесь было не в том, чтобы заменить V постулат другим утверждением, хотя бы оно и было весьма очевидным, а в том, чтобы доказать этот постулат, исходя из остальных постулатов геометрии*).

Нужно заметить, впрочем, что многочисленные попытки доказательства V постулата, несмотря на их тщетность, привели к известным положительным результатам. Именно благодаря им выяснилась логическая зависимость между различными геометрическими положениями, в частности, был открыт ряд эквивалентов евклидова постулата о параллельных (т. е. таких предложений, которые, будучи приняты без доказательства, вместе с другими основными положениями евклидовой геометрии позволяют доказать V постулат).

Можно привести следующие примеры эквивалентов V постулата:

1. Через каждую точку вне прямой проходит только одна прямая, параллельная данной.

2. Две параллельные прямые при пересечении их третьей прямой образуют равные соответственные углы.

3. Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым.

4. Точки, расположенные по одну сторону от данной прямой на одном и том же расстоянии, образуют прямую.

5. Расстояния от точек одной из двух параллельных прямых до второй ограничены в своей совокупности.

6. Существуют треугольники с произвольно большой площадью.

7. Существуют подобные треугольники. Любое из этих предложений можно положить в основу теории параллельных, т. е. признав какое-нибудь из них верным по очевидности, можно точным рассуждением доказать V постулат и после этого, следуя Евклиду, вывести все дальнейшие теоремы. Эквивалентность V постулату перечисленных и некоторых других предложений будет доказана в дальнейшем изложении.

7. Из многочисленных сочинений, посвященных V постулату, следует выделить работы Саккери и Ламберта, которые оставили значительный след в деле обоснования теории параллельных.

Исследования Саккери были опубликованы в 1733 г. под названием “Евклид, очищенный от всяких пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии”. В этом сочинении Саккери делает попытку доказать V постулат от противного.

---

*) В дальнейшем постановке этой задачи будет придана полная точность.

Саккери исходит из рассмотрения четырехугольника $AA'B'B$ с двумя прямыми углами при основании AB и с двумя равными боковыми сторонами AA' и BB' (рис. 5). Из симметрии фигуры относительно перпендикуляра HH' к середине основания AB следует, что углы при вершинах A' и B' равны между собой. Если принять V постулат и, следовательно, евклидову теорию параллельных, то сейчас же можно установить, что углы A' и B' — прямые и $AA'B'B$ — прямоугольник.

Обратно, как доказывает Саккери, если хотя бы в одном четырехугольнике указанного вида углы при верхнем основании окажутся прямыми, то будет иметь место евклидов постулат о параллельных. Желая доказать этот постулат, Саккери делает три возможных предположения: либо углы A' и B' прямые, либо тупые, либо острые. Эти три предположения названы им соответственно гипотезами прямого, тупого и острого угла. Так как гипотеза прямого угла эквивалентна V постулату, то для того, чтобы доказать этот постулат, следует отвергнуть две другие гипотезы. Совершенно точными рассуждениями Саккери прежде всего приводит к противоречию гипотезу тупого угла. Вслед за тем, приняв гипотезу острого угла, он выводит весьма далеко идущие ее следствия с тем, чтобы и здесь получить два противоречащих друг другу утверждения. Развивая эти следствия, Саккери строит сложную геометрическую систему, отдельные предложения которой настолько противоречат нашим наглядным представлениям о расположении прямых на плоскости, что могли бы быть сочтены абсурдными. Например, в геометрической системе, соответствующей гипотезе острого угла, две параллельные прямые либо имеют только один общий перпендикуляр, по обе стороны от которого неограниченно друг от друга расходятся, либо не имеют ни одного и, сближаясь асимптотически в одном направлении, неограниченно расходятся в другом.

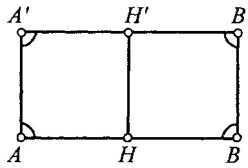


Рис. 5

Саккери справедливо не усматривает в одном только противоречии с привычными пространственными представлениями логической недопустимости этих предложений. Но после ряда точных рассуждений Саккери утверждает ложность гипотезы острого угла на том основании, что асимптотически сближающиеся прямые в бесконечно удаленной точке должны иметь общий перпендикуляр, а это "противно природе прямой". Полагая, что таким образом гипотезы тупого и острого угла приведены к противоречию, Саккери заключает, что единственно истинной является гипотеза прямого угла и этим дано доказательство V постулата. Очевидно, Саккери при этом сам чувствует, что к логическому противоречию гипотеза острого угла им не приведена и он снова возвращается к ней с тем, чтобы доказать, что она "противоречит самой себе". С этой целью он вычисляет двумя способами длину некоторой линии и получает для нее два разных значения. Это обстоятельство действительно заключало бы в себе противоречие, но Саккери пришел к нему, сделав вычислительную ошибку.

Идеи Ламберта, развитые им в сочинении "Теория параллельных линий" (1766 г.), близко примыкают к соображениям Саккери.

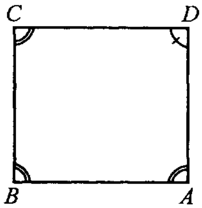


Рис. 6

Ламберт рассматривает четырехугольник $ABCD$ с тремя прямыми углами A, B и C (рис. 6); относительно четвертого угла также могут быть сделаны три допущения: что этот угол острый, прямой или тупой. Здесь снова, таким образом, возникают три гипотезы. Установив эквивалентность гипотезы прямого угла V постулату и сведя к противоречию гипотезу тупого угла, Ламберт, подобно Саккери, вынужден более всего заниматься гипотезой острого угла. И опять-таки гипотеза острого угла приводит Ламберта к сложной геометрической системе. Однако, несмотря на то, что эта система была далеко развита Ламбертом, ему не удалось встретить в ней логического противоречия. Приведенные выше, в связи с изложением идей Саккери, парадоксальные на взгляд особенности расположения прямых в системе, основанной на гипотезе острого угла, встречаются и у Ламберта. Он, как и Саккери, не сделал заключения о ложности гипотезы острого угла на том лишь основании, что эти особенности находятся в противоречии с нашими наглядными представлениями о свойствах прямых. Но в отличие от Саккери Ламберт не сделал ошибки, благодаря которой мог бы счесть гипотезу острого угла отвергнутой и V постулат, следовательно, доказанным. Ламберт нигде в своем сочинении не утверждает, что V постулат им доказан, и приходит к твердому заключению, что и все другие попытки в этом направлении не привели к цели.

"Доказательства евклидова постулата, — пишет Ламберт, — могут быть доведены столь далеко, что остается, по-видимому, ничтожная мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат".

Более того, развивая систему следствий гипотезы острого угла, Ламберт обнаруживает аналогию этой системы со сферической геометрией и в этом усматривает возможность ее существования.

"Я склонен даже думать, что третья гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере. Должна же быть причина, вследствие которой она на плоскости далеко не поддается опровержению, как это легко может быть сделано со второй гипотезой".

Мы увидим дальше, что Ламберт замечательно предчувствовал истинное решение вопроса о V постулате. Во всяком случае он далее, чем кто-либо другой до него, шел по правильному пути.

8. Сейчас мы остановимся на исследованиях Лежандра (1752–1833), который хорошо известен своими работами в анализе и механике и оставил также значительный след в геометрии.

Лежандр в течение длительного времени пытался доказать V постулат и опубликовал несколько вариантов его "доказательства". Хотя ни один из вариантов не оказался правильным, все-таки рассуждения Лежандра представляют интерес, так как выясняют связь между V постулатом и предложением о сумме внутренних углов треугольника.

В геометрии Евклида хорошо известно основанное на использовании V постулата доказательство теоремы, согласно которой сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым. Лежандр прежде всего показывает, что, обратно, если принять без доказательства утверждение, что сумма углов треугольника равна двум прямым, то V постулат может быть доказан как теорема.

Далее, имея в виду получить доказательство V постулата без того, чтобы вводить новые постулаты, Лежандр рассматривает три взаимно исключающие друг друга допущения:

I. Сумма углов треугольника больше двух прямых.

II. Сумма углов треугольника равна двум прямым.

III. Сумма углов треугольника меньше двух прямых.

Первое из этих допущений Лежандр точным рассуждением приводит к противоречию. Если бы ему удалось, не используя V постулат, привести к противоречию также и третье допущение, то было бы доказано, что сумма углов треугольника равна двум прямым и вместе с тем был бы доказан и V постулат. Однако при сведении к противоречию третьего допущения Лежандр незаметно для себя использовал один из эквивалентов V постулата.

Положительный итог работы Лежандра содержится в следующих предложениях.

Предложение I. *Если сумма углов каждого треугольника равна двум прямым, то имеет место* V *постулат.*

Для доказательства рассмотрим произвольную прямую a и некоторую точку A, лежащую вне этой прямой (рис. 7).

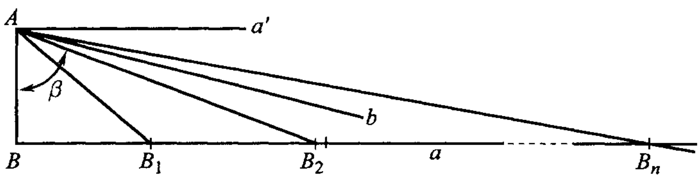


Рис. 7

Пусть AB — перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую a. Нам известно, что прямая a', проходящая через точку A перпендикулярно к отрезку AB, не встречает прямой a. Нужно показать, что всякая другая прямая, проходящая через точку A, пересекается с прямой a. Согласно условию при этом доказательстве мы можем воспользоваться тем, что сумма углов всякого треугольника равна двум прямым.

Пусть b — некоторая прямая, проходящая через точку A, и β — острый угол, который эта прямая составляет с отрезком AB. Докажем, что прямая b пересекает прямую a со стороны острого угла. Для этого на прямой a со стороны острого угла построим точку B_1 так, чтобы отрезок BB_1 был равен отрезку AB. С той же стороны от точки B_1 построим точку B_2 так, чтобы отрезок B_1B_2 был равен отрезку AB_1 и т. д. Наконец, построим точку B_n так, чтобы отрезок $B_{n-1}B_n$ был равен отрезку AB_{n-1}.

Рассмотрим треугольники ABB_1, $AB_1B_2, \ldots, AB_{n-1}B_n$. Так как мы допускаем, что сумма углов каждого треугольника равна двум прямым, то в равнобедренном треугольнике ABB_1 внутренние углы при вершинах A и B_1 равны $\pi/4$.

Дальше, внутренний угол при вершине B_1 в треугольнике ABB_1 является внешним углом треугольника AB_1B_2, а так как последний треугольник также является равнобедренным, то его внутренние углы, не смежные с углом B_1, равны между собой. Но из сделанного нами допущения о сумме углов треугольника вытекает, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных; поэтому каждый из внутренних углов треугольника AB_1B_2 при вершинах A и B_2 равен $\pi/8$. Продолжая процесс, мы найдем, что внутренний угол при вершине B_n треугольника $AB_{n-1}B_n$ равен

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\angle BAB_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Так как β — острый угол, то мы можем положить

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. Выберем число n настолько большим, чтобы было

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2} < \varepsilon.$$

Тогда будем иметь: $\beta < \angle BAB_n$.

В этом случае прямая b проходит между сторонами AB и AB_n треугольника BAB_n и, следовательно, должна иметь общую точку с прямой a, заключенную между точками B и B_n*). Этим наше утверждение доказано.

*) Строгое доказательство последнего утверждения может быть проведено с помощью аксиомы Паша (см. n° 13).

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о возможных значениях суммы внутренних углов треугольника. Для удобства мы будем обозначать через $S(\Delta)$ сумму внутренних углов треугольника Δ и через $D(\Delta)$ разность между двумя прямыми углами и суммою внутренних углов, так что

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta);$$

последнюю разность принято называть *дефектом треугольника.*

Предложение II. В каждом треугольнике

$$S(\Delta) \leqslant \pi.$$

Доказательство основывается на следующих двух леммах:

I. *В каждом треугольнике сумма двух внутренних углов меньше двух прямых.*

II. *Для всякого треугольника можно построить некоторый новый треугольник с такой же суммой углов, что и у данного, и у которого один угол будет по крайней мере в два раза меньшей наперед указанного угла данного треугольника.*

Докажем эти леммы.

Первая из них непосредственно вытекает из предложения о внутреннем и внешнем углах треугольника. В самом деле, пусть α и β — внутренние углы некоторого треугольника и α' — внешний угол этого треугольника, смежный с углом α. Тогда

$$\alpha + \alpha' = \pi.$$

Но внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного. (Это предложение, как помнит читатель, доказывается без использования V постулата.) Таким образом,

$$\alpha' > \beta$$

и, следовательно,

$$\alpha + \beta < \pi.$$

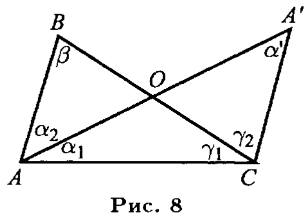


Рис. 8

Для доказательства второй леммы рассмотрим какой-нибудь треугольник ABC и покажем, что можно построить новый треугольник с той же суммой углов, что и данный, и у которого один угол будет по крайней мере в два раза меньше, например, угла при вершине A данного треугольника (рис. 8).

Обозначив буквой O середину стороны BC, соединим точку A с точкой O и продолжим отрезок AO до точки A' так, чтобы было $AO = OA'$. Тогда треугольник $AA'C$ будет обладать требуемым свойством. В самом деле, в соответствии с обозначениями, показанными на рис. 8, имеем:

$$S(ABC) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1,$$
$$S(AA'C) = \alpha_1 + \alpha' + \gamma_1 + \gamma_2.$$

Из равенства треугольников ABO и COA', которое усматривается непосредственно, следует, что

$$\alpha' = \alpha_2, \qquad \gamma_2 = \beta.$$

Отсюда прежде всего вытекает, что треугольники ABC и $AA'C$ имеют одинаковые суммы углов.

Далее, внутренние углы второго треугольника при вершинах A и A' в сумме составляют угол при вершине A первого треугольника. Поэтому один из них по крайней мере в два раза меньше заранее отмеченного угла A треугольника ABC, а это и нужно было доказать.

Перейдем теперь к доказательству основного предложения. Будем проводить доказательство от противного.

Предположим, что некоторый треугольник Δ имеет сумму углов, большую двух прямых, так что $S(\Delta) = \pi + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Обозначим один из внутренних углов треугольника Δ буквой α. Согласно лемме II мы можем построить новый треугольник Δ_1, у которого один из внутренних углов α_1 будет по крайней мере в два раза меньше α и $S(\Delta_1) = S(\Delta)$. Построим далее треугольник Δ_2, у которого один из внутренних углов α_2 по крайней мере в два раза меньше α_1 и $S(\Delta_2) = S(\Delta_1)$. Продолжая тот же процесс, построим треугольник Δ_n, у которого один из внутренних углов α_n по крайней мере в два раза меньше, чем α_{n-1}, и $S(\Delta_n) = S(\Delta_{n-1})$. Таким образом:

$$S(\Delta_n) = \pi + \varepsilon \quad \text{и} \quad \alpha_n \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$

Выберем n настолько большим, чтобы было $\dfrac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$ и, следовательно, $\alpha_n < \varepsilon$. Но тогда сумма двух других внутренних углов треугольника Δ_n окажется большей π, что противоречит лемме 1.

Предложение II тем самым доказано.

Итак, *не опираясь на V постулат, можно утверждать, что сумма внутренних углов треугольника не превышает двух прямых.*

Это обстоятельство оказывается чрезвычайно существенным для дальнейшего.

Следуя Лежандру, мы покажем теперь без использования V постулата, что если предположить хотя бы для одного треугольника сумму внутренних углов равной двум прямым, то отсюда будет вытекать, что и в каждом другом треугольнике сумма внутренних углов также равна двум прямым.

Предварительно установим несколько лемм.

Лемма I. *Если треугольник ABC трансверсалью BP разделен на два треугольника, то дефект треугольника ABC равен сумме дефектов треугольников ABP и BPC.*

Доказательство усматривается непосредственно. В самом деле, в соответствии с обозначениями рис. 9

$$D(ABP) = \pi - (\alpha + \beta_1 + \delta_1),$$
$$D(BPC) = \pi - (\beta_2 + \delta_2 + \gamma).$$

Отсюда

$$D(ABP) + D(BPC) = 2\pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2 + \gamma) = \\ = \pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma) = D(ABC).$$

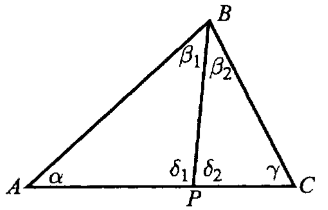


Рис. 9

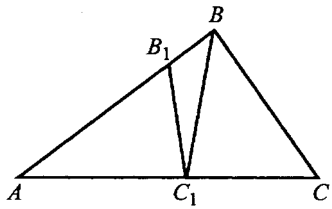


Рис. 10

Лемма II. *Пусть даны два треугольника ABC и AB_1C_1, у которых вершины A совмещены, а вершины B_1 и C_1 второго треугольника лежат соответственно на сторонах AB и AC первого. Тогда дефект второго треугольника не превышает дефекта первого треугольника* (рис. 10).

Доказательство немедленно получается с помощью предложения II и предыдущей леммы.

В самом деле, соединим точки B и C_1; тогда, на основании предыдущей леммы,

$$D(ABC) = D(AB_1C_1) + D(B_1BC_1) + D(BC_1C).$$

Но из предложения II следует, что дефект каждого треугольника есть либо положительное число, либо нуль. Отсюда и из только что написанного равенства имеем:

$$D(AB_1C_1) \leqslant D(ABC).$$

Лемма III. *Пусть даны два прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$, причем катеты AC и BC треугольника ABC соответственно больше катетов $A'C'$ и $B'C'$ треугольника $A'B'C'$. Тогда, если сумма внутренних углов треугольника ABC равна двум прямым, сумма внутренних углов треугольника $A'B'C'$ также равна двум прямым.*

Для доказательства переместим треугольник $A'B'C'$ так, чтобы его вершина C' совпала с C, катет $A'C'$ расположился на катете AC и катет $B'C'$ — на катете BC треугольника ABC. Тогда согласно предыдущей лемме

$$D(A'B'C') \leqslant D(ABC).$$

Но так как мы предположили $D(ABC) = 0$, а согласно предложению II $D(A'B'C') \geqslant 0$, то из предыдущего неравенства тотчас вытекает: $D(A'B'C') = 0$, что и нужно было доказать.

Лемма IV. *Если сумма внутренних углов некоторого прямоугольного треугольника равна двум прямым, то сумма углов всякого прямоугольного треугольника также равна двум прямым.*

Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$. Пусть дано, что сумма углов треугольника ABC равна двум прямым. Докажем, что сумма углов треугольника $A'B'C'$ также равна двум прямым. Если катеты AC и BC первого треугольника длиннее соответственно катетов $A'C'$ и $B'C'$ второго, то доказательство утверждения сразу дается леммой III. Если же хотя бы один из катетов треугольника ABC короче катета треугольника $A'B'C'$, то для доказательства леммы мы покажем, что можно построить некоторый новый прямоугольный треугольник, сумма углов которого, как и у ABC, будет равна двум прямым и катеты которого будут как угодно велики. Для этого приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник так, чтобы его гипотенуза совместилась с гипотенузой треугольника ABC и чтобы в полученном при этом четырехугольнике равные стороны оказались противоположными. Обозначим вершину прямого угла приложенного треугольника буквой D (рис. 11). Так как сумма внутренних углов каждого из прямоугольных треугольников ABC и ABD равна двум прямым, то, очевидно, все внутренние углы четырехугольника $ACBD$ будут прямые.

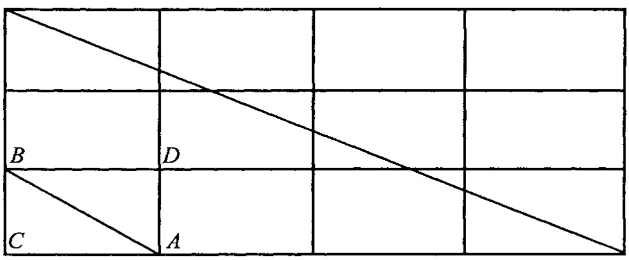


Рис. 11

Перемещая $ABCD$, мы сможем “замостить” плоскость равными прямоугольниками так, как это показано на рис. 11.

Легко видеть, что часть плоскости, показанная на этом чертеже, представляет собой прямоугольник. Разделив этот прямоугольник диагональю, мы получим два равных прямоугольных треугольника с суммами углов, равными двум прямым. Катеты этих прямоугольных треугольников, очевидно, могут быть сделаны как угодно длинными*).

Таким образом, действительно оказывается возможным построить прямоугольный треугольник с суммой углов, равной двум прямым, и с катетами, бо́льшими катетов прямоугольного треугольника $A'B'C'$. Отсюда и из леммы III следует, что сумма углов (произвольно выбранного) прямоугольного треугольника $A'B'C'$ равна двум прямым.

Теперь, опираясь на последнюю лемму, мы имеем возможность доказать высказанное выше предложение.

Предложение III. *Если сумма углов хотя бы одного треугольника равна двум прямым, то сумма углов всякого треугольника также равна двум прямым.*

Пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$ и известно, что сумма углов треугольника ABC равна двум прямым. Докажем, что сумма углов треугольника $A'B'C'$ также равна двум прямым.

Построим высоты данных двух треугольников. Каждый из них будет иметь по крайней мере, одну вершину такую, что опущенная из нее высота имеет основание, лежащее внутри противоположной стороны. Без ущерба для общности можно предположить, что такой вершиной у треугольника ABC является вершина A и у треугольника $A'B'C'$ — вершина A' (этого всегда можно добиться соответствующим выбором обозначений).

Обозначим основание высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC, буквой P и основание высоты, опущенной из вершины A' треугольника $A'B'C'$, буквой P'. Согласно лемме II

$$D(ABP) \leqslant D(ABC);$$

по условию $D(ABC) = 0$; а так как $D(ABP) \geqslant 0$ согласно предложению II, то заключаем, что $D(ABP) = 0$.

Таким образом, прямоугольный треугольник ABP имеет сумму углов, равную двум прямым. Тогда согласно лемме IV каждый прямоугольный треугольник имеет сумму углов, равную двум прямым. Но, по лемме I,

$$D(A'B'C') = D(A'B'P') + D(B'P'C');$$

так как треугольники $A'B'P'$ и $B'P'C'$ прямоугольные, то, по только что доказанному, $D(A'B'P') = 0$ и $D(B'P'C') = 0$.

Таким образом, $D(A'B'C') = 0$ и, следовательно, сумма внутренних углов треугольника $A'B'C'$ равна двум прямым. Предложение доказано.

*) Здесь используется аксиома Архимеда (см. n° 4).

Установив предложения I–III, можно попытаться доказать, что существует хотя бы один треугольник с суммой внутренних углов, равной двум прямым. Если бы это действительно удалось доказать, то тогда согласно предложению III каждый треугольник имел бы сумму внутренних углов, равную двум прямым, и, по предложению I, тогда имел бы место V постулат.

Вот один пример мнимого доказательства.

Пусть дан произвольный острый угол с вершиной в точке O (рис. 12) Возьмем на одной из его сторон какую-нибудь точку B и опустим из нее перпендикуляр BA на другую сторону. Согласно предложению II сумма углов треугольника OAB не превышает двух прямых, т. е. $D(OAB) \geqslant 0$.

Для достижения цели достаточно показать, что не может быть $D(OAB) \geqslant 0$.

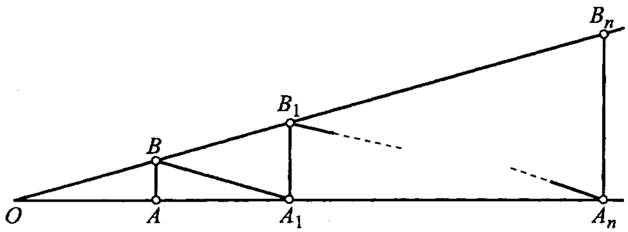


Рис. 12

Допуская противоположное, положим $D(OAB) = \varepsilon > 0$. Построим на стороне OA данного угла точку A_1 так, чтобы было $OA = AA_1$. Соединим точку B с точкой A_1 и восставим в точке A_1 перпендикуляр к прямой OA. Точку пересечения этого перпендикуляра с прямой OB обозначим буквой B_1. Согласно лемме I

$$D(OA_1B_1) = D(OAB) + D(BAA_1) + D(BA_1B_1).$$

Но легко видеть, что треугольник OAB равен треугольнику BAA_1 и, следовательно,

$$D(OAB) = D(BAA_1) = \varepsilon.$$

Отсюда и из предыдущего равенства

$$D(OA_1B_1) \geqslant 2\varepsilon.$$

Построим теперь на стороне OA данного угла точку A_2 так, чтобы было $OA_1 = A_1A_2$. Восставим в точке A_2 перпендикуляр к прямой OA и обозначим буквой B_2 точку пересечения этого перпендикуляра со стороной OB. Из рассуждений, аналогичных предыдущим, будет следовать, что

$$D(OA_2B_2) \geqslant 4\varepsilon.$$

Продолжая процесс, мы построим треугольник OA_nB_n, дефект которого будет удовлетворять неравенству $D(OA_nB_n) \geqslant 2^n\varepsilon$. Выбирая n достаточно большим, мы сможем удовлетворять неравенству $2^n\varepsilon > \pi$. Однако по самому смыслу своего определения дефект треугольника не может быть больше π.

Таким образом, допуская, что $\varepsilon > 0$, мы пришли к противоречию. Тем самым установлено, что дефект треугольника OAB равен нулю, т. е. сумма углов этого треугольника равна двум прямым. Вместе с тем доказан V постулат.

Слабое место этого рассуждения легко усмотреть. Именно: рассуждение было бы вполне точным, если бы было доказано, что перпендикуляры, восставленные к прямой OA во всех точках A_1, A_2 и т. д., встречают прямую OB. Мы, однако, использовали точки B_1, B_2 и т. д., не установив их существования, доверяя наглядной очевидности.

Точный анализ обнаруживает, что доказательство существования точек B_1, B_2 и т. д. без использования V постулата не может быть проведено (позднее это будет подробно выяснено).

Таким образом, проведенное рассуждение открывает лишь некоторый новый эквивалент V постулата. Этот результат будет в дальнейшем существен, и поэтому мы сформулируем его в виде отдельного предложения.

Предложение IV. *Если существует острый угол такой, что перпендикуляр, восставленный в любой точке одной его стороны, встречает другую сторону, то имеет место V постулат.*

Легко усмотреть тесную связь между рассуждениями Лежандра и рассуждениями Саккери и Ламберта.

В самом деле, три допущения Лежандра о возможных значениях суммы углов треугольника соответствуют гипотезам тупого, прямого и острого угла Саккери.

Если допустить для некоторого четырехугольника Саккери гипотезу тупого угла, то, разделяя этот четырехугольник диагональю, мы получим два треугольника, из которых по крайней мере один будет иметь сумму углов, бóльшую двух прямых. И обратно, если допустить, что сумма углов треугольника больше двух прямых, то придется принять гипотезу тупого угла Саккери.

Предложение II, таким образом, выражает противоречивость гипотезы тупого угла.

Если предположить, что сумма углов треугольника меньше двух прямых, то, очевидно, для каждого четырехугольника Саккери придется принять гипотезу острого угла. И обратно, если принять хотя бы для одного четырехугольника Саккери гипотезу острого угла, то, разбивая этот четырехугольник диагональю на два треугольника, мы найдем, что по крайней мере один из них имеет сумму углов, меньшую двух прямых. Но тогда, как это следует из предыдущих предложений, каждый треугольник будет иметь сумму углов, меньшую двух прямых, и, следовательно, углы при верхнем основании каждого четырехугольника Саккери будут острыми.

Таким образом, можно утверждать

Предложение V. *Если принять гипотезу острого угла для одного четырехугольника Саккери, то тогда ее необходимо отнести и к каждому четырехугольнику Саккери.*

Наконец, непосредственно усматривается, что *гипотеза прямого угла Саккери и допущение Лежандра о существовании треугольника с суммой углов, равной двум прямым, в одинаковой степени эквивалентны V постулату.*

Несмотря на многократные попытки, Лежандру не удалось доказать, что не существует треугольника с суммой углов, меньшей двух прямых, как и Саккери не удалось свести к противоречию гипотезу острого угла. В построении же системы следствий из гипотез, отвергающих V постулат, Саккери и Ламберт продвинулись гораздо дальше, чем Лежандр.

Следует заметить, что предложения I–III были известны и до Лежандра. Во всяком случае как Саккери, так и Ламберт хорошо знали о зависимости между V постулатом и утверждением, что сумма углов треугольника равна двум прямым.

Предложения I–III связывают с именем Лежандра по традиции, так как эти предложения Лежандром сформулированы особенно отчетливо и получили известность именно благодаря его работам.

§ 3. Н. И. Лобачевский и его геометрия

9. До начала XIX столетия ни одна из попыток доказать V постулат не привела к желаемому результату. Несмотря на усилия геометров, потраченные на протяжении более чем двадцати веков, задача обоснования теории параллельных, по существу, оставалась все в той же стадии, как и во времена Евклида.

Но первые же десятилетия XIX века принесли, наконец, решение проблемы V постулата; только решение это оказалось таким, какого не ждал и к какому не был подготовлен математический мир той эпохи.

Слава решения этой знаменитой проблемы принадлежит профессору Казанского университета Николаю Ивановичу Лобачевскому (1793–1856). В его докладе физико-математическому факультету Казанского университета (11 февраля по старому стилю 1826 года) и в сочинениях*), публиковавшихся, начиная с 1829 г., впервые отчетливо выражена и подтверждена мысль о том, что V *постулат не может быть выведен из остальных постулатов геометрии.* Чтобы доказать

*) См. *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. Подробные сведения о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского читатель найдет в книге: *Каган В. Ф.* Лобачевский. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1944.

это, Лобачевский, сохраняя основные посылки Евклида, кроме постулата о параллельных, допускает, что постулат о параллельных не осуществляется, и строит логическую систему, предложения которой являются следствиями принятых посылок.

Многие из предложений, которые получил Лобачевский, встречались у Саккери и Ламберта при развитии гипотезы острого угла. Это и понятно, так как гипотеза острого угла Саккери и исходные посылки Лобачевского эквивалентны. Но в то время, как Саккери ставил себе целью показать, что гипотеза острого угла ведет к противоречию и должна быть отвергнута как логически недопустимая, — Лобачевский, развивая систему своих теорем, устанавливает, что эта система представляет собой новую геометрию (он назвал ее “Воображаемой”), которая, как и евклидова, свободна от логических противоречий.

Воображаемую геометрию Лобачевский развил до таких же пределов, до каких была развита геометрия Евклида. При этом Лобачевский не встретил в ней каких-либо логических противоречий. Однако он отлично понимал, что это обстоятельство само по себе не доказывает, что Воображаемая геометрия действительно непротиворечива, так как если противоречия имеются, то заранее нельзя предвидеть, на какой стадии развертывания системы они могут обнаружиться. Чтобы доказать непротиворечивость своей геометрии, Лобачевский предпринял глубокий алгебраический анализ основных ее уравнений и тем самым дал решение этого вопроса в такой мере удовлетворительное, в какой это было возможно для того времени.

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского на современном уровне строгости дано в конце XIX века после установления общих принципов логического обоснования геометрии.

Результаты исследований Лобачевского можно резюмировать следующим образом:

1. *Постулат о параллельных не является необходимым следствием остальных постулатов геометрии* (как говорят, *логически от них не зависит*).

2. V *постулат потому именно не вытекает из остальных постулатов, что наряду с геометрией Евклида, в которой этот постулат верен, возможна другая, “Воображаемая” геометрия, в которой* V *постулат не имеет места.*

Лобачевский был ученым-материалистом. Материалистические взгляды он явно и настойчиво высказывал в своих сочинениях. Он безоговорочно отвергал возможность априорных знаний, в частности, кантианский тезис о том, что наши пространственные представления являются врожденными и не имеют опытного происхождения. “Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, — пишет Лобачевский, — должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами; врожденным — не до́лжно верить” (“О началах геометрии”, 1829).

Лобачевский глубоко и тонко понимал соотношение между геометрией Евклида и своей неевклидовой геометрией: обе геометрии логически непротиворечивы, и поэтому безнадежны всякие попытки логически доказать, что единственно истинной является только первая из них; вопрос же о том, какая из этих геометрий более соответствует свойствам реального пространства, должен быть решен опытом.

"В моем сочинении о началах геометрии, — пишет Лобачевский, — я доказывал, основываясь на некоторых астрономических наблюдениях, что в треугольнике, которого бока почти таковы, как расстояние от Земли до Солнца, сумма углов может разниться от двух прямых не более $0'',0003$ в шестидесятичных секундах градуса. Предположение употребительной Геометрии надобно, следовательно, почитать как бы строго доказанным, а вместе быть убеждену и в том, что независимо от опыта, напрасно было бы искать доказательства на такую истину, которая еще не заключается сама собою в нашем понятии о телах" ("Воображаемая геометрия", 1835).

Лобачевский называл геометрию Евклида "употребительной", а свою — "воображаемой". Это не означает, однако, что он считал свою геометрию замкнутой в себе чисто логической системой. Лобачевский усматривал в ней полезный инструмент для математического анализа и в этом плане написал обширную работу "Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам" (1836). Интересно отметить, что в таблицах определенных интегралов Биеренс де Хаана (печатание которых началось еще при жизни Лобачевского в 1853 г. и закончилось в 1858 г.) содержится свыше 200 интегралов, которые были вычислены и опубликованы Лобачевским*). В настоящее время известны глубокие связи геометрии Лобачевского с разнообразными разделами математики, а также теоретической физикой.

Идеи Лобачевского современным ему геометрам казались парадоксальными и встретили только иронию. Понять и оценить его работы могли очень немногие; среди них должны быть отмечены Гаусс и Я. Больяй, которые занимались теорией параллельных независимо друг от друга и независимо от Лобачевского. Гауссу был ясен замысел новой геометрии, однако он не дал этому замыслу достаточного развития, оставив только наброски отдельных, наиболее элементарных теорем. Он даже не опубликовал свои взгляды на основы геометрии, боясь остаться непонятым. Я. Больяй издал свою работу через три года после первой публикации Лобачевского (не зная о публикации Лобачевского). В своей работе Я. Больяй изложил ту же теорию, что и Лобачевский, но не в столь развитой форме. Как и Лобачевский, Больяй не получил признания и сам нуждался в поддержке.

Ученый мир оценил значение исследований Лобачевского лишь после его смерти. А значение это исключительно.

---

*) Подробнее см. *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений. Т. 3. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951.– С. 413.

До Лобачевского евклидова геометрия представлялась единственно мыслимым учением о пространстве. Открытие воображаемой или, как ее обычно называют, неевклидовой геометрии уничтожило эту точку зрения. Тем самым было положено начало далеко идущим обобщениям взглядов на геометрию и ее предмет, которые привели к современному понятию абстрактного пространства с его многочисленными применениями внутри математики и в смежных с нею областях.

В цепи этих обобщений неевклидова геометрия Лобачевского явилась первым и определяющим звеном.

§ 4. Формирование понятия геометрического пространства

10. Мы знаем, насколько плодотворной для математики была эллинская эпоха. Великие ученые Древней Греции обогатили математическую науку множеством важных фактов и создали также методы их логической систематизации. После греков крупный вклад в развитие математики внесли народы Индии, стран арабского халифата и в особенности (с IX по XV век) народы Средней Азии и Закавказья, разработавшие начала алгебры и плоской тригонометрии. Затем XVI век дал принципиально новый метод решения математических задач применением буквенной символики. Создание символической алгебры действительно явилось событием первостепенной важности, без которого невозможны были бы дальнейшие достижения. Следующие два века — XVII и особенно XVIII — отличались весьма интенсивной работой математический мысли и созданием новых математических теорий. В это время были созданы дифференциальное и интегральное исчисления; построение аналитической геометрии открыло пути применения алгебры и анализа к решению геометрических задач, а также многочисленных задач механики и астрономии.

Однако взгляды на геометрическое пространство и на те понятия, которые лежат в основе геометрии, по существу оставались такими же, какими были у Евклида и геометров его эпохи. Только в результате замечательных успехов XIX века была достигнута та ясность и вместе с нею широта понимания геометрии и геометрических объектов, которые присущи современной математике и существенно отличают ее от математики старых времен.

В XIX веке активно разрабатывались многие геометрические дисциплины. Из них мы отметим три главнейшие: основания геометрии, дифференциальную геометрию и проективную геометрию. Пути, по которым они развивались, сначала были далеки друг от друга; но к концу века эти дисциплины чрезвычайно сблизились, а в некоторых своих частях объединились, и синтез их дал полное и яркое освещение ряда старых проблем геометрии, а также открыл новую проблематику, которая разрабатывается и в наши дни.

Основания геометрии имеют две главные задачи: 1) логическое построение геометрии на основе некоторых немногочисленных положений, называемых аксиомами; 2) исследование логической зависимости между различными геометрическими предложениями.

Как мы знаем, эти задачи берут свое начало у Евклида, знаменитое сочинение которого есть первое из известных нам сочинений по основаниям геометрии.

Исследования, посвященные доказательству V постулата, также должны быть отнесены к основаниям геометрии, поскольку они имели целью установить зависимость V постулата от других геометрических постулатов. Лобачевский, установив независимость V постулата, дал вместе с тем первый фундаментальный результат в этой области. Более того, построением геометрической системы, отличной от системы Евклида, Лобачевский расширил понимание самого смысла геометрии и, следовательно, задач ее обоснования.

Важный в этом отношении результат был получен затем Б. Риманом, который в своей работе "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" (1854 г.), развивая аналитические принципы геометрии, пришел, в частности, к геометрической системе, отличной как от системы Евклида, так и от системы Лобачевского. В геометрии Римана прямая определяется двумя точками, плоскость — тремя, две плоскости пересекаются по прямой и т. д., но через данную точку нельзя провести к прямой ни одной параллельной. В частности, в этой геометрии имеется теорема: сумма углов треугольника больше двух прямых. Мы знаем, что при сохранении всех посылок Евклида без постулата о параллельных, последние два утверждения должны быть отвергнуты как противоречивые (см. *пп*° 5–8). Следовательно, Риман, развивая свою систему, должен был еще сильнее изменить евклидову аксиоматику, чем Лобачевский.

Мы видим, что в середине XIX века основания геометрии получили весьма существенное продвижение. Однако и в это время все еще не была решена задача строго логического построения геометрии.

В конце 60-х годов, когда идеи Лобачевского нашли признание, задача логического построения геометрии стала на очередь дня. Решение ее, в частности, было необходимо для того, чтобы сделать вполне ясными достижения Лобачевского. Действительно, основной результат Лобачевского о независимости V постулата от других постулатов геометрии не только не мог быть строго доказан, но и не мог быть признан точно сформулированным до тех пор, пока неизвестны были все геометрические постулаты.

К концу XIX века было опубликовано много работ по этому вопросу, принадлежащих первоклассным математикам. Из них особую популярность приобрело сочинение Д. Гильберта "Основания геометрии", вышедшее в 1899 г. и заслужившее в 1903 г. международную премию имени Н. И. Лобачевского.

В своей книге Гильберт сообщает полную систему аксиом евклидовой геометрии, т. е. такой список основных предложений, из которых весь остальной материал этой геометрии может быть получен логическими выводами*). Гильберт устанавливает также независимость наиболее существенных аксиом своей системы от других содержащихся в ней аксиом.

Список аксиом Гильберта и анализ их взаимоотношений излагаются в следующих главах нашей книги. Сейчас мы остановимся на той особой точке зрения, с которой в настоящее время рассматриваются основные геометрические понятия и геометрические аксиомы.

В отличие от "Начал" Евклида в современных списках аксиом евклидовой геометрии нет описаний геометрических образов. Предполагается лишь, что существуют три группы предметов, называемых "точками", "прямыми" и "плоскостями", относительно которых соблюдены некоторые вполне определенные условия.

Условия эти следующие:

1. Между предметами, называемыми точками, прямыми и плоскостями, а также между некоторыми множествами этих предметов (отрезками, углами) должны существовать известные отношения, которые обозначаются словами "лежит на...", "между", "конгруэнтны".

2. Указанные отношения должны удовлетворять требованиям перечисленных в дальнейшем аксиом.

Конечно, аксиомы составляются со строгим учетом того эмпирического материала, который накоплен геометрией, и так, чтобы весь этот материал мог быть выведен из них логическими рассуждениями. Но предметы, о которых идет речь в аксиомах, вовсе не обязательно должны иметь какую-либо специальную природу и, скажем, какой-либо определенный внешний вид. Отношения между этими предметами также не обязаны иметь какой-либо специальный характер. И те и другие могут быть выбраны как угодно, с соблюдением только требований аксиом. Такое воззрение на геометрию и геометрические объекты вызывается двумя обстоятельствами:

1. Геометрия оперирует понятиями, возникающими из опыта в результате известной абстракции объектов реального мира, при которой принимаются во внимание лишь некоторые свойства реальных объектов; в строго логических рассуждениях при доказательстве теорем приходится иметь дело только с этими свойствами объектов, — они и должны быть отмечены в аксиомах и определениях; все остальные свойства, которые мы привыкли воображать, когда слышим слова: "точка", "прямая", "плоскость", в логическом построении геометрии никакой роли не играют и не должны в основных положениях геометрии упоминаться.

2. Кроме евклидовой геометрии, теоремы которой соответствуют нашему наглядному представлению о свойствах геометрических образов, существуют другие геометрические системы (Лобачевско-

---

*) Полные списки аксиом евклидовой геометрии составлялись другими авторами и до Гильберта, например, М. Пашем (в 1882 г.). Список Гильберта оказался значительно проще ранее известных.

го, Римана), противоречащие непосредственному пространственному воображению. Поэтому при достаточно общей постановке задачи обоснования геометрии и самое понимание геометрических объектов должно быть настолько общим, чтобы оно было применимо во всех необходимых случаях.

В согласии с тем, что было сейчас изложено, можно сказать, что геометрическое пространство, определенное данной системой аксиом, есть множество предметов, называемых геометрическими элементами, взаимные отношения которых удовлетворяют требованиям аксиом данной системы.

Так, можно говорить о пространстве Евклида как о совокупности элементов, подчиненных требованиям аксиом геометрии Евклида, или о пространстве Лобачевского как о совокупности элементов, подчиненных требованиям аксиом геометрии Лобачевского.

Но и пространство Евклида, например, само по себе может иметь бесконечно много различных форм, в зависимости от того, какие конкретные вещи рассматриваются в качестве его элементов. Например, помимо наших обычных представлений о точках, прямых и плоскостях, мы можем условиться называть "точкой" любой шар заданного диаметра d, "прямой" — любой бесконечный круглый цилиндр того же диаметра d, "плоскостью" — каждый слой пространства между двумя обычными параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии d. Основные отношения между этими предметами мы можем определить следующим образом. Условимся говорить, что "точка", изображенная в виде шара A, л е ж и т на "прямой", которая представляет собой круглый цилиндр a, если шар A вписан в цилиндр a; будем говорить, что "точка", изображенная в виде шара A, лежит на "плоскости", которая представляется в виде пространственного слоя α, если шар A касается двух обыкновенных параллельных плоскостей, которые ограничивают слой α. Будем говорить, что "точка" B лежит на "прямой" a м е ж д у "точками" A и C, если центр шара, который изображает точку B, лежит между центрами шаров, изображающих A и C. Наконец, условимся говорить, что фигура M *равна* или *конгруэнтна* фигуре N, если M может быть наложена на N при помощи некоторого движения (фигуры M и N предполагаются состоящими из "точек", "прямых" и "плоскостей" в том смысле, как мы их сейчас понимаем). Указанные отношения между рассматриваемыми предметами удовлетворяют требованиям аксиом евклидовой геометрии. Поэтому каждая теорема, логически выведенная из этих аксиом, выражает некоторый факт, относящийся к вышеописанным "точкам", "прямым" и "плоскостям". Множество таких "точек", "прямых" и "плоскостей", находящихся в указанных нами взаимных отношениях, представляет собой одну из конкретных форм пространства Евклида.

Выбирая в качестве точек, прямых и плоскостей иные предметы и определяя их взаимные отношения с соблюдением условий аксиом евклидовой геометрии, получим другие конкретные формы пространства Евклида. Каждой конкретной форме пространства Евклида соответствует свое конкретное истолкование евклидовых теорем. Естественно, что различные конкретные истолкования допускает и геометрия Лобачевского, как и всякая другая основанная на аксиомах система (см. *пп*° 49–61, 67, 168–171).

Таким образом, удаляя из геометрии все ссылки на наглядную очевидность и оставляя лишь ее логический каркас, мы получаем возможность заполнять его различным конкретным материалом. Следовательно, при абстрактно-логическом построении геометрии не только не теряется реальная почва, но и расширяется область геометрических приложений.

Теперь чрезвычайно важно отметить еще следующее: тот широкий взгляд на геометрические элементы и геометрические аксиомы, который был выше изложен, открывает возможность и саму систему аксиом избирать с большой степенью произвола, приспособляя этот выбор к той или иной конкретной области, которую желательно подвергнуть исследованию. Таким путем аксиоматический метод переносится из геометрии в другие отделы математики, в механику и в физику и приводит к современным абстрактным пространствам, элементами которых являются множества, функции, преобразования и т. п. В качестве примера приложений общих геометрических идей можно указать пространство Минковского, которое играет важную роль в специальной теории относительности.

Идея абстрактного пространства была подготовлена эволюцией всей математики XIX века. В круге вопросов оснований геометрии эта идея имела прямым источником открытие Лобачевского. Но открытие Лобачевского оказало определяющее влияние на развитие геометрических понятий и через посредство других дисциплин.

Формирование современных взглядов на геометрическое пространство в большой степени определялось развитием дифференциальной геометрии. В мемуаре Гаусса "Общие исследования о кривых поверхностях" (1827 г.) отмечены некоторые особые свойства поверхности, составляющие ее внутреннюю геометрию. Это такие свойства, которые могут быть обнаружены при помощи измерений, производимых на самой поверхности (практическим источником идеи внутренней геометрии поверхности была геодезия).

В 1868 г. появилось сочинение Бельтрами "Опыт истолкования неевклидовой геометрии", в котором автор показал, что планиметрия Лобачевского при известных ограничениях может рассматриваться как внутренняя геометрия некоторой поверхности. Тем самым неевклидова планиметрия наряду с планиметрией Евклида оказалась включенной в совершенно реальную область теории поверхностей.

Пересечение аксиоматических исследований Лобачевского с дифференциально-геометрическими методами Гаусса, хотя бы в двумерных рамках, в большой степени содействовало обобщению геометрических понятий. Впрочем, при том уровне, на каком уже находилась к этому времени математика, применение дифференциально-геометрических методов к исследованию неевклидовой геометрии не могло ограничиваться двумерным случаем. Еще в 1854 г. в указанном выше сочинении Римана "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" были определены пространства, которые представляют собой обобщение и пространства Евклида, и пространства Лобачевского, и пространства той геометрии Римана, которую мы упоминали в начале этого обзора. Эти общие пространства Римана по своим свойствам так же отличаются от евклидова, как произвольная кривая поверхность отличается от плоскости.

Чисто аналитический метод, с которым подходил Риман к геометрическим вопросам, позволил ему обобщить понятие кривизны сразу даже на многомерный случай. Общие пространства Римана оказались полезными для теоретической физики и служат предметом внимательного изучения по сей день.

Примерно в то же время, когда Лобачевский начинал свои исследования о параллельных и когда зарождалась гауссова теория поверхностей, возникла новая математическая дисциплина — проективная геометрия. Оперируя вполне наглядным материалом, проективная геометрия сначала казалась далекой от сложных вопросов аксиоматики. Но в 70-х годах Ф. Клейн дал общее истолкование геометрических систем Евклида, Лобачевского и Римана, основанное на проективной геометрии. (Клейн при этом использовал результаты, ранее полученные математиком Кэли.) Это исследование Клейна находится в тесной связи с установленной им концепцией геометрии как теории инвариантов некоторой группы преобразований. Групповой подход к пониманию сущности геометрии, высказанный Клейном в лекции "Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований", вошедшей в историю науки под названием "Эрлангенской программы" (1872 г.), позволил установить известную классификацию важнейших геометрических систем и изучаемых ими многообразий.

В соответствии с указанными тремя направлениями, по которым развивалось в XIX веке понятие геометрического пространства, расположен материал этой книги.

Главы II, III и IV посвящены вопросам чисто аксиоматического характера.

В главах V и VI изложена проективная геометрия и классификация геометрических систем с точки зрения теории групп. Отчасти к ним примыкает глава VII, посвященная пространству Минковского.

В главах VIII и IX излагаются исследования геометрических систем методами дифференциальной геометрии.

Глава II

АКСИОМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Геометрические элементы

В этой главе изложены аксиомы Гильберта*). Наряду с аксиомами сообщаются главнейшие теоремы, так чтобы общие принципы логического развертывания геометрии оказались в должной мере выясненными.

11. В дальнейшем рассматриваются три различных множества объектов; объекты первого множества называются *точками*, объекты второго множества —*прямыми*, объекты третьего множества — *плоскостями*. Множество всех точек, прямых и плоскостей называется *пространством*.

Точки, прямые и плоскости могут находиться друг к другу в известных отношениях, которые обозначаются словами: "лежат", "между", "конгруэнтны". Эти отношения должны удовлетворять требованиям нижеприводимых аксиом; в остальном природа объектов и отношений между ними может быть какой угодно. Все аксиомы разделяются на пять групп **).

Группа I содержит восемь аксиом связи.

Группа II содержит четыре аксиомы порядка.

Группа III содержит пять аксиом конгруэнтности.

Группа IV содержит две аксиомы непрерывности.

Группа V содержит одну аксиому параллельности.

§ 2. Группа I. Аксиомы связи

12. Мы полагаем, что прямые и плоскости могут находиться в известных сопоставлениях с точками. Если прямая a и точка A сопостав-

---

*) Аксиомы Гильберта даны по седьмому изданию его книги: *D. Hilbert.* Grundlagen der Geometrie. Siebente Auflage. - Leipzig–Berlin. 1930. (*Гильберт Д.* Основания геометрии. - М.–Л.: Гостехиздат, 1948.)

**) В нумерации групп мы несколько уклоняемся от изложения Гильберта, где аксиома параллельности составляет четвертую группу, а аксиомы непрерывности — пятую.

лены друг другу, то мы будем говорить также, что "a проходит через A"; "A лежит на a"; "A есть точка прямой a"; "A принадлежит прямой a"; "прямая a принадлежит точке A". Если с точкой A сопоставлено несколько прямых, то мы будем говорить также, что эти "прямые пересекаются в точке A" или что "прямые имеют общую точку A". Если с прямой a сопоставлены две точки A и B, то мы будем говорить, что "прямая a соединяет точки A и B" или "a проходит через A и B" и т. д. Условия этих сопоставлений выражают аксиомы I.1–I.8.

I.1. *Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, проходящая через каждую из точек A и B.*

I.2. *Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, которая проходит через каждую из точек A, B.*

Предыдущие две аксиомы можно выразить следующими словами: любые две различные точки определяют одну и только одну проходящую через них прямую.

I.3. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

По отношению к точке A и плоскости α, которые сопоставлены друг другу, мы также будем употреблять выражения: "A лежит на α"; "A есть точка плоскости α"; "α проходит через A" и т. п.

I.4. *Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует плоскость α, проходящая через каждую из трех точек A, B, C. На каждой плоскости лежит хотя бы одна точка.*

I.5. *Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, которая проходит через каждую из трех точек A, B, C.*

I.6. *Если две точки A и B прямой a лежат на плоскости α, то каждая точка прямой a лежит на плоскости α.*

В этом случае мы говорим: "прямая a лежит в плоскости α"; "плоскость α проходит через прямую a" и т. д.

I.7. *Если две плоскости α, β имеют общую точку A, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку B.*

I.8. *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

В аксиомах связи речь идет об известных отношениях между элементами геометрии, которые обозначают словами: "точка лежит на прямой", "плоскость проходит через точку" и т. д. Наглядные представления, выражаемые такими словами, ни в какой мере при этом не описываются. В аксиомах I.1–I.8 перечислены лишь определенные обстоятельства, необходимые для вывода последующих теорем.

Требования аксиом I.1 и I.2 были высказаны еще Евклидом в его первом постулате и IX аксиоме. Необходимость аксиомы I.3 и большинства дальнейших аксиом этой группы Евклид едва ли мог заметить.

Понятно, что геометр, который оставляет в своих рассуждениях хоть небольшое место для пространственной интуиции, не станет постулировать, что на прямой существуют две точки или что существуют три точки, не лежащие на одной прямой, и т. д. Его наглядному представлению скорее должно было бы соответствовать требование, что на прямой существует бесконечно много точек. Такое обстоятельство, однако, не нужно относить к аксиомам, так как оно в дальнейшем доказывается. В этом сказывается желание соблюдать минимальность требований аксиом.

С помощью аксиом I.1–I.8 могут быть уже доказаны некоторые теоремы, например:

Теорема 1. *Две прямые имеют не более одной общей точки; две плоскости либо не имеют совсем общих точек, либо имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих двух плоскостей; плоскость и не лежащая на ней прямая имеют не более одной общей точки.*

Доказательство первого утверждения вытекает из аксиомы I.2.

Доказательство второго утверждения. Пусть две плоскости α и β имеют общую точку A. По аксиоме I.7 существует еще одна общая точка B плоскостей α и β. Прямая a, которая соединяет точки A и B, согласно аксиоме I.6 состоит из общих точек плоскостей α и β. Но прямая a, кроме того, содержит все общие точки плоскостей α и β. В самом деле, пусть плоскости α и β имеют еще общую точку C, не принадлежащую прямой a. Из аксиомы I.5 тогда следует, что плоскости α и β не могут быть различными, так как они имеют три общие точки, не лежащие на одной прямой.

Доказательство третьего утверждения вытекает из аксиомы I.6.

Теорема 2. *Через прямую и не лежащую на ней точку, так же как через две прямые с общей точкой, проходит одна и только одна плоскость.*

Доказательство. Пусть даны прямая a и точка A вне этой прямой. По аксиоме I.3 на прямой a существуют две точки: B и C. Из условия и аксиомы I.2 следует, что точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме I.4 существует плоскость α, проходящая через точки A, B, C. По аксиоме I.6 плоскость α проходит через прямую a. Другой плоскости, проходящей через A и a, нет; в самом деле, если существует еще плоскость α', проходящая через A и a, то две различные плоскости α и α' проходят через A, B, C, что противоречит аксиоме I.5.

Теорема 3. *Каждая плоскость содержит по крайней мере три точки.*

Доказательство. Пусть дана плоскость α. По аксиоме I.4 плоскость α содержит некоторую точку A. По аксиоме I.8 существует точка B, не лежащая в плоскости α. Согласно аксиоме I.3 имеется еще точка C, не лежащая на прямой AB. Плоскость ABC и плоскость α

имеют общую точку A; из аксиомы I.7 следует, что эти плоскости имеют еще общую точку D. Таким образом, в плоскости α, кроме точки A, необходимо содержится вторая точка D. По аксиоме I.8 существует точка E, не лежащая в плоскости ABD. По аксиоме I.4 существует плоскость ABE, и эта плоскость отлична от ABD. Снова используя аксиому I.7, заключаем, что плоскости ABE и α имеют общую точку F (притом в силу аксиомы I.6 не лежащую на прямой AB). Так как D и F не принадлежат прямой AB, то согласно второму утверждению теоремы 1 эти точки не могут быть общими точками плоскостей ABD и ABF; отсюда следует, что D и F различны. Таким образом, в плоскости α существуют три точки: A, D и F.

Мы подробно провели эти доказательства, чтобы читатель уяснил себе, как ведется логическое развертывание элементарной геометрии на основе принятых аксиом. В рассуждениях совершенно исключены обращения к чертежу и наглядной очевидности, каждое утверждение обосновывается ссылкой на аксиомы или ранее доказанные теоремы.

Следует заметить, что с помощью одних только аксиом I.1–I.8 могут быть доказаны весьма немногие геометрические факты. В частности, из этих аксиом еще не следует, что множество геометрических элементов бесконечно (подробнее об этом см. n° 70).

§ 3. Группа II. Аксиомы порядка

13. Мы полагаем, что точка на прямой может находиться в известном отношении к двум другим точкам той же прямой, и будем обозначать это отношение словами: “лежит между”. При этом должны быть удовлетворены требования следующих аксиом.

II.1. *Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B и C различные точки одной прямой и B лежит также между C и A.*

II.2. *Каковы бы ни были точки A и C, существует по крайней мере одна точка B на прямой AC такая, что C лежит между A и B.*

II.3. *Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.*

Аксиомы II.1–II.3 называются *линейными аксиомами порядка.*

Определение 1. Пару точек A и B назовем *отрезком* и будем обозначать AB или BA. Точки, лежащие между A и B, назовем *внутренними точками* или просто *точками отрезка AB*, точки A и B — *концами отрезка.* Все остальные точки прямой AB будем называть *внешними к отрезку AB.*

Замечание. В аксиомах II.1–II.3 не утверждается, что между точками A и B существуют другие точки; таким образом, из этих аксиом непосредственно еще не видно, что каждый отрезок имеет внутренние точки. Но из аксиомы II.2 следует, что каждый отрезок имеет внешние точки.

Кроме линейных аксиом порядка II.1–II.3, в группе II содержится еще следующая аксиома, относящаяся к расположению геометрических элементов на плоскости.

II.4 (аксиома Паша). *Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — некоторая прямая в плоскости ABC, не содержащая ни одной из точек A, B, C. Тогда если прямая a проходит через точку отрезка AB, то она проходит также либо через точку отрезка AC, либо через точку отрезка BC.*

§ 4. Следствия из аксиом связи и порядка

14. С помощью аксиом связи и порядка могут быть доказаны многие важные факты геометрии.

Прежде всего мы приведем две теоремы, которые естественно дополняют утверждения аксиом II.1–II.3.

Теорема 4. *Каковы бы ни были точки A и C, существует по крайней мере одна точка D на прямой AC, лежащая между A и C.*

Доказательство. По аксиоме I.3 существует точка E вне прямой AC, по аксиоме II.2 на прямой AE существует точка F такая, что E является точкой отрезка AF (рис. 13). По той же аксиоме II.2 на прямой FC имеется точка G такая, что C лежит между F и G. Из аксиомы II.3 тогда следует, что G не лежит между F и C, т. е. не лежит на отрезке FC. Согласно аксиоме Паша II.4, прямая EG должна пересечь отрезок AC или отрезок FC. Но прямая EG не может пересечь отрезок FC, ибо тогда из аксиом связи I.1 и I.2 легко следовало бы, что все рассмотренные точки лежат на одной прямой, тогда как уже точки A, C и E не лежат на одной прямой. Следовательно, прямая EG пересекает отрезок AC в некоторой точке D. Тем самым доказано существование точки D между точками A и C.

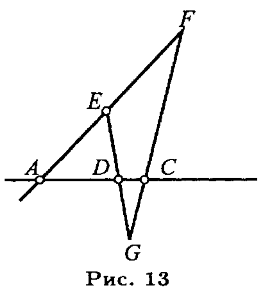


Рис. 13

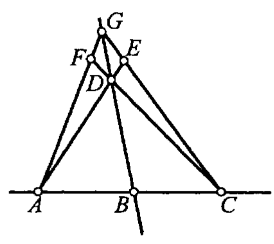


Рис. 14

Теорема 5. *Среди любых точек A, B, C одной прямой всегда существует одна, лежащая между двумя другими.*

Доказательство. Пусть A не лежит между B и C и C не лежит между A и B. Как следует из аксиомы I.3, существует точка D, не лежащая на прямой AC. Соединим прямою эту точку с точкой B (рис. 14); согласно аксиоме II.2 на прямой BD существует такая точка G, что D лежит между B и G. Применяя аксиому II.4 (Паша) к треугольнику BCG и прямой AD, находим, что прямая AD и CG пересекаются в некоторой точке E, лежащей между C и G. Таким же путем установим, что прямые CD и AG пересекаются в некоторой точке F между A и G. Снова применяя аксиому Паша II.4 к треугольнику AEG и прямой CF, находим, что D лежит между A и E, и из той же аксиомы в применении к треугольнику AEC и прямой BG получаем, наконец, что B лежит между A и C (поскольку G не лежит между E и C).

Аксиомы II.2 в соединении теоремой 4 и аксиома II.3 в соединении с теоремой 5 позволяют формулировать следующие две теоремы:

А) *Каковы бы ни были две точки A и C, существуют точки, лежащие внутри отрезка AC, и точки, лежащие на прямой AC вне этого отрезка.*

Б) *Из трех точек прямой всегда одна и только одна лежит между двумя другими.*

Теперь мы можем дать важное дополнение аксиомы Паша, которое сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5а. *Если точки A, B, C не лежат на одной прямой и если некоторая прямая a пересекает какие-либо два из трех отрезков AB, BC, AC, то она не пересекает третий из этих отрезков*).*

Проведем доказательство методом “от противного”. Предположим, что прямая a пересекает каждый из отрезков AB, BC, AC соответственно в точках P, Q, R, и сведем это предположение к противоречию. Прежде всего, ясно, что точка B не лежит на прямой PQ (иначе все точки A, B, C лежали бы на прямой PQ).

Далее заключаем, что точка R находится вне отрезка PQ, так как в противном случае прямая AC, пересекая сторону PQ треугольника PQB, должна была бы, по аксиоме Паша, пересечь его сторону BQ, т.е. точка C должна была бы находиться между B и Q вопреки предположению (по предположению Q лежит между B и C, а так как из трех точек только одна лежит между двумя другими, то это исключает возможность расположения C между B и Q). Совершенно так же докажем, что P лежит вне отрезка QR и Q лежит вне отрезка PR. Получается противоречие с теоремой Б. Тем самым данная теорема доказана.

Для дальнейшего будут нужны две леммы.

Лемма 1. *Если B лежит на отрезке AC и C — на отрезке BD, то B и C лежат на отрезке AD.*

Доказательство. Основываясь на аксиомах I.3 и II.2, выберем точку E, не лежащую на прямой AB, а на прямой EC — такую

*) Когда мы говорим, что прямая пересекает отрезок, то подразумеваем, что она содержит некоторую его внутреннюю точку.

точку F, что E лежит между C и F (рис. 15). Так как B лежит на отрезке AC, то, применяя к треугольнику AEC и прямой FB аксиому II.4, заключаем, что прямая FB должна пересечь либо отрезок AE, либо отрезок EC. Так как точка E лежит между F и C, то по аксиоме II.3 точка F не может лежать между E и C. Следовательно, прямая FB должна пересечь отрезок AE. Применяя аксиому II.4 к треугольнику FBC и прямой AE и снова используя аксиому II.3, найдем, что точка пересечения отрезка AE и прямой FB лежит между точками F и B. Обозначим эту точку пересечения буквой G. Аналогично доказывается (путем применения аксиомы II.4 к треугольнику GBD и к прямой CF с последующим использованием аксиомы II.3), что прямая CF встречает отрезок GD в некоторой точке H. Так как при этом H лежит на отрезке GD, а E, по аксиоме II.3, не принадлежит отрезку AG, то согласно аксиоме II.4 прямая EH имеет общую точку с отрезком AD, т. е. C лежит на отрезке AD. Совершенно аналогично можно доказать, что и B принадлежит этому отрезку.

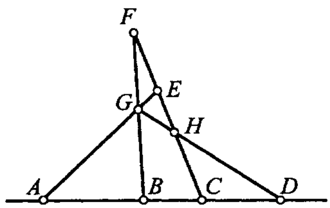


Рис. 15

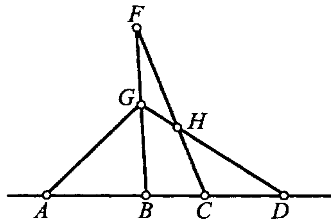


Рис. 16

Лемма 2. *Если C лежит на отрезке AD и B — на отрезке AC, то B лежит также на отрезке AD и C — на отрезке BD.*

Доказательство. Выберем вне прямой AB точку G и потом выберем точку F так, чтобы G находилась на отрезке BF (рис. 16). Вследствие аксиом I.2 и II.3 прямая CF не имеет общих точек ни с отрезком AB, ни с отрезком BG, а тогда, согласно аксиоме II.4, она не имеет общих точек также и с отрезком AG. Но так как C лежит на отрезке AD, то согласно аксиоме II.4 применительно к треугольнику AGD прямая CF должна встретить отрезок GD в некоторой точке H. Отсюда и снова из аксиомы II.4 применительно к треугольнику BGD следует, что прямая FH пересекает отрезок BD. Таким образом, C лежит на отрезке BD.

Первое утверждение леммы 2 вытекает тогда из леммы 1.

Теперь легко доказать следующую важную теорему.

Теорема 6. *Между любыми двумя точками прямой существует бесконечное множество других ее точек.*

Доказательство. Пусть A, B — две точки прямой a. Согласно теореме 4 между A и B существует точка C; по той же теореме, между A и C существует точка D. В силу леммы 2 точка D лежит также между A и B и, следовательно, A, B, C, D — различные точки прямой a. Аналогично можно утверждать, что между A и D лежит точка E и что эта точка лежит также между A и C и между A и B, следовательно, точки A, B, C, D, E различны.

Повторяя то же рассуждение, установим, что между A и B находится бесконечное множество точек C, D, E, $\ldots$, и тем самым докажем теорему.

Заметим, что из лемм 1 и 2 вытекает следующее предложение.

Пусть каждая из точек C и D лежит между точками A и B. Тогда если точка M лежит между C и D, то M лежит между A и B.

В самом деле, согласно теореме Б (стр. 44) из трех точек A, C, D одна и только одна лежит между двумя другими. Но A не может лежать между C и D, так как это противоречило бы лемме 1. Допустим для определенности, что C лежит между A и D (в противном случае переменим обозначения точек C и D). Тогда расположение точек D, M, C, A удовлетворяет тем же условиям, каким удовлетворяет расположение точек A, B, C, D в формулировке леммы 2. Поэтому согласно этой лемме точка M лежит между A и D. Теперь мы можем утверждать, что и расположение точек A, M, D, B удовлетворяет тем же условиям, каким удовлетворяет расположение точек A, B, C, D в лемме 2. Вследствие этой леммы M лежит между A и B, что и нужно было установить.

Таким образом доказана следующая

Теорема 7. *Если точки C и D лежат между точками A и B, то все точки отрезка CD принадлежат отрезку AB.*

Определение 2. В этом случае говорят, что *отрезок CD лежит внутри отрезка AB.*

Из леммы 2 непосредственно вытекает

Теорема 8. *Если точка C лежит между точками A и B, то все точки отрезка AC принадлежат отрезку AB.*

Точно так же из леммы 2 (с учетом аксиомы II.3) легко выводится ("от противного")

Теорема 8а. *Если точка C лежит между точками A и B, то никакая точка отрезка AC не может быть точкой отрезка CB.*

Несколько сложнее доказывается

Теорема 8б. *Если точка C лежит между точками A и B, то каждая точка отрезка AB, отличная от C, принадлежит либо отрезку AC, либо отрезку CB.*

Доказательство. Пусть точка M принадлежит отрезку AB и не совпадает с C. Предположим, что точка M не принадлежит ни отрезку AC, ни отрезку CB. Тогда либо C лежит между A и M, либо A лежит между C и M. Если C лежит между A и M, то, поскольку M лежит между A и B, на основании второго утверждения леммы 2 заключаем, что M лежит между C и B вопреки предположению. Если A лежит между C и M, то, поскольку C лежит между A и B, на основании леммы 1 заключаем, что A лежит между M

и B; следовательно, M не может лежать между A и B. Мы снова приходим к противоречию с предположением. Тем самым теорема доказана методом "от противного".

На основании теорем 8, 8а и 8б можно утверждать, что множество внутренних точек отрезка AB, не считая точки C, представляет собой сумму множества внутренних точек отрезка AC и множества внутренних точек отрезка CB, причем эти последние множества общих точек не имеют.

Определение 3. Пусть O — некоторая точка прямой a, A и B — две другие различные точки этой прямой. Если точка O не лежит между A и B, то мы будем говорить, что точки A и B расположены на прямой *a с одной и той же стороны от точки O*. Если точка O лежит между A и B, то будем говорить, что точки A и B расположены на прямой *a по разные стороны от точки O*.

Теорема 9. *Точка O прямой a разделяет все остальные точки этой прямой на два не пустых класса так, что любые две точки прямой a, принадлежащие одному классу, лежат с одной стороны от точки O, а две точки, принадлежащие разным классам, лежат по разные стороны от точки O.*

Чтобы установить справедливость этого утверждения, следует взять на прямой a произвольную точку A, отличную от O, и отнести в один класс все точки, которые с точкой A лежат по одну сторону от точки O, а во второй класс — все точки, которые лежат с точкой A по разные стороны от точки O. После этого нужно доказать что 1) каждый класс не пуст; 2) каждая точка прямой, кроме точки O, попадет в один и только в один класс; 3) если M и N — точки одного класса, то точка O не принадлежит отрезку MN; 4) если M и N — точки разных классов, то точка O принадлежит отрезку MN.

Доказательства без труда получаются с помощью теорем 8, 8а и 8б.

Определение 4. Мы говорим, что точка O прямой a вместе с некоторой другой точкой A этой же прямой определяет на ней *полупрямую* или *луч* OA; точки, лежащие с той же стороны от O, что и A, называются *точками полупрямой* OA, точка O — *началом полупрямой* OA.

Если A' — точка полупрямой OA, то полупрямые OA и OA' тождественны в том смысле, что каждая точка полупрямой OA' является вместе с тем точкой полупрямой OA, и обратно.

Из теоремы 9 следует, что, какова бы ни была точка O прямой a, она определяет на a точно две полупрямые с общим началом в O.

Все изложенное позволяет рассматривать множество точек каждой прямой как множество, определенным образом упорядоченное.

Как известно, множество называется упорядоченным, если в нем определены понятия "предшествовать" и "следовать за", так что из любых двух его различных элементов x и y один определенный предшествует другому; тогда говорят, что второй за ним следует. При этом должно быть выполнено условие транзитивности: если x, y, z — три элемента и x предшествует y, а y предшествует z, то x предшествует z.

Множество вещественных чисел, например, можно упорядочить "по величине", полагая, что число a предшествует числу b в том и только в том случае, когда $a < b$.

Пусть a — произвольная прямая и O — точка на прямой a. Рассмотрим одну из двух полупрямых с общим началом в точке O. Будем говорить, что точка A предшествует на этой полупрямой точке B, если точка A принадлежит отрезку OB.

Из леммы 2 тотчас следует, что если A предшествует B, а B предшествует C, то A предшествует C. Тем самым точки каждой полупрямой оказываются определенным образом упорядоченными.

Условимся теперь одну из двух полупрямых с общим началом в точке O называть *первой* и определим порядок точек на всей прямой a следующими условиями:

1) Пусть A и B две точки первой полупрямой, тогда A предшествует B на прямой a, если B предшествует A на первой полупрямой.

2) Все точки первой полупрямой предшествуют на прямой a точке O.

3) Все точки первой полупрямой предшествуют на прямой a точкам второй полупрямой.

4) Точка O предшествует на прямой a точкам второй полупрямой.

5) Пусть A и B — две точки второй полупрямой, тогда A предшествует B на прямой a, если A предшествует B на второй полупрямой.

Каковы бы ни были две точки прямой a, условия 1–5 определяют одну из них как предшествующую другой.

Условия транзитивности при этом будут выполнены.

В самом деле, пусть на прямой a даны три точки A, B, C, причем в смысле, установленном условиями 1–5, точка A предшествует точке B, а точка B предшествует точке C. Покажем, что эти же условия определяют точку A как предшествующую точке C.

Если все три точки лежат на одной из двух полупрямых с общим началом в точке O, то как уже было замечено выше, указанный характер расположения точек A и C обеспечивается леммой 2.

Если точка A лежит на первой полупрямой, а B — на второй (или совпадает с точкой O), то C непременно будет точкой второй полупрямой (иначе получилось бы противоречие с условием 3 или 2). В таком случае A предшествует C согласно условию 3.

Если точки A и B лежат на первой полупрямой, а C — на второй или совпадает с точкой O, то A предшествует C в силу условия 3 или 2.

Все другие предположения о расположении точек A, B, C будут противоречить условиям 1–5.

Тем самым свойство транзитивности доказано.

Если мы поменяем ролями первую и вторую полупрямые и опять реализуем условия 1–5, то получим новый порядок точек на прямой a, являющийся *обратным* первоначальному, т. е. если точка A предшествует точке B в первом порядке, то B предшествует A во втором.

Пусть O' — точка прямой a, отличная от точки O. Выбрав одну из двух полупрямых с общим началом в точке O' в качестве первой, мы можем согласно условиям 1–5 снова установить некоторый порядок точек прямой a. *Этот порядок будет совпадать с одним из двух, полученных нами ранее, исходя из выбора точки* O (доказательство опускаем). Таким образом, независимо от выбора точки O условия 1–5 вполне определяют два возможных, обратных друг другу, порядка расположения точек на прямой a.

Мы будем говорить, что выбирая один из этих порядков, мы определяем на прямой *направление*.

Из определения порядка точек на прямой легко усматривается следующее предложение: *если точка B лежит между A и C, то или A предшествует B и B предшествует C, или C предшествует B и B предшествует A, обратно, если A предшествует B и B предшествует C или если C предшествует B и B предшествует A, то B лежит между A и C.*

Иначе говоря, порядок точек на прямой устанавливается таким образом, что расположение точки B между A и C в смысле этого порядка равносильно расположению точки B между A и C в том первоначальном смысле, который установлен в n° 13.

15. Предыдущие предложения относились к расположению точек на прямой. Теперь мы укажем ряд предложений, характеризующих особенности расположения точек на плоскости и в пространстве.

Теорема 10. *Каждая прямая a, расположенная в плоскости α, разделяет не лежащие на ней точки этой плоскости на два не пустых класса так, что любые две точки A и B из разных классов определяют отрезок AB, содержащий точку прямой a, а любые две точки A и A' из одного класса определяют отрезок AA', внутри которого не лежит ни одна точка прямой a.*

Доказательство. Возьмем в плоскости α произвольную точку P, не лежащую на прямой a, и отнесем в первый класс каждую точку A плоскости, не расположенную на прямой a и такую, что отрезок PA не содержит точек прямой a; кроме того, в первый класс отнесем и саму точку P (рис. 17). Во второй класс отнесем каждую точку B, не лежащую на a и такую, что отрезок PB содержит точку прямой a. Тогда

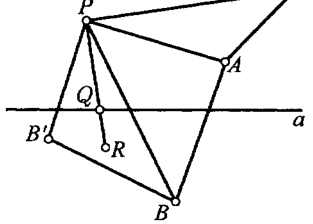


Рис. 17

1) Каждый класс не пуст. В самом деле, если Q — какая-нибудь точка прямой a, то, согласно аксиоме II.2, на прямой PQ найдется такая точка R, что Q лежит между P и R; следовательно, R войдет во второй класс. с другой стороны, первый класс содержит, например, точку P.

2) Всякая точка плоскости α (за исключением точек прямой a) попадает в один и только один класс. Действительно, внутри любого отрезка либо содержится, либо не содержится точка прямой a.

3) Каждые две точки A и A' первого класса определяют отрезок AA', внутри которого не содержится ни одной точки прямой a. Действительно, если отрезок AA' содержит точку прямой a, то при условии, что P, A, A' не лежат на одной прямой, по аксиоме Паша II.4 один из двух отрезков PA или PA' должен содержать точку прямой a, вопреки условию; если P, A, A' лежат на прямой, то к аналогичному заключению мы придем на основании теоремы Б и теоремы 8 в случае, когда P не принадлежит отрезку AA', или на основании теоремы 8б в случае, когда P принадлежит отрезку AA'.

4) Каждые две точки B и B' второго класса определяют отрезок BB', внутри которого не содержится ни одной точки прямой a.

Доказательство вытекает из теоремы 5а в том случае, когда P, B, B' не лежат на одной прямой, и из теоремы Б и теоремы 8а в том случае, когда P, B, B' лежат на одной прямой.

5) Каждые две точки A и B из разных классов определяют отрезок AB, внутри которого содержится некоторая точка прямой a.

В самом деле, по условию отрезок PB содержит точку прямой a. Если P, A, B не лежат на одной прямой, то по аксиоме Паша либо PA, либо AB содержит точку прямой a; но для отрезка PA это исключено условием, следовательно, отрезок AB содержит точку прямой a.

Если же P, A, B расположены на одной прямой, то к тому же заключению мы придем на основании теоремы Б и теорем 8 и 8б.

Замечание. Легко показать, что 1) каждый класс содержит бесконечно много точек (для доказательства можно использовать теорему 6); 2) если P' — любая точка первого класса и если все точки плоскости снова распределить на два класса аналогично предыдущему, но заменив точку P точкой P', получим те же классы, что и раньше; 3) если заменить точку P какой-нибудь точкой второго класса, то это приведет только к изменению нумерации классов.

Определение 5. Употребляя обозначения формулировки теоремы 10, мы будем говорить, что точки A и A' лежат в плоскости α *по одну сторону от прямой a*, а точки A и B лежат в плоскости α *по разные стороны от прямой a*.

Теорема 11. *Каждая плоскость α разделяет не лежащие на ней точки пространства на два не пустых класса так, что любые две точки A и B из разных классов определяют отрезок AB, внутри которого лежит точка плоскости α, а любые две точки A и A' из одного класса определяют отрезок AA', не содержащий никакой точки плоскости α.*

Определение 6. *Мы говорим, что точки A и A' лежат в пространстве по одну сторону от плоскости α, а точки A и B — по разные стороны от плоскости α.*

Доказательство теоремы 11 мы не приводим; заметим только, что хотя эта теорема относится к пространственной геометрии, для ее доказательства не требуется новых аксиом порядка, кроме уже введенных аксиом II.1–II.4, относящихся к точкам на прямой и на плоскости.

Аксиомы второй группы дают обоснование важнейшим понятиям о порядке точек на прямой, о расположении "по одну или по разные стороны" и т. д. Из них основным является понятие, выражаемое словами: "лежит между", все остальные от него производятся.

С помощью аксиом II.1–II.4 естественно определяются ломаная, треугольник, вообще многоугольник; доказывается предложение о разделении плоскости простым многоугольником на две области; но из этих аксиом не следует еще, например, что множество элементов геометрии несчетно (по этому поводу см. главу IV, n° 72).

§ 5. Группа III. Аксиомы конгруэнтности

16. Мы полагаем, что отрезок может находиться в известном отношении к другому отрезку (или к самому себе), и будем это отношение обозначать словом "конгруэнтен" или словом "равен". Отношение конгруэнтности должно удовлетворять требованиям следующих аксиом.

III.1. *Если A, B — две точки на прямой a и A' — точка на той же прямой или на другой прямой a', то всегда можно найти по данную от точки A' сторону прямой a' одну и только одну такую точку B', что отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$.*

Это отношение между отрезками AB и $A'B'$ обозначается так:

$$AB \equiv A'B'.$$

Для каждого отрезка AB требуется конгруэнтность

$$AB \equiv BA.$$

Первая часть этой аксиомы короче выражается так: *каждый отрезок может быть однозначно отложен на любой прямой по любую данную сторону от любой ее данной точки* (рис. 18).

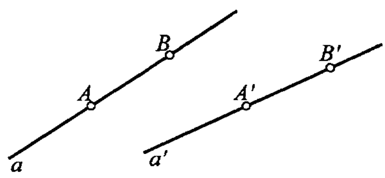


Рис. 18

III.2. *Если отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB, то $A'B'$ конгруэнтен отрезку $A''B''$*, т. е. если

$$A'B' \equiv AB \quad \text{и} \quad A''B'' \equiv AB,$$

то также $A'B' \equiv A''B''$.

Из аксиом III.1 и III.2 следует, что *если $AB \equiv A'B'$, то $AB \equiv B'A'$*. В самом деле, из двух соотношений:

$$AB \equiv A'B', \quad B'A' \equiv A'B',$$

(второе обеспечено аксиомой III.1) на основании аксиомы III.2 заключаем, что $AB \equiv B'A'$.

Отсюда и из аксиомы III.1 выводим

Следствие. *Каждый отрезок конгруэнтен самому себе*, то есть,

$$AB \equiv AB, \quad AB \equiv BA.$$

Действительно, соотношение $AB \equiv BA$ потребовано аксиомой III.1, а на основании предыдущего из $AB \equiv BA$ следует $AB \equiv AB$.

Далее мы можем установить предложение: *если* $AB \equiv A'B'$, то $A'B' \equiv AB$, т. е. *отношение конгруэнтности отрезков симметрично.*

В самом деле, мы имеем: $A'B' \equiv A'B'$; если дано $AB \equiv A'B'$, то из этих двух соотношений и из аксиомы III.2 вытекает конгруэнтность $A'B' \equiv AB$.

Докажем, наконец, что *если*

$$AB \equiv A'B' \text{ и } A'B' \equiv A''B'',$$

то также

$$AB \equiv A''B'',$$

т.е. отношение конгруэнтности отрезков обладает свойством транзитивности.

Для доказательства достаточно заметить, что на основании предыдущего из двух соотношений $AB \equiv A'B'$, $A'B' \equiv A''B''$ следуют соотношения

$$AB \equiv A'B', \quad A''B'' \equiv A'B',$$

после чего конгруэнтность $AB \equiv A''B''$ обеспечивается аксиомой III.2.

Итак, аксиомы III.1 и III.2 позволяют установить, что: 1) каждый отрезок конгруэнтен самому себе, 2) в отношениях конгруэнтности отрезков порядок определяющих их точек безразличен *), 3) отношение конгруэнтности отрезков симметрично и транзитивно.

Для более содержательных выводов требуются новые аксиомы.

III.3. *Пусть AB и BC — два отрезка на прямой a, не имеющие общих внутренних точек, и пусть, далее, $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка на той же или на другой прямой a', тоже не имеющие общих точек. Если при этом*

$$AB \equiv A'B' \text{ и } BC \equiv B'C',$$

то

$$AC \equiv A'C'$$

(рис. 19).

Определение 7. Пара полупрямых h, k, выходящих из одной и той же точки O и не принадлежащих одной прямой, называется *углом.* Для обозначения угла употребляются знаки $\angle(h,k)$ и $\angle(k,h)$.

---

*) Это означает, что из соотношения $AB \equiv A'B'$ следуют соотношения $AB \equiv B'A'$, $BA \equiv A'B'$ и $BA \equiv B'A'$. Первое из них доказано выше, два последних легко выводятся на основании симметричности и транзитивности отношения конгруэнтности отрезков.

Если A и B — точки полупрямых h и k, то мы будем также употреблять следующее обозначение угла: $\angle AOB$.

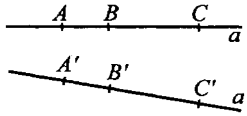


Рис. 19

Полупрямые h и k называются *сторонами* угла, точка O — *вершиной.*

Пусть h' — полупрямая, дополняющая h до прямой, и k' — полупрямая, дополняющая k до прямой. Точки плоскости, лежащие по ту же сторону от прямой h, h', что и точки полупрямой k, и по ту же сторону от прямой k, k', что и точки полупрямой h, называются *внутренними точками* $\angle(h,k)$, а совокупность всех таких точек — внутренней областью угла. Все остальные точки плоскости, содержащей угол, за исключением точки O и точек полупрямых h и k, называются *внешними* точками угла, а совокупность всех таких точек — *внешней областью угла* (на рис. 20 внутренняя область $\angle(h,k)$ показана двойной штриховкой).

Отметим следующую теорему.

Теорема 11а. *Если A и B — точки на разных сторонах угла, то всякая полупрямая, проходящая внутри угла через его вершину, пересекает отрезок AB и, обратно, всякая полупрямая, соединяющая вершину с одной из точек отрезка AB, расположена внутри угла.*

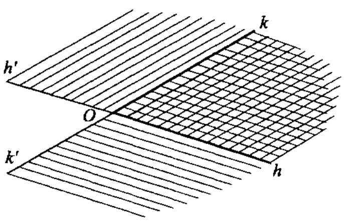


Рис. 20

Доказательство первой части теоремы. Пусть $\angle(h,k)$ — данный угол (на стороне h лежит точка A), l — полупрямая, выходящая из вершины во внутреннюю область. Возьмем на полупрямой h', дополняющей полупрямую h, произвольную точку C и рассмотрим треугольник ABC. Обозначим через l' дополнение полупрямой l, через l^* — прямую, составленную полупрямыми l и l'. По аксиоме II.4 прямая l^* должна пересечь либо CB, либо AB. Но прямая l^* не имеет точек внутри $\angle(h',k')$, следовательно, она пересекает именно AB.

Далее, полупрямая l' не имеет точек внутри $\angle(h,k)$, следовательно, отрезок AB пересекает полупрямая l. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части проводится при помощи тривиальных рассуждений.

Теперь мы вводим последнее основное понятие: конгруэнтность углов. Мы полагаем, что угол может находиться в известном отношении к другому углу (или к самому себе), и будем обозначать это отношение словом “конгруэнтен” или словом “равен”.

III.4. *Пусть даны $\angle(h,k)$на плоскости α, прямая a' на этой же или какой-нибудь другой плоскости α', и задана определенная сторона плоскости α' относительно прямой a'.*

Пусть h' — луч прямой a', исходящий из точки O'. Тогда на плоскости α' существует один и только один луч k' такой, что $\angle(h,k)$ конгруэнтен $\angle(h',k')$ и при этом все внутренние точки $\angle(h',k')$ лежат по заданную сторону от a'. Для конгруэнтности углов употребляется обозначение

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k').$$

Если $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$, то $\angle(k,h) \equiv \angle(k',h')$. Каждый угол конгруэнтен самому себе, т. е.

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k) \text{ и } \angle(h,k) \equiv \angle(k,h).$$

Первая часть этой аксиомы короче выражается так: *каждый угол может быть однозначно отложен в данной плоскости по данную сторону при данном луче* (рис. 21).

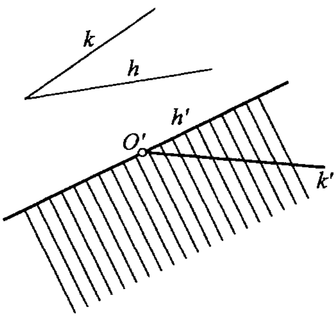


Рис. 21

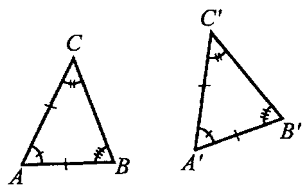


Рис. 22

III.5. *Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' — тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{и} \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \text{ и } \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

(рис. 22).

Сопоставляя аксиомы группы III, отметим, что аксиомы III.1–III.3 касаются лишь отрезков, аксиома III.4 относится к конгруэнтности углов, а аксиома III.5 связывает конгруэнтность отрезков и конгруэнтность углов.

§ 6. Следствия из аксиом I–III

17. Мы видели, что конгруэнтность отрезков есть свойство взаимное: если отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$ то и отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку AB. Поэтому AB и $A'B'$ называются *взаимно конгруэнтными.*

Пусть на прямой a дана система точек A, B, $C, \ldots, K$, L и на прямой a' — система точек A', B', $C', \ldots, K'$, L'; если отрезки AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC и $B'C', \ldots, KL$ и $K'L'$ взаимно конгруэнтны, то обе системы называются взаимно конгруэнтными.

Имеет место следующая

Теорема 12. *Если в двух конгруэнтных системах A, B, C, $\ldots$, K, L и A',B', $C', \ldots, K'$, L' точки первой расположены так, что B лежит между A с одной стороны и C, $D, \ldots, K$, L с другой, C — между A и B с одной стороны и $D, \ldots, K$,L с другой и т. д., то и точки A',B',$C', \ldots, K'$,L' расположены аналогично, т. е. B' лежит между A' с одной стороны и C',$D', \ldots, K'$,L' с другой и т. д.*

Короче можно сказать: *при конгруэнтном перенесении системы точек с одной прямой на другую порядок расположения точек сохраняется.*

Не останавливаясь на доказательстве теоремы 12, перейдем к следующей теореме, которая будет существенно использоваться в дальнейшем.

Теорема 13. *Пусть даны три точки A, B, C на прямой a и три точки A', B',C' на прямой a'. Пусть, далее, $A\ B \equiv A'\ B'$ и $AC \equiv A'\ C'$. Тогда, если B лежит между A и C, а B' на прямой a' лежит с той же стороны от точки A', что и C', то B' лежит между A' и C'.*

В отличие от теоремы 12 здесь заранее не предполагается конгруэнтность $BC \equiv B'C'$.

Доказательство может быть непосредственно получено из аксиом III.1 и III.3. В самом деле, по аксиоме III.1 на прямой a' существует такая точка C^*, что B' лежит между A' и C^* и $B'C^* \equiv BC$. По аксиоме III.3 тогда должно быть $AC \equiv A'C^*$. Таким образом, $AC \equiv A'C'$ и $AC \equiv A'C^*$. Но так как точки C' и C^* лежат по одну сторону от точки A', то вследствие аксиомы III.1 точки C' и C^* совпадают. Следовательно, B' лежит между A' и C'.

Определение 8. Треугольник ABC называется *конгруэнтным* треугольнику $A'B'C'$, если

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$
$$\angle A \equiv \angle A', \quad \angle B \equiv \angle B', \quad \angle C \equiv \angle C'$$

(символическая запись: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$).

Теорема 14 (первая теорема о конгруэнтности треугольников). *Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгру-*

энтности

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{и} \quad \angle A \equiv \angle A',$$

то треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A'B'C'$.

Доказательство. По аксиоме III.5 имеем: $\angle B \equiv \angle B'$, $\angle C \equiv \equiv \angle C'$; таким образом, нам нужно только доказать, что $BC \equiv B'C'$.

Допустим, что сторона BC не конгруэнтна стороне $B'C'$. На основании аксиомы III.1 мы можем на луче $B'C'$ найти точку D', для которой $BC \equiv B'D'$. При нашем допущении лучи $A'C'$ и $A'D'$ разные. Применяя к треугольникам ABC и $A'B'D'$ аксиому III.5, заключаем: $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$. Но по условию $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. Последние два соотношения противоречат требованию единственности в аксиоме III.4. Следовательно, предположение $BC \not\equiv B'C'$ недопустимо.

Теорема 15 (вторая теорема о конгруэнтности треугольников). *Если для треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad \angle A \equiv \angle A', \quad \angle B \equiv \angle B',$$

то треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A'B'C'$.

Доказательство проводится аналогично предыдущему (методом "от противного" с использованием аксиом III.1, III.5 и III.4).

Следующая теорема утверждает для углов в основном то же, что аксиома III.3 для отрезков.

Теорема 16. *Пусть h, k, l и h', k', l' — лучи, исходящие соответственно из точек O и O', и каждая из этих троек лучей расположена в одной плоскости. Пусть, далее, один из лучей h, k, l проходит внутри угла, образованного двумя другими, а соответствующий ему луч тройки h', k', l'* (т.е. обозначенный той же буквой) *так же расположен по отношению к двум другим лучам этой тройки. Тогда из*

$$\angle(h,l) \equiv \angle(h',l') \text{ и } \angle(l,k) \equiv \angle(l',k')$$

следует

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k').$$

Доказательство проведем сначала для случая, когда луч l проходит внутри угла (h,k) (рис. 23). Допустим, что $\angle(h,k)$ не конгруэнтен $\angle(h',k')$. На основании аксиомы III.4 построим $\angle(h',k'')$ так, чтобы было $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k'')$ и чтобы $\angle(h',k'')$ имел общие внутренние точки с $\angle(h',k')$. Возьмем на лучах h и k соответственно точки A и B и построим на лучах h' и k'' точки A' и B'' при условиях: $OA \equiv O'A'$ и $OB \equiv O'B''$. Тогда по теореме 14 $AB \equiv A'B''$. Так как луч l проходит внутри $\angle(h,k)$, то вследствие теоремы 11а

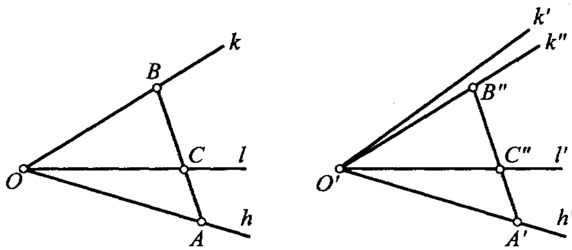


Рис. 23

луч l пересекает отрезок AB в некоторой точке C. Построим на луче $A'B''$ точку C'' так, чтобы имела место конгруэнтность $AC \equiv A'C''$. Вследствие конгруэнтностей $AC \equiv A'C''$ и $AB \equiv A'B''$ и на основании теоремы 13 точка C'' лежит между A и B''; кроме того, имеет место конгруэнтность $BC \equiv B''C''$ (что можно доказать рассуждением "от противного", используя аксиому III.3). Далее, вследствие конгруэнтностей $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B''$, $\angle(h,k) \equiv (h',k'')$ и аксиомы III.5 имеем: $\angle OAC \equiv \angle O'A'C''$ и $\angle OBC \equiv \angle O'B''C''$. На основании той же аксиомы и конгруэнтностей $OA \equiv O'A'$, $AC \equiv A'C''$ и $\angle OAC \equiv \angle O'A'C''$ заключаем, что $\angle AOC \equiv \angle A'O'C''$; аналогично, принимая во внимание конгруэнтности $OB \equiv O'B''$, $BC \equiv B''C''$, $\angle OBC \equiv \angle O'B''C''$, приходим к заключению, что $\angle COB \equiv \angle C''O'B''$.

Вследствие первого из этих двух заключений и аксиомы III.4 точка C'' должна лежать на луче l'. В таком случае конгруэнтность $\angle COB \equiv \angle C''O'B''$ равносильна конгруэнтности $\angle(l,k) \equiv \angle(l',k'')$. Но по условию теоремы мы имеем: $\angle(l,k) \equiv \angle(l',k')$. Так как по нашему предположению лучи k' и k'' различны, то последние два соотношения противоречат аксиоме III.4. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть теперь луч k лежит внутри $\angle(h,l)$ и луч k' — внутри $\angle(h',l')$. Возьмем на лучах h и l соответственно точки A и C и построим на лучах h' и l' точки A' и C' при условиях: $OA \equiv O'A'$, $OC \equiv O'C'$. Обозначим через B точку пересечения луча k с отрезком AC и через B' — точку пересечения k' и $A'C'$ (существование этих точек теперь обеспечено расположением данных лучей). Из условий теоремы с учетом аксиомы III.5 и теоремы 15 находим, что $CB \equiv C'B'$; отсюда, принимая во внимание конгруэнтность $CA \equiv C'A'$, получаем $BA \equiv B'A'$. Таким образом, $OA \equiv O'A'$, $BA \equiv B'A'$; кроме того, $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ (по аксиоме III.5). Следовательно, $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$, что и требовалось доказать.

Следующая теорема играет по отношению к углам такую же роль, как теорема 13 по отношению к отрезкам.

Теорема 16а. *Пусть в некоторой плоскости даны лучи h, k, l и h', k', l', исходящие соответственно из точек O и O'. Пусть* *лучи k и l лежат по одну сторону от прямой, содержащей луч h, а лучи k' и l' аналогично расположены относительно h'. Тогда, если $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$, $\angle(h,l) \equiv \angle(h',l')$ и если луч k лежит внутри угла $\angle(h,l)$, то луч k' лежит внутри угла $\angle(h',l')$.*

Доказательство. Возьмем на лучах h и l соответственно точки A и C и построим на лучах h' и l' точки A' и C' с соблюдением условий: $OA \equiv O'A'$, $OC \equiv O'C'$. Так как луч k проходит внутри угла $\angle(h,l)$, он пересечет отрезок AC в некоторой точке B. С помощью теоремы 14, аксиомы III.1 и теоремы 13 легко показать, что на отрезке $A'C'$ найдется точка B', для которой $AB \equiv A'B'$. Далее из аксиомы III.5 заключаем, что $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$. Отсюда и из аксиомы III.4 вытекает, что луч k' проходит через точку B'. Таким образом, луч k' лежит внутри $\angle(h',l')$.

Теорема 17. *Если в треугольнике ABC имеем $AC \equiv CB$, то $\angle CAB \equiv \angle CBA$ и $\angle CBA \equiv \angle CAB$.*

Доказательство. Теорема следует из аксиомы III.5 в применении к треугольникам CAB и CBA.

Теорема 18 (третья теорема о конгруэнтности треугольников). *Если для треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$

то треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A'B'C'$.

Доказательство. Вследствие теоремы 14 нам достаточно доказать, что $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$. Допустим противное. Вследствие аксиомы III.4 существует луч $A'P_1'$, расположенный с той же стороны от прямой $A'C'$, с какой находится точка B', и удовлетворяющий условию: $\angle CAB \equiv \angle C'A'P_1'$. По предположению луч $A'P_1'$ не совпадает с лучом $A'B'$ (рис. 24).

На основании аксиомы III.1 на луче $A'P_1'$ имеется точка B_1', для которой $AB \equiv A'B_1'$; так как $AB \equiv A'B_1'$, $AC \equiv A'C'$ и $\angle CAB \equiv \angle C'A'B_1'$, то по теореме 14 имеем: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B_1'C'$. Отсюда следует конгруэнтность $BC \equiv B_1'C'$. Ввиду симметричности и транзитивности конгруэнтности отрезков заключаем на основании предыдущего, что стороны треугольника $A'B_1'C'$ конгруэнтны соответствующим сторонам треугольника $A'B'C'$. Подобно предыдущему, построим треугольник $A'B_2'C'$, лежащий по другую сторону от прямой $A'C'$ и обладающий таким же свойством. Рассмотрим треугольники $A'B_2'B'$ и $C'B_2'B'$. Вследствие конгруэнтности $A'B_2' \equiv A'B'$ по теореме 17 имеем: $\angle A'B_2'B' \equiv \angle A'B'B_2'$; аналогично, $\angle B'B_2'C' \equiv \angle B_2'B'C'$. Из последних двух соотношений и на основании теоремы 16 заключаем, что $\angle A'B_2'C' \equiv \angle A'B'C'$; отсюда и из теоремы 14 следует, что $\Delta A'B_2'C' \equiv \Delta A'B'C'$ и, таким образом, $\angle C'A'B_2' \equiv \angle C'A'B_1'$. Совершенно так же можно доказать, что $\angle C'A'B_2' \equiv \angle C'A'B_1'$. Последние два соотношения противоречат аксиоме III.4; полученное противоречие доказывает теорему.

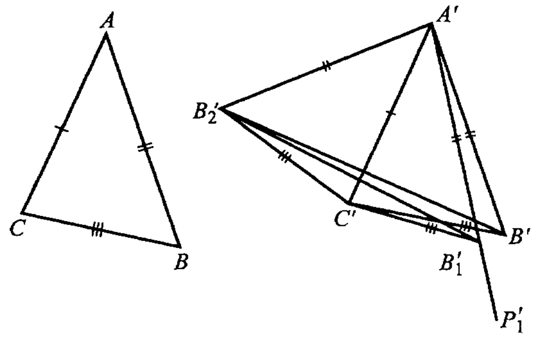


Рис. 24

Теперь легко может быть доказана

Теорема 19. *Если $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ и $\angle(h,k) \equiv \angle(h'', k'')$, то $\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'')$.*

Доказательство. Обозначим вершины $\angle(h, k)$, $\angle(h', k')$ и $\angle(h'', k'')$ соответственно буквами O, O' и O''. Возьмем на лучах h, k какие-нибудь точки A, B (A — на луче h, B — на луче k) и построим на лучах h', k', h'', k'' точки A', B', A'', B'' при условиях $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $OA \equiv O''A''$, $OB \equiv O''B''$. По теореме 14 имеем: $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A''B''$. Так как свойство конгруэнтности отрезков симметрично и транзитивно, то предыдущие соотношения дают конгруэнтности: $O'A' \equiv O''A''$, $O'B' \equiv O''B''$, $A'B' \equiv A''B''$. По теореме 18 отсюда следует, что $\Delta O'A'B' \equiv \Delta O''A''B''$ и, таким образом, $\angle A'O'B' \equiv \angle A''O''B''$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что некоторый $\angle(h,k)$ конгруэнтен $\angle(h',k')$. Так как по аксиоме III.4 $\angle(h,k)$ конгруэнтен самому себе: $\angle(h,k) \equiv \equiv \angle(h,k)$, то из теоремы 19 следует, что $\angle(h',k')$ конгруэнтен $\angle(h,k)$. Таким образом, из

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

следует

$$\angle(h',k') \equiv \angle(h,k).$$

Тем самым доказано, что отношение конгруэнтности углов является симметричным (взаимным). Вследствие теоремы 19 оно также и транзитивно. Вместе с тем оказывается симметричным и транзитивным отношение конгруэнтности для треугольников.

Дальнейшие основные предложения геометрии могут быть развернуты, например, в следующем порядке.

Определение 9. Два угла, у которых имеются общая вершина и одна общая сторона, а другие стороны которых составляют прямую линию, называются *смежными углами.* Два угла с общей вершиной, стороны которых попарно составляют прямые линии, называются *вертикальными углами.*

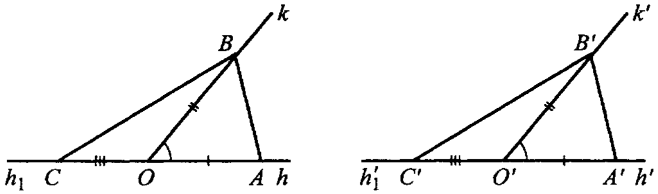


Рис. 25

Теорема 20. *Если два угла взаимно конгруэнтны, то смежные с ними углы также взаимно конгруэнтны.*

Доказательство. Пусть $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ (рис. 25); обозначим через h_1 — луч, дополняющий h до прямой, через h'_1 — луч, дополняющий h'; вершины $\angle(h,k)$ и $\angle(h',k')$ обозначим через O и O'. Возьмем на лучах h, k и h_1 соответственно точки A, B и C. По аксиоме III.1 на лучах h', k' и h'_1 найдутся точки A',B' и C' такие, что $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$ и $OC \equiv O'C'$. Отсюда по аксиоме III.3 $AC \equiv A'C'$; по аксиоме III.5 $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ (или $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$), по теореме 14 $AB \equiv A'B'$. Так как $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ и $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ то, снова используя теорему 14, находим, что $BC \equiv B'C'$. Так как $OB \equiv O'B'$, $OC \equiv O'C'$ и $BC \equiv B'C'$, то по теореме 18 $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$, т.е. $\angle(k,h_1) \equiv \angle(k',h'_1)$, что и требовалось.

Теорема 21. *Вертикальные углы конгруэнтны между собой.*

Доказательство легко получается из теоремы 20, поскольку вертикальные углы имеют общий смежный угол.

Угол, конгруэнтный своему смежному, называется *прямым.*

Чтобы доказать существование прямых углов, возьмем произвольный $\angle(h,k)$ и построим $\angle(h',k)$, конгруэнтный $\angle(h,k)$, но расположенный по другую сторону от k (возможность построения обеспечивается аксиомой III.4). Отложим от общей вершины на h и h' конгруэнтные отрезки и соединим концы их прямой. Если эта прямая пройдет через вершину угла $\angle(h,k)$, то сам угол $\angle(h,k)$ — прямой. В противном случае она пересечет либо луч k, либо его дополнение. Но тогда из аксиомы III.5 или соответственно из теоремы 20 и аксиомы III.5 следует, что эта прямая составляет прямые углы либо с лучом k, либо с его дополнением.

Теорема 22. *Все прямые углы конгруэнтны между собой.*

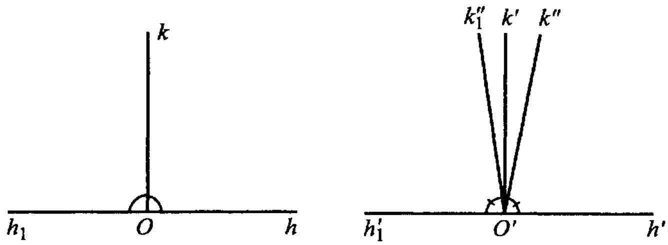


Рис. 26

Доказательство. Пусть $\angle(h,k)$ и $\angle(h',k')$ — прямые (рис. 26), $\angle(k,h_1)$ и $\angle(k',h_1')$ — смежные им углы, O и O' — вершины этих углов. Допустим, что $\angle(h,k) \not\equiv \angle(h',k')$. По аксиоме III.4 найдется луч k'', исходящий из точки O' в ту сторону от прямой (h_1',h'), где лежит k', и такой, что $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k'')$. При нашем допущении луч k'' не может совпасть с лучом k'. Тогда он должен пройти либо внутри $\angle(h',k')$, либо внутри $\angle(h_1',k')$. (Это следует из теоремы 11а и из аксиомы Паша II.4.) Пусть, например, k'' проходит внутри $\angle(h',k')$. По аксиоме III.4 найдется луч k_1'', исходящий из точки O' в ту сторону от прямой (h_1',h'), где лежит k', и такой, что $\angle(h',k'') \equiv \angle(h_1',k_1'')$. Так как $\angle(h',k') \equiv \angle(h_1',k')$, то по теореме 16а луч k_1'' будет лежать внутри $\angle(h_1',k')$; поэтому луч k_1'' не может совпадать с лучом k''. Отсюда и из III.4 имеем: $\angle(h_1',k'') \not\equiv \angle(h_1',k_1'')$. Но, с другой стороны, $\angle(h_1',k'') \equiv \angle(h_1,k)$ (по теореме 20) $\equiv \angle(h,k) \equiv \angle(h',k'') \equiv \angle(h_1',k_1'')$, что противоречит предыдущему. Аналогично получается противоречие в случае, когда k'' проходит внутри $\angle(h_1',k')$. Тем самым теорема доказана методом от противного.

Определение. Пусть A и B — различные точки; точку O будем называть *серединой отрезка* AB, если она лежит на прямой AB и удовлетворяет условию $AO \equiv OB$.

Теорема 23. *Для каждого отрезка существует единственная середина; середина отрезка является его внутренней точкой.*

Другими словами: *каждый отрезок можно разделить пополам, и притом единственным образом.*

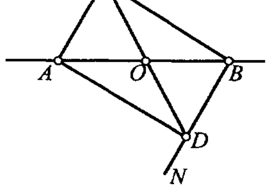


Рис. 27

Доказательство. Пусть дан отрезок AB (рис. 27). Построим конгруэнтные между собой $\angle MAB$ и $\angle NBA$ так, чтобы лучи AM и BN расположились по разные стороны от прямой AB; возможность этого построения обеспечивается аксиомой III.4. Отложим на лучах AM и BN конгруэнтные друг другу отрезки AC и BD. Так как точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB, то отрезок CD пересечет прямую AB в некоторой точке; обозначим ее буквой O.

3 — 10891

Выбор конгруэнтных отрезков AC и BD мы произведем с соблюдением следующей предосторожности: в случае, если бы оказалось, что прямые AM и BN пересекаются, возьмем точку C где-нибудь между A и точкой пересечения AM и BN; затем построим $BD \equiv AC$ (в действительности предположенный случай невозможен, но доказывать это мы сейчас не будем). Теперь ясно, что точка O не может совпасть ни с точкой A, ни с точкой B. Легко доказать также, что O не может лежать вне отрезка AB. Именно, допустив, например, что A лежит между O и B, получим противоречие с аксиомой Паша по отношению к треугольнику OBD (так как прямая AM пересекает отрезок OB в точке A, но не может пересечь ни OD, ни BD). Итак, O лежит между A и B. Докажем, что O есть середина отрезка AB. В самом деле, по теореме 14 треугольники ABC и ABD конгруэнтны, следовательно, $CB \equiv AD$. Отсюда и из теоремы 18 вытекает конгруэнтность треугольников ACD и BCD, на основании чего имеем конгруэнтность $\angle ACD$ и $\angle CDB$. Из последнего обстоятельства с помощью теоремы 15 заключаем, что конгруэнтны треугольники ACO и BDO; следовательно, $AO \equiv OB$.

Теперь докажем, что отрезок имеет только одну середину. Предположим обратное: пусть отрезок AB имеет две середины. В силу аксиомы III.1 одна из них лежит между другой и точкой A *); поэтому они могут быть обозначены буквами O_1 и O_2 так, что O_1 лежит между A и O_2. Тогда на основании леммы 2 точка O_2 лежит между O_1 и B. Но при наличии соотношений $AO_1 \equiv BO_1$, $AO_2 \equiv BO_2$ и при условии, что O_1 лежит между A и O_2, из теоремы 13 следует, что точка O_1 лежит между B и O_2. Таким образом, с одной стороны, O_2 лежит между B и O_1, а с другой стороны, O_1 лежит между B и O_2. Получается противоречие с аксиомой II.3.

Отметим еще следующие теоремы.

Теорема 17 bis. *В равнобедренном треугольнике медиана основания есть в то же время высота и биссектриса угла при вершине.*

Теорема 24. *Каждый угол можно разделить пополам и притом единственным образом.*

Теорема 25. *Из любой точки можно опустить на данную прямую один и только один перпендикуляр.*

Теорема 26. *Из каждой точки на прямой можно восставить к этой прямой единственный перпендикуляр.*

18. С помощью аксиом I–III могут быть определены соотношения "больше" и "меньше" для отрезков и углов.

Определение 10. Если даны два отрезка AB и $A'B'$ и внутри AB существует такая точка C, что

$$AC \equiv A'B',$$

*) В силу аксиомы III.1 середина отрезка лежит внутри отрезка, отсюда следует, что если отрезок AB имеет две середины, то одна из них лежит между другой и точкой A.

то говорят, что *отрезок* AB *больше отрезка* $A'B'$ или *отрезок* $A'B'$ *меньше отрезка* AB; пишут $AB > A'B'$ или $A'B' < AB$.

Определение 11. Если даны $\angle(h,k)$ и $\angle(h',k')$ и среди полупрямых, проходящих через вершину внутри $\angle(h,k)$, существует полупрямая l такая, что

$$\angle(h,l) \equiv \angle(h',k'),$$

то говорят, что $\angle(h,k)$ *больше* $\angle(h',k')$ или $\angle(h',k')$ *меньше* $\angle(h,k)$.

Теорема 27. *Для произвольных двух отрезков* AB *и* CD *всегда выполняется одно из трех соотношений*

$$AB \equiv CD, \quad AB > CD, \quad AB < CD,$$

причем каждое из них исключает два других.

В самом деле, по аксиоме III.1 на прямой AB существует точка M, расположенная с той же стороны от точки A, что и точка B, и удовлетворяющая условию $AM \equiv CD$. Если точка M лежит между A и B, то $AB > CD$, если M совпадает с B, то $AB \equiv CD$, если B лежит между A и M, то $AB < CD$. Таким образом, существование одного из трех указанных соотношений установлено.

Покажем теперь, что любое из них исключает остальные. Пусть, например, $AB > CD$. В этом случае на отрезке AB существует точка M, для которой $AM \equiv CD$. Если бы отрезки AB и CD, кроме соотношения $AB > CD$, удовлетворяли еще соотношению $AB \equiv CD$, то по аксиоме III.2 имелась бы конгруэнтность $AM \equiv AB$, что противоречит аксиоме III.1. Точно так же при $AB > CD$ не может иметь место соотношение $AB < CD$. Действительно, если $AB > CD$ и $AB < CD$, то между A и B существует точка M, для которой $AM \equiv CD$, а между C и D существует точка N такая, что $CN \equiv AB$. Мы приходим к противоречию с теоремой 13.

Теорема 28. *Если* $AB < A'B'$ *и* $A'B' < A''B''$, *то* $AB < A''B''$.

Доказательство может быть получено очевидными рассуждениями при помощи теоремы 13 и теоремы 8 (или леммы 2).

Как следствие теоремы 28 отметим следующую теорему.

Теорема 29. *Если отрезок* CD *есть часть отрезка* AB, *то* $CD < AB$.

Читатель легко сформулирует теоремы, играющие в сравнении углов такую же роль, какую играют теоремы 27, 28 и 29 в сравнении отрезков.

После того как введены для отрезков и углов понятия “больше” и “меньше”, можно сформулировать и доказать следующие теоремы.

Теорема 30. *Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним.*

Хотя теорема 30 является очень важной в нашем изложении, мы не будем ее здесь доказывать, так как доказательство, которое обычно приводится в учебниках, точно обосновывается аксиомами I–III.

В историческом обзоре эта теорема упоминалась в $n^\circ 5$, где дано также ее доказательство.

Т е о р е м а 31. *Во всяком треугольнике по крайней мере два угла острые.*

Т е о р е м а 32. *В треугольнике бо́льшая сторона лежит против бо́льшего угла, и обратно, бо́льший угол лежит против бо́льшей стороны.*

Т е о р е м а 33. *Перпендикуляр короче наклонной.*

Т е о р е м а 34. *Каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других его сторон.*

Из теоремы 34 следует, что *прямолинейный отрезок короче всякой ломаной, соединяющей его концы.*

Мы привели ряд теорем, которые можно доказать, опираясь на аксиомы I—III. Из аксиом I—III вместе с тем нельзя вывести многие важные факты геометрии. Например, из этих аксиом не следует, что прямая, проходящая через некоторую точку внутри круга, пересекает этот круг. С помощью аксиом I—III, как и с помощью аксиом I—II, нельзя еще доказать, что множество элементов геометрии несчетно (подробнее по этому поводу см. n° 72).

19. Аксиомы третьей группы позволяют определить движение.

Как мы уже в свое время отмечали, у Евклида движение принято в качестве наглядно ясного понятия, которое не обосновано никакими аксиомами. Совмещающиеся фигуры считаются равными. Следовательно, в системе Евклида движение есть понятие основное (хотя оно и оставлено без обоснования), а конгруэнтность — производное. У Гильберта в качестве основного понятия введена конгруэнтность, после чего движение может быть определено как производное понятие. Сейчас мы выскажем это определение.

Пусть даны два множества точек Ω и Ω', конечные или бесконечные — безразлично. Предположим, что между точками этих множеств установлено взаимно однозначное соответствие. Каждая пара точек M и N множества Ω определяет отрезок MN. Пусть M' и N' — точки множества Ω', соответствующие точкам MN. Отрезок $M'N'$ условимся называть соответствующим отрезку MN.

Если соответствие между Ω и Ω' таково, что соответствующие отрезки всегда оказываются взаимно конгруэнтными, то и множества Ω и Ω' называются конгруэнтными. При этом говорят также, что каждое из множеств Ω и Ω' получено путем д в и ж е н и я *другого или что одно из этих множеств может быть* н а л о ж е н о *на другое.* Соответствующие точки множеств Ω и Ω' называются *совмещающимися при наложении.*

(Различия между собственно конгруэнтными и взаимно зеркальными множествами мы сейчас не вводим.) Имеют место следующие теоремы.

Т е о р е м а I. *Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, также лежащие на некоторой прямой.*

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 34. В самом деле, пусть на некоторой прямой a рассматривается какое-нибудь множество точек; нужно показать, что точки конгруэнтного множества располагаются на одной прямой a'. Выберем в данном множестве на прямой a три точки A, B, C и допустим для определенности, что B лежит между A и C. Таким образом, отрезок AC составлен из отрезков AB и BC. Если точки A', B', C', полученные при конгруэнтном перенесении точек A, B, C, не лежат на одной прямой, то они составляют треугольник, и по теореме 34 отрезок $A'C'$ должен быть меньше отрезка, составленного из $A'B'$ и $B'C'$. А так как $A'B' \equiv AB$ и $B'C' \equiv BC$, то должно иметь место неравенство $A'C' < AC$, что противоречит условию конгруэнтности множеств. Следующие теоремы приводим без доказательства.

Теорема II. *Точки, лежащие на плоскости, при движении переходят в точки, также лежащие на некоторой плоскости.*

Теорема III. *Угол между двумя отрезками, соединяющими какую-нибудь точку множества с двумя другими его точками, конгруэнтен углу между соответствующими отрезками конгруэнтного множества.*

Теорема А. *Пусть M, N, P, Q — четыре точки некоторой фигуры Ω* (т. е. некоторого множества точек), *не лежащие в одной плоскости; M' — произвольная точка пространства; a — некоторая прямая, проходящая через M', и α — какая-нибудь плоскость, проходящая через прямую a. Тогда фигуру Ω можно движением переместить так, что точка M совместится с M', точка N расположится на прямой a с любой заранее указанной стороны от точки M'; точка P попадет на плоскость α с любой заранее указанной стороны от прямой a, а точка Q займет положение с любой заранее указанной стороны от плоскости α.*

Теорема Б. *Если три не лежащие на одной прямой точки M, N, P фигуры Ω совпадают с соответствующими точками M', N', P' конгруэнтной фигуры Ω', то возможны два случая:* 1) *каждая точка фигуры Ω совпадает с соответствующей точкой фигуры Ω';* 2) *каждая точка фигуры Ω, лежащая в плоскости MNP, совпадает с соответствующей точкой фигуры Ω', остальные же соответствующие точки этих фигур лежат по разные стороны от плоскости MNP, и каждая точка фигуры Ω' однозначно определена положением соответствующей точки фигуры Ω* (в последнем случае фигуры называются *симметричными* или *взаимно зеркальными* относительно плоскости MNP).

В планиметрии теоремам А и Б соответствуют следующие две теоремы.

Теорема В. *Пусть M, N, P — три точки некоторой фигуры Ω, не лежащие на одной прямой, M' — произвольная точка плоскости, a — какая-нибудь прямая, проходящая через M'. Тогда фигуру Ω*

можно движением переместить так, что точка M совместится с M', точка N расположится на прямой a с любой заранее указанной стороны от точки M', а точка P займет положение с любой заранее указанной стороны от прямой a.

Теорема Г. *Если две различные точки M и N фигуры Ω совпадают с соответствующими точками M' и N' конгруэнтной фигуры Ω', то возможны два случая:* 1) *каждая точка фигуры Ω совпадает с соответствующей точкой фигуры Ω',* 2) *каждая точка фигуры Ω, лежащая на прямой MN, совпадает с соответствующей точкой фигуры Ω', остальные же соответствующие точки этих фигур лежат по разные стороны от прямой MN, и каждая точка фигуры Ω' однозначно определена положением соответствующей точки фигуры Ω* (в последнем случае фигуры называются *симметричными* относительно прямой MN).

Теоремы А и В характеризуют степень свободы перемещений фигур. Теоремы Б и Г устанавливают условия, определяющие положение фигуры; именно: три точки фигуры определяют ее положение в пространстве с точностью до зеркального отражения, а в планиметрии две точки определяют положение фигуры с точностью до симметрии относительно прямой.

Определяя движение фигуры Ω, мы, в частности, можем предположить, что множество ее точек заполняет все пространство, а в планиметрии — всю плоскость, т. е. можно полагать, что для каждой точки пространства, а в планиметрии — для каждой точки плоскости, имеется соответствующая точка, и при этом если точкам M и N соответствуют точки M' и N', то $MN \equiv M'N'$. Тогда мы будем говорить, что осуществляется движение всего пространства, или, соответственно, в случае планиметрии — всей плоскости.

Движение фигуры, а также движение всего пространства называется *вращением вокруг точки O*, если точка O совпадает с соответствующей точкой O'; иначе говоря, если точка O остается на месте. Движение называется *вращением вокруг прямой a*, если каждая точка прямой a совпадает с соответствующей точкой, т. е. если каждая точка прямой a остается на месте. Прямая a носит название *оси вращения**).

Движение мы будем называть *сдвигом по прямой u*, если удовлетворяются следующие три условия:

1) каждая точка прямой u перемещается, причем остается на прямой u;

2) каждая точка некоторой плоскости α, проходящей через прямую u, остается на плоскости α по прежнюю сторону от прямой u;

3) каждая точка, не лежащая на плоскости α, остается по прежнюю сторону от этой плоскости.

Движение, при котором все точки остаются на месте, причисляют к сдвигам по любой прямой.

---

*) Эти определения не совпадают с общепринятыми, так как мы не исключили зеркального преобразования фигур.

Вращение вокруг точки и сдвиг вдоль прямой представляют собой частные случаи движений. Вместе с тем любое движение можно свести к последовательному осуществлению сдвига и вращения.

Для того чтобы точный смысл последнего утверждения стал вполне ясным, мы отметим сейчас одно обстоятельство, играющее в исследовании движений фундаментальную роль.

Пусть два движения пространства производятся последовательно одно за другим. Первое из них произвольную точку M переводит в точку M'; точка M' вторым движением переводится в положение M''. В результате возникает некоторое преобразование всех точек пространства, при котором произвольная точка M переходит в точку M''. Полученное таким путем преобразование мы будем называть ***произведением движений***. Для того чтобы произведение двух движений было определено, недостаточно задать составляющие движения, — нужно обязательно еще указать, в каком порядке они производятся.

Теорема. *Произведение двух движений есть движение.*

Доказательство этой важной теоремы вполне очевидно. В самом деле, пусть произвольные точки M и N пространства первым из двух данных движений переводятся в точки M' и N', а эти точки в результате второго движения в свою очередь переходят в M'' и N''. Нужно показать, что отрезок MN конгруэнтен отрезку $M''N''$. Но по условию теоремы $MN = M'N'$ и $M'N' = M''N''$, откуда вследствие аксиомы III.2 и идущих за ней предложений имеем $MN \equiv M''N''$.

Свойство движений, выражаемое доказанной теоремой, называется *групповым*. Вследствие наличия группового свойства можно поставить вопрос о представлении произвольных движений в виде произведений некоторых простых специальных движений. В частности (и это мы уже отметили выше), каждое движение является произведением сдвига и вращения.

Для доказательства рассмотрим какую-нибудь фигуру Ω (точки которой, в частности, могут заполнять все пространство) и предположим, что некоторое движение превращает ее в конгруэнтную фигуру Ω'. Пусть M — произвольная точка фигуры Ω, M' — новое положение этой точки.

Обозначим через Ω'' фигуру, получающуюся из Ω в результате сдвига, переводящего M в M'. Очевидно, Ω' и Ω'' конгруэнтны друг другу, причем точка фигуры Ω'', соответствующая точке M' фигуры Ω', совпадает с этой точкой M'. Поэтому движение, приводящее Ω'' к совпадению с Ω', есть вращение вокруг точки M'. Таким образом, произвольное перемещение фигуры из положения Ω в положение Ω' представляется как произведение сдвига этой фигуры из положения Ω в положение Ω'' и вращения, в результате которого Ω'' совмещается с Ω'.

§ 7. Группа IV. Аксиомы непрерывности

20. С помощью аксиом I–III мы установили сравнение отрезков так, что из любых двух отрезков один либо больше другого, либо меньше его, либо равен ему (теорема 27, n° 18).

Аксиом I–III, однако, недостаточно для того, чтобы можно было установить процесс измерения, в результате которого отношение любого отрезка к линейной единице выражается определенным числом.

Обоснование измерения отрезков дается нижеприводимой аксиомой IV.1, которую обычно называют аксиомой Архимеда. Аксиома Архимеда позволяет (при выборе линейной единицы) для каждого отрезка единственным образом определить некоторое положительное число, называемое длиной отрезка. Чтобы иметь возможность и обратно установить существование отрезка, длина которого равна любому наперед данному положительному числу, необходимо ввести еще одну аксиому.

Уклоняясь от изложения Гильберта, мы даем в качестве такой аксиомы аксиому IV.2, представляющую собой не что иное, как известный принцип Кантора о стягивающихся интервалах. В системе Гильберта предложению IV.2 соответствует аксиома полноты, которую мы в главе IV сопоставим с аксиомой Кантора.

IV.1 (аксиома Архимеда). *Пусть AB и CD — произвольные отрезки. Тогда на прямой AB существует конечное число точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, расположенных так, что точка A_1 лежит между A и A_2, точка A_2 лежит между A_1 и A_3 и т. д., причем отрезки AA_1, $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и B лежит между A и A_n* (рис. 28).

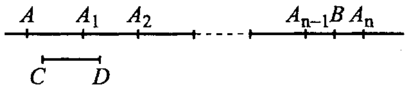


Рис. 28

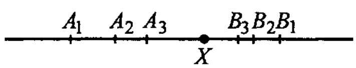


Рис. 29

IV.2 (аксиома Кантора). *Пусть на какой угодно прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, $A_2B_2, \dots$, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего; пусть далее, каким бы ни был заранее данный отрезок, найдется номер n, для которого A_nB_n меньше этого отрезка. Тогда существует на прямой a точка X, лежащая внутри всех отрезков A_1B_1, A_2B_2 и т. д.* (рис. 29).

Из условия аксиомы сразу следует, что *существует только одна точка X, лежащая внутри всех отрезков A_1B_1, A_2B_2 и т. д.*

В самом деле, если на прямой a имеется еще другая точка Y, лежащая внутри всех отрезков A_1B_1, $A_2B_2, \dots$, то при любом n отрезок A_nB_n больше отрезка XY, что исключено условием.

О п р е д е л е н и е 12. Пусть каждому отрезку соответствует определенное положительное число, причем:

1) равным отрезкам соответствуют равные числа;

2) если B — точка отрезка AC и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число $a + b$;

3) некоторому отрезку OO' соответствует число, равное 1.

Тогда число, указанным образом соответствующее каждому отрезку, называется *длиной* этого отрезка; отрезок OO' называется *линейной единицей* или *единицей измерения длин*.

Докажем, что условия 1, 2 и 3 единственным образом определяют длину каждого отрезка. Сначала мы будем исходить из предположения, что с каждым отрезком сопоставлено положительное число так, что требования 1, 2 и 3 удовлетворены, и установим, что иного сопоставления чисел отрезкам с соблюдением условий 1, 2 и 3 нет. После этого убедимся в возможности подобного сопоставления. (Иначе говоря, сначала мы приведем доказательство единственности, затем — доказательство существования длины.)

Прежде всего заметим, что если отрезок AB больше отрезка $A'B'$, то длина a отрезка AB должна быть больше длины a' отрезка $A'B'$. В самом деле, по определению понятия "больше" (см. $n°$ 18) отрезок AB содержит точку P, которая вместе с точкой A определяет отрезок AP, равный $A'B'$. Пусть длины отрезков AP и PB будут x и y ($x > 0$, $y > 0$). Согласно условию 2 имеем $a = x+y$, а по условию 1 $x = a'$, откуда $a = a' + y$ и, следовательно, $a > a'$.

Далее, согласно теореме 23, линейную единицу OO' можно разделить пополам. Обозначим через O_1 середину отрезка OO'. Так как длины конгруэнтных отрезков OO_1 и O_1O' равны и в сумме составляют единицу, то каждый из них имеет длину, равную $\frac{1}{2}$. Разделив отрезок OO_1 пополам точкой O_2, найдем, что длина отрезка OO_2 равна $\frac{1}{2^2}$, и т. д. Отрезки $OO_1, OO_2, \ldots$ будем называть половиной линейной единицы, четвертью линейной единицы и т. д.

Рассмотрим теперь произвольный отрезок AB, длина которого равна числу a. Отложим на прямой AB от точки A по направлению к точке B отрезки AA_1, A_1A_2 и т. д., конгруэнтные OO'. Если одна из точек A_n совпадает с B, то согласно условию 2 необходимо $a = n$. Если же ни одна из точек A_1, $A_2, \ldots$ не совпадает с B, то по аксиоме Архимеда существуют такие две точки A_n и A_{n+1}, что B находится между ними. В этом случае число a должно удовлетворять неравенствам

$$n < a < n + 1,$$

так как отрезок AB больше отрезка AA_n и меньше отрезка AA_{n+1}, а длины этих двух отрезков соответственно равны n и $n + 1$. Таким образом, число a определено с точностью до единицы. Сейчас мы покажем, что a определяется с любой точностью. Излагаемый ниже процесс, с помощью которого находится значение числа a, называют *измерением.*

Разделим отрезок A_nA_{n+1} точкой P_1 пополам. Тогда точка B либо лежит между A_n и P_1, либо лежит между P_1 и A_{n+1}, либо совпадает с P_1. Иначе говоря, отрезок A_nB либо меньше половины линейной единицы, либо больше, либо равен ей. Соответственно имеем: либо

$$n < a < n + \frac{1}{2},$$

либо

$$n + \frac{1}{2} < a < n + 1,$$

либо

$$a = n + \frac{1}{2}.$$

В последнем случае a определяется точно, и процесс измерения заканчивается; в первых двух случаях a определено с точностью до $\frac{1}{2}$, и измерение следует продолжить. Разделяя тот из двух отрезков A_nP_1 и P_1A_{n+1}, который содержит точку B, пополам точкой P_2, мы можем, в зависимости от расположения точки B, либо определить точное значение числа a, если B совпадает с P_2, и этим процесс измерения закончить, либо, если B не совпадает с P_2, найти значение a с точностью до $\frac{1}{4}$ и после этого продолжать измерение аналогичным способом.

Вместо того чтобы заключать a все в более и более тесные границы, удобнее представить a в виде двоичной дроби

$$a = n{,}n_1n_2 \ldots ;$$

здесь n — целая часть — показывает, сколько линейных единиц содержится в отрезке AB; n_1 — первый знак после запятой — будет 1 или 0, в зависимости от того, содержит ли отрезок AB, кроме n линейных единиц, еще половину линейной единицы или нет; n_2 также есть 1 или 0, соответственно тому, содержит ли отрезок AB, кроме n линейных единиц и n_1 половин линейной единицы, еще четверть линейной единицы или нет, и т. д. Двоичная дробь, выражающая a, может быть конечной, если B совпадает с одной из точек P_1, $P_2, \ldots, P_n, \ldots$, которые мы строим в процессе измерения отрезка AB, или бесконечной, если B не совпадает ни с одной из этих точек. Например, если путем измерения обнаружено, что AB содержит точно одну линейную единицу, одну четверть и одну восьмую линейной единицы, то $a = 1{,}011$. В этом случае B совпадает с P_3. Само собой разумеется, что конечную двоичную дробь формально можно рассматривать как бесконечную, например, $a = 1{,}011000$. В дальнейшем, если мы будем подчеркивать, что двоичная дробь является бесконечной, то будем иметь в виду, что она существенно бесконечна, т. е. что она не имеет такого разряда, начиная с которого подряд идут одни нули. Предположив, что каждому отрезку отнесена длина так, что удовлетворены условия 1, 2 и 3, мы сумели, опираясь на аксиому Архимеда, найти для любого данного отрезка каждую цифру двоичного представления его длины. Следовательно, условиями 1, 2 и 3 длины отрезков однозначно определены.

Теперь мы должны доказать, что с каждым отрезком можно сопоставить положительное число так, что при этом будут удовлетворяться требования 1, 2 и 3. Для этого сопоставим с каждым отрезком в качестве длины число, полученное в результате его измерения описанным выше способом. Нужно показать, что при этом условия 1, 2 и 3 выполняются.

Прежде всего, ясно, что процесс измерения, примененный к линейной единице, дает число, равное единице. Следовательно, требование 3 удовлетворено.

Далее, для двух конгруэнтных отрезков процесс измерения дает равные значения длин. Это является прямым следствием теоремы 13 n° 17, согласно которой системы точек на двух прямых, получаемые в процессе измерения отрезков, имеют одинаковый порядок расположения своих точек, и, значит, при измерении двух конгруэнтных отрезков в получаемых двоичных разложениях последовательно возникают на одинаковых местах одинаковые цифры. Таким образом, требование 1 также удовлетворено.

Остается доказать, что удовлетворяется требование 2.

Предварительно докажем два вспомогательных предложения.

1. *Пусть дан произвольный отрезок PQ. Всегда возможно выбрать столь большое целое число n, что, разделив линейную единицу на 2^n равных частей, мы получим отрезки, каждый из которых меньше PQ* *).

Для доказательства предположим сначала, что линейная единица OO' разделена точкой A на две равные части OA', AO' и что каждая из них больше отрезка PQ. Тогда внутри отрезка OA найдется точка O_1 такая, что $OO_1 \equiv PQ$, и внутри отрезка AO' найдется точка A_1 такая, что $AA_1 \equiv PQ$. Отложим от точки O_1 по направлению к точке A отрезок $O_1O_2 \equiv PQ$. Заметим теперь, что 1) A лежит между O_1 и A_1, 2) имеют место конгруэнтности: $O_1O_2 \equiv A_1A$, $O_1A_1 \equiv A_1O_1$; отсюда и из теоремы 13 следует, что O_2 лежит между O_1 и A_1. Применяя лемму 2 n° 14, найдем, что O_2 лежит между O_1 и O'. Таким образом, если каждая половина линейной единицы OO' больше PQ, то, откладывая отрезки OO_1 и O_1O_2, конгруэнтные отрезку PQ, мы не переступим через точку O'. Отсюда следует, что если при любом n, разделяя линейную единицу на 2^n равных частей, мы будем получать отрезки $\geqslant PQ$, то, повторяя отрезок

*) Каждый отрезок можно разделить на 2^n равных частей, поскольку каждый отрезок можно разделить пополам (см. теорему 23 n° 17).

PQ слагаемым произвольно много раз, мы не сможем превзойти линейной единицы. Получается противоречие с аксиомой Архимеда, и тем самым предложение доказано.

Из этого предложения вытекает важное следствие: процесс измерения отрезка не может привести к бесконечной двоичной дроби, у которой, начиная с некоторого разряда, все цифры суть единицы.

В самом деле, пусть измеряется отрезок AB. Будем пользоваться обозначениями, которые употреблялись выше при описании процесса измерения. Если в результате измерения получается бесконечная двоичная дробь с целой частью n, то B лежит между A_n и A_{n+1}. Предположим сначала, что в полученной дроби единицы идут подряд сразу после запятой. Тогда точка B лежит внутри каждого из отрезков P_1A_{n+1}, $P_2A_{n+1}, \dots$; следовательно, отрезок BA_{n+1} меньше каждой из 2^n равных частей линейной единицы при любом n, что противоречит предложению 1. Предположим теперь, что полученная дробь имеет в k-м разряде нуль, а в следующих разрядах — единицы. Тогда точка B лежит внутри каждого из отрезков $P_{k+1}P_k$,$P_{k+2}P_k, \dots$ и мы снова приходим к противоречию с предложением 1.

Только что установленный факт облегчает сравнение двоичных дробей, которые получаются в результате измерения отрезков. Именно, пусть a и b — двоичные дроби, полученные измерением двух отрезков; если до некоторого разряда эти дроби совпадают, а в следующем разряде дробь a имеет нуль, дробь b — единицу, то можно с определенностью утверждать, что число, представленное дробью a, меньше, чем число, представленное дробью b (по отношению к произвольным двоичным дробям такое утверждение может быть неверным, поскольку, например, дроби 1,11000 и 1,10111... выражают одно и то же число).

2. *Если отрезок A^*B^* меньше отрезка AB, а числа b^* и b получены путем измерения этих отрезков, то $b^* < b$.*

Так как $A^*B^* < AB$, то на отрезке AB существует точка B' такая, что $AB' \equiv A^*B^*$. Нужно показать, что измерение отрезка AB' дает число, меньшее полученного измерением отрезка AB.

Построим, начиная от точки A по направлению к точке B, отрезки AA_1, $A_1A_2, \dots$, равные линейной единице. Условимся по отношению к произвольному отрезку прямой AB говорить, что точка принадлежит отрезку, если она лежит внутри него или совпадает с левым концом (считая "слева направо" от A к B). Например, точку A_1 будем относить к отрезку A_1A_2, точку A_2 — к следующему отрезку A_2A_3. При этом условии, если B' и B принадлежат разным отрезкам системы AA_1, $A_1A_2, \dots$, то целая часть числа b^* меньше целой части числа b, следовательно, $b^* < b$. Если же обе точки B' и B принадлежат одному отрезку A_iA_{i+1}, то b^* и b имеют одинаковые целые части. Разделим тогда отрезок A_iA_{i+1} пополам. Если точки B' и B окажутся в разных половинах, то первая цифра после запятой в разложении числа b^* есть нуль, а в разложении b — единица, и, следовательно,

$b^* < b$. Если же обе точки B' и B принадлежат одной половине отрезка A_iA_{i+1}, то b^* и b имеют одинаковые целые части и первые цифры после запятой. Тогда мы разделим пополам ту из двух половин отрезка A_iA_{i+1}, которая содержит обе точки B' и B, и т. д.

Продолжая этот процесс, мы в конце концов установим неравенство $b^* < b$, если только точки B' и B не будут всегда располагаться в одной и той же из двух половин, получаемых делением отрезка, который определен предыдущим шагом построения. Однако это предположение мы должны отбросить, так как оно означает, что отрезок $B'B$ меньше каждой из 2^n равных частей линейной единицы при любом n, что противоречит доказанному ранее вспомогательному предложению 1.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству выполнения требования 2.

Пусть будет AC — произвольный отрезок, B — какая-нибудь точка внутри него, a, b, c — числа, полученные измерением отрезков AB, BC и AC. Мы должны установить равенство

$$a + b = c.$$

Зафиксируем целое положительное число n и построим, начиная от точки B по направлению к точке A, отрезки BA_1, $A_1A_2\ldots$, конгруэнтные отрезкам, получаемым при делении линейной единицы на 2^n равных частей. Из аксиомы Архимеда следует, что среди точек A_1,$A_2,\ldots$ найдутся две точки A_k и A_{k+1} такие, что A_k принадлежит отрезку BA или совпадает с точкой A, а A_{k+1} вместе с точкой B определяет отрезок BA_{k+1}, содержащий точку A. Аналогично определим точки C_l и C_{l+1}, откладывая в сторону точки C отрезки BC_1, $C_1C_2,\ldots$, конгруэнтные отрезкам A_iA_{i+1}. Очевидно, имеют место следующие неравенства между отрезками:

$$BA_k \leqslant AB < BA_{k+1}, \quad BC_l \leqslant BC < BC_{l+1},$$
$$A_kC_l \leqslant AC < A_{k+1}C_{l+1}.$$

Отсюда и принимая во внимание вспомогательное предложение 2, получим неравенства для соответствующих чисел:

$$\frac{k}{2^n} \leqslant a < \frac{k+1}{2^n}, \quad \frac{1}{2^n} \leqslant b < \frac{l+1}{2^n}, \quad \frac{k+l}{2^n} \leqslant c < \frac{k+l+2}{2^n}.$$

Из этих неравенств будем иметь:

$$\frac{k+l}{2^n} \leqslant a+b \leqslant \frac{k+l+2}{2^n}, \quad \frac{k+l}{2^n} \leqslant c < \frac{k+l+2}{2^n}.$$

Следовательно,

$$|a + b - c| < \frac{1}{2^n - 1}.$$

Но так как n — любое целее положительное число, то

$$a + b - c = 0$$

и, таким образом, $a + b = c$, а это мы и желали установить.

Итак, аксиомы I–III и IV.1 дают возможность обосновать измерение отрезков и сопоставить с каждым отрезком положительное число, называемое его длиной. Длина однозначно определяется условиями 1, 2 и 3.

Согласно условию 1 равные отрезки имеют равные длины. Из теоремы 27 n° 18 и из вспомогательного предложения 2 следует, что и обратно — отрезки, имеющие одинаковые длины, равны между собой. Таким образом, сравнение отрезков можно заменить сравнением их длин.

Вполне аналогично длине отрезка определяется величина угла.

Определение 13. Пусть каждому углу соответствует некоторое положительное число так, что при этом соблюдены следующие условия:

1) равным углам соответствуют равные числа;

2) если луч l проходит внутри $\angle(h,k)$ через его вершину и $\angle(h,l)$ и $\angle(l,k)$ соответствуют числа α и β, то $\angle(h,k)$ соответствует число $\alpha+\beta$;

3) некоторому $\angle(o,o')$ соответствует число, равное единице.

Тогда число, указанным образом соответствующее каждому углу, называется *величиной* этого угла; $\angle(o,o')$ называется *угловой единицей*.

Однозначная определенность и существование величин углов доказываются так же, как однозначная определенность и существование длин отрезков. Вводить при этом новую аксиому для углов, соответствующую аксиоме Архимеда для отрезков, не требуется: подобное предложение может быть доказано.

21. Согласно предыдущему вместе с множеством всех отрезков вполне определенным является числовое множество их длин; при этом мы, конечно, предполагаем, что линейная единица выбрана. Однако *из аксиом* I–III *и* IV.1 *не следует, что длины отрезков исчерпывают все вещественные числа.* Опираясь на эти аксиомы, нельзя даже установить, что множество длин несчетно.

Только расширяя систему аксиом присоединением, например, формулированной выше аксиомы Кантора IV.2, мы получаем возможность доказать следующую теорему.

Теорема 35. *Каково бы ни было вещественное число $a > 0$, существует отрезок, длина которого равна a.*

Для доказательства представим a в виде двоичной дроби $n,n_1n_2\ldots$ Предположим сначала, что число a не может быть представлено конечной двоичной дробью. При этом предположении дробь $n,n_1n_2\ldots$ не может иметь, начиная с некоторого разряда, одни единицы (так как бесконечная дробь $n,n_1n_2\ldots n_k0111\ldots$ представляет то же число, что и конечная дробь $n,\ n_1n_2\ldots n_k1$).

Рассмотрим какую-нибудь полупрямую с началом в точке A и построим на этой полупрямой отрезки $AA_1,\ A_1A_2,\ldots,\ A_nA_{n+1}$, конгруэнтные линейной единице. Последний из них, т. е. A_nA_{n+1}, точкой P_1 разделим пополам. Условимся ту половину отрезка A_nA_{n+1}, которая расположена со стороны точки A, называть "левой", другую — "правой". Подобное же условие отнесем ко всякому другому отрезку полупрямой, если мы будем этот отрезок делить пополам. Обозначим буквой l_1 отрезок, совпадающий с левой половиной отрезка A_nA_{n+1}, если $n_1 = 0$, и с правой, если $n_1 = 1$. Разделим, далее, отрезок l_1 пополам точкой P_2 и обозначим через l_2 его левую или правую половину, в зависимости от того, будет ли $n_2 = 0$ или $n_2 = 1$. Этот процесс продолжим бесконечно. Так будет построена последовательность отрезков $l_1,\ l_2, \ldots$.

По построению внутренние точки каждого из этих отрезков лежат внутри предыдущего и один конец совпадает с концом предыдущего. Однако не может случиться, чтобы, начиная с некоторого номера, все отрезки l_n имели общий конец (так как дробь $n{,}n_1n_2\ldots$ не может иметь, начиная с некоторого разряда, одни нули или одни единицы). Следовательно, среди отрезков $l_1,\ l_2\ldots$ найдется отрезок l_{k_1}, который лежит строго внутри l_1, найдется отрезок l_{k_2}, который лежит строго внутри l_{k_1}, и т. д. Кроме того, из вспомогательного предложения 1, которым мы пользовались при доказательстве существования длины, следует, что никакой отрезок не может быть меньше всех отрезков $l_1, l_{k_1}, l_{k_2}\ldots$. Поэтому мы можем к последовательности $l_1, l_{k_1}, l_{k_2}, \ldots$, применить аксиому Кантора IV.2 и утверждать, согласно этой аксиоме, что существует единственная точка B, лежащая внутри всех отрезков $l_1,\ l_{k_1},\ l_{k_2}, \ldots$. Ясно, что эта точка B будет также лежать внутри всех отрезков $l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots$. Очевидно, отрезок AB имеет назначенную длину a. В самом деле, измерение отрезка AB дает именно число a.

Таким образом, если a не может быть представлено конечной двоичной дробью, утверждение теоремы доказано. Если же a представляется конечной дробью, то конец B искомого отрезка будет одной из описанных выше точек $A_n,\ P_1,\ P_2, \ldots$. Подробности рассуждений для этого случая нет смысла приводить; заметим лишь, что использование аксиомы Кантора здесь не нужно.

Предложение, аналогичное теореме 35, имеет место и для величин углов; именно

Теорема 36. *Пусть при некотором выборе единицы измерения прямой угол имеет величину ω; тогда любому числу α, $0 < \alpha < 2\omega$, соответствует угол, величина которого равна α.*

Единицу измерения углов принято выбирать так, чтобы прямому углу отвечало в качестве его величины число $\pi/2$. В этом случае единицу измерения называют *радианом.*

После того как обосновано измерение отрезков и углов, а теоремами 35 и 36 установлена возможность построения отрезка по заданной длине и угла по заданной величине, открывается путь приложения арифметики и алгебры к геометрии.

Например, арифметическими средствами теперь легко доказать следующую важную теорему.

Теорема 37. *Внутри каждого отрезка существуют точки, разделяющие его на n равных частей.*

В самом деле, пусть дан отрезок AB. Мы доказали, что каждый отрезок имеет длину; пусть длина AB равна a. Пользуясь делением чисел, найдем число a/n. Из теоремы 35 и аксиомы III.1 следует, что на полупрямой AB существуют отрезки AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}$ с одной и той же длиной a/n. Очевидно, точки A_1, $A_2, \ldots, A_{n-1}$ и являются искомыми.

Аналогичная теорема имеет место для углов.

Теорема 38. *Внутри каждого угла через вершину проходят полупрямые, разделяющие его на n равных частей.*

22. Опираясь на аксиомы четырех групп I–IV, можно ввести координатный принцип для прямой, плоскости и пространства.

Построим сначала координатную систему на прямой. Пусть a — произвольная прямая. Выберем на ней какую-нибудь точку O, которую будем называть *началом координат*, и условимся одну из двух полупрямых, определяемых на прямой a точкой O_1, называть *положительной*, другую — *отрицательной*. Кроме того, примем некоторый отрезок за *единицу измерения*.

Каждой точке M прямой a отнесем координату x, полагая абсолютную величину x равной длине отрезка OM и определяя знак x в зависимости от расположения точки M следующим образом: $x < 0$, если M находится на положительной полупрямой, и $x < 0$, если M лежит на отрицательной полупрямой. Если M совпадает с точкой O, полагаем $x = 0$. Из теоремы 35 тотчас следует предложение.

Каково бы ни было число x, на прямой существует точно одна точка, координата которой равна x.

Введем теперь систему координат на плоскости. Пусть α — произвольная плоскость; обозначим буквой O какую-нибудь точку плоскости α и буквой a — некоторую прямую плоскости α, проходящую через точку O. Тогда O разделяет прямую a на две полупрямые; назовем одну из них *положительной*, другую — *отрицательной*. Прямая a разделяет плоскость α на две полуплоскости, одну из которых мы также будем называть *положительной*, другую — *отрицательной* полуплоскостью. Если, кроме того, выбрана единица измерения длин, то согласно предыдущему, на прямой a определяется система координат с началом в точке O и с отмеченной положительной полупрямой.

Рассмотрим теперь произвольную точку M плоскости α. По теореме 25 n° 17, из точки M на прямую a можно опустить единственный перпендикуляр. Обозначим через M_x основание этого перпендикуляра. Пусть x обозначает координату точки M_x в системе координат, которая введена нами на прямой a, и y — число, абсолютная величина которого равна длине отрезка MM_x, а знак зависит от расположения точки M следующим образом: $y > 0$, если M находится в положительной полуплоскости, и $y < 0$, если M лежит в отрицательной полуплоскости. Если M лежит на прямой a, полагаем $y = 0$.

Таким образом, с каждой точкой M плоскости α сопоставлена пара чисел x,y, называемых координатами этой точки.

Очевидно, *каковы бы ни были вещественные числа x, y, на плоскости существует точно одна точка, координаты которой равны соответственно этим числам.*

В самом деле, число x всегда и однозначно определяет на прямой a точку M_x. По теореме 26 n° 17, мы можем в точке M_x восставить к прямой a единственный перпендикуляр. Предположим $y \neq 0$; по теореме 35 существует отрезок, длина которого равна абсолютной величине числа y. Отложим этот отрезок от точки M_x на перпендикуляре к прямой a так, чтобы он расположился в положительной полуплоскости, если $y > 0$, или в отрицательной, если $y < 0$. Конец отложенного отрезка обозначим буквой M. Точка M будет иметь заданные координаты x, y.

В случае $y = 0$ полагаем, что точка M совпадает с M_x. Тогда M имеет заданную координату x и $y = 0$.

Таким образом, всегда можно построить точку, координаты которой равны данным числам x, y. Единственность этой точка доказывается очевидными рассуждениями.

Чтобы ввести координаты в пространстве, выберем произвольную плоскость α и определим на ней каким-нибудь способом координатную систему (т. е. укажем точку O, прямую a и т. д.). Плоскость α разделяет пространство на два полупространства; назовем одно из них *положительным*, другое *отрицательным*. Тогда с каждой точкой M пространства мы сопоставим три координаты (x,y,z), определяя их следующими условиями: x и y совпадают с координатами основания M' перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α, в координатной системе, которую мы предположили введенной на плоскости α; z по абсолютной величине равно длине отрезка MM'; знак числа z зависит от расположения точки M следующим образом: $z > 0$, если M лежит в положительном полупространстве, и $z < 0$, если M находится в отрицательном полупространстве. Если M находится на плоскости α, то полагаем $z = 0$.

Изложенный сейчас способ введения системы координат в пространстве требует предварительного определения понятия перпендикуляра к плоскости и доказательства теоремы: из каждой точки на любую плоскость можно опустить один и только один перпендикуляр. Соответствующее определение, равно как и доказательство указанной теоремы, можно дать точно так, как это обычно дается в учебниках элементарной геометрии.

Если еще доказать существование и единственность перпендикуляра к плоскости в данной ее точке, то, опираясь на теорему 26 n° 17, можно установить справедливость утверждения:

Каковы бы ни были три вещественных числа x, y, z, в пространстве существует точно одна точка, координаты которой равны соответственно числам x, y, z.

Описанные выше системы координат на плоскости и в пространстве можно было бы назвать декартовыми. Однако следует иметь в виду, что из одних только аксиом I–IV не вытекают многие свойства, присущие декартовым координатам. Рассмотрим для простоты координатную систему на плоскости. Назовем, как это обыкновенно делают, прямую a осью x, перпендикулярную к ней в точке O прямую — осью y. Пусть M — произвольная точка плоскости, M_x и M_y — основания перпендикуляров, опущенных из M соответственно на ось x и ось y. Пользуясь аксиомами I–IV, нельзя, например, доказать, что отрезок OM_y равен отрезку M_xM. Точно так же из этих аксиом нельзя вывести хорошо известное в аналитической геометрии выражение для расстояния между двумя точками.

23. Вводя координаты на прямой, мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех точек прямой и совокупностью всех вещественных чисел. Остановимся специально на характерной особенности этого соответствия.

Как было выше показано с помощью аксиом групп I–II, в множестве точек прямой можно ввести отношение порядка так, что если точка B следует за точкой A и предшествует C, то B лежит между A и C в смысле n° 13. Установить такой порядок можно лишь двумя различными способами; это соответствует нашему наглядному представлению о двух направлениях на прямой. Выберем из этих двух порядков тот, в котором начало координат предшествует всем точкам положительной полупрямой (направление, которое тем самым определяется, будем называть положительным). Тогда, если M_1, и M_2 — две точки с координатами x_1 и x_2 и M_1 предшествует M_2, то $x_1 < x_2$.

Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 39. *Между упорядоченным множеством всех точек прямой и упорядоченным множеством всех вещественных чисел возможно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие элементы находятся в одинаковых отношениях порядка.*

Свойство прямой, выражаемое этой теоремой, называется *непрерывностью.* Так как непрерывность прямой обеспечивается аксиомами IV.1–IV.2, то аксиомы группы IV называют *аксиомами непрерывности.*

Аксиомы IV.1 и IV.2 можно заменить иными эквивалентными им требованиями, сохраняя при этом предыдущие группы I—III без измерения. Одним из важных эквивалентов аксиом группы IV является принцип Дедекинда.

В основах анализа хорошо известно предложение, выражающее принцип Дедекинда в множестве всех вещественных чисел.

Если все вещественные числа распределены на два класса так, что при этом:

1) *каждое число относится к одному и только к одному классу, и каждый класс содержит числа;*

2) *каждое число первого класса меньше каждого числа второго, то либо в первом классе существует наибольшее число, либо во втором — наименьшее.*

Смысл этого предложения заключается в отрицании двух возможностей: наличия замыкающих элементов в каждом классе и отсутствия замыкающих элементов в каждом классе.

Из теоремы 39 и принципа Дедекинда для вещественных чисел тотчас следует принцип Дедекинда для прямой.

Теорема 40. *Если все точки прямой распределены на два класса так, что при этом:*

1) *каждая точка относится к одному и только к одному классу, и каждый класс содержит точки;*
2) *каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго,*

то либо в первом классе существует точка, которой предшествуют все остальные точки первого класса, либо во втором классе существует точка, которая предшествует всем остальным точкам второго класса.

Говорят, что эта точка определяет *дедекиндово сечение* прямой.

Эквивалентность этого утверждения аксиомам группы IV выражает следующая

Теорема 41. *Если к аксиомам* I–III *присоединить принцип Дедекинда, то предложения Архимеда* IV.1 *и Кантора* IV.2 *могут быть доказаны.*

Прежде всего получим, опираясь на принцип Дедекинда и аксиомы I–III, принцип Архимеда.

Будем вести рассуждение от противного. Предположим, что для некоторого отрезка AB утверждение аксиомы Архимеда не выполнено. Это значит, что существует бесконечная последовательность конгруэнтных отрезков $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv A_nA_{n+1} \equiv \ldots$, расположенных внутри отрезка AB.

Выберем такой порядок точек прямой AB (направление), в котором точка A предшествует точке B, и разделим точки прямой AB на два класса следующим образом: к первому классу отнесем каждую точку, которая предшествует какой-нибудь точке A (а значит, и точкам A_{n+1}, A_{n+2} и т. д.), ко второму — все остальные точки прямой AB.

Очевидно, при этом требования, предъявляемые к дедекиндову сечению, будут выполнены. В самом деле:

1) каждая точка прямой AB попадает в один и только в один класс; каждый класс не пуст, так как первый заведомо содержит точки A_1,A_2,$\ldots A_n$,$\ldots$, а второй — точку B;

2) все точки первого класса предшествуют точкам второго.

Тогда в силу принципа Дедекинда, который мы сейчас принимаем как аксиому, существует точка C, производящая сечение.

Очевидно, что в первом классе нет последнего элемента, следовательно, C есть точка второго класса, предшествующая всем остальным его точкам.

По аксиоме III.1 существует точка D, которая предшествует точке C и определяет вместе с нею отрезок CD, конгруэнтный каждому из отрезков AA_1, AA_2 и т. д. Точка D не может принадлежать ко второму классу, так как предшествует точке C.

Значит, D есть точка первого класса и поэтому предшествует некоторой точке A_n. Отрезок A_nA_{n+1} является частью отрезка CD, и по теореме 29 $A_nA_{n+1} < CD$. Вместе с тем мы имеем $A_nA_{n+1} \equiv CD$. Но по теореме 27 соотношения $A_nA_{n+1} < CD$ и $A_nA_{n+1} \equiv CD$ не могут осуществляться одновременно.

Полученное противоречие завершает доказательство принципа Архимеда.

Докажем теперь принцип Кантора.

Пусть на какой-нибудь прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2 и т. д., и каждый отрезок $A_{n+1}B_{n+1}$ лежит внутри A_nB_n. Пусть, далее, не существует отрезка, меньшего всех отрезков последовательности. Мы должны доказать, что имеется точка, лежащая внутри любого отрезка A_nB_n.

Установим на прямой некоторое направление и предположим, что A_n всегда обозначает конец отрезка, предшествующий концу B_n. Разделим точки прямой a на два класса, относя к первому классу точку в том случае, когда она предшествует одной из точек A_n (следовательно, и точкам A_{n+1}, A_{n+2} и т. д.), а ко второму — все остальные точки прямой a.

Мы получим дедекиндово сечение. Действительно:

1) каждая точка прямой a попадает в один и только в один класс; при этом каждый класс не пуст, так как первый содержит точки A_1, $A_2, \ldots, A_n, \ldots$, а второй — точки B_1, $B_2, \ldots, B_n, \ldots$;

2) точки первого класса предшествуют точкам второго.

В силу принципа Дедекинда существует точка C, производящая сечение.

Очевидно, в первом классе нет последней точки, следовательно, C есть первая точка второго класса. Поэтому C предшествует всем точкам B_1, $B_2, \ldots, B_n, \ldots$ и следует за каждой из точек A_1, $A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Отсюда заключаем, что C лежит внутри любого отрезка A_nB_n.

Тем самым наше утверждение доказано полностью.

24. Как мы видели, аксиомы непрерывности позволяют доказать, что на каждой прямой можно ввести координатную систему и тем самым превратить прямую в числовую ось.

Это обстоятельство очень существенно, так как благодаря ему открывается возможность применения в геометрии основных положений анализа.

Укажем две теоремы, которые легко могут быть доказаны теперь после введения аксиом непрерывности.

Теорема 42. *Если прямая проходит через точку, лежащую внутри круга, то она пересекает окружность этого круга в двух точках*).*

Теорема 43. *Если окружность k проходит через внутреннюю и через внешнюю точки относительно окружности k', то окружности k и k' пересекаются в двух точках.*

Докажем первую из этих двух теорем.

Пусть некоторая прямая a проходит через внутреннюю точку круга k, радиус которого равен r. Опустим из центра круга k на прямую a перпендикуляр и обозначим буквой O его основание.

Введем на прямой a координатную систему с началом в точке O. Расстояние от центра круга до произвольной точки прямой a с координатой x является функцией от x, которую мы обозначим через $s(x)$. Легко видеть, что $s(x)$ непрерывна при всех x; в самом деле, по известной теореме разность двух сторон треугольника меньше третьей стороны, поэтому

$$|\Delta s| = |s(x + \Delta x) - s(x)| < |\Delta x|,$$

вследствие чего $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta s = 0$. Заметим далее, что $s(0) < r$, а $s(r) > r$; таким образом, функция $s(x) - r$ при изменении x от 0 до r меняет знак. Так как эта функция непрерывна, то существует значение аргумента $x = x_1$, заключенное между 0 и r, для которого $s(x_1) = r$. Свойства непрерывности прямой позволяют утверждать, что, каково бы ни было число x_1, на прямой a существует точка M_1 с координатой x_1 (это доказано в предыдущем параграфе). Поскольку расстояние от точки M_1 до центра круга равно r, эта точка лежит на периферии круга, т. е. является точкой пересечения прямой a и окружности круга k.

Легко усмотреть, что точка M_2 с координатой $x_2 = -x_1$ является второй точкой пересечения.

Теоремами 42 и 43 дается обоснование построений, которые обычно употребляются в учебниках элементарной геометрии при решении задач о делении отрезка и угла пополам, о проведении перпендикуляра к данной прямой из данной точки и т. п. В теореме 23 о возможности деления отрезка пополам нам приходилось избегать этих построений, так как из аксиом I–III (без аксиом непрерывности) теоремы 42 и 43 вывести нельзя.

§ 8. Группа V. Аксиома параллельности. Абсолютная геометрия

25. Определение 14. Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, называются *параллельными.*

Высказанное определение, очевидно, требует доказательства существования параллельных прямых. Это доказательство, следуя Евклиду, можно легко получить с помощью нижеприводимой теоремы.

---

*) Естественно назвать точку *внутренней* по отношению к кругу или окружности, если ее расстояние от центра меньше радиуса, и *внешней*, если это расстояние больше радиуса.

Теорема 44. *Если прямые a, b, c лежат в одной плоскости и прямая c, пересекая прямые a и b, образует с ними равные внутренние накрестлежащие углы, то прямые a и b параллельны.*

Теорема 44 доказывается в двух словах рассуждением от противного: пусть c пересекает a и b соответственно в точках A и B; предположим, что a и b не параллельны; тогда они имеют общую точку O, и в треугольнике AOB внешний угол равен одному из внутренних, с ним не смежных. Получается противоречие с теоремой 30.

Частным случаем теоремы 44 является

Теорема 45. *Две прямые, лежащие в одной плоскости и перпендикулярные к третьей прямой, параллельны между собой.*

Из теоремы 44 или 45 непосредственно вытекает

Теорема 46. *Через каждую точку, лежащую вне данной прямой, проходит прямая, параллельная данной.*

В самом деле, пусть A — произвольная точка, лежащая вне некоторой прямой a. Опустим из точки A перпендикуляр AP на прямую a и обозначим через b прямую, которая проходит через точку A перпендикулярно к AP и лежит в плоскости, содержащей AP и a. Согласно теореме 45 прямая b параллельна прямой a.

Теорема 46 дополняет определение 14, так как устанавливает существование параллельных прямых.

Для обоснования евклидовой теории параллельных достаточно к аксиомам I–IV добавить следующую аксиому V:

V (аксиома параллельности). *Пусть a — произвольная прямая и A — точка, лежащая вне прямой a; тогда в плоскости, определенной точкой A и прямой a, можно провести не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей a.*

В n° 5 мы показали, что эта аксиома эквивалентна пятому постулату Евклида.

Из аксиомы V тотчас вытекает теорема, обратная теореме 44.

Теорема 47. *Если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то получаемые при этом внутренние накрестлежащие углы равны.*

Отсюда обычным путем может быть выведена

Теорема 48. *Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым.*

Дальнейшие теоремы геометрии проводить нет смысла. Все рассуждения, которые употребляются в учебниках при доказательствах этих теорем, после всего изложенного получили точное обоснование и могут быть проведены без всяких ссылок на чертеж и наглядную очевидность *).

Заметим еще, что аксиомы I—V обосновывают декартову аналитическую геометрию. В n° 22 мы ввели координатные системы: на

*) По существу мы здесь утверждаем, что система аксиом Гильберта полна, т. е. что, приняв все его аксиомы, можно провести строго логическое развертывание геометрии. Точное определение понятия о полноте системы аксиом и доказательство полноты системы Гильберта даются в гл. IV.

прямой, на плоскости и в пространстве. Теперь, располагая аксиомой V, а следовательно, евклидовой теорией параллельных, теорией подобия фигур и, в частности, теоремой Пифагора, можно доказать, что расстояние между двумя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ определяется известной формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

что плоскость определяется уравнением первой степени

$$ux + vy + wz + t = 0,$$

и т. д. Тем самым открывается возможность доказывать теоремы геометрии арифметическими средствами.

26. В главе I мы привели примеры попыток доказательства постулата Евклида о параллельных. Авторы этих доказательств ставили себе задачей вывести логическим путем V постулат из остальных постулатов Евклида. Следует заметить, что хотя эта задача стояла перед геометрами на протяжении многих веков, она до конца XIX столетия оставалась неопределенной.

Действительно, определения и аксиомы Евклида столь несовершенны, что не могут служить базой для развертывания строгих логических построений. Интересно, что проблема V постулата, уже будучи решенной Лобачевским, все еще не была точно сформулирована, так как во времена Лобачевского недостатки евклидова обоснования геометрии оставались неустраненными.

После изложения аксиом Гильберта мы получаем возможность проблему V постулата сформулировать точно следующим образом:

Приняв аксиомы, перечисленные в группах I–IV, *вывести из них аксиому* V.

Результат Лобачевского мы можем теперь выразить также с полной определенностью:

Аксиома V *не является следствием аксиом* I–IV.

Этот же результат может быть формулирован иначе:

Если к аксиомам I–IV *присоединить положение, отрицающее справедливость аксиомы* V, *то следствия всех этих положений будут составлять логически непротиворечивую систему* (неевклидову геометрию).

Основные факты теории параллельных геометрии Лобачевского и доказательство ее непротиворечивости даны в главе III.

27. Систему следствий, вытекающих из одних только аксиом I–IV, называют *абсолютной геометрией* (термин Я. Больяй),

Очевидно, абсолютная геометрия является общей частью евклидовой и неевклидовой геометрий, так как предложения, которые могут быть доказаны с помощью аксиом I–IV, в равной мере верны как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского.

Все теоремы, формулированные нами в этой главе, до теоремы 46 включительно, являются теоремами абсолютной геометрии. К числу их мы присоединим еще следующие, вытекающие из работ Саккери, Ламберта и Лежандра теоремы, которые были доказаны в n° 8.

Теорема 49. *Дефект $D(\Delta)$ любого треугольника удовлетворяет неравенству*

$$D(\Delta) \geqslant 0.$$

Или в иной формулировке:

Сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых.

Теорема 50. *Углы при верхнем основании четырехугольника Саккери не могут быть тупыми (т. е. гипотеза тупого угла противоречива).*

Теорема 51. *Если существует один треугольник с положительным дефектом, то каждый треугольник имеет положительный дефект.*

Или в иной формулировке:

Если существует один треугольник, сумма углов которого меньше двух прямых, то каждый треугольник имеет сумму углов, меньшую двух прямых.

Теорема 52. *Если принять гипотезу острого угла для одного четырехугольника Саккери, то ее тогда необходимо отнести и к каждому четырехугольнику Саккери.*

Теорема 53. *Гипотеза прямого угла Саккери и допущение Лежандра о существовании треугольника с суммой углов, равной двум прямым, эквивалентны аксиоме V.*

Теорема 54. *Если существует острый угол такой, что перпендикуляр, восставленный в любой точке одной его стороны, встречает другую сторону, то утверждение аксиомы V может быть доказано.*

Глава III

НЕЕВКЛИДОВА ТЕОРИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

§ 1. Определение параллельных по Лобачевскому

28. Теперь мы приступим к изложению основных фактов неевклидовой теории параллельных. В основание ее мы положим аксиомы абсолютной геометрии I–IV и следующую аксиому Лобачевского.

Существуют такая прямая a и точка A, не лежащая на ней, что через точку A проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую a и лежащих с ней в одной плоскости.

Докажем, что *в той же плоскости через точку A проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающих прямую a.*

Пусть a_1 и a_2 — две прямые, проходящие через A и не пересекающие a (рис. 30); существование их обеспечивается аксиомой Лобачевского. Возьмем на прямой a_2 точку B_2 таким образом, чтобы она оказалась расположенной с той стороны от прямой a_1, с какой н е л е ж и т прямая a. Соединим B_2 с какой-нибудь точкой B на прямой a. Отрезок B_2B пересечет прямую a_1 в некоторой точке B_1. Обозначим через M произвольную точку отрезка B_1B_2. Легко убедиться, что прямая AM не пересекает прямую a. В самом деле, если прямая AM имеет с прямой a точку пересечения C, лежащую в направлении от A к M, то образуется треугольник MBC, сторону которого MB пересекает прямая a_1. По аксиоме Паша II.4, прямая a_1 тогда должна пересечь прямую a, что исключено. Если же AM имеет с прямой a точку пересечения C', лежащую в направлении от M к A, то образуется треугольник MBC', сторону которого MC' пересекает прямая a_2. Тогда по аксиоме Паша прямая a_2 должна пересечь прямую a, но это также исключено.

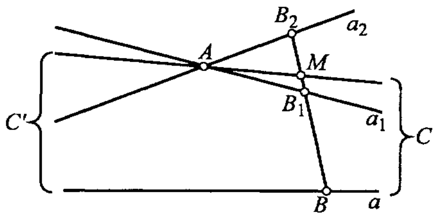


Рис. 30

Таким образом, мы можем заключить, что если a_1 и a_2 проходят через A и не пересекают a, то все прямые, которые проходят через A

в одной определенной паре вертикальных углов, составленных прямыми a_1 и a_2, не пересекают прямую a.

Аксиомой Лобачевского отрицается свойственная евклидовой геометрии единственность параллельной, по крайней мере, для некоторой определенной точки и определенной прямой. Однако легко убедиться, что *если отношение, утверждаемое постулатом Лобачевского, свойственно каким-нибудь определенным точке и прямой, то оно свойственно всяким точке и прямой.*

Докажем это от противного.

Пусть, вопреки нашему утверждению, через некоторую точку B, не лежащую на прямой b, проходит только одна прямая b', не встречающая прямой b и лежащая с ней в одной плоскости (рис. 31).

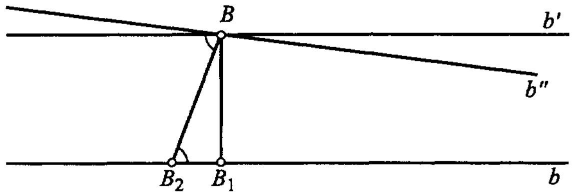


Рис. 31

Опустим из точки B перпендикуляр BB_1 на прямую b и возьмем на b еще какую-нибудь точку B_2, отличную от B_1.

Легко видеть, что прямая BB_2 образует с прямыми b и b' равные внутренние накрестлежащие углы. В самом деле, если бы это было не так, то можно было бы провести через B прямую b'', отличную от b' и такую, что прямая BB_2 составила бы с прямыми b и b'' равные накрестлежащие углы. Но тогда прямая b'', с одной стороны, не могла бы иметь общей точки с b, как это следует из теоремы 44 главы II, а с другой стороны, не могла бы не встречать прямой b, так как единственной прямой, проходящей через B и не встречающей прямую b, является, по нашему предположению, прямая b. Аналогично и прямая BB_1 образует с прямыми b и b' равные накрестлежащие углы; значит, BB_1 является перпендикуляром не только к прямой b, но и к прямой b'. Из этих обстоятельств тотчас следует, что треугольник BB_1B_2 имеет сумму внутренних углов, равную двум прямым. Тогда в силу теоремы 51 главы II сумма углов всякого треугольника равна двум прямым. Отсюда в силу теоремы 53 вытекает V постулат Евклида и, следовательно, единственность прямой, проходящей через произвольно данную точку и не встречающей произвольно данную прямую.

Получается противоречие с аксиомой Лобачевского, отрицающей эту единственность по отношению к прямой a и точке A.

Таким образом, приняв аксиому Лобачевского, мы должны утверждать следующее предложение.

Теорема I. *Какие бы прямая и точка вне ее ни были заданы, через эту точку проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающих данную.*

Здесь имеются в виду, конечно, прямые, лежащие в одной плоскости с данной прямой. Мы не будем больше делать подобной оговорки, полагая, что наше рассмотрение (до n° 33) имеет планиметрический характер, т. е. что рассматриваются точки и прямые одной определенной плоскости.

Согласно предыдущему, как следствие аксиомы Лобачевского, мы должны:

1) для каждого четырехугольника Саккери принять гипотезу острого угла;

2) сумму углов каждого треугольника полагать меньшей двух прямых.

29. В отличие от определения Евклида, по Лобачевскому параллельными к данной прямой называются только некоторые особые прямые из тех, которые не имеют общих точек с данной. Мы изложим сейчас определение прямых, параллельных по Лобачевскому. Оно не так просто, как у Евклида, и требует некоторых предварительных рассмотрений.

Пусть a — какая-нибудь прямая и A — точка вне ее (рис. 32). Опустим из A перпендикуляр AP на прямую a. Прямая AP разделяет плоскость на две части, одну из которых мы будем условно называть "правой" полуплоскостью, другую — "левой". Точно так же прямая a разделяет плоскость на две части. Ту из них, в которой находится точка A, мы будем называть "верхней".

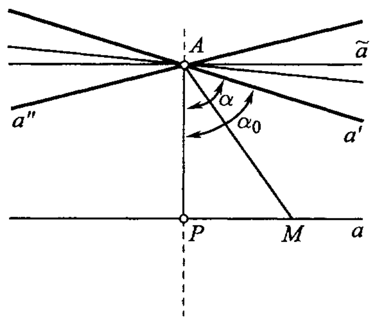


Рис. 32

Обозначим через $\widetilde{a}$ прямую, перпендикулярную к AP в точке A. Из абсолютной геометрии известно, что прямые a и $\widetilde{a}$ не имеют общей точки. Вследствие постулата Лобачевского существует бесчисленное множество прямых, отличных от $\widetilde{a}$ и также не пересекающих прямой a. Пусть будет α угол, который составляет правая полупрямая какой-нибудь из этих прямых с полупрямой AP, и α_0 — нижняя грань множества таких углов α*).

Очевидно, имеют место неравенства

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}.$$

*) То есть, α_0 не больше *каждого* из углов указанного множества ($\alpha_0 \leqslant \alpha$), но если α_0 увеличить на сколь угодно малое положительное ε, то $\alpha_0 + \varepsilon$ превзойдет *некоторый* угол из этого множества.

В самом деле, α_0 больше угла PAM, где M — любая точка прямой a, расположенная правее P; следовательно, $\alpha_0 > 0$. Так как $\widetilde{a}$ — не единственная прямая, не имеющая общей точки с a, то $\alpha_0 < \pi/2$.

Проведем через A прямую a' так, чтобы ее правая полупрямая: составила с AP угол, равный α_0.

Легко видеть, что a' не пересекает прямую a. Действительно, если прямые a и a' могут пересекаться, то только в правой полуплоскости. Предположим, что a и a' имеют общую точку R.

Возьмем на прямой a точку R', лежащую правее R, и положим $\alpha' = \angle PAR'$. Но тогда $\alpha_0 < \alpha'$, и нижняя грань величин α будет больше α_0, что противоречит определению числа a_0.

Обозначим через a'' прямую, проходящую через точку A и расположенную симметрично к a' относительно AP.

Прямые a' и a'' образуют две пары вертикальных углов. Всякая прямая, проходящая через A в той паре вертикальных углов, в которой находится точка P, пересекает прямую a, а всякая прямая, проходящая через A в другой паре вертикальных углов, прямую a не встречает. Сами прямые a' и a'', как было сейчас доказано, принадлежат к числу прямых, не встречающих прямую a, и являются в совокупности этих прямых граничными прямыми. Из них прямую a' мы будем называть *правой граничной прямой*, a'' — левой.

Имеет место следующая важная

Теорема II. *Пусть даны прямые a и a'. Если a' является правой граничной прямой в совокупности прямых, проходящих через некоторую ее точку и не встречающих прямую a, то a' является правой граничной прямой в аналогичной совокупности прямых, проходящих через всякую другую ее точку.*

Доказательство. Обозначим буквой A точку на прямой a', относительно которой выполнено условие теоремы, и опустим из A перпендикуляр AP на прямую a.

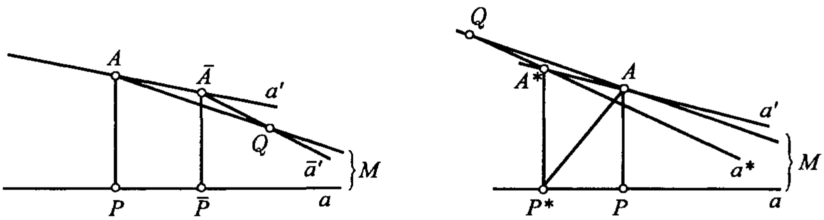


Рис. 33

Докажем сначала справедливость утверждения теоремы для точек, лежащих правее A. Пусть будет $\bar{A}$ — какая-нибудь из таких точек и $\bar{A}\bar{P}$ — перпендикуляр на прямую a (рис. 33а). Нам достаточно установить, что любой луч из $\bar{A}$, расположенный в правой полуплоскости относительно $\bar{A}\bar{P}$ "ниже" прямой a', встречает прямую a. Пусть будет $\bar{a}'$ такой луч. Возьмем на $\bar{a}'$ произвольную точку Q

и построим луч AQ. Так как для точки A выполнено условие теоремы и луч AQ лежит в правой полуплоскости относительно AP "ниже" прямой a', то этот луч должен встретить прямую a в некоторой точке. Обозначим ее буквой M. Поскольку луч $\bar{a}'$ пересекает одну из сторон треугольника APM, именно сторону AM, то согласно аксиоме Паша II.4 он должен пересечь также одну из двух других сторон этого треугольника*). Но со стороной AP луч $\bar{a}'$ не может иметь общей точки, так как AP лежит в левой полуплоскости относительно $\bar{A}\bar{P}$. Следовательно, луч $\bar{a}'$ имеет общую точку со стороной PM (очевидно, правее точки P), что и нужно было доказать.

Рассмотрим теперь произвольную точку A^*, лежащую на прямой a' левее точки A (рис. 33б). Пусть будет A^*P^* перпендикуляром к прямой a и a^* — какой-нибудь луч из A^*, расположенный в правой полуплоскости относительно A^*P^* ниже прямой a'. Нам нужно доказать, что a^* имеет с прямой a общую точку. Возьмем на дополнении луча a^* произвольную точку Q и соединим ее прямою с точкой A. По нашему предположению, в совокупности прямых, проходящих через A и не встречающих a, прямая a' является граничной. Поэтому прямая QA встретит прямую a в некоторой точке M, лежащей правее P. Заметим теперь, что луч a^* проходит внутри угла AA^*P^* через его вершину, следовательно, этот луч пересекает отрезок AP^* (согласно теореме 11а главы II). Но тогда по аксиоме Паша II.4 луч a^* должен пересечь либо сторону AM, либо сторону P^*M треугольника AP^*M. Так как прямая a^* имеет с прямой AM общую точку Q, лежащую вне отрезка AM, то должно иметь место пересечение луча a^* именно со стороной P^*M. Таким образом, луч a^* и прямая a пересекаются, и тем самым теорема доказана.

Аналогичное доказательство можно привести по отношению к тому случаю, когда прямая a' является левой граничной прямой.

Теперь мы определим понятие параллельности в геометрии Лобачевского.

По Лобачевскому, *прямая a' называется параллельной к прямой a, если в совокупности прямых, проходящих через некоторую точку прямой a' и не встречающих прямой a, прямая a' является граничной.*

Из теоремы II следует, что если некоторая точка прямой a' обладает свойством, указанным в данном сейчас определении, то *этим свойством обладает всякая точка прямой a'.*

---

*) Аксиома Паша II.4 относится к треугольнику и прямой. По отношению к полупрямой (лучу) аксиома Паша применима, если начало полупрямой находится вне треугольника, и неприменима, если начало находится внутри треугольника.

Применяя аксиому Паша к треугольнику и полупрямой, мы должны были бы предварительно оговорить, что начало полупрямой расположено вне треугольника. Мы не будем, однако, каждый раз делать такой оговорки, пропуская, таким образом, в этом случае и в ряде других случаев детали рассуждений, если они достаточно очевидны. Слишком скрупулезное изложение затруднило бы чтение книги мелочами, не являющимися интересными или важными по существу.

Отметим одно из двух направлений прямой a (на рис. 34 направление указывается стрелкой) и из некоторой точки A прямой a' опустим на прямую a перпендикуляр AP. Отрезок AP составляет с прямой a' два смежных угла, из которых один будет острым, другой — тупым. Если острый угол окажется с той стороны прямой AP, в которую направлена нами прямая a, то мы будем говорить, что *a' параллельна прямой a в отмеченном направлении* (на чертежах направление параллельности мы будем отмечать стрелками на обеих прямых).

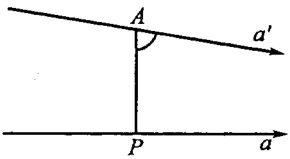


Рис. 34

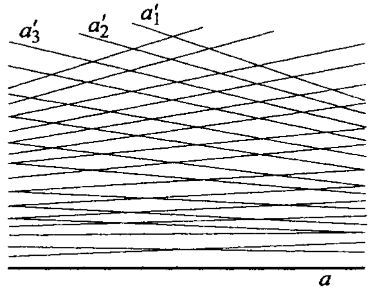


Рис. 35

Употребляя введенное нами условное обозначение сторон плоскости относительно прямой AP ("правая" и "левая"), можно описать направление параллельности иным способом: в совокупности прямых, проходящих через A и не пересекающих прямую a, прямая a' может быть правой или левой граничной прямой; в первом случае мы говорим, что прямая *a' параллельна прямой a вправо*, во втором случае, что *a' параллельна a влево*.

Таким образом, через каждую точку плоскости проходят две прямые, параллельные данной прямой. Они параллельны ей в двух различных направлениях (см. рис. 35; прямые, параллельные прямой a вправо, обозначены буквами $a'_1, a'_2, \ldots$). В частности, имеет место следующая

Теорема III. *Через каждую точку плоскости проходит в точности одна прямая, параллельная данной прямой в определенном направлении.*

30. На основании высказанного выше определения параллельности мы не можем еще говорить о двух параллельных *друг другу* прямых. Впоследствии мы установим взаимность отношения параллельности, т.е. что если одна из двух данных прямых параллельна другой, то вторая параллельна первой. Сначала нам придется доказать некоторые вспомогательные предложения.

Лемма I. *Пусть a и b — две произвольные прямые, O — точка на прямой b, OA — перпендикуляр, опущенный из O на прямую a; пусть, кроме того, OA составляет с прямой b неравные смежные углы. Тогда, если x обозначает расстояние от точки O до точки,* *взятой на прямой b со стороны тупого угла, а $y = f(x)$ — длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую a, то $f(x)$ является непрерывной монотонной и безгранично возрастающей функцией.*

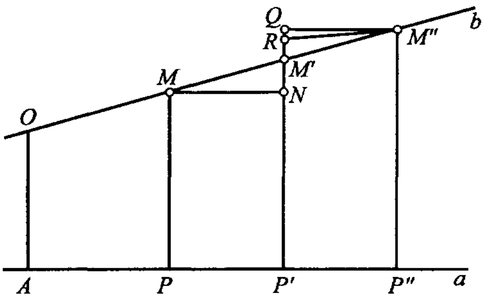


Рис. 36

Доказательство. Возьмем на прямой b две точки M и M' так, чтобы точка M находилась между O и M' (рис. 36). Опустим перпендикуляры OA, MP и $M'P'$ на прямую a и положим:

$$OM = x, \quad OM' = x', \\ MP = y, \quad M'P' = y';$$

при этом $x' > x$.

Заметим, что в силу аксиомы Лобачевского сумма внутренних углов четырехугольника $OMPA$ меньше четырех прямых; отсюда и из того, что внутренние углы при вершинах A и P прямые, следует, что $\angle PMM'$ больше $\angle AOM$. Следовательно, $\angle PMM'$ — тупой.

Отложим на прямой $P'M'$ от точки P' отрезок $P'N = PM$. Соединив точки M и N, мы получим четырехугольник Саккери $PNMP'$; $\angle PMN$ как угол при верхнем основании этого четырехугольника — острый. Так как $\angle PMM'$ тупой, а $\angle PMN$ острый, то точка N находится между точками P' и M', т. е. $P'M' > PM$. Таким образом, при $x' > x$ также $y' > y$. Монотонное возрастание функции $f(x)$ этим доказано.

Положим теперь $\Delta x = x' - x$ и $\Delta y = y' - y$ $(\Delta x > 0, \Delta y > 0)$. Очевидно, $\Delta x = MM'$, $\Delta y = NM'$. Из неравенства

$$NM' < NM + MM',$$

приняв во внимание, что NM короче MM', так как в треугольнике NMM' сторона NM лежит против острого угла, а сторона MM' — против тупого, найдем:

$$NM' < 2MM'$$

или $\Delta y < 2\Delta x$.

Рассмотрев аналогичным образом случай, когда точка M' лежит между O и M, установим неравенство

$$|\Delta y| < 2|\Delta x|,$$

справедливое при всех возможных положениях точек M и M'. Отсюда следует, что $\Delta y \to 0$, когда $\Delta x \to 0$, т. е. $f(x)$ действительно является непрерывной функцией.

Остается доказать, что при безграничном возрастании x функция $f(x)$ также возрастает безгранично. Для этого возьмем на прямой b точку M'' так, чтобы было $MM' = M'M''$, и опустим на прямую a перпендикуляр $M''P''$. Пусть точке M'' соответствует $x'' = OM''$ и $y'' = f(x'') = M''P''$. Введем обозначения: $h_1 = y' - y$ и $h_2 = y'' - y'$; тогда $MP = y$, $M'P' = y + h_1$, $M''P'' = y + h_1 + h_2$. Отложим на прямой $P'M'$ от точки P' в сторону M' отрезки $P'N \equiv PM$, $P'Q \equiv P''M''$ и от точки M' отрезок $M'R \equiv M'N$. Очевидно, $NM' = h_1$, $M'R = h_1$ и $M'Q = h_2$. Теперь заметим, что треугольники $M'NM$ и $M'RM''$ равны друг другу, так как имеют равные углы, заключенные между равными сторонами. В силу этого $\angle M'RM'' \equiv \angle M'NM$. Но $\angle M'NM$ является смежным к острому $\angle MNP'$ в четырехугольнике Саккери. Таким образом, этот угол, а следовательно, и равный ему $\angle M'RM''$, — тупой. Угол $M'QM''$ как угол при верхнем основании четырехугольника Саккери $P'QM''P''$ — острый. Из сравнения $\angle M'QM''$ и $\angle M'RM''$ следует, что точка R лежит между точками M' и Q, т. е. $M'Q > M'R$, или $h_2 > h_1$.

Отсюда имеем: $MP = y, M'P' = y + h_1, M''P'' > y + 2h_1$. Таким образом, если мы положим $MM' = M'M'' = s$ и возьмем последовательность $x_1 = x, x_2 = x + s, x_3 = x + 2s, \ldots$, то получим соответственно $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y + h_1$, $f(x_3) > y + 2h_1$, $f(x_4) > y + 3h_1$ и т. д. Из этих соотношений непосредственно усматриваем, что при неограниченном возрастании x функция $f(x)$ возрастает безгранично. Лемма доказана.

Заметим, что лемма I принадлежит абсолютной геометрии, хотя рассуждения, которые мы проводили, существенно опирались на свойства четырехугольника Саккери в системе Лобачевского. В евклидовой теории параллельных доказательство этой леммы проводится без малейшего труда. При этом соотношения, полученные нами в конце доказательства, заменяются соответственно равенствами $MP = y$, $M'P' = y + h_1$, $M''P'' = y + 2h_1, \ldots$, выражающими линейный характер функции $y = f(x)$.

Важным частным случаем леммы I является следующее предложение.

Лемма II. *Если x обозначает расстояние от вершины угла до точки, лежащей на стороне этого угла, а $y = f(x)$ — длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на другую сторону, то $f(x)$ является непрерывной, монотонной и безгранично возрастающей функцией.*

Леммы I и II найдут себе применение несколько раз.

В первую очередь мы используем лемму II, чтобы доказать взаимность отношения параллельности.

Теорема IV. *Если одна из двух прямых параллельна другой в некотором направлении, то вторая параллельна первой в том же направлении.*

Доказательство. Пусть прямая a параллельна прямой b в некотором направлении. Нам нужно доказать, что прямая b параллельна прямой a в том же направлении.

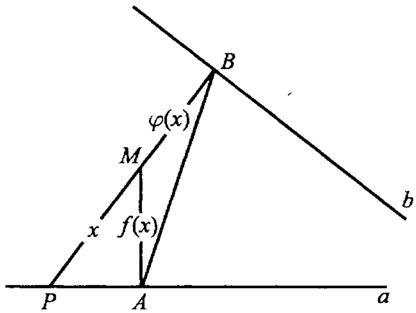


Рис. 37

Прежде всего установим, что существует точка, равноудаленная от прямых a и b. Это обстоятельство, наглядно совершенно очевидное, непосредственно вытекает из леммы I. В самом деле, обозначим через P какую-нибудь точку прямой a и через PB — перпендикуляр, опущенный из P на прямую b (рис. 37). Возьмем на отрезке PB произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр MA на прямую a. Положим $PB = s$, $PM = x$ и $MA = f(x)$; введем, кроме того, функцию $\varphi(x) = s - x$. Очевидно, $f(x)$ и $\varphi(x)$ обозначают соответственно расстояния от точки M до прямых a и b. В силу леммы I $f(x)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция; $\varphi(x)$, как видно из ее выражения, есть функция также непрерывная и монотонно убывающая. Так как $f(0) < \varphi(0)$, а $f(s) > \varphi(s)$, то существует, и притом единственное, значение x, $0 < x < s$, такое, что $f(x) = \varphi(x)$. Этому значению x соответствует точка M, равноудаленная от прямых a и b, т. е. такая, что $MA = MB$.

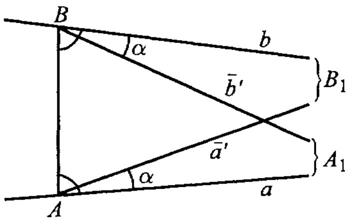


Рис. 38

Для этой точки M прямая AB наклонена к прямым a и b под равными углами; эта прямая называется *секущей равного наклона* для прямых a и b.

После того как показано существование секущей равного наклона, взаимность отношения параллельности становится наглядно очевидной. Проведем, однако, точное доказательство теоремы. Так как по условию прямая a параллельна прямой b, то a и b не пересекаются. Таким образом, чтобы убедиться в параллельности прямой b по отношению к a, нужно установить, что b есть граничная прямая среди прямых, проходящих через некоторую ее точку и не пересекающих a. В качестве такой точки возьмем точку B (рис. 38).

4 — 10891

Обозначим через $\bar{b}$ луч прямой b, имеющий началом точку B и направленный в сторону параллельности прямой a к прямой b. Этот луч не пересекает прямую a. Нужно показать, что всякий другой луч $\bar{b}'$ с началом B, отклоненный от луча $\bar{b}$ в сторону прямой a на произвольно малый угол α, встречает прямую a.

Пусть задан угол α. Проведем через точку A луч $\bar{a}'$, расположенный от прямой a со стороны прямой b и составляющий с направлением параллельности прямой a угол α. Так как прямая a параллельна b, то луч $\bar{a}'$ должен встретить прямую b в некоторой точке B_1. Отложим на прямой a в сторону параллельности отрезок AA_1, равный отрезку BB_1. Так как AB есть секущая равного наклона к прямым a и b, то треугольник BB_1A равен треугольнику AA_1B. Отсюда следует, что луч с началом B, проходящий через точку A_1, составляет с прямой b данный угол α в сторону прямой a, т. е. совпадает с лучом $\bar{b}'$. Этот луч, по построению, пересекает прямую a. Итак, луч, проходящий через B и отклоненный от луча $\bar{b}$ в сторону прямой a на произвольно малый угол, встречает эту прямую. Следовательно, прямая b параллельна прямой a. Тем самым теорема доказана.

Рассмотрим две *прямые a и c, параллельные друг другу.* Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости; обозначим через Π_{ac} ту из них, которая содержит прямую c. Точно так же прямая c разделяет плоскость на две полуплоскости; обозначим через Π_{ca} ту из них, которая содержит прямую a. Общую часть полуплоскостей Π_{ac} и Π_{ca} условимся называть внутренней зоной плоскости относительно прямых a и c. Пусть b — *третья прямая, параллельная одной из двух прямых a и c в том же направлении, в каком они параллельны между собой.* Легко понять, что в этом случае прямая b не может пересекаться ни с прямой a, ни с прямой c. В самом деле, предположим, например, что прямая b параллельна прямой c; тогда b и c не могут иметь пересечения как параллельные прямые; но a и b также не могут пересекаться, так как в противном случае через общую их точку проходили бы две прямые, параллельные к прямой c в одном и том же направлении, что невозможно (см. теорему III).

Лемма III. *Если при указанных выше условиях прямая b расположена во внутренней зоне плоскости относительно прямых a и c, то она пересекает каждый отрезок, соединяющий какую-нибудь точку прямой a с какой-нибудь точкой прямой c.*

Доказательство. Будем предполагать, что b параллельна c. Возьмем на прямой a произвольную точку A, на прямой c — произвольную точку C; проведем отрезок AC. Обозначим через $\bar{c}$ луч прямой c, идущий из точки C в направлении параллельности прямых a и c (рис. 39). Пусть $\bar{c}'$ — луч, идущий из точки C внутрь угла, определяемого лучами CA и $\bar{c}$; кроме

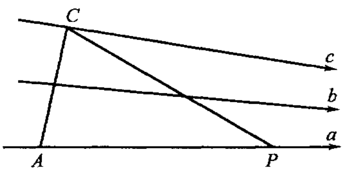


Рис. 39

того, пусть $\bar{c}'$ лежит со стороны параллельности от перпендикуляров из точки C к прямым a и b. По условию параллельности прямых a и c луч $\bar{c}'$ должен пересечь прямую a в некоторой точке P. Точно так же по условию параллельности прямых c и b луч $\bar{c}'$ должен пересечь прямую b. Так как прямая b находится во внутренней зоне относительно прямых a и c, то точка пересечения луча $\bar{c}'$ с прямой b должна лежать между точками C и P. Отсюда и по аксиоме Паша заключаем, что прямая b пересечет или отрезок AC, или отрезок AP. Но отрезок AP она не может пересечь, так как не может иметь пересечения с прямой a. Следовательно, прямая b пересекает отрезок AC. Лемма доказана.

Следующая теорема устанавливает транзитивность отношения параллельности.

Теорема V. *Две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же самом направлении.*

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны в одном и том же направлении к прямой c. Отсюда, как и выше, заключаем, что прямые a и b не могут пересекаться (в противном случае через общую их точку проходили бы две прямые, параллельные c в одном и том же направлении, что невозможно).

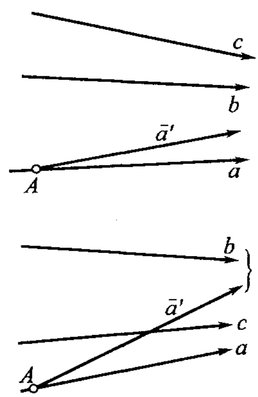


Рис. 40

Чтобы доказать, что a и b параллельны, рассмотрим два случая (рис. 40).

1. Прямые a и b находятся с одной стороны от прямой c.

2. Прямые a и b находятся по разные стороны от прямой c. В первом случае одна из двух прямых a, b лежит во внутренней зоне плоскости, определяемой другой прямой вместе с прямой c. Пусть, например, b лежит во внутренней зоне относительно a и c.

Возьмем на прямой a произвольную точку A и обозначим через $\bar{a}$ луч прямой a, идущий из точки A в направлении параллельности прямых a и c. Нам нужно доказать, что луч a является граничным в совокупности лучей при точке A, не пересекающих прямую b. Допуская обратное, предположим, что существует луч $\bar{a}'$, который выходит из точки A в сторону параллельности (т. е. лежит со стороны параллельности от перпендикуляров из точки A к прямым b и c), расположен ближе к прямой b, чем луч a, но прямую b не пересекает. Однако в силу предыдущей леммы луч $\bar{a}'$ не может тогда пересечь и прямую c, что противоречит параллельности прямых a и c, так как луч $\bar{a}$ в этом случае не будет граничным в совокупности лучей, исходящих из A и не пересекающих прямую c. Обратимся ко второму случаю. Пусть a и b лежат по разные стороны от c; тогда

b и c лежат по одну сторону от a. Проведем через произвольную точку A прямой a луч $\bar{a}'$ так, чтобы он был к прямым b и c ближе прямой a и проходил в сторону параллельности от перпендикуляров из точки A к прямым b и c. Так как прямые a и c параллельны, то луч $\bar{a}'$ пересечет прямую c, а вследствие параллельности прямых c и b этот луч пересечет и прямую b. Таким образом, в совокупности лучей, проходящих через A и не пересекающих прямую b, луч $\bar{a}$ является граничным; следовательно, прямые a и b параллельны между собой (в том же направлении, в каком они параллельны прямой c). Теорема доказана.

Установленные в этом параграфе предложения показывают, что хотя определение параллельности в геометрии Лобачевского довольно сложно, но совокупность прямых, параллельных данной прямой в определенном направлении, обладает теми же основными свойствами, что и совокупность параллельных прямых в евклидовой геометрии.

§ 2. Особенности расположения параллельных и расходящихся прямых

31. Если две прямые не пересекаются и не параллельны друг другу, они называются *расходящимися* *). Через каждую точку плоскости проходят две прямые, параллельные какой-нибудь данной прямой, и бесконечно много расходящихся с нею (теорема I).

Мы рассмотрим некоторые свойства взаимного расположения параллельных и расходящихся прямых. Результаты, которые мы при этом получим, позволят нам вполне наглядно представить себе различие между параллельными и расходящимися прямыми.

Отметим прежде всего следующие две теоремы.

Теорема VI. *Две прямые, перпендикулярные к третьей, являются расходящимися.*

Доказательство усматривается непосредственно. В самом деле, то, что две прямые a и b, перпендикулярные в точках A и B к третьей прямой c, не имеют общей точки, известно нам как предложение абсолютной геометрии. Но эти прямые и не параллельны, так как через точку A проходит бесконечно много прямых, не пересекающих прямой b, и среди них прямая a не является граничной, а следовательно, не параллельна прямой b. Теорема VI в неявной форме уже была установлена в n° 29.

Теорема VII. *Две прямые, которые при пересечении с третьей образуют равные накрестлежащие или соответственные углы, являются расходящимися.*

Доказательство. Эта теорема является обобщением предыдущей и вместе с тем легко к ней приводится. Обозначим буквами a и b

*) Термин "расходящиеся прямые" оправдан особенностями взаимного расположения этих прямых, см. ниже теорему VIII.

две данные прямые и буквой c третью прямую, их секущую (рис. 41). Пусть A и B будут точки, в которых прямая c пересекает прямые a и b, O — середина отрезка AB. Опустим из точки O перпендикуляры OP и OQ на прямые a и b.

В прямоугольных треугольниках OAP и OBQ имеем: $OA = OB$ вследствие выбора точки O, $\angle OAP = \angle OBQ$ по условию теоремы. Отсюда следует, что треугольник OAP равен треугольнику OBQ. В частности, $\angle BOQ = \angle AOP$ и, следовательно, отрезки OP и OQ лежат на одной прямой PQ, к которой прямые a и b перпендикулярны. По теореме VI эти прямые являются расходящимися, что и нужно было установить.

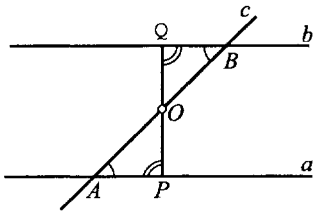


Рис. 41

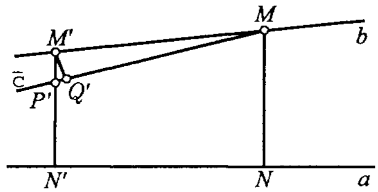


Рис. 42

Теперь мы докажем, что любые две расходящиеся прямые имеют точно один общий перпендикуляр. Следовательно, *наличие общего, и притом только одного, перпендикуляра является характеристической особенностью расходящихся прямых.*

Прежде всего ясно, что в геометрии Лобачевского две прямые не могут иметь двух общих перпендикуляров. В самом деле, если AB и CD перпендикулярны к прямым AC и BD, то четырехугольник $ABCD$ имеет сумму углов, равную четырем прямым, что невозможно, так как каждый из треугольников ABC и BCD имеет сумму углов, меньшую двух прямых. Таким образом, единственность общего перпендикуляра к двум прямым устанавливается сразу.

Доказательство существования общего перпендикуляра к двум расходящимся прямым не так просто.

Рассмотрим какие-нибудь две расходящиеся прямые a и b (рис. 42). Пусть будет MN перпендикуляр, опущенный из произвольной точки M прямой b на прямую a. Если MN перпендикулярен и к b, то нечего доказывать. Предположим, что MN не перпендикулярен к b, и отметим на прямой b положительное направление так, чтобы оно составляло с перпендикуляром MN тупой угол. Тогда, согласно лемме I, длина MN при перемещении точки M в положительном направлении монотонно и неограниченно возрастает.

Мы докажем, что, начиная с некоторого момента, длина MN неограниченно возрастает также и при перемещении точки M в отрицательном направлении.

Прямая MN разбивает плоскость на две полуплоскости; ту из них, в которую направлена положительная полупрямая прямой b, условимся называть положительной, другую — отрицательной.

Проведем через точку M в отрицательной полуплоскости луч $\bar{c}$, параллельный прямой a.

Так как a и b являются расходящимися прямыми, то луч $\bar{c}$ расположен ближе к прямой a, чем отрицательная полупрямая прямой b. Поэтому, если мы возьмем на прямой b в отрицательной полуплоскости какую-нибудь точку M' и опустим перпендикуляр $M'N'$ на прямую a, то этот перпендикуляр встретит луч $\bar{c}$ в точке P', лежащей на отрезке $M'N'$. Таким образом, $M'N' > M'P'$. Опустим теперь перпендикуляр $M'Q'$ на луч $\bar{c}$; очевидно, $M'P' > M'Q'$ и, следовательно, $M'N' > M'Q'$. Но согласно лемме II расстояние от переменной точки на одной стороне угла до другой стороны неограниченно возрастает при удалении этой точки от вершины; в силу этого при удалении точки M' в отрицательном направлении $M'Q'$ монотонно и неограниченно возрастает. Так как $M'N' > M'Q'$, то $M'N'$ также будет в конце концов неограниченно возрастать.

Введем на прямой b линейную координатную систему, выбрав произвольно начало координат и предполагая, что возрастание координаты происходит, например, в положительном направлении. Обозначим через x координату переменной точки M и через $y = f(x)$ длину перпендикуляра MN к прямой a. По предыдущему, $f(x)$ является всюду положительной непрерывной функцией, значение которой неограниченно возрастает, когда x стремится к положительной или отрицательной бесконечности. Отсюда следует, во-первых, что $f(x)$ имеет положительный минимум $f(x_0)$ и, во-вторых, что каждое значение, большее $f(x_0)$, функция $f(x)$ принимает, по крайней мере, при двух различных значениях аргумента. Пусть будут x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$ такие два значения x, что $f(x_1) = f(x_2)$. Обозначим через M_1 и M_2 точки с координатами x_1 и x_2 и через M_1N_1 и M_2N_2 — опущенные из них на прямую a перпендикуляры. В силу выбора точек M_1 и M_2, четырехугольник $N_1M_1M_2N_2$ является четырехугольником Саккери и, значит, симметричен относительно перпендикуляра к середине нижнего основания. Отсюда следует, что перпендикуляр M_0N_0, опущенный из середины M_0 отрезка M_1M_2 на прямую a, есть общий перпендикуляр прямых a и b. Тем самым существование общего перпендикуляра доказано.

Если мы возьмем теперь на прямой b произвольную точку $\overline{M}$ и опустим из нее перпендикуляр $\overline{M}\overline{N}$ на прямую a, то в четырехугольнике $N_0M_0\overline{M}\overline{N}$ углы при вершинах N_0, M_0, и $\overline{N}$ будут прямыми, а следовательно, внешний угол при вершине $\overline{M}$ — тупой. Отсюда в силу леммы I следует, что в ту сторону от точки $\overline{M}$, с которой не находится точка M_0, значения функции $f(x)$ возрастают. Таким образом, M_0 — единственная точка, в которой $f(x)$ достигает своего минимума.

Все изложенное позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема VIII. *Всякие две расходящиеся прямые имеют точно один общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они неограниченно удаляются друг от друга.*

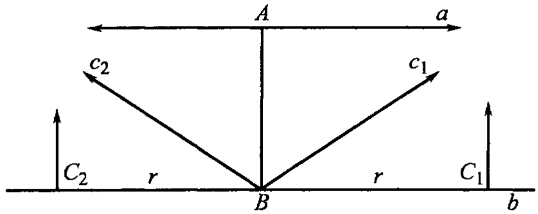


Рис. 43

Заметим, между прочим, что проекции всех точек одной из двух расходящихся прямых на другую заполняют на второй прямой лишь конечный отрезок. В самом деле, пусть будут a и b две расходящиеся прямые и AB — их общий перпендикуляр (рис. 43). Проведем из точки B прямые c_1 и c_2, параллельные прямой a, и представим себе, что во всех точках прямой b восставлены к ней перпендикуляры. Если бы все эти перпендикуляры встречали прямые c_1 и c_2, то необходимо было бы принять V постулат Евклида (см. предложение IV $n°$ 8 или теорему 54 $n°27$) .

Таким образом, из постулата Лобачевского следует, что перпендикуляры, восставленные в точках прямой b, достаточно удаленных от точки B, не встречают прямых c_1 и c_2. Пусть будет r нижняя грань расстояний от этих перпендикуляров до точки B. Построим на прямой b две точки C_1 и C_2 так, чтобы $C_1B = BC_2 = r$; тогда, очевидно, проекции всех точек прямой a заполнят внутреннюю часть отрезка C_1C_2.

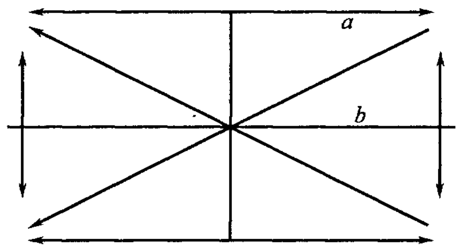


Рис. 44

Перпендикуляры в точках C_1 и C_2 параллельны как прямой a, так и прямым c_1 и c_2 (на доказательстве мы здесь не останавливаемся; оно по существу проведено ниже, в $n°$ 33). Если построить прямую, симметричную прямой a относительно b, то получится фигура, схематически изображенная на рис. 44. Эта фигура представляет собой своеобразный "четырехугольник", стороны и диагонали которого параллельны между собой в направлениях, указанных стрелками.

Естественно, что такая фигура аналога себе в евклидовой геометрии не имеет.

32. Изучим теперь взаимное расположение параллельных прямых. Пусть две прямые a и b, изображенные на рис. 45, параллельны между собою в некотором направлении. Обозначим буквой M переменную точку на прямой a и построим перпендикуляр MN к прямой b. Со стороны параллельности этот перпендикуляр образует с прямой a острый угол. В силу леммы I отсюда следует, что длина MN монотонно и неограниченно возрастает при перемещении точки M в направлении, противоположном направлению параллельности, и монотонно убывает в направлении параллельности.

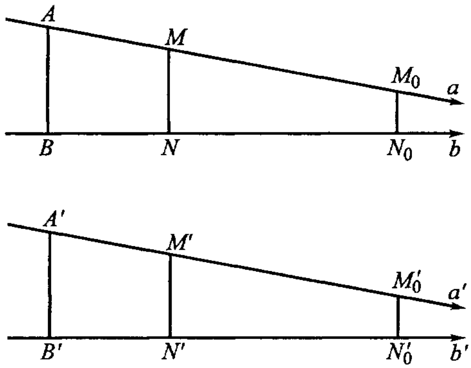


Рис. 45

Мы покажем сейчас, что в последнем случае длина MN стремится к нулю.

Выбрав на прямой a какую-нибудь точку A, опустим перпендикуляр AB на прямую b. Пусть дано положительное число ε; нужно показать, что для некоторого положения точки M будет $MN < \varepsilon$. Если $AB > \varepsilon$, мы возьмем в плоскости какую-нибудь прямую b' и в произвольной ее точке N'_0 восставим перпендикуляр $N'_0M'_0$, длину которого возьмем меньшей ε. Через точку M'_0 проведем прямую a' параллельно b'. Представим себе теперь, что переменная точка M' перемещается по прямой a' в направлении, противоположном направлению параллельности. При этом длина перпендикуляра $M'N'$ к прямой b', непрерывно изменяясь, будет неограниченно возрастать. Поэтому найдется такое положение точки M', что длина $M'N'$ окажется равной AB. Обозначим точки M' и N' в этот момент буквами A' и B'. Перемещая фигуру, составленную прямыми a' и b', расположим ее так, чтобы прямая b' совместилась с b, точка B' с точкой B и направление параллельности прямых a' и b' совпало с направлением параллельности прямых a и b*).

*) Когда мы говорим о перемещении фигуры, то имеем в виду построение фигуры, конгруэнтной данной. В этом смысле понятие движения является вполне определенным (см. n° 19).

Так как $A'B' = AB$, то точка A' при этом совместится с точкой A, а так как через взятую точку проходит только одна прямая, параллельная данной прямой в определенном направлении, то прямая a' совместится с прямой a. Пусть точка M_0' прямой a' займет на прямой a положение M_0; соответствующее положение точки N_0' обозначим буквой N_0. Длина перпендикуляра M_0N_0 оказывается, таким образом, меньше наперед данного положительного числа ε, т. е. прямые a и b в направлении параллельности неограниченно сближаются.

Сопоставляя все изложенное, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема IX. *Расстояние от переменной точки одной из двух параллельных прямых до другой прямой стремится к нулю, когда точка перемещается в сторону параллельности, и неограниченно возрастает при перемещении точки в противоположном направлении.*

Резюмируем кратко результаты исследования: две расходящиеся прямые всегда имеют точно один общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они друг от друга неограниченно удаляются ("расходятся"); параллельные прямые, неограниченно удаляясь друг от друга в одном направлении, асимптотически сближаются в другом.

§ 3. Функция Лобачевского $\Pi(x)$

33. Рассмотрим какую-нибудь прямую a и точку A, лежащую вне этой прямой. Через точку A проходят две прямые, параллельные прямой a в двух различных направлениях. Обозначим их через u_1 и u_2. Прямые u_1 и u_2 образуют равные углы с перпендикуляром AP, опущенным из точки A на прямую a. Острый угол, который составляет любая из прямых u_1 или u_2 с перпендикуляром AP, называется *углом параллельности при точке A по отношению к прямой a*.

Мы докажем сейчас, что *угол параллельности вполне определяется расстоянием от точки A до прямой a*.

Пусть A и A' — две точки, находящиеся на одинаковых расстояниях соответственно от прямых a и a'. Проведем через точку A прямую u, параллельную a, и через A' — прямую u', параллельную a'. Обозначим, далее, через AP и $A'P'$ перпендикуляры, опущенные на прямые a и a', а через α и α' — углы параллельности при точках A и A' по отношению к прямым a и a'. Нам нужно установить равенство $\alpha = \alpha'$. Допустим, что, напротив, один из этих углов меньше другого, например, $\alpha < \alpha'$. Проведем через точку A' прямую, которая с отрезком $A'P'$ со стороны параллельности прямых u' и a' составляет угол α. Вследствие параллельности прямых u' и a' проведенная прямая должна пересечь прямую a' в некоторой точке Q' (расположенной в направлении параллельности от точки P'). Отложим на прямой a от точки P в сторону параллельности отрезок PQ, равный отрезку $P'Q'$.

Треугольник PAQ, очевидно, равен треугольнику $P'A'Q'$ (стороны AP и $A'P'$ равны по условию, стороны PQ и $P'Q'$ — по построению, а углы, заключенные между этими сторонами, — прямые), поэтому $\angle PAQ$ равен α. Следовательно, прямая u совпадает с прямой AQ. Но в этом случае прямая u должна пересечь прямую a в точке Q, что невозможно, так как эти прямые параллельны. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Пусть будет A какая-нибудь точка, находящаяся вне прямой a_0, и α — угол параллельности при точке A по отношению к прямой a_0 (рис. 46). Обозначим через x длину перпендикуляра AA_0, опущенного из A на прямую a_0. По предыдущему, угол α полностью определяется величиной x; вводя обозначение Лобачевского, положим

$$\alpha = \Pi(x).$$

Функция $\Pi(x)$ в неевклидовой геометрии играет фундаментальную роль. Мы изучим сейчас простейшие ее свойства.

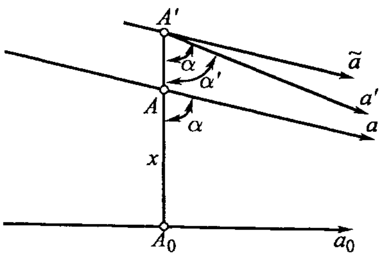


Рис. 46

Прежде всего покажем, что $\Pi(x)$ *является монотонно убывающей функцией*. Для этого возьмем на прямой AA_0 какую-нибудь точку A' и обозначим длину $A'A_0$ через x'. Предположим, что $x' > x$; нужно доказать, что $\Pi(x') < \Pi(x)$. Проведем через A прямую a, параллельную a_0, и через A' прямую $\widetilde{a}$ так, чтобы она со стороны параллельности прямых a и a_0 составила с отрезком $A'A_0$ угол $\alpha = \Pi(x)$. Две прямые $\widetilde{a}$ и a при пересечении с прямой AA' образуют равные соответственные углы и потому в силу теоремы VII являются расходящимися. Отсюда следует, что прямая a', проходящая через A' и параллельная прямой a в том же направлении, в каком a параллельна прямой a_0, со стороны параллельности расположена ближе к a, чем $\widetilde{a}$.

Таким образом, если $\alpha' = \Pi(x')$, то $\alpha' < \alpha$, т. е. при $x' > x$ будет $\Pi(x') < \Pi(x)$.

Заметим дальше, что $\Pi(x)$ *принимает все значения, заключенные между* 0 *и* $\pi/2$. Чтобы установить это, возьмем произвольный острый угол α и докажем, что он является углом параллельности для некоторого отрезка x. Обозначим через O вершину угла, через a и b — его стороны. Из постулата Лобачевского следует, что перпендикуляры с прямой a, достаточно удаленные от точки O, не встречают прямую b (см. теорему 54 главы II или предложение IV n° 8).

Пусть будет M произвольная точка, которая служит основанием перпендикуляра к прямой a, не встречающего наклонную b. Обозначим через M_0 такую точку прямой a, что $OM_0 = x$ является нижней гранью расстояний OM; обозначим также через b_0 перпендикуляр к a

в точке M_0. Мы покажем, что b_0 и b параллельны. Для этого нужно прежде всего установить, что b_0 и b не встречаются.

Допустим противное, пусть b_0 и b имеют общую точку N_0 (рис. 47а); тогда возьмем на прямой b точку N_1 так, чтобы N_0 находилась между O и N_1, и опустим перпендикуляр N_1M_1 на прямую a; положим $M_0M_1 = \varepsilon$. Тогда, если M — основание какого-нибудь перпендикуляра к прямой a, не встречающего прямую b, то $OM > x + \varepsilon$, что, однако, противоречит определению x как нижней грани длин OM.

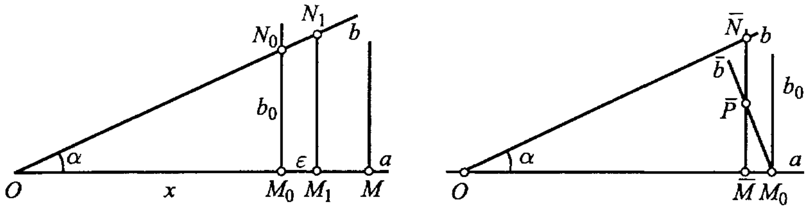


Рис. 47

Теперь докажем, что b_0 является граничной прямой в совокупности прямых, проходящих через M_0 и не встречающих прямую b.

Пусть будет $\bar{b}$ произвольный луч, проходящий через точку M_0 с той стороны от прямой b_0, с какой лежит точка O, и с той стороны от прямой a, с какой расположен острый угол α (рис. 47б). Возьмем на $\bar{b}$ какую-нибудь точку $\overline{P}$ так, чтобы она находилась внутри угла α, и опустим перпендикуляр $\overline{P}\,\overline{M}$ на прямую a. Очевидно, точка $\overline{M}$ расположится между точками O и M_0 и, следовательно, перпендикуляр $\overline{P}\,\overline{M}$ будет иметь с прямой b общую точку $\overline{N}$. Так как луч $\bar{b}$ пересекает одну из сторон треугольника $O\overline{M}\,\overline{N}$, именно сторону $\overline{M}\,\overline{N}$, то, по аксиоме Паша, он должен пересечь одну из двух других сторон этого треугольника; но со стороной $O\overline{M}$ луч $\bar{b}$ не может иметь общей точки. Следовательно, $\bar{b}$ имеет общую точку с прямой b. Тем самым параллельность прямых b и b_0 доказана. Вместе с тем доказано и наше утверждение. В самом деле, для наперед указанного острого угла α оказалось возможным построить такой отрезок $x = OM_0$, что $\alpha = \Pi(x)$, т. е. действительно $\Pi(x)$ принимает все значения, лежащие между 0 и $\pi/2$.

Отсюда уже вытекает непрерывность $\Pi(x)$, так как монотонная функция, которая вместе с любыми двумя значениями принимает все промежуточные, является непрерывной во всей области своего определения.

Сопоставив все изложенное, имеем теорему.

Теорема X. *Функция* $\Pi(x)$ *определена для каждого положительного* x, *монотонно убывает и непрерывна*; $\Pi(x) \to \pi/2$ *при* $x \to 0$ *и* $\Pi(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$.

Из того, что $\Pi(x) \to \pi/2$ при $x \to 0$, следует, что в малых частях пространства геометрия Лобачевского соответственно мало отличается от геометрии Евклида (так как при малом x угол параллельности близок к прямому).

Зависимость между угловыми и линейными величинами, устанавливаемая функцией $a = \Pi(x)$, обусловливает совершенно своеобразный характер геометрии Лобачевского. Так, в геометрии Лобачевского нет подобия фигур. Это обстоятельство легко предвидеть; так как угловые и линейные величины связаны друг с другом уравнениями, то задание углов треугольника должно определять его стороны, и треугольники с соответственно равными углами оказываются равными между собой. Позднее (в главе VIII, n° 231) мы это установим вполне точно и выведем формулы, выражающие стороны треугольника через его углы (см. также n° 61).

Еще одна важная особенность неевклидовой геометрии связана с выбором единицы измерения длин. В геометрии Евклида существуют абсолютные константы угловых величин, т. е. углы, построение которых может быть описано абстрактной формулировкой (независимо от конкретного истолкования геометрических объектов); если это построение и содержит элементы произвола, то не влияющие на величину получаемых углов, т. е. получаемые углы оказываются равными между собой. Для примера достаточно указать прямой угол. Если прямой угол принять за единицу измерения углов, то при выполнении измерений не будет необходимости фиксировать "эталон" прямого угла, с которым сравниваются остальные углы путем наложения, так как прямой угол всегда можно найти точным построением.

Наоборот, линейных абсолютных констант в евклидовой геометрии не существует. Для того чтобы выразить длины всех отрезков числами, необходимо условиться в выборе единицы длины, в качестве которой может быть взят произвольный отрезок. Если бы кто-нибудь сделал этот выбор, то он не мог бы описать его и для сравнения с другими отрезками должен был бы п о к а з а т ь свой эталон. Так, практически при измерении длины пользуются копиями с эталонного метра, выбор же эталона с геометрической точки зрения является ничем не обусловленным.

В противоположность этому, в геометрии Лобачевского наряду с абсолютными константами угловых величин существуют также и линейные абсолютные константы. Так, например, отрезок x, удовлетворяющий уравнению $\Pi(x) = \pi/4$, является определенным постольку, поскольку определена функция $\Pi(x)$. Эта функция, как мы видели, вполне определяется на всей положительной числовой оси геометрическими свойствами плоскости Лобачевского, т. е. свойствами многообразия геометрических образов, подчиненных аксиомам планиметрии Лобачевского. В n° 190 мы получим выражение для $\Pi(x)$ с помощью элементарных функций, хорошо известных в математическом анализе (см. также n° 59).

§ 4. Прямые и плоскости в пространстве Лобачевского

34. Теперь мы дадим краткое описание особенностей взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского.

Перечислим сначала основные предложения абсолютной стереометрии, которые нам придется использовать в дальнейшем.

Не останавливаясь на простейших следствиях аксиом I.1–I.8 и II.1–II.4, часть которых в свое время была указана в главе II, отметим следующие теоремы.

1. *Пусть даны произвольная плоскость α и две прямые a и b, расположенные в плоскости α и проходящие через некоторую ее точку O. Если прямая c перпендикулярна в точке O к прямым a и b, то она перпендикулярна ко всякой прямой, проходящей в плоскости α через точку O.*

В этом случае прямая c называется *перпендикуляром к плоскости α.*

2. *Через каждую точку пространства можно провести точно одну прямую, перпендикулярную к данной плоскости.*

3. *Через каждую точку пространства можно провести точно одну плоскость, перпендикулярную к данной прямой.*

Две полуплоскости, имеющие общую граничную прямую и не лежащие на одной плоскости, составляют двугранный угол. Полуплоскости, составляющие двугранный угол, называются его *гранями*, их общая граничная прямая — *ребром.*

Всякая плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла, пересекает грани по двум полупрямым, которые составляют *линейный угол данного двугранного угла.*

Имеет место теорема:

4. *Все линейные углы данного двугранного угла равны между собой.*

Двугранные углы называются *равными*, если их линейные углы равны.

Двугранный угол называется *прямым*, если его линейные углы прямые.

Две пересекающиеся плоскости α и β определяют две пары вертикальных двугранных углов. Если эти углы прямые, плоскости α и β называются *перпендикулярными* друг к другу.

Имеют место теоремы:

5. *Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β, то плоскость α перпендикулярна к плоскости β.* (Эта теорема, очевидно, является частным случаем теоремы 4.)

6. Если плоскость α перпендикулярна к некоторой прямой, лежащей в плоскости β, то плоскость α перпендикулярна к плоскости β.

7. *Через каждую прямую a можно провести плоскость α, перпендикулярную к данной плоскости β, и при этом только одну, если a не перпендикулярна к β.* (Теорема 7 вытекает из теорем 2 и 5.)

Прямая a', по которой пересекаются плоскости α и β, называется *проекцией* прямой a на плоскость β (если a не перпендикулярна к β). Согласно теореме 7 каждую прямую можно однозначно спроектировать на любую плоскость, не перпендикулярную к этой прямой.

Перечисленные предложения принадлежат абсолютной геометрии; предложения, приводимые ниже, будут уже существенно относиться к геометрии Лобачевского.

35. Две непересекающиеся прямые в пространстве Лобачевского, лежащие в одной плоскости, мы будем называть *параллельными* или *расходящимися*, если в плоскости, на которой эти прямые расположены, они являются соответственно параллельными или расходящимися согласно ранее данному определению этих понятий в планиметрии.

Для дальнейшего существенно установить транзитивность отношения параллельности, т. е. что две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же самом направлении. Сейчас, естественно, представляет интерес только тот случай, когда все три прямые не лежат в одной плоскости, так как в планиметрии это предложение нами доказано (теорема V). Транзитивность отношения параллельности непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма IV. *Прямая пересечения двух плоскостей, проходящих через две прямые, параллельные в некотором направлении, параллельна этим прямым в том же направлении.*

Доказательство. Рассмотрим прямые a и b, лежащие в одной плоскости γ и параллельные друг другу в некотором направлении. Пусть будут α и β две плоскости, проходящие соответственно через эти прямые, и c — прямая пересечения плоскостей α и β (рис. 48; мы предполагаем, что плоскости α и β не совпадают с плоскостью γ). Нужно доказать, что прямая c параллельна каждой из прямых a и b в том же направлении, в каком они параллельны между собой.

Докажем, например, параллельность прямых a и c. Прежде всего ясно, что прямые a и c — не пересекающиеся. В самом деле, если бы эти прямые встречались в некоторой точке O, то точка O была бы общей точкой всех трех плоскостей α, β, γ. Но тогда и прямые a, b имели бы общую точку O, что противоречит допущению.

Возьмем теперь на прямой c произвольную точку C и опустим из нее перпендикуляр CA на прямую a. Отрезок CA составляет с прямой c два смежных угла; отметим из них тот, который расположен со стороны параллельности прямой a к прямой b. Внутри этого угла через точку C проведем произвольный луч $\bar{c}$. Чтобы убедиться в параллельности прямых c и a, нужно показать, что луч $\bar{c}$ встречает прямую a.

Выбрав на прямой b произвольную точку B, рассмотрим полуплоскость 8, определяемую прямой CB и лучом $\bar{c}$. Эта полуплоскость пересечет плоскость γ по некоторому лучу $\bar{b}$, который будет лежать внутри угла, составленного отрезком BA с направлением параллельности

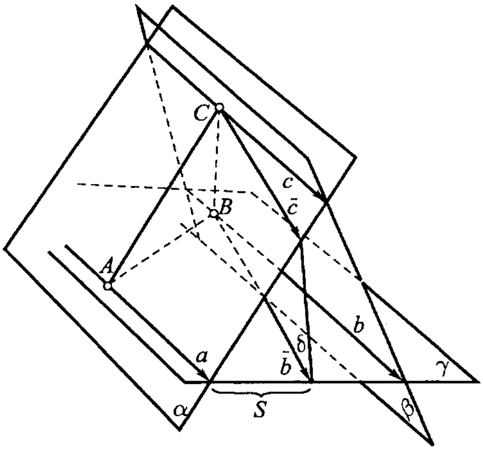


Рис. 48

прямой b к прямой a. Так как прямые a и b по условию параллельны, то луч $\bar{b}$ пересечет прямую a в некоторой точке S. Точка S будет общей точкой трех плоскостей α, γ и δ. Поэтому луч $\bar{c}$ должен встретить прямую a, и лемма доказана.

Теорема XI. *Две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же самом направлении.*

Доказательство. Для того случая, когда все три прямые лежат в одной плоскости, эта теорема доказана нами в n° 30. Рассмотрим теперь прямые a, b и c, не лежащие в одной плоскости. Пусть b и c параллельны прямой a в некотором наравлении. Нужно доказать параллельность прямых b и c между собой в том же направлении, в каком они параллельны прямой a.

Для доказательства возьмем на прямой c какую-нибудь точку M и проведем через эту точку и прямую b плоскость β. Обозначим через α плоскость, в которой лежат прямые a и c. Так как прямая b не лежит в плоскости α, то α и β различны. По предыдущей лемме прямая c', по которой пересекаются плоскости α и β, параллельна прямым a и b в том направлении, в каком они параллельны между собой. Прямая c, по условию, параллельна прямой a в этом же направлении. Но через точку M, как мы знаем, может проходить лишь одна прямая, параллельная прямой a в определеном направлении. Следовательно, прямые c и c' совпадают, т. е. c есть прямая пересечения плоскостей α и β и, по предыдущему, параллельна прямой b.

Таким образом, транзитивность отношения параллельности для пространственной геометрии доказана. При этом обязательно следует иметь в виду, что направления параллельности рассматриваемых прямых должны совпадать: две прямые, параллельные третьей в разных направлениях, никогда не будут параллельными друг другу. Это легко доказать, если принять во внимание, что параллельные прямые неограниченно сближаются в направлении параллельности и неограниченно расходятся в противоположном направлении.

Переходя к рассмотрению взаимного расположения прямых и плоскостей, мы укажем лишь на три возможных здесь случая.

1. Прямая и плоскость имеют общую точку.

2. Прямая параллельна своей проекции на плоскость; в этом случае прямая называется параллельной плоскости.

3. Прямая расходится со своей проекцией на плоскость; в этом случае прямая называется расходящейся с плоскостью.

Отметим одну теорему, доказательство которой сразу получается из леммы IV.

Теорема XII. *Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.*

Качественные различия в расположении параллельных к плоскости и расходящихся с плоскостью прямых читатель легко представит сам, приняв во внимание изложенное в n° 32.

Рассмотрим теперь возможные случаи взаимного расположения плоскостей. Таких случаев мы будем различать три.

1-й случай. Две плоскости имеют общую прямую.

Пусть плоскости α и β имеют общую прямую a. Тогда, например, в плоскости α через произвольную ее точку можно провести две прямые, параллельные в разных направлениях прямой a. Согласно теореме XII эти прямые будут параллельны плоскости β. Таким образом, *на каждой из двух пересекающихся плоскостей через каждую точку, не лежащую на линии пересечения, проходят две прямые, параллельные другой плоскости.*

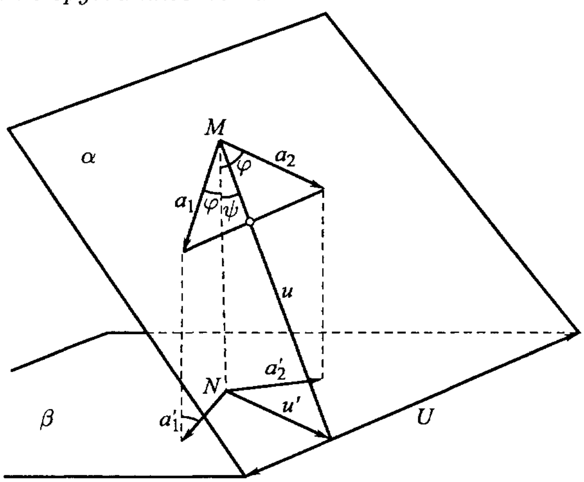


Рис. 49

Нетрудно установить, что *это свойство характеризует пересекающиеся плоскости.* В самом деле, пусть даны две плоскости α и β и пусть в плоскости α через некоторую точку M проходят две прямые a_1 и a_2, параллельные плоскости β (рис. 49). Докажем, что плоскости α и β пересекаются. Очевидно, прямые a_1 и a_2 образуют с перпендикуляром MN, опущенным из M на плоскость β, равные острые углы; общая величина этих углов $\varphi = \Pi(x)$, где x — длина перпендикуляра MN. Проведем теперь в плоскости α через точку M некоторую прямую u так, чтобы она прошла внутри угла, который составляют прямые a_1 и a_2, если их рассматривать направленными в сторону параллельности. В качестве прямой u можно взять, в частности, биссектрису этого угла. Пусть острый угол, который прямая u составляет с отрезком MN, равен ψ. Из простейших соображений следует, что $\psi < \varphi$. т. е. меньше угла параллельности $\Pi(x)$. Следовательно, прямая должна пересечь свою проекцию на плоскость β в некоторой точке, которая и будет общей точкой плоскости α и β. Отсюда непосредственно заключаем, что плоскости α и β имеют общую прямую.

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема XIII. *Для того, чтобы две плоскости пересекались, необходимо и достаточно, чтобы в одной из этих плоскостей через произвольную точку проходили две прямые, параллельные другой* (рис. 50).

2-й случай. Две плоскости расположены так, что в одной из них через некоторую точку проходит точно одна прямая, параллельная другой плоскости; в этом случае плоскости называются *параллельными.*

Прежде всего ясно, что при высказанном условии плоскости не могут иметь общих точек, т. е. не могут быть пересекающимися, так как в противном случае в любой из них через каждую точку проходили бы две прямые, параллельные другой.

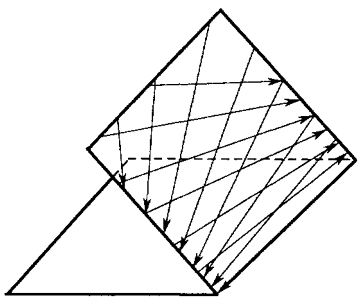


Рис. 50

Далее, если даны две плоскости α и β и если в плоскости α через точку M проходит точно одна прямая a, параллельная плоскости β, иначе говоря, параллельная своей проекции a' на плоскость β, то в плоскости α через *каждую* точку проходит точно одна прямая, параллельная плоскости β. Действительно, в плоскости α через каждую точку можно провести прямую, параллельную прямой a, в том же направлении, в каком она параллельна прямой a'. По теореме XI, проведенная прямая параллельна прямой a', а по теореме XII — она в этом случае параллельна плоскости β.

Другой прямой, проходящей в плоскости α через ту же точку и параллельной плоскости β, нет, иначе параллельная ей прямая, проходящая через M, по тем же основаниям была бы параллельна плоскости β и вместе с тем отличалась бы от прямой a, что, по предположению, невозможно.

Таким образом, плоскость α покрыта семейством прямых, параллельных плоскости β. Не составило бы труда показать, что плоскость β в свою очередь покрыта семейством прямых, параллельных плоскости α (рис. 51).

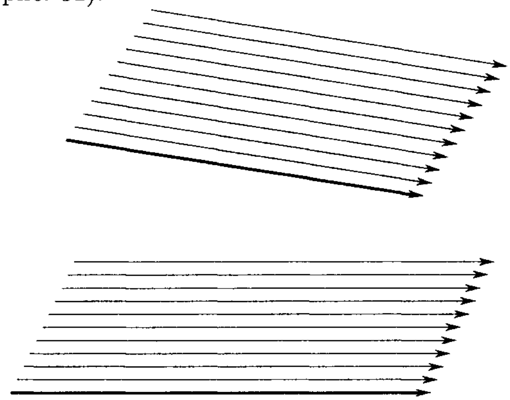


Рис. 51

Очевидно, обе плоскости неограниченно сближаются в направлении параллельности прямых указанных семейств.

3-й с л у ч а й. Две плоскости расположены так, что ни одна из них не содержит прямых, параллельных другой; в этом случае плоскости называются *расходящимися.*

Две расходящиеся плоскости всегда имеют один общий перпендикуляр, и обратно, плоскости, перпендикулярные к одной прямой, являются расходящимися. Расходящиеся плоскости по всем направлениям от общего перпендикуляра неограниченно удаляются друг от друга (отсюда название — расходящиеся). Останавливаться на доказательстве последних утверждений мы не будем, — их легко проведет в виде упражнений сам читатель.

Три случая взаимного расположения плоскостей можно хорошо уяснить себе при помощи следующего рассмотрения.

Пусть α_0 — некоторая плоскость, A — не лежащая на ней точка. Опустим из точки A на плоскость α_0 перпендикуляр AP и проведем, кроме того, через точку A всевозможные прямые, параллельные плоскости α_0. Все они наклонены к AP под одним углом, равным $\Pi(AP)$, и поэтому образуют круговой конус K с осью AP (рис. 52).

Плоскость, проходящая через A и пересекающая конус K по двум образующим, содержит две прямые, проходящие через A и парал-

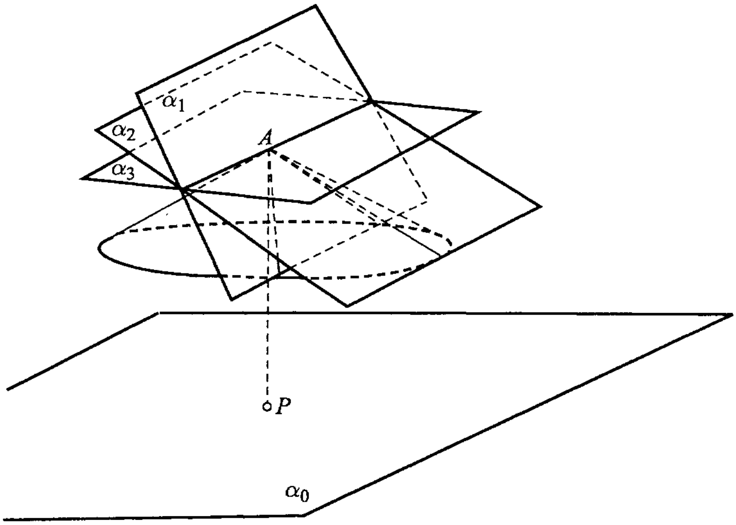


Рис. 52

лельные плоскости α_0 (именно эти образующие). Такая плоскость пересекается с плоскостью α_0 (на рис. 52 плоскость α_1). Прямая ее пересечения с плоскостью α_0 видна из точки A под углом, который составляют упомянутые две образующие конуса K.

Плоскость, проходящая через точку A и касающаяся конуса K вдоль некоторой образующей, содержит только одну прямую, проходящую через A и параллельную плоскости α_0 (образующую прикосновения). Эта плоскость параллельна α_0 (на рис. 52 плоскость α_2).

Наконец, плоскость, проходящая через точку A и не содержащая ни одной образующей конуса K, не имеет прямых, параллельных плоскости α_0. Эта плоскость с плоскостью α_0 расходится (на рис. 52 плоскость α_3).

Отметим одну теорему, которая нам понадобится в дальнейшем.

Теорема XIV. *Если даны плоскость и параллельная ей прямая, то существует точно одна плоскость, проходящая через эту прямую и не пересекающая данной плоскости.*

Доказательство. Обозначим данные прямую и плоскость соответственно буквами a и α. Возьмем на прямой a произвольную точку A и проведем через нее всевозможные прямые, параллельные плоскости α. Они составят круговой конус K с вершиной в точке A.

Если плоскость, проходящая через прямую a, не пересекает плоскости α, то она не может содержать двух образующих конуса и, следовательно, должна касаться его вдоль образующей a. Но через всякую образующую кругового конуса проходит точно одна касательная плоскость, откуда и вытекает справедливость теоремы.

На этом мы закончим проведенный, начиная с n° 28, обзор начальных положений теории параллельных Лобачевского.

Несмотря на своеобразие этой теории, в том, что было изложено, можно найти много сходного с теорией параллельных у Евклида.

В следующем разделе мы изучим ряд важных образов геометрии Лобачевского, которым в геометрии Евклида аналогов нет совсем.

§ 5. Эквидистанта и орицикл

36. В настоящем разделе речь будет идти о некоторых кривых, характерных для неевклидовой геометрии. Мы подойдем к их определению, рассматривая основные виды движений плоскости Лобачевского по самой себе.

В конце n° 19 мы доказали, что каждое движение фигуры можно составить из сдвига по прямой и вращения вокруг точки. При этом движение было определено как построение по данной фигуре другой фигуры, ей конгруэнтной. Различия между собственно конгруэнтными и взаимно зеркальными фигурами не делалось. Если рассматривать лишь перемещения в прямом смысле этого слова, т. е. если исключить зеркальные отражения фигур, то можно высказать теорему, гораздо более сильную, чем та, которую мы сейчас упоминали.

Так, в евклидовой планиметрии имеет место следующая теорема (в кинематике она хорошо известна под названием теоремы Даламбера).

Каждое движение фигуры (или всей плоскости) представляет собой либо вращение вокруг точки, либо сдвиг по прямой.

Иначе говоря, вращение и сдвиг не только позволяют путем их сочетания получить любое движение, но являются даже единственно возможными видами евклидовых движений.

Будем рассматривать сейчас вращения евклидовой плоскости вокруг некоторой точки O. Обозначим буквой k произвольную окружность с центром O. При вращении плоскости вокруг O все точки окружности k перемещаются, но остаются на этой же окружности. Таким образом, окружность в целом не меняет своего положения на плоскости, а как бы скользит по самой себе.

Линию, которая при некотором движении плоскости сохраняет свое положение, мы будем называть *инвариантной* относительно этого движения.

Очевидно, концентрические окружности с общим центром O инвариантны относительно всех вращений вокруг O.

Если совершаются сдвиги евклидовой плоскости по какой-нибудь прямой u, то инвариантными линиями будут прямые, параллельные u. В планиметрии Лобачевского существует три основных вида движений:

1. Вращение вокруг точки: кривыми, инвариантными относительно всех вращений вокруг одной точки O, в планиметрии Лобачевского, как и в планиметрии Евклида, являются окружности с центром O.

2. Сдвиг по прямой: линии, инвариантные относительно всех сдвигов по одной прямой u, в планиметрии Лобачевского не являются прямыми, как в случае Евклида, а представляют собой особые кривые, называемые *эквидистантами.*

Эквидистанта есть геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от прямой u на одинаковых расстояниях от нее. Прямая u называется *базой* эквидистанты, величина расстояния h — *высотой.* Каждую прямую, очевидно, можно рассматривать как эквидистанту с высотой $h = 0$.

То, что эквидистанты инвариантны относительно сдвигов, усматривается непосредственно. В самом деле, при сдвиге плоскости по прямой u каждая точка эквидистанты с базой u перемещается так, что ее расстояние от u остается неизменным. Следовательно, эта точка все время остается на эквидистанте и, значит, эквидистанта в целом не меняет своего положения.

Легко убедиться также, что эквидистанты суть кривые линии. Более того, верна следующая теорема.

Каждая прямая имеет с эквидистантой не более двух общих точек.

Доказательство проводится в двух словах. Допустим, что некоторая прямая имеет с эквидистантой три общие точки A, B, C, которые обозначены так, что B лежит между A и C. Если A', B', C' — проекции точек A, B, C на базу, то согласно определению эквидистанты четырехугольники $ABB'A'$ и $BCC'B'$ суть четырехугольники Саккери (ибо отрезки AA', BB' и CC' равны между собой). Так как в геометрии Лобачевского осуществляется гипотеза острого угла Саккери, то сумма углов ABB' и $B'BC$ меньше двух прямых. Но поскольку точки A, B, C находятся в прямолинейном расположении, сумма этих же углов должна быть равной двум прямым. Полученное противоречие доказывает теорему.

3. Третий из основных видов движения плоскости Лобачевского по самой себе может быть назван вращением вокруг бесконечно удаленной точки.

Чтобы достаточно ясно описать этот вид движения, нам потребуются две теоремы о "секущих равного наклона".

37. Отрезок AB, концы которого находятся на прямых a и b, называется секущей равного наклона к прямым a и b, если он составляет с ними равные внутренние односторонние углы*).

Теорема XV. *Каковы бы ни были две параллельные прямые, через каждую точку любой из них можно провести к ним точно одну секущую равного наклона.*

Доказательство. Пусть a и b — произвольные прямые; обозначим через S какую-нибудь точку, одинаково удаленную от

*) Секущая равного наклона уже встречалась в n° 30. Сейчас нам удобнее назвать так не прямую, а отрезок.

прямых a и b (существование такой точки установлено нами в n° 30 в процессе доказательства теоремы IV), и опустим из S на эти прямые перпендикуляры SP и SQ. Проведем, далее, биссектрису угла PSQ, которую обозначим буквой g. Прямые a и b симметричны относительно g. Поэтому если A есть произвольно заданная точка прямой a, то симметричная ей относительно g точка B будет лежать на прямой b. Прямая AB и является секущей равного наклона к прямым a и b. Легко видеть, что другой секущей равного наклона, проходящей через A, не существует. В самом деле, если мы повернем прямую AB вокруг точки A, то один из двух углов, которые она составляет с прямыми a и b, уменьшится, другой увеличится, и, таким образом, повернутая прямая уже не может быть секущей равного наклона.

Теорема XVI. *Пусть даны на плоскости три прямые a, b, c, параллельные между собой в каком-нибудь направлении и проходящие соответственно через точки A, B, C. Тогда, если AB есть секущая равного наклона к прямым a и b, BC — секущая равного наклона к прямым b и c, то AC является секущей равного наклона к прямым a и c.*

Предположим сначала, что прямая b лежит между прямыми a и c (рис. 53). Обозначим через p и q перпендикуляры к серединам сторон AB и BC треугольника ABC и через P и Q — точки их пересечения со стороной AC.

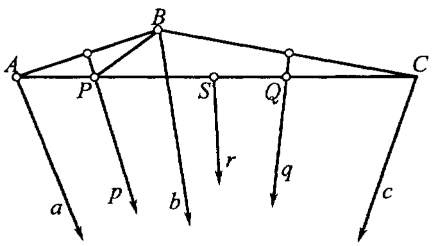


Рис. 53

Так как точка P лежит вне полосы плоскости, ограниченной прямыми b и c, то $\angle PBC$ больше $\angle PCB$. Отсюда следует, что отрезок PB меньше отрезка PC; но $PB = AP$, следовательно, AP меньше PC. Аналогично рассуждая, найдем, что CQ меньше QA. Ввиду этого середина S стороны AC лежит между точками P и Q.

Заметим теперь, что прямая p параллельна прямым a и b в том же направлении, в каком они параллельны между собой. В самом деле, прямая p не может пересечь какую-нибудь из прямых a и b: если бы она пересекла, например, прямую a, то ввиду симметрии прямых a и b относительно p через точку пересечения должна была бы пройти и прямая b. Таким образом, прямые a и b имели бы общую точку, что исключено условием их параллельности. С другой стороны, прямая p не может быть расходящейся с какой-нибудь из прямых a и b, так как эти прямые, будучи параллельными, неограниченно сближаются в направлении параллельности, а прямая p расположена между ними и поэтому должна сближаться с каждой из них (чтобы точно доказать это обстоятельство, достаточно использовать лемму III

n° 30). Точно так же прямая q параллельна прямым b и c. Таким образом, все прямые a, b, c, p, q параллельны друг другу (в одном направлении).

Восставим теперь в точке S перпендикуляр r к стороне AC. Прямая r не может пересечь какую-нибудь из прямых p, q. В самом деле, если бы r пересекалась, например, с p в какой-нибудь точке O, то эта точка была бы центром описанного круга треугольника ABC и через точку O в этом случае должна была бы пройти прямая q; прямые p и q, следовательно, имели бы общую точку O, что исключено, так как они параллельны. Выше мы показали, что точка S лежит между P и Q. Отсюда и из только что сделанного замечания следует, что r находится между p и q. А так как p и q параллельны, то прямая r параллельна им в том же направлении, в каком они параллельны между собой. Итак, все шесть прямых a, b, c, p, q, r параллельны друг другу в одном направлении. Для нас существенно, что прямая r, перпендикулярная к отрезку AC в его середине, параллельна прямым a и c: установив это, мы фактически завершили доказательство теоремы. Действительно, отсюда следует, что каждый из острых углов, которые составляют с отрезком AC прямые a и c, равен $\Pi\left(\frac{AC}{2}\right)$ и, следовательно, эти углы равны между собой.

Иначе говоря, AC есть секущая равного наклона к прямым a и c.

Теперь нужно рассмотреть случай, когда прямая b не находится между a и c.

Пусть AB и BC — секущие равного наклона к соответствующим прямым. Допустим, что AC не будет секущей равного наклона к прямым a и c. Какая-нибудь из трех прямых a, b, c расположена между двумя другими; если это будет, например, прямая a, то мы проведем через точку A секущую равного наклона AC' к прямым a и c. Согласно предыдущему BC' является секущей равного наклона к прямым b и c, а, по условию, BC есть секущая равного наклона к этим же прямым. Получается противоречие с теоремой XV.

38. Теперь мы определим, что понимается под вращением вокруг бесконечно удаленной точки.

Пусть дана система всевозможных прямых, параллельных друг другу в одном направлении. Будем воображать эти прямые сходящимися в направлении их параллельности в бесконечно удаленной точке O_∞ (говоря о бесконечно удаленной точке, мы только вводим удобный для нас термин, который по существу не обозначает чего-либо другого, кроме заданной системы прямых).

Вращением вокруг бесконечно удаленной точки O_∞ мы называем такое движение плоскости по самой себе, при котором какая-нибудь прямая a заданной системы совмещается с какой-нибудь другой прямой a' этой системы (так что a' параллельна a) и некоторая точка A прямой a перемещается в точку A' прямой a' так, что отрезок AA' является секущей равного наклона к прямым a и a'

(вследствие теоремы XV положение точки A' на прямой a' вполне определяется положением точки A на прямой a); кроме того, мы будем предполагать, что та полуплоскость относительно прямой a, в которой нет прямой a', налагается на ту полуплоскость относительно прямой a', где лежит прямая a. При этом

а) *каждая другая точка прямой a вместе с той, в какую она перемещается, определяет секущую равного наклона к прямым a и a'*;

б) *каждая прямая b данной системы, перемещаясь, совпадает с прямой b' этой же системы (так что b' параллельна b), и соответственные при наложении точки прямых b и b' являются концами секущих равного наклона к этим прямым.*

Доказательство утверждения а) очевидно. В самом деле, если A_1 — произвольная точка прямой a, A_1' — точка на прямой a', в которую перемещается точка A_1, то $AA_1 \equiv A'A_1'$ (рис. 54). Поэтому точки A_1 и A_1' расположены симметрично относительно перпендикуляра к отрезку AA' в его середине (напомним читателю, что AA' есть секущая равного наклона к прямым a и a'). Из симметричности расположения прямых a, a' и точек A_1 и A_1' относительно указанного перпендикуляра следует, что A_1A_1' есть секущая равного наклона к прямым a и a'. Тем самым утверждение а) доказано.

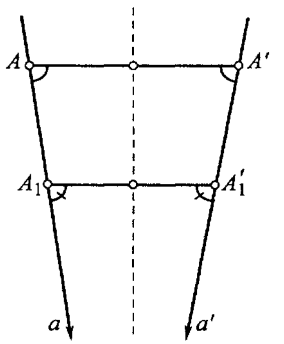


Рис. 54

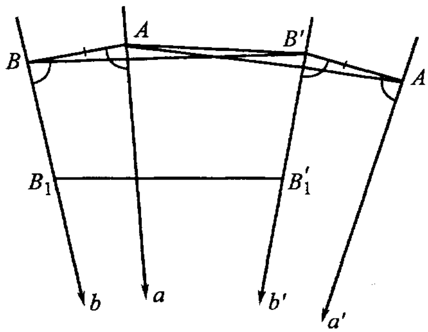


Рис. 55

Доказательство утверждения б) немного сложнее. Введем прежде всего некоторые обозначения. Именно, обозначим через I ту полуплоскость относительно прямой a, в которой нет прямой a', и через II — другую полуплоскость; обозначим, далее, через I$'$ ту полуплоскость относительно прямой a', в которой лежит прямая a, дополнительную к ней полуплоскость обозначим через II$'$. При рассматриваемом движении плоскости по самой себе прямая a налагается на прямую a', полуплоскость I — на полуплоскость I$'$, и полуплоскость II — на полуплоскость II$'$. Возьмем теперь в данной системе прямых какую-нибудь прямую b, например, в полуплоскости I. Проведем из точки A секущую равного наклона к прямым a и b; пусть B — конец этой секущей (рис. 55).

Построим точку, в которую должна переместиться точка B. С этой целью из точки A' в полуплоскости Γ' проведем отрезок, равный AB и составляющий с прямой a' такой же угол, какой составляет с прямой a отрезок AB (углы берем со стороны параллельности прямых данной системы); конец проведенного отрезка обозначим через B'. Очевидно, B' и есть та точка, в которую перемещается точка B. Проведем, наконец, через точку B' прямую b' так, чтобы она составляла с отрезком $A'B'$ такой же угол, какой прямая b составляет с отрезком AB. Очевидно, b' есть прямая, на которую налагается прямая b. Далее, ясно, что $A'B'$ — секущая равного наклона к прямым a', b', так как AB — секущая равного наклона к прямым a, b.

Ясно также, что прямая b' параллельна прямой a' (в заданном направлении), так как b параллельна a. Следовательно, b' принадлежит данной системе прямых. Докажем теперь, что BB' есть секущая равного наклона к прямым b, b'; это следует из теоремы XVI. В самом деле, так как AA' — секущая равного наклона к прямым a, a' и $A'B'$ — секущая равного наклона к прямым a', b', то по теореме XVI AB' есть секущая равного наклона к прямым a, b'. Но AB — секущая равного наклона к прямым a, b, следовательно, по той же теореме XVI BB' является секущей равного наклона к прямым b, b'. Пусть теперь B_1 — любая точка прямой b, B_1' — соответствующая ей при наложении точка на прямой b'. Тогда $BB_1 \equiv B'B_1'$; отсюда следует, что B_1B_1' также является секущей равного наклона к прямым b и b' (см. доказательство предложения а)).

Тем самым утверждение б) доказано.

Теперь легко понять, почему рассматриваемый вид движения плоскости по самой себе мы называем вращением вокруг бесконечно удаленной точки. Дело в том, что если B — произвольная точка, B' — точка, в которую она перемещается при этом движении, то бесконечный “треугольник” $BB'O_\infty$ (т.е. фигура, составленная из отрезка BB' и лучей, которые исходят из точек B, B' в направлении параллельности данной системы прямых) сходен с обыкновенным равнобедренным треугольником. Сходство заключается в том, что сторона BB' составляет равные углы со “сторонами” BO_∞ и $B'O_\infty$.

Таким образом, бесконечно удаленная точка O_∞ в известном смысле аналогична центру обыкновенного вращения.

Линии, инвариантные относительно вращений вокруг бесконечно удаленной точки, Лобачевский называл *орициклами*, или *предельными кругами*.

Мы укажем сейчас способ построения этих линий и тем самым установим их существование.

Пусть дана система всевозможных прямых, параллельных друг другу в одном направлении. Возьмем из этой системы какую-нибудь прямую a и на ней точку A (рис. 56). Проведем из точки A секущую равного наклона к прямой a и произвольной другой прямой m

данной системы. Конец этой секущей, расположенный на прямой m, обозначим буквой M. Согласно теореме XV указанное построение точки M однозначно выполнимо.

Будем теперь перемещать прямую m, не выводя ее, однако, из рассматриваемой системы прямых, т. е. сохраняя ее параллельность прямой a.

При этом точка M опишет вполне определенную линию, которая и является орициклом.

Иначе говоря, *орицикл есть геометрическое место концов секущих равного наклона, проведенных из некоторой точки A прямой a к прямым, параллельным ей в определенном направлении.* Сама точка A также считается точкой орицикла.

Поскольку прямая a, будучи заданной, определяет систему прямых, параллельных ей в определенном направлении, то, очевидно, *заданием точки A и направленной прямой a, которую мы будем называть осью, орицикл вполне определен.*

Мы должны показать, что орицикл, построение которого сейчас было описано, действительно обладает свойством инвариантности относительно вращений вокруг бесконечно удаленной точки O_∞, в которую направлена его ось a.

Пусть B и C — произвольные точки орицикла, b и c — прямые, проходящие через эти точки и направленные в O_∞, (т. е. параллельные прямой a в заданном направлении). По построению орицикла AB есть секущая равного наклона к прямым a и b, AC — секущая равного наклона к прямым a и c; согласно теореме XVI отсюда следует, что BC есть секущая равного наклона к прямым b и c. Поэтому если совершается вращение плоскости вокруг O_∞, переводящее прямую b в прямую c, то точка B, перемещаясь, занимает положение точки C. Таким образом, при указанных вращениях каждая точка, лежащая на орицикле, остается на нем; орицикл при этом как бы скользит по самому себе.

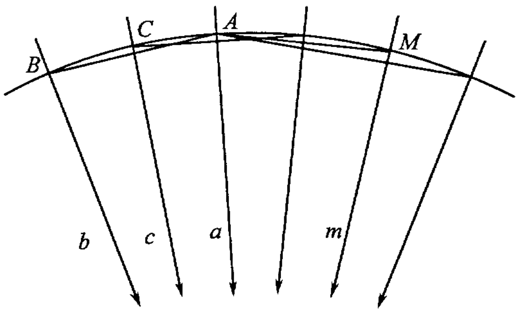


Рис. 56

Отсюда, в частности, следует, что все точки орицикла равноправны и что построение его, которое мы производили, исходя из точки A, можно производить, исходя из любой другой точки орицикла.

Иначе говоря:

Каждая прямая, параллельная оси a орицикла в отмеченном на ней направлении, пересекает орицикл в одной точке и является также осью этого орицикла.

По отношению к орициклам справедлива теорема, аналогичная доказанной по отношению к эквидистантам.

Любая прямая может иметь с орициклом не более двух общих точек.

Отсюда, в частности, следует, что *орицикл есть кривая линия.* Доказательство легко проведет сам читатель.

39. Возьмем какую-нибудь эквидистанту с базой u. Пусть A — произвольная точка эквидистанты, A' — ее проекция на базу, так что AA' — высота эквидистанты (рис. 57). Проведем, далее, через A прямую t, перпендикулярную к высоте AA'. Нетрудно установить, что все точки эквидистанты, отличные от A, лежат с одной стороны от прямой t, именно с той, с какой расположена база u. В самом деле, если M — некоторая точка эквидистанты и M' — ее проекция на u, то $AMM'A'$ — четырехугольник Саккери и $\angle A'AM$, как угол при верхнем основании этого четырехугольника, — острый. Следовательно, точка M лежит с той же стороны от прямой t, что и точка A'. Таким образом, мы можем сказать, что прямая t есть опорная прямая данной эквидистанты*). Мы сейчас покажем, что t *является также и касательной.* Рассмотрим секущую AM и обозначим $\angle A'AM$ через α, через 2δ — длину отрезка AM. Очевидно, перпендикуляр в середине отрезка AM и высота AA' являются взаимно расходящимися прямыми, так как обе они перпендикулярны к базе. Поэтому угол α больше угла параллельности для отрезка δ, т. е.

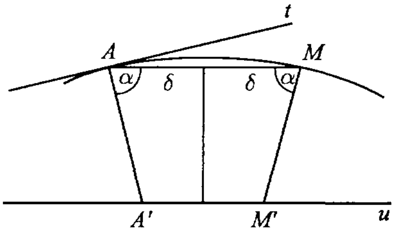


Рис. 57

$$\alpha > \Pi(\delta).$$

С другой стороны, α — острый угол, следовательно, имеют место неравенства

$$\Pi(\delta) < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Если точка M, перемещаясь по эквидистанте, стремится к A, то $\delta \to 0$, а согласно теореме X, $\lim\limits_{\delta \to 0} \Pi(\delta) = \pi/2$. Вследствие этого

$$\lim_{M \to A} \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Тем самым мы показали, что если $M \to A$, то секущая AM имеет предельное положение, и этим предельным положением служит прямая t.

*) Прямая называется опорной к данной линии, если она содержит хотя бы одну точку линии и по одну какую-то сторону от этой прямой нет точек линии.

Полученный результат можно выразить в следующей форме: *каждая высота эквидистанты есть ее нормаль.* Из предыдущего также следует, что эквидистанта в каждой своей точке обращена вогнутостью к базе.

Выполним теперь аналогичное исследование по отношению к орициклу.

Рассмотрим какой-нибудь орицикл, определенный точкой A и осью a (рис. 58). На оси a, а также на всякой другой оси орицикла условимся считать положительным направление, в котором эта ось параллельна другим осям орицикла. Проведем через точку A прямую t, перпендикулярную к оси a. Нетрудно установить, что все точки орицикла, отличные от A, лежат с одной стороны от прямой t, именно со стороны положительного направления прямой a. В самом деле, пусть будет M — произвольная точка орицикла, m — ось, проходящая через M. Обозначим через α угол, который составляет отрезок AM с положительным направлением оси a, через 2δ — длину отрезка AM. Так как, по определению орицикла, AM есть секущая равного наклона к параллельным прямым a и m, то перпендикуляр к отрезку AM, восставленный в его середине, параллелен каждой из прямых a и m. Поэтому угол α есть угол параллельности для отрезка δ:

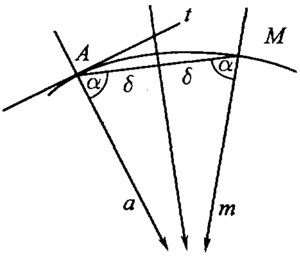


Рис. 58

$$\alpha = \Pi(\delta).$$

Отсюда прежде всего мы можем заключить, что α — острый угол. Следовательно, любая точка M орицикла в самом деле лежит с той стороны от прямой t, в какую обращено положительное направление оси a. Иначе мы скажем, что прямая t есть опорная прямая орицикла. Но легко убедиться, что прямая t является также и касательной. Для этого следует лишь принять во внимание известное нам равенство

$$\lim_{\delta \to 0} \Pi(\delta) = \pi/2,$$

из которого следует, что при $M \to A$ секущая AM имеет своим предельным положением прямую t.

Последний результат можно формулировать еще следующим образом: *каждая ось орицикла есть его нормаль.*

Из предыдущего также видно, что в каждой точке орицикла вогнутость его обращена в положительную сторону оси.

Отметим два свойства, общих для окружности, орицикла и эквидистанты:

1. Каждая из этих кривых симметрична относительно любой своей нормали.

Поэтому нормали окружности и эквидистанты, как и нормали орицикла, мы будем иногда называть осями.

2. Хорды этих кривых являются секущими равного наклона к нормалям, проходящим через их концы. Сопоставляя окружность, орицикл и эквидистанту, можно описать семейства их нормалей следующим образом: все нормали окружности сходятся в одной точке; все нормали орицикла параллельны друг другу в некотором направлении (как говорят, сходятся в бесконечности); все нормали эквидистанты перпендикулярны к одной прямой и, значит, расходятся.

В евклидовой геометрии совокупность прямых, проходящих через одну точку, или совокупность параллельных прямых называют п у ч к о м. Перенося это понятие в геометрию Лобачевского, условимся называть пучком совокупность прямых, проходящих через одну точку, или совокупность прямых, параллельных друг другу в некотором направлении, или совокупность прямых, перпендикулярных к какой-нибудь прямой. В первом случае пучок будем называть *эллиптическим*, во втором — *параболическим*, в третьем — *гиперболическим*. На основании предыдущего мы можем тогда сказать, что *окружности, орициклы и эквидистанты являются ортогональными траекториями соответственно эллиптических, параболических и гиперболических пучков.*

40. Существенно отметить, что в то время, как окружности отличаются друг от друга величиной радиуса, а эквидистанты — величиной высоты, *все орициклы конгруэнтны друг другу.*

Действительно, выше мы видели, что орицикл вполне определен, коль скоро заданы одна его точка и проходящая через эту точку ось. Поэтому, если передвинуть плоскость так, чтобы точка и проходящая через нее ось одного орицикла совместились соответственно с точкой и осью какого-нибудь другого орицикла, то оба орицикла совместятся (свойства движений, которыми мы в этом рассуждении должны пользоваться, обеспечены теоремой В n° 19).

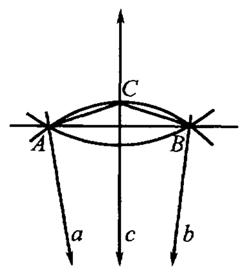


Рис. 59

Докажем еще следующую теорему.

Т е о р е м а XVII. *Каковы бы ни были две точки плоскости A и B, через них проходят точно два орицикла; эти орициклы симметричны относительно прямой AB.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Проведем через середину отрезка AB перпендикулярную к нему прямую c (рис. 59) и зададим на этой прямой одно из двух ее направлений. Проведем, кроме того, через точки A и B прямые a и b, параллельные в заданном направлении прямой c. Пусть будет AC секущая равного наклона к прямым a и c. Тогда по теореме XVI BC будет секущая равного наклона к прямым b и c.

Очевидно, орицикл, определенный точкой C и осью c, пройдет через точки A и B.

Если взять противоположное направление на прямой c и повторить изложенное построение, то получится другой орицикл, симметричный с первым относительно AB.

Теперь докажем, что других орициклов, проходящих через точки A и B, нет. Для этого предположим, что имеется какой-нибудь орицикл L с хордой AB, и обозначим через a и b его оси, проходящие через концы этой хорды. Прямые a и b должны быть взаимно параллельны и одинаково наклонены к отрезку AB. Поэтому перпендикуляр c в середине AB параллелен каждой из прямых a и b. Но в таком случае прямые a и b вполне определяются направлением параллельности к прямой c, и, следовательно, для расположения прямых a и b могут представиться только две возможности, рассмотренные выше. Таким образом, орицикл L необходимо совпадает с одним из двух орициклов, построение которых было описано в первой части доказательства.

Доказанной теореме можно придать еще такую формулировку:

Теорема XVIII. *Дуги орициклов, стягиваемые конгруэнтными хордами, конгруэнтны между собой.*

§ 6. Эквидистантная поверхность и орисфера

41. Пространственным аналогом окружности является сфера. Существуют также поверхности, представляющие собой естественные аналоги эквидистанты и орицикла. Они называются соответственно эквидистантной поверхностью и орисферой. *Эквидистантная поверхность есть геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от какой-нибудь плоскости α и отстоящих от нее на одном и том же расстоянии.* Плоскость σ мы будем называть *базой* эквидистантной поверхности, перпендикуляр, опущенный из произвольной точки поверхности на базу, — *высотой*. Высказанное определение вполне сходно с определением эквидистанты. Подобно этому, по прямой аналогии с определением орицикла, определяется орисфера. Чтобы сформулировать это определение, рассмотрим в пространстве произвольную прямую a, проходящую через некоторую точку A. На прямой a отметим одно из двух направлений и будем называть его положительным. Пусть будет m какая угодно другая прямая пространства, параллельная прямой a в положительном направлении. По теореме XV через точку A можно провести точно одну секущую равного наклонам прямым a и m. Обозначим буквой M конец этой секущей, расположенный на прямой m. Если мы будем передвигать прямую m, не нарушая ее параллельности прямой a в положительном направлении, то соответствующие точки M заполнят поверхность, которая и называется орисферой.

Иначе говоря, *орисфера есть геометрическое место концов секущих равного наклона, проведенных из некоторой точки A пря-*

мой ко всем прямым пространства, параллельным этой прямой в определенном направлении. Сама точка A также считается точкой орисферы.

Поскольку прямая a, будучи заданной, определяет систему прямых пространства, параллельных ей в определенном направлении, то, очевидно, *заданием точки A и направленной прямой a, которую мы будем называть осью, орисфера вполне определена.*

Существенно установить, что точка A ничем не выделяется среди точек орисферы, т. е. что построение орисферы, выраженное в ее определении, можно проводить, исходя из любой ее точки. Для этого нужно показать, что каковы бы ни были две прямые, параллельные оси орисферы в отмеченном на ней направлении, отрезок, соединяющий точки встречи этих прямых с орисферой, является для них секущей равного наклона.

Все сводится, очевидно, к следующей теореме.

Теорема XIX. *Пусть даны в пространстве три попарно параллельные прямые a, b, c, проходящие соответственно через точки A, B, C. Тогда если AB есть секущая равного наклона к прямым a и b, BC — секущая равного наклона к прямым b и c, то AC будет секущей равного наклона к прямым a и c.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что прямые a, b, c не лежат в одной плоскости, так как этот случай уже рассмотрен нами ранее в теореме XVI.

Обозначим через P, Q, R середины сторон треугольника ABC, противоположных соответственно вершинам A, B, C, и проведем через точки P, Q, R прямые p, q, r, параллельные прямым a, b, c (рис. 60), а следовательно, параллельные между собой.

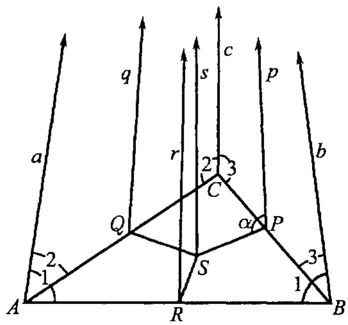


Рис. 60

Легко усмотреть, что проекции прямых p, q, r на плоскость ABC сходятся в одной точке. В самом деле, так как p и r параллельны, то по крайней мере одна из них, например p, не будет перпендикулярна к плоскости ABC. Острый угол, который эта прямая составляет с плоскостью ABC, обозначим через α и отложим на стороне этого угла, лежащей в плоскости ABC, отрезок PS так, чтобы имело место равенство

$$\Pi(PS) = \alpha.$$

Пусть будет s перпендикуляр к плоскости ABC в точке S. По построению прямая s параллельна p, но так как прямые p, q параллельны между собою, то s параллельна также прямым q и r. Отсюда следует, что QS и RS' являются проекциями прямых q и r, т. е. действительно все три проекции сходятся в точке S.

Заметим дальше, что прямая r перпендикулярна к AB, так как AB есть секущая равного наклона к прямым a и b; по той же причине p перпендикулярна к BC. Но тогда отрезки PS и RS перпендикулярны соответственно к BC и AB, а следовательно, S есть центр описанного круга треугольника ABC. В силу этого прямая AC перпендикулярна к QS, т. е. к проекции линии q; отсюда следует, что она перпендикулярна и к самой линии q.

Итак, q является перпендикуляром к середине AC. Из параллельности прямой q к a и c тотчас вытекает, что AC есть секущая равного наклона к a и c, что и нужно было доказать.

Вместе с тем, очевидно, установлено, что указанное выше построение орисферы можно производить, исходя из любой ее точки. Полученный результат можно сформулировать еще следующим образом.

Каждая прямая, параллельная оси орисферы в положительном направлении, пересекает эту орисферу в одной точке и является также осью орисферы.

42. Отметим некоторые общие свойства сферы, орисферы и эквидистантной поверхности.

Сначала рассмотрим сферу. Свойства ее, которые будут отмечены, ни в какой мере не зависят от того, ведем ли мы рассмотрение в пространстве Лобачевского или в пространстве Евклида. Они, конечно, хорошо известны читателю, и мы приводим их только в целях сопоставления с аналогичными свойствами эквидистантной поверхности и орисферы.

Возьмем на сфере произвольную точку A и обозначим буквой a диаметр, оканчивающийся в этой точке. Каждая плоскость, проходящая через диаметр a, рассекает сферу по большому кругу, Очевидно, все большие круги, полученные такими сечениями, имеют в общей точке A касательные, перпендикулярные к одной и той же прямой a. Следовательно, эти касательные расположены в одной плоскости; плоскость эта называется *касательной плоскостью* сферы в точке A. Диаметр a перпендикулярен к касательной плоскости и является поэтому нормалью. Мы можем, таким образом, утверждать, что *все нормали сферы сходятся в одной точке* (в центре сферы).

Рассмотрим теперь эквидистантную поверхность. Пусть будет A — произвольная ее точка, a — проходящая через A высота. Очевидно, каждая плоскость α, проходящая через высоту a, пересекает рассматриваемую поверхность по эквидистанте. База этой эквидистанты представляет собою прямую сечения плоскости α с базой эквидистантной поверхности, а высота равна высоте эквидистантной поверхности. Из рассмотрений, проведенных в n° 39, следует, что все эквидистанты, полученные такими сечениями, имеют в общей точке A касательные, перпендикулярные к одной прямой a. Следовательно, эти касательные расположены в одной плоскости; плоскость эту мы будем называть касательной плоскостью к эквидистантной поверхности в точке A. Высота a перпендикулярна к касательной плоскости и является поэтому нормалью. А так как высоты перпендикулярны к базе σ, то мы можем утверждать, что все *нормали эквидистантной поверхности перпендикулярны к одной плоскости.*

Обратимся, наконец, к рассмотрению орисферы. Пусть будет: A — произвольная точка орисферы, a — ось орисферы, проходящая через точку A. Очевидно, каждая плоскость α, проведенная через ось a, пересекает орисферу по орициклу; ось орисферы a является также осью этого орицикла. Из рассмотрений, проведенных в n° 39, следует, что все орициклы, полученные такими сечениями, имеют в общей точке A касательные, перпендикулярные к одной прямой a. Следовательно, эти касательные расположены в одной плоскости; плоскость эту мы будем называть касательной плоскостью орисферы в точке A. Ось a перпендикулярна к касательной плоскости и является поэтому нормалью. А так как оси орисферы согласно ее определению параллельны между собой в одном направлении, то мы можем утверждать, *что все нормали орисферы образуют систему взаимно параллельных прямых.*

43. Пусть дана в пространстве некоторая система прямых. Условимся называть эту систему *связкой*, если каждые две ее прямые лежат в одной плоскости. Прямые, составляющие связку, будем называть ее лучами.

Обозначим буквами a и b какие-нибудь два луча. Так как по определению связки a и b лежат в одной плоскости, то могут иметь место только следующие три случая взаимного расположения этих прямых:

1) a и b пересекаются в некоторой точке;

2) a и b — параллельны в каком-то направлении;

3) a и b являются расходящимися.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Предположим, что лучи a и b пересекаются в некоторой точке O. Пусть будет c произвольный третий луч, не лежащий в плоскости a, b. Обозначим плоскость, содержащую лучи a и c, через α, и плоскость, содержащую лучи b и c, — через β. Обе плоскости проходят через точку O, а так как прямая c определяется пересечением этих плоскостей, то и она должна пройти через точку O.

Возьмем теперь произвольный луч d в плоскости a, b. Так как a и c проходят через точку O, а d не лежит в плоскости α, то аналогично предыдущему придем к выводу, что луч d также проходит через точку O. Следовательно, все лучи проходят через одну точку. Такая связка называется *эллиптической*. Точка, в которой сходятся все ее лучи, носит название *центра* связки.

2. Предположим, что лучи a и b параллельны друг другу в некотором направлении. Пусть будет c произвольный третий луч, не лежащий в плоскости a, b. Обозначим плоскость, содержащую лучи a

и c, через α, и плоскость, содержащую лучи b и c, — через β. Так как плоскости α и β проходят через две параллельные прямые a и b, то по лемме IV n° 35 прямая c, определяемая их пересечением, параллельна прямым a и b в том же направлении, в каком они параллельны друг другу. Возьмем теперь произвольный луч d в плоскости a, b. Так как a и c параллельны, а луч d не лежит в плоскости a, c, то аналогично предыдущему придем к выводу, что d параллелен a и c. Следовательно, все лучи связки параллельны друг другу в одном определенном направлении. Такая связка называется *параболической*.

3. Предположим, наконец, что лучи a и b являются расходящимися. Тогда существует плоскость σ, перпендикулярная к этим лучам. Пусть будет c произвольный третий луч связки, не лежащий в плоскости a, b. Обозначим плоскость, содержащую лучи a и b, через α и плоскость, содержащую лучи b и c, — через β. Обе плоскости α и β перпендикулярны к плоскости σ, так как первая из них содержит перпендикулярную к σ прямую σ, а вторая — перпендикулярную к σ прямую b. Но тогда прямая c, по которой пересекаются плоскости α и β, будет также перпендикулярна к плоскости σ.

Возьмем теперь произвольный луч d в плоскости a, b. Так как a и c перпендикулярны к плоскости σ, а d не лежит в плоскости a, c, то аналогично предыдущему придем к выводу, что и луч d перпендикулярен к плоскости σ.

Таким образом, в этом случае все лучи связки перпендикулярны к одной плоскости. Такая связка называется *гиперболической*: плоскость, перпендикулярная к ее лучам, носит название *базы* связки.

Сопоставляя все изложенное, мы приходим к следующему предложению.

Сферы, орисферы и эквидистантные поверхности обладают тем общим свойством, что нормали каждой из этих поверхностей образуют связку. При атом нормали сферы образуют связку эллиптическую, нормали орисферы — параболическую и нормали эквидистантной поверхности — гиперболическую.

44. Еще одно общее свойство сфер, орисфер и эквидистантных поверхностей, которое для дальнейшего изложения существенно отметить, заключается в следующем: *каждая из этих поверхностей есть поверхность вращения вокруг любой своей нормали.*

Доказательство этого предложения, с наглядной точки зрения вполне очевидно, мы проведем только по отношению к орисфере.

Пусть Σ — какая-нибудь орисфера, A — ее точка, a — нормаль, проходящая через A. Будем рассматривать всевозможные вращения пространства вокруг прямой a (см. n° 19). Нам нужно показать, что все точки орисферы Σ при указанных вращениях, перемещаясь, остаются на поверхности Σ, или, если употреблять терминологию, введенную в n° 36, что орисфера Σ инвариантна относительно вращений вокруг прямой a. Для этого возьмем на Σ произвольную точку M и обозначим через M' точку, в которую попадает M при некотором вращении пространства вокруг a. Обозначим, далее, буквой m нормаль орисферы, проходящую через M. Пусть будет m' — прямая, с которой совпадет m при рассматриваемом вращении; очевидно, m' проходит через M'. В силу известных нам свойств орисферы прямая m параллельна прямой a и отрезок AM является секущей равного наклона к этим двум прямым. Но фигура, составленная прямыми a и m' и отрезком AM', конгруэнтна фигуре, составленной прямыми a и m и отрезком AM. Поэтому прямая m' параллельна прямой a и AM' есть секущая равного наклона к прямым a и m'. Отсюда следует, что точка M' принадлежит орисфере Σ, и тем самым наше предложение доказано.

Для сферы и эквидистантной поверхности это предложение доказывается столь же просто.

§ 7. Элементарная геометрия на поверхностях пространства Лобачевского

45. С давних пор хорошо известны две геометрические системы на двумерных многообразиях евклидова пространства: геометрия на плоскости (планиметрия) и геометрия на сфере. В построении этих геометрических систем фундаментальную роль играет следующее обстоятельство: как плоскость, так и сфера могут перемещаться по самим себе, не испытывая при этом деформации.

Точный смысл этого утверждения в соответствии с определениями, данными в n° 19, можно выразить так: поверхность допускает движения по себе самой, если для множества ее точек возможны такие конгруэнтные перенесения, при которых все эти точки остаются на поверхности.

Если мы вообразим себе, например, сферу в виде гладкой деревянной модели, плотно покрытой тонким, но твердым футляром, то движения футляра по неподвижной модели будут наглядно представлять рассматриваемое явление.

Плоскость и сфера — не единственные поверхности евклидова пространства, которые могут перемещаться по себе; но они отличаются от других таких поверхностей большей степенью свободы допускаемых движений.

Всякая поверхность вращения тоже допускает движения по себе самой, однако это ее свойство по характеру свободы выбора движений, очевидно, отлично от соответствующего свойства сферы или плоскости. Чтобы уяснить это различие, сравним, например, сферу, круглый цилиндр и эллипсоид вращения.

Единственными движениями эллипсоида по себе самому являются вращения его вокруг оси. Каждая точка эллипсоида при этом перемещается по определенной траектории так, что для двух произвольно указанных точек, вообще говоря, не существует движения, которое приводило бы их к совмещению друг с другом.

Круглый цилиндр, кроме вращения, допускает еще движения в направлении оси; сочетая движения этих двух видов, можно, очевидно, совместить любую точку цилиндра с любой другой его точкой.

Мы скажем, что совокупность движений, которые допускает некоторая поверхность, *транзитивна*, если любые две точки поверхности могут быть совмещены друг с другом с помощью некоторого движения.

Таким образом, круглый цилиндр допускает транзитивную совокупность движений; наоборот, совокупность движений эллипсоида вращения нетранзитивна.

Легко видеть, что совокупность движений сферы транзитивна, как и в случае круглого цилиндра. Однако и здесь существует важное различие. Чтобы уяснить его, будем рассматривать линейные элементы поверхности. *Линейным элементом* называют точку вместе с некоторым направлением, которое следует представлять себе определенным стрелкой, исходящей из данной точки в касательной плоскости. Линейные элементы считаются тождественными, если их точки совмещены, а стрелки направлены в одну и ту же сторону.

Возьмем на круглом цилиндре два линейных элемента, точки которых могут занимать произвольное положение, а направления их выберем так, чтобы у одного из них оно было перпендикулярным к оси цилиндра, у другого — параллельным. Путем движения мы можем совместить точки этих линейных элементов, однако линейные элементы нам совместить не удастся.

Напротив, для двух произвольных линейных элементов сферы всегда существует движение, которое совмещает их друг с другом. Так, вращая сферу вокруг некоторой оси, можно совместить сначала точки линейных элементов; после этого вращением вокруг оси, на которой находятся совмещенные точки, можно совместить также и направления.

Мы будем называть совокупность движений, которые допускает поверхность, *транзитивной относительно линейных элементов*, если любую пару линейных элементов этой поверхности можно привести к совмещению.

Мы, можем, таким образом, сказать, что, например, эллипсоид вращения обладает нетранзитивной совокупностью движений, а совокупность движений круглого цилиндра и сферы — транзитивна, причем в последнем случае даже транзитивна относительно линейных элементов. Также транзитивна относительно линейных элементов и совокупность движений плоскости.

В основных предложениях планиметрии, относящихся к сравнению геометрических величин, существенно используется возможность достаточного свободного движения плоских фигур. Определяя, например, длину прямолинейного отрезка AB, откладывают на этом отрезке от точки A отрезок, длина которого заранее принята равной единице, столько раз, сколько это возможно сделать, не переступая за точку B. Так определяется длина AB с точностью до целых единиц. Определяя подобным же образом, сколько раз на отрезке AB укладывается половина единицы измерения, находят длину AB с точностью до одной второй, и так далее с любой степенью точности (см. n° 20). Таким образом, измерение основано на возможности такого перемещения отрезка, при котором начало его помещается в наперед назначенную точку, а сам отрезок располагается на произвольно указанной прямой, проходящей через эту точку. Иначе говоря, при этом используется транзитивность совокупности движений плоскости относительно ее линейных элементов.

В сферической геометрии ту же роль, что и прямые в планиметрии, играют большие круги сферы. Источником этого являются следующие три обстоятельства:

1. Среди всех линий, соединяющих на сфере какие-нибудь две точки, кратчайшей является дуга большого круга.

2. Через всякие две точки сферы, не являющиеся ее диаметрально противоположными точками, проходит один и только один большой круг.

3. Большой круг определяется любым своим линейным элементом.

(Линейным элементом линии мы называем линейный элемент, точка которого принадлежит этой линии, а стрелка направлена по касательной к линии.)

Развивая сферическую геометрию, мы могли бы производить измерение геометрических величин на сфере, рассматривая эти величины как объекты пространственной геометрии. Например, длину дуги большого круга можно определять, полагая ее равной точной верхней грани длин вписанных ломаных, вершины которых последовательно расположены на дуге, а звеньями являются прямолинейные отрезки. Так поступают при определении длины дуги произвольной линии пространства.

Но можно развивать сферическую геометрию, не оперируя геометрическими объектами, не расположенными на сфере (как прямолинейные звенья вписанных ломаных). Это можно выполнить, идя по пути аналогии с планиметрией. Например, чтобы перенести в сферическую геометрию описанный выше процесс измерения прямолинейного отрезка, нужно начать с выбора единицы длины. Пусть длина некоторой дуги большого круга принята равной единице (для наглядности рекомендуем читателю представлять себе эту дугу малой сравнительно с размерами сферы). Если требуется измерить какую-нибудь дугу большого круга AB, следует, перемещая единицу измерения по сфере, отложить ее от точки A на дуге AB столько раз, сколько это возможно сделать, не переступая за точку B. Так определится длина AB с точностью до целой единицы. Определяя подобным же образом, сколько раз на дуге укладывается половина единицы измерения, можно найти длину дуги AB с точностью до одной второй, и так далее с любой степенью точности. Очевидно, при этом существенно используется транзитивность совокупности движений сферы относительно ее линейных элементов.

Измерение других геометрических величин (углов, площадей) производится аналогично с помощью наложения на данный сферический образ заранее выбранной единицы или ее долей. Использовать при этом объекты пространства, не принадлежащие сфере, нет надобности.

Можно рассматривать также геометрию на любой поверхности. Роль прямых в этом общем случае играют геодезические линии. Геодезическую линию можно определить как такую линию, каждая достаточно малая дуга AB которой короче всякой другой дуги на поверхности с теми же концами AB. На сфере радиуса R, например, окружности больших кругов являются геодезическими линиями, так как дуга большого круга с длиною, меньшей πR, короче всякой другой дуги на сфере с теми же концами.

При некоторых ограничениях аналитического характера, наложенных на поверхность, можно доказать, что геодезическая линия определяется каждым своим линейным элементом, т. е. точкой и направлением, как и прямая на плоскости.

Представим себе теперь, что на поверхности каким-либо образом найдена совокупность всех геодезических линий. Тогда, если речь идет о построении геометрии данной поверхности, естественно возникает вопрос: можно ли делать сравнение длин отрезков геодезических линий таким же путем, как в планиметрии или в сферической геометрии? Для этого, очевидно, нужно иметь возможность путем движения поверхности по себе перемещать дугу геодезической, выбранную за единицу измерения, так, чтобы ее начало располагалось в любой точке и чтобы она принимала любое назначенное направление. В тех случаях, когда сравнение длин геодезических можно производить путем наложения единицы измерения, будем говорить, что поверхность допускает *элементарную геометрию*. Для того чтобы поверхность допускала элементарную геометрию, очевидно, необходимо, чтобы совокупность ее движений по себе была транзитивной относительно линейных элементов.

Можно доказать, что единственными поверхностями евклидова пространства с транзитивной относительно линейных элементов совокупностью движений являются плоскость и сфера. Отсюда следует, что в евклидовом пространстве двумерная элементарная геометрия может быть лишь на плоскости (планиметрия) и на сфере (сферическая геометрия).

В пространстве Лобачевского, кроме плоскости и сферы, существуют еще две поверхности, допускающие элементарную геометрию. Таковыми являются уже знакомые нам эквидистантная поверхность и орисфера.

То, что эти поверхности действительно допускают движения по себе, совокупность которых транзитивна относительно линейных элементов, по существу установлено в n° 44, где мы показали, что каждая из этих поверхностей есть поверхность вращения вокруг любой своей нормали. В самом деле, если на эквидистантной поверхности или орисфере даны два произвольных линейных элемента, то, вращая поверхность вокруг некоторой нормали, можно совместить точки этих линейных элементов, после чего вращением вокруг нормали, проходящей через совмещенные точки, можно привести к совмещению также и сами линейные элементы.

Таким образом, мы можем утверждать, что в *пространстве Лобачевского элементарная геометрия, кроме плоскости, осуществляется еще на сфере, на эквидистантной поверхности и на орисфере.*

Геометрия на сфере в пространстве Лобачевского не отличается от геометрии на сфере в евклидовом пространстве. Эту геометрию (сферическую) мы рассматривать здесь не будем. Напротив, мы постараемся в немногих словах описать геометрию на эквидистантной поверхности и со всей обстоятельностью исследуем геометрию на орисфере.

46. Возьмем какую-нибудь эквидистантную поверхность Σ, база которой есть плоскость σ. В соответствии с общими идеями, изложенными в n° 45, мы должны в качестве прямых геометрии поверхности Σ рассматривать ее геодезические линии. Геодезическими линиями поверхности Σ являются эквидистанты, получаемые пересечением этой поверхности с плоскостями, перпендикулярными плоскости σ (то, что это действительно так, пока оставим без доказательства).

Поэтому роль прямых на поверхности Σ мы припишем указанным эквидистантам.

Наша цель — обнаружить систему предложений, из которой можно логическим путем вывести все свойства взаимных отношений между точками и эквидистантами поверхности Σ, т. е. дать аксиоматическое обоснование геометрии эквидистантной поверхности.

Как мы сейчас покажем, эта геометрия может быть обоснована аксиомами первых четырех групп Гильберта и аксиомой параллельных Лобачевского. (Следует только иметь в виду, что, поскольку сейчас речь идет о двумерной геометрии, из аксиом Гильберта должны быть исключены аксиомы I.4–I.8, так как они имеют пространственный характер; поэтому нам придется иметь дело лишь с аксиомами I.1–I.3, II, III, IV и с аксиомой параллельных.)

Чтобы получить желаемый результат возможно проще, спроектируем точки и эквидистанты поверхности Σ на плоскость σ. Их проекциями будут соответственно точки и прямые. Условимся называть образы Φ и Φ', из которых Φ находится на Σ, а Φ' — на σ, соответствующими друг другу, если Φ' получается проектированием Φ. Очевидно, что точки и эквидистанты на поверхности Σ находятся в таких же отношениях взаимной принадлежности и порядка, в каких находятся соответствующие им точки и прямые плоскости σ. Поэтому в геометрии поверхности Σ выполняются требования аксиом I.1–I.3 и II, так как эти аксиомы имеют место в геометрии плоскости.

Далее, два образа поверхности Σ будем называть конгруэнтными, если они могут быть совмещены друг с другом при помощи некоторого движения поверхности Σ по самой себе, а также если они симметричны относительно какой-нибудь плоскости. Согласуем теперь возможные перемещения поверхности Σ и плоскости σ друг с другом так, как если бы Σ и σ составляли в пространстве твердое тело. Тогда каждое движение плоскости σ, совмещающее какие-нибудь ее образы Φ' и Ψ', повлечет за собой движение поверхности Σ, совмещающее на ней образы Φ и Ψ, соответствующие образам Φ' и Ψ'. Иначе говоря, образы поверхности Σ находятся в таких же отношениях взаимной конгруэнтности, в каких находятся соответствующие образы плоскости σ. Отсюда мы можем заключить, что в геометрии поверхности Σ удовлетворяются требования аксиом конгруэнтности III, так как эти аксиомы имеют место в геометрии плоскости.

Таким же путем можно убедиться, что в геометрии поверхности Σ справедливы аксиомы непрерывности IV.

Рассмотрим теперь на поверхности Σ произвольную эквидистанту a и точку A, лежащую вне этой эквидистанты. Проектируя эквидистанту a и точку A на плоскость σ, мы получим в качестве их проекций прямую a' и точку A'. Предположим, что через точку A' в плоскости σ проведена какая-нибудь прямая b'; прямая b' является проекцией некоторой эквидистанты b на поверхности Σ, проходящей через точку A, и если b' не встречает прямую a', то и эквидистанта b не будет иметь общей точки с эквидистантой a. Но в плоскости σ имеет место геометрия Лобачевского, и, следовательно, через точку A' проходит бесконечно много прямых, не пересекающих a'. Поэтому на поверхности Σ через точку A проходит бесконечно много эквидистант, не имеющих общих точек с эквидистантой a. А это означает, что в геометрии поверхности Σ осуществляется постулат параллельных Лобачевского.

Итак, на поверхности Σ верны все аксиомы абсолютной геометрии и аксиома Лобачевского. Следовательно, по отношению к точкам и эквидистантам поверхности Σ верны все теоремы, какие существуют в неевклидовой планиметрии.

Мы можем, таким образом, заключить: *элементарная геометрия эквидистантной поверхности есть геометрия Лобачевского.*

В заключение — еще одно замечание. Придавая эквидистантам, получающимся нормальными сечениями эквидистантной поверхности Σ, роль прямых в геометрии этой поверхности, мы вначале не доказали, что они являются ее геодезическими линиями. Теперь это легко установить. В самом деле, так как на эквидистантной поверхности имеются все теоремы абсолютной геометрии, то можно обычными рассуждениями показать, что отрезок эквидистанты короче всякой другой линии, которая на поверхности Σ соединяет его концы.

47. Теперь мы обратимся к рассмотрению элементарной геометрии на орисфере. Роль прямых в этой геометрии мы припишем орициклам, которые получаются сечением орисферы любою плоскостью, проходящей через какую-нибудь ось этой орисферы. (Опять мы оставляем открытым вопрос, являются ли такие орициклы геодезическими линиями орисферы или нет; на этот вопрос можно будет ответить утвердительно после того, как завершится исследование геометрии орисферы.) Наша ближайшая цель — показать, что взаимные отношения точек и орициклов на орисфере могут быть выражены аксиомами абсолютной геометрии. Затем мы выясним, какая теория параллельных соответствует орисфере: Евклида или Лобачевского.

Проверка аксиом первой группы I.1–I.3 проводится в двух словах. Пусть A и B — две произвольные точки орисферы, a и b — проходящие через эти точки оси. Так как любые две оси орисферы лежат в одной плоскости, то прямые a и b определяют точно одну плоскость α, которая их содержит. Пересечением плоскости α и рассматриваемой орисферы (ее мы в дальнейшем будем обозначать через Ω) определится точно один орицикл u, проходящий через точки A и B. Итак, каковы бы ни были две точки A и B орисферы Ω, они определяют один и только один проходящий через них орицикл.

Тем самым установлено, что в геометрии орисферы выполняются требования аксиом I.1–I.2. То, что любой орицикл имеет не менее двух точек и орисфера — не менее трех точек, не лежащих на одном орицикле (на самом деле и в том и в другом случаях имеется даже бесконечно много точек), т. е. что в геометрии орисферы выполнены требования аксиомы I.3, непосредственно следует из определения орицикла и орисферы и из простейших теорем стереометрии Лобачевского (в наших описаниях орицикла и орисферы мы не останавливались на доказательствах столь очевидных их свойств, чтобы не отвлекать внимания читателя излишними деталями).

Далее нужно проверить, выполняются ли на орисфере аксиомы порядка II.1–II.4. Сначала следует высказать условия, при которых мы считаем точку орицикла расположенной между двумя другими его точками. Пусть дан некоторый орицикл u, содержащийся в плоскости α, и на нем три точки A, B, C. Мы скажем, что точка B на этом орицикле лежит между точками A и C, если ось его b, проходящая через B, лежит в плоскости α между осями a и c, проходящими, соответственно, через A и C (т. е. если в плоскости α точки прямых a и c лежат по разные стороны от прямой b). Без труда можно усмотреть, что требования линейных аксиом порядка II.1–II.3 при этом оказываются удовлетворенными. Несколько сложнее проверить предложение Паша II.4. Чтобы убедиться, что и это предложение имеет место в геометрии орисферы, поступим следующим образом. Рассматривая на орисфере Ω произвольный треугольник ABC (рис. 61), составленный дугами трех орициклов, проведем через его вершины A, B, C три оси орисферы Ω и пометим их соответственно буквами a, b, c. Возьмем, далее, на каждой из этих прямых по точке, которые обозначим через A', B', C', и проведем через них плоскость σ. Предложение Паша II.4 справедливо для всякого прямолинейного треугольника, в том числе и для треугольника $A'B'C'$ в плоскости σ.

Отсюда мы получим его справедливость для треугольника ABC на Ω.

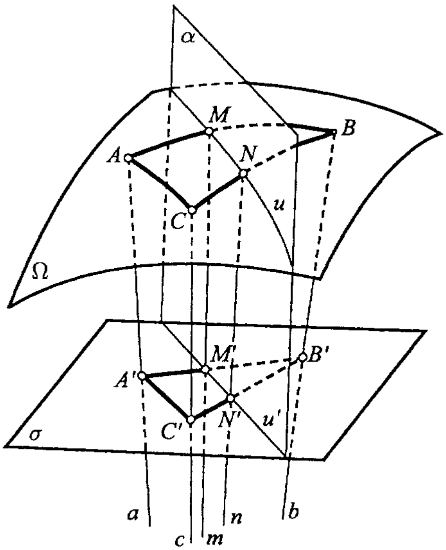


Рис. 61

Пусть u — какой-нибудь орицикл, расположенный на Ω и не проходящий ни через одну из точек A, B, C. Нам нужно показать, что если u проходит через некоторую внутреннюю точку M отрезка орицикла AB, то u проходит либо через одну из внутренних точек отрезка орицикла BC, либо через одну из внутренних точек отрезка орицикла AC. Заметим, что плоскость α, в которой лежит орицикл u, и плоскость $ABB'A'$ пересекаются по проходящей через точку M оси m орисферы Ω. Эта ось m в плоскости $ABB'A'$ расположена между осями a и b, так как точка M лежит между точками A и B. Поэтому m должна встретить прямолинейный отрезок $A'B'$ в некоторой его внутренней точке M'. Тогда в силу аксиомы Паша II.4 прямая u, по которой пересекаются плоскости α и σ, проходит через внутреннюю точку одного из отрезков $B'C'$ или $A'C'$. Допустим для определенности, что прямая u' содержит внутреннюю точку N' отрезка $B'C'$. Тогда плоскости α и $BCC'B'$, имея общую точку N', должны пересекаться по некоторой прямой n. Но плоскости α и $BCC'B'$ проходят через две параллельные прямые m и b; в силу леммы III n° 35 прямая n, по которой эти плоскости пересекаются, параллельна каждой из прямых m и b, а значит, параллельна также прямой c. Так как точка N' лежит между точками B' и C', то прямая n, параллельная прямым b и c, расположена между ними. С другой стороны, как всякая прямая, параллельная осям орицикла BC и лежащая в его плоскости, она является также осью этого орицикла и поэтому пересекает его в некоторой точке N (см. n° 38). Так как n находится между прямыми b и c, то и точка N на орицикле BC лежит между точками B и C.

Поскольку прямая n лежит в плоскости α, эта плоскость содержит точку N. Таким образом, в числе точек пересечения плоскости α и орисферы Ω, т. е. в числе точек орицикла u, содержится некоторая внутренняя точка отрезка орицикла BC. Тем самым предложение Паша в геометрии орисферы доказано.

Перейдем к аксиомам конгруэнтности III.1–III.5.

Аксиома III.1 требует, чтобы на любом орицикле орисферы Ω от любой его точки и в любую сторону можно было однозначно отложить отрезок, конгруэнтный любому данному отрезку другого орицикла; аксиома III.4 требует, чтобы на орисфере Ω с любой стороны от данного орицикла можно было приложить к этому орициклу угол, конгруэнтный произвольно данному углу; положение вершины при этом может быть назначено произвольно и, если она указана, построение должно быть однозначным.

Обе эти аксиомы выполняются в геометрии орисферы вследствие того, что орисфера допускает перемещения по самой себе, совокупность которых транзитивна относительно линейных элементов. Однозначность требуемых построений вытекает из теоремы Б n° 19.

Далее, аксиома III.2 выполняется вследствие группового свойства движений (см. n° 19).

Чтобы доказать в геометрии орисферы Ω предложение III.3, рассмотрим на этой поверхности два орицикла u и u'. Возьмем на орицикле u три точки A, B, C, расположенные так, что B лежит между A и C; пусть A', B', C' — три точки орицикла u', находящиеся в аналогичном расположении. Если $AB \equiv A'B'$, то существует движение орисферы по самой себе, приводящее точку A' к совмещению с точкой A и точку B' к совмещению с точкой B. Если еще $BC \equiv B'C'$, то из теоремы Б n° 19 следует, что точка C' при этом движении совместится с точкой C. Таким образом, при рассматриваемом движении отрезок $A'C'$ наложится на отрезок AC, т. е. из $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$ следует $AC \equiv A'C'$.

Столь же простыми рассуждениями может быть доказано и предложение III.5.

Остается проверить выполнение аксиом непрерывности IV.1 и IV.2. При изучении геометрии орисферы вместо того, чтобы проверять отдельно выполнение аксиомы Архимеда IV.1 и аксиомы Кантора IV.2, выгоднее установить, что выполняется принцип Дедекинда. Если мы это установим, то при наличии предложений I—III в силу теоремы 41 n° 23 предложения IV.1 и IV.2 на орисфере также будут верны.

Рассмотрим на орисфере произвольный орицикл u и обозначим его плоскость буквой α. Пусть в множестве точек этого орицикла произведено некоторое дедекиндово сечение. Возьмем в первом классе сечения произвольную точку A, во втором — точку B; через эти точки проведем соответственно оси орицикла a и b. Выбрав на первой из этих прямых какую-нибудь точку A', на второй — точку B', построим прямую u', определяемую точками A' и B'. Заметим теперь, что через каждую точку M' прямой u', как и вообще через каждую точку плоскости α, проходит точно одна ось орицикла u, пересекающая его в одной определенной точке M. Таким образом, каждой точке M' прямой u' с помощью нашей конструкции ставится в соответствие определенная точка M орицикла u. Мы распределим все точки прямой u' на два класса по правилу: точку M' этой прямой отнесем в первый класс, если соответствующая ей точка M на орицикле

u принадлежит первому классу дедекиндова сечения, заданного на этом орицикле, и во второй класс, если соответствующая точка на орицикле принадлежит второму классу. Очевидно, это распределение точек прямой u' является дедекиндовым сечением. Так как на прямых пространства Лобачевского имеет место принцип Дедекинда, то мы можем утверждать, что в одном из классов дедекиндова сечения, которое получилось на прямой u', имеется замыкающий элемент.

Пусть этим элементом является точка X'. Предположим для определенности, что X' есть первая точка второго класса. Поскольку A' и B' входят в разные классы, X' должна лежать между ними или, в крайнем случае, совпадать с точкой B'. Соответствующая точке X' на орицикле точка X входит во второй класс дедекиндова сечения на этом орицикле и лежит между A и B, в крайнем случае совпадая с B. Если X не замыкает второй класс на орицикле, то между A и X существует точка Y, также принадлежащая второму классу. Ось y орицикла u, проходящая через точку Y, расположена между осями AA' и XX'; поэтому она должна пересечь отрезок $A'X'$ в некоторой его точке Y'. Точка Y' на прямой u' входит во второй класс, так как точка Y принадлежит второму классу на орицикле u. Но вместе с тем Y', по ее построению, расположена на прямой u' ближе к точкам первого класса, чем точка X'. А это невозможно, так как X' есть первая точка второго класса. Полученное противоречие показывает, что X необходимо замыкает второй класс. Если бы мы предположили, что X' на u' замыкает первый класс, то аналогичным путем убедились бы, что соответствующая ей точка X замыкает первый класс сечения на орицикле.

Итак, каково бы ни было дедекиндово сечение на орицикле, один из классов этого сечения необходимо имеет замыкающий элемент. Тем самым мы показали, что в геометрии орисферы имеет место принцип Дедекинда. Из теоремы 41 n° 23 тогда следует, что на орисфере справедливы утверждения аксиом непрерывности IV.1 и IV.2.

Проведенное нами исследование позволяет заключить, что на орисфере верны все предложения абсолютной геометрии. Действительно, все они могут быть получены логическим путем из аксиом I–IV, справедливость которых установлена.

Теперь нам надлежит выяснить вопрос: какая же теория параллельных осуществляется в геометрической системе орисферы — Евклида или Лобачевского?

Ответ на этот вопрос труда не представит.

Возьмем на орисфере Ω какой-нибудь орицикл a, плоскость которого обозначим буквой α. Пусть будет P — произвольная точка орисферы Ω, не лежащая на орицикле a. Проведем через точку P ось p орисферы. Из теоремы XII n° 35 следует, что прямая b параллельна плоскости α.

Представим себе теперь, что через точку P проведен произвольный орицикл b. Его плоскость β пройдет через прямую p. Орицикл b

не будет иметь общей точки с орициклом a только в том случае, когда плоскость β не пересекает плоскости α. Но так как прямая b параллельна плоскости α, то по теореме XIV n° 35 через нее проходит точно одна плоскость β, не пересекающая плоскости α.

Следовательно, через точку P на орисфере Ω проходит точно один орицикл, не встречающий орицикла a. Таким образом, на *орисфере имеет место евклидов постулат о параллельных.*

Мы можем высказать теперь следующее утверждение: *элементарная геометрия орисферы есть геометрия Евклида.*

Это замечательное обстоятельство играет важную роль в развертывании геометрии Лобачевского. Но и независимо от его использования оно само по себе представляет исключительный интерес. Оказывается, что отвергая V постулат Евклида в двумерной геометрии каждой плоскости, мы все-таки находим его в двумерной геометрии некоторой другой поверхности.

Интересно сопоставить геометрии на эквидистантной поверхности, на орисфере и на обыкновенной сфере, рассматривая в этих геометриях предложение о сумме углов треугольника.

Так как на эквидистантной поверхности имеет место геометрия Лобачевского, то всякий треугольник, составленный дугами геодезических линий (т. е. дугами эквидистант), имеет сумму внутренних углов, меньшую двух прямых.

На орисфере, поскольку на ней осуществляется геометрия Евклида, геодезический треугольник (составленный дугами орициклов) имеет сумму углов, равную двум прямым.

Сферический треугольник, стороны которого являются дугами больших кругов (т. е. геодезических линий сферы), имеет сумму углов, бóльшую двух прямых. На сфере существует даже геодезический треугольник с тремя прямыми углами.

Таким образом, в сферической геометрии справедливо как раз то предложение, ложность которого в абсолютной геометрии устанавливали многие геометры (Лежандр, Саккери, Ламберт; последние — под видом гипотезы тупого угла).

Конечно, это объясняется тем, что геометрия сферы еще менее сходна с геометрией евклидовой плоскости, чем геометрия плоскости Лобачевского.

Действительно, в геометрии сферы неверна не только евклидова аксиома параллельных, но неверно и большинство аксиом абсолютной геометрии (например, две геодезические линии сферы всегда пересекаются в двух точках; к точкам геодезической линии неприменимо понятие “между” и т. д.).

В заключение заметим, что пространство Лобачевского в одном отношении богаче, чем пространство Евклида; именно, в то время как в евклидовом пространстве существуют только две элементарные геометрии двумерных многообразий — сферическая и евклидова, в пространстве Лобачевского на различных поверхностях осуществляются все три известные нам геометрические системы.

§ 8. Площадь треугольника

48. В предыдущем разделе мы рассматривали только угловые и линейные величины. Теперь мы займемся задачей определения площади фигур на плоскости Лобачевского.

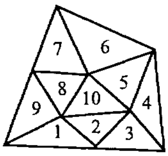


Рис. 62

Определяя площадь, мы используем понятие равносоставленности фигур: две фигуры называются *равносоставленными*, если их можно разложить на одинаковое число попарно конгруэнтных треугольников. Некоторое время мы будем ограничиваться рассмотрением только треугольников.

Имеет место следующее предложение: *необходимым и достаточным условием равносоставленности двух треугольников является равенство их дефектов.*

Напомним, что дефектом треугольника Δ называют разность

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta),$$

где $S(\Delta)$ — сумма внутренних углов треугольника; по теореме Лежандра (предложение III n° 8) и неевклидовой геометрии $S(\Delta) < \pi$ и $D(\Delta) > 0$.

Доказательство необходимости высказанного признака опирается на следующие две леммы.

Лемма I. *Пусть дано разбиение некоторой односвязной области, ограниченной замкнутой ломаной линией, на треугольники так, что при этом выполняются следующие условия: каждые два треугольника разбиения либо совсем не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину, либо общую сторону. Тогда, если α^2 обозначает число всех треугольников разбиения, α_i^0 — число вершин этих треугольников, лежащих внутри области, и α_e^0 — число вершин на границе, то имеет место равенство*

$$\alpha^2 - 2\alpha_i^0 - \alpha_e^0 = -2. \qquad \text{(A)}$$

(На рис. 62 $\alpha^2 = 10, \alpha_i^0 = 3, \alpha_e^0 = 6$.)

При доказательстве мы будем предполагать известной формулу Эйлера

$$\alpha^2 - \alpha^1 + \alpha^0 = 1,$$

где α^1 — число всех сторон треугольников разбиения, α^0 — число всех вершин *). Перенумеруем как-нибудь вершины треугольников разбиения и обозначим через p_{ik}^2 число треугольников, имеющих общую

*) См, например, *Александров П. С.* и *Ефремович В. А.* Очерк основных понятий топологии. – ОНТИ: 1936.

внутреннюю вершину с номером k, через p^2_{er} — число треугольников с общей вершиной на границе, помеченной номером r. Пусть p^1_{ik} и p^1_{er} — число сторон, исходящих из тех же вершин. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} p^2_{ik} &= p^1_{ik}, \\ p^2_{er} &= p^1_{er} - 1. \end{aligned} \tag{Б}$$

С другой стороны, суммируя по всем внутренним и внешним вершинам, найдем

$$\begin{aligned} \sum_k p^2_{ik} + \sum_r p^2_{er} &= 3\alpha^2, \\ \sum_k p^1_{ik} + \sum_r p^1_{er} &= 2\alpha^1. \end{aligned}$$

Вычтем из нижнего равенства верхнее; на основании (Б) будем иметь:

$$\alpha^0_e = 2\alpha^1 - 3\alpha^2.$$

Исключая отсюда и из тождества Эйлера

$$\alpha^3 - \alpha^1 + \alpha^0 = 1$$

величину α^1, мы получим:

$$\alpha^2 - 2\alpha^0 + \alpha^0_e = -2.$$

Но $\alpha^0 = \alpha^0_i + \alpha^0_e$; внося это выражение вместо α^0 в предыдущее равенство, найдем желаемый результат

$$\alpha^2 - 2\alpha^0_i - \alpha^0_e = -2.$$

Разбиения областей на треугольники, подчиненные условиям, высказанным в формулировке леммы I, в топологии называются *триангуляциями.*

Лемма II. *Если треугольник Δ составлен из треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, то*

$$D(\Delta) = D(\Delta_1) + \ldots + D(\Delta_n).$$

Эта лемма, очевидно, является обобщением леммы I n° 8, согласно которой при разбиении треугольника ABC трансверсалью BD на два треугольника ABD и BDC имеет место равенство

$$D(ABC) = D(ABD) + D(BDC).$$

Вместе с тем из леммы I n° 8 следует, что при доказательстве леммы II можно свести дело к рассмотрению случая, когда разбиение треугольника Δ является триангуляцией.

В самом деле, примыкание треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ друг к другу не удовлетворяет условиям триангуляции, если вершины некоторых треугольников Δ_i совпадают с внутренними точками сторон некоторых других треугольников Δ_i. Но тогда, соединяя поочередно вершины треугольников Δ_i, лежащие на сторонах соседних треугольников, с противоположными этим сторонам вершинами последних, мы получим новую систему треугольников $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_m$. Разбиение треугольника Δ на треугольники $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ будет уже триангуляцией. Но при этом сумма дефектов треугольников $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ равна сумме дефектов треугольников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, так как каждый раз при разделении треугольника Δ_i трансверсалью получаются два новых треугольника, сумма дефектов которых по лемме I n° 8 равна дефекту треугольника Δ_i.

Таким образом, для доказательства нашей леммы достаточно установить равенство

$$D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m) = D(\Delta).$$

Обозначим через l число вершин треугольников $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_m$, лежащих внутри Δ, и через p — число вершин, расположенных на сторонах треугольника Δ (три вершины треугольника Δ не учитываются). Тогда имеет место соотношение

$$m - 2l - p = 1. \tag{B}$$

Это соотношение получается незначительной переделкой из равенства (A) предыдущей леммы. Действительно, применяя лемму I к разбиению треугольника Δ на треугольники $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_m$, мы должны получить

$$\alpha^2 = m, \quad \alpha^0_i = l, \quad \alpha^0_e = p + 3.$$

Внося эти выражения в равенство (A), получим (B).

Рассмотрим теперь сумму $D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m)$. Очевидно,

$$D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m) = m\pi - [S(\Delta'_1) + \ldots + S(\Delta'_m)].$$

Сумма углов треугольников $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$, примыкающих к каждой их общей вершине, лежащей внутри Δ, равна 2π; углы, примыкающие к каждой вершине, расположенной на стороне треугольника Δ, в сумме составляют π; наконец, сумма углов треугольников $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ при тех вершинах, которые совпадают с вершинами треугольника Δ, равна $S(\Delta)$. Поэтому

$$S(\Delta'_1) + \ldots + S(\Delta'_m) = 2l\pi + p\pi + S(\Delta).$$

Отсюда

$$D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m) = (m - 2l - p)\pi - S(\Delta)$$

и согласно (B)

$$D(\Delta_1') + \ldots + D(\Delta_m') = \pi - S(\Delta) = D(\Delta).$$

Но так как

$$D(\Delta_1') + \ldots + D(\Delta_m') = D(\Delta_1) + \ldots + D(\Delta_n),$$

то

$$D(\Delta_1) + \ldots + D(\Delta_n) = D(\Delta).$$

Лемма II доказана.

Следующая теорема выражает необходимость указанного выше признака равносоставленности треугольников.

Теорема I. *Равносоставленные треугольники имеют равные дефекты.*

Пусть треугольники Δ и Δ' разложены на одинаковое число попарно конгруэнтных треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ и $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n'$. Нумерацию треугольников мы предположим установленной так, что треугольники Δ_i и Δ_i' с одинаковыми номерами конгруэнтны. По лемме II,

$$D(\Delta) = D(\Delta_1) + \ldots + D(\Delta_n)$$

и

$$D(\Delta') = D(\Delta_1') + \ldots + D(\Delta_n').$$

Но так как конгруэнтные треугольники, очевидно, имеют равные дефекты, то

$$D(\Delta_i) = D(\Delta_i').$$

Отсюда и из предыдущих равенств

$$D(\Delta) = D(\Delta').$$

Достаточность признака равносоставленности треугольников выражает

Теорема II. *Если треугольники имеют равные дефекты, то они равносоставлены.*

Доказательство этой теоремы мы сведем к установлению ряда лемм*).

Лемма α. *Две фигуры, равносоставленные с некоторой третьей, равносоставлены друг с другом.*

Пусть фигуры A и B равносоставлены с фигурой C. Представим себе, что на каждой из фигур A, B нанесены те прямые, которые разбивают ее на части, конгруэнтные частям фигуры C. Начертим

*) Нижеприводимые леммы частично заимствованы из книги: *Бальдус*. Неевклидова геометрия. – М.–Л., 1933.

на фигуре C прямые, разбивающие ее на части, соответственно конгруэнтные частям фигуры A, и потом — прямые, разбивающие ее на части, соответственно конгруэнтные частям фигуры B. Тогда, очевидно, и те и другие прямые вместе разобьют фигуру C на части, из которых можно составить как фигуру A, так и фигуру B.

Лемма β. *Если E и F — основания перпендикуляров, опущенных из вершин B и C треугольника ABC на прямую, соединяющую середины P и Q его сторон AB и AC, то $BCFE$ есть четырехугольник Саккери и треугольник ABC равносоставлен с четырехугольником $BCFE$.*

Прежде всего докажем, что $BCFE$ есть четырехугольник Саккери. Опустим из точки A перпендикуляр AD на прямую PQ; очевидно, имеют место равенства треугольников: $\Delta BEP = \Delta ADP$ и $\Delta CFQ = \Delta ADQ$, откуда $BE = AD$ и $CF = AD$. Следовательно, $BE = CF$, и таким образом, $BCFE$ действительно является четырехугольником Саккери. Чтобы установить равносоставленность треугольника ABC с четырехугольником $BCFE$, приходится рассматривать два случая.

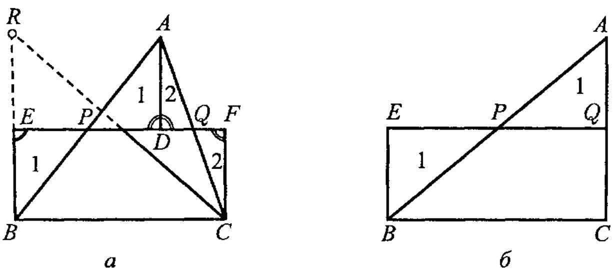


Рис. 63

1) Отрезок PQ является частью отрезка EF (рис. 63 а и б).

В этом случае равносоставленность фигур ABC и $BCFE$ усматривается непосредственно из рис. 63а и б, где равные треугольники помечены одинаковыми цифрами (фигура, изображенная на рис. 63 б, соответствует тому случаю, когда F и Q совпадают).

2) Отрезок PQ лежит, по крайней мере частично, вне EF (рис. 64). В этом случае заметим прежде всего, что $PQ = \frac{1}{2}EF$. В самом деле, из очевидных равенств треугольников

$$\Delta BEP = \Delta ADP \text{ и } \Delta CFQ = \Delta ADQ$$

следует $EP = PD$ и $FQ = QD$, откуда $EP - FQ = PD - QD$ или $EF - PQ = PQ$, т. е. $2PQ = EF$ и $PQ = \frac{1}{2}EF$.

Далее, соединим точку C с точкой P и отложим на соединяющей прямой отрезок $PA' = PC$. Вслед за тем соединим точку A' с точкой B. Пусть P' — точка, в которой прямая EF пересекает сторону BA' треугольника $A'BC$. Нетрудно установить, что P' есть середина стороны $A'B$. Действительно, если $A'D'$ — перпендикуляр, опущенный из A' на EF, то $A'D' = CF = BE$, поэтому $\Delta P'A'D' = \Delta P'BE$, откуда $BP' = P'A'$. Кроме того, треугольник $A'BC$ равносоставлен с треугольником ABC, так как эти треугольники имеют в качестве общей части треугольник BPC, а треугольники BPA' и CPA равны, поскольку они содержат равные углы между соответственно равными сторонами. Итак, исходя из треугольника ABC, мы можем построить так, как сейчас было указано, треугольник $A'BC$; аналогично, исходя из треугольника $A'BC$, — новый треугольник $A''BC$, и т. д. (рис. 64).

Все треугольники ABC, $A'BC$, $A''BC, \ldots$ имеют общую среднюю линию и по предыдущему, а также вследствие леммы α, равносоставлены друг с другом. При этом имеют место равенства отрезков:

$$QP = PP' = P'P'' = \ldots = \frac{1}{2}EF.$$

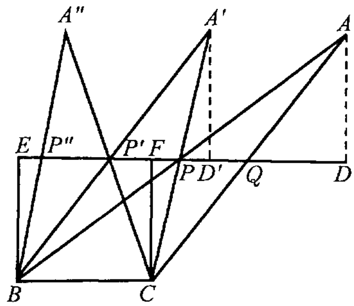


Рис. 64

Вследствие аксиомы Архимеда некоторый из этих треугольников расположен так, как предусмотрено в первом случае доказательства этой леммы, следовательно, он равносоставлен с четырехугольником Саккери $BCFE$; тем самым устанавливается равносоставленность с четырехугольником $BCFE$ исходного треугольника ABC. Лемма доказана.

Лемма γ. *Если два треугольника имеют равные дефекты и некоторая сторона одного из этих треугольников равна какой-нибудь стороне другого, то четырехугольники Саккери, соответствующие этим сторонам, конгруэнтны.*

В самом деле, $\angle B$ и $\angle C$ четырехугольника $BCFE$ равны между собой, и, как легко усмотреть из рис. 63 или из рис. 64, величина каждого из них равна $S/2$, где S — сумма углов треугольника ABC. Но четырехугольник Саккери вполне определяется верхним основанием и углом при этом основании, откуда следует справедливость леммы.

Из лемм α, β и γ тотчас вытекает

Лемма δ. *Если два треугольника имеют равные дефекты и некоторая сторона одного из них равна какой-нибудь стороне другого, то эти треугольники равносоставлены.*

Если на рис. 63 продолжим отрезок BE до точки R так, чтобы $BE = ER$, то середина стороны RC треугольника BRC будет лежать на прямой EF, что усматривается непосредственно. По лемме β оба треугольника BRC и BAC равносоставлены с четырехугольником $BCEF$. Следовательно, по лемме α они равносоставлены друг с другом. Угол $EBC = {}^{S}\!/_{2}$. Мы доказали, таким образом, еще следующую лемму.

Лемма ε. *Если сумма углов треугольника ABC равна S, то можно построить равносоставленный с ним треугольник, один из углов которого будет иметь величину $S/2$.*

Рассмотрим теперь два треугольника, имеющих равные дефекты, а следовательно, и равные суммы углов S. Согласно лемме ε мы можем построить два новых треугольника, соответственно равносоставленных с данными треугольниками, причем каждый из новых треугольников имеет один угол, равный $S/2$. Наложим эти треугольники друг на друга так, чтобы их равные углы совпали (рис. 65). Если при этом вершины C и C_1 совпадут, то должны будут совпасть и вершины A и A_1, так как в противном случае один треугольник окажется частью другого и по лемме I n° 8 он будет иметь меньший дефект, что противоречит нашему предположению. В этом случае все вершины треугольников совпадут и треугольники будут конгруэнтны. Если такое совпадение не имеет места, то по той же причине один из треугольников не может находиться полностью внутри другого; и треугольники расположатся так, как показано на рис. 65.

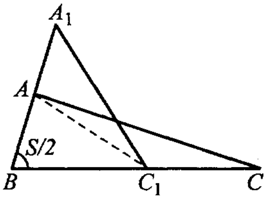


Рис. 65

Проведя линию AC_1, убедимся на основании леммы I n° 8, что треугольники AC_1A_1 и AC_1C имеют равные дефекты и, следовательно, по лемме δ, равносоставлены. Поэтому и треугольники ABC и A_1BC_1 равносоставлены.

Тем самым теорема II полностью доказана.

Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC. Возьмем на его стороне BC точку D и положим $BC = a$, $BD = x$. Дефект треугольника BAD, очевидно, является некоторой функцией от x:

$$D(ABD) = D(x).$$

Если мы условимся считать $D(0) = 0$, то функция $D(x)$ будет определена при всех значениях x, $0 \leqslant x \leqslant a$.

Мы докажем, что $D(x)$ непрерывна при всех x, $0 \leqslant x \leqslant a$.

Обозначим величину $\angle BAD$ через $\alpha(x)$, величину $\angle BDA$ — через $\beta(x)$. Нам достаточно будет доказать непрерывность функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Так как обе эти функции монотонны, то непрерывность их будет доказана, коль скоро мы установим, что вместе с каждыми двумя своими значениями они принимают также все промежуточные.

Для функции $\alpha(x)$ это очевидно, так как прямую AD можно провести под любым углом наклона к прямой AB. Легко усмотреть также, что и угол наклона прямой AD к прямой BC принимает все возможные значения (между 0 и π, если не ограничивать положение точки D на прямой BC). В самом деле, возьмем $\angle MON$ с произвольной величиной β_0 и из переменной точки M^* на стороне OM

этого угла опустим перпендикуляр M^*N^* на сторону ON. Положим $OM^* = x^*$, $M^*N^* = y^*$. В силу леммы II n° 30

$$y^* = f(x^*)$$

— непрерывная безгранично возрастающая монотонная функция. Отсюда следует, что существует ее значение y_0^*, равное длине высоты треугольника ABC, опущенной на сторону BC. Обозначим соответствующие положения точек M^* и N^* через M_0^* и N_0^*. Расположим теперь треугольник $OM_0^*N_0^*$ так, чтобы точка M_0^* совпала с точкой A, а сторона $M_0^*N_0^*$ расположилась на высоте, опущенной из вершины A на сторону BC треугольника ABC. Очевидно, при этом точки O и N_0^* окажутся на прямой BC. Обозначим точку, с которой совместится точка O, буквой D_0 и длину BD_0 — буквой x_0. По построению, $\beta(x_0)$ имеет наперед назначенную величину β_0; тем самым наше утверждение доказано: функция $D(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant a$.

После того как доказана непрерывность дефекта $D(x)$, можно высказать следующую теорему.

Теорема III. *Каково бы ни было число α, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant \alpha \leqslant {}^1\!/_n D(ABC)$, на стороне BC треугольника ABC существует система точек $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что каждый из треугольников $BAD_1, D_1AD_2, \ldots, D_{n-1}AD_n$ имеет дефект, равный α.*

Доказательство вытекает из только что установленной непрерывности дефекта.

После всего изложенного оказывается возможным определить понятие площади треугольника.

В евклидовой геометрии площадь треугольника определяется так, что при этом выполняются следующие два условия:

1) конгруэнтные треугольники имеют равные площади;

2) если треугольник Δ составлен из треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, то площадь треугольника Δ равна сумме площадей треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Эти два условия мы положим в основу определения площади треугольника в неевклидовой геометрии.

Именно, представим себе, что каждому треугольнику Δ плоскости Лобачевского поставлено в соответствие некоторое положительное число $f(\Delta)$; иначе можно сказать, что задана некоторая функция $f(\Delta)$, областью определения которой является множество всех треугольников и все значения которой положительны. При этом пусть будут выполнены следующие два условия:

1) если треугольник Δ_1 равен треугольнику Δ_2, то $f(\Delta_1) = f(\Delta_2)$;

2) если треугольник Δ составлен из треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, то

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + \ldots + f(\Delta_n).$$

Тогда число $f(\Delta)$ мы назовем площадью треугольника Δ.

Для того чтобы этому определению придать смысл, нужно доказать, что существует функция $f(\Delta)$, обладающая свойствами 1 и 2. Мы докажем, что такая функция $f(\Delta)$ существует, и притом "единственная", в том смысле, что она вполне определяется заданием ее значения для какого-нибудь треугольника; иначе говоря, если одному треугольнику приписана определенная площадь, то площадь каждого треугольника вполне определена.

Что касается вопроса существования, то он разрешен всем предыдущим изложением: дефект треугольника $D(\Delta)$ обладает свойствами 1 и 2. Вопрос о единственности значения площади решает следующая теорема:

Теорема IV. *Всякая функция $f(\Delta)$, удовлетворяющая условиям 1 и 2, имеет вид*

$$f(\Delta) = kD(\Delta), \qquad (*)$$

где k — положительная постоянная, т. е. положительное число, не зависящие от Δ.

В самом деле, если эта теорема справедлива, то, фиксируя значение функции $f(\Delta)$ для какого-нибудь треугольника Δ_0, мы тем самым вполне определяем эту функцию, так как равенством

$$f(\Delta_0) = kD(\Delta_0)$$

значение постоянной k вполне определено.

Можно сказать, что выбор одной из функций $f(\Delta)$ в качестве площади треугольника, или, что то же самое, выбор константы k в равенстве $(*)$, соответствует назначению определенной меры площадей. Нужно только иметь в виду, что если выбрать функцию $f(\Delta)$ в качестве площади произвольно, то может не оказаться треугольника с площадью, равной единице. Так, если взять $k < 1/\pi$, то для всех треугольников будет $f(\Delta) < 1$, так как дефект каждого треугольника меньше π.

Перейдем к доказательству теоремы IV.

Достаточно доказать, что для любых двух треугольников Δ и $\overline{\Delta}$ будет

$$\frac{f(\Delta)}{f(\overline{\Delta})} = \frac{D(\Delta)}{D(\overline{\Delta})}.$$

Действительно, тогда, фиксируя треугольник $\overline{\Delta}$ и полагая $\dfrac{f(\overline{\Delta})}{D(\overline{\Delta})} =$ $= k$, получим уравнение $(*)$.

Зададим целое положительное число n и трансверсалями, выходящими из какой-нибудь вершины треугольника $\overline{\Delta}$, разобьем его на треугольники $\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_n$ так, чтобы дефекты всех этих треугольников были равны между собой; тогда

$$D(\overline{\Delta}_i) = \frac{D(\overline{\Delta})}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Обозначим теперь вершины треугольника Δ буквами A, B, C и построим на стороне AC систему точек $A_1, A_2, \ldots, A_m$, подчиняя ее выбор следующему условию: если Δ_1 — треугольник ABA_1, Δ_2 — треугольник A_1BA_2 и т. д., то

1) дефекты всех треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ должны быть равны $\frac{D(\overline{\Delta})}{n}$;

2) либо точка A_m совпадает с точкой C, либо

$$D(A_mBC) < \frac{D(\overline{\Delta})}{n}.$$

Возможность такого построения обеспечивается теоремой III. В самом деле, пусть m — наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$mD(\overline{\Delta}) \leqslant nD(\Delta).$$

Тогда, если мы положим

$$\alpha = \frac{D(\overline{\Delta})}{n},$$

то

$$\alpha \leqslant \frac{D(\Delta)}{m}.$$

По теореме III на стороне AC треугольника ABC определятся точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которым будут соответствовать треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ с дефектами, равными α. При этом точка A_m совпадает с C, если $\alpha = \frac{D(\Delta)}{m}$ и будет предшествовать C, если $\alpha < \frac{D(\Delta)}{m}$; очевидно, в последнем случае дефект треугольника A_mBC будет меньше α, ибо иначе мы имели бы $(m+1)D(\overline{\Delta}) \leqslant nD(\Delta)$, вопреки условию.

Очевидно, имеют место соотношения

$$\frac{m}{n}D(\overline{\Delta}) \leqslant D(\Delta) < \frac{m+1}{n}D(\overline{\Delta})$$

или

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{D(\Delta)}{D(\overline{\Delta})} < \frac{m+1}{n},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{D(\Delta)}{D(\overline{\Delta})}. \tag{A}$$

Заметим далее, что так как треугольники $\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_n, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ имеют равные дефекты, то согласно теореме II они все равносоставлены с каким-нибудь одним из них. Отсюда и из условий 1 и 2 следуют равенства

$$f(\bar{\Delta}_1) = \ldots = f(\bar{\Delta}_n) = f(\Delta_1) = \ldots = f(\Delta_m)$$

или

$$\begin{aligned} f(\bar{\Delta}_i) &= \frac{f(\bar{\Delta})}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ f(\Delta_j) &= \frac{f(\bar{\Delta})}{n} \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned} \qquad (**)$$

Далее, на основании условия 2

$$mf(\Delta_j) \leqslant f(\Delta) < (m+1)f(\Delta_j).$$

Отсюда и из равенств (**) имеем соотношения

$$\frac{m}{n} f(\bar{\Delta}) \leqslant f(\Delta) < \frac{m+1}{n} f(\bar{\Delta})$$

или

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})} < \frac{m+1}{n},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})}. \qquad (Б)$$

Сравнивая (А) и (Б), получаем:

$$\frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})} = \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})}.$$

Теорема IV доказана.

Итак, мы показали, что условия 1 и 2 определяют площадь $f(\Delta)$ с точностью до постоянного множителя:

$$f(\Delta) = kD(\Delta). \qquad (I)$$

Позднее (в n° 182) мы установим зависимость между выбором меры площади и выбором меры длины (в евклидовой геометрии такая зависимость устанавливается тем, что за единицу площади берется площадь квадрата, сторона которого равна единице длины). Тем самым постоянная k будет фиксирована вместе с выбором линейного масштаба.

После того как определена площадь треугольника, определение площади произвольного многоугольника подсказывается совершенно естественными соображениями: полагая произвольный многоугольник P разделенным на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, мы будем называть площадью P число σ, равное сумме площадей треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Читатель сам легко докажет, что число σ не зависит от способа разбиения многоугольника на составляющие треугольники.

По поводу изложенного существенно сделать некоторые замечания.

Так как дефект треугольника, по самому смыслу его определения, меньше π, то площадь каждого треугольника меньше $k\pi$. Таким образом, можно высказать теорему: в абсолютной геометрии допущение существования треугольника сколь угодно большой площади эквивалентно V постулату Евклида. В самом деле, как видно из предыдущего, такое допущение не может выполняться в системе Лобачевского.

С другой стороны, так как существуют многоугольники, покрывающие произвольно большое число одинаковых треугольников, то площади многоугольников могут быть как угодно велики. Кроме того, из непрерывности дефекта следует, что существует многоугольник, площадь которого равна любому наперед указанному положительному числу. В частности, существует многоугольник с площадью, равной единице.

В заключение сравним измерение площадей в геометрии Лобачевского с измерением площадей на сфере. Известно, что площадь сферического треугольника выражается формулой

$$\sigma(\Delta) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi), \qquad \text{(II)}$$

где R — радиус сферы, а α, β, γ — углы треугольника. Но формулу (I) можно записать в виде

$$\sigma(\Delta) = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma). \qquad \text{(I}')$$

Мы видим, что формула (I′) получается из (II) если радиус сферы R заменить мнимой величиной $i\sqrt{k}$. Это обстоятельство было замечено еще Ламбертом.

§ 9. Доказательство логической непротиворечивости геометрии Лобачевского

49. Мы познакомились с основными фактами теории параллельных геометрии Лобачевского. Хотя многие из этих фактов решительно противоречат нашим привычным представлениям о свойствах прямых, но при самом внимательном анализе мы не смогли бы обнаружить в том, что было до сих пор изложено, каких-либо л о г и ч е с к и х ошибок. Наоборот, неевклидова геометрия, по крайней мере в той части, которая нам знакома, имеет вид теории, весьма стройной в логическом отношении.

Однако какова гарантия, что неевклидова геометрия не приведет к логическим противоречиям при неограниченном ее развитии? Сам Лобачевский отлично понимал, что для доказательства независимости V постулата Евклида от других геометрических постулатов недостаточно только продемонстрировать группу теорем, полученных в предположении, что постулат Евклида неверен, и сослаться на отсутствие логических противоречий в этой группе. Ему было ясно, что здесь требуется какое-то рассуждение, показывающее, что принятые им посылки *никогда не* приведут к противоречию, т. е. что доказательство евклидова постулата методом от противного невозможно.

Получив основные уравнения своей геометрии, Лобачевский дал ей аналитическое истолкование и тем самым в принципе доказал ее непротиворечивость. Впоследствии (к концу XIX столетия), когда сложились достаточно широкие взгляды на геометрические объекты и геометрические аксиомы, непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана педантически точно и весьма просто. Одно из таких доказательств, принадлежащее А. Пуанкаре, мы воспроизведем на ближайших страницах.

Чтобы не затемнять изложение трудностями технического характера, мы будем рассматривать только двумерную геометрию.

Тогда поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: доказать, что требования аксиом I.1–I.3, II, III, IV и неевклидовой аксиомы о параллельных логически совместимы, т. е. что из этих аксиом нельзя вывести двух утверждений, из которых одно отрицает другое.

Общая идея решения этой задачи подсказывается современным пониманием геометрических аксиом. Вернемся к n° 11, где вводятся в рассмотрение геометрические объекты. Там нет ни малейшего намека на описание геометрических элементов: точек, прямых и плоскостей; предполагается лишь *существование* некоторых объектов, которые называются такими словами. Далее говорится, что между элементами существуют известные отношения, выражаемые словами: "лежит на...", "между", "конгруэнтны". Описание этих отношений также не дается; предполагается только, что они обладают некоторыми весьма немногочисленными свойствами, которые перечислены в аксиомах.

Поэтому, изучая, например, планиметрию Евклида, мы можем словами "точка" и "прямая" назвать какие угодно конкретные объекты и словами "лежит на...", "между", "конгруэнтны" обозначать какие угодно их взаимные отношения при одном лишь условии, что они согласованы с требованиями аксиом I.1–I.3, II, III, IV, V. Каждое, предложение, логически вытекающее из аксиом I.1–I.3, II–V, выражает тогда известный факт, относящийся к выбранным объектам. Понятно, что конкретный смысл каждого абстрактного геометрического предложения зависит от того, какая система объектов при этом выбирается. Выбирая определенные объекты, отношения которых удовлетворяют требованиям данной системы аксиом, мы получаем модель той абстрактной схемы, которая этими аксиомами определяется.

Примеры различных моделей одной и той же абстрактной схемы планиметрии Лобачевского мы имели в предыдущем разделе, где рассматривали элементарную геометрию на эквидистантных поверхностях. Действительно, как нам известно, отношения между точками и эквидистантами на любой эквидистантной поверхности и отношения между точками и прямыми на каждой плоскости пространства Лобачевского в одинаковой мере соответствуют аксиомам неевклидовой планиметрии. Правда, пока еще мы не знаем, существуют ли объекты, о которых идет речь, так как вопрос о существовании пространства Лобачевского как раз и является предметом нашего обсуждения.

В построении конкретной модели логической схемы Лобачевского и заключается доказательство ее логической непротиворечивости.

Принцип такого рода доказательства удобно пояснить, рассматривая задачу, противоположную той, какая перед нами стоит. Вообразим себе, что каким-то способом мы убедились в непротиворечивости геометрии Лобачевского, но ставим вопрос о непротиворечивости планиметрии Евклида. Этот вопрос мы легко могли бы решить. Достаточно было бы рассмотреть орисферу. Действительно, на орисфере точки и орициклы находятся именно в таких взаимных отношениях, какие требуются аксиомами евклидовой планиметрии (см. n° 47). Поэтому, если бы аксиомы планиметрии Евклида могли привести к двум взаимно исключающим следствиям, то тем самым получилось бы противоречие и в элементарной геометрии орисферы, т. е. в геометрии Лобачевского, так как орисфера есть объект этой геометрии.

Таким образом, поскольку в пространстве Лобачевского может быть построена модель планиметрии Евклида, из непротиворечивости геометрии Лобачевского вытекает непротиворечивость планиметрии Евклида.

Наша цель — доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского. Условимся, решая эту задачу, предполагать евклидову геометрию непротиворечивой (вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии будет рассмотрен в следующей главе). Хотя в евклидовом пространстве нет поверхностей, элементарная геометрия которых совпадает с планиметрией Лобачевского, но все-таки мы сумеем из объектов евклидова пространства построить модель неевклидовой планиметрии. Мы только будем вынуждены, говоря о точках и прямых, еще более отвлекаться от тех наглядных представлений, которые у нас вызывают эти слова, чем в том случае, когда мы рассматриваем элементарную геометрию некоторой поверхности.

Более того, построение модели неевклидовой планиметрии можно провести на евклидовой плоскости и таким образом из непротиворечивости евклидовой планиметрии вывести непротиворечивость планиметрии Лобачевского.

Точно результат, к которому мы придем, формулируется так: если непротиворечива система аксиом евклидовой планиметрии I.1–I.3, II, III, IV, V, то система, составленная аксиомами I.1–I.3, II, III, IV и аксиомой о параллельных Лобачевского, также не может привести к логическим противоречиям.

Вместе с тем будет доказано, что евклидова аксиома о параллельных не является необходимым следствием аксиом I.1–I.3, II, III, IV.

Ниже излагается построение модели или, как еще говорят, интерпретации неевклидовой планиметрии на плоскости Евклида, принадлежащее А. Пуанкаре.

50. Рассмотрим в евклидовой плоскости некоторую прямую x, которую для удобства вообразим себе горизонтальной. Прямая x определяет две полуплоскости; одну из них мы условно назовем "верхней". Будем называть *неевклидовыми точками* точки верхней полуплоскости (не причисляя к ним точки прямой x) и *неевклидовыми прямыми* — евклидовы полуокружности, лежащие в верхней полуплоскости и ортогональные к прямой x (т. е. имеющие центры на прямой x), а также евклидовы полупрямые верхней полуплоскости, опирающиеся на прямую x и составляющие с ней прямой угол. Чтобы упростить необходимые в дальнейшем формулировки, условимся эти полупрямые называть полуокружностями бесконечно большого радиуса.

Между неевклидовыми точками и прямыми мы установим определенные отношения, согласуя их с требованиями аксиом I.1—I.3, II, III, IV, т. е. с требованиями аксиом абсолютной геометрии. А после этого мы убедимся, что в системе объектов, которую мы таким образом построим, осуществляется аксиома параллельных Лобачевского.

Отношения между объектами будут устанавливаться одно за другим, по мере того как они потребуются при последовательном рассмотрении аксиом.

Обращаемся к аксиомам группы I. Группе аксиом I предшествует допущение, согласно которому геометрические объекты находятся в известных сопоставлениях друг с другом, выражаемых словами: "точка лежит на прямой", "прямая проходит через точку" и т. д.

Нам надлежит установить, как мы будем понимать эти выражения для неевклидовых точек и прямых.

Пусть A — неевклидова точка и a — неевклидова прямая, представляемая некоторой полуокружностью (обозначим последнюю также буквой a). Мы будем полагать, что точка A находится на (неевклидовой) прямой a, если эта точка расположена на евклидовой полуокружности a, в смысле тех отношений, какие имеют место в евклидовой геометрии.

То, что для неевклидовых точек и прямых справедливы аксиомы I.1—I.3, легко проверяется средствами евклидовой геометрии.

В самом деле, аксиома I.1 соблюдена, так как через две точки A и B верхней полуплоскости всегда можно провести полуокружность, ортогональную к прямой x.

Аксиома I.2 соблюдена, так как две полуокружности, изображающие неевклидовы прямые, могут иметь не более одной общей точки.

Аксиома I.3 соблюдена, так как на полуокружности существует бесконечно много точек и в верхней полуплоскости имеется бесконечно много точек, не лежащих на одной полуокружности.

Перейдем к рассмотрению аксиом порядка группы II. Сначала мы должны точно условиться, какой смысл придается словам "лежит между..." по отношению к неевклидовым точкам на неевклидовой прямой.

Пусть A, B, C — три точки неевклидовой прямой, изображаемой полуокружностью a. Мы будет говорить, что точка B (в неевклидовом смысле) лежит между A и C, если на полуокружности a точка B расположена между A и C в том смысле, как это понимается в евклидовой геометрии. Иначе говоря, порядок точек на неевклидовой прямой совпадает с порядком точек на евклидовой полуокружности, изображающей эту прямую в верхней полуплоскости.

Более подробно определение порядка точек неевклидовой прямой в случае, когда изображающая ее полуокружность не вырождается в евклидову полупрямую, можно высказать следующим образом. Пусть некоторая неевклидова прямая изображается полуокружностью a, центр которой обозначен буквой O (точка O не является объектом нашей системы). Рассмотрим какую-нибудь евклидову прямую u, параллельную прямой x. Каждая евклидова прямая, проходящая через O, за исключением прямой x, пересекает полуокружность a в одной точке M и прямую u в одной точке M', которую мы будем называть соответствующей точке M.

Тогда если A, B, C — три точки неевклидовой прямой, представляемой полуокружностью a, то B, как объект неевклидовой геометрии, расположена между A и C в том случае, когда в системе точек A', B', C', которые на евклидовой прямой u соответствуют точкам A, B, C, точка B' лежит между A' и C'.

Отсюда тотчас следует, что для неевклидовой прямой справедливы аксиомы II.1–II.3, поскольку эти аксиомы справедливы для каждой евклидовой прямой.

Отметим попутно одно важное обстоятельство, именно: *в упорядоченном множестве точек неевклидовой прямой осуществляется принцип Дедекинда.*

В самом деле, принцип Дедекинда имеет место в евклидовой геометрии. Но как мы видели, между точками евклидовой прямой и точками неевклидовой прямой можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие точки находятся в одинаковых отношениях порядка. А этим, собственно, и доказывается высказанное утверждение.

Кроме аксиом II.1–II.3, справедливость которых уже установлена нами, группа II содержит еще аксиому Паша II.4. Чтобы убедиться, что предложение Паша имеет место в нашей схеме, нужно доказать следующую евклидову теорему: пусть ABC — криволинейный треугольник (рис. 66), составленный из дуг полуокружностей, и a — полуокружность, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; тогда если a проходит через какую-нибудь точку внутри дуги AC, то она проходит либо через точку дуги AB, либо через точку дуги BC. Доказательство этой теоремы, с наглядной точки зрения вполне очевидной, не представляет никакого интереса, и мы приводить его не будем.

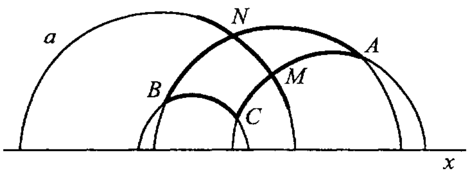


Рис. 66

Проверка аксиом первых двух групп сводилась к установлению ряда тривиальных предложений геометрии Евклида. Сложнее обстоит дело с аксиомами конгруэнтности III.1–III.5, к исследованию которых мы скоро приступим. В надлежащем определении конгруэнтных образов как раз и состоит смысл употребляемого приема.

51. Основным инструментом в наших дальнейших построениях будет являться одно специальное отображение евклидовой плоскости на самое себя, хорошо известное в элементарной геометрии, в теории аналитических функций и в математической физике под названием *инверсии*.

Пусть дана некоторая окружность k с центром в точке A (рис. 67), имеющая радиус r. Обозначим через M произвольную точку плоскости. По заданной точке M, если она не совпадает с A, всегда и однозначно можно построить новую точку M', определяемую на луче AM условием

$$AM' \cdot AM = r^2 \qquad (*)$$

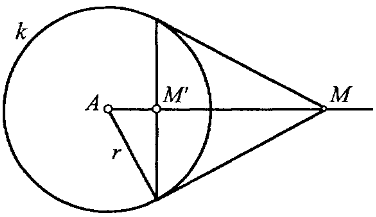


Рис. 67

(построение показано на рис. 67). Точка M' называется *образом точки* M по инверсии относительно окружности k, или просто *инверсией точки* M.

Кроме того, мы условимся называть точку M' *инверсией точки* M *относительно прямой* u, если точка M' симметрична точке M по отношению к прямой u. В последующих формулировках мы, как правило, не будем различать инверсию относительно окружности и инверсию относительно прямой, считая прямую окружностью бесконечно большого радиуса. Доказательства теорем, относящихся к инверсиям, мы будем вести часто в предположении, что окружность инверсии — обыкновенная. Тот особый случай, когда окружность инверсии имеет бесконечно большой радиус (т. е. является прямой), требует иногда дополнительных, но совершенно тривиальных рассуждений. Их легко воспроизведет сам читатель.

Вполне очевидны следующие свойства инверсий:

1. *Если M' есть инверсия точки M, то M есть инверсия точки M'. Таким образом, инверсия совпадает с обратным себе отображением.*

2. *При инверсии внешняя по отношению к окружности k область плоскости отображается на внутреннюю, а внутренняя область — на внешнюю* *).

3. *Каждая точка окружности k совпадает со своей инверсией.*

Некоторые другие свойства инверсий мы установим при помощи небольших вычислений. Введем на плоскости декартову ортогональную систему координат и сопоставим с каждой точкой M комплексное число $z = x+iy$, где x и y — координаты точки M. Как обычно, чертой сверху будем обозначать число, комплексно сопряженное к данному: $\bar{z} = x-iy$. Очевидно, задание любого из двух чисел z или $\bar{z}$ определяет точку M.

Поместим центр окружности, относительно которой определена инверсия, в начало координат. Тогда если две точки, определяемые числами z и z', являются инверсиями друг друга, то вследствие условия $(*)$ между z и z' имеет место соотношение

$$\bar{z}z' = r^2.$$

Отсюда получаем аналитическое представление инверсии:

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}},$$

или в координатах:

$$x' = r^2\frac{x}{x^2+y^2}, \quad y' = r^2\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Пользуясь этими формулами, легко доказать так называемое круговое свойство инверсии: если точка z описывает окружность или прямую, то ее инверсия z' описывает либо окружность, либо прямую.

Считая прямую окружностью бесконечно большого радиуса, предыдущее свойство можно выразить более коротко:

4. *Инверсия окружности есть окружность.*

---

*) При этом, если окружность k имеет бесконечно большой радиус, т. е. является прямой, то любую из двух полуплоскостей, определяемых этой прямой, можно рассматривать как внутреннюю область, и тогда другую — как внешнюю.

Для доказательства рассмотрим произвольную окружность; пусть она имеет уравнение

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0.$$

Заменяя в этом уравнении текущие координаты x, y выражениями

$$x=r^2\frac{x'}{x'^2+y'^2},\quad y=r^2\frac{y'}{x'^2+y'^2},$$

получим

$$Ar^4+Br^2x'+Cr^2y'+D\left(x'^2+y'^2\right)=0.$$

Таким образом, координаты точек, являющихся инверсиями точек окружности, также удовлетворяют уравнению окружности (или прямой, если $D=0$). Тем самым утверждение доказано.

Особую роль у нас будут играть отображения, представляющие собой произведение некоторого числа последовательно проведенных инверсий.

Пусть дано одно из таких отображений, переводящее произвольную точку z в точку z'. Нетрудно показать, что если это отображение есть произведение четкого числа инверсий, то z' выражается через z формулой

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\tag{I}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ — комплексные постоянные. Если же данное отображение составлено из нечетного числа инверсий, то зависимость z' от z имеет вид

$$z'=\frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}.\tag{II}$$

Сначала покажем, что инверсия относительно окружности с произвольным центром a и радиусом r аналитически представляется зависимостью вида (II). Для этого введем вспомогательную систему координат с началом в точке a, оси которой параллельны осям первоначальной системы. Пусть M и M' — две точки, соответствующие друг другу по инверсии относительно данной окружности. Если Z и Z' — определяющие их комплексные числа во вспомогательной системе координат, то

$$Z'=\frac{r^2}{\overline{Z}}.$$

Обозначим через z и z' комплексные числа, определяющие эти же точки в старой системе. Очевидно, что $z=Z+a$ и $z'=Z'+a$. Заменяя в предыдущем соотношений Z и Z' их выражениями через z и z', получим

$$z' - a = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}},$$

откуда

$$z' = \frac{a\bar{z} + \left(r^2 - a\bar{a}\right)}{\bar{z} - \bar{a}},$$

или, если положить $a = \alpha$, $r^2 - a\bar{a} = \beta$, $1 = \gamma$, $-\bar{a} = \delta$:

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}.$$

Мы вели сейчас выкладки в предположении, что окружность инверсии — обыкновенная. Нетрудно получить зависимость между z и z' для инверсии относительно прямой. В самом деле, инверсия относительно вещественной оси характеризуется уравнением $z' = \bar{z}$, следовательно, инверсия относительно прямой, проходящей через нулевую точку, аналитически определяется равенством $e^{i\varphi}z' = \overline{(e^{i\varphi}z)}$ или $z' = e^{-2i\varphi}\bar{z}$; отсюда при помощи сдвига найдем зависимость между z и z' в том случае, когда прямая, относительно которой совершается инверсия, имеет любое положение; именно:

$$z' = e^{-2i\varphi}\bar{z} + \mathrm{const}\,.$$

Эта зависимость получается из (II) при $\gamma = 0$.

Таким образом, соотношением $z' = \dfrac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$ при подходящем выборе постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, может быть определена любая инверсия как относительно обыкновенной окружности, так и относительно окружности бесконечно большого радиуса.

Пусть теперь последовательно совершаются две инверсии относительно произвольных окружностей. Если первая из них отображает z в z', а вторая отображает z' в z'', то согласно предыдущему

$$z' = \frac{\alpha_1\bar{z} + \beta_1}{\gamma_1\bar{z} + \delta_1}$$

и

$$z'' = \frac{\alpha_2\bar{z}' + \beta_2}{\gamma_2\bar{z}' + \delta_2}.$$

Из первого равенства имеем

$$\bar{z}' = \frac{\bar{\alpha}_1 z + \bar{\beta}_1}{\bar{\gamma}_1 z + \bar{\delta}_1}.$$

Если подставить это выражение во второе равенство, то после небольших преобразований и введения надлежащих обозначений получим:

$$z'' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

т. е. зависимость вида (I). Очевидно, если мы еще раз произведем инверсию, переводящую z'' в z''', то зависимость z''' от z будет иметь вид (II); при следующей инверсии для z''' опять получим (I) и т. д.

Докажем теперь нужные для дальнейшего свойства произведений инверсий.

5. *Если отображение, представляющее собой произведение четного числа инверсий, оставляет неподвижными три точки плоскости, то все точки плоскости при этом отображении остаются на своих местах, и отображение, следовательно, является тождественным.*

Как нам известно, отображение указанного вида, переводящее z в z', характеризуется равенством

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Все неподвижные точки этого отображения определяются уравнением $z' = z$, т. е.

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

или

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0.$$

Согласно условию полученное уравнение должно иметь три решения, что возможно только в том случае, когда оно обращается в тождество, т. е. когда

$$\gamma = 0, \quad \delta - \alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

Следовательно,

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z.$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$ (если $\alpha = 0$, то любая точка z отображается в одну и ту же точку $z' = 0$, а это для произведения инверсий невозможно, так как каждая инверсия разные точки переводит в разные точки). Вследствие равенства $\delta - \alpha = 0$ при $\alpha \neq 0$ находим $z' = z$. Этим наше утверждение доказано.

6. *Если отображение, представляющее собой произведение нечетного числа инверсий, оставляет неподвижными три точка плоскости, то оно является инверсией относительно окружности, проходящей через эти точки.*

Пусть $z' = f(z)$ — данное отображение. Если $z'' = \varphi(z')$ — инверсия относительно указанной окружности, то $z'' = \varphi(f(z))$ есть отображение, составленное уже четным числом инверсий, причем оно оставляет неподвижными те же самые три точки, что и данное отображение $z' = f(z)$. Согласно предыдущему $z'' = \varphi(f(z))$ тогда должно быть тождественным отображением, т.е. $z'' = z$. Таким образом, $\varphi(z') = z$, и, следовательно, z и z' соответствуют друг другу по инверсии относительно той окружности, которая проходит через три рассматриваемые точки. Это и нужно было показать.

Наконец, мы сформулируем без доказательства еще одно предложение по поводу инверсий.

7. *Если две окружности пересекаются, то при любой инверсии угол, который они составляют в общей точке, равен углу, который составляют окружности, полученные в результате их отображения.*

Инвариантность угла относительно инверсий доказывается в элементарной теории конформных отображений *).

Теперь мы можем вернуться к построению модели неевклидовой геометрии.

52. Согласно определению, которое мы дали в n° 50 понятию "между", порядок точек на неевклидовой прямой совпадает с порядком точек на евклидовой полуокружности, изображающей эту прямую в верхней полуплоскости. Поэтому неевклидов отрезок AB изображается дугой полуокружности с концами A, B; неевклидова полупрямая, исходящая из точки O, изображается дугой OX, конец которой X находится на прямой x (рис. 68а). Конечно, точка X при этом не должна причисляться к точкам неевклидовой полупрямой.

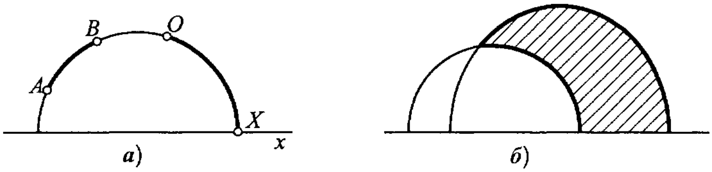


Рис. 68

Неевклидовым углом, естественно, мы будем называть совокупность двух неевклидовых полупрямых, исходящих из одной точки (рис. 68 б).

Дадим теперь определение конгруэнтности отрезков и углов в нашей модели неевклидовой геометрии.

Здесь нам существенно придется пользоваться инверсиями. Условимся рассматривать только такие инверсии, которые производятся относительно окружностей, ортогональных к прямой x. Очевидно,

*) См, например, *Маркушевич А. И.* Элементы теории аналитических функций. – Учпедгиз: 1941.

при всякой такой инверсии точки, расположенные в верхней полуплоскости, отображаются в точки этой же полуплоскости. Таким образом, производя инверсии фигур верхней полуплоскости, мы не будем выходить за ее пределы.

Назовем неевклидов отрезок AB конгруэнтным неевклидову отрезку $A'B'$, если существует такая последовательность инверсий, что их произведение отображает евклидову круговую дугу AB на круговую дугу $A'B'$.

Аналогично назовем неевклидов $\angle(h,k)$ конгруэнтным неевклидову $\angle(h',k')$, если существует такая последовательность инверсий, что их произведение отображает стороны первого угла на стороны второго *).

В силу предложения 7 n° 51 углы, конгруэнтные в смысле этого определения, равны между собою также и в том смысле, как это понимается в евклидовой геометрии по отношению к криволинейным углам. Напротив, круговые дуги, изображающие конгруэнтные неевклидовы отрезки, вовсе не будут конгруэнтными с евклидовой точки зрения, так как инверсии, сохраняя величины углов, искажают линейные размеры фигур.

В нашей модели неевклидовой геометрии инверсии относительно окружностей, ортогональных к прямой x, представляют собой некоторые конгруэнтные перемещения. Познакомимся поближе с их особенностями.

Рассмотрим какую-нибудь полуокружность верхней полуплоскости, ортогональную к прямой x. При инверсии рассматриваемая полуокружность согласно предложению 4 n° 51 преобразуется в круговую дугу (также расположенную в верхней полуплоскости). Сама прямая x при этой инверсии отобразится на себя. Так как инверсия сохраняет величины углов, то круговая дуга, полученная инверсией рассматриваемой полуокружности, должна быть ортогональна к прямой x и, следовательно, также должна быть полуокружностью.

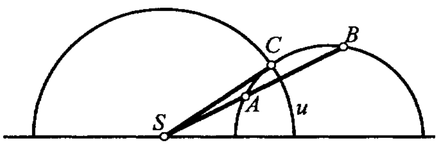


Рис. 69

Таким образом, инверсия допускаемого нами вида всегда преобразует полуокружности верхней полуплоскости, ортогональные к прямой x, в такие же полуокружности. Это — очень важное обстоятельство, так как полуокружности верхней полуплоскости, ортогональные к прямой x, изображают прямые нашей модели неевклидовой геометрии.

*) Установление отношения конгруэнтности отрезков и углов обладает свойством взаимности. Это следует из того, что отображение, обратное к инверсии, есть также инверсия.

Пусть теперь AB — круговая дуга, изображающая неевклидов отрезок (рис. 69). Обозначим через S точку пересечения евклидовой прямой AB с прямой x (предполагая, что эти прямые пересекаются) и проведем из S касательную SC к дуге AB. По известной теореме евклидовой геометрии, имеет место равенство $SA \cdot SB = SC^2$. Поэтому если мы обозначим через u полуокружность с центром S и радиусом SC, то инверсия относительно u отобразит точку A в точку B, а точку B в точку A. Точка C при этой инверсии останется на месте. Отсюда следует, что дуга AB отображается на себя, причем часть ее AC отображается на BC, а BC — на AC. Дуги AC и CB, поскольку каждая из них есть инверсия другой, изображают конгруэнтные неевклидовым отрезки; точка C, следовательно, является неевклидовой серединой дуги AB. Заметим еще, что дуга AB ортогональна к полуокружности u. Таким образом, полуокружность u изображает перпендикуляр к середине неевклидова отрезка AB. Иначе говоря, точки A и B в неевклидовом смысле симметричны относительно неевклидовой прямой, изображаемой полуокружностью u.

Мы можем отсюда заключить, что *инверсия, если ее рассматривать с неевклидовой точки зрения, есть не что иное, как симметрия относительно прямой.*

Все это построение проводилось в предположении, что точка S существует. Если же евклидова прямая AB не пересекает прямую x, то тогда точку S следует воображать находящейся в бесконечности, касательную к дуге AB вести параллельно прямой x, а полуокружность u заменить полупрямой. В этом случае инверсия превращается в обычную симметрию относительно евклидова перпендикуляра к прямой x, проведенного из евклидовой середины C дуги AB.

После этого становится понятно, что означает высказанное выше определение конгруэнтности образов в нашей схеме: образ A конгруэнтен образу A', если A' может быть получен из A при помощи некоторого числа зеркальных отражений, понимаемых в описанном сейчас условном (неевклидовом) смысле.

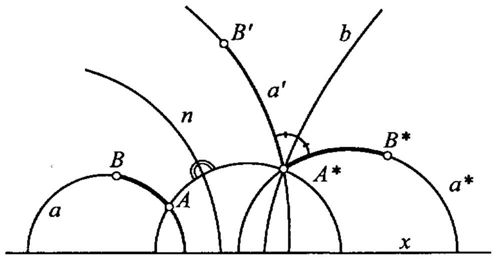


Рис. 70

Наша ближайшая цель — показать, что введенное нами отношение конгруэнтности удовлетворяет требованиям всех аксиом III.1–III.5.

Будем рассматривать эти аксиомы одну за другой. Аксиома III.1 требует, чтобы на каждой прямой от каждой ее точки по любую сторону можно было отложить отрезок, которому конгруэнтен произвольно данный отрезок какой-нибудь прямой.

Это требование в нашей схеме удовлетворяется. В самом деле, рассмотрим две неевклидовы прямые a и a^*; на первой из них возьмем отрезок AB, на второй — точку A^* (рис. 70). Кроме того, отметим одну из двух полупрямых, определяемых на прямой a^* точкой A^*. Построим, как было показано выше, (неевклидов) перпендикуляр n к середине отрезка AA^*. При помощи (неевклидова) зеркального отражения относительно этого перпендикуляра мы можем прямую a отобразить на некоторую прямую a'; при этом точка A отобразится в точку A^*, а отрезок AB прямой a будет иметь своим образом отрезок A^*B' прямой a'. Проведем теперь (неевклидову) биссектрису b угла, составленного двумя (неевклидовыми) полупрямыми, из которых одна идет из точки A^* к точке B', а другая есть отмеченная нами полупрямая прямой a^*. Зеркальное отражение относительно b (понимаемое в неевклидовом смысле) переводит (неевклидову) прямую a' в (неевклидову) прямую a^*, а отрезок A^*B' прямой a' — в некоторый отрезок A^*B^*. Таким образом, на (неевклидовой) прямой a^* по данную сторону от ее точки A^* существует такая точка B^*, что отрезок A^*B^* получается при помощи двух (неевклидовых) зеркальных отражений из отрезка AB и, следовательно, $AB \equiv A^*B^*$ в принятом выше смысле. А это и нужно было показать.

Аксиома III.1 требует еще, чтобы среди точек прямой a^*, лежащих по данную сторону от A^*, только одна определяла вместе с A^* отрезок, которому конгруэнтен отрезок AB. Докажем, что это требование при нашем определении конгруэнтности удовлетворено.

Пусть на (неевклидовой) прямой a^* по данную сторону от точки A^* имеются две различные точки B_1^* и B_2^*, такие, что соблюдаются условия $AB \equiv A^*B_1^*$ и $AB \equiv A^*B_2^*$. Это означает, что существует некоторая последовательность инверсий, произведение которых отображает круговую дугу AB на круговую дугу $A^*B_1^*$, и некоторая другая последовательность инверсий, произведение которых отображает дугу AB на дугу $A^*B_2^*$. Обозначим через X_2 точку, в которой продолжение дуги AB в направлении от A к B встречает прямую x, через X_1 — точку встречи с прямой x дуги AB, продолженной в противоположном направлении. Через X_2^* и X_1^* обозначим аналогично определяемые концы полуокружности, изображающей неевклидову прямую a^*. Очевидно, произведения каждой из двух упомянутых выше последовательностей инверсий отображают X_1 на X_1^* и X_2 на X_2^*. Представим себе, что инверсии первой последовательности осуществляются в обратном порядке, а вслед за тем реализуются инверсии второй последовательности. В результате получается некоторое отображение, которое мы обозначим буквой f. Очевидно, в процессе отображения f точка X_1^* сначала совмещается с X_1, а потом снова возвращается в положение X_1^*. Таким образом, X_1^* есть неподвижная точка отображения f. Точно так же неподвижны при отображении f точки A^* и X_2^*. Что же касается точки B_1^*, то она при помощи f переводится в точку B_2^*. Итак, f имеет три неподвижные точки: X_1^*, A^* и X_2^*. В силу предложений 5 и 6 n° 51 отсюда следует, что f есть либо тождественное отображение, либо инверсия относительно окружности, проходящей через точки X_1^*, A^*, X_2^*, B_1^* и B_2^*. И в том, и в другом случае все точки этой окружности должны быть неподвижными точками отображения f. Следовательно, B_1^* и B_2^* не могут быть различны. Тем самым единственность операции конгруэнтного отложения отрезка доказана.

Наконец, аксиома III.1 требует, чтобы отрезок AB был конгруэнтен отрезку BA. Чтобы проверить выполнение этого требования в рассматриваемой нами модели неевклидовой геометрии, достаточно совершить неевклидово зеркальное отражение относительно середины отрезка AB.

Итак, все требования аксиомы III.1 удовлетворяются.

Обращаемся к аксиоме III.2, согласно которой, если отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны отрезку AB, то отрезок $A'B'$ должен быть конгруэнтен отрезку $A''B''$.

Это требование в нашей модели неевклидовой геометрии с очевидностью выполняется. В самом деле, соотношения $A'B' \equiv AB$ и $A''B'' \equiv AB$ означают, что существует серия неевклидовых зеркальных отражений, в результате которых $A'B'$ налагается на AB, и существует другая серия неевклидовых зеркальных отражений, в результате которых также и $A''B''$ налагается на AB. Произведем зеркальные отражения первой серии и вслед за тем — зеркальные отражения второй серии в обратном порядке. В результате $A'B'$ отобразится на $A''B''$, из чего и будет следовать конгруэнтность этих отрезков.

Рассмотрим теперь аксиому III.3.

Пусть AB и $A'B'$ — неевклидовы отрезки, C — точка внутри отрезка AB и C' — точка внутри отрезка $A'B'$. Мы должны показать, что при нашем определении конгруэнтности из $AC \equiv A'C'$ и $CB \equiv C'B'$ следует $AB \equiv A'B'$.

Так как $AC \equiv A'C'$, то должна существовать серия неевклидовых зеркальных отражений, произведение которых отображает AC на $A'C'$. Одновременно точка B отобразится в точку B^* на прямой $A'B'C'$, причем B^* расположится с той стороны от C', с какой лежит B'. Отрезки $C'B'$ и $C'B^*$ лежат по одну сторону от точки C' и, будучи конгруэнтными отрезку CB ($C'B'$ — по условию, $C'B^*$ — по построению), должны быть конгруэнтны между собой (по аксиоме III.2, которая уже проверена). Но тогда по аксиоме III.1 точки B^* и B' не могут быть различными. Следовательно, произведение упомянутых неевклидовых зеркальных отражений отображает AB на $A'B'$, откуда $AB \equiv A'B'$.

Не представляет труда также проверка аксиомы III.4. Эта аксиома требует, чтобы к каждой полупрямой с любой стороны можно было приложить угол, которому конгруэнтен произвольно данный угол, и чтобы это построение выполнялось однозначно.

Возможность и однозначность такого построения устанавливаются при помощи рассуждений, аналогичных тем, какие мы проводили, проверяя аксиому III.1. Именно, пусть $\angle(h, k)$ — неевклидов угол с вершиной O и h' — неевклидова полупрямая с началом O'. Прежде всего, при помощи неевклидова зеркального отражения относительно перпендикуляра к середине отрезка OO', мы отобразим $\angle(h, k)$ на $\angle(h'', k'')$, вершина которого совмещена с O'. После этого неевклидово зеркальное отражение относительно биссектрисы $\angle(h', h'')$ превращает $\angle(h'', k'')$ в $\angle(h', k')$; этот угол по построению конгруэнтен $\angle(h, k)$ и приложен с некоторой стороны к полупрямой h'. Теперь нужно доказать однозначность операции приложения угла к данной полупрямой с данной стороны. Пусть $\angle(h', k_1')$ получен при помощи серии неевклидовых зеркальных отражений $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k_2')$ получен при помощи другой серии неевклидовых зеркальных отражений $\angle(h, k)$. Пусть f — произведение зеркальных отражений первой серии, проводимых в обратном порядке, и зеркальных отражений второй серии. Очевидно, f отображает $\angle(h', k_1')$ на $\angle(h', k_2')$. Но принимая во внимание, что неевклидовы зеркальные отражения суть инверсии, и используя предложения 5 и 6 n° 51 в точности так, как это было сделано нами при проверке аксиомы III.1, можно доказать, что f есть либо тождественное отображение, либо неевклидово зеркальное отражение относительно полупрямой h'. Следовательно, $\angle(h', k_1')$ и $\angle(h', k_2')$ либо совпадают, либо взаимно зеркальны (в неевклидовом смысле) относительно h'. А это и нужно было установить.

Аксиома III.4 требует еще, чтобы всякий $\angle(h, k)$ был конгруэнтен сам себе, т. е. чтобы $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ и $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$. Но первое соотношение очевидно*), а в том, что второе соотношение выполняется, можно убедиться, совершая неевклидово зеркальное отражение угла относительно его биссектрисы.

Наконец, требования аксиомы III.5 в нашей модели удовлетворяются, в чем легко убедиться, если провести рассуждения, которыми в школьных учебниках элементарной геометрии доказывается первая теорема о равенстве треугольников, понимая при этом движение как результат некоторой серии неевклидовых зеркальных отражений.

Мы видим, что в построенной системе объектов отношение конгруэнтности удовлетворяет условиям всех аксиом третьей группы.

После этого сразу можно заключить, что в этой системе объектов выполнены требования аксиом непрерывности IV.1 и IV.2. В самом деле, как было замечено в n° 50, на неевклидовых прямых осуществляется принцип Дедекинда. А согласно теореме 41 n° 23, из аксиом I–III при наличии принципа Дедекинда вытекают оба предложения: IV.1 и IV.2.

---

*) Так как тождественное отображение можно рассматривать как двукратное повторение инверсии.

Таким образом, наша система объектов удовлетворяет требованиям всех аксиом абсолютной планиметрии I.1–3, II, III, IV. Но тогда в ней должна осуществляться либо теория параллельных Евклида, либо теория параллельных Лобачевского. Как мы сейчас покажем, имеет место именно второй случай.

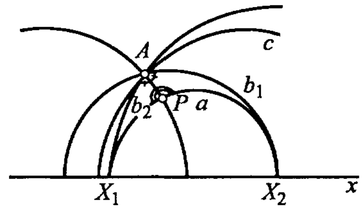


Рис. 71

Возьмем какую-нибудь полуокружность a верхней полуплоскости, ортогональную к прямой x. Пусть A — некоторая точка верхней полуплоскости, не принадлежащая этой полуокружности (рис. 71). Легко проверить, что через точку A проходит бесконечно много различных полуокружностей, ортогональных к прямой x и не имеющих общих точек с полуокружностью a. В терминах, которые мы с самого начала согласились употреблять, этот факт можно выразить такими словами: через произвольную неевклидову точку, лежащую вне данной неевклидовой прямой, проходит бесконечно много различных неевклидовых прямых, не встречающих данную.

А это и означает, что в рассмотренной системе объектов имеет место постулат Лобачевского; эта система, следовательно, представляет собой модель геометрии Лобачевского, построение которой мы имели своей целью. Используя эту модель, можно каждому предложению планиметрии Лобачевского дать вполне определенную интерпретацию на евклидовой плоскости. Для этого следует слова “точка”, “прямая”, “конгруэнтны” и т. д., встречающиеся в формулировке предложения, понимать в том смысле, как мы условились это делать, т. е. под словом “точка” подразумевать евклидову точку верхней полуплоскости, под словом “прямая” — евклидову полуокружность или полупрямую, ортогональную к границе полуплоскости; конгруэнтными называть такие образы, которые могут быть отображены друг на друга в результате последовательного проведения инверсий, и т. д. Таким образом, каждой теореме Лобачевского соответствует вполне определенная евклидова теорема. Следовательно, противоречия, если бы они были в геометрии Лобачевского, непременно имелись бы и в евклидовой геометрии.

Мы видим, что *непротиворечивость геометрии Лобачевского вытекает из непротиворечивости геометрии Евклида.*

Вместе с тем, мы показали, что *постулат о параллельных Евклида не может быть выведен из посылок абсолютной геометрии.*

Действительно, в модели А. Пуанкаре осуществляются все аксиомы абсолютной геометрии, но вместо постулата о параллельных Евклида имеет место постулат Лобачевского. Значит, постулат Евклида не является логическим следствием этих аксиом.

53. Интересно представить себе, как те или иные конкретные факты геометрии Лобачевского интерпретируются на полуплоскости Евклида.

Обратимся к рис. 71. На этом чертеже изображены неевклидова прямая в виде полуокружности a, ортогональной к прямой x, и точка A. Неевклидовы прямые, которые проходят через точку A и не пересекают данную прямую, изображаются полуокружностями, проходящими через точку A, ортогональными к x и не пересекающими полуокружность a. Среди этих неевклидовых прямых, как известно, должны существовать две граничные, которые и называются параллельными данной прямой в двух ее направлениях. Параллельные прямые изображены на рис. 71 в виде полуокружностей b_1 и b_2, касающихся полуокружности a в ее концах X_1 и X_2, лежащих на прямой x. Так как евклидовы точки прямой x не являются неевклидовыми объектами, то неевклидовы прямые, изображаемые полуокружностями b_1 и b_2, следует рассматривать как не встречающиеся с прямой a. То, что они — граничные, усматривается непосредственно.

Проведем через точку A полуокружность, ортогональную к прямой x и пересекающую полуокружность a в точке P также под прямым углом.

Дуга AP, очевидно, изображает неевклидов перпендикуляр к неевклидовой прямой a; угол, который он составляет с дугой b_1, есть не что иное, как угол параллельности для отрезка AP.

Совершенно тривиальным фактом геометрии Лобачевского является то, что перпендикуляр AP представляет собою биссектрису угла между неевклидовыми прямыми b_1 и b_2. В евклидовой геометрии равенство углов, которые составляет дуга AP с дугами b_1 и b_2, отнюдь не очевидно. Но доказывать такую евклидову теорему нет необходимости. Действительно, поскольку в системе объектов модели Пуанкаре осуществляются все аксиомы Лобачевского, должны осуществляться и все их следствия, в том числе и высказанное утверждение. Отсюда, в частности, вытекает своеобразный метод доказательства некоторых евклидовых теорем при помощи неевклидовой геометрии.

Укажем для примера следующую евклидову теорему, справедливость которой мы можем утверждать без специального доказательства: если треугольник составлен круговыми дугами, продолжения которых пересекают некоторую прямую под прямым углом, то сумма внутренних углов этого треугольника меньше двух прямых. Очевидно, эта теорема получается из соответствующей теоремы геометрии Лобачевского при помощи интерпретации Пуанкаре.

Посмотрим еще, как выглядят на модели Пуанкаре неевклидовы окружности, эквидистанты и орициклы. Эти линии суть ортогональные траектории эллиптических, гиперболических и параболических пучков, составленных неевклидовыми прямыми (см. конец n° 39).

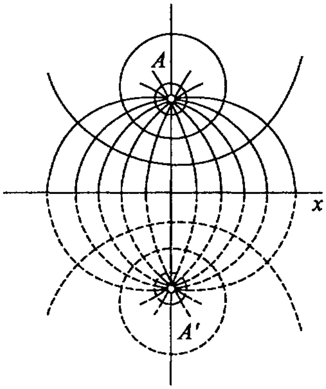


Рис. 72

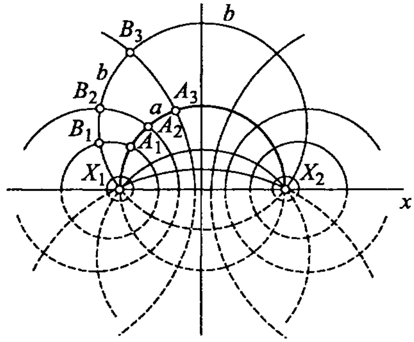


Рис. 73

На рис. 72 изображен пучок евклидовых окружностей с двумя узловыми точками A и A', из которых точка A находится в верхней полуплоскости, а точка A' расположена симметрично ей в нижней. Ортогональными траекториями этого пучка являются также окружности, которые составляют пучок без узловых точек, но с предельными точками A и A' (доказательство не приводим). Очевидно, верхние половины окружностей первого пучка изображают неевклидовы прямые, проходящие через точку A и составляющие, следовательно, эллиптический пучок, а ортогональные к ним окружности второго пучка, лежащие в верхней полуплоскости, изображают неевклидовы окружности с общим центром A.

На рис. 73 изображены ортогональная к прямой x полуокружность a и пучок ортогональных к ней окружностей с предельными точками X_1 и X_2. Верхние половины этих окружностей изображают неевклидовы прямые с общим перпендикуляром a; совокупность таких прямых есть гиперболический пучок с базой a. Всякая окружность, проходящая через точки X_1 и X_2, представляет собой ортогональную траекторию этого пучка и, следовательно, верхняя дуга такой окружности изображает эквидистанту, для которой неевклидова прямая a служит базой. Круговые дуги $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$ и т. д. изображают конгруэнтные в неевклидовом смысле высоты эквидистанты b.

На рис. 74 показан пучок окружностей со слившимися узловыми точками; верхние половины этих окружностей изображают неевклидовы прямые, параллельные друг другу в одном направлении и составляющие, следовательно, неевклидов прямолинейный параболический пучок. Ортогональные траектории его, рассматриваемые с неевклидовой точки зрения, суть орициклы, а как объекты евклидовой плоскости — это окружности, касающиеся друг друга и прямой x в узловой точке.

Таким образом, круговая дуга, лежащая в верхней полуплоскости, изображает неевклидову прямую, если она опирается на прямую x и составляет с нею прямой угол; эквидистанту, если она, опираясь на прямую x, составляет с нею угол, отличный от прямого; орицикл, если имеет соединенные концы и в точке их соединения касается прямой x; наконец, неевклидову окружность, если она представляет собою полную евклидову окружность верхней полуплоскости.

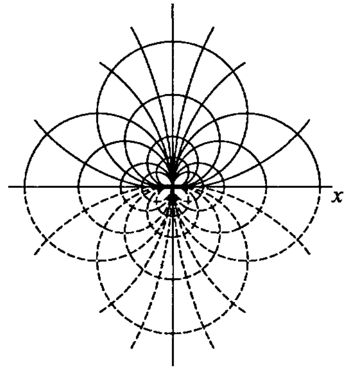


Рис. 74

54. Рассмотренная нами интерпретация неевклидовой геометрии — отнюдь не единственно возможная. Кроме этой интерпретации существует бесконечное множество других.

Мы можем неевклидову геометрию интерпретировать на плоскости Евклида, например, еще следующим образом.

Возьмем в евклидовой плоскости какую-нибудь окружность K. Назовем неевклидовыми точками точки евклидовой плоскости, лежащие внутри K, неевклидовыми прямыми — лежащие внутри K части ортогональных к ней евклидовых окружностей (включая и диаметры). Понятиям взаимной принадлежности геометрических элементов и порядка мы оставим их евклидов смысл.

Неевклидовы образы будем называть взаимно зеркальными в неевклидовом смысле, если их евклидовы изображения внутри K могут быть отображены друг на друга при помощи инверсии относительно какой-нибудь окружности, ортогональной к окружности K. Конгруэнтными будем называть неевклидовы образы в том случае, когда они могут быть отображены друг на друга при помощи некоторой серии неевклидовых зеркальных отражений.

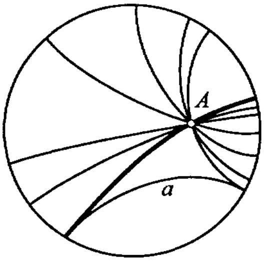


Рис. 75

Проводя рассуждения, аналогичные тем, какие мы провели в nn° 50–52, можно показать, что при таком определении геометрических элементов и отношений между ними удовлетворены все требования аксиом абсолютной геометрии. После этого не представит труда решение вопроса о том, какая теория параллельных осуществляется в системе неевклидовых прямых внутри круга K. Пусть a — круговая дуга, ортогональная к окружности K, A — точка внутри K, не лежащая на этой дуге (рис. 75). Средствами евклидовой элементарной геометрии легко показать, что через точку A проходит бесконечно много круговых дуг, ортогональных к окружности K и не пересекающих дуги a. А это означает, что в смысле тех отношений, которые установлены для неевклидовых образов внутри K, в системе этих образов осуществляется постулат о параллельных Лобачевского. Мы получили, следовательно, новую интерпретацию планиметрии Лобачевского на плоскости Евклида.

Каждое предложение геометрии Лобачевского, высказанное в абстрактной форме, может быть интерпретировано на евклидовой полуплоскости или внутри евклидова круга; при этом получится некоторая теорема евклидовой геометрии, конкретный смысл которой будет зависеть от избираемого способа интерпретации. Возможность получения таким путем евклидовых теорем из абстрактно логической схемы Лобачевского находит себе применение в геометрической теории функций комплексного переменного, в которой также устанавливается тесная близость двух описанных выше интерпретаций геометрии Лобачевского и указываются общие принципы построения бесконечного множества других интерпретаций*).

§ 10. Основные метрические соотношения в геометрии Лобачевского

55. Своеобразие геометрии Лобачевского особенно ярко проявляется при знакомстве с ее метрическими соотношениями, т. е. соотношениями между различными геометрическими величинами. Одно из таких соотношений, именно, выражение площади треугольника через сумму его внутренних углов, дано нами в n° 48. В этом разделе мы установим основную формулу Лобачевского, которая выражает угол параллельности через соответствующий ему отрезок, и формулы тригонометрии Лобачевского (которые устанавливают зависимости между сторонами и углами треугольника). При выводе этих формул мы будем предполагать, что плоскость Лобачевского реализована в виде модели Пуанкаре, т. е. слова “точка”, “прямая”, “лежит на”, “между”, “конгруэнтны”, будем понимать определенным образом так, как условлено в nn° 50–52. Такой вывод основных формул Лобачевского достаточно прост и нагляден, кроме того, он хорошо выявляет связи геометрии Лобачевского с теорией функций комплексной переменной; но, конечно, такой вывод не дает права утверждать, что полученные с его помощью формулы справедливы в геометрии Лобачевского вообще, т. е. имеют место при истолковании ее на любой модели.

В главе VII мы дадим вывод тех же формул, исходя из аксиом и не считая их реализованными на какой бы то ни было модели. Тем самым

*) См., например, *Маркушевич А. И.* Элементы теории аналитических функций. – М.: Наука.

будет доказано, что эти формулы справедливы для любой модели геометрии Лобачевского. Вывод основных формул геометрии Лобачевского, содержащийся в главе VII, тоже очень прост, но основан на некоторых предложениях проективной геометрии. Эти предложения сформулированы в главе VII; поэтому читатель, который согласится принять их на веру, может при желании пропустить главы, посвященные проективной геометрии, и сразу ознакомиться с абстрактным выводом формул Лобачевского (см. *пп*° 216–221, 229–232).

56. Сначала нам придется сообщить некоторые предложения об инвариантах дробно-линейных преобразований комплексной переменной. Как обычно, мы будем число $z = x + iy$ изображать точкой с декартовыми прямоугольными координатами x, y; слова "число z" и "точка z" будем употреблять на равных правах.

Рассмотрим преобразование

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

где z — комплексная переменная, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — постоянные (вообще говоря, комплексные). Преобразование переменной z в переменную z', определяемое формулой вида (1), называется *дробно-линейным* (мы уже встречались с дробно-линейными преобразованиями в *n*° 51). Само собой разумеется, что в формуле (1) хотя бы одно из чисел γ, δ следует предполагать отличным от нуля.

Число $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ называется *определителем* дробно-линейного преобразования. Легко убедиться, что если $\Delta = 0$, то всем точкам z (выбираемым, конечно, при условии $\gamma z + \delta \neq 0$) по формуле (1) соответствует одна и та же точка z'. В самом деле, если $\Delta = 0$, то числа α, β пропорциональны числам γ, δ, т. е. $\alpha = k\gamma, \beta = k\delta$ и, следовательно,

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{k(\gamma z + \delta)}{\gamma z + \delta} = k.$$

Напротив, если $\Delta \neq 0$, то разным точкам z_1, z_2 по формуле (1) соответствуют также разные точки z_1', z_2'. В самом деле, мы имеем

$$z_1' - z_2' = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} - \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)}(z_1 - z_2),$$

то есть,

$$z_1' - z_2' = \frac{\Delta}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)}(z_1 - z_2). \tag{2}$$

Таким образом, при $\Delta \neq 0$, если $z_1 \neq z_2$, то и $z_1' \neq z_2'$.

В случае $\Delta = 0$ дробно-линейное преобразование называется *вырожденным*, в случае $\Delta \neq 0$ — *невырожденным*. Согласно предыдущему вырожденное преобразование отображает все точки плоскости в одну; невырожденное преобразование разные точки отображает в разные. И в том и в другом случае точка z, для которой $\gamma z + \delta = 0$, должна быть исключена из рассмотрения: для нее соответствующей точки нет совсем.

В дальнейшем мы будем рассматривать только невырожденные дробно-линейные преобразования. Для нас существенно, что каждое невырожденное дробно-линейное преобразование вида (1) имеет обратное преобразование

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha}, \tag{3}$$

которое, очевидно, также является дробно-линейным и невырожденным (преобразование (3) невырождено, так как его определитель $\Delta' = \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0$).

Наличие исключительной точки $z = -\delta/\gamma$, для которой формула (1) теряет смысл, осложняет формулировку предложений о дробно-линейных преобразованиях. Для удобства таких формулировок дополним плоскость комплексной переменной новым объектом, который будем называть *бесконечно удаленной точкой* и обозначать символом ∞; условимся считать, что в невырожденном преобразовании вида (1) точка $z = -\delta/\gamma$ имеет своим образом бесконечно удаленную точку. Бесконечно удаленная точка сопоставляется в качестве образа с исключительной точкой каждого невырожденного дробно-линейного преобразования. В частности, относительно преобразования (3) бесконечно удаленная точка является образом точки $z' = \alpha/\gamma$. Так как преобразования (1) и (3) взаимно обратны, то по отношению к преобразованию (1) бесконечно удаленную точку следует считать прообразом точки $z' = \alpha/\gamma$. Итак, согласно нашему условию невырожденное преобразование (1) переводит точку $z = -\delta/\gamma$ в точку $z' = \infty$ и точку $z = \infty$ в точку $z' = \alpha/\gamma$.

Заметим, наконец, что если $\gamma = 0$, то исключительной точки нет, каждая точка плоскости имеет (обыкновенный) образ. По отношению к таким преобразованиям условимся считать, что образом бесконечно удаленной точки является она сама.

Пусть u, v, s, t — четыре различные точки. Предположим, что все эти точки — обыкновенные (т. е. среди них нет бесконечно удаленной). Тогда число, обозначаемое символом $(uvst)$ и определяемое равенством

$$(uvst) = \frac{u-s}{u-t} : \frac{v-s}{v-t}, \tag{3'}$$

называется *сложным отношением* точек u, v, s, t, заданных в порядке их записи. Сложное отношение тех же точек, но заданных в другом порядке, может иметь уже другое значение; например, если $(uvst) = \lambda$, то

$$(vust) = \frac{1}{\lambda}, \quad (uvts) = \frac{1}{\lambda}. \tag{4}$$

Если среди заданных точек имеется бесконечно удаленная, сложное отношение определяется одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} &(uvs\infty) = \frac{u-s}{u-t}, \quad (uv\infty t) = \frac{v-t}{u-t}, \\ &(u\infty st) = \frac{u-s}{u-t}, \quad (\infty vst) = \frac{v-t}{v-s}. \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что первая из этих формул получается предельным переходом в формуле (3′) при $t \to \infty$, вторая — при $s \to \infty$ и т. д.

Сложное отношение четырех точек является инвариантом невырожденных дробно-линейных преобразований; это значит, что если при некотором невырожденном дробно-линейном преобразовании четыре точки u, v, s, t переходят в точки u', v', s', t', то

$$(u'v's't') = (uvst).$$

Проведем доказательство сначала для случая, когда среди данных точек и среди их образов нет бесконечно удаленной точки. Пусть преобразование, переводящее u, v, s, t в u', v', s', t', задано формулой (1); согласно формуле (2) имеем

$$u' - s' = \frac{\Delta}{(\gamma u + \delta)(\gamma s + \delta)}(u - s), \quad u' - t' = \frac{\Delta}{(\gamma u + \delta)(\gamma t + \delta)}(u - t),$$

откуда

$$\frac{u' - s'}{u' - t'} = \frac{u - s}{u - t} \cdot \frac{\gamma t + \delta}{\gamma s + \delta}.$$

Аналогично

$$\frac{v' - s'}{v' - t'} = \frac{v - s}{v - t} \cdot \frac{\gamma t + \delta}{\gamma s + \delta}.$$

Следовательно,

$$\frac{u' - s'}{u' - t'} : \frac{v' - s'}{v' - t'} = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t},$$

т. е. $(u'v's't') = (uvst)$.

Предположим теперь, что все точки u, v, s, t — обыкновенные, а одна из точек u', v', s', t' является бесконечно удаленной, например, $t' = \infty$. Это значит, что $\gamma t + \delta = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (u'v's't') = (u'v's'\infty) = \frac{u' - s'}{v' - s'} = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{\gamma v + \delta}{\gamma u + \delta} = \\ = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{v + (\gamma/\delta)}{u + (\gamma/\delta)} = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{v - t}{u - t} = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t} = (uvst). \end{aligned}$$

Случай, когда одна из точек u, v, s, t — бесконечно удаленная, а все точки u', v', s', t' — обыкновенные, сводится к предыдущему. В самом деле, рассматривая преобразование, обратное данному, на основании предыдущего найдем $(uvst) = (u'v's't')$.

Остается рассмотреть случай, когда одна из точек u, v, s, t является бесконечно удаленной и имеет бесконечно удаленный образ; если преобразование задано формулой (1), то этот случай имеет место при $\gamma = 0$.

Пусть, например, $t = \infty$ и $t' = \infty$. Тогда

$$(u'v's't') = (u'v's'\infty) = \frac{u'-s'}{v'-s'} = \frac{u-s}{v-s} \cdot \frac{\gamma v+\delta}{\gamma u+\delta} = \\ = \frac{u-s}{v-s} \cdot \frac{\delta}{\delta} = \frac{u-s}{v-s} = (uvs\infty) = (uvst).$$

Итак, во всех случаях $(u'v's't') = (uvst)$, утверждение доказано.

57. Нам придется иметь дело еще с преобразованием переменной z в переменную z', которое определяется формулой

$$z' = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta} \tag{6}$$

и называется дробно-линейным преобразованием второго рода (напомним читателю, что $\bar{z}$ обозначает число, сопряженное числу z). Такие преобразования уже встречались нам в n° 51.

Преобразование вида (6) называется *вырожденным*, если $\Delta = \alpha\delta - -\beta\gamma = 0$, *невырожденным*, если $\Delta \neq 0$; вырожденное преобразование все точки отображает в одну, невырожденное преобразование разные точки отображает в разные (доказывается так же, как аналогичное утверждение для преобразований первого рода). В дальнейшем среди преобразований вида (6) мы будем рассматривать только невырожденные.

Пусть u, v, s, t — какие угодно различные точки u', v', s', t' — их образы относительно невырожденного преобразования вида (6); *тогда сложное отношение точек u', v', s', t' есть число, сопряженное сложному отношению точек u, v, s, t. Символически это утверждение выражается равенством*

$$(u'v's't') = \overline{(uvst)}.$$

Для доказательства представим преобразование (6) в виде произведения двух преобразований:

$$z' = \frac{\alpha z''+\beta}{\gamma z''+\delta} \tag{7}$$

и
$$z'' = \bar{z}. \tag{8}$$

По отношению к преобразованию (8) будем считать, что образом бесконечно удаленной точки является она сама.

Заметим теперь, что если все числа, составляющие сложное отношение, мы заменим сопряженными числами, то и само сложное отношение заменится сопряженным ему числом. Поэтому, обозначая через u'', v'', s'', t'' образы точек u, v, s, t относительно преобразования (8), найдем:

$$(u''v''s''t'') = \overline{(uvst)}.$$

Далее, так как преобразование (7) является дробно-линейным преобразованием 1-го рода, то

$$(u'v's't') = \overline{(u''v''s''t'')}.$$

Из этих двух равенств получаем

$$(u'v's't') = \overline{(uvst)},$$

что и требовалось.

58. Теперь мы приступаем к изложению основной темы этого раздела. Прежде всего мы установим формулу, которая выражает неевклидово расстояние между двумя точками модели Пуанкаре (см. nn° 50–52). Пусть u, v — две точки верхней полуплоскости. Неевклидова прямая, проходящая через точки u, v, изображается евклидовой полуокружностью, которая проходит через эти точки и ортогональна к оси x. Обозначим через s и t точки, в которых эта полуокружность опирается на ось x (рис. 76; напомним читателю, что точки оси x, в том числе s и t, не входят в состав модели Пуанкаре). Если ортогональная к оси x полуокружность, проходящая через точки u, v, вырождается в (евклидову) прямую, то буквой s мы обозначим точку, в которой эта прямая опирается на ось x, буквой t — бесконечно удаленную точку (рис. 77). Рассмотрим сложное отношение $(uvst)$. Легко показать, что $(uvst)$ есть число вещественное и положительное. Проведем сначала доказательство для случая, который соответствует рис. 76 (точку s предполагаем левее t). Обозначим через r_1 и r_2 модули

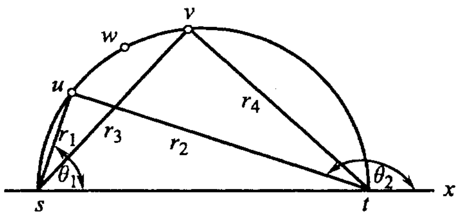


Рис. 76

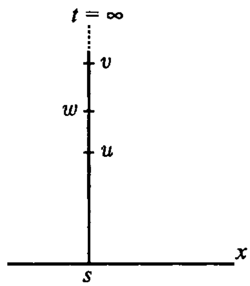


Рис. 77

чисел $u-s$ и $u-t$ через θ_1 и θ_2 — их аргументы. Так как $\angle(sut)$ прямой, то

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2};$$

следовательно,

$$\frac{u-s}{u-t} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично

$$\frac{v-s}{v-t} = \frac{r_3}{r_4} e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

где $r_3 = |v-s|$, $r_4 = |v-t|$. Отсюда

$$(uvst) = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_4} > 0. \qquad (9)$$

В случае, соответствующем рис. 77, числа $u-s$ и $v-s$ вещественны и имеют одинаковые знаки; следовательно, в этом случае

$$(uvst) = (uvs\,\infty) = \frac{u-s}{v-s} = \frac{r_1}{r_3} > 0. \qquad (10)$$

Итак, $(uvst) > 0$. Ввиду этого обстоятельства мы можем брать логарифм числа $(uvst)$, понимая логарифм в смысле элементарной алгебры.

Мы докажем, что *неевклидово расстояние между произвольными точками u и v модели Пуанкаре выражается формулой*

$$\rho(u,v) = R\,|\ln(uvst)|\,, \qquad (11)$$

где R — некоторая положительная постоянная (выбор постоянной R равносилен выбору масштаба).

Для доказательства мы должны установить, что $\rho(u,v)$ удовлетворяет трем условиям определения длины отрезка (см. определение 12 n° 20). Убедимся в этом.

1. Пусть u', v' — пара точек верхней полуплоскости, определяющая неевклидов отрезок, конгруэнтный неевклидову отрезку, который определяет пара точек u, v. Пусть s', t' — точки, которые находятся по точкам u', v' таким же построением, каким точки s, t находятся по точкам u, v. Согласно определению конгруэнтности неевклидовых отрезков модели Пуанкаре (см. n° 52), если неевклидов отрезок uv конгруэнтен неевклидову отрезку $u'v'$, то существует последовательность инверсий, произведение которых переводит точки u, v, s, t в точки u', v', s', t'. Как показано в n° 51, произведение любого числа инверсий представляет собой дробно-линейное преобразование либо первого, либо второго рода; и в том и в другом случае преобразование

не вырождено, так как каждая инверсия разные точки отображает в разные точки. В первом случае мы имеем $(u'v's't') = (uvst)$ (см. n° 55), во втором — $(u'v's't') = \overline{(uvst)}$ (см. n° 56). Но выше в этом параграфе мы показали, что $(uvst)$ есть число вещественное; следовательно, $\overline{(uvst)} = (uvst)$. Таким образом, и в том и в другом случае $(u'v's't') = (uvst)$. Отсюда и по формуле (11) получаем $\rho(u', v') = \rho(uv)$. Заметим, наконец, что $(uvst) \neq 1$ (это сразу вытекает из формул (9) и (10)), следовательно $\ln(uvst) \neq 0$ и $\rho(uv) > 0$. Итак, по формуле (11), с каждым неевклидовым отрезком сопоставлено положительное число, причем конгруэнтным отрезкам соответствуют равные числа. Тем самым первое требование определения 12 n° 20 удовлетворено.

2. Пусть w — произвольная точка, лежащая внутри неевклидова отрезка uv (рис. 76 и 77). Несложным вычислением легко убедиться, что

$$(uvst) = (uwst)(wvst)$$

и что числа $(uwst)$ и $(wvst)$ либо оба больше единицы, либо оба меньше единицы (для этой цели проще всего воспользоваться формулами (9) и (10)). Отсюда следует, что

$$\ln(uvst) = \ln(uwst) + \ln(wvst),$$

причем в правой части либо оба логарифма положительны, либо оба логарифма отрицательны. Таким образом,

$$|\ln(uvst)| = |\ln(uwst)| + |\ln(wvst)|$$

и по формуле (11) имеем

$$\rho(uv) = \rho(uw) + \rho(wv).$$

Тем самым, второе требование определения 12 n° 20 удовлетворено.

3. Если точка v по неевклидовой прямой стремится к точке u, то $(uvst) \to 1$; если точка v стремится к точке t, то $(uvst) \to 0$ (см. рис. 76 и формулу (9), где r_1, r_2, r_3, r_4 означают евклидовы расстояния между точками u и s, u и t, v и s, v и t). В первом случае $\ln(uvst) \to 0$, во втором $\ln(uvst) \to -\infty$; соответственно в первом случае $\rho(uv) \to 0$, во втором $\rho(uv) \to +\infty$.

Из формулы (11) видно, что $\rho(uv)$ непрерывно зависит от точки v. Отсюда и из предыдущего рассуждения следует, что $\rho(uv)$ принимает все значения между 0 и $+\infty$; в частности, найдется пара точек u, v, для которой $\rho(uv) = 1$. Значит, и третье требование определения 12 n° 20 удовлетворено.

Тем самым мы доказали, что число $\rho(uv)$, сопоставленное по формуле (11) с произвольной парой точек u, v, есть длина неевклидова отрезка uv (в некотором масштабе) или, иначе говоря, неевклидово расстояние между точками u и v.

Если масштабный отрезок u_1v_1 назначен заранее, то постоянная R в формуле (11) должна быть определена соответственно равенству $\rho(u_1v_1) = 1$.

59. Здесь мы получим знаменитую формулу Лобачевского, выражающую функцию $\Pi(x)$ через элементарные функции аргумента x. Напомним читателю, что $\alpha = \Pi(x)$ означает угол параллельности, соответствующий отрезку длины x (см. n° 33 и рис. 46). Так как в этом разделе буквой x мы обозначали абсциссы точек модели Пуанкаре, то во избежание недоразумений будем сейчас аргумент функции Лобачевского обозначать буквой l.

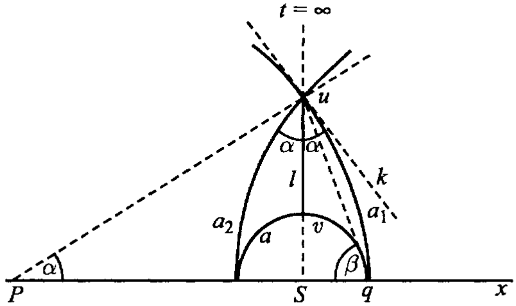


Рис. 78

Угол параллельности, соответствующий некоторому отрезку, определяется длиной этого отрезка и не зависит от его расположения; поэтому мы можем при выводе искомой формулы взять неевклидов отрезок на модели Пуанкаре так, чтобы последующие выкладки оказались наиболее простыми. Имея в виду это обстоятельство, мы будем рассматривать неевклидов отрезок, который на модели Пуанкаре изображается отрезком евклидовой прямой, перпендикулярной к оси x. Пусть u и v — концы рассматриваемого отрезка, s — точка пересечения прямой uv с осью x (рис. 78); будем считать, что точка u на модели лежит выше v, кроме того, мы можем предполагать, что евклидово расстояние точки v от оси x равно единице. Остальные нужные нам объекты поясняются рис. 78. Здесь буквой a помечена полуокружность, которая изображает неевклидову прямую, перпендикулярную к отрезку uv в его конце v, буквами a_1 и a_2 — полуокружности, которые изображают неевклидовы прямые, проходящие через точку u параллельно неевклидовой прямой a; p — центр полуокружности a_1, q — общий (правый) конец полуокружностей a и a_1; через α обозначен каждый из углов, которые составляют полуокружности a_1 и a_2 с отрезком uv; так как на модели Пуанкаре неевклидова величина угла совпадает с его евклидовой величиной, то α есть угол параллельности, соответствующий отрезку uv. Пусть l — неевклидова длина отрезка uv. Наша цель — выразить α через l.

Обозначим через h евклидово расстояние между точками u и s; тогда $u - s = h$, $v - s = 1$ и мы имеем по формуле (11)

$$l = R\,|\ln(uvs\infty)| = R\left|\ln\frac{u-s}{v-s}\right| = R\,|\ln h|\,.$$

Так как $h > 1$, то $\ln h > 0$, следовательно,

$$l = R \ln h. \tag{12}$$

Заметим теперь, что $\angle upq = \alpha$ (чтобы убедиться в этом, достаточно учесть, что α есть угол между отрезком uv и полуокружностью a_1, т.е. угол между отрезком uv и касательной uk к полуокружности a_1; ясно, что $\angle upq = \angle suk$, так как эти углы острые и $us \perp pq, uk \perp up$). Далее, так как треугольник upq равнобедренный, то $\angle upk = \beta = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$. Рассматривая треугольник usq, найдем:

$$h = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) следует

$$l = R \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

значит,

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{l}{R}}.$$

Но $\alpha = \Pi(l)$, следовательно,

$$\Pi(l) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{l}{R}}. \tag{14}$$

Это и есть формула Лобачевского, вывод которой мы ставили своей целью. Формула (14) играет в геометрии Лобачевского фундаментальную роль, поскольку она дает точное выражение угла параллельности, соответствующего отрезку длины l.

60. Будем рассматривать отрезки плоскости Лобачевского, длина которых не превышает некоторого положительного числа L. Положим

$$\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{L}{R}},$$

тогда при $l \leqslant L$ имеем

$$\alpha_0 \leqslant \Pi(l) < \frac{\pi}{2}.$$

Величина α_0 может быть сколь угодно близкой к $\pi/2$, если R достаточно велико по сравнению с L. Соответственно этому для всех отрезков длины $l \leqslant L$ угол параллельности $\Pi(l)$ будет близок к $\pi/2$. Иначе говоря, при наблюдении какой-нибудь части плоскости Лобачевского, на которой расстояния между всевозможными точками не больше L, неевклидов характер плоскости Лобачевского проявляется тем меньше, чем больше R по сравнению с L. Ввиду этого обстоятельства число R можно рассматривать в качестве “меры неевклидовости” плоскости Лобачевского; отрезок длины R называют радиусом кривизны плоскости Лобачевского. Число R, конечно, зависит от выбора масштаба; при соответствующем выборе масштаба можно получить, в частности, $R = 1$. Однако сам по себе радиус кривизны для каждой конкретной модели геометрии Лобачевского есть отрезок, вполне определенный с точностью до конгруэнтных перемещений. Например, для модели Пуанкаре радиус кривизны есть отрезок uv при условии $\ln(uvst) = 1$. Общее описание радиуса кривизны, т. е. описание, не зависящее от выбора модели геометрии Лобачевского, дается в n° 216.

61. В этом разделе мы установим основные соотношения тригонометрии Лобачевского, предполагая, как и раньше, что плоскость Лобачевского изображена в виде модели Пуанкаре.

Пусть ABC — произвольный треугольник. Обозначим через α, β, γ величины его углов при вершинах A, B, C, через a, b, c — неевклидовы длины сторон BC, AC, AB.

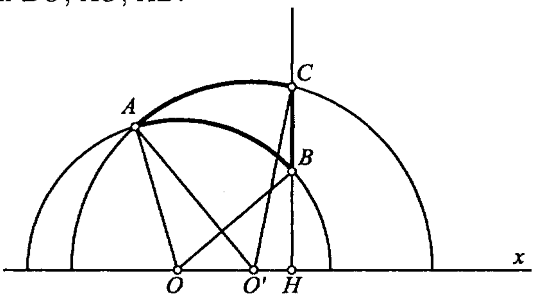


Рис. 79

Пользуясь конгруэнтным перемещением, расположим этот треугольник по отношению к декартовым осям модели так, чтобы неевклидова прямая BC изобразилась евклидовой полупрямой, перпендикулярной к оси Ox. Точку, где эта полупрямая опирается на ось Ox, обозначим буквой H (рис. 79). Неевклидовы прямые AB и AC будут изображаться некоторыми евклидовыми полуокружностями с центрами на оси Ox; обозначим их центры буквами O и O'. Не ограничивая общности, мы можем считать, что B лежит между H и C. Тогда

$$a = R \ln \frac{HC}{HB}, \tag{1}$$

где HC и HB — евклидовы длины отрезков (формула (1) доказывается так же, как формула (12) n° 60). Дальнейшие выводы основаны на формуле (1).

Прежде всего получим *выражения сторон треугольника через его углы**). Из формулы (1) имеем

$$\operatorname{ch} \frac{a}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{HB}{HC} + \frac{HC}{HB}\right) = \frac{HB^2 + HC^2}{2HB \cdot HC}. \tag{2}$$

*) Приводимый далее вывод формул тригонометрии Лобачевского сообщил автору для четвертого издания книги вьетнамский математик Нгуен Кан Тоан.

Напишем очевидные евклидовы соотношения:

$$HB^2 = OB^2 - OH^2 = OA^2 - OH^2,$$
$$HC^2 = O'C^2 - O'H^2 = O'A^2 - O'H^2.$$

Отсюда

$$lHB^2 + HC^2 = (OA^2 + O'A^2) - (OH^2 + O'H^2) =$$
$$= (OO'^2 + 2OA \cdot O'A\cos(\angle OAO')) - [(OH - OH')^2 + 2OH \cdot O'H] =$$
$$= 2OB \cdot O'C\cos(\angle OAO') - 2OH \cdot O'H; \qquad (3)$$

для простоты выкладки проводятся применительно к рис. 79, где O' лежит между O и H. Из равенств (2) и (3) получаем

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{OB}{HB} \cdot \frac{O'C}{HC}\cos(\angle OAO') - \frac{OB}{HB} \cdot \frac{O'H}{HC}. \qquad (4)$$

Заметим теперь, что

$$\frac{OB}{HB} = \frac{1}{\sin(\angle BON)} = \frac{1}{\sin\beta}, \quad \frac{O'C}{HB} = \frac{1}{\sin(\angle CO'H)} = \frac{1}{\sin\gamma},$$
$$\angle OAO' = \alpha, \quad \frac{OH}{HB} = \operatorname{ctg}(\angle BOH) = \operatorname{ctg}\beta,$$
$$\frac{O'H}{HC} = \operatorname{ctg}(\angle CO'H) = \operatorname{ctg}(\pi - \gamma) = -\operatorname{ctg}\gamma.$$

Из равенства (4) и из последних выражений найдем, наконец:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}. \qquad (\mathrm{I})$$

Две другие формулы, выражающие неевклидовы длины сторон b и c, получим из (I) круговой перестановкой символов α, β, γ.

Формула (I) выражает сторону треугольника через его углы. Наличие такой формулы означает, что в геометрии Лобачевского треугольник определяется своими углами; вместе с тем отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нет подобия фигур. Естественно поэтому, что в евклидовой геометрий нет формулы, аналогичной формуле (I).

Из формулы (I) легко вывести *соотношения между сторонами и углами неевклидова треугольника, которые соответствуют евклидовой теореме синусов*. В самом деле,

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{R}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{a}{R} - 1}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 - \sin^2\beta\sin^2\gamma}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}. \qquad (5)$$

Полагая

$$Q = (\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 - \sin^2\beta\sin^2\gamma =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1,$$

видим, что это выражение симметрично относительно α, β, γ. Следовательно, и правая часть (5) обладает такой симметрией, таким образом, получаем

$$\frac{\operatorname{sh}\dfrac{a}{R}}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{a}{R}}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{c}{R}}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{Q}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}. \tag{II}$$

Из формулы (I) можно получить также *выражения углов треугольника через стороны*. С этой целью напишем равенства:

$$\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \frac{(\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha)(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)}{\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma},$$
$$\operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha = \frac{Q\cos\alpha}{\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Отсюда

$$\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha =$$
$$= \frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha + \left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma} =$$
$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\cos\alpha = \left(\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{ch}\frac{a}{R}\right)\cdot\left(\operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\right)^{-1}. \tag{III}$$

Сравнивая (I) и (III), можно обнаружить, что в геометрии Лобачевского между сторонами и углами треугольника существует определенная взаимность.

Найдем теперь соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Для этого достаточно в формулах вида (I), (II), (III) положить, например, $\gamma = \pi/2$. Так, получим

1) *зависимость между катетом, гипотенузой и одним из острых углов*:

$$\operatorname{sh}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{c}{R}\sin\alpha, \quad \operatorname{th}\frac{a}{R} = \operatorname{th}\frac{c}{R}\cos\beta;$$

2) *зависимость между двумя катетами и одним острым углом*:

$$\operatorname{th}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{tg}\alpha;$$

3) *зависимость между гипотенузой и катетами* (аналог теоремы Пифагора):

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}\operatorname{ch}\frac{b}{R}.$$

Отметим еще два соотношения:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta, \quad \operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

Они выражают сторону прямоугольного треугольника через углы и поэтому не имеют аналога в евклидовой геометрии.

62. Изменяя запись формулы (III), получим

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha; \tag{A}$$

в таком виде эта формула выражает сторону произвольного неевклидова треугольника через две другие стороны и косинус противолежащего угла.

Сравним последнее соотношение с известной формулой сферической тригонометрии:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha, \tag{Б}$$

где R — радиус сферы. Из этой формулы вместе с двумя другими, получаемыми циклической перестановкой сторон углов, выводятся остальные формулы сферической тригонометрии.

Формула (Б) переходит в формулу (А) путем замены R на Ri ($i = \sqrt{-1}$).

Имея в виду это обстоятельство, говорят, что *тригонометрию Лобачевского можно рассматривать как тригонометрию на сфере мнимого радиуса.*

Глубокие источники связи геометрии Лобачевского с геометрией на сфере (а также с геометрией Римана, которая излагается в следующем разделе) будут со всей подробностью выяснены в главе VIII.

§ 11. Краткие сведения о геометрии Римана

63. В предыдущих разделах мы неоднократно упоминали сферическую геометрию наряду с геометриями Евклида и Лобачевского. Сопоставление этих геометрий, естественно, напрашивалось, когда мы обнаруживали у них элементы сходства (как в *пп*° 48, 62), или рассматривали их с некоторой общей точки зрения (как в *пп*° 45–47). Но сейчас нам нужно обратить внимание читателя на одну весьма существенную черту различия между сферической геометрией, с одной стороны, и геометриями Лобачевского и Евклида — с другой. Именно, на плоскости Евклида, как и на плоскости Лобачевского, две прямые могут иметь не более одной общей точки; напротив, в геометрии на сфере, где роль прямых играют большие круги сферы (см. *п*° 45), две "прямые" (т. е. два больших круга) всегда пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы. Таким образом, в сферической геометрии не имеет места одно из самых основных положений геометрий Евклида и Лобачевского о том, что через две разные точки проходит только одна прямая.

Существует геометрическая система, которая во множестве отношений сходна со сферической геометрией, но в которой только что указанное основное положение элементарной геометрии имеет место. Эта геометрическая система называется *геометрией Римана* (она уже упоминалась в *п*° 10). Геометрия Римана является необходимым дополнением к геометриям Евклида и Лобачевского. Совместное исследование этих трех геометрий позволило дать полное решение наиболее принципиальных геометрических проблем XIX столетия (см. гл. VI–IX). Сущность геометрии Римана излагается в ближайших параграфах.

64. Рассмотрим в евклидовом пространстве произвольную сферу k. Условимся "отождествлять" диаметрально противоположные точки этой сферы, т. е. каждую пару диаметрально противоположных точек сферы k рассматривать как единый объект; будем этот объект называть "точкой" некоторой особой геометрии, о которой сейчас пойдет речь. Каждый большой круг сферы k условимся называть "прямой".

Будем говорить, что "точка" A лежит на "прямой" a (или, что "прямая" a проходит через "точку" A), если обыкновенные точки сферы k, составляющие "точку" A, лежат на большом круге, который изображает "прямую" a. Очевидно, что

1) через каждые две "точки" проходит "прямая",

2) через каждые две "точки", проходит только одна "прямая",

3) на каждой "прямой" лежат по меньшей мере две "точки" (даже бесконечно много "точек"); можно указать три "точки", не лежащие на одной "прямой".

Таким образом, для рассматриваемого множества "точек" и "прямых" соблюдены все аксиомы связи элементарной планиметрии (см. n° 12 аксиомы I.1, I.2, I.3). Напротив, аксиомы порядка в том виде, как они сформулированы для элементарной геометрии, здесь неприменимы. Дело в том, что в этих аксиомах характеризуется понятие о расположении обыкновенной точки между двумя другими обыкновенными точками на обыкновенной прямой. Но для наших условных "точек" на условной "прямой" понятие "между" не имеет смысла. Действительно, рассматривая три произвольные "точки" A, B, C на "прямой" (т. е. три пары диаметрально противоположных точек окружности; рис. 80), мы не сможем в их взаимном расположении отличить какую-нибудь одну сравнительно с другими. Чтобы изу-

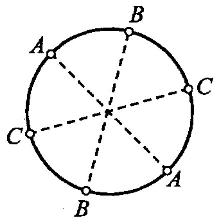
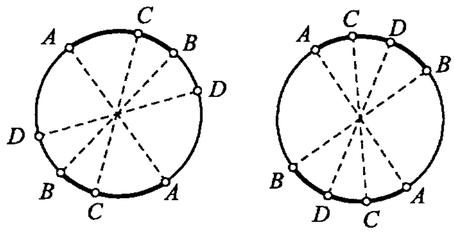


Рис. 80

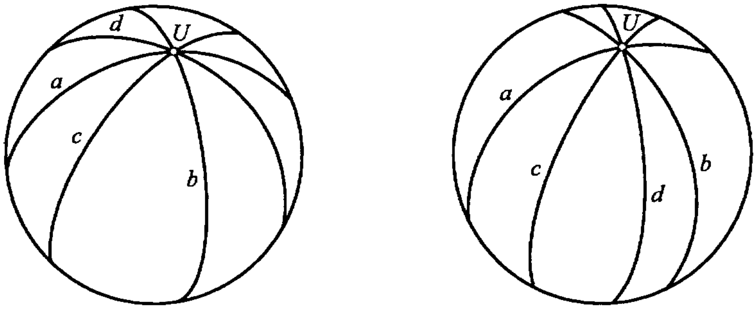


а) б)

Рис. 81

чать порядок наших условных "точек" на "прямой", нужно исходить из рассмотрения четырех "точек". Пусть A, B, C, D — четыре "точки" некоторой "прямой"; будем считать их занумерованными в порядке записи (независимо от того, как они лежат на "прямой"). Возможны два существенно различных случая расположения "точек" A, B, C, D с учетом их нумерации: 1) первые две "точки" A и B разделяют две последние "точки" C и D (тогда C и D разделяют A и B; рис. 81 а); 2) первые две "точки" A и B не разделяют две последние "точки" C и D (тогда C и D не разделяют A и B; рис. 81 б). Аналогично, если a, b, c, d — четыре "прямые", проходящие через одну "точку", и занумерованные в порядке записи, то возможны два случая их расположения: 1) "прямые" a, b разделяют "прямые" c, d (тогда c, d разделяют a, b; рис. 82 а); 2) "прямые" a, b не разделяют прямые c, d (тогда c, d не разделяют a, b; рис. 82 б). Понятие о разделенности "точек" и "прямых" мы примем в качестве основного, остальные понятия, относящиеся к порядку расположения "точек" на "прямой" и "прямых", проходящих через "точку", будем сводить к этому основному понятию.

Пусть A и B — две произвольные "точки" какой-нибудь "прямой" u; тогда все "точки" на "прямой" u, исключая A и B, могут быть единственным образом разбиты на два класса так, что любые две "точки" из одного класса не разделяют A и B, любые две "точки" из разных классов разделяют A и B. Соответственно этому условимся говорить, что "точки" A, B определяют на "прямой" u два "отрезка";



а *б*

Рис. 82

внутренними точками одного "отрезка" будем считать "точки" одного из двух только что указанных классов, внутренними точками другого "отрезка" будем считать "точки" другого класса (на рис. 81а, 81б один из двух отрезков, определяемых "точками" A, B, представлен двумя дугами, которые изображены в виде жирных линий; на рис. 81а точка C является внутренней точкой этого "отрезка", точка D — внутренней "точкой" другого "отрезка"; на рис. 82б обе "точки" C и D являются внутренними "точками" одного "отрезка").

Аналогичные понятия можно высказать по отношению к "прямым", проходящим через одну "точку". Именно, если a и b — две "прямые", проходящие через некоторую "точку" U, то все "прямые", проходящие через U, исключая a и b, можно единственным образом разбить на два класса так, что каждые две "прямые" из одного класса не разделяют a и b, каждые две "прямые" из разных классов разделяют a и b. Соответственно этому условимся говорить, что "прямые" a и b определяют два "угла" с вершиной U, внутренними "прямыми" одного "угла" будем считать "прямые" одного из двух только что указанных классов, внутренними "прямыми" другого "угла" будем считать "прямые" другого класса.

После всего сказанного естественным образом определяется треугольник, внутренние углы треугольника, внутренняя область треугольника, многоугольника, простой многоугольник (без самопересечений), внутренние углы простого многоугольника и ряд других понятий, принятых в элементарной геометрии.

Условимся, наконец, называть два "отрезка" конгруэнтными, если существует движение сферы k по самой себе, или зеркальное отражение этой сферы относительно какой-нибудь ее диаметральной плоскости, в результате которого один из этих "отрезков" налагается на другой (т. е. крайние и внутренние точки одного отрезка налагаются соответственно на крайние и внутренние точки другого). Аналогично определим конгруэнтность “углов” и конгруэнтность произвольных фигур (фигура M как множество “точек” и “прямых” считается конгруэнтной фигуре M', если между “точками” этих фигур, а также между их “прямыми”, можно установить взаимно однозначное соответствие так, что в результате некоторого движения сферы k по самой себе или в результате ее зеркального отражения относительно диаметральной плоскости все “точки” и “прямые” фигуры M наложатся на соответствующие им “точки” и “прямые” фигуры M').

Итак, мы рассматриваем: 1) отношения связи “точек” и “прямых”, 2) отношения порядка “точек” на произвольной “прямой” и “прямых”, проходящих через произвольную “точку”, 3) отношения конгруэнтности “отрезков”, “углов” и других фигур. Система теорем об этих отношениях называется *геометрией Римана*; множество “точек” и “прямых”, понимаемых в установленном выше смысле и находящихся в указанных отношениях, называется *плоскостью Римана*. Все теоремы геометрии Римана представляют собой надлежащим образом истолкованные теоремы евклидовой геометрии, поскольку “точки” и “прямые” плоскости Римана суть евклидовы объекты.

65. Отметим некоторые предложения геометрии Римана. Прежде всего, как уже указывалось выше, в этой геометрии осуществляются все три аксиомы связи евклидовой планиметрии; в частности, любые две точки определяют одну и только одну проходящую через них прямую. С другой стороны, в геометрии Римана имеет место предложение, которого нет ни в геометрии Евклида, ни в геометрии Лобачевского, именно: каждые две прямые имеют (одну) общую точку (это ясно, так как каждые два больших круга сферы имеют пару диаметрально противоположных точек пересечения). Иначе говоря, на римановой плоскости нет параллельных прямых.

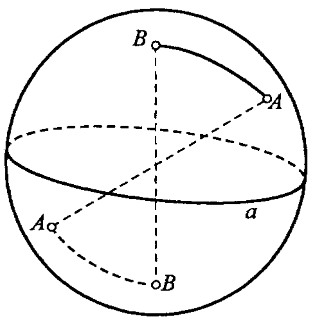


Рис. 83

Таким образом, в то время как в евклидовой геометрии имеет место постулат о единственности прямой, проходящей через данную точку и не пересекающей данную прямую, а в геометрии Лобачевского принимается одно из отрицаний этого постулата: допускается, что таких прямых существует бесконечно много, — в геометрии Римана осуществляется другое отрицание: в этой геометрии всякая прямая пересекает другую.

Расположение прямых на плоскости Римана еще в одном отношении принципиально отличается от расположения прямых на плоскости Евклида, или на плоскости Лобачевского, именно: прямая не разделяет плоскость Римана на две части. Это значит, что, каковы бы ни были прямая a и две точки A и B, не лежащие на этой прямой, всегда можно соединить точки A и B отрезком так, что этот отрезок не пересечет прямой a (рис. 83).

В геометрии Римана естественным образом определяется сравнение отрезков (между собой) и углов (между собой), а также измерение отрезков и углов (см. *пп*° 18, 20, 21, где эти понятия устанавливались для евклидовой геометрии). Вместе с тем появляется возможность сформулировать и доказать теоремы о соотношениях между геометрическими величинами, в той или иной мере аналогичные известным теоремам Евклида и Лобачевского.

Интересно сравнить в геометриях Евклида, Лобачевского и Римана предложения о сумме внутренних углов треугольника: в геометрии Евклида сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым, в геометрии Лобачевского она меньше двух прямых, в геометрии Римана — больше двух прямых. Чтобы убедиться в последнем, т. е. что на плоскости Римана сумма внутренних углов треугольника больше двух прямых, достаточно заметить, что прямые римановой плоскости суть большие круги некоторой сферы, а так как сферический треугольник имеет сумму внутренних углов, бо́льшую двух прямых, то этим же свойством обладает и треугольник на плоскости Римана.

Укажем наконец, что метрические соотношения в геометрии Римана выражаются надлежащим образом истолкованными формулами сферической геометрии (это понятно, ведь каждая фигура M плоскости Римана представляет собой пару фигур M_1 и M_2 некоторой сферы, симметрично расположенных относительно центра этой сферы, причем каждая пара диаметрально противоположных точек фигур M_1 и M_2 рассматривается как одна точка фигуры M; тем самым каждое метрическое соотношение между элементами фигуры M совпадает с метрическим соотношением между соответствующими элементами фигуры M_1 или фигуры M_2). Так, например, на римановой плоскости сторона треугольника a выражается через две другие его стороны b, c и противолежащий угол α формулой

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha,$$

поскольку такая формула выражает сторону треугольника на сфере радиуса R (см. *п*° 62). При этом имеется в виду, что риманова плоскость получена путем отождествления диаметрально противоположных точек э т о й ж е сферы (радиуса R). Легко понять, что число R должно участвовать и в других метрических формулах, относящихся к такой римановой плоскости. Очевидно, что это число (при заданном масштабе) характеризует риманову плоскость, как и ту сферу, с помощью которой эта риманова плоскость определена. Очевидно также, что чем больше R по сравнению с размерами какой-нибудь части римановой плоскости, тем меньше отличаются по своим свойствам лежащие в этой части фигуры от евклидовых фигур. Поэтому число R можно рассматривать в качестве "меры неевклидовости" римановой плоскости. Отрезок длины R, лежащий в этой римановой плоскости (т. е. отрезок, понимаемый в смысле римановой геометрии), называется ее *радиусом кривизны*.

66. Как мы уже отмечали выше, все теоремы геометрии Римана представляют собой надлежащим образом истолкованные теоремы евклидовой геометрии. Соответственно этому теоремы геометрии Римана выводятся из аксиом геометрии Евклида. Конечно, не все теоремы евклидовой геометрии допускают истолкование в виде теорем римановой геометрии; большинство евклидовых теорем вообще не имеет никакого отношения к тем объектам, которые мы называли точками и прямыми римановой плоскости.

Таким образом, чтобы получить теоремы римановой геометрии из аксиом евклидовой геометрии, нужно делать некоторые особые выводы из этих аксиом.

Возможно, однако, в основу геометрии Римана положить специальную систему аксиом, т. е. ряд предложений (относящихся к понятиям связи, порядка и конгруэнтности предметов римановой плоскости), из которых все остальные предложения геометрии Римана могут быть выведены логическим путем, причем каждый вывод будет приводить к некоторой теореме этой геометрии.

В таком случае при доказательстве теорем геометрии Римана становятся безразличными все свойства ее объектов, кроме свойств, обусловленных аксиомами. Тем самым аксиоматическое обоснование геометрии Римана превращает ее в абстрактную геометрическую систему. Называя словами "точка" и "прямая" какие угодно объекты, словами "лежат на", "разделяют", "конгруэнтны" — какие угодно их взаимные отношения, удовлетворяющие требованиям аксиом, мы будем получать разнообразные конкретные модели абстрактной геометрии Римана. Каждая система объектов, отношения которых удовлетворяют требованиям аксиом геометрии Римана, может быть названа *римановой плоскостью*. Таким образом, сфера с отождествленными диаметрально противоположными точками является лишь одной из множества разнообразных римановых плоскостей.

67. Аксиомы геометрии Римана мы приводить не будем*). Однако возможность разнообразных истолкований геометрии Римана мы легко можем пояснить читателю построением новой модели этой геометрии. Объекты новой модели будут находиться в определенных сопоставлениях с объектами уже известной нам модели на сфере, благодаря чему без обращения к аксиомам будет видно, что эти две модели реализуют одну и ту же геометрию.

---

*) Одну из возможных систем аксиом читатель найдет в книге *Богомолова С. А.* "Введение в неевклидову геометрию Римана".

Новую модель мы построим, также пользуясь евклидовым пространством.

Прежде всего пополним множество элементов евклидова пространства новыми элементами, которые будем называть *бесконечно удаленными точками.* Природа этих новых элементов для нас безразлична, но, вводя новые элементы, мы будем предполагать их находящимися в известных сопоставлениях с первоначально данными элементами; именно, мы полагаем, что:

1) с каждой прямой a сопоставлен один новый элемент, называемый бесконечно удаленной точкой прямой a;

2) параллельные прямые имеют общую бесконечно удаленную точку;

3) бесконечно удаленные точки непараллельных прямых различны.

Множество всех бесконечно удаленных точек произвольной плоскости (т. е. множество бесконечно удаленных точек всех прямых этой плоскости) будем рассматривать как лежащую на ней новую бесконечно удаленную прямую. Множество всех бесконечно удаленных точек пространства будем рассматривать как новую бесконечно удаленную плоскость. С соблюдением указанных условий бесконечно удаленные элементы вводятся в проективной геометрии; поэтому пространство, дополненное при указанных условиях бесконечно удаленными элементами, называется проективным пространством, плоскость, дополненная бесконечно удаленными элементами при тех же условиях, называется проективной плоскостью (см. nn° 80–82).

Будем рассматривать в качестве элементов новой модели точки и прямые какой-нибудь плоскости α (в том числе — ее бесконечно удаленные точки и бесконечно удаленную прямую). Слова "точка лежит на прямой" будем понимать в обычном смысле. При этом:

1) соблюдены все три аксиомы связи элементарной планиметрии;

2) любые две прямые пересекаются (может быть в бесконечно удаленной точке).

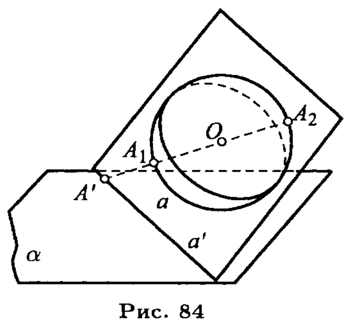


Рис. 84

Следовательно, для точек и прямых новой модели отношения связи удовлетворяют тем же основным условиям, какие осуществляются для ранее рассмотренной модели на сфере. Теперь мы определим в новой модели отношения порядка и конгруэнтности. С этой целью возьмем какую-нибудь сферу; обозначим эту сферу буквой k, центр ее — буквой O (рис. 84). Предположим, что точка O не лежит на плоскости α. Проведем через O произвольную прямую; она пересечет плоскость α в некоторой, может быть, бесконечно

7 — 10891

удаленной точке A', а сферу k — в паре диаметрально противоположных точек A_1, A_2. Рассматривая пару A_1, A_2 как одну точку модели римановой геометрии на сфере k, обозначим эту пару одной буквой A. Условимся говорить, что A' есть проекция A (или что A есть проекция A'). Пусть a — какой-нибудь большой круг сферы k; очевидно, что все пары его диаметрально противоположных точек имеют в качестве своих проекций на плоскости α точки одной определенной прямой a' (прямая a' может оказаться бесконечно удаленной). Условимся говорить, что a' есть проекция α (или что a есть проекция a'). Сопоставим с каждой парой диаметрально противоположных точек сферы k, т. е. с каждой точкой модели римановой геометрии на этой сфере, ее проекцию на плоскости α. Сопоставим с каждым большим кругом сферы k его проекцию на плоскости α; иначе говоря, с каждой прямой модели римановой геометрии на сфере k мы сопоставляем определенную прямую плоскости α. Легко убедиться, что каждое из этих соответствий является взаимно однозначным. Ясно также, что если точка A модели римановой геометрии на сфере k лежит на прямой a той же модели, то в плоскости α точка A', соответствующая A, лежит на прямой a', соответствующей a.

Пусть теперь A', B', C', D' — четыре точки плоскости α, лежащие на одной прямой u' этой плоскости, A, B, C, D — соответствующие им точки модели римановой геометрии на сфере k, лежащие на одной прямой u этой модели (u и u' соответствуют друг другу). Условимся говорить, что 1) точки A', B' разделяют точки C', D' на прямой u' плоскости α, если A, B разделяют C, D на прямой u; 2) точки A', B' не разделяют точки C', D' на прямой u' плоскости α, если A, B не разделяют C, D на прямой u. Аналогично, если a', b', c', d' — четыре прямые плоскости α, проходящие через одну точку U', a, b, c, d — соответствующие им прямые модели на сфере k, проходящие через точку U этой модели, то мы будем говорить, что: 1) прямые a', b' разделяют прямые c', d' на плоскости α, если a, b разделяют c, d; 2) прямые a', b' не разделяют прямые c', a' на плоскости α, если a, b не разделяют c, d. Тем самым мы определим отношение порядка точек на произвольной прямой плоскости α и отношение порядка прямых плоскости α, проходящих через некоторую точку этой плоскости.

Наконец, условимся говорить, что две фигуры плоскости α конгруэнтны, если конгруэнтны проекции этих фигур на сфере k.

Итак, для объектов новой модели мы определили отношения связи, порядка и конгруэнтности; при этом объекты новой модели находятся в таких же взаимных отношениях, в каких находятся соответствующие им объекты модели римановой геометрии на сфере k. Отсюда следует, что каждое предложение о связи, порядке и конгруэнтности объектов модели римановой геометрии на сфере k будет справедливо для объектов новой модели на проективной плоскости; обратно, каждое предложение о связи, порядке и конгруэнтности объектов новой модели будет справедливо для модели римановой геометрии

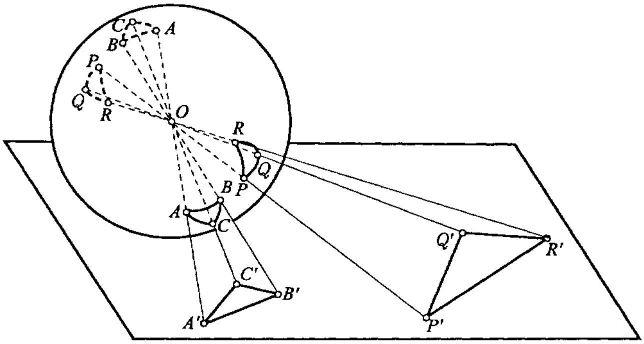


Рис. 85

на сфере k. Таким образом, обе модели по-разному реализуют одну и ту же риманову геометрию.

С наглядной точки зрения модель римановой геометрии на проективной плоскости имеет преимущество перед моделью в виде сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками во всех случаях, когда речь идет о связи и порядке объектов, поскольку на проективной плоскости точки и прямые изображаются привычным для нас способом. Зато модель на проективной плоскости проигрывает во всех случаях, когда речь идет о конгруэнтности фигур, поскольку фигуры модели на проективной плоскости, конгруэнтные в смысле римановой геометрии, не являются конгруэнтными в обычном смысле (см. рис. 85, где изображены конгруэнтные треугольники ABC и PQR модели римановой геометрии в виде сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками и соответствующие им, также конгруэнтные, треугольники $A'B'C'$ и $P'Q'R'$ модели римановой геометрии на проективной плоскости).

68. Все предыдущее изложение относилось к двумерной геометрии Римана. Модель трехмерной геометрии Римана можно получить путем отождествления диаметрально противоположных точек трехмерной сферы в четырехмерном пространстве Евклида*).

Не обращаясь к четырехмерному пространству, модель трехмерной геометрии Римана можно построить при помощи проективной геометрии (см. главу VI, где изложено построение проективных моделей двумерной геометрии Лобачевского и двумерной геометрии Римана. Эти построения непосредственно обобщаются на трехмерный случай).

---

*) Понятие многомерного евклидова пространства изложено в главе VII; см. также первое издание этой книги. Изложение геометрии Римана координатным методом читатель найдет в книге: *Клейн Ф.* "Неевклидова геометрия".

Глава IV

ИССЛЕДОВАНИЕ АКСИОМ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Три основные задачи аксиоматики

69. В предыдущей главе мы доказали, что из непротиворечивости евклидовой геометрии следует непротиворечивость геометрии Лобачевского. Теперь уместно спросить себя: какова гарантия непротиворечивости геометрии Евклида? Так как евклидова геометрия рассматривается нами как система предложений, получающихся логическим путем из аксиом I–V главы II, *то, говоря о непротиворечивости евклидовой геометрии, мы имеем в виду непротиворечивость системы аксиом* I–V.

На ближайших страницах мы докажем, что геометрия Евклида непротиворечива, если непротиворечива арифметика. *Вопрос о непротиворечивости арифметики в основаниях геометрии не рассматривается.*

Занимаясь исследованием аксиом элементарной геометрии, мы будем иметь перед собой следующие три проблемы:

1) проблему непротиворечивости,
2) проблему минимальности,
3) проблему полноты.

Так как эти три проблемы возникают при исследовании любой системы аксиом — будь то аксиомы геометрии Евклида или геометрии Лобачевского, или какие угодно еще, то имеет смысл постановку указанных проблем и методы их решения высказать в общей форме.

Пусть дана система аксиом, устанавливающая определенные свойства взаимных отношений некоторых объектов. Из принятых аксиом можно делать логические выводы об этих свойствах объектов, совершенно не принимая во внимание другие возможные их свойства, если они не упомянуты в аксиомах.

Поэтому объектами данной системы аксиом можно считать предметы любой природы, и отношениям между ними, о которых идет речь в аксиомах, можно придать любой конкретный смысл, если только при этом будут удовлетворены требования принятых аксиом. Тогда каждая теорема, логически выведенная из аксиом, будет выражать определенный факт, относящийся к рассматриваемым предметам, точнее, к тем их свойствам, которые упоминаются в аксиомах.

Всякий конкретный выбор предметов, которым приписывается роль объектов данной системы аксиом, мы будем называть *реализацией* или *интерпретацией* этих аксиом.

Само множество объектов, реализующих данную систему аксиом, мы, как уже делали раньше, назовем "моделью" той логической схемы, которая определена аксиомами.

Если аксиомы м о г у т б ы т ь каким-либо способом реализованы на модели, то из них нельзя правильными рассуждениями вывести два следствия, логически исключающих друг друга, — скажем, утверждение и отрицание одного и того же факта. Поэтому, *чтобы доказать непротиворечивость данной системы аксиом, достаточно найти одну из возможных ее реализации.* (Если же система противоречива, то это обычно обнаруживается соответствующим рассуждением, приводящим к противоречию.)

Доказательство непротиворечивости данной системы аксиом может быть условным.

Например, непротиворечивость планиметрии Лобачевского была доказана в предыдущей главе построением модели Пуанкаре, предметы которой избирались в евклидовой плоскости. Соответственно этому полученный результат был сформулирован условно: планиметрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива планиметрия Евклида.

Вторая проблема заключается в установлении необходимости всех требований, сформулированных в аксиомах, т.е. что принятая система аксиом не допускает исключения каких-либо ее требований с сохранением того же объема следствий из нее в целом (является минимальной)*). Решить эту проблему в полном объеме — значит доказать, что каждое положение системы аксиом не зависит от остальных положений, т. е. не может быть получено из них логическим путем.

Обозначим буквой A одну из аксиом рассматриваемой (непротиворечивой) системы.

Если аксиома A не вытекает из других аксиом системы, то, заменяя в этой системе аксиому A новой аксиомой A^*, которую формулируем так: "утверждение A неверно", — мы должны получить непротиворечивую систему. Поэтому *чтобы доказать, что аксиома A не может быть выведена из остальных аксиом рассматриваемой системы, достаточно реализовать на некотором множестве объектов все аксиомы, за исключением A, таким образом, чтобы в этой реализации аксиома A не имела места.*

---

*) Так как в основу одной и той же геометрии можно класть различные системы аксиом, то, исключая из этих систем аксиом лишние требования (если таковые окажутся), можно прийти, вообще говоря, к различным минимальным системам. Таким образом, минимальная система отнюдь не является единственной.

В частности, таким путем мы установили независимость V постулата Евклида от остальных постулатов элементарной геометрии. Именно, в модели Пуанкаре на евклидовой полуплоскости осуществляются все аксиомы абсолютной геометрии и не осуществляется аксиома о параллельных Евклида. Следовательно, она не является логическим следствием остальных аксиом. (В данном случае одна и та же интерпретация геометрических объектов обнаруживает независимость постулата Евклида и непротиворечивость геометрии Лобачевского.)

Позднее мы проведем подобный анализ по отношению к другим важнейшим аксиомам элементарной геометрии, но, конечно, решать проблему минимальности в ее полном объеме не будем.

Постановку третьей проблемы аксиоматики — проблемы полноты системы аксиом — мы отложим до конца главы.

70. Мы уже имели пример применения предложенных методов — построение модели Пуанкаре. Однако многочисленные детали этой модели могли затемнить сущность дела, которую полезно выявить примером как можно более простым.

Мы построим сейчас модель для одной только первой группы аксиом Гильберта, рассматривая эту группу как отдельную аксиоматическую систему.

Возьмем какой-нибудь тетраэдр и условимся называть "точками" вершины этого тетраэдра, "прямыми" — его ребра, "плоскостями" — грани.

Таким образом, множество геометрических элементов в нашей реализации состоит всего из четырех точек, шести прямых и четырех плоскостей.

Прямые и плоскости находятся в известных сопоставлениях с точками, причем, если, например, прямая a сопоставлена с точкой A, то говорят, что "a проходит через A" или "A лежит на a" и т. д. В нашей реализации, как *во всякой определенной реализации, эти сопоставления должны быть точно описаны.* Условимся каждой точке, конкретно представленной одной из вершин тетраэдра, сопоставлять в качестве проходящих через нее прямых и плоскостей те прямые и плоскости, которые представлены ребрами и гранями, содержащими данную вершину.

Легко видеть, что все требования аксиом I.1–I.8 при этом будут удовлетворены. Просмотрим аксиомы последовательно.

Аксиома I.1. Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, проходящая через каждую из точек A, B.

Требование этой аксиомы удовлетворено, так как любые две вершины тетраэдра соединяются ребром.

Аксиома I.2. Каковы бы ни были две точки A, B, существует не более одной прямой, проходящей через каждую из точек A, B.

Требование этой аксиомы удовлетворено, так как две вершины тетраэдра соединяются только одним ребром.

Аксиома I.3. На каждой прямой существуют по меньшей мере две точки; существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Требования этой аксиомы удовлетворены, так как на каждом ребре существуют две вершины и существуют три вершины, не лежащие на одном ребре (даже четыре!).

Аксиома I.4. Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует плоскость α, проходящая через каждую из трех точек A, B, C; на каждой плоскости имеется хотя бы одна точка.

Требования этой аксиомы удовлетворены, так как через каждые три вершины проходит грань и каждая грань содержит вершину (даже три!).

Аксиома I.5. Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из точек A, B, C.

Требование этой аксиомы удовлетворено, так как через каждые три вершины проходит только одна грань.

Аксиома I.6. Если две точки A, B прямой a лежат на плоскости α, то каждая точка прямой a лежит на плоскости α.

Требование этой аксиомы удовлетворено; действительно, если две вершины одного ребра лежат на некоторой грани, то каждая вершина этого ребра лежит на той же грани, так как ребро содержит всего две вершины.

Аксиома I.7. Если две плоскости α, β имеют общую точку A, то они имеют еще, по крайней мере, одну общую точку B.

Требование этой аксиомы удовлетворено, так как каждые две грани имеют две общие вершины.

Аксиома I.8. Существуют, по крайней мере, четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Требование этой последней аксиомы также удовлетворено, так как четыре вершины тетраэдра не лежат на одной грани.

Таким образом, мы убедились, что наша реализация удовлетворяет требованиям всех аксиом первой группы. Заметим, между прочим, что эта реализация аксиом I.1–I.8 является минимальной из всех возможных в том смысле, что на каждой прямой имеется только пара точек, всех точек только четыре и т. д. Именно столько элементов и требуют аксиомы. Правда, аксиома I.4 требует, чтобы на каждой плоскости была хотя бы одна точка, а в нашей реализации на каждой плоскости существуют три точки. Однако, как показывает теорема 3 n° 12, и это число является минимальным.

Так как для аксиом I.1–I.8 указана конкретная реализация, то можно утверждать, что аксиомы первой группы составляют непротиворечивую систему.

В предыдущем параграфе был изложен общий принцип установления независимости предложений друг от друга. Сейчас легко дать простую иллюстрацию этого принципа. Поставим, например, следующий вопрос: можно ли доказать с помощью аксиом I.1–I.8, что множество элементов геометрии бесконечно?

Очевидно, на этот вопрос следует ответить отрицательно, так как нами указана реализация аксиом I.1–I.8 на конечном множестве объектов. Иначе говоря: предложение о бесконечности множества элементов геометрии не зависит от аксиом первой группы.

§ 2. Непротиворечивость аксиом евклидовой геометрии

71. Перейдем теперь к доказательству непротиворечивости всех пяти групп аксиом геометрии Евклида.

Мы привыкли мыслить эти аксиомы реализованными на некотором множестве объектов, которые представляем себе наглядно и которые возникают в нашем воображении как абстракция наблюдаемых нами предметов реального мира. Однако точки, прямые и плоскости как образы нашего геометрического воображения не поддаются математическому описанию. Поэтому для доказательства непротиворечивости аксиом геометрии Евклида нужно разыскать такую модель, которая имеет смысл помимо наших наглядных геометрических представлений. С этой целью мы построим реализацию аксиом I–V, которую будем называть арифметической, потому что объекты ее являются сочетаниями чисел. Тем самым будет установлена непротиворечивость евклидовой геометрии при условии непротиворечивости арифметики.

Чтобы не затемнять существа вопроса лишними подробностями вычислительного характера, мы ограничимся рассмотрением случая планиметрии, т. е. будем принимать во внимание только аксиомы I.1–I.3 и II–V.

В арифметической реализации назовем “точкой” любую пару вещественных чисел (x, y), “прямой” — отношение трех вещественных чисел $(u : v : w)$ при условии, что хотя бы одно из двух чисел u, v не равно нулю*).

Условимся говорить: “точка (x, y) лежит на прямой $(u : v : w)$” или “прямая $(u : v : w)$ проходит через точку (x, y)”, если имеет место равенство

$$ux + vy + w = 0.$$

Требования аксиом I.1–I.3 при этом будут удовлетворены, в чем можно убедиться последовательной проверкой.

*) Отношением трех чисел u, v, w можно назвать совокупность чисел u, v, w при условии, что совокупности u, v, w и $\lambda u, \lambda v, \lambda w$, где λ — любое число, не равное 0, рассматриваются как тождественные.

В самом деле, пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две различные точки; тогда отношение трех чисел $u = y_1 - y_2$, $v = x_2 - x_1$, $w = x_1y_2 - x_2y_1$ есть прямая (числа $y_1 - y_2$ и $x_2 - x_1$ не могут быть одновременно равными нулю, поскольку точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) различны), проходящая через каждую из точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2), так как

$$\begin{aligned}
ux_1 + vy_1 + w = (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0,\\
ux_2 + vy_2 + w = (y_1 - y_2)x_2 + (x_2 - x_1)y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, требование аксиомы I.1 удовлетворено. Далее, из уравнений

$$\begin{aligned}
ux_1 + vy_1 + w = 0,\\
ux_2 + vy_2 + w = 0
\end{aligned}$$

вытекает, что

$$u : v : w = (y_1 - y_2) : (x_2 - x_1) : (x_1y_2 - x_2y_1).$$

Таким образом, точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) определяется только одна прямая $(u : v : w)$; значит, удовлетворено требование аксиомы I.2.

Также удовлетворены требования аксиомы I.3. Действительно, так как уравнение

$$ux + vy + w = 0$$

всегда имеет бесчисленное множество различных решений, то на каждой прямой существует не только две, но бесконечно много точек. В качестве трех точек, не лежащих на одной прямой, можно указать, например: $(0, 0), (1, 0)$ и $(0, 1)$; нет прямой, содержащей эти три точки, так как, очевидно, не существует трех чисел u, v, w, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих равенствам

$$\begin{aligned}
u \cdot 0 + v \cdot 0 + w = 0,\\
u \cdot 1 + v \cdot 0 + w = 0,\\
u \cdot 0 + v \cdot 1 + w = 0.
\end{aligned}$$

Теперь определим отношение “между”. Пусть даны прямая $(u : v : w)$ и на ней три точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Предположим сначала, что $v \neq 0$. Будем говорить, что точка (x_2, y_2) лежит между точками (x_1, y_1) и (x_3, y_3), если

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{или} \quad x_1 > x_2 > x_3.$$

Если же $v = 0$, то для точек, лежащих на этой прямой, необходимо $x_1 = x_2 = x_3 = -w/u$ и предыдущие условия непригодны. В этом случае условимся считать точку (x_2, y_2) расположенной между (x_1, y_1) и (x_3, y_3), если

$$y_1 < y_2 < y_3 \quad \text{или} \quad y_1 > y_2 > y_3.$$

Определенное указанным образом отношение "между" удовлетворяет требованиям всех аксиом порядка II.1–II.4.

То, что удовлетворены требования линейных аксиом II.1–II.3, усматривается непосредственно. Покажем, что требование аксиомы Паша II.4 также удовлетворено.

Отметим прежде всего следующее обстоятельство: если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — концы отрезка, то все внутренние точки этого отрезка имеют вид $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$, где λ — любое число, подчиненное неравенствам $0 < \lambda < 1$. Далее, если некоторая прямая $(u : v : w)$ проходит через точку отрезка с концами (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то числа $ux_1 + vy_1 + w$ и $ux_2 + vy_2 + w$ имеют разные знаки. В самом деле, если внутренняя точка отрезка, через которую проходит прямая, соответствует числу λ, то

$$u\,[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] + v\,[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2] + w = 0.$$

Отсюда

$$\lambda(ux_1 + vy_1 + w) = -(1-\lambda)(ux_2 + vy_2 + w),$$

а так как λ и $1-\lambda$ положительны, то $ux_1 + vy_1 + w$ и $ux_2 + vy_2 + w$ суть числа разных знаков.

Пусть теперь $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ — три точки, не лежащие на одной прямой, и $(u : v : w)$ — прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Мы должны показать, что если прямая $(u : v : w)$ проходит через некоторую точку отрезка AB, то она проходит либо через точку отрезка AC, либо через точку отрезка BC.

Так как прямая $(u : v : w)$ не содержит ни одной из точек A, B, C, то числа

$$\alpha_1 = ux_1 + vy_1 + w, \quad \alpha_2 = ux_2 + vy_2 + w, \quad \alpha_3 = ux_3 + vy_3 + w$$

отличны от нуля, причем из предыдущего следует, что α_1 и α_2 имеют разные знаки. Предположим, что α_3 имеет знак, отличный от знака α_1, тогда прямая $(u : v : w)$ пересекает отрезок AC. Чтобы установить это, возьмем число λ, определенное равенством $\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_3 = 0$, т. е.

$$\lambda = \alpha_3 : (\alpha_3 - \alpha_1).$$

Приняв во внимание, что α_1 и α_3 — числа разных знаков, найдем:

$$\lambda = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_1} = \frac{|\alpha_3|}{|\alpha_3| + |\alpha_1|}.$$

Отсюда $0 < \lambda < 1$. Следовательно, точка (x, y), где

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3, \quad y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_3,$$

есть точка отрезка AC. С другой стороны, точка (x, y) лежит на прямой $(u : v : w)$, так как

$$ux + vy + w = \lambda(ux_1 + vy_1 + w) + (1-\lambda)(ux_3 + vy_3 + w) =$$
$$= \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_3 = 0.$$

Таким образом, прямая $(u : v : w)$ действительно пересекает отрезок AC. Точно так же установим, что в том случае, когда α_3 имеет знак, отличный от α_2, прямая $(u : v : w)$ пересекает отрезок BC. Но так как α_1 и α_2 имеют различные знаки, то α_3 необходимо имеет знак, отличный либо от знака числа α_1, либо от знака числа α_2. Тем самым требуемое доказано.

Теперь мы обратимся к определению понятия конгруэнтности. С этой целью рассмотрим некоторый класс преобразований, известных в алгебре под названием ортогональных.

Пусть даны соотношения:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned} \qquad (*)$$

с помощью которых при заданных $a_1, \ldots, c_2$ каждая точка (x, y) преобразуется в определенную точку (x', y'). Преобразование называется *ортогональным*, если коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 удовлетворяют условию

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|. \qquad (**)$$

Прежде всего отметим некоторые свойства ортогонального преобразования $(*)$. Из $(**)$ имеем:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Эти три равенства равносильны равенству $(**)$ и, следовательно, характеризуют ортогональность преобразования $(*)$.

Из равенств (1) прежде всего следует, что как a_1 и a_2, так и b_1 и b_2 не могут быть одновременно равны нулю. В самом деле, если, например, $a_1 = a_2 = 0$, то из третьего из равенств (1) $b_1b_2 = 0$, что вместе с предположенными равенствами $a_1 = a_2 = 0$ должно противоречить одному из первых двух равенств (1). Далее, из равенства $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ получаем: $a_1^2a_2^2 = b_1^2b_2^2$. Отсюда, умножая почленно первое из равенств (1) на b_2^2, второе на a_1^2 и вычитая, найдем:

$$0 = b_2^2 - a_1^2,$$

откуда $b_2 = \delta_1 a_1$, где $\delta_1^2 = 1$. Аналогично, получим, что $b_1 = \delta_2 a_2$, где $\delta_2^2 = 1$. Но $b_1b_1 = -a_1a_2$, следовательно, $\delta_1\delta_2 = -1$, и таким образом, либо

$$b_1 = -a_2, \qquad b_2 = a_1,$$

либо

$$b_1 = a_2, \qquad b_2 = -a_1.$$

Мы видим, что преобразование (*) можно записать в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y + c_1, \\ y' &= \beta x + \alpha y + c_2 \end{aligned} \tag{I}$$

или

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + c_1, \\ y' &= \beta x - \alpha y + c_2, \end{aligned} \tag{II}$$

где через α и β обозначены a_1 и a_2; и в том и в другом случаях условия ортогональности (1) сводятся к одному соотношению

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Преобразования (I) и (II) мы будем называть соответственно ортогональными преобразованиями *первого* и *второго рода.*

Для дальнейшего особенно существенным является следующее свойство ортогональных преобразований: точки, расположенные на какой-нибудь полупрямой, при любом ортогональном преобразовании отображаются в точки, также расположенные на некоторой полупрямой.

Прежде чем доказать это, выберем удобный способ определения полупрямых.

Пусть дана прямая $a(u : v : w)$ и на ней точка $O(x_0, y_0)$; так как точка O лежит на прямой a, то имеет место равенство

$$ux_0 + vy_0 + w = 0.$$

Если $M(x, y)$ — произвольная точка прямой a, то аналогично

$$ux + vy + w = 0.$$

Отсюда

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w = 0.$$

Положим $m = \lambda v$, $n = -\lambda u$, где λ — любое число $\neq 0$. Тогда предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Обозначая каждое из этих двух равных отношений буквой t, найдем:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt. \end{aligned} \tag{2}$$

Равенства (2) для каждого значения t определяют на прямой некоторую точку, причем различным числовым значениям t одного знака соответствуют точки, расположенные по одну сторону от точки $O(x_0, y_0)$, а числовым значениям t с разными знаками соответствуют точки, лежащие по разные стороны от точки O. Это непосредственно усматривается из определенного выше понятия “между”.

Таким образом, положительным числам t соответствуют точки одной из двух полупрямых, на которые разделяется точкой O прямая a; отрицательным числам t соответствуют точки другой из этих двух полупрямых.

Более удобно определять точки полупрямой равенствами (2), всегда при положительных значениях t различая полупрямые с общим началом O, расположенные на прямой a, по знакам величин m и n: если для одной из полупрямых $m = p$ и $n = q$, то для другой $m = -p$ и $n = -q$.

Величины m и n мы будем называть *нормированными параметрами* полупрямой, если для них имеет место соотношение

$$m^2 + n^2 = 1;$$

в случае $\lambda = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ это соотношение соблюдено.

Очевидно, полупрямая определяется заданием начала (x_0, y_0) и нормированных параметров m, n.

Обратно, коль скоро задана полупрямая, ее начало (x_0, y_0) и нормированные параметры m, n однозначно определены.

Для обозначения полупрямой мы будем употреблять запись $(x_0, y_0; m, n)$, обязательно предполагая $m^2 + n^2 = 1$.

Теперь мы легко установим упомянутое выше свойство ортогональных преобразований: любым ортогональным преобразованием точки, составляющие полупрямую, переводятся в точки, также составляющие полупрямую.

Пусть дана полупрямая $(x_0, y_0; m, n)$. Все точки этой полупрямой мы получим, придавая в формулах

$$x = x_0 + mt,$$
$$y = y_0 + nt$$

величине t всевозможные положительные значения. Рассмотрим какое-нибудь ортогональное преобразование I рода:

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x + \alpha y + c_2,$$

или II рода:

$$x' = \alpha x + \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x - \alpha y + c_2.$$

Произвольная точка (x, y) данной полупрямой в первом случае преобразуется в точку

$$x' = (\alpha m - \beta n)t + (\alpha x_0 - \beta y_0 + c_1),$$
$$y' = (\beta m + \alpha n)t + (\beta x_0 + \alpha y_0 + c_2),$$

а во втором — в точку

$$x' = (\alpha m + \beta n)t + (\alpha x_0 + \beta y_0 + c_1),$$
$$y' = (\beta m - \alpha n)t + (\beta x_0 - \alpha y_0 + c_2).$$

В обоих случаях эти выражения можно записать в виде

$$x' = m't + x_0',$$
$$y' = n't + y_0',$$

и, следовательно, точки (x', y'), получаемые при различных положительных t, располагаются на полупрямой с параметрами m', n'. Тем самым наше утверждение доказано. Заметим, что параметры

$$m' = \alpha m - \beta n,$$
$$n' = \beta m + \alpha n$$

или

$$m' = \alpha m + \beta n,$$
$$n' = \beta m - \alpha n$$

являются нормированными. В самом деле,

$$m'^2 + n'^2 = (\alpha m \mp \beta n)^2 + (\beta m \pm \alpha n)^2 =$$
$$= \left(\alpha^2 + \beta^2\right) m^2 + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) n^2 = m^2 + n^2 = 1.$$

Условимся говорить, что полупрямая $(x_0', y_0'; m', n')$ получена ортогональным преобразованием полупрямой $(x_0, y_0; m, n)$. Таким образом, имеем следующее утверждение.

Ортогональное преобразование I *рода* (I) *или* II *рода* (II) *точек* (x, y) *в точки* (x', y') *определяет ортогональное преобразование соответственно* I *или* II *рода полупрямых* $(x_0, y_0; m, n)$ *в полупрямые* $(x_0', y_0'; m', n')$.

Величины $(x_0', y_0'; m', n')$ *выражаются формулами*

$$\begin{aligned} x_0' &= \alpha x_0 - \beta y_0 + c_1,\\ y_0' &= \beta x_0 + \alpha y_0 + c_2,\\ m' &= \alpha m - \beta n,\\ n' &= \beta m + \alpha n \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}^*)$$

в случае преобразования I *рода и формулами*

$$\begin{aligned} x_0' &= \alpha x_0 + \beta y_0 + c_1,\\ y_0' &= \beta x_0 - \alpha y_0 + c_2,\\ m' &= \alpha m + \beta n,\\ n' &= \beta m - \alpha n \end{aligned} \qquad (\mathrm{II}^*)$$

в случае преобразования II *рода. При этом если точки* (x, y) *лежат на полупрямой* $(x_0, y_0; m, n)$, *то их образы* (x', y') *расположены на полупрямой* $(x'_0, y'_0; m', n')$.

Теперь мы определим в нашей реализации конгруэнтность отрезков и углов.

Отрезок AB назовем конгруэнтным отрезку $A'B'$, если существует ортогональное преобразование (точек), переводящее точку A в точку A' и точку B в точку B'.

Угол (h, k) назовем конгруэнтным углу (h', k'), если существует ортогональное преобразование (полупрямых), переводящее полупрямую h в полупрямую h' и полупрямую k в полупрямую k'.

Нужно показать, что эти определения удовлетворяют требованиям аксиом III.1–III.5.

Рассмотрим с этой целью последовательно все аксиомы третьей группы.

Аксиома III.1 требует, чтобы для любого заранее данного отрезка AB на каждой прямой a' с каждой стороны от любой заданной точки A' этой прямой существовала точно одна точка B', определяющая вместе с A' отрезок $A'B'$, которому конгруэнтен отрезок AB.

Пусть даны отрезок $A(x_0, y_0)B(x, y)$ и точка $A'(x'_0, y'_0)$ на некоторой прямой $a'(u' : v' : w')$. Величины

$$m' = \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}, \quad n' = \frac{-u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$$

являются нормированными параметрами одной из двух полупрямых, которые определяются на прямой a' точкой A' (величины $-m'$, $-n'$ будут нормированными параметрами другой из этих полупрямых).

Обозначим через m и n нормированные параметры полупрямой AB; тогда точка $B(x, y)$ определится формулами

$$x = x_0 + mt,$$
$$y = y_0 + nt$$

при о п р е д е л е н н о м положительном t.

Будем искать ортогональное преобразование, переводящее полупрямую $(x_0, y_0; m, n)$ в полупрямую $(x'_0, y'_0; m', n')$. В соответствии с (I*) из уравнений

$$\alpha m - \beta n = m',$$
$$\beta m + \alpha n = n'$$

тотчас найдем

$$\alpha = mm' + nn',$$
$$\beta = mn' - nm',$$

причем

$$\alpha^2 + \beta^2 = (mm' + nn')^2 + (mn' - nm')^2 =$$
$$= m^2(m'^2 + n'^2) + n^2(m'^2 + n'^2) = m^2 + n^2 = 1.$$

Определяя c_1 и c_2 из первой пары уравнений (I*), мы получим точно одно ортогональное преобразование I рода

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x + \alpha y + c_2,$$

переводящее полупрямую $(x_0, y_0; m, n)$ в полупрямую $(x'_0, y'_0; m', n')$.

Аналогично можно установить, что существует точно одно преобразование II рода, с помощью которого полупрямая $(x_0, y_0; m, n)$ также переводится в полупрямую $(x'_0, y'_0; m', n')$.

Оба преобразования отображают точку $B(x, y)$ в одну и ту же точку $B(x', y')$:

$$x' = x'_0 + m't,$$
$$y' = y'_0 + n't.$$

Таким образом, на прямой a' с любой стороны от точки A' существует одна точка B' такая, что $AB \equiv A'B'$. Тем самым мы показали, что требование аксиомы III.1 удовлетворено.

Аксиома III.1 содержит еще требование, чтобы

$$AB \equiv BA.$$

Но и это требование соблюдено. В самом деле, ортогональное преобразование

$$x' = -x + (x_1 + x_2),$$
$$y' = -y + (y_1 + y_2),$$

отображает точку $A(x_1, y_1)$ в точку $B(x_2, y_2)$ и, наоборот, точку $B(x_2, y_2)$ — в точку $A(x_1, y_1)$.

Тем самым установлено, что все требования аксиомы III.1 удовлетворены.

Обратимся к следующей аксиоме III.2, согласно которой из соотношений конгруэнтности

$$A'B' \equiv AB \text{ и } A''B'' \equiv AB$$

должно вытекать

$$A'B' \equiv A''B''.$$

В нашей реализации это требование удовлетворено вследствие групповых свойств ортогональных преобразований. Именно:

1. Каждое ортогональное преобразование имеет обратное себе, и это обратное преобразование является тоже ортогональным.

2. Если некоторое ортогональное преобразование отображает точки (x, y) в точки (x', y') и какое-нибудь другое ортогональное преобразование отображает точки (x', y') в точки (x'', y''), то результирующее преобразование (т. е. произведение данных), отображающее точки (x, y) в точки (x'', y''), является тоже ортогональным.

Действительно, рассмотрим произвольное ортогональное преобразование, матрицу которого обозначим буквой Φ; обозначив через Φ' транспонированную матрицу и через I — единичную, мы сможем условие ортогональности $(**)$ (см. стр. 199) записать в виде

$$\Phi\Phi' = I. \qquad \text{(N)}$$

Отсюда следует, что определитель матрицы Φ равен ± 1 и, поскольку он отличен от нуля, каждое ортогональное преобразование имеет обратное. Матрица обратного преобразования удовлетворяет условию ортогональности; действительно, заметим предварительно, что из соотношения (N) следует

$$\Phi^{-1} = \Phi';$$

но $\Phi(\Phi'\Phi) = (\Phi\Phi')\Phi = \Phi$; поэтому $\Phi'\Phi = I$ и

$$\left(\Phi^{-1}\right)\left(\Phi^{-1}\right)' = I.$$

Таким образом, *преобразование, обратное ортогональному, есть преобразование ортогональное.*

Далее, пусть Φ и Ψ — матрицы двух ортогональных преобразований; произведение этих преобразований есть, очевидно, преобразование с матрицей $X = \Psi\Phi$. Пользуясь известным соотношением

$$(\Psi\Phi)' = \Phi'\Psi',$$

легко убедиться, что матрица X удовлетворяет условию ортогональности. Действительно, имеем:

$$XX' = \Psi\Phi(\Psi\Phi)' = \Psi\Phi\left(\Phi'\Psi'\right) = \Psi\left(\Phi\Phi'\right)\Psi' = \Psi I\Psi' = \Psi\Psi' = I.$$

Таким образом, при последовательном проведении ортогональных преобразований результирующее преобразование оказывается также ортогональным.

Убедившись, что ортогональные преобразования обладают групповыми свойствами, мы без труда сможем показать, что требование аксиомы III.2 в нашей реализации удовлетворено.

Пусть $A'B' \equiv AB$ и $A''B'' \equiv AB$. Условимся ортогональное преобразование, переводящее произвольную точку M' в точку M, представлять символической записью

$$M = \Phi(M').$$

Если $A'B' \equiv AB$, то существует преобразование $M = \Phi(M')$ такое, что
$$A = \Phi(A'), \quad B = \Phi(B').$$

Точно так же, если $A''B'' \equiv AB$, то существует преобразование $M = \Psi(M'')$ такое, что
$$A = \Psi(A''), \quad B = \Psi(B'').$$

Обозначив через Ψ^{-1} преобразованные, обратное преобразованию Ψ, найдем
$$A'' = \Psi^{-1}(A) = \Psi^{-1}\left(\Phi(A')\right),$$
$$B'' = \Psi^{-1}(B) = \Psi^{-1}\left(\Phi(B')\right).$$

В силу групповых свойств преобразование $\Psi^{-1}\Phi$ является ортогональным; отсюда $A'B' \equiv A''B''$.

Перейдем к аксиоме III.3. Пусть A, B, C — три точки какой-нибудь прямой a и точка B лежит между A и C, пусть A', B', C' — три точки некоторой прямой a', находящиеся в аналогичном расположении. Аксиома III.3 требует, чтобы из
$$AB \equiv A'B', \quad BC \equiv B'C'$$
следовало
$$AC \equiv A'C'.$$

Согласно рассуждениям, которые мы проводили, исследуя требования аксиомы III.1, имеется ортогональное преобразование, которое переводит полупрямую BA в полупрямую $B'A'$ и одновременно полупрямую BC в полупрямую $B'C'$. Так как $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то из тех же рассуждений (или из самой аксиомы III.1) следует, что указанное преобразование переводит точку A в точку A' и точку C в точку C'. Отсюда $AC \equiv A'C'$, т.е. требование аксиомы III.3 удовлетворено.

Теперь докажем, что в арифметической реализации удовлетворяются требования аксиомы III.4: если $\angle(h,k)$ — произвольный угол и h' — какая-нибудь полупрямая, то с каждой стороны от нее расположена точно одна полупрямая k', составляющая вместе с ней $\angle(h',k')$, которому конгруэнтен данный $\angle(h,k)$; кроме того,
$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k), \quad \angle(h,k) \equiv \angle(k,h).$$

Собственно говоря, только здесь нам придется существенно различать ортогональные преобразования I и II рода.

Пусть дана некоторая полупрямая h; представим себе эту полупрямую дополненной до прямой $\bar{h}$ и рассмотрим две полуплоскости, которые отделяются друг от друга прямой $\bar{h}$. Обозначим одну из них через I, другую через II. Пусть также h' — какая-нибудь другая полупрямая, $\bar{h}'$ — прямая, которая ее содержит, и I', II' — две полуплоскости, разделенные прямой $\bar{h}'$.

Предположим, что Φ_1 и Φ_2 — ортогональные преобразования соответственно I и II рода, каждое из которых переводит полупрямую h в полупрямую h'. Тогда имеет место следующее. Каждое из преобразований Φ_1 и Φ_2 переводит точки полуплоскости I в точки одной из двух полуплоскостей I' и II', а точки полуплоскости II — в точки другой из полуплоскостей I' и II', причем если Φ_1 переводит полуплоскость I в полуплоскость I', то Φ_2 переводит I в II'.

Чтобы убедиться в этом, прежде всего заметим, что точкам (x_1, y_1) и (x_2, y_2), расположенным по разные стороны от прямой $(u : v : w)$, соответствуют числа $ux_1 + vy_1 + w$ и $ux_2 + vy_2 + w$ разных знаков, как было показано ранее в связи с исследованием аксиомы Паша. Таким образом, для точек (x, y) одной полуплоскости должно быть $ux + vy + w > 0$, для точек другой $ux + vy + w < 0$.

Если (x_0, y_0) — начало полупрямой h и m, n — ее нормированные параметры, то условия принадлежности точки (x, y) к той или другой полуплоскости, ограниченной прямой $\bar{h}$, можно записать в форме

$$n(x - x_0) - m(y - y_0) > 0,$$

соответственно

$$n(x - x_0) - m(y - y_0) < 0.$$

Пусть (x_0', y_0') — начало и m', n' — нормированные параметры полупрямой h'. Если

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x + \alpha y + c_2$$

— ортогональное преобразование I рода, переводящее h в h_1', то

$$x' - x_0' = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0),$$
$$y' - y_0' = \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0),$$
$$m' = \alpha m - \beta n,$$
$$n' = \beta m + \alpha n,$$

откуда

$$n'(x' - x_0') - m'(y' - y_0') = n(x - x_0) - m(y - y_0). \qquad (\alpha)$$

Если же h переводится в h' с помощью преобразования II рода

$$x' = \alpha x + \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x - \alpha y + c_2,$$

то

$$n'(x' - x_0') - m'(y' - y_0') = -n(x - x_0) + m(y - y_0). \qquad (\beta)$$

Из равенств (α) и (β) непосредственно вытекает указанное выше свойство ортогональных преобразований. Вместе с тем сразу же проверяется первое требование аксиомы III.4 в рассматриваемой реализации.

В самом деле, как мы уже знаем, существует одно ортогональное преобразование I рода и одно II рода, переводящее сторону h угла $\angle(h,k)$ в полупрямую h'. Из этих двух преобразований только одно переводит полупрямую k в полупрямую k', лежащую в заранее назначенной полуплоскости, ограниченной прямой $\bar{h}'$.

Итак, с каждой стороны от прямой $\bar{h}'$ лежит точно одна полупрямая k', которая вместе с h' определяет $\angle(h',k')$ такой, что $\angle(h,k) \equiv \equiv \angle(h',k')$.

Остальные два требования аксиомы III.4 проверяются еще более просто.

Соотношение $\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$ имеет место, так как существует ортогональное преобразование, оставляющее h и k на своих местах. Таковым является тождественное преобразование

$$x' = x,$$
$$y' = y.$$

Соотношение $\angle(h,k) \equiv \angle(k,h)$ имеет место, так как существует ортогональное преобразование, переводящее h в k и k в h.

Именно, если (x_0, y_0) — вершина угла, а m_1, n_1 и m_2, n_2 — нормированные параметры полупрямых h и k, то таким преобразованием (II рода) является

$$\begin{aligned} x' &= (m_1m_2 - n_1n_2)x + (n_1m_2 + m_1n_2)y + \\ &\quad + [x_0 - (m_1m_2 - n_1n_2)x_0 - (n_1m_2 + m_1n_2)y_o], \\ y' &= (n_1m_2 + m_1n_2)x - (m_1m_2 - n_1n_2)y + \\ &\quad + [y_0 - (n_1m_2 + m_1n_2)x_0 + (m_1m_2 - n_1n_2)y_o]. \end{aligned}$$

Действительно, по этим формулам получаем $x_0' = x_0, y_0' = y_0$, а по формулам (II*) при данных значениях α и β имеем $m_1' = m_2$, $n_1' = n_2$ и $m_2' = m_1$, $n_2' = n_1$.

Тем самым проверены все требования аксиомы III.4.

Рассмотрим, наконец, требования аксиомы III.5: если ABC и $A'B'C'$ — два треугольника, то из соотношений $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ должны вытекать соотношения $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ и $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

Эти требования в нашей реализации удовлетворены. В самом деле, на основании изложенного раньше мы можем утверждать, что при условии $AB \equiv A'B'$ существуют два ортогональных преобразования (одно I и одно II рода), переводящие точку A в точку A' и точку B в точку B'. Вследствие соотношения $\angle BAC = \angle B'A'C'$ одно из них переводит полупрямую AC в полупрямую $A'C'$, а так как $AC \equiv A'C'$, то это же преобразование переводит точку C в точку C'. Следовательно, существует ортогональное преобразование, переводящее точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'; отсюда $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ и $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

Мы убедились, таким образом, что данное нами определение конгруэнтности отрезков и углов удовлетворяет требованиям всех аксиом третьей группы.

Перейдем к аксиомам непрерывности IV.1–IV.2. В нашем списке аксиом четвертую группу составляют аксиома Архимеда и аксиома Кантора. Мы могли бы проверить требования этих аксиом непосредственно, как это делали по отношению к группам I, II, III. Однако проще поступить иным способом. Используем теорему 41 n° 23, с помощью которой устанавливается эквивалентность (при выполнении аксиом групп I–III) аксиом IV.1 и IV.2 принципу Дедекинда. В силу этой теоремы для наших целей достаточно установить, что в арифметической реализации в множестве точек каждой прямой осуществляется принцип Дедекинда. Но это обстоятельство очевидно. В самом деле, пусть $(u : v : w)$ — какая-нибудь прямая, причем, например, $v \neq 0$; будем считать, что на этой прямой точка (x_1, y_1) предшествует точке (x_2, y_2), если $x_1 < x_2$. В таком случае, производя любое дедекиндово сечение в множестве точек (x, y) прямой $(u : v : w)$, мы одновременно производим дедекиндово сечение в множестве вещественных чисел $\{x\}$. Так как в множестве вещественных чисел имеет место принцип Дедекинда, то существует число $\bar{x}$, производящее сечение, т. е. замыкающее один из классов. Положим

$$\bar{y} = \frac{-u\bar{x} - w}{v}.$$

Очевидно, точка $(\bar{x}, \bar{y})$ лежит на прямой $(u : v : w)$ и замыкает один из классов дедекиндова сечения на этой прямой. Таким образом, для каждого дедекиндова сечения в множестве точек любой прямой существует точка, производящая это сечение. Иначе говоря, на всех прямых осуществляется принцип Дедекинда. Из теоремы 41 n° 23 следует тогда, что требования аксиом непрерывности IV.1 и IV.2 в арифметической реализации удовлетворены.

Нам остается рассмотреть аксиому параллельности V.

Пусть $(u : v : w)$ — произвольная прямая, (x_0, y_0) — точка, расположенная вне этой прямой, т. е. удовлетворяющая условию

$$ux_0 + vy_0 + w \neq 0.$$

Мы должны выяснить, существует ли только одна прямая, проходящая через точку (x_0, y_0) и не имеющая общих точек с прямой

$(u : v : w)$, т.е. параллельная ей, или таких прямых имеется множество.

Обозначим через $(u' : v' : w')$ одну из этих прямых. Величины u', v', w' должны удовлетворять двум условиям: во-первых, должно иметь место равенство

$$u'x_0 + v'y_0 + w' = 0, \tag{$*$}$$

так как прямая $(u' : v' : w')$ проходит через точку (x_0, y_0); во-вторых, система двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} u'x + v'y + w' = 0,\\ ux + vy + w = 0 \end{aligned}\right\} \tag{$**$}$$

должна быть несовместимой, так как две прямые $(u' : v' : w')$ и $(u : v : w)$ не имеют общих точек. В случае несовместимости системы $(**)$ необходимо должно быть $u' : u = v' : v$, или, если обозначить через μ каждое из этих равных отношений,

$$u' = \mu u, \quad v' = \mu v.$$

Из $(*)$ тотчас найдем:

$$w' = -\mu(ux_0 + vy_0).$$

Отсюда

$$u' : v' : w' = u : v : -(ux_0 + vy_0),$$

и, следовательно, отношения $u' : v' : w'$ вполне определены, т.е. существует точно одна прямая, проходящая через (x_0, y_0) и параллельная произвольно заданной прямой $(u : v : w)$.

Таким образом, в нашей реализации свойства параллельности удовлетворяют условию аксиомы V.

Итак, *нами указана некоторая конкретная реализация системы аксиом* I–V, *следовательно, эта система непротиворечива.*

Так как эта реализация основана на понятии вещественного числа, то указанный результат имеет условный характер и может быть формулирован следующим образом:

Система аксиом I–V *свободна от противоречий, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.*

Доказательство непротиворечивости арифметики выходит из рамок оснований геометрии, и этот вопрос мы оставим в стороне.

Заметим в заключение, что все соотношения, которыми мы пользовались в этом параграфе, возникают в аналитической геометрии при использовании декартовой ортогональной системы координат. Поэтому рассмотренную реализацию мы будем иногда называть *декартовой.*

Поставив себе целью построить конкретную реализацию гильбертовых аксиом, мы заимствовали объекты реализации из арифметики и, шаг за шагом проверяя требования аксиом, убедились, что все данные нами определения подчиняются этим требованиям. Так как при этом всякие ссылки на геометрическую наглядность были исключены в силу чисто арифметической природы выбранных объектов, то проведенное исследование оказалось довольно хлопотливым. Мы провели его со всей подробностью, так как оно является весьма важным, позволяя утверждать непротиворечивость гильбертовой аксиоматики (вернее, свести вопрос к непротиворечивости арифметики).

Кроме того, как увидит читатель в ближайших параграфах, некоторые видоизменения арифметической реализации позволят решить ряд вопросов о взаимной независимости аксиом I–V.

§ 3. Доказательство независимости некоторых аксиом евклидовой геометрии

72. В n° 69 мы отметили проблему минимальности как одну из существенных проблем аксиоматики. Чтобы решить эту проблему полностью, нужно доказать, что каждое требование принятых аксиом является независимым от остальных, т. е. что число требований не может быть уменьшено. Такое исследование требует большой затраты времени и было бы в нашей книге неуместно. Мы ограничимся доказательством независимости некоторых из аксиом I–V от остальных аксиом этой системы.

Прежде всего мы можем утверждать, что аксиома V о параллельных не является следствием аксиом I–IV. Вопрос о независимости V аксиомы уже решен нами, и к нему мы возвращаться больше не будем.

Сейчас мы займемся доказательством независимости аксиом непрерывности группы IV.

В первую очередь докажем, что аксиома Кантора IV.2 не вытекает из остальных аксиом (включая и аксиому Архимеда IV.1). Согласно общему принципу подобных доказательств (n° 69), мы должны построить некоторое множество объектов и определить взаимные отношения между ними так, чтобы эти отношения удовлетворяли требованиям всех аксиом, кроме аксиомы Кантора.

Следуя Гильберту, мы используем для этой цели бесконечное множество Ω чисел, которые можно получить, исходя из рациональных, многократным повторным применением операций сложения, вычитания, умножения, деления и, кроме того, пятой операции $\sqrt{1+\omega^2}$, где ω — число, полученное уже с помощью этих операций. Очевидно, имеет место следующее свойство множества Ω: если ω_1 и ω_2 — любые два числа из Ω, то $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$, $\omega_1\omega_2$, $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ (при $\omega_2 \neq 0$)

и $\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2} = \pm\omega_1\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}$ (при $\omega_1 \neq 0$) суть также числа из множества Ω.

Теперь мы определим геометрические объекты: точкой назовем любую пару чисел (x, y), принадлежащих множеству Ω, прямой — отношение $(u : v : w)$ трех чисел этого же множества, предполагая хотя бы одно из двух чисел u и v не равным нулю.

Все взаимные отношения объектов (принадлежность точек прямым, конгруэнтность и т. д.) мы определим в точности так же, как это делали в n° 71 при построении декартовой реализации аксиом I–V, причем, однако, коэффициенты формул ортогонального преобразования будем брать теперь только из множества Ω. Проверяя требования аксиом I, II, III, V, мы употребляли там только сравнение чисел по величине, арифметические операции (сложения, вычитания, умножения, деления) и операцию извлечения квадратного корня из суммы квадратов двух чисел (последняя операция употреблялась при нормировании параметров полупрямой). Как было замечено выше, эти операции в применении к числам множества Ω дают снова числа множества Ω. Поэтому все те заключения, которые мы делали при проверке требований аксиом I, II, III, V в декартовой реализации, остаются в силе и сейчас, когда мы ограничиваем выбор употребляемых чисел множеством Ω. Следовательно, можно утверждать, что в нашей новой реализации требования аксиом I, II, III, V удовлетворены.

Иначе дело обстоит с аксиомами группы IV. Проверим отдельно требования аксиомы Архимеда IV.1 и аксиомы Кантора IV.2. Прежде всего заметим, что с помощью конгруэнтного перенесения (в нашей реализации — с помощью ортогонального преобразования) каждую полупрямую можно наложить на любую данную полупрямую. Поэтому достаточно проверить условие Архимеда на какой-нибудь одной прямой. Проще всего для этого выбрать ось x, т. е. прямую, содержащую точки вида $(x, 0)$. Очевидно, что точки $A_0(0,0), A_1(a,0), A_2(2a,0), \ldots, A_n(na,0), \ldots$, где $a > 0$, определяют серию конгруэнтных друг другу отрезков $A_0A_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv A_nA_{n+1} \equiv \ldots$ В самом деле, существует ортогональное преобразование, а именно:

$$x' = x + a,$$
$$y' = y,$$

отображающее каждый из этих отрезков на соседний справа. Пусть $B(b, 0)$ — какая угодно точка, удовлетворяющая лишь условию $b > a$. Для того чтобы в нашей реализации осуществлялась аксиома Архимеда, должно существовать такое целое положительное число n, что B лежит между A_0 и A_n. Точки A_0, B, A_n будут расположены в указанном порядке, если $na > b$. Но в арифметике предложение Архимеда справедливо: каковы бы ни были числа $a > 0, b > 0, b > a$, существует такое целое n, что $na > b$. Следовательно, предложение Архимеда имеет место и в рассматриваемой нами реализации.

Напротив, требования аксиомы Кантора в этой реализации не удовлетворены. В самом деле, если в системе точек и прямых, наряду с аксиомами I, II, III, IV.1, V, реализуется также аксиома Кантора IV.2, то можно доказать, что в этой системе всегда можно найти отрезок, длина которого равна любому заранее назначенному числу (см. главу II, n° 21, теорему 35). В нашей реализации, однако, длины всех отрезков выражаются только числами из множества Ω.

Мы приходим, таким образом, к заключению: существует система объектов, взаимные отношения которых удовлетворяют требованиям аксиом I–III, IV.1, V, но не удовлетворяют требованиям аксиомы Кантора IV.2. Иначе говоря, *аксиома Кантора не является следствием остальных аксиом элементарной геометрии.*

Если принять во внимание, что множество Ω счетно, то полученный результат можно высказать еще в иной форме: *несчетность множества элементов геометрии не может быть установлена с помощью одних лишь аксиом* I–III, IV.1, V *без аксиомы Кантора.*

73. Теперь мы докажем, что и первая аксиома четвертой группы, т. е. аксиома Архимеда, не зависит от аксиом остальных групп I, II, III, V.

Для этого нам придется найти реализацию аксиом I, II, III, V, в которой предложение Архимеда не имеет места. Такая реализация существует и будет указана ниже. Как и только что рассмотренная, она базируемся на арифметике, только на арифметике в некотором обобщенном смысле, относящейся к так называемой неархимедовой системе чисел.

Чтобы дальнейшее стало вполне отчетливым, перечислим основные предложения о свойствах вещественных чисел (будем называть их аксиомами арифметики).

1. Существует операция "сложение", посредством которой из числа a и числа b получается определенное число c; в символической записи:

$$a + b = c.$$

2. Существует другая операция — "умножение", посредством которой из числа a и числа b получается определенное число d; в символической записи:

$$ab = d.$$

3. Если a, b, c — произвольные числа, то имеют место соотношения:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$
$$a + b = b + a,$$
$$a(bc) = (ab)c,$$
$$a(b + c) = ab + ac,$$
$$ab = ba.$$

4. (Определение разности.) Если a и b — данные числа, то существует одно и только одно число x такое, что $a + x = b$.

Из аксиом 3 и 4 следует, что существует одно и только одно число — оно называется нулем и обозначается через 0 — такое, что для каждого числа a имеет место соотношение

$$a + 0 = a.$$

5. (Определение частного.) Если a и b — данные числа и $a \neq 0$, то существует одно и только одно число x такое, что $ax = b$.

Из аксиом 3 и 5 следует, что существует одно и только одно число — оно называется единицей и обозначается через 1 — такое, что

$$a \cdot 1 = a.$$

6. (Свойство упорядоченности.) Если a и b — два различных числа, то всегда одно из них больше ($>$) другого, тогда второе меньше ($<$) первого. В символической записи:

либо

$$a > b \quad \text{и} \quad b < a,$$

либо

$$b > a \quad \text{и} \quad a < b.$$

При этом если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Если $a > b$, то $a + c > b + c$. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$. Ни для одного a не имеет места соотношение $a > a$.

7. (Предложение Архимеда.) Если a и b — два произвольных положительных числа ($a > 0$ и $b > 0$), то всегда можно взять число a слагаемых столько раз, что полученная сумма будет больше числа b:

$$a + a + \ldots + a > b.$$

8. Предложение Кантора (или любое другое эквивалентное ему предложение).

Все эти предложения применимы к множеству вещественных чисел и арифметическим действиям над ними. Составляют ли перечисленные предложения 1–8 полную систему аксиом арифметики, т. е. можно ли, исходя из них, доказать любую арифметическую теорему, — для нас несущественно. Но в результате внимательного анализа тех рассуждений и вычислений, которые мы проводили, проверяя требования геометрических аксиом в декартовой реализации, можно было бы убедиться, что при этом мы использовали только свойства чисел, выраженные предложениями 1–8. Ввиду этого представляется возможным исходить из аксиоматической точки зрения на понятие числа и тем самым существенно расширить класс объектов арифметической реализации. В нашем исследовании такая возможность сыграет важную роль.

Вообразим себе некоторое множество A, природа элементов которого для нас безразлична. Пусть с каждой парой элементов a, b множества A (b может совпадать с a) сопоставлен элемент c этого же множества. Условимся это сопоставление называть сложением, а элемент c — суммой элементов a и b; для обозначения суммы будем употреблять обычную запись: $c = a + b$. Пусть, далее, с каждой парой элементов a, b множества A (b может совпадать с a) сопоставлен иным способом элемент d этого множества. Второе сопоставление назовем умножением, а элемент d — произведением элементов a и b и будем писать: $d = ab$.

Наконец, предположим, что элементы множества A рассматриваются расположенными в известном порядке, т. е. каковы бы ни были два элемента a и b, один определенный из них считается предшествующим второму; условимся говорить, что предшествующий элемент "меньше" следующего за ним.

Мы будем называть элементы множества A обобщенными числами, если действия сложения и умножения, а также порядок расположения элементов определены таким образом, что при этом имеют место все обстоятельства, указанные в предложениях 1–8.

Представим себе теперь, что мы определяем геометрические объекты и их взаимные отношения в точности так, как это делалось при построении декартовой реализации, но вместо обычных чисел берем обобщенные. Очевидно, мы получим некоторую реализацию геометрических аксиом I–V, какой бы ни была природа употребляемых обобщенных чисел. Совершенно ясно, что таким образом построенные реализации несущественно отличаются от декартовой. Действительно, хотя при конструировании геометрических объектов мы разрешаем себе употреблять элементы произвольной природы, но действия с этими элементами подчиняем правилам обычной арифметики.

Однако возможно дальнейшее обобщение понятия числа, которое оказывается уже полезным и позволяет решить поставленную задачу: доказать независимость аксиомы Архимеда от аксиом I, II, III, V. Пусть дано некоторое множество A, для элементов которого определены действия сложения и умножения и установлен порядок; мы назовем множество A неархимедовой системой чисел (обобщенных), если по отношению к нему окажутся справедливыми предложения 1–6, но предложение 7 Архимеда будет неверным.

Сейчас мы дадим описание одной из неархимедовых систем.

Рассмотрим множество всевозможных рациональных функций вида

$$\omega(t) = \frac{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m}$$

с вещественными коэффициентами a_k, b_k. К этому множеству мы присоединим еще все функции, получающиеся, исходя из рациональных, многократным повторным применением операций сложения, вычитания умножения, деления и пятой операции $\sqrt{1+\omega^2(t)}$, где $\omega(t)$ — функция, полученная уже с помощью этих операций. Построенное таким путем множество функций обозначим через $\Omega(t)$. Очевидно, $\Omega(t)$ содержит все рациональные функции и, в частности, функции вида $\omega(t) = \mathrm{const}$, т. е. функции, которые при изменении t остаются постоянно равными некоторому числу.

Мы желаем элементы множества $\Omega(t)$ рассматривать как обобщенные числа. Для этого нам придется прежде всего определить смысл операций сложения и умножения. Возьмем какие-нибудь две функции $a(t)$ и $b(t)$ из $\Omega(t)$; условливаясь считать их обобщенными числами, мы изменим вид записи и вместо $a(t), b(t)$ будем писать просто a и b. Ясно, что $a(t) + b(t) = c(t)$ есть функция из множества $\Omega(t)$ и аналогично $a(t)b(t) = d(t)$. Поэтому $c(t)$ и $d(t)$ тоже являются обобщенными числами c и d; первое из них мы будем называть суммой чисел a и b, второе — произведением этих чисел. Так как при каждом значении действия $a(t) + b(t)$ и $a(t)b(t)$ производятся по обычным правилам арифметики, то определенные сейчас нами действия сложения и умножения обобщенных чисел удовлетворяют требованиям предложений 1–5. При этом нулем в рассматриваемой системе обобщенных чисел является функция, тождественно равная обыкновенному нулю, обобщенной единицей является функция, тождественно равная обыкновенной единице.

Поскольку в данной системе обобщенных чисел соблюдаются предложения 1–5, все четыре арифметических действия оказываются определенными. Заметим, что в нашей системе определена еще операция $\sqrt{a^2+b^2}$; действительно, если $a(t)$ и $b(t)$ — две функции из $\Omega(t)$, то

$$\sqrt{a^2(t)+b^2(t)} = \pm a(t)\sqrt{1+\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)^2}$$

также есть функция из $\Omega(t)$. Эту функцию можно рассматривать как обобщенное число $\sqrt{a^2+b^2}$, которое определяется по двум данным числам a и b.

Теперь условимся относительно порядка в множестве $\Omega(t)$. Пусть $\omega(t)$ — произвольная функция из $\Omega(t)$, представляющая в нашей системе число ω. Если $\omega \neq 0$, т. е. если $\omega(t)$ не равняется тождественно нулю, то при достаточно большом t^* для любого $t > t^*$ функция $\omega(t)$ сохраняет определенный знак*). В том случае, когда для $t > t^*$ будет $\omega(t) > 0$, условимся считать обобщенное число ω положительным:

*) Это следует из алгебраичности функции $\omega(t)$ (всякая алгебраическая функция имеет конечное число перемен знака).

$\omega > 0$; если же для $t > t^*$ имеет место неравенство $\omega(t) < 0$, то будем считать $\omega < 0$. Разбив, таким образом, все обобщенные числа (кроме нуля) на положительные и отрицательные, мы введем сравнение чисел по величине с помощью обычного условия: считаем $a > b$, если $a - b > 0$.

Легко проверить, что все требования предложения 6 будут при этом удовлетворены.

Вместе с тем в нашей системе обобщенных чисел предложение 7 не имеет места; система, следовательно, является неархимедовой.

Чтобы убедиться в этом, лучше всего формулированный выше признак неравенства $a > b$ представить в следующей геометрической форме: $a > b$, если при $t \to +\infty$ график функции $a(t)$ поднимается выше графика функции $b(t)$. Как мы уже отмечали, среди элементов множества $\Omega(t)$ имеются функции, которые при изменении t сохраняют постоянное значение: $\omega(t) \equiv c$. Графиками таких функций являются прямые, параллельные оси t. Каждая функция $\omega(t) \equiv c$ представляет собой с нашей точки зрения обобщенное число; мы будем обозначать его просто через c, так что, если мы пишем 10 или 20, то имеем в виду функцию $\omega(t)$, тождественно равную 10 или 20. Возьмем две функции $a(t) \equiv 1$ и $b(t) \equiv t$, которые содержатся в множестве $\Omega(t)$ и, следовательно, могут быть рассматриваемы как обобщенные числа: a и b. Если число a сложить с самим собою n раз, то полученная сумма представляется в множестве $\Omega(t)$ функцией, график которой есть прямая, параллельная оси t и расположенная в положительной полуплоскости на расстояний n от этой оси. Графиком функции $b(t) \equiv t$ является биссектриса первого координатного угла. Но при $t \to +\infty$ график функции $b(t) \equiv t$ поднимается выше всякой прямой, параллельной оси t (рис. 86). Отсюда следует, что сколько бы раз мы ни складывали число a с самим собою, для полученной суммы всегда сохраняется неравенство

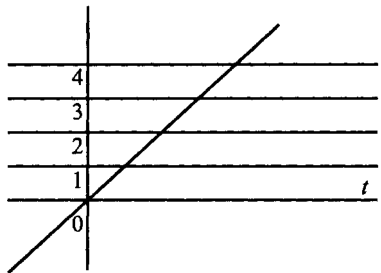


Рис. 86

$$a + a + \ldots + a < b.$$

Таким образом, в нашей системе обобщенных чисел предложение Архимеда не имеет места.

Теперь для нас не составит труда построить систему геометрических объектов, в которой осуществляются аксиомы I, II, III, V, но в которой неверна аксиома Архимеда.

Назовем точкой пару чисел (x, y) из неархимедовой системы $\Omega(t)$, прямой — отношение $(u : v : w)$ трех чисел u, v, w из системы $\Omega(t)$, удовлетворяющих единственному условию, чтобы хоть одно из двух чисел u, v было отличным от нуля. Все взаимные отношения между геометрическими объектами определим в точности так, как мы делали в декартовой реализации гильбертовых аксиом. В системе $\Omega(t)$ определены действия сложения и умножения элементов, а также соотношения "больше" и "меньше" в соответствии с требованиями аксиом арифметики 1–6. Кроме того, для любых элементов a и b определена операция $\sqrt{a^2+b^2}$. Поэтому все рассуждения и вычисления, которые мы проводили, проверяя выполнение требований аксиом I, II, III, V в декартовой реализации, можно полностью повторить сейчас, когда мы вместо обыкновенных чисел употребляем обобщенные числа из системы $\Omega(t)$. Таким образом, в реализации, которую мы сейчас построили, требования аксиом I, II, III, V удовлетворены. Вместе с тем предложение Архимеда IV.1 в этой реализации не имеет места, так как система чисел $\Omega(t)$ неархимедова. Отсюда следует, что аксиома Архимеда не зависит от аксиом I, II, III, V.

Резюмируя изложенное, мы можем высказать следующее предложение:

Опираясь на аксиомы I, II, III, V, *нельзя доказать аксиому Архимеда* IV.1.

Опираясь на аксиомы I, II, III, IV.1, V, *нельзя доказать аксиому Кантора* IV.2.

Естественно поставить вопрос, не вытекает ли аксиома Архимеда из остальных аксиом, включая и аксиому Кантора? И на этот вопрос нужно ответить отрицательно.

Чтобы убедиться в этом, следует построить такую неархимедову систему чисел, в которой предложение Кантора осуществляется.

Изложим пример такой системы*).

Условимся называть числом всякий степенной ряд

$$a_0t^n + a_1t^{n+1} + a_2t^{n+2} + \dots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots$ — любые обыкновенные вещественные числа, n — любое обыкновенное целое число (положительное, отрицательное или нуль). Обыкновенные вещественные числа мы включим в рассматриваемую систему в качестве рядов вида

$$a + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$$

Нулем назовем ряд

$$0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$$

Если число

$$a_0t^n + a_1t^{n+1} + \dots$$

— не нуль, то мы будем полагать, что обыкновенное число a_0 не равно нулю.

*) На этот пример обратил мое внимание А. Н. Колмогоров

Действия сложения и умножения пусть совпадают с формальными операциями сложения и умножения степенных рядов (т. е. суммою двух чисел нашей системы, представленных какими-либо степенными рядами, назовем степенной ряд, получаемый путем сложения подобных членов рядов, представляющих слагаемые; произведением двух чисел нашей системы, представленных некоторыми степенными рядами, назовем степенной ряд, который получается путем почленного перемножения рядов, представляющих сомножители, с последующим приведением подобных членов и расположением приведенных членов в порядке возрастания степени их аргумента t).

Нетрудно убедиться, что при этом аксиомы арифметики 1–5 будут удовлетворены. Кроме того, в нашей системе будет определена операция $\sqrt{1+\omega^2}$, где ω — любое число системы; разыскание частного $x = \frac{b}{a}$ при условии $a \neq 0$ приводится к последовательному установлению заранее неизвестных коэффициентов ряда x путем сравнения членов левой и правой частей уравнения

$$ax = b;$$

разыскание числа

$$x = \sqrt{1+\omega^2}$$

проводится аналогично при помощи уравнения

$$x^2 = 1 + \omega^2.$$

Теперь введем в множество наших чисел порядок. Условимся число

$$a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + \ldots ,$$

$a_0 \neq 0$, называть положительным (бóльшим нуля), если $a_0 > 0$, отрицательным (меньше нуля), если $a_0 < 0$. Если a и b — два числа нашей системы, условимся считать $a > b$ в случае $a - b > 0$ и $a < b$ в случае $a - b < 0$. Установленный порядок удовлетворяет требованиям аксиомы арифметики 6.

Убедимся, что в нашей системе имеет место предложение Кантора. Пусть дана монотонно возрастающая последовательность чисел нашей системы

$$a^{(m)} = a_0^{(m)} t^{p_m} + \ldots , \quad m = 1, 2, \ldots ,$$

и монотонно убывающая последовательность

$$b^{(m)} = b_0^{(m)} t^{q_m} + \ldots , \quad m = 1, 2, \ldots ,$$

причем: 1) любое число последовательности $a^{(m)}$ меньше любого числа последовательности $b^{(m)}$; 2) каким бы ни было положительное число ε (из нашей системы), найдем номер m, для которого

$$b^{(m)} - a^{(m)} < \varepsilon.$$

Докажем, что существует (единственное) число нашей системы, лежащее внутри всех отрезков $(a^{(m)}, b^{(m)})$.

Прежде всего заметим, что обыкновенные числовые последовательности p_m и q_m $(m = 1, 2, \dots)$ ограничены снизу. В самом деле, если среди обыкновенных чисел p_m имеются числа, расположенные сколь угодно далеко слева от нуля, то из последовательности степеней p_m можно выбрать подпоследовательность, монотонно стремящуюся к отрицательной бесконечности; соответствующие начальные коэффициенты должны быть положительны, иначе нарушится условие монотонного роста последовательности чисел нашей системы $a^{(m)}$. Но в таком случае одно из чисел $a^{(m)}$ превысит некоторое из чисел $b^{(m)}$, что невозможно.

Аналогично доказывается ограниченность снизу чисел q_m. Мы можем, следовательно, формально считать, что все ряды, представляющие $a^{(m)}$ и $b^{(m)}$ начинаются с членов одной и той же степени (допуская на время этого доказательства нулевые значения для начальных коэффициентов).

Запишем теперь эти ряды так:

$$a^{(m)} = a_0^{(m)} t^n + a_1^{(m)} t^{n+1} + \dots,$$
$$b^{(m)} = b_0^{(m)} t^n + b_1^{(m)} t^{n+1} + \dots$$

Легко понять, что, начиная с некоторого $m = m_1$ неотрицательная разность $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ должна сделаться равной нулю. В самом деле, так как последовательность $a^{(m)}$ является возрастающей, то последовательность (обыкновенных) чисел $a_0^{(m)}$ должна быть неубывающей. Аналогично, вследствие убывания последовательности $b^{(m)}$ последовательность (обыкновенных) чисел $b_0^{(m)}$ должна быть невозрастающей. Таким образом, разность (обыкновенных чисел) $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ не может возрастать. Значит, либо разность $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ все время положительна, либо она для некоторого номера равна нулю и тогда уже остается равной нулю для всех последующих номеров. Допустим, что все время

$$b_0^{(m)} - a_0^{(m)} > 0;$$

возьмем в нашей системе положительное число

$$\varepsilon = t^{n+1} + \dots$$

Тогда для любого номера будет

$$b^{(m)} - a^{(m)} > \varepsilon$$

вопреки условию. Таким образом, разность $b^{(m)} - a^{(m)}$ оставаться положительной не может.

Итак, начиная с некоторого $m = m_1$,

$$b_0^{(m)} - a_0^{(m)} = 0.$$

Так как последовательность обыкновенных чисел $a_0^{(m)}$ — монотонно неубывающая, а последовательность обыкновенных чисел $b_0^{(m)}$ — монотонно невозрастающая, то, начиная с $m = m_1$, числа $a_0^{(m)}$ и $b_0^{(m)}$ становятся неизменными и одинаковыми; положим $a_0^{(m_1)} = b_0^{(m_1)} = d_0$. Мы имеем

$$a_0^{(m)} \leq d_0 \leq b_0^{(m)}.$$

При $m \geq m_1$ аналогичные рассуждения применимы к последовательностям обыкновенных чисел $a_1^{(m)}$, $b_1^{(m)}$; точно так же мы установим, что существует число d_1, которое при $m \geq m_1$ удовлетворяет неравенствам

$$a_1^{(m)} \leq d_1 \leq b_1^{(m)},$$

причем, начиная с некоторого $m = m_2$ $(m_2 \geq m_1)$, исчезает разность $b_1^{(m)} - a_1^{(m)}$ и т. д.

Число $d = d_0 t^n + d_1 t^{n+1} + \ldots$ лежит внутри всех отрезков $\left(a^{(m)}, b^{(m)}\right)$. Тем самым утверждение аксиомы Кантора для нашей системы чисел доказано (единственность числа d вытекает сразу из второго условия в формулировке аксиомы Кантора).

В рассмотренной системе чисел не имеет места предложение Архимеда.

В самом деле, возьмем два положительных числа

$$a = t + 0 \cdot t^2 + \ldots,$$
$$b = t^2 + 0 \cdot t^3 + \ldots;$$

при любом натуральном n имеем:

$$nb < a,$$

т. е. требование аксиомы Архимеда нарушено.

В арифметической реализации гильбертовых аксиом, основанной на только что описанной системе чисел, имеет место предложение Кантора (и осуществляются также все аксиомы I, II, III, V), но не имеет места предложение Архимеда.

Мы можем, следовательно, утверждать:

Опираясь на аксиомы I, II, III, IV.2, V, *нельзя доказать аксиому Архимеда* IV.1.

Таким образом, обе аксиомы, составляющие группу аксиом непрерывности IV, являются существенными.

8 — 10891

Геометрическая система, которая может быть развита на основе аксиом I, II, III (или I, II, III, V) и в которой не имеет места принцип Архимеда, носит название *неархимедовой.* В неархимедовой геометрии процесс измерения длин к произвольным отрезкам неприменим; кроме того, многие предложения этой геометрии своеобразно отличаются как от предложений евклидовой геометрии, так и от предложений геометрии Лобачевского. Это не удивительно, так как аксиома Архимеда используется в доказательстве многих теорем. В частности, в неархимедовой геометрии неверны результаты Лежандра, устанавливающие зависимость между аксиомой о параллельных и предложением о сумме углов треугольника (подробнее об этом см. *Гильберт Д.* Основания геометрии).

§ 4. Аксиома полноты

74. В главе II свойства непрерывности выражены двумя аксиомами: аксиомой Архимеда IV.1 и аксиомой Кантора IV.2. В "Основаниях геометрии" Гильберта первая аксиома непрерывности, как и у нас в главе II, есть аксиома Архимеда, вторая аксиома непрерывности отличается от аксиомы Кантора и названа Гильбертом *аксиомой полноты.* Это предложение формулируется следующим образом.

Элементы (точка, прямые, плоскости) геометрий образуют систему объектов, которая при условии сохранения всех ранее принятых аксиом не допускает никакого расширения, т. е. система точек, прямых и плоскостей такова, что к ней невозможно присоединить новые точки, прямые и плоскости так, чтобы в новой расширенной системе были по-прежнему удовлетворены вместе все аксиомы I–III, IV.1, V.

Сохранение всех аксиом, о котором идет речь в этом предложении, нужно понимать так, что после расширения системы требования всех аксиом удовлетворяются, как и раньше, так что, в частности, существующие между элементами отношения, как-то: порядок их, конгруэнтность отрезков и углов и т. д. не нарушаются; так, например, точка, которая до расширения лежит между двумя точками, лежит между ними и после расширения; отрезки и углы, взаимно конгруэнтные раньше, остаются таковыми и после расширения. Чтобы пояснить смысл требования полноты системы элементов геометрии, сопоставим две реализации аксиом, которые мы рассматривали в *пп*° 71 и 72.

Первая из них есть декартова реализация, удовлетворяющая требованиям всех аксиом без исключения. В декартовой реализации *точкой* называется пара любых вещественных чисел (x, y), прямой — отношения трех вещественных чисел u, v, w, которые выбираются при единственном условии, что хотя бы одно из двух чисел u, v отлично от нуля. Взаимные отношения между объектами выражены в арифметических соотношениях, которые мы здесь повторять не станем.

Реализация, рассмотренная в n° 72, строится вполне аналогично декартовой. Здесь точка есть также пара вещественных чисел, прямая — отношение трех чисел; взаимные отношения между объектами определены точно такими же арифметическими соотношениями, как и в декартовой реализации. Но в этой реализации, в отличие от декартовой, объекты конструируются не из всех вещественных чисел, а только из чисел, принадлежащих некоторому множеству Ω, в свое время подробно описанному нами. Таким образом, совокупность объектов реализации, рассмотренной в n° 72, составляет часть совокупности объектов декартовой реализации, но и в той и в другой реализации удовлетворены требования аксиом I–III, IV.1, V.

Представим себе множество объектов, определенных с помощью чисел из Ω, как первоначально данное, а множество объектов декартовой реализации — как полученное в результате пополнения первого множества. Так как взаимные отношения объектов двух рассматриваемых реализаций выражаются одинаковыми арифметическими зависимостями (только в одном случае эти зависимости относятся ко всем вещественным числам, а в другом — к вещественным числам из некоторого множества), то при указанном пополнении все взаимные отношения между первоначально данными объектами сохраняются. Например, если A, B, C, D — четыре точки из первоначально данного множества и $AB \equiv CD$, то после прибавления новых элементов попрежнему остается $AB \equiv CD$. Кроме того, вполне определены как отношения между вновь введенными объектами и первоначальными, так и взаимные отношения между вновь введенными объектами, причем так, что удовлетворены требования всех первоначальных аксиом.

Следовательно, совокупность объектов, определенных описанным нами способом с помощью чисел из множества Ω, допускает как раз такое пополнение, невозможность которого требует аксиома полноты. Иначе говоря, эта совокупность объектов требованию полноты не удовлетворяет.

Естественно, что подобных систем объектов можно указать бесконечно много. Для этого лишь нужно соответствующим образом варьировать конструкцию того множества, из которого мы выбираем употребляемые числа. Так, например, вместо множества Ω можно положить в основу построения объектов множество чисел, выражающихся через радикалы, или еще более широкое множество всех алгебраических чисел и т. д. Среди арифметических реализаций, которые мы при этом получим, только одна декартова (основанная на множестве всех вещественных чисел) удовлетворяет требованию полноты. Чтобы убедиться в этом, нужно заметить, во-первых, что из всех арифметических реализаций только декартова удовлетворяет требованию аксиомы Кантора (или условию Дедекинда) и, во-вторых, что из аксиомы Кантора при наличии остальных аксиом следует предложение полноты. Первое из этих обстоятельств не нуждается в доказательстве; действительно, в декартовой реализации удовлетворена аксиома Кантора, как было показано ранее; с другой стороны, аксиома Кантора удовлетворена только в декартовой реализации среди всех арифметических, так как условие Кантора (или Дедекинда) не выполняется для любого числового множества, не содержащего хотя бы одно число.

Второе обстоятельство мы докажем. При этом будет показано не только то, что из аксиомы Кантора при наличии остальных аксиом вытекает предложение полноты, но и обратно, что утверждение аксиомы Кантора может быть доказано, если к остальным аксиомам прибавить еще условие полноты. Высказанные утверждения мы сформулируем подробно следующим образом.

Если система элементов геометрии удовлетворяет требованиям аксиом I–V, *то эта система не может быть расширена с соблюдением условий предложения полноты, т. е. предложение полноты вытекает из аксиом* I–V. *Если система элементов геометрии удовлетворяет требованиям аксиом* I–III, IV.1, V *и условию полноты, то в этой системе имеет место предложение Кантора, т. е. предложение Кантора вытекает из аксиом* I–III, IV.1, V *и аксиомы полноты.*

Докажем сначала первую часть этого предложения. Обозначим через Σ множество элементов геометрии, т. е. систему точек, прямых и плоскостей, взаимные отношения которых удовлетворяют аксиомам I–V. Допустим, что множество Σ может быть расширено путем введения новых элементов с соблюдением условий, указанных в формулировке предложения полноты. Пусть Σ' обозначает совокупность элементов, полученную после расширения. Взаимные отношения элементов расширенной совокупности также удовлетворяют аксиомам I–V. В n° 22 мы доказали, что, опираясь на аксиомы I–III, IV.1, можно установить арифметизацию элементов геометрии так, что при этом каждая точка получит в качестве своих координат вполне определенную тройку чисел (x, y, z) и никакая тройка чисел не будет соответствовать разным точкам. Введём координаты в множестве Σ', причем в качестве единицы измерения длин выберем отрезок, концы которого принадлежат множеству Σ. Предположим, что Σ' имеет точки, не содержащиеся в Σ. Пусть M' — одна из таких точек, (x, y, z) — ее координаты. По условию, первоначальное множество элементов Σ удовлетворяет требованиям аксиом I–V. Вследствие этого и в силу теоремы 35 n° 21 среди точек множества Σ всегда можно найти такую, которая имеет наперед назначенные координаты. Пусть M — точка из множества Σ с координатами (x, y, z). Так как M' не входит в Σ, то M' и M не могут совпадать. Таким образом, тройка чисел (x, y, z) соответствует двум различным точкам M и M'. Полученное противоречие убеждает нас в том, что Σ' не имеет точек сверх тех, какие содержатся уже в Σ.

Предположим, что Σ' имеет прямые, не содержащиеся в Σ. Пусть a' — одна из таких прямых. Согласно аксиоме I.3 прямая a' имеет, по крайней мере, две точки A и B. Эти точки принадлежат Σ, так как Σ' новых точек не содержит. Но множество Σ само по себе является реализацией аксиом I–V. Поэтому пара точек A и B определяет некоторую прямую a, принадлежащую Σ. Так как a' не входит в Σ, то a' и a не могут совпадать. Таким образом, точки A и B определяют две различные прямые вопреки аксиоме I.2. Полученное противоречие показывает, что Σ' не имеет прямых сверх тех, которые уже содержатся в Σ. Точно так же докажем, что Σ' не содержит и новых плоскостей. Тем самым мы доказали, что Σ не допускает расширения, т. е. удовлетворяет требованию полноты.

Теперь мы докажем вторую часть предложения. При этом для простоты ограничимся рассмотрением геометрии только на плоскости. Пусть на этот раз Σ обозначает множество точек и прямых, по отношению к которому выполнены требования аксиом I–III, IV.1, V. Аксиому Кантора IV.2 мы заранее не принимаем, но вместо этого предполагаем, что множество Σ удовлетворяет условию полноты.

Мы должны получить предложение Кантора как следствие принятых допущений. Для этого введем в множестве Σ координатную систему так, как мы это делали в n° 22, выбирая произвольным образом две взаимно перпендикулярные прямые и отрезок в качестве единицы масштаба. Тогда каждой точке будет соответствовать пара координат (x, y). Если бы мы могли опираться на аксиому Кантора, то в силу теоремы 35 n° 21 мы могли бы также утверждать, что координаты точек множества Σ исчерпывают все возможные пары чисел. Не имея в своем распоряжении аксиомы Кантора, мы постараемся, однако, доказать справедливость этого утверждения, основываясь на аксиоме полноты. После этого непосредственно можно будет установить, что в множестве Σ имеет место принцип Кантора.

Для точек и прямых множества Σ справедливы все теоремы евклидовой геометрии, за исключением, быть может, некоторых теорем, относящихся к свойствам непрерывности (так как среди принятых аксиом нет аксиомы IV.2). Во всяком случае выбранная нами координатная система будет обладать основными особенностями декартовой системы координат. В этой системе прямая определится уравнением первой степени

$$ux + vy + w = 0$$

и, таким образом, каждой прямой будет соответствовать отношение трех чисел $(u : v : w)$. Используя обычный аппарат аналитической геометрии, мы сможем все взаимные отношения между точками и прямыми множества Σ, о которых идет речь в аксиомах I–III, IV.1, V, охарактеризовать арифметическими зависимостями, содержащими координаты x, y точек и коэффициенты u, v, w уравнений прямых. Очевидно, что формы этих зависимостей будут тождественны тем, какие употреблялись нами при описании декартовой реализации геометрических аксиом. Предположим теперь, что существуют пары чисел (x, y), которые не являются парами координат точек из Σ, и отношения $(u : v : w)$, которые не являются отношениями коэффициентов уравнений прямых из Σ. В этом случае, как мы сейчас покажем, множество элементов геометрии Σ можно расширить, соблюдая условия, указанные в формулировке предложения полноты.

Прибавим к множеству Σ новые точки и прямые, определяя их следующий образом: новая точка есть всякая пара чисел (x, y), не являющаяся парой координат какой-нибудь точки из Σ; новая прямая есть отношение всяких трех чисел $(u : v : w)$, таких, что хотя бы одно из двух чисел u, v не равно нулю и эти числа u, v, w не являются коэффициентами уравнения какой-нибудь прямой из Σ. Полученное после расширения множество точек и прямых обозначим через Σ'. Точки и прямые множества Σ' однозначно определяются соответственно парами чисел (x, y) и отношениями трех чисел $(u : v : w)$, причем в качестве этих арифметических представителей элементов Σ встретятся уже всевозможные комбинации всех вещественных чисел.

Все взаимные отношения элементов Σ' мы определим в точности такими арифметическими зависимостями, какие нам встречались в описании декартовой реализации. Очевидно, тогда для точек и прямых множества Σ' будут выполнены условия аксиом I–III, IV.I, V, поскольку эти условия в декартовой реализации выполняются. Кроме того, из предыдущих наших замечаний следует, что взаимные отношения между элементами множества Σ', принадлежащими множеству Σ, не отличаются от тех, которые первоначально имелись между элементами Σ до расширения. В самом деле, эти взаимные отношения и до и после расширения характеризуются одинаковыми арифметическими зависимостями. Таким образом, множество Σ расширено с соблюдением требований, указанных в формулировке предложения полноты. Но так как предложение полноты принято нами, а оно исключает возможность подобного расширения, то мы должны заключить, что в качестве координат (x, y) точек данного нам множества Σ должны быть все возможные пары вещественных чисел. Но в таком случае каждую прямую из Σ можно рассматривать как числовую ось, точки которой изображают все вещественные числа. Поскольку принцип Кантора имеет место в множестве вещественных чисел, он должен иметь место и в множестве точек каждой прямой из Σ.

Подведем итог нашего исследования.

Мы доказали, что при наличии аксиом I–III, IV.1, V непрерывность множества элементов геометрии можно обеспечить двумя равносильными способами: принять в качестве аксиомы либо предложение Кантора о стягивающейся системе отрезков, либо предложение Гильберта о полноте системы геометрических элементов. Если одно из этих предложений принимается без доказательства, то второе может быть доказано как теорема.

Отметим еще одно интересное обстоятельство, связанное с аксиомой полноты. Эту аксиому нельзя сохранить в списке аксиом, если исключить из списка аксиому Архимеда. Дело в том, что, не соблюдая требования аксиомы Архимеда, всегда можно систему элементов геометрии пополнить новыми элементами, не нарушая при этом взаимных отношений между элементами старой системы. Поэтому без аксиомы Архимеда аксиома полноты дает противоречие. Таким образом, у Гильберта обе аксиомы непрерывности являются органически связанными: первая из них подготавливает требование непрерывности, вторая выражает это требование условием полноты.

§ 5. Полнота системы аксиом евклидовой геометрии

75. В n° 69 указаны три основные проблемы аксиоматики: проблема непротиворечивости, проблема независимости аксиом и проблема полноты. Эти проблемы естественно возникают при исследовании любой аксиоматической системы. Первые две из них для случая гильбертовой системы аксиом рассмотрены в предыдущих параграфах. Третьей проблемой мы займемся сейчас.

Прежде всего постараемся разъяснить ее смысл. Представим себе сначала то положение вещей, к которому привело развитие геометрии во второй половине XIX столетия. К этому времени уже вполне оформились главнейшие геометрические дисциплины и на очередь дня встал вопрос об их аксиоматическом обосновании. При этом отчетливо выяснилось, что древняя система аксиом Евклида не может служить основой для логического развертывания геометрии. Нужно было построить полную систему аксиом (и определений), т. е. содержащую все предложения, приняв которые можно проводить доказательства теорем элементарной геометрии без всяких ссылок на очевидность чертежа. В главе II мы имели возможность убедиться, что теоремы, рассмотренные нами, могут быть строго логически доказаны на основе гильбертовых аксиом.

Естественно, однако, поставить вопрос, как же следует точно понимать полноту системы аксиом Гильберта? Конечно, можно себе представить, что полнота гильбертовой системы обнаружена при помощи анализа доказательства всех теорем геометрии, которые были известны, допустим, к 1900 г. Такой ответ может нас удовлетворить только в том случае, если мы согласимся рассматривать элементарную геометрию как завершенную дисциплину. Но хотя исторически задача обоснования элементарной геометрии решалась в то время, когда элементарная геометрия была уже достаточно оформлена, с чисто математической точки зрения мы не можем ставить эту задачу, рассматривая геометрию в каких-то условных рамках, так как число возможных теорем геометрии неограниченно. Поэтому мы постараемся определить понятие полноты таким образом, чтобы оно относилось к заданной системе аксиом независимо от того, в какой мере развита та геометрия, которая этими аксиомами должна быть обоснована.

Представим себе, что аксиомы данной системы реализованы два раза на двух различных множествах объектов. Две реализации аксиом мы будем называть *изоморфными*, если между объектами этих реализаций можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие объекты находятся в одинаковых взаимных отношениях. (Так, если точка A и прямая a первой реализации соответствуют точке A' и прямой a' второй реализации и если точка A лежит на прямой a, то точка A' лежит на прямой a'; если отрезки AB и CD первой реализации соответствуют отрезкам $A'B'$ и $C'D'$ второй и если $AB \equiv CD$, то $A'B' \equiv C'D'$, и т.д. При этом отношения "лежат на", "между", "конгруэнтны" для каждой реализации должны пониматься в соответствующем ей конкретном смысле.)

Поясним это определение примерами.

В n° 46 мы показали, что аксиомы планиметрии Лобачевского могут быть реализованы на любой эквидистантной поверхности. Рассмотрим систему эквидистантных поверхностей с общей базой σ. Пусть Σ и Σ' — какие-нибудь две эквидистантные поверхности из этой системы. Будем считать точки поверхностей Σ и Σ' соответствующими, если они лежат на одном луче, ортогональном к базе σ; будем также считать эквидистантные линии поверхностей Σ и Σ' соответствующими, если они лежат на одной плоскости, ортогональной к базе σ. Таким способом мы устанавливаем соответствие между объектами реализаций геометрии Лобачевского на Σ и Σ'. Это соответствие, очевидно, является изоморфным.

Рассмотрим теперь первые три аксиомы I группы Гильберта как самостоятельную систему. Мы получим реализацию этой системы, если назовем точками три вершины некоторого треугольника, прямыми — его стороны. Требования аксиом I.1–I.3 здесь удовлетворены, хотя имеется всего шесть объектов (указанная сейчас реализация напоминает реализацию, которую мы описали в n° 70, но она еще проще той, что и понятно, так как сейчас мы учитываем только часть аксиом I группы). С другой стороны, припомним арифметические реализации гильбертовых аксиом, изложенные в nn° 71 и 72; условимся рассматривать их как реализацию одних только аксиом I.1–I.3 (т.е. не будем интересоваться тем, что в этих реализациях имеют место также и другие аксиомы). Все указанные реализации н е и з о м о р ф н ы друг другу. В самом деле, в первом случае аксиомы I.1–I.3 реализованы лишь на шести объектах, тогда как в n° 72 дана реализация аксиом I.1–I.3 на бесконечном, но счетном множестве объектов, множество же объектов реализации, рассмотренной в n° 71, бесконечно и несчетно. Таким образом, какие бы две из этих трех реализаций мы ни взяли, между их объектами не только изоморфного, но и вообще никакого взаимно однозначного соответствия установить нельзя.

Очевидно, чем меньше требований поставлено в аксиомах данной системы, тем более свободно можно выбирать ее реализации. Так систему, состоящую только из аксиом Гильберта I.1–I.3, можно реализовать любым из трех указанных выше способов. Но если к аксиомам I.1–I.3 прибавить еще аксиомы II группы, то первый способ отпадает, так как из аксиом I–II следует, что множество геометрических объектов бесконечно. Далее, аксиомы I–III, IV.1 могут быть реализованы так, как описано в n° 71 или в n° 72. Но если к этим аксиомам присоединить еще аксиому IV.2, то реализация, указанная в n° 72, становится непригодной, так как в ней требования аксиомы IV.2 не удовлетворены.

Таким образом, если мы пополняем некоторую систему аксиом, присоединяя новые аксиомы, не зависящие от старых и, конечно, не противоречащие им, то класс допустимых реализаций системы сужается.

Теперь мы можем точно сформулировать понятие полноты системы аксиом.

Данная система аксиом называется полной, если все ее реализации изоморфны друг другу.

Мы установим сейчас полноту системы аксиом I–V*).

Пусть рассматривается какая-нибудь реализация Σ аксиом I–V. Согласно n° 22, в множестве объектов, которые в реализации Σ названы точками, можно ввести координатную систему так, что каждой точке будет однозначно соответствовать пара координат (x, y) и любой паре чисел (x, y) будет однозначно соответствовать точка с координатами (x, y). Кроме того, при наличии аксиомы V (аксиомы параллельности) координатная система, построенная в n° 22, является декартовой. Следовательно, координаты точек, расположенных на какой-нибудь прямой, характеризуются уравнением

$$ux + vy + w = 0.$$

Таким образом, точкам реализации Σ взаимно однозначно соответствуют пары вещественных чисел (x, y), прямым — отношения вида $(u : v : w)$.

Мы получаем взаимно однозначное соответствие между объектами реализации Σ и объектами арифметической реализации, рассмо-

*) Мы снова ограничиваемся случаем геометрии на плоскости.

тренной в n° 71. Это соответствие является изоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что аксиомы элементарной геометрии I–V позволяют вывести основные декартовы формулы, с помощью которых взаимные отношения объектов реализации Σ арифметически характеризуются в точности так же, как взаимные отношения соответствующих объектов реализации, указанной в n° 71.

Мы видим, что каждая реализация аксиом I–V изоморфна декартовой. Но, очевидно, две реализации, изоморфные третьей, изоморфны между собой. Следовательно, все реализации аксиом I–V изоморфны друг другу. Отсюда заключаем, что система аксиом I–V полна.

Аналогичными рассуждениями можно было бы установить полноту системы аксиом геометрии Лобачевского (предварительно доказав, *исходя из аксиом*, ее основные формулы; см. nn° 216–224).

§ 6. Аксиоматический метод в математике

76. До сих пор мы имели дело лишь с двумя конкретными системами аксиом: с системой аксиом геометрии Евклида и с системой аксиом геометрии Лобачевского.

Правда, на протяжении этой главы мы изучали некоторые системы, получающиеся исключением одной или нескольких аксиом из списка Гильберта; но такие системы, как части гильбертовой, по своему содержанию не представляют ничего нового.

Между тем, та общая точка зрения на геометрические объекты и геометрические аксиомы, которая была достигнута при исследовании основных задач аксиоматики элементарной геометрии, позволила усмотреть возможность применения аксиоматического метода в чрезвычайно широких границах.

В настоящее время в математике весьма многие разделы имеют в своей основе надлежащим образом составленные системы аксиом. Таковы, например, теория групп, теоретико-множественная топология, разнообразные ветви функционального анализа. В аксиомах, на которых основаны такие разделы математики, учитываются лишь некоторые свойства изучаемых математических объектов. Как правило, эти свойства являются общими для многочисленных классов объектов, разнообразных по характеру остальных свойств. Тем самым теоремы, выведенные из принятых аксиом, относятся сразу ко всем таким классам конкретных математических объектов. Общность математических выводов является одним из важнейших обстоятельств, связанных с применением аксиоматического метода.

Существенно отметить, что в основе большинства математических теорий лежат неполные системы аксиом. Например, аксиомы теории групп составляют неполную систему, так как существуют неизоморфные группы. Пространства, изучаемые в теоретико-множественной топологии, также обоснованы неполной системой аксиом. То обстоятельство, что топология и теория групп имеют в своей основе неполную систему аксиом, определяет обширность их приложений.

Если присоединять к аксиомам топологии новые требования, то класс пространств, элементы которых удовлетворяют расширенной таким образом системе аксиом, будет более узким, чем первоначально. Так, дополняя аксиоматику топологического пространства все новыми и новыми аксиомами, можно прийти к одной из полных систем аксиом, определяющих пространство Евклида, или Лобачевского, или какое-нибудь еще. Заметим, что чем больше аксиом содержит избранная система, тем богаче содержанием основанная на ней теория, но и тем у́же область ее использования, т. е. тем меньшей общностью отличаются ее теоремы.

Часть II
ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава V
ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Предмет проективной геометрии

77. В первые десятилетия XIX века одновременно с успешным развертыванием исследований по основаниям геометрии возникла особая ветвь геометрических знаний — проективная геометрия. Источником ее явились потребности графики и архитектуры. Вначале проективная геометрия имела довольно ограниченный диапазон приложений. Но по мере роста она все более и более проникала в различные геометрические области, а в конце XIX столетия исследования по проективной геометрии и по основаниям элементарной геометрии теснейшим образом объединились. Замечательным результатом этого объединения было построение в рамках проективной геометрии глубокой теории, которая включила в единую схему геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

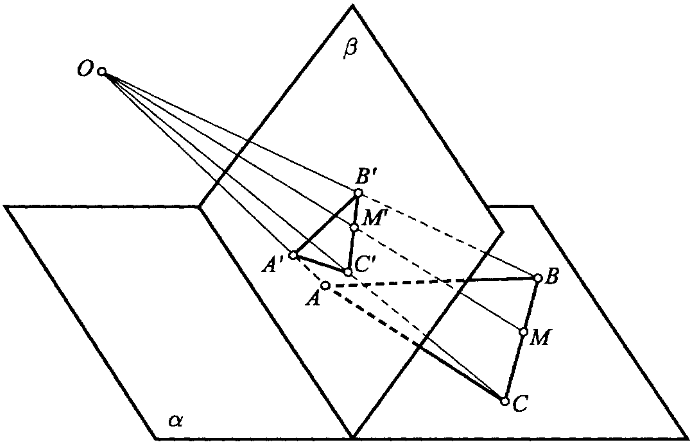


Рис. 87

78. Известный французский геометр Понселе (1788–1867) выделил как объект исследования некоторые особые свойства геометрических фигур, названные им проективными.

Что это за свойства фигур,— мы сейчас объясним.

Пусть A — произвольная фигура, расположенная в некоторой плоскости α; β — какая-нибудь другая плоскость и O — произвольная точка пространства, не содержащаяся ни в одной из двух плоскостей α и β (рис. 87). Точка O вместе с каждой точкой M фигуры A определяет прямую OM; прямая OM пересекает плоскость β в некоторой точке, которую мы обозначим через M' и будем называть *проекцией точки* M (на плоскость β из центра O). Проекции всех точек фигуры A на плоскость β составят некоторую фигуру A', которая называется *проекцией фигуры* A. Операция, с помощью которой получается фигура A', носит название *центрального проектирования* из точки O. Варьируя выбор точки O и плоскости β, мы можем получить при помощи центрального проектирования фигуры A бесконечное множество фигур, отчасти похожих на фигуру A, но во многих отношениях также и существенно от нее отличающихся. Например, проектируя окружность, можно получить эллипс или параболу и даже гиперболу; проектируя правильный треугольник, можно получить треугольник произвольной формы, и т. д. Таким образом, многие свойства фигуры не переносятся на ее проекцию. Так, свойства правильного треугольника могут не сохраниться при проектировании, в результате которого, вообще говоря, не будет получаться снова правильный треугольник; основное свойство окружности, выражаемое обычным ее определением, также может быть нарушено при проектировании, так как, проектируя окружность, можно получить, например, эллипс, и т. д. Точно так же многие величины, связанные с фигурой, будут при проектировании, вообще говоря, меняться. Так, проектируя отрезок данной длины a, можно получить отрезок, длина которого как угодно велика или как угодно мала; проектируя треугольник данной площади Δ, можно получить треугольник, площадь которого будет больше или меньше величины Δ.

С другой стороны, фигуры обладают свойствами, которые сохраняются при любом проектировании, и с фигурами могут быть сопоставлены величины, также сохраняющиеся при любом проектировании. Такие свойства и величины называются *инвариантами проектирования.*

Именно эти свойства фигур, инвариантные по отношению к *любому* проектированию, Понселе назвал *проективными свойствами*, рассматривая их как объекты исследования в проективной геометрии. Кроме того, объектами проективной геометрии являются инвариантные относительно проектирований величины.

Примеры. Если точки $P_1, P_2, \dots, P_n$ фигуры A лежат на прямой, то проекции этих точек $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ также лежат на некоторой прямой. Следовательно, свойство точек фигуры, заключающееся в прямолинейном их расположении, является проективным. Иначе еще можно сказать, что прямая есть объект проективной геометрии.

Если точки $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ фигуры A лежат на каком-нибудь коническом сечении k, то проекции этих точек $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n$ также лежат на некотором коническом сечении k'. Иначе говоря, коническое сечение есть объект проективной геометрии. При этом только нужно иметь в виду, что свойства, присущие исключительно окружности, или исключительно эллипсу, или исключительно параболе, или исключительно гиперболе, не являются проективными свойствами, поэтому в проективной геометрии не делается различия между коническими сечениями, как в элементарной геометрии. Иными словами, хотя конические сечения суть объекты проективной геометрии, но отдельные виды их — окружности, эллипсы, параболы, гиперболы — в проективной геометрии не различаются и порознь не исследуются.

79. Задача изучения проективных свойств фигур привлекла к себе внимание многих геометров, среди которых после Понселе мы отметим Шаля (1793–1880) и Штейнера (1769–1863). Им принадлежит разработка ряда общих вопросов проективной геометрии, в которых Штейнер, Шаль и сопутствующие им геометры видели возрождение синтетического направления в геометрии. Развивая синтетические методы в противовес аналитическим, эти геометры достигли известных успехов в усовершенствовании аппарата проективной геометрии и в применении его к различным геометрическим задачам.

Однако принципиальное значение проективной геометрии в развитии геометрических идей определяется отнюдь не количеством отдельных случаев, где ее методы оказываются удобнее методов аналитической геометрии. Сейчас мы видим это значение в той общности проективной геометрии, которая позволяет соединить воедино разные геометрические системы, в частности, включить в проективную схему и элементарную геометрию.

Между тем у Штейнера и Шаля проективная геометрия выглядела как часть элементарной. Превращение проективной геометрии во вполне самостоятельную дисциплину явилось уже делом второй половины XIX столетия.

Важной предпосылкой для этого превращения было употребление в проективной геометрии бесконечно удаленных геометрических элементов. На этом вопросе мы сейчас специально остановимся.

80. Пусть A — произвольная точка пространства и a — прямая, не проходящая через точку A (рис. 88). Проведем через A и a плоскость α и будем рассматривать всевозможные прямые плоскости α, проходящие через точку A. Эти прямые составляют плоский пучок с центром A; мы будем называть его: *пучок* A.

Между лучами этого пучка и точками прямой a мы установим соответствие, сопоставляя с каждой точкой M прямой a тот луч m пучка A, который пересекает прямую a в точке M (рис 88). Луч m называют лучом, проектирующим точку M.

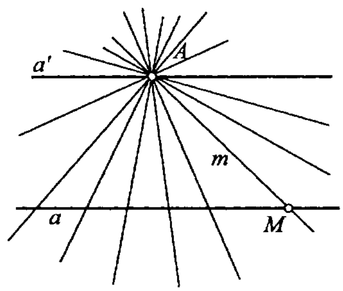


Рис. 88

Очевидно, что как бы ни была расположена точка M на прямой a, ей всегда соответствует определенный луч m. Но нельзя утверждать, что любому лучу пучка A соответствует точка прямой a. Именно, луч a' пучка A, параллельный прямой a, не пересекает ее и поэтому не имеет соответствующей себе точки. Таким образом, соответствие между лучами пучка A и точками прямой a не является взаимно однозначным. Это обстоятельство при исследовании проектирований служит источником многочисленных неудобств. Чтобы избежать их, условливаются рассматривать параллельные прямые как пересекающиеся на бесконечности. Тогда луч a' в пучке A, параллельный прямой a, как и всякий другой луч пучка, будет иметь на прямой a соответствующую себе точку, но только не обыкновенную точку, а некоторый новый объект, называемый *бесконечно удаленной точкой* прямой a.

Бесконечно удаленная точка прямой считается принадлежащей также каждой плоскости, которая проходит через эту прямую. Далее полагают, что параллельные прямые имеют одну общую бесконечно удаленную точку; соответственно этому систему параллельных прямых, расположенных в одной плоскости, называют *пучком с бесконечно удаленным центром.*

Заметим, что пучок с бесконечно удаленным центром при проектировании может перейти в обыкновенный пучок. Так, на рис. 89 пучок в плоскости α с бесконечно удаленным центром S_∞ проектируется из центра O на плоскость β в обыкновенный пучок с центром S.

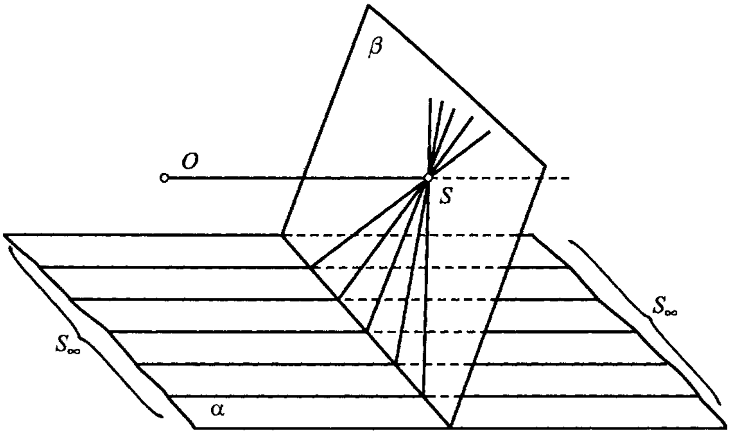


Рис. 89

Бесконечно удаленные точки непараллельных прямых считаются различными. Таким образом, каждая плоскость содержит бесконечно много различных бесконечно удаленных точек.

Совокупность всех бесконечно удаленных точек плоскости называют ее *бесконечно удаленной прямой.*

Совокупность всех бесконечно удаленных точек пространства называют *бесконечно удаленной плоскостью.* Такая терминология оправдывается следующими двумя обстоятельствами:

1. Две параллельные плоскости имеют общие бесконечно удаленные точки, вследствие чего совокупность бесконечно удаленных точек плоскости можно рассматривать как образ, получаемый при пересечении двух плоскостей; поэтому совокупность бесконечно удаленных точек плоскости естественно назвать прямой.

2. Множество всех бесконечно удаленных точек пространства при пересечении с любой обыкновенной плоскостью определяет бесконечно удаленную прямую. Поэтому указанное множество естественно назвать плоскостью.

81. Все изложенное можно резюмировать следующим образом.

Множество объектов евклидова пространства дополняется новыми элементами, которым дается название "бесконечно удаленная точка", "бесконечно удаленная прямая", "бесконечно удаленная плоскость". Присоединение новых элементов производится с соблюдением определенных условий, именно:

1. К множеству точек каждой прямой прибавляется одна бесконечно удаленная точка; к множеству прямых каждой плоскости приба-

вляется одна бесконечно удаленная прямая; к множеству плоскостей пространства прибавляется одна бесконечно удаленная плоскость.

2. Свойства взаимной принадлежности расширенного множества геометрических элементов должны удовлетворять требованиям всех аксиом сочетания (т. е. первой группы аксиом Гильберта).

3. Свойства взаимной принадлежности расширенного множества геометрических элементов должны быть таковы, что каждые две плоскости имеют общую прямую, каждые прямая и плоскость имеют общую точку, а также имеют общую точку каждые две прямые, расположенные в одной плоскости.

Прямая, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *проективной прямой*. Проективную прямую следует представлять себе в виде замкнутой линии. Плоскость, дополненная бесконечно удаленной прямой, называется *проективной плоскостью*. Пространство, дополненное бесконечно удаленной плоскостью, называется *проективным пространством*.

82. Бесконечно удаленные элементы нередко вводятся в рассмотрение и в элементарной геометрии. Но в элементарной геометрии использование их по существу ограничивается лишь особой манерой словесного выражения геометрических фактов (вместо того, чтобы говорить, что прямые параллельны, их называют сходящимися в бесконечности, цилиндр рассматривают как конус с бесконечно удаленной вершиной и т. д.). В проективной геометрии, напротив, бесконечно удаленные элементы играют такую же роль, как и обыкновенные геометрические образы, и являются органической частью проективного пространства.

Причина такого различия станет вполне ясной, если сравнить объекты исследования элементарной геометрии и проективной геометрии. Элементарная геометрия в значительной степени посвящена изучению так называемых метрических свойств фигур, т. е. таких свойств, которые связаны с измерением геометрических величин (длин, углов и площадей). Измерение любого отрезка AB с обыкновенными концами всегда возможно и приводит в результате к определенному числу, выражающему длину отрезка AB. Но в том случае, когда один конец отрезка является бесконечно удаленной точкой, процесс измерения теряет смысл, так как на таком отрезке линейная единица откладывается бесконечно много раз. Точно так же процесс измерения углов неприменим в том случае, когда одна сторона угла есть бесконечно удаленная прямая, и "наивные" способы измерения площадей неприменимы к фигурам, содержащим бесконечно удаленные элементы.

Таким образом, в элементарной геометрии бесконечно удаленные элементы по необходимости играют особую роль и по свойству своих отношений к обыкновенным геометрическим элементам существенно от них отличаются. В противоположность этому, в проективной геометрии, поскольку метрические свойства фигур не являются ее объектами, указанные выше обстоятельства, отличающие бесконечно удаленные элементы от остальных, теряют силу. Более того, так как при проектированиях бесконечно удаленные элементы могут переходить в обыкновенные, то, следовательно, они не обладают никакими *проективными свойствами*, которые отличали бы их от обыкновенных элементов. Поэтому в проективной геометрии различия между обыкновенными и бесконечно удаленными элементами нет.

83. Идея бесконечно удаленных элементов возникла довольно давно. Но равноправие бесконечно удаленных и обыкновенных элементов, естественное с точки зрения проективной геометрии, оставалось иллюзорным, пока проективные свойства фигур исследовались методами элементарной геометрии, так как эти методы опираются на измерение, а метрика элементарной геометрии обязательно приводит к различию между конечными и бесконечными удаленными образами. Чтобы придать понятию проективного пространства точный смысл, оказалось необходимым полностью изгнать из проективной геометрии все, что связано с измерением.

Задача освобождения проективной геометрии от использования измерений в принципе была решена Штаудтом (1798–1867).

Проективная геометрия, освобожденная от метрики, превратилась в дисциплину, изучающую только свойства взаимного расположения геометрических образов. Вместе с тем проективная геометрия сделалась самостоятельной геометрической дисциплиной со своей собственной аксиоматикой и собственной совокупностью объектов (каковыми являются проективная прямая, проективная плоскость и проективное пространство).

§ 2. Теорема Дезарга. Построение гармонических групп элементов

84. Проективную геометрию мы будем строить на основе некоторой системы аксиом, относящихся к взаимным отношениям основных объектов. Основными объектами являются точки, прямые и плоскости; их взаимные отношения, о которых идет речь в аксиомах, суть отношения связи и порядка. Аксиомы проективной геометрии, как и получаемые из них теоремы, выражают известные свойства евклидова пространства, дополненного бесконечно удаленными элементами. Но, конечно, под точками, прямыми и плоскостями в проективной геометрии можно подразумевать любые предметы, и взаимные отношения между ними можно истолковать любым образом, лишь бы было соблюдено то, что говорится в аксиомах. Тогда выводы, полученные из аксиом, будут выражать определенные факты, относящиеся к выбранным объектам. Соответственно этому проективным пространством является любое множество предметов, называемых точками, прямыми и плоскостями, для которых определены взаимные отношения с соблюдением требований нижеприводимых аксиом.

Аксиомы проективной геометрии можно распределить на три группы, из которых
- группа I содержит девять аксиом связи,
- группа II содержит шесть аксиом порядка,
- группа III содержит одну аксиому непрерывности.

В настоящем разделе рассматриваются аксиомы I группы и их важнейшие следствия.

Группа I. Проективные аксиомы связи.

Мы полагаем, что прямые и плоскости могут находиться в известных сопоставлениях с точками, которые обозначаем словами: "прямая проходит через точку" или "точка лежит на прямой"; "плоскость проходит через точку" или "точка лежит на плоскости". Условия этих сопоставлений выражают аксиомы I.1–I.9.

I.1. *Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, проходящая через точки A, B.*

I.2. *Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, проходящей через точки A, B.*

I.3. *На каждой прямой имеются не менее трех точек. Существуют по крайней мере три точки; не лежащие на одной прямой.*

I.4. *Через каждые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит некоторая плоскость α. На каждой плоскости имеется не менее одной точки.*

I.5. *Через каждые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит не более одной плоскости.*

I.6. *Если две точки A, B прямой a лежат на плоскости α, то каждая точка прямой a лежит на плоскости α.*

I.7. *Если две плоскости α, β имеют общую точку A, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку B.*

I.8. *Имеются не менее четырех точек, не лежащих на одной плоскости.*

I.9. *Каждые две прямые, расположенные в одной плоскости, имеют общую точку.*

Если сопоставить только что сформулированные аксиомы I.1–I.9 с аксиомами первой группы Гильберта (см. главу II, n° 12), то можно прежде всего заметить, что все требования аксиом первой группы Гильберта содержатся также и в проективных аксиомах I.1–I.9. Поэтому *все теоремы элементарной геометрии, основанные лишь на аксиомах связи, справедливы также и в проективной геометрии.* Проективные аксиомы связи отличаются от аксиом связи элементарной геометрии только в двух пунктах:

1) В аксиоме I.3 проективной системы требуется, чтобы на каждой прямой существовало не менее трех точек, тогда как в соответствующей аксиоме I.3 системы Гильберта ставится требование, чтобы прямая содержала хотя бы две точки.

2) Проективные аксиомы связи включают требование I.9, которое не ставится и не выполняется в элементарной геометрии. Благодаря

аксиоме I.9 в проективной геометрии нет параллельности, так как всякие две прямые одной плоскости пересекаются.

Таким образом, проективные аксиомы связи содержат больше требований, чем аксиомы связи элементарной геометрии, благодаря чему из проективных аксиом связи могут быть выведены теоремы, не вытекающие из аксиом связи Гильберта.

В частности, из аксиом I.1–I.9 следует, что

1) прямая и плоскость всегда имеют общую точку;

2) две плоскости всегда имеют общую прямую;

3) три плоскости всегда имеют общую точку.

85. Не останавливаясь на тривиальных следствиях аксиом I.1–I.9, мы обратимся сейчас к доказательству теоремы Дезарга, которая является основой проективной геометрии на плоскости.

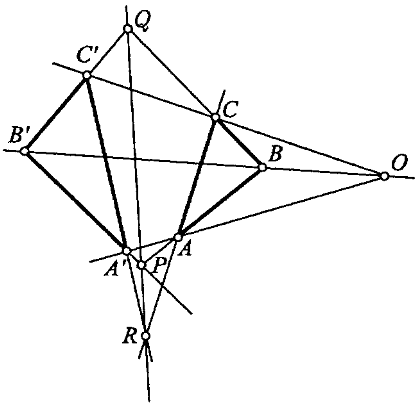


Рис. 90

Условимся называть *трехвершинником* совокупность трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех прямых, попарно соединяющих эти точки. Три точки, о которых идет речь, будем называть вершинами, соединяющие их прямые — сторонами трехвершинника (мы избегаем подобную фигуру называть треугольником, сохраняя этот термин для обозначения образа несколько иного вида, о котором будет речь дальше, после того, как мы познакомимся с проективными аксиомами порядка).

Рассмотрим два трехвершинника, вершины которых обозначим буквами A, B, C и A', B', C'. Мы будем называть вершины, обозначенные одинаковыми буквами, соответственными (A и A', B и B', C и C'); также будем называть соответственными стороны, проходящие через соответственные вершины.

Теорема 1 (первая теорема Дезарга — прямая). *Если соответственные стороны трехвершинников ABC и $A'B'C'$ пересекаются в точках P, Q, R, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, сходятся в одной точке* (рис. 90).

Теорема 2 (вторая теорема Дезарга — обратная). *Если прямые, соединяющие соответственные вершины трехвершинников ABC и $A'B'C'$, сходятся в одной точке, то соответственные стороны этих трехвершинников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой*)*.

*) Для нас существен лишь тот случай, когда трехвершинники ABC и $A'B'C'$ лежат в одной плоскости.

Условимся называть прямую, на которой расположены точки пересечения соответственных сторон трехвершинников, *осью перспективы*; точку, в которой сходятся прямые, соединяющие соответственные вершины,— *центром перспективы*. Тогда обе теоремы Дезарга можно коротко выразить следующим образом:

Если два трехвершинника имеют ось перспективы, то они имеют и центр перспективы, и обратно.

Докажем первую теорему Дезарга.

Пусть ABC и $A'B'C'$ — трехвершинники, лежащие в одной и той же плоскости α, обладающие осью перспективы u (рис. 91). Таким образом, прямая u содержит точки P, Q, R, в которых пересекаются пары соответственных сторон AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$. Нужно показать, что прямые AA', BB' и CC' сходятся в одной точке, т. е. что данные трехвершинники имеют центр перспективы *).

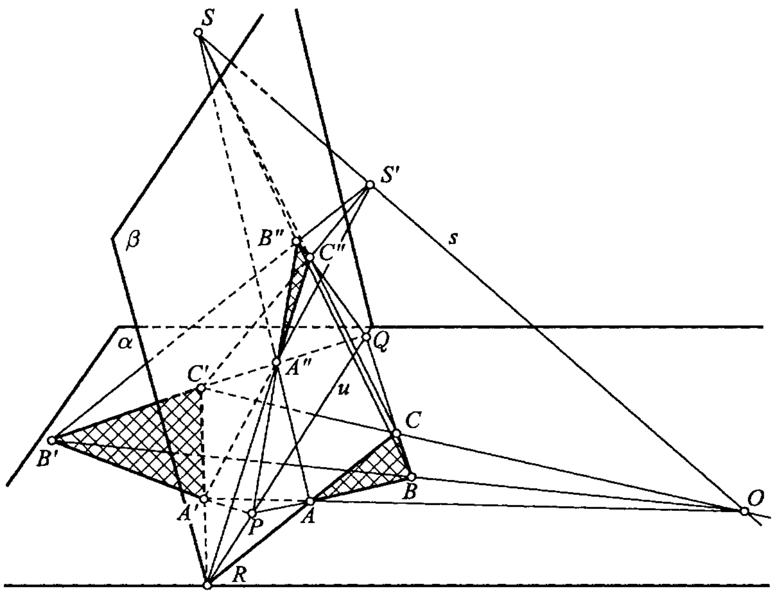


Рис. 91

Для доказательства возьмем какую-нибудь точку, не лежащую на плоскости α; обозначим ее через B''(существование точки B'' обеспечено аксиомой I.8). Точки P, Q и B'' не лежат на одной прямой; поэтому существует единственная плоскость β, проходящая через эти точки. В согласии с аксиомой I.3 мы можем на прямой $B''Q$ выбрать некоторую точку C'', отличную от B'' и Q. По аксиоме I.6 эта точка

*) Будем считать, что прямая u не содержит вершин данных трехвершинников (в противном случае теорема тоже верна и усматривается с очевидностью).

лежит в плоскости β, так же как и точка R. Поэтому прямая RC'' расположена в плоскости β. Так как прямые RC'' и PB'' лежат в одной плоскости, то по аксиоме I.9 они имеют общую точку; обозначим ее через A''. Мы получили в плоскости β трехвершинник $A''B''C''$, находящийся в некотором специальном расположении по отношению к трехвершинникам ABC и $A'B'C'$; именно, трехвершинники ABC, $A'B'C'$ и $A''B''C''$ имеют общую ось перспективы u, причем соответственные стороны $AB, A'B'$ и $A''B''$ этих трехвершинников сходятся в одной точке P, и точно так же стороны $BC, B'C'$ и $B''C''$ сходятся в одной точке Q и стороны $AC, A'C'$ и $A''C''$ сходятся в одной точке R.

При таком расположении трехвершинники ABC и $A''B''C''$, а также трехвершинники $A'B'C'$ и $A''B''C''$ имеют центр перспективы. Это нетрудно доказать. Хотя здесь нам приходится устанавливать по отношению к трехвершинникам ABC и $A''B''C''$ (или $A'B'C'$ и $A''B''C''$) тот же факт, какой утверждается теоремой Дезарга по отношению к трехвершинникам ABC и $A'B'C'$, но доказательство чрезвычайно упрощается тем, что трехвершинники ABC и $A''B''C''$ (или $A'B'C'$ и $A''B''C''$) лежат в разных плоскостях.

Рассмотрим плоскости PAA'', QBB'' и RCC''; как было отмечено в конце n° 84, каждые три плоскости имеют общую точку. Пусть S — общая точка указанных плоскостей. Заметим, что прямая AA'' есть общая прямая плоскостей PAA'' и RCC''; далее, весьма существенно установить, что плоскости PAA'' и RCC'' различны. В самом деле, плоскость PAA'' содержит прямую BB''. Но в силу выбора точки B'' прямые BB'' и u не имеют общей точки. Отсюда следует, что точка R не может находиться в плоскости PAA'' и, таким образом, плоскости PAA'' и RCC'' действительно различны. Поэтому общая прямая AA'' этих плоскостей содержит все их общие точки, в том числе и точку S. Иначе говоря, прямая AA'' проходит через S. Из таких же соображений следует, что через точку S проходят прямые BB'' и CC''. Тем самым устанавливается наличие центра перспективы трехвершинников ABC и $A''B''C''$. Аналогично можно установить, что трехвершинники $A'B'C'$ и $A''B''C''$ имеют центр перспективы S'.

Проведем теперь через точки S и S' прямую s; эта прямая встретит плоскость α в некоторой точке O. Легко убедиться, что точка O как раз и является центром перспективы трехвершинников ABC и $A'B'C'$. В самом деле, будем проектировать пространственную фигуру, составленную трехвершинниками $A'B'C', A''B''C''$ и точкой S', из центра S на плоскость α. Очевидно, проекцией трехвершинника $A'B'C'$ окажется этот же трехвершинник. Проекцией трехвершинника $A''B''C''$ будет трехвершинник ABC. Прямые $A'A'', B'B'', C'C''$ спроектируются ответственно в прямые AA', BB', CC'. А так как прямые $A'A'', B'B'', C'C''$ сходятся в точке S', то их проекции, т. е. прямые AA', BB', CC', будут сходиться в проекции точки S', т. е. в точке O. Таким образом, мы доказали, что прямые, соединяющие соответственные вершины трехвершинников ABC и $A'B'C'$, сходятся в одной точке, что и нужно было доказать.

Обратимся теперь к доказательству обратной теоремы.

Пусть даны трехвершинники ABC и $A'B'C'$, расположенные в одной плоскости, относительно которых известно, что они имеют центр перспективы, т. е. что прямые AA', BB', CC' сходятся в одной точке O. Нужно доказать, что они имеют ось перспективы, т. е. что точки P, Q, R, в которых пересекаются соответственные стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$, лежат на одной прямой.

Для дальнейшего удобно заранее исключить из рассмотрения тот неинтересный случай, когда трехвершинники имеют одну общую сторону, например, когда прямые BC и $B'C'$ совпадают. Тогда точка Q становится неопределенной и можно считать, что она расположена на одной прямой с точками P и R. В этом случае теорема, следовательно, верна. Далее предполагается, что соответственные стороны трехвершинников ABC и $A'B'C'$ различны.

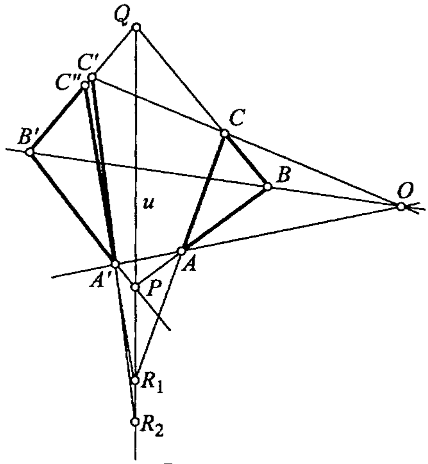


Рис. 92

Доказательство мы проведем методом "от противного". *Предположим, что AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ пересекаются в трех точках P, Q, R, не лежащих на одной прямой.* При этом условии точки P и Q обязательно различны и определяют некоторую прямую u, пересекающуюся с прямыми AC и $A'C'$ в разных точках R_1 и R_2, так что R_1, A' и C' не лежат на одной прямой (рис. 92). Поэтому прямая R_1A' встречает прямую $B'C'$ в некоторой точке C'', отличной от точки C'. Точка C'' не лежит прямой $C'CO$. Действительно, если бы точка C'' лежала на прямой $C'CO$, то на этой же прямой находилась бы точка B', а, следовательно, и точка B. Но тогда соответственные стороны BC и $B'C'$ должны были бы совпадать, а этот случай нами исключен. Таким образом, прямая $C''C$ не проходит через точку O. Рассмотрим трехвершинники ABC и $A'B'C''$. Согласно только что доказанному, у них нет центра перспективы; однако они имеют ось перспективы, именно прямую u, на которой расположены точки P, Q и R_1.

Получилось противоречие с прямой теоремой Дезарга, и тем самым доказана обратная теорема.

Теперь мы перейдем к важнейшему в проективной геометрии определению и построению гармонических элементов. Наши дальнейшие рассуждения будут основаны на теореме Дезарга.

86. Плоская фигура, составленная четырьмя точками, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и шестью прямыми, соединяющими попарно эти точки, называется *полным четырехвершинником*.

Указанные точки называются *вершинами*, прямые, которые попарно их соединяют, — *сторонами* четырехвершинника. На рис. 93 изображен четырехвершинник с вершинами $ABCD$. Стороны, не имеющие общей вершины, называются *противоположными*. Так, четырехвершинник $ABCD$ обладает парами противоположных сторон AB и CD, AC и BD, BC и AD. Точки пересечения противоположных сторон носят название *диагональных точек* четырехвершинника. На рис. 93 диагональные точки суть P, Q, R. При помощи полного четырехвершинника определяется понятие гармонической группы элементов.

Пару точек S, T произвольной прямой и мы будем называть г а р м о н и ч е с к и с о п р я ж е н н о й *с парой точек P, Q этой же прямой, если P и Q суть диагональные точки некоторого четырехвершинника, а точки S и T определяются пересечением прямой с парой его противоположных сторон, проходящих через третью диагональную точку* (рис. 93).

По смыслу этого определения точки P и Q, составляющие первую пару, равноправны между собой так же, как равноправны точки S и T второй пары (но пока еще мы не имеем оснований утверждать равноправие пар P, Q и S, T).

Условимся называть точку T *четвертой гармонической* к трем точкам P, Q, S, если пара S, T гармонически сопряжена с парой P, Q (в порядке записи точек здесь существенно то, что на первых двух местах записываются точки, составляющие первую пару гармонической группы). Очевидно, если T есть четвертая гармоническая к трем точкам P, Q, S, то S является четвертой гармонической к трем точкам P, Q, T.

Высказанное нами определение гармонических пар заключает в себе также и способ построения четвертой гармонической к трем данным точкам. Чтобы построить четвертую гармоническую к трем произвольно заданным точкам P, Q, S прямой u, нужно выбрать на плоскости вне прямой u какую-нибудь точку B и на прямой PB — некоторую точку A, отличную от P и B (существование точки A обеспечивается аксиомой (I.3)). Тогда пересечением прямых BS и AQ определится точка C, после чего пересечением прямых PC и BQ определится точка D; проведя прямую AD, мы найдем точку T, которая и будет искомой.

В высшей степени важно установить, что по заданным точкам P, Q, S положение четвертой гармонической T определяется однозначно, т. е. не зависит от выбора точек B и A.

Это непосредственно вытекает из следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. *Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — два четырехвершинника с общими диагональными точками P и Q* (рис. 93). *Если сто-*

роны BC и $B'C'$ этих четырехвершинников пересекаются в точке S прямой PQ, то их стороны AD и $A'D'$ пересекаются в точке T на этой же прямой.

Доказательство этой теоремы основано на предложении Дезарга.

Рассмотрим трехвершинники ABC и $A'B'C'$. Соответственные стороны их пересекаются в трех точках P, S, Q, лежащих на одной прямой. По первой теореме Дезарга отсюда следует, что прямые AA', BB' и CC' сходятся в одной точке O. Соответственные стороны трехвершинников BCD и $B'C'D'$ также пересекаются в трех точках одной прямой — в тех же точках P, Q, S. Снова применяя первую теорему Дезарга, находим, что прямые BB', CC' и DD' имеют общую точку O'. Очевидно, точки O и O' совпадают, так как каждая из них определяется пересечением прямых BB' и CC'. Таким образом, все прямые AA', BB', CC' и DD' пересекаются в точке O. Тем самым мы установили, в частности, что прямые AA', BB' и DD' сходятся в одной точке. По второй теореме Дезарга тогда соответственные стороны трехвершинников ABD и $A'B'D'$ пересекаются в трех точках одной прямой. Значит, точка T пересечения прямых AD и $A'D'$ расположена на прямой PQ, и теорема доказана.

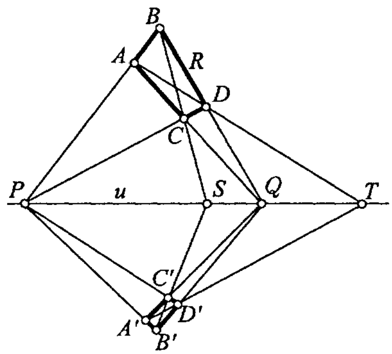


Рис. 93

Из определения гармонических групп точек и из только что доказанной теоремы непосредственно вытекает следующее предложение, выражающее однозначность определения четвертой гармонической точки.

Теорема 4. *Если пара S, T гармонически сопряжена с парой P, Q и $ABCD$ — какой-нибудь четырехвершинник с диагональными точками P, Q, сторона BC которого проходит через точку S, то сторона AD его проходит через точку T.*

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 5. *Если пара точек S, T прямой и гармонически сопряжена с парой P, Q, то пара P, Q гармонически сопряжена с парой S, T.*

Для доказательства возьмем какой-нибудь четырехвершинник $ABCD$, имеющий диагональные точки P, Q и пару противоположных сторон BC и AD, пересекающих прямую u в точках S и T (рис. 94). Обозначим через R третью диагональную точку четырехвершинника $ABCD$ и проведем прямые PR и QR. Эти прямые в пересечении со сторонами рассматриваемого четырехвершинника определят четыре точки, которые мы пометим буквами X, Y, V, W, как показано на рис. 94.

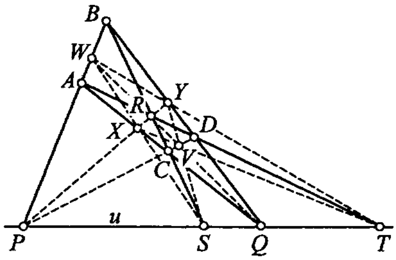


Рис. 94

Рассмотрим теперь четырехвершинник $AXRW$. Этот четырехвершинник имеет диагональные точки P, Q и его сторона AR проходит через точку T; так как точка S является четвертой гармонической к трем точкам P, Q, T, то по теореме 4 сторона XW четырехвершинника $AXRW$ должна пройти через S. Таким разом, точки W, X, S лежат на одной прямой. Из рассмотрения четырехвершинников $RWBY$, $YDVR$, $RVCX$, аналогично предыдущему, будет следовать, что точки каждой из следующих троек: W, Y, T; Y, V, S и X, V, T лежат на одной прямой.

Отсюда следует, что $XVYW$ является четырехвершинником с диагональными точками S, T и со сторонами XY, VW, проходящими через точки P, Q. А это и означает, что пара P, Q гармонически сопряжена с парой S, T.

Теорема, которую мы сейчас установили, обнаруживает взаимность гармонической сопряженности пар. Поэтому в дальнейшем, рассматривая на прямой две пары точек, из которых одна пара гармонически сопряжена с другой, мы не будем отмечать, какая именно является сопряженной с другой парой, и будем называть их *взаимно гармоническими.*

Одно из важнейших свойств гармонических групп точек выражает следующая

Теорема 6. *Пусть p, q и s, t — две пары лучей некоторого пучка с центром O, которые в пересечении с прямой u определяют соответственно пары точек P, Q* и *S, T, а в пересечении с прямой u' — пары точек P', Q' и S', T'. Тогда если P, Q и S, T являются взаимно гармоническими парами, то P', Q' и S', T' будут также взаимно гармоническими парами.*

Доказательство. Сначала мы докажем утверждение в том частном случае, когда какие-нибудь две из соответствующих точек P, Q, S, T и P', Q', S', T', например, точки T и T', совпадают (рис. 95).

Проведем прямую SQ' и обозначим буквой R точку ее пересечения с прямой OT. Так как пары точек P, Q и S, T взаимно гармоничны, то по теореме 4 прямая RS' должна пройти через точку P (чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть четырехвершинник $ROS'Q'$, имеющий диагональные точки S, T). Получается четырехвершинник $RPSO$ с диагональными точками S', T' и со сторонами OP и RS, проходящими через точки P' и Q'. Отсюда следует, что пары P', Q' и S', T' взаимно гармоничны, и, таким образом, в данном частном случае теорема доказана.

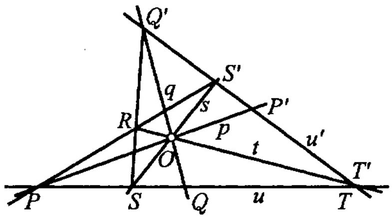


Рис. 95

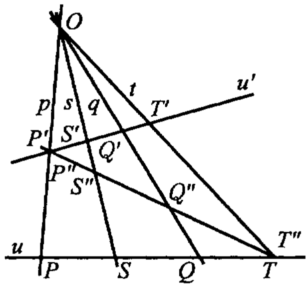


Рис. 96

Обратимся теперь к общему случаю расположения прямых u и u'. Построим прямую $P'T$ (рис. 96). Лучи p, q, s, t определяют на прямой $P'T$ точки P'', Q'', S'', T''. Так как точки T и T'' совпадают, то из гармонической сопряженности пар P, Q и S, T следует по предыдущему гармоническая сопряженность пар P'', Q'' и S'', T''; а так как точки P'' и P' совпадают, то из гармонической сопряженности пар P'', Q'' и S'', T'' вытекает гармоническая сопряженность пар P', Q' и S', T'. Тем самым теорема доказана полностью.

Согласно этой теореме, если две пары лучей пучка при пересечении с какой-нибудь прямой определяют две пары точек, являющиеся гармонически сопряженными, то этим же свойством обладают пары точек, определяемые пересечением рассматриваемых пар лучей со всякой другой прямой. Таким образом, свойство двух пар лучей пучка определять на прямой гармонически сопряженные пары точек не зависит от выбора прямой, являясь свойством самих пар лучей. Пары лучей пучка, обладающие этим свойством, называются *гармонически сопряженными.*

Будем говорить, что лучи $p, q, s, \ldots$, идущие из точки O в точки P, Q, $S, \ldots$, *проектируют* эти точки из точки O. Построение проектирующих лучей $p, q, s, \ldots$ по данным точкам $P, Q, S, \ldots$ мы будем называть *операцией проектирования*; построение точек $P, Q, S, \ldots$ по данным лучам $p, q, s, \ldots$ — *операцией сечения.*

Пользуясь введенной терминологией, мы можем теперь высказать следующее утверждение (как следствие теоремы 6).

В результате операций проектирования или сечения гармонически сопряженных пар элементов (точек прямой или лучей пучка) всегда получаются снова гармонически сопряженные пары элементов.

Или иначе:

Свойство гармонической сопряженности инвариантно относительно проектирований и сечений.

Употребляя терминологию, подобную той, какую мы употребляем по отношению к гармоническим группам точек прямой, назовем луч t

пучка четвертым гармоническим к тройке лучей p, q, s этого же пучка, если пары p, q и s, t гармонически сопряжены (в записи тройки p, q, s на первых двух местах пишется пара p, q).

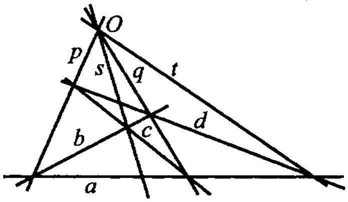


Рис. 97

Построение четвертого гармонического луча t по трем данным лучам p, q, s читатель легко уяснит себе из рассмотрения рис. 97 (при восстановлении фигуры, изображенной на рис. 97, сначала следует произвольно провести через некоторую точку луча p прямые a и b, затем прямую c и, наконец, прямую d; после этого положение луча t однозначно определяется).

87. Все теоремы, которые мы доказывали в этом разделе, относятся к проективной геометрии плоскости. Источником этих теорем является теорема Дезарга, которая по своему смыслу также есть теорема плоской геометрии. Однако доказательство ее проводилось нами при помощи рассуждений, относящихся к геометрии пространства. Естественно поставить вопрос, возможно ли доказать теорему Дезарга так, чтобы в доказательстве не использовались никакие пространственные конфигурации.

Подобные доказательства известны, но все они носят метрический характер и поэтому неприемлемы в проективной геометрии. Анализ этого вопроса, проведенный Гильбертом, обнаружил, что доказать теорему Дезарга средствами проективной геометрии без пространственных построений нельзя.

Точнее: если из списка аксиом I.1–I.9 исключить все утверждения, относящиеся к пространству, то из оставшихся утверждений, каковыми будут только аксиомы I.1–I.3, теорема Дезарга не следует. Независимость теоремы Дезарга от аксиом I.1–I.3 (и даже от аксиом более обширного списка, содержащего, помимо аксиом I.1–I.3, еще проективные аксиомы порядка и непрерывности, которые мы приведем позднее) может быть доказана в принципе тем же приемом, какой подробно описан и многократно применен в главе IV. (Доказательство Гильберта изложено в его “Основаниях геометрии”.)

Ввиду указанных обстоятельств предложение Дезарга можно рассматривать как аксиому плоской проективной геометрии.

88. В заключение этого раздела сделаем два замечания. Первое замечание будет относиться к доказательству предложения об инвариантности гармонических групп элементов относительно проектирований. Это предложение было доказано нами средствами плоской геометрии. Если не отказываться от использования пространственных конфигураций, то можно дать ему другое, более наглядное доказательство.

Пусть u и u' — две прямые плоскости α (рис. 98); P, Q, S, T — точки прямой u; P', Q', S', T' — их проекции на прямую u' из центра O (также

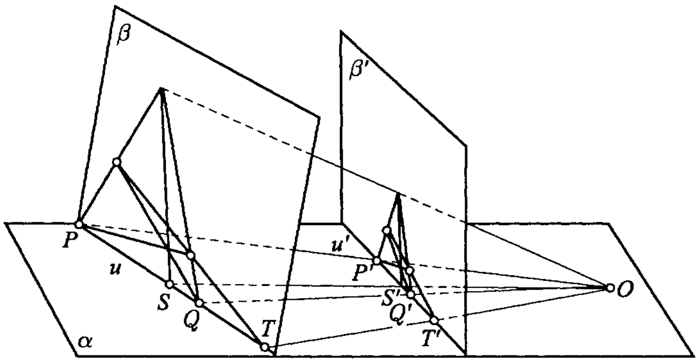


Рис. 98

расположенного в плоскости α). Предположим, что пары P, Q и S, T гармонически сопряжены. Проведем через u и u'' соответственно плоскости β и β', отличные от плоскости α. Так как пары точек P, Q и S, T гармонически сопряжены, то в плоскости β может быть построен четырехвершинник Ω, имеющий диагональные точки P, Q и пару противоположных сторон, проходящих через S и T. Проектируя четырехвершинник Ω из центра O на плоскость β' как на экран, мы получим в плоскости β' четырехвершинник Ω', расположенный по отношению к парам P', Q' и S', T' так же, как четырехвершинник Ω по отношению к парам P, Q и S, T. Отсюда непосредственно следует, что пары P', Q' и S', T' гармонически сопряжены.

Второе замечание мы сделаем по поводу возможности обобщения теоремы об инвариантности гармонических групп элементов относительно проектирований.

До сих пор мы рассматривали проектирование из центра. Иногда приходится рассматривать (в пространственной проективной геометрии), кроме центрального, еще осевое проектирование.

Пусть o — некоторая прямая, $P, Q, S, \dots$ — система точек на другой прямой u, не лежащей в одной плоскости с прямой o (рис. 99). Система плоскостей $\pi, \varkappa, \sigma, \dots$, проходящих через прямую o и через точки $P, Q, S, , \dots$, называется пучком плоскостей с осью o, проектирующим точки $P, Q, S, \dots$ Если u' — какая-нибудь новая прямая, пересекающая плоскости $\pi, \varkappa, \sigma, \dots$ в точках $P', Q', S', , \dots$, то мы будем говорить, что точки $P', Q', S', \dots.$ получены при помощи осевого проектирования точек $P, Q, S, \dots.$

Оказывается, что *инвариантность гармонической сопряженности пар точек имеет место также при осевом проектировании.*

Пусть P, Q, S, T — гармоническая четверка точек прямой u, которая при осевом проектировании отображается в четверку точек P', Q', S', T' некоторой прямой u' (прямые u и u' в общем случае не

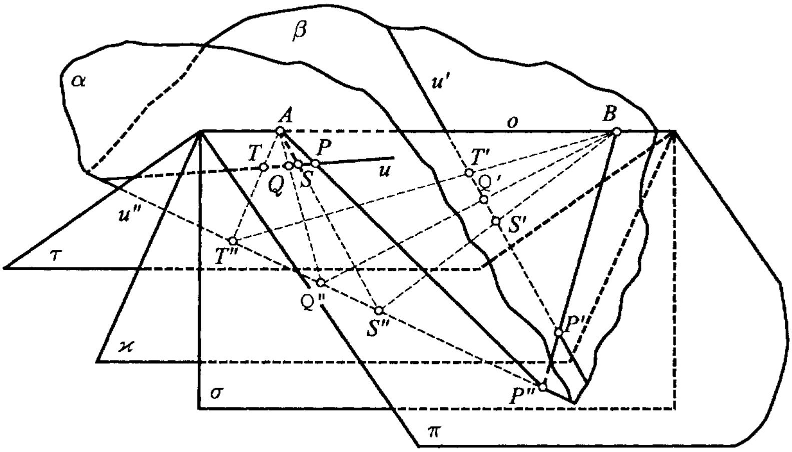


Рис. 99

лежат в одной плоскости). Мы покажем, что четверка точек P', Q', S', T' также является гармонической.

Для этого проведем прямую u'', пересекающую обе прямые u и u' (рис. 99). Прямые u и u'' лежат в одной плоскости α, прямые u' и u'' также лежат в одной плоскости β. Пусть A и B — точки, в которых пересекаются плоскости α и β с осью проектирующего пучка плоскостей, а P'', Q'', S'', T'' — точки, в которых пересекают прямую u'' плоскости этого пучка. Очевидно, группу точек P'', Q'', S'', T'' можно рассматривать как полученную центральным проектированием точек P, Q, S, T из центра A внутри плоскости α. Поэтому из гармоничности группы точек P, Q, S, T следует гармоничность группы P'', Q'', S'', T''. Далее, рассматривая группу P', Q', S', T' как центральную проекцию группы P'', Q'', S'', T'' из центра B, мы можем на основании гармоничности четверки точек P'', Q'', S'', T'' заключить, что четверка точек P', Q', S', T' также является гармонической.

Таким образом, если две пары плоскостей π, $\varkappa$ и σ, τ некоторого пучка в пересечении с какой-нибудь прямой определяют две пары гармонически сопряженных точек, то они определяют две пары гармонически сопряженных точек и в пересечении со всякой другой прямой. Пары плоскостей π, $\varkappa$ и σ, τ в этом случае называются *гармонически сопряженными.*

Нетрудно убедиться, что, пересекая гармонически сопряженные пары плоскостей пучка какой угодно плоскостью, не проходящей через ось этого пучка, мы получим на секущей плоскости две гармонически сопряженные пары лучей линейного пучка. Доказательство усматривается непосредственно, и мы останавливаться на нем не будем.

§ 3. Порядок точек на проективной прямой

89. Как мы знаем, в элементарной геометрии в основу определения порядка точек прямой кладется понятие о расположении точки м е ж д у двумя другими точками (см. главу II. n° 13). В проективной геометрии, где прямая мыслится в виде замкнутой линии, не имеет смысла вводить это понятие. Действительно, рассматривая три произвольные точки проективной прямой (или три точки окружности), мы не можем в их взаимном расположении отличать какую-нибудь одну сравнительно с другими.

Для определения порядка точек проективной прямой исходят из рассмотрения д в у х пар точек. Позволим себе сначала пользоваться наглядностью чертежа. Пусть A, B, C, D — четыре точки проективной прямой u, расположенные так, как это изображено на рис. 100 (где проективная прямая имеет вид замкнутой линии). Если бы мы пожелали, перемещая точку C по прямой u, привести ее к совмещению с точкой D, то нам непременно пришлось бы на один момент совместить точку C или с точкой A или с точкой B. Точно так же для совмещения точки A с точкой B нам пришлось бы провести точку A через положение C или D. В таком случае говорят, что пара A, B разделяет пару C, D.

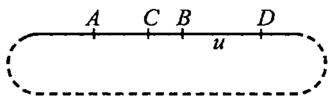


Рис. 100

В той же группе точек A, B, C, D пары A, D и B, C таковы, что для совмещения точек B и C нет необходимости какую-нибудь из них приводить в положение точки A или D и точно так же для совмещения точек A и D не нужно какую-нибудь из них проводить через положение B или C. О парах A, D и B, C говорят, что они не разделяют друг друга. Точно так же не разделяют друг друга пары A, C и B, D. Таким образом, наше наглядное представление о проективной прямой (или окружности) позволяет различать разделяющие и не разделяющие друг друга пары точек.

При логическом развертывании проективной геометрии разделенность пар точек на прямой принимается в качестве основного отношения порядка. Необходимые свойства этого отношения обусловлены в аксиомах второй группы.

Г р у п п а II. П р о е к т и в н ы е а к с и о м ы п о р я д к а.

Мы полагаем, что две точки на прямой могут находиться в известном отношении к двум другим точкам этой прямой и обозначаем это отношение словом "разделяют". При этом должны быть соблюдены требования следующих аксиом, которые и являются аксиомами порядка.

II.1. *Каковы бы ни были три различные точки A, B, C произвольной прямой u, существует на этой прямой такая точка D, что пара A, B разделяет пару C, D.*

Если пара A, B разделяет пару C, D, то все четыре точки A, B, C, D различны.

II.2. *Если пара A, B разделяет пару C, D, то пара B, A разделяет пару C, D и пара C, D разделяет пару A, B (т. е. свойство разделенности является взаимным и не зависит от того, в каком порядке рассматриваются точки пары).*

II.3. *Каковы бы ни были четыре различные точки A, B, C, D прямой u, из них могут быть всегда и единственным образом составлены две разделенные пары.*

II.4. *Пусть даны на прямой u точки A, B, C, D, E; если пары C, D и C, E разделяют пару A, B, то пара D, E не разделяет пару A, B* (рис. 101).

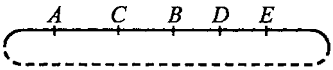


Рис. 101

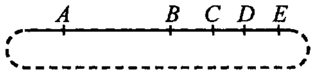


Рис. 102

II.5. *Пусть даны на прямой u точки A, B, C, D, E; если пары C, D и C, E не разделяют пару A, B, то пара D, E также не разделяет пару A, B* (рис. 102).

II.6. *Пусть A, B и C, D — две пары точек прямой u; A', B' и C', D' — их проекции из какого угодно центра на произвольную прямую u'. Если пары A, B и C, D разделяют друг друга, то пары A', B' и C', D' также разделяют друг друга. Короче: разделенность двух пар точек есть свойство, инвариантное относительно проектирования.*

На основании аксиомы II.6 можно дать определение понятию о разделенных парах прямых плоского пучка.

Именно, если a, b и c, d — две пары прямых, проходящих через некоторую точку, и s — какая-нибудь прямая, пересекающая a, b и c, d соответственно в точках A, B и C, D, то, как следует из аксиомы II.6, пары точек A, B и C, D при любом выборе прямой s либо будут всегда разделенными, либо будут всегда неразделенными. В первом случае мы будем говорить, что пары прямых a, b и c, d разделяют друг друга, во втором — что не разделяют. Таким образом, понятие разделенности пар прямых сводится к понятию разделенности пар точек; последнее же является у нас основным понятием, не сводимым к каким-либо более примитивным.

Излагая проективную геометрию, мы не ставим своей целью построение ее на базе минимальных требований. Поэтому мы не будем выяснять, являются ли все сформулированные нами аксиомы действительно необходимыми или некоторые из них могут быть доказаны. Существенно, что этих аксиом достаточно для доказательства теорем, составляющих материал проективной геометрии*).

*) Вместе с аксиомой непрерывности, приведенной в n° 94, эти аксиомы составляют полную систему.

Т е о р е м а 7. *Пусть на произвольной прямой u даны две точки A и B. Тогда все точки прямой u, отличные от A и B, могут быть распределены на два класса так, что любые две точки одного класса образуют пару, не разделяющую A, B, а каждая пара точек из разных классов разделяет пару A, B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно аксиоме I.3 на прямой u существует некоторая точка C, отличная от точек A и B. Отнесем в один класс точку C и всякую другую точку прямой u, если эта точка вместе с C образует пару, не разделяющую пару A, B. В другой класс отнесем каждую точку прямой u, если эта точка вместе с C разделяет пару A, B. Тогда все точки прямой u (кроме A и B) распределятся на два класса. Мы должны показать, что это распределение удовлетворяет требованиям, поставленным в формулировке теоремы.

Пусть C_1 и C_2 — две точки первого класса. Согласно условиям построения первого класса пары C, C_1 и C, C_2 не разделяют пару A, B. По аксиоме II.5 отсюда следует, что пара C_1, C_2 не разделяет пару A, B. Далее, пусть D_1 и D_2 — две точки второго класса. Согласно определению второго класса пары C, D_1 и C, D_2 разделяют пару A, B. По аксиоме II.4 отсюда заключаем, что пара D_1, D_2, как и в первом случае, не разделяет пару A, B. Таким образом, если две точки принадлежат одному классу, то они не разделяют пару A, B,

Рассмотрим теперь две точки M и N из разных классов. Пусть, например, M берется из первого класса, а N — из второго. Тогда пара C, M не разделяет пару A, B, а пара C, N разделяет пару A, B. Если бы пара M, N не разделяла пару A, B, то, так как наряду с этим пара M, C не разделяет пару A, B, по аксиоме II.5 пара C, N не должна была бы разделять пару A, B, что противоречит сделанному допущению. Следовательно, пара M, N разделяет пару A, B. Теорема доказана.

Заметим, что если описанное построение двух классов производить исходя не из точки C, а из какой-нибудь другой точки первого класса, то получатся те же самые два класса, какие мы получаем в первом случае. Если же выбрать за исходную некоторую точку второго класса и снова произвести распределение точек, то опять получатся первоначальные классы, только в другом порядке.

Применяя обычную в наглядной геометрии терминологию, назовем каждый из двух классов, о которых шла речь, *отрезком*. Тогда содержание предыдущей теоремы можно будет выразить следующими словами.

Две точки A, B прямой разделяют ее на два отрезка; если M и N суть точки одного отрезка, то пара M, N не разделяет пару A, B, если же M и N — точки разных отрезков, то пары M, N и A, B разделяют друг друга.

Чтобы отличить один из двух рассматриваемых отрезков от другого, нужно указать какую-нибудь его точку. Поэтому в проективной геометрии отрезок иногда обозначается тремя буквами; например,

ACB обозначает отрезок с концами A, B и с внутренней точкой C. Если пара C, D разделяет A, B, то ACB и ADB — различные отрезки с концами A, B. Отрезки ACB и ADB мы будем называть *дополнительными* друг к другу.

Теперь мы докажем одну теорему, которая позволит нам в проективной геометрии определить образ, вполне аналогичный евклидову треугольнику.

Теорема 8. *Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой; u, u' — две прямые, не проходящие ни через одну из точек A, B, C; пусть, далее, P, Q, R — точки, в которых прямая u пересекает прямые AB, BC и AC; P', Q', R' — точки, в которых эти же прямые пересекает прямая u'. Тогда если пара P, P' не разделяет пару A, B и пара Q, Q' не разделяет пару B, C, то пара R, R' не разделяет пару A, C* (рис. 103).

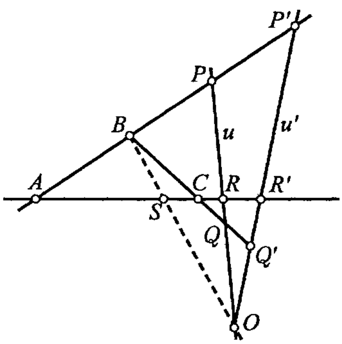


Рис. 103

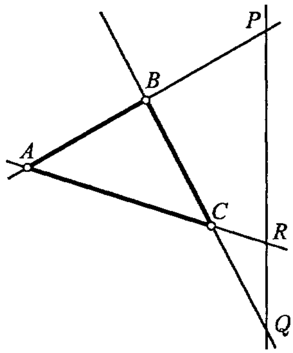


Рис. 104

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения прямых u и u'. Проектируя пары A, B и P, P' из точки O, как из центра, на прямую AC, мы получим в качестве их проекций пары A, S и R, R'. По условию теоремы пары A, B и P, P' не разделяют друг друга. Тогда по аксиоме II.6 пары A, S и R, R' должны быть также неразделенными. Проектируя снова из центра O на прямую AC пары B, C и Q, Q', мы получим пары S, C и R, R'. Так как B, C не разделяет Q, Q', то по той же аксиоме II.6 пары S, C и R, R' не разделяют одна другую. Итак, пары S, A и S, C не разделяют пару R, R'. Из аксиомы II.5 на основании этого находим, что A, C не разделяет R, R'. Теорема доказана.

Рассматривая три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, выберем один из двух отрезков с концами A, B и один из двух отрезков с концами B, C (на рис. 104 выбранные отрезки изображены жирными линиями). Условимся через AB и BC обозначать именно выбранные отрезки.

Возьмем на отрезке, дополнительном к AB, какую-нибудь точку P; на отрезке, дополнительном к BC, — какую-нибудь точку Q и проведем прямую PQ. Пусть R — точка, в которой прямая PQ пересекает прямую AC. Будем теперь произвольно изменять точки P и Q, сохраняя, однако, первую из них на отрезке, дополнительном к AB, вторую — на отрезке, дополнительном к BC. Тогда, как непосредственно вытекает из предыдущей теоремы, точка R, перемещаясь по прямой AC, будет все время оставаться внутри одного определенного отрезка из тех двух, которые определяются точками A и C. Отрезок с концами A, C, дополнительный к тому, в котором содержится точка R, условимся обозначать через AC. Мы видим, что *отрезок AC однозначно определяется заданием отрезков AB и BC*. Фигуру, составленную точками A, B, C и отрезками AB, BC и AC, будем называть *треугольником*, отрезки AB, BC и AC назовем его *сторонами*.

Нетрудно установить, что каждый трехвершинник ABC определяет четыре треугольника с общими вершинами A, B, C. Стороны этих треугольников являются взаимно дополнительными отрезками на прямых, которые служат сторонами трехвершинника. На рис. 105 изображены треугольники I, II, III, IV, определяемые одним трехвершинником ABC.

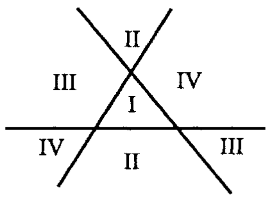


Рис. 105

Мы покажем сейчас, что в *проективной геометрии справедливо предложение Паша* (см. главу II, n° 13), *т. е. если даны треугольник ABC и в плоскости его — некоторая прямая a, не проходящая ни через одну из точек A, B, C, и если эта прямая проходит через какую-нибудь точку стороны AB, то она проходит либо через некоторую точку стороны BC, либо через некоторую точку стороны AC.*

Для доказательства прежде всего заметим, что согласно определению треугольника существует прямая u, которая пересекает прямые AB, BC и AC соответственно в трех точках P, Q, R так, что P лежит на отрезке, дополнительном к AB, Q — на отрезке, дополнительном к BC, и R — на отрезке, дополнительном к AC (рис. 106). Далее, так как наше рассмотрение ведется на проективной плоскости, то по аксиоме I.9 данная прямая a имеет общую точку T с прямой BC и общую точку U с прямой AC. Обозначим через S точку пересечения прямых a и AB.

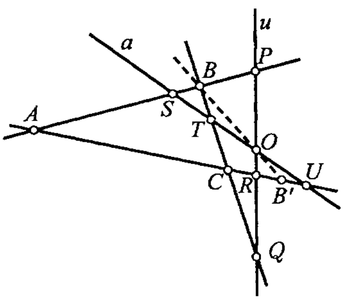


Рис. 106

Предположим, что точка T лежит на отрезке BQC и точка U

лежит на отрезке ARC. Тогда, по теореме 8, точка S должна принадлежать отрезку APB, что противоречит условию, что точка S принадлежит отрезку AB. Таким образом, прямая a хотя бы одну из двух сторон BC и AC данного треугольника пересекает. Тем самым предложение Паша доказано.

90. Отметим в проективном пространстве какую-нибудь плоскость и обозначим ее через α_∞. Условимся эту плоскость называть "бесконечно удаленной". Также будем называть "бесконечно удаленными" все точки и прямые, принадлежащие плоскости α_∞. Остальные элементы пространства назовем "конечными". (Мы берем слова "конечные" и "бесконечно удаленные" в кавычки, так как плоскость α_∞ выбрана произвольно и различие между "конечными" и "бесконечно удаленными" элементами является условным.)

Очевидно, каждая "конечная" прямая содержит одну и только одну бесконечно удаленную точку, именно точку ее пересечения с плоскостью α_∞. В множестве остальных, т. е. "конечных", точек произвольной "конечной" прямой мы введем при помощи вполне определенного и общего для всех прямых условия соотношение, выражаемое словом "между".

Пусть a — какая угодно "конечная" прямая, O_∞ — ее "бесконечно удаленная" точка. Рассмотрим три любые "конечные" точки A, B, C прямой a. Если точка B вместе с точкой O_∞ составляет пару B, O_∞, разделяющую пару A, C, то мы будем говорить, что в множестве "конечных" точек прямой a точка B лежит между точками A и C. Нетрудно убедиться, что таким образом установленное понятие "между" удовлетворяет требованиям гильбертовых аксиом порядка II.1–II.3.

В самом деле, согласно проективной аксиоме II.2, если пара B, O_∞ разделяет пару A, C, то она разделяет также и пару C, A; следовательно, если по нашему определению точка B лежит между A и C, то B лежит также между C и A. А это значит, что требование гильбертовой аксиомы II.1 удовлетворено.

Далее, каковы бы ни были "конечные" точки A и C, в силу проективной аксиомы II.1 всегда существует такая точка D, что пара C, O_∞ разделяет пару A, D. Следовательно, в множестве "конечных" точек прямой a всегда существует такая точка D, что C лежит между A и D. Значит, требование гильбертовой аксиомы II.2 также удовлетворено.

Наконец, по проективной аксиоме II.3, из четырех точек A, B, C, O_∞ можно лишь одним способом составить две разделенные пары. Следовательно, из трех точек A, B, C не более чем одна лежит между двумя другими. А в этом и заключается утверждение гильбертовой аксиомы II.3.

Установив в множестве "конечных" точек прямой понятие "между", мы можем высказать обычное в наглядной геометрии определение отрезка, называя отрезком совокупность точек прямой, расположенных между какими-нибудь двумя ее точками. Очевидно, отрезок, понимаемый в этом смысле, есть не что иное, как один из двух взаимно дополнительных отрезков, на которые разделяется точками A, B проходящая через них проективная прямая, а именно тот отрезок, который не содержит бесконечно удаленной точки.

Очевидно также, что фигура, являющаяся треугольником в смысле тех отношений, которые введены нами в системе "конечных" элементов проективного пространства, является вместе с тем треугольником в том смысле, как мы определили это понятие в проективной геометрии (см. предыдущий параграф). Поэтому можно утверждать, что в системе "конечных" элементов проективного пространства верна аксиома Паша, так как она доказана нами для проективного пространства в целом.

Итак, в системе "конечных" элементов мы ввели понятие "между" таким образом, что при этом удовлетворяются требования всех гильбертовых аксиом порядка.

Представим себе теперь, что "бесконечно удаленная" плоскость α_∞ вместе с принадлежащими ей "бесконечно удаленными" точками и прямыми совсем исключена из проективного пространства, или, как говорят в подобных случаях, что *проективное пространство разрезано вдоль плоскости* α_∞. Нетрудно убедиться, что соотношения взаимной принадлежности оставшихся элементов подчиняются гильбертовым аксиомам связи. Отсюда и на основании предыдущего мы можем утверждать, что по отношению к проективному пространству, разрезанному вдоль какой-либо его плоскости, верны все теоремы элементарной геометрии, основанные только на аксиомах первых двух групп Гильберта.

В частности, можно утверждать, что точек, прямых и плоскостей в проективном пространстве бесконечно много.

Процесс, который мы сейчас описали, является обратным тому, который был описан в предыдущем разделе. Там мы показали, как, дополняя евклидово пространство новыми элементами, можно превратить его в проективное пространство. Здесь мы видим, что проективное пространство, определенное при помощи специальных аксиом, становится в известных отношениях аналогичным евклидову, если удалить из него какую-нибудь плоскость.

В дальнейшем мы будем иногда пользоваться разрезом пространства вдоль той или иной плоскости как приемом, позволяющим проводить доказательства некоторых проективных теорем, основываясь на следствиях первых двух групп аксиом *элементарной* геометрии, которые нам известны из главы II.

В частности, сейчас мы воспользуемся этим приемом, чтобы охарактеризовать свойственный проективной прямой порядок расположения ее точек.

Пусть A и B — две точки проективной прямой u; они разделяют прямую u на два взаимно дополнительных отрезка. Рассмотрим один из них и условимся именно его обозначать через AB. Множество внутренних точек отрезка AB мы упорядочим, полагая, что точка M предшествует точке N, если пара A, N разделяет пару M, B. Нужно показать, что при этом выполнено условие транзитивности, т.е. что если M предшествует N, а N предшествует P, то M предшествует P. Проще всего для этой цели ввести на прямой u бесконечно удаленную точку. В качестве таковой удобно взять точку B. Тогда условие "N предшествует P" можно выразить таким способом: "в множестве конечных точек прямой u точка N лежит между A и P" или "N лежит внутри отрезка AP". Для доказательства транзитивности введенного нами отношения порядка достаточно в таком случае установить для множества конечных точек прямой u такое предложение: "Если M лежит внутри отрезка AN, а N — внутри отрезка AP, то M лежит также внутри отрезка AP". Но это предложение мы вывели в свое время из первых двух групп аксиом Гильберта (см. главу II, n° 14).

Мы будем говорить, что установленный на отрезке AB порядок соответствует направлению отрезка от A к B. На дополнительном к AB отрезке мы введем порядок, соответствующий направлению от B к A. После этого мы можем внутри произвольного отрезка ST прямой u установить вполне определенный порядок, требуя, чтобы в общих частях отрезка ST с отрезком AB и с отрезком, дополнительным к AB, следование точек отрезка ST совпадало со следованием точек в этих отрезках. Просматривая все возможные случаи расположения отрезка ST, именно: 1) когда отрезок ST содержится внутри отрезка AB, 2) когда отрезок ST содержится внутри отрезка, дополнительного к AB, 3) когда отрезок ST покрывает отрезок AB, 4) когда отрезок ST покрывает отрезок, дополнительный к AB, 5) когда отрезок ST покрывает часть отрезка AB и часть дополнительного отрезка, — читатель сам легко убедится, что во всех случаях множество внутренних точек отрезка S, T всегда возможно и при этом одним только способом упорядочить с соблюдением поставленного требования.

Свойство взаимного расположения точек проективной прямой, благодаря которому на каждом ее отрезке индуцируется указанным выше образом определенное следование внутренних точек, мы будем называть *циклическим порядком.* В зависимости от того, как упорядочено множество точек первоначально выбранного отрезка AB — по направлению от A к B или от B к A — на проективной прямой устанавливаются два различных циклических порядка. Они являются обратными друг другу в том смысле, что если соответственно первому из них из двух точек M, N, лежащих внутри некоторого отрезка ST, точка M предшествует точке N, то соответственно второму циклическому порядку точка M будет внутри отрезка ST следовать за точкой N.

Аксиомы II.1–II.6 мы называем *проективными аксиомами порядка*, так как ими обосновывается введение циклического порядка на проективной прямой.

91. В заключение настоящего раздела мы введем на проективной прямой топологию, т. е. придадим смысл понятию близости ее точек. Эта цель будет достигнута построением системы окрестностей для каждой точки проективной прямой.

Пусть дана какая-нибудь проективная прямая u. Условимся называть окрестностью произвольной ее точки M любой открытый отрезок (т. е. отрезок с исключенными концами), содержащий внутри себя точку M.

При этом будут иметь место следующие предложения (на которых основаны топологические теоремы элементарного анализа):

1. Каждая окрестность точки M содержит эту точку.

2. Общая часть двух окрестностей точки M включает окрестность точки M.

3. Окрестность точки M является окрестностью и всякой другой своей точки.

4. Для двух различных точек M и N существуют окрестности без общих точек.

Из этих утверждений первое и третье являются прямым следствием нашего определения окрестностей; второе и четвертое, хотя и очевидны с наглядной точки зрения, тем не менее требуют доказательства.

Чтобы сделать его наиболее простым, можно осуществить разрез проективной прямой и, таким образом, свести все дело к рассмотрению отрезков в евклидовом смысле. Приводить необходимые здесь рассуждения мы не будем.

Построив на проективной прямой системы окрестностей, мы открыли себе возможность говорить о предельных точках множеств, о пределах точечных последовательностей, о непрерывности заданных на проективной прямой функций и т. д., в общем, о всей совокупности фактов, называемых топологическими.

В ближайших же разделах эта возможность будет использована.

§ 4. Разделенность гармонических пар; непрерывность гармонического соответствия

92. Для дальнейшего существенно доказать, что *диагональные точки полного четырехвершинника не лежат на одной прямой.*

Пусть $ABCD$ — полный четырехвершинник с диагональными точками P, Q, R (обозначения соответствуют рис. 93). Нужно показать, что прямая PQ не проходит через R. Произведем разрез плоскости по прямой PQ (т. е. исключим прямую PQ); в множестве оставшихся элементов установим отношения порядка так, как это делалось в n° 90. При этом будут соблюдены аксиомы элементарной геометрии I, II.

В смысле установленных отношений порядка точка D лежит с той же стороны от прямой AB, с какой лежит точка C, и с той же стороны от прямой AC, с какой лежит точка B.

Следовательно, точка D лежит внутри $\angle BAC$. Отсюда и по теореме 11а n° 16 главы II заключаем, что прямая AD пересекает прямую BC, т. е. существует общая точка этих прямых. Значит, точка R при разрезе не исключена, тем самым утверждение доказано.

Отсюда имеем следствие:

Если P, Q, S — три различные точки одной прямой и T — четвертая гармоническая к ним, то все четыре точки P, Q, S, T различны.

Из рис. 94, где изображено построение взаимно гармонических пар P, Q и S, T, легко усмотреть следующую, с наглядной точки зрения вполне очевидную, теорему.

Теорема 9. *Взаимно гармонические пары разделяют друг друга.*

Эта теорема в дальнейшем будет играть весьма важную роль. Мы изложим сейчас строгое ее доказательство.

Пусть на прямой u даны две пары взаимно гармонических точек P, Q и S, T. Рассмотрим какой-нибудь четырехвершинник $ABCD$, для которого P, Q суть диагональные точки, а S, T лежат на противоположных сторонах BC и AD, проходящих через третью диагональную точку R (рис. 94).

Спроектируем точки P, Q, S, T из центра B на прямую AD, проекциями их будут соответственно точки A, D, R, T. Полученные точки мы вновь спроектируем на прямую u, но на этот раз в качестве центра проекций выберем точку C. Проекциями точек A, D, R, T будут соответственно точки Q, P, S, T.

Таким образом, после двух проектирований группа $PQST$ отображается на себя, но отдельные ее точки переставляются местами так, как показывает схема $\begin{pmatrix} P & Q & S & T \\ Q & P & S & T \end{pmatrix}$, где под каждой точкой записана та, в которую она переходит при отображении.

Заметим теперь, что четыре точки P, Q, S, T можно распределить в две пары лишь тремя способами: 1) $(PQ), (ST)$, 2) (PS), (QT) и 3) $(PT), (QS)$. Легко видеть, что пары (PS) и (QT) не могут разделять друг друга. В самом деле, если это — разделенные пары, то по аксиоме II.6 должны быть разделенными пары (QS) и (PT), так как они получаются из пар (PS) и (QT) в результате двух проектирований. Следовательно, в этом случае и второй и третий из трех возможных способов распределения точек $PQST$ на пары дают пары, разделяющие друг друга. Но это противоречит аксиоме II.3, согласно которой из четырех точек можно составить разделенные пары лишь одним способом.

Точно так же, если бы мы предположили, что разделенными являются пары (PT) и (QS), то должны были бы прийти к заключению, что и пары (PS) и (QT) друг друга разделяют, и, таким образом, снова имели бы противоречие. Так как по аксиоме II.3 один из трех способов составления пар из четырех точек обязательно приводит к разделенным парам, то, следовательно, разделенными будут именно пары (PQ) и (ST). Теорема доказана.

Эту теорему полезно формулировать еще следующим образом: *если пара M, M' гармонически сопряжена с парой A, B, то точки M и M' находятся в разных взаимно дополнительных отрезках, определяемых точками A, B.*

Если точки A, B фиксированы, то M' зависит только от M; это обстоятельство мы выразим символической записью $M' = f(M)$. Так как $MM'AB$ и $M'MAB$ в равной мере являются гармонически расположенными группами точек, то наряду с соотношением $M' = f(M)$ имеет место соотношение $M = f(M')$. Соответствие $M' = f(M)$ называют гармоническим. Очевидно, при гармоническом соответствии взаимно дополнительные отрезки с общими концами A, B взаимно однозначно отображаются друг на друга. Дальше мы изучим это отображение более подробно.

93. Рассмотрим на произвольной проективной прямой u какие-нибудь три точки M_1, M_2, M_3. Пусть M — четвертая гармоническая к рассматриваемым точкам, именно такая точка, что пара M, M_3 гармонически сопряжена с парой M_1, M_2. Условимся употреблять символическую запись $M = f(M_1, M_2, M_3)$, считая M функцией трех точек M_1, M_2, M_3. Очевидно, $f(M_1, M_2, M_3) = f(M_2, M_1, M_3)$, и если $M = f(M_1, M_2, M_3)$, то $M_3 = f(M_1, M_2, M)$.

Если мы зафиксируем точки M_1 и M_2, полагая $M_1 = A$, $M_2 = B$, а вместо M_3 будем писать M, то функция $f(A, B, M)$ совпадает с функцией $f(M)$, рассмотренной в конце предыдущего параграфа.

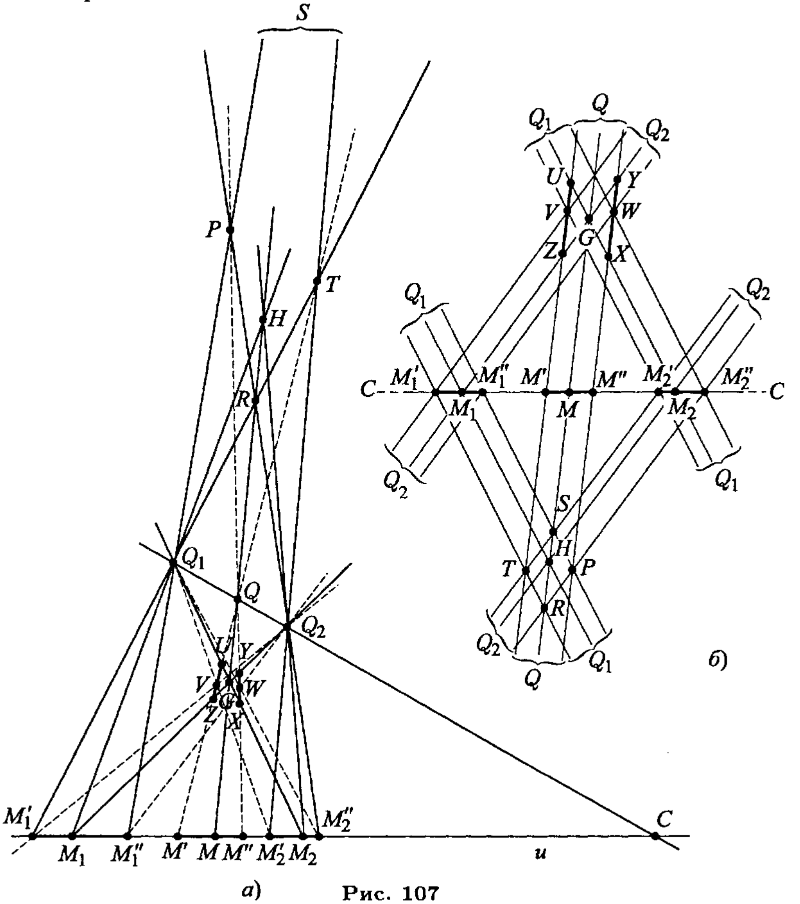
Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 10. *Функция $M = f(M_1, M_2, M_3)$ непрерывна при всех положениях точек M_1, M_2, M_3.*

В соответствии с тем, как мы определили в n° 91 окрестности точек проективной прямой, эту теорему можно формулировать еще следующим образом: каковы бы ни были точки M_1, M_2, M_3 и каким бы ни был открытый отрезок Δ, содержащий точку M, всегда могут быть указаны такие открытые отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, содержащие соответственно точки M_1, M_2, M_3, что если эти точки, изменяясь, остаются внутри отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, то точка M, изменяя свое положение, не выходит из пределов отрезка Δ.

Таким образом, доказательство теоремы 10 должно носить чисто конструктивный характер, поскольку оно сводится к построению отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ по данному отрезку Δ. Мы продемонстрируем доказательство лишь в двух частных случаях, которые только и понадобятся нам в дальнейшем, именно: 1) когда третий аргумент функции $f(M_1, M_2, M_3)$ является фиксированной точкой $M_3 = C$; 2) когда первые два аргумента функции $f(M_1, M_2, M_3)$ являются фиксированными точками $M_1 = A, M_2 = B$.

В первом случае мы имеем функцию двух аргументов $M = f(M_1, M_2, C)$. Пусть даны определенные положения точек M_1 и M_2. Построение соответствующей им точки M изображено на рис. 107 а), где Q_1, Q_2, G, H — четырехвершинник с диагональными точками M_1, M_2, Q, одна сторона которого Q_1Q_2 проходит через C, другая HG — через M.



а) **Рис. 107**

Предположим, что проективная плоскость разрезана вдоль прямой Q_1Q_2. Тогда, рассматривая какой-нибудь отрезок, концы которого нам известны, мы не будем иметь необходимость указывать какой именно из двух взаимно дополнительных отрезков с данными концами мы имеем в виду, так как на разрезанной проективной плоскости каждые две точки определяют отрезок однозначно.

На рис. 107 б изображено то же построение и с теми же обозначениями, но прямая Q_1Q_2 наглядно отброшена в бесконечность; на этом чертеже прямые, идущие в точку Q_1 (или в точку Q_2, или в точку Q), параллельны, точка M — середина отрезка M_1M_2. За дальнейшими рассуждениями легче следить по рис. 107б.

Представим себе, что точки M_1 и M_2 изменяют свое положение на прямой u. Так как точка C при этом остается неизменной, то мы можем для построения точки M всегда употреблять четырехвершинники с постоянными вершинами Q_1 и Q_2; тогда диагональная точка Q также будет оставаться постоянной, так как она является четвертой гармонической к трем неизменяющимся точкам Q_1, Q_2, C, в чем легко убедиться.

Если точка M_1, перемещаясь, остается внутри некоторого отрезка $M_1'M_1''$, а M_2, перемещаясь независимо от M_1, остается внутри отрезка $M_2'M_2''$, то переменная вершина H четырехвершинника, с помощью которого мы по данным M_1, M_2, C строим точку M, перемещаясь, остается внутри четырехугольника $PSTR$. Проекция точки H из точки Q на прямую u как раз и есть точка M. Когда точки M_1 и M_2 занимают крайние положения M_1' и M_2', точка H совмещается с точкой T, а M попадает в некоторую точку M'; когда M_1 и M_2 занимают крайние положения M_1'' и M_2'', точка H совмещается с точкой P, а M попадает в точку M''. При всех остальных положениях точек M_1 и M_2 точка M остается между M' и M''.

Теперь легко сообразить, как по наперед назначенной окрестности $\Delta = M'M''$ точки M построить такие окрестности Δ_1 и Δ_2 точек M_1 и M_2, что при изменении этих точек принадлежность их соответственно окрестностям Δ_1 и Δ_2 обеспечивает принадлежность точки M окрестности Δ. Для этого нужно поступить таким образом: спроектировать точки M' и M'' из точки Q: на проектирующих лучах отметить отрезки ZU и XY, вырезаемые прямыми Q_1M_1 и Q_2M_2; внутри отрезка ZU взять произвольную точку V, внутри отрезка XY произвольную точку W. Проекциями точек V, W из Q_2 на прямую u будут точки M_1', M_1'', ограничивающие отрезок $\Delta_1 = M_1'M_1''$; проекциями этих же точек V, W из Q_1 будут точки M_2', M_2'', ограничивающие отрезок $\Delta_2 = M_2'M_2''$.

Построенные отрезки Δ_1 и Δ_2 являются искомыми окрестностями точек M_1 и M_2, т.е. если M_1 и M_2 меняют свое положение, но остаются соответственно внутри Δ_1 и Δ_2, то $M = f(M_1, M_2, C)$ меняет свое положение, но остается внутри Δ. Так как окрестности Δ_1 и Δ_2, обладающие этим свойством, могут быть построены при любом задании точек M_1, M_2 и окрестности Δ, то, следовательно, функция $M = f(M_1, M_2, C)$ непрерывна при любых положениях точек M_1 и M_2 на проективной прямой u.

Обращаясь к другому частному случаю, который мы хотели рассмотреть, именно, когда в соотношении $M = f(M_1, M_2, M_3)$ зафиксированы $M_1 = A$ и $M_2 = B$, мы ограничимся ссылкой на рис. 108; из этого чертежа без всяких объяснений видно, как по данной окрестности $\Delta = M'M''$ точки M построить окрестность $\Delta_3 = M_3'M_3''$

точки M_3 такую, что при изменении M_3, пока она остается внутри Δ_3, точка M остается внутри Δ. Возможность этого построения означает непрерывность функции $M = f(A, B, M_3)$.

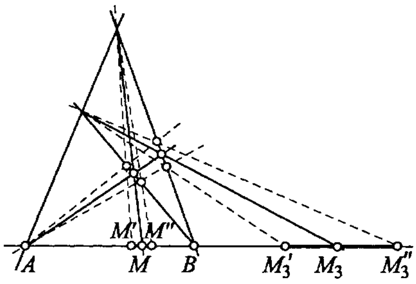


Рис. 108

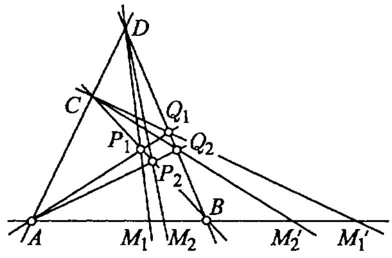


Рис. 109

Останавливаться на доказательстве непрерывности функции $M = f(M_1, M_2, M_3)$ по всей совокупности ее аргументов мы не будем, так как теорема 10 в ее общей формулировке нам не понадобится.

Напротив, функцию одного аргумента $M' = f(A, B, M)$ мы изучим еще с другой точки зрения.

Пусть на прямой u введен некоторый циклический порядок так, что множество точек одного из отрезков с концами A, B упорядочено по направлению от A к B, а множество точек дополнительного к нему отрезка упорядочено по направлению от B к A. Условимся обозначать через AB первый из этих двух отрезков.

Если точка M находится внутри отрезка AB, то согласно теореме 9 точка $M' = f(A, B, M)$ должна находиться на отрезке, дополнительном к AB. Обозначим через M_1 и M_2 два произвольных положения переменной точки M внутри AB, через M_1' и M_2' — соответствующие положения точки M'. Мы покажем сейчас, что *всякий раз, когда точка M_1 на отрезке AB предшествует точке M_2, точка M_1' на отрезке, дополнительном к AB, следует за точкой M_2'* (рис. 109).

Для доказательства построим полные четырехвершинники CDP_1Q_1 и CDP_2Q_2 с общими диагональными точками A, B так, чтобы противоположные стороны DP_1 и CQ_1 первого из них проходили через M_1 и M_1'; противоположные стороны DP_2 и CQ_2 второго — через M_2 и M_2'. Спроектируем группу точек ABM_1M_2 из центра D на прямую CB. Мы получим в качестве проекций группу точек CBP_1P_2. Эту группу будем проектировать из центра A на прямую DB. Группа точек CBP_1P_2 при этом отобразится в DBQ_1Q_2. Проектируя, наконец, группу точек DBQ_1Q_2 из центра C на прямую u, найдем в проекции группу $ABM_1'M_2'$. Таким образом, после ряда проектирований точки ABM_1M_2 переходят соответственно в $ABM_1'M_2'$.

Если в установленном на отрезке AB порядке следования его точек M_1 предшествует M_2, то, по определению этого порядка, пара A, M_2 разделяет пару M_1, B. В силу инвариантности свойства разделенности двух пар при проектированиях (см. аксиому II.6) пара B, M_1' должна разделять пару A, M_2'. А это и означает, что если множество точек отрезка, дополнительного к AB, упорядочить по направлению от B к A, то в этом порядке M_1' следует за M_2'.

Полученный результат наглядно можно описать такими словами: *в том случае, когда переменная точка M пробегает отрезок AB в направлении от A к B, гармонически соответствующая ей точка M' пробегает дополнительный к AB отрезок в противоположном направлении, т. е. также от A к B.*

Если на отрезке AB дана группа точек $M_1, M_2, \dots, M_n$, расположенных так, что каждая точка с меньшим номером предшествует каждой точке с бо́льшим номером, то на отрезке, дополнительном к AB, точкам этой группы будут соответствовать точки $M_1', M_2', \dots, M_n'$, расположенные так, что каждая точка с ме́ньшим номером следует за каждой точкой с бо́льшим номером.

Такое отображение одного направленного отрезка на другой (тоже направленный), при котором порядок точек любой упорядоченной группы либо всегда сохраняется, либо всегда переходит в противоположный, называется *упорядоченным* (соответственно — *прямым* или *обратным*).

Употребляя эту терминологию и принимая во внимание все изложенное до сих пор, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 11. *Гармоническое отображение $M' = f(A, B, M)$ отрезка AB на дополнительный к нему отрезок является непрерывным и обратно упорядоченным.*

Замечание. До сих пор мы предполагали точки гармонической группы различными и определение четвертой гармонической точки к трем данным было дано нами лишь для того случая, когда данные точки различны. Поэтому в теореме 10 случай совпадения аргументов M_1, M_2, M_3 функции $M = f(M_1, M_2, M_3)$, строго говоря, должен быть выделен для специального рассмотрения как особый.

Не задерживаясь на этом вопросе для функции $M = f(M_1, M_2, M_3)$, мы рассмотрим функцию $M' = f(A, B, M)$ при $M = A$ и $M = B$.

Пусть AB обозначает один из двух отрезков, определяемых на проективной прямой точками A и B. Из теоремы 11 следует, что если M, оставаясь внутри AB, монотонно приближается к точке A, то M' приближается к точке A навстречу M, оставаясь внутри отрезка, дополнительного к AB. Поэтому, если мы желаем определить функцию $M' = f(A, B, M)$ при $M = A$ так, чтобы она при этом положении M оказалась непрерывной, то должны положить при $M = A$ также и $M' = A$, т.е. должны считать $f(A, B, A) = A$. Аналогично $f(A, B, B) = B$.

В отображении проективной прямой на себя, при котором точке M соответствует точка $M' = f(A, B, M)$, точки A и B соответствуют сами себе. Они называются *двойными* (или *фиксированными*, или *неподвижными*) *точками* гармонического отображения.

§ 5. Аксиома непрерывности. Проективная система координат на прямой

94. Мы подходим к весьма ответственному пункту изложения проективной геометрии — установлению принципа определения точек проективного пространства при помощи координат.

В евклидовой геометрии координаты точек определяются весьма просто при помощи измерений. В проективной геометрии, где нет аксиом конгруэнтности, конструирование системы координат требует некоторых ухищрений. Мы изложим этот вопрос, следуя методу Ф. Клейна.

Нам понадобится, кроме рассмотренных выше двух групп проективных аксиом — связи и порядка, еще аксиома непрерывности (Дедекинда), являющаяся единственной аксиомой третьей группы. Чтобы удобнее было ее формулировать, мы введем надлежащую терминологию.

Представим себе, что проективное пространство разрезано вдоль некоторой плоскости, которая условно считается бесконечно удаленной. Тогда в множестве точек каждой конечной прямой (т. е. прямой, не лежащей в бесконечно удаленной плоскости) может быть введено соотношение, выражаемое словом “между” (см. n° 90). Именно, если O_∞ — бесконечно удаленная точка некоторой конечной прямой a, A, B, C — три другие ее точки, то точка C считается расположенной на прямой a между точками A и B, если пара C, O_∞ разделяет пару A, B. Тогда, как нам известно, по отношению к конечным элементам пространства будут удовлетворены все требования первых двух групп аксиом Гильберта. Опираясь на указанные аксиомы, мы можем множество конечных точек прямой упорядочить так, что всякий раз, когда точка C следует за некоторой точкой A и предшествует точке B, она оказывается расположенной между A и B в том смысле, как это сейчас было определено. С соблюдением этого требования множество конечных точек прямой может быть упорядочено лишь двумя различными способами, причем вводимые при этом порядки являются обратными друг другу (см. n° 14). Условимся каждый из них называть *линейным порядком* на проективной прямой, разрезанной в бесконечно удаленной точке.

Теперь мы можем сформулировать аксиому непрерывности, единственную в третьей группе и последнюю в проективной аксиоматике вообще.

Группа III. Аксиома непрерывности (Дедекинда).

III. *Пусть a — произвольная проективная прямая, разрезанная в некоторой точке O_∞. Если множество остальных точек этой прямой разбито на два класса так, что:* 1) *каждая точка попадает в один и только в один класс;* 2) *каждый класс содержит точки;* 3) *каждая точка первого класса в одном из двух линейных порядков на прямой a предшествует каждой точке второго класса, — то либо в первом классе существует точка, следующая за всеми точками этого класса, либо во втором классе существует точка, предшествующая всем остальным его точкам.*

Более коротко эту аксиому мы выразим такими словами:

В каждом дедекиндовом сечении упорядоченного множества точек разрезанной проективной прямой точно один из двух классов имеет замыкающий элемент.

95. На ближайших страницах показывается, как можно ввести координатную систему на проективной прямой.

Пусть даны произвольная проективная прямая a и на ней три точки, из которых две помечены числами 0 и 1, а третья — знаком ∞ (рис. 110). Будем называть точку ∞ бесконечно удаленной, остальные точки прямой a — конечными. Условимся представлять себе прямую a разрезанной в точке ∞ и введем на этой прямой линейный порядок таким образом, чтобы точка 0 предшествовала точке 1. Далее пометим числом 2 точку, которая вместе с точкой 0 составляет пару, гармонически сопряженную с парой $1, \infty$. По теореме 9 пара $0, 2$ разделяет пару $1, \infty$. Поэтому в линейном порядке на разрезанной прямой a точка 1 лежит между 0 и 2; иначе говоря, точка 2 следует за точками 0 и 1. Затем пометим числом 3 точку, которая вместе с точкой 1 составляет пару, гармонически сопряженную с парой $2, \infty$; числом 4 — точку, которая вместе с точкой 2 составляет пару, гармонически сопряженную с парой $3, \infty$, и т. д. Так у нас появится бесконечная последовательность, точек, помеченных числами $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Очевидно, в этой последовательности точка p при любом $p \geq 1$ следует за каждой из точек $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

После этого пометим числом -1 точку, которая вместе с точкой 1 составляет пару, гармонически сопряженную с парой $0, \infty$; числом -2 точку, которая вместе с точкой 0 составляет пару, гармонически сопряженную с парой $-1, \infty$, и т. д. В общем итоге мы получим точки $\ldots, -m, -m+1, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$, которые в имеющемся на разрезанной прямой a линейном порядке следуют друг за другом. Эти точки мы будем называть *целочисленными точками проективной шкалы.*

Чтобы удобнее выполнить фактическое их построение, мы поступим следующим образом.

Проведем через точку ∞ прямой a две произвольные прямые, одну из которых пометим числом 1, другую — буквой u; на прямой u выберем какую-нибудь точку A (рис. 110). Проведем также прямые $A0$

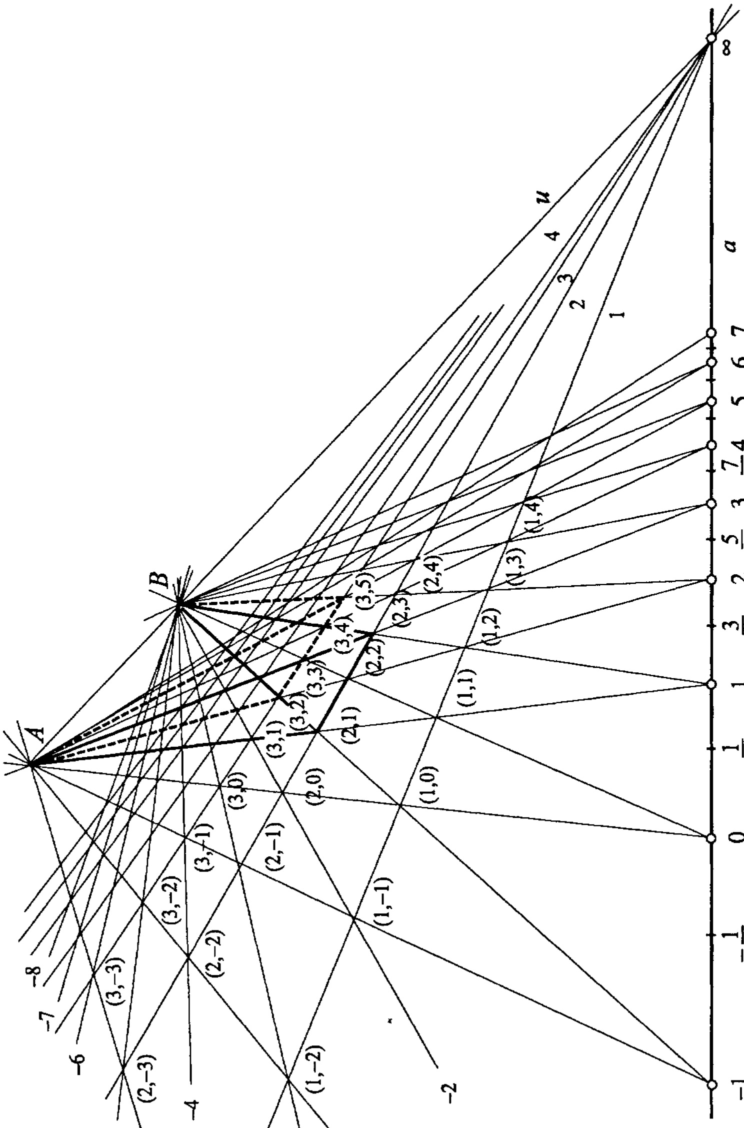


Рис. 110

и $A1$, соединяющие точку A с точками 0 и 1. Эти прямые в пересечении с прямой 1 определят две точки, которые мы обозначим соответственно через $(1,0)$ и $(1,1)$. Далее, проводя через точки 0 и $(1,1)$ прямую, мы найдем точку B, в которой эта прямая пересекает прямую u. После этого, проводя через точки B и 1 прямую, определим на прямой 1 точку $(1, 2)$, а проектируя ее из точки A на прямую a, получим точку, которую мы условились выше помечать числом 2, так как именно эта точка вместе с точкой 0 составляет пару, гармонически сопряженную с парой $1, \infty$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть полный четырехвершинник с вершинами $A, B, (1, 1)$ и $(1, 2)$: точки 1 и ∞ являются диагональными точками этого четырехвершинника, а точки 0 и 2 лежат на двух его противоположных сторонах; но это и означает гармоническую сопряженность пар $0, 2$ и $1, \infty$. После того как точка 2 уже построена, проектируя ее из точки B на прямую 1, мы получим точку $(1, 3)$, а проектируя последнюю из точки A на прямую a, получим точку 3; после того как точка 3 построена, проектируя ее из точки B на прямую 1, мы получим точку $(1, 4)$, а проектируя эту точку из точки A на прямую a, получим точку 4 и т. д.

Так же могут быть получены целочисленные точки, помеченные отрицательными числами. Например, проектируя точку $(1, 0)$ из точки B, мы получим на прямой a точку -1; проектируя эту точку из A на прямую 1, получим точку $(1, -1)$, а проектируя последнюю из точки B, получим на прямой a точку -2 и т. д.

По построению, две прямые, из которых одна соединяет точку B с некоторой целочисленной точкой n, а другая соединяет A с целочисленной точкой $n + 1$, при любом n пересекаются на прямой 1.

Наряду с этим м о ж н о д о к а з а т ь, что две прямые, из которых одна соединяет точку B с некоторой целочисленной точкой n, а другая соединяет A с целочисленной точкой $n+2$, при любом n также пересекаются на одной определенной прямой. Эта прямая у нас на рис. 110 помечена числом 2, а расположенные на ней точки попарного пересечения указанных прямых обозначены через $\ldots, (2, -3), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), \ldots$

Точно так же две прямые, из которых одна соединяет точку B с точкой n, а другая — точку A с точкой $n + 3$, при любом n пересекаются на определенной прямой 3; на этой прямой, таким образом, появляется система точек $\ldots, (3, -3), (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), \ldots$

Две прямые, из которых одна соединяет точку B с точкой n, а другая — точку A с точкой $n + 4$, при любом n пересекаются на определенной прямой 4 и т. д.

Доказательство этих утверждений достаточно будет провести для системы точек $\ldots, (2, -3), (2, -2), (2, -4), (2, 0), (2, 1), \ldots$ После этого распространение его на дальнейшие системы точек усматривается непосредственно.

Итак, мы докажем, что точки $\ldots, (2, -3), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1)$ $(2, 2), \ldots$ лежат на одной прямой.

С этой целью мы прежде всего заметим, что при любом n пара точек $A, (1, n)$ гармонически сопряжена с парой точек $(2, n), n$.

Действительно, эти пары получаются проектированием из точки B двух взаимно гармонических (по построению) пар $\infty, n-1$ и $n-2, n$ прямой a и, следовательно, по теореме 6 n° 86, сами гармонически сопряжены друг с другом.

Пометим числом 2 прямую, которая идет из точки ∞ в точку $(2, 0)$. Как мы видим, две пары лучей $u, 1$ и $2, a$, исходящих из точки ∞, проектируют две гармонически сопряженные пары точек $A, (1, 0)$ и $(2, 0), 0$. Поэтому указанные лучи в пересечении с любой прямой определяют на ней две гармонически сопряженные пары точек (см. n° 86, теорема 6).

В частности, прямая, соединяющая точки A и n, пересекает лучи $u, 1$ и a в трех точках $A, (1, n)$ и n, а луч 2 — в точке, которая должна быть четвертой гармонической к трем указанным. Но таковой, как мы видели, является точка $(2, n)$. А так как четвертая гармоническая к трем данным точкам определяется единственным образом, то, следовательно, точка $(2, n)$ при любом n лежит на прямой 2.

После того, как доказано, что точки $\ldots, (2, -3), (2, -2), (2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2), \ldots$ лежат на одной прямой, легко показать, что точки $\ldots, (-3, 3), (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), \ldots$ также лежат на одной прямой. Для этого следует прежде всего заметить, что пара $A, (2, n)$ при любом n гармонически сопряжена с парой $(3, n), (1, n)$. После этого, пользуясь прямолинейным расположением каждой из двух систем точек $\ldots, (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), \ldots$ и $\ldots (2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2), \ldots$, можно доказать прямолинейность расположения системы точек $\ldots, (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), \ldots$ по точной аналогии с предыдущим рассуждением. Точно так же может быть доказано, что точки $\ldots, (4, -2), (4, -1), (4, 0), (4, 1), (4, 2), \ldots$ лежат на одной прямой, и т. д. Теперь у нас есть возможность доказать следующую вспомогательную теорему, весьма важную в дальнейшем изложении.

Теорема А. *Если x и y — целые числа и $z = \dfrac{x+y}{2}$ — тоже целое число, то целочисленная точка z вместе с точкой ∞ составляет пару, гармонически разделяющую пару целочисленных точек x и y.*

Точку, которая, вместе с точкой ∞ составляет пару, гармонически разделяющую на прямой a пару данных точек P и Q, условимся называть *проективным центром отрезка PQ* (проективный центр, конечно, зависит от выбора точки ∞). Тогда только что сформулированную теорему можно будет высказать такими словами:

Если x, y и $z = \dfrac{x+y}{2}$ — целые числа, то целочисленная точка является проективным центром отрезка, определяемого целочисленными точками x и y.

Доказывая эту теорему, мы предположим для определенности, что $y > x$. Из условия следует, что разность $y - x$ есть четное число. В случае $y - x = 2$ утверждение теоремы, очевидно, правильно, так как то обстоятельство, что при $y - x = 2$ точка $\frac{x+y}{2}$ является проективным центром отрезка xy, положено нами в основу определения проективной шкалы. Именно на этом свойстве основана конструкция, представленная рис. 110, где можно видеть, что прямая, соединяющая точку A с точкой y, и прямая, соединяющая точку B с точкой x, в пересечении с прямой 1 определяют две точки, которые вместе с точками A и B являются вершинами четырехвершинника, обладающего диагональными точками $\frac{x+y}{2}$ и ∞ и парой противоположных сторон, проходящих через точки x и y. А это и означает, что точка $\frac{x+y}{2}$ есть проективный центр отрезка xy. Подобным же способом можно проверить теорему в случае $y - x = 4$, $y - x = 6$ и т. д.

Пусть, например, $y - x = 4$. Рассмотрим прямую, соединяющую точку A с точкой y, прямую, соединяющую точку B с точкой x, и точки пересечения рассматриваемых прямых с прямой 2. Эти точки вместе с точками A и B являются вершинами четырехвершинника, обладающего диагональными точками $\frac{x+y}{2}$ и ∞ и парой противоположных сторон, проходящих через точки x и y. А это и означает, что точка $\frac{x+y}{2}$ есть проективный центр отрезка xy. На рис. 110 жирной линией показан четырехвершинник, при рассмотрении которого можно увидеть, что точка $1 = \frac{3+(-1)}{2}$ является проективным центром отрезка с концами 3 и -1; в этом случае как раз $y - x = 3 - (-1) = 4$.

Если $y - x = 6$, то проверка утверждения теоремы производится таким же способом, только на помощь приходится привлекать прямую 3, при $y - x = 8$ — прямую 4 и т. д.

На рис. 110 жирным пунктиром показан четырехвершинник, из рассмотрения которого можно видеть, что точка $2 = \frac{5+(-1)}{2}$ есть проективный центр отрезка с концами 5 и -1; в этом случае $y-x = 5-(-1) = 6$.

До сих пор мы имели дело только с целочисленными точками. Сейчас мы будем "сгущать" проективную шкалу, дополняя ее новыми точками, обладающими дробными пометками.

Построим прежде всего проективный центр отрезка $(0, 1)$ и пометим его числом $\frac{1}{2}$. После этого, отправляясь от трех точек $0, \frac{1}{2}$ и ∞, построим проективную шкалу точно так же, как мы строили проективную шкалу, отправляясь от точек $0, 1, \infty$. Мы получим систему точек, играющих в новой шкале роль целочисленных; мы пометим их числами: $\ldots, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ Нетрудно сообразить, что все точки вида $\ldots, -\frac{4}{2}, -\frac{2}{2}, 0, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ новой шкалы совпадают соответственно с точками $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ старой. В самом деле, точка 2 новой шкалы совпадает с точкой 1 старой, так как $\left(0, \frac{2}{2}\right)$

и $(0, 1)$ имеют общий проективный центр, именно точку $\frac{1}{2}$; точка 4 новой шкалы совпадает с точкой 2 старой, так как отрезки $\left(0, \frac{4}{2}\right)$ и $(0, 2)$ имеют общий проективный центр. Действительно, по теореме А отрезок $\left(0, \frac{4}{2}\right)$ имеет своим проективным центром точку $\frac{2}{2}$ новой шкалы, и по той же теореме отрезок $(0, 2)$ имеет своим проективным центром точку 1 старой шкалы; но, как только что было замечено, точки $\frac{2}{2}$ и 1 совпадают. Далее, точка $\frac{6}{2}$ новой шкалы совпадает с точкой 3 старой, так как отрезки $\left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right)$ и $(1, 3)$ имеют общее начало (мы уже знаем, что точки $\frac{2}{2}$ и 1 тождественны) и общий проективный центр, каковым является точка $\frac{4}{2}$ новой шкалы и в то же время точка 2 старой. Продолжая это рассуждение, мы установим тождественность всех точек вида $\frac{2n}{2}$ и n; аналогично устанавливается тождественность точек $-\left(\frac{2n}{2}\right)$ и n.

Теперь ясно, что все точки новой шкалы, т. е. шкалы, определяемой точками $0, \frac{1}{2}, \infty$, можно получить также, если к точкам старой шкалы прибавить проективные центры отрезков вида $(n, n+1)$.

Кроме того, очевидно, что в качестве обобщения теоремы А можно теперь формулировать следующую теорему.

Теорема Б. *Каковы бы ни были целые числа x и y, число $z = \frac{x+y}{2}$ всегда определяет проективный центр отрезка xy.*

Сгущение шкалы, которое мы произвели, прибавив к целочисленным точкам проективные центры отрезков $(n, n+1)$, нет оснований останавливать на первом шаге. Рассматривая точки вида $\frac{n}{2}$ (среди которых содержатся все целочисленные, определяемые сократимыми дробями), мы построим проективный центр каждого отрезка $\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ и пометим его числом $\dfrac{\frac{n}{2} + \frac{n+1}{2}}{2} = \dfrac{2n+1}{2^2}$.

Так у нас получатся точки, которые вместе с имевшимися ранее определяются числами вида $\frac{n}{2^2}$; применяя описанный прием к этим точкам, мы получим точки, определяемые числами вида $\dfrac{n}{2^3}$, и т. д.

Таким образом, какова бы ни была двоичная дробь $\frac{n}{2^m}$, на разрезанной проективной прямой a существует одна вполне определенная точка, которая в нашем построении получает пометку числом $\dfrac{n}{2^m}$. На основании предыдущего мы можем утверждать, что при заданном m точки вида $\frac{n}{2^m}$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ составляют проективную шкалу, определяемую точками $0, \dfrac{1}{2^m}$ и ∞. Отсюда имеем следующее обобщение теоремы Б.

Теорема В. *Каковы бы ни были двоичные дроби x и y, число $z = \frac{x+y}{2}$ всегда есть проективный центр отрезка xy.*

В самом деле, пусть $x = \frac{n}{2^p}$ и $y = \frac{n}{2^q}$; приводя эти дроби к общему знаменателю, мы представим их в виде $x = \frac{M}{2^r}$; и $y = \frac{N}{2^r}$, после чего можем рассматривать x и y как целочисленные точки шкалы, определяемой точками $0, \frac{1}{2^r}$ и ∞. Тогда очевидно, что теорема В является прямым следствием теоремы Б.

96. Теперь мы докажем, что точки, помечаемые двоичными дробями (впредь мы будем их называть двоично-рациональными), покрывают проективную прямую a всюду плотно.

Доказательство будем вести методом "от противного". Предположим, что некоторый отрезок PQ не содержит внутри себя двоично-рациональных точек, и пусть для определенности в линейном порядке на разрезанной проективной прямой a точка P предшествует точке Q.

При сделанном предположении нам придется рассмотреть три случая:

1) Существуют двоично-рациональные точки, предшествующие точке P, и существуют двоично-рациональные точки, следующие за точкой Q.

2) Существуют двоично-рациональные точки, предшествующие P, но нет двоично-рациональных точек, следующих за Q.

3) Существуют двоично-рациональные точки, следующие за Q, но нет предшествующих P.

Нам надлежит показать, что во всех этих случаях, предполагая отрезок PQ свободным от двоично-рациональных точек, мы получаем противоречие.

Рассмотрим первый случай.

Распределим все точки разрезанной проективной прямой a на два класса, относя во второй класс каждую двоично-рациональную точку, следующую за точкой Q, и вместе с тем каждую другую точку прямой a, следующую за такой двоично-рациональной точкой; в первый класс отнесем все остальные точки. Очевидно, указанное распределение точек является дедекиндовым сечением. По аксиоме III, существует точка, производящая это сечение, т. е. замыкающая один из классов. Обозначим ее через Q_0. Нетрудно сообразить прежде всего, что Q_0 не может предшествовать Q. Кроме того, если Q и Q_0 различны, то между ними нет двоично-рациональных точек; в противном случае точка Q_0 была бы точкой второго класса и при этом не первой (не замыкающей) его точкой. Наряду с этим любая окрестность точки Q_0 на прямой a включает двоично-рациональные точки. В самом деле, если бы существовала окрестность точки Q_0, не включающая двоично-рациональных точек, то все точки этой окрестности, в том числе и Q_0, принадлежали бы первому классу, причем точка Q_0 была бы не последней (не замыкающей) его точкой. Заметим еще, что Q_0 не может совпасть с точкой ∞, так как по условию за точкой Q имеются двоично-рациональные точки, которые необходимо отделяют Q_0 от ∞.

Теперь мы произведем распределение всех точек разрезанной проективной прямой a на два класса, относя на этот раз в первый класс каждую двоично-рациональную точку, предшествующую точке P, и вместе с тем каждую другую точку прямой a, предшествующую такой двоично-рациональной точке; во второй класс отнесем все остальные точки. Мы снова получим некоторое дедекиндово сечение; пусть P_0 — производящая его точка. Подобно предыдущему, можно установить, во-первых, что P_0 не может следовать за P и если P_0 и P различны, то между ними нет двоично-рациональных точек, во-вторых, что каждая окрестность точки P_0 содержит двоично-рациональные точки и, наконец, что P_0 не может совпасть с точкой ∞.

Таким образом, отрезок P_0Q_0, как и отрезок PQ, должен быть свободен от двоично-рациональных точек, но в любой окрестности точки P_0 и в любой окрестности точки Q_0 они содержатся.

Пусть X и Y — две произвольные точки прямой a, отличны от точки ∞, $Z = f(X, Y, \infty)$ — точка, которая вместе с ∞ составляет пару Z, ∞, гармонически разделяющую пару X, Y. Точка Z есть не что иное, как проективный центр отрезка X, Y. Пусть, далее; $R_0 = f(P_0, Q_0, \infty)$ — проективный центр отрезка P_0Q_0. Как нам известно, точка R_0 находится внутри отрезка P_0Q_0. По теореме 10 функция $f(X, Y, \infty)$ непрерывна при $X = P_0$, $Y = Q_0$. Поэтому существуют окрестности Δ_1 и Δ_2 точек P_0 и Q_0 такие, что коль скоро точка X находится внутри Δ_1, а точка Y внутри Δ_2, точка $Z = f(X, Y, \infty)$ находится внутри отрезка P_0Q_0. Согласно предыдущему Δ_1 и $\Delta 2$ содержат двоично-рациональные точки. Если x — двоичная дробь, соответствующая некоторой точке X внутри Δ_1, и y — двоичная дробь, соответствующая точке Y внутри Δ_2, то $Z = f(X, Y, \infty)$ по теореме В будет двоично-рациональной точкой, которой соответствует двоичная дробь $\frac{x+y}{2}$. Следовательно, внутри отрезка P_0Q_0 необходимо должна содержаться некоторая двоично-рациональная точка. Но по построению этот отрезок свободен от двоично-рациональных точек. Таким образом, допуская, что имеется отрезок PQ, не содержащий двоично-рациональных точек, мы пришли — пока в первом из трех перечисленных выше случаев — к противоречию.

Обратимся ко второму случаю.

По сути дела мы должны сейчас показать, что двоично-рациональные точки не могут все предшествовать какой-либо точке P разрезанной проективной прямой. Допуская обратное, распределим все точки разрезанной прямой на два класса. В первый класс мы отнесем каждую двоично-рациональную точку и каждую другую точку, предшествующую какой-либо двоично-рациональной. Все остальные точки отнесем во второй класс. Так мы получим некоторое дедекиндово сечение. По аксиоме III имеется производящая его точка P_0. Подобно тому как делалось при рассмотрении предыдущего случая, можно показать, во-первых, что если P_0 и P различны, то между ними нет двоично-рациональных точек, иначе говоря, нет двоично-рациональных точек на всем протяжении прямой от P_0 до ∞, и, во-вторых, что каждая окрестность точки P_0 включает двоично-рациональные точки.

Отсюда тотчас можно прийти к противоречию.

В самом деле, пусть X — произвольная точка разрезанной прямой и Y — точка, которая определяется по данной точке X так, что пара O, Y гармонически разделяет пару X, ∞. Употребляя введенное нами обозначение, мы можем написать: $Y = f(X, \infty, O)$. Положим $R_0 = f(P_0, \infty, O)$; эта точка лежит внутри отрезка (P_0, ∞), так как O предшествует P_0. По теореме 10 функция $Y = f(X, \infty, O)$ непрерывна при $X = P_0$. Поэтому существует такая окрестность Δ точки P_0, что коль скоро X находится внутри Δ, точка Y будет находиться внутри отрезка (P_0, ∞). Окрестность Δ, как и всякая другая окрестность точки P_0, содержит двоично-рациональные точки. Пусть x — двоичная дробь, соответствующая некоторой точке X внутри Δ, Y — двоично-рациональная точка, определяемая двоичной дробью $y = 2x$. По теореме В точка X является проективным центром отрезка (O, Y), следовательно, Y соответствует X в соотношении $Y = f(X, \infty, O)$. Но так как X лежит внутри Δ, то Y лежит внутри отрезка (P_0, ∞). Таким образом, этот отрезок содержит двоично-рациональную точку, вопреки его определению. Ввиду полученного противоречия мы должны отвергнуть допущение второго из трех перечисленных выше случаев.

Третий случай нет смысла отдельно рассматривать, так как он по существу не отличается от предыдущего. Наше утверждение полностью доказано.

97. Мы убедились, что двоично-рациональные точки покрывают проективную прямую всюду плотно. Но ими не исчерпываются все точки проективной прямой. Существует бесконечное множество других точек, с которыми мы будем сейчас сопоставлять по определенному закону вещественные числа, отличающиеся от двоичных дробей.

Пусть M — какая угодно точка разрезанной проективной прямой. Пусть $\{P\}$ — совокупность всех двоично-рациональных точек, предшествующих точке $M, \{Q\}$ —совокупность всех двоично-рациональных точек, следующих за M, причем если M — сама двоично-рациональная точка, то мы включим ее, например, в первую из этих совокупностей. Обозначим через $\{p\}$ совокупность двоичных дробей, соответствующих точкам из $\{P\}$, через $\{q\}$ — совокупность двоичных дробей, соответствующих точкам из $\{Q\}$. Из предыдущего следует, что:

1) если p — произвольная дробь из $\{p\}$ и q — произвольная дробь из $\{q\}$, то $p < q$;

2) совокупности $\{p\}$ и $\{q\}$ вместе составляют все множество двоично-рациональных дробей.

Поэтому существует единственное число x, которое больше любого числа из $\{p\}$*) и меньше любого числа из $\{q\}$. Это число мы и поставим в соответствие точке M.

Таким образом, каждая точка разрезанной проективной прямой получает вполне определенное, соответствующее ей число, которое впредь мы будем называть ее *проективной координатой.*

Устроенное нами сопоставление определенной координаты с каждой точкой (кроме ∞) обладает следующими свойствами:

1. Разным точкам соответствуют разные координаты, причем если точка M_1 с координатой x_1 предшествует точке M_2 с координатой x_2, то $x_1 < x_2$.

В самом деле, так как множество двоично-рациональных точек на проективной прямой всюду плотно, то между M_1 и M_2 должна существовать некоторая двоично-рациональная точка P с координатой p. Но тогда $x_1 < p < x_2$.

2. Каково бы ни было вещественное число x, существует точка с координатой x.

В самом деле, если x — двоичная дробь, то, как известно из предыдущего, имеется одна двоично-рациональная точка, которой соответствует в качестве координаты данная дробь x. Если же x — иное вещественное число, то для доказательства утверждения мы распределим все двоичные дроби на две совокупности: $\{p\}$ и $\{q\}$. В совокупность $\{p\}$ мы отнесем каждую двоичную дробь p, если $p < x$, в совокупность $\{q\}$ отнесем каждую двоичную дробь q, если $x < q$. Одновременно мы можем мыслить множество двоично-рациональных точек, распределенных на две совокупности: $\{P\}$ и $\{Q\}$, образованные точками с координатами, соответственно, из совокупностей $\{p\}$ и $\{q\}$. Далее, мы произведем в множестве всех вообще точек разрезанной проективной прямой дедекиндово сечение, относя в первый класс его каждую точку из $\{P\}$ и каждую иную точку прямой, если эта точка предшествует какой-либо точке из $\{P\}$; во второй класс отнесем остальные точки.

По аксиоме III, существует точка M, производящая это дедекиндово сечение. Очевидно, M следует за каждой точкой из $\{P\}$ и предшествует каждой точке из $\{Q\}$. Поэтому координата точки M должна быть больше каждой дроби из $\{p\}$ и меньше каждой дроби из $\{q\}$. Но таким числом является единственно лишь данное число x. Следовательно, координата M есть x.

3. Соответствие между точками разрезанной проективной прямой и их координатами непрерывно, т.е. если последовательность точек M_n имеет пределом точку M, то координата x точки M будет пределом последовательности координат x_n точек M_n, и обратно.

---

*) Либо есть наибольшее из этих чисел, если M — двоично-рациональная точка.

Короче: из $M_n \to M$ следует $x_n \to x$ и из $x_n \to x$ следует $M_n \to M$. Это свойство вытекает из того, что 1) соответствие между точками разрезанной числовой оси и их координатами взаимно однозначно; 2) каждое вещественное число является координатой некоторой точки; 3) порядок расположения точек совпадает с порядком их координат. Ввиду этих обстоятельств, если x — координата точки M, то каждой окрестности точки M на разрезанной проективной прямой соответствует на числовой оси окрестность координаты x; каждой окрестности координаты x на числовой оси соответствует окрестность точки M на разрезанной проективной прямой. Таким образом, если M_n попадает в некоторую окрестность точки M, то x_n попадает в соответствующую окрестность x, и обратно, если x_n попадает в некоторую окрестность x, то M_n попадает в соответствующую окрестность точки M. Значит, если $M_n \to M$, то $x_n \to x$; если $x_n \to x$, то $M_n \to M$.

4. Если M_1 и M_2 — две произвольные точки с координатами x_1 и x_2, то проективный центр отрезка M_1M_2 имеет своей координатой число $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

Для доказательства возьмем последовательность двоичных дробей $p_1^{(n)}$, сходящуюся к x_1, и последовательность двоичных дробей $p_2^{(n)}$, сходящуюся к x_2. Таким образом, $\lim_{n\to\infty} p_1^{(n)} = x_1$ и $\lim_{n\to\infty} p_2^{(n)} = x_2$ Обозначим через $P_1^{(n)}$ и $P_2^{(n)}$ двоично-рациональные точки с координатами $p_1^{(n)}$ и $p_2^{(n)}$, через $c^{(n)}$ — координату проективного центра отрезка $P_1^{(n)}P_2^{(n)}$ и через c — координату проективного центра отрезка M_1M_2. Из теоремы 10 следует, что $c = \lim_{n\to\infty} c^{(n)}$. С другой стороны, по теореме С (которая по отношению к двоично-рациональным точкам утверждает то, что сейчас мы желаем доказать для произвольных точек) имеем: $c^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_1^{(n)} + p_2^{(n)}}{2}$. Отсюда $c = \lim_{n\to\infty} \frac{p_1^{(n)} + p_2^{(n)}}{2} = = \frac{x_1 + x_2}{2}$. А это и требовалось установить.

Первые три из доказанных сейчас свойств проективной координатной системы можно выразить совместно еще такими словами: построением проективных координат осуществляется взаимно однозначное и непрерывное соответствие между совокупностью всех точек разрезанной проективной прямой и совокупностью всех вещественных чисел; соответствие это еще таково, что точки прямой и соответствующие им числа (координаты) находятся в одинаковых отношениях порядка. Следует заметить, что этими свойствами, помимо вышеописанной (проективной) системы координат, обладают и многие другие координатные системы.

Напротив, четвертое свойство является характеристичным для этой системы и с самого начала было положено нами в основу ее определения. Иначе говоря, среди всех мыслимых координатных систем на разрезанной проективной прямой проективная система выделяется тем, что в ней координаты проективного центра отрезка всегда равны среднему арифметическому координат его концов. Подчеркнем в заключение этого раздела, что проективная система определяется заданием трех точек $0, 1$ и ∞. Меняя их, мы будем получать разные проективные системы координат на одной и той же прямой.

§ 6. Проективная система координат на плоскости и в пространстве

98. Пусть на произвольной проективной плоскости дана некоторая прямая. Обозначим ее символом ∞, условимся называть бесконечно удаленной и будем представлять себе, что проективная плоскость разрезана вдоль этой прямой.

Мы укажем сейчас определенный способ, по которому с точками разрезанной проективной плоскости можно взаимно однозначно сопоставить пары вещественных чисел. Эти числа мы будем называть проективными координатами соответствующих точек.

Проективная система координат определяется заданием следующих геометрических элементов: какой-либо точки O, которую мы назовем началом координатной системы; двух прямых, проходящих через O, одну из которых мы назовем осью x, другую — осью y; и еще точки E, не принадлежащей ни одной из осей.

Пусть ∞_x и ∞_y — бесконечно удаленные точки осей x и y, т.е. точки их пересечения с прямой ∞ (рис. 111). Спроектируем точку E из ∞_y на ось x и из ∞_x на ось y. Каждую из полученных проекций пометим числом 1. После этого введем на оси x линейную систему проективных координат, определяемую тремя точками $O, 1, \infty_x$ так, как это мы делали в предыдущем разделе, аналогично введем координатную систему на оси y, определяя ее точками $O, 1, \infty_y$.

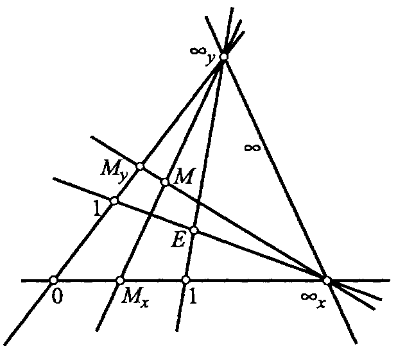


Рис. 111

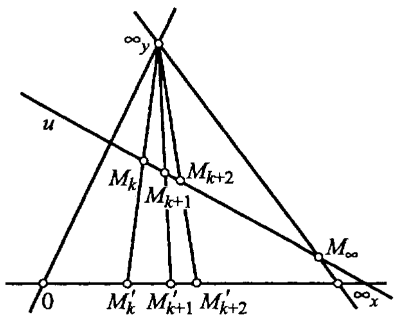


Рис. 112

Рассмотрим теперь точку M, произвольно расположенную на разрезанной проективной плоскости. Обозначим через M_x проекцию точки M из ∞_y на ось x и через M_y — проекцию этой же точки M из ∞_x на ось y. Точка M_x в линейной системе координат на оси x имеет некоторую координату x, и точно так же точка M_y на оси y имеет координату y. Числа x и y мы будем называть *проективными координатами точки M на плоскости.*

Очевидно, каждая точка оси x имеет координаты вида $(x, 0)$, каждая точка оси y имеет координаты вида $(0, y)$; координаты точки O суть $(0, 0)$. Точка E имеет обе координаты, равные 1, поэтому ее иногда называют "точкой единиц".

Мы приступим сейчас к доказательству основного свойства проективных координат, формулируемого следующей теоремой.

Теорема 12. *В проективных координатах каждая прямая определяется алгебраическим уравнением первой степени.*

Доказательство. Пусть дана некоторая прямая u; возьмем на ней две произвольные точки M_0 и M_1 и обозначим через M_∞ бесконечно удаленную точку прямой u (т. е. точку пересечения прямой u с прямой ∞). По трем точкам M_0, M_1 и M_∞ мы построим на прямой u проективную шкалу (в точности так, как мы строили ее в предыдущем разделе, отправляясь от точек O, $1, \infty$) с целочисленными точками $\ldots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots$ Рассмотрим три соседние точки M_k, M_{k+1}, M_{k+2} и точку M_∞ (рис. 112). По основному свойству проективной шкалы точка M_{k+1} должна быть проективным центром отрезка $M_k M_{k+2}$, т. е. пара M_k, M_{k+2} должна гармонически разделяться парой M_{k+1}, M_∞. Проектируя указанные четыре точки из ∞_y на ось x, мы получим в качестве проекций точки M'_k в $M'_{k+1}, M'_{k+2}, \infty_x$. Так как свойство гармонической сопряженности инвариантно относительно проектирований, то пара M'_k, M'_{k+2} гармонически разделяется парой M'_{k+1}, ∞_x. Иначе говоря, точка M'_{k+1} есть проективный центр отрезка $M'_k M'_{k+2}$. Поэтому между координатами точек M_k, M_{k+1}, M_{k+2} имеет место соотношение

$$\frac{x_k + x_{k+2}}{2} = x_{k+1}. \tag{$*$}$$

Аналогично

$$\frac{y_k + y_{k+2}}{2} = y_{k+1}. \tag{$**$}$$

Пусть теперь M — произвольная точка плоскости с координатами x, y и $L(M) = Ax + By$ — линейная функция этой точки. Подберем числа A, B, C так, чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{aligned} L(M_0) + C = Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ L(M_1) + C = Ax_1 + By_1 + C = 0. \end{aligned} \tag{$***$}$$

Из соотношений $(*)$ и $(**)$ находим:

$$L(M_k) + L(M_{k+2}) - 2L(M_{k+1}) = 0.$$

Следовательно, $L(M_k)+C=0$ и $L(M_{k+1})+C=0$, то $L(M_{k+2})+C=0$. На основании этого и вследствие равенств $(***)$ мы получаем для любой целочисленной точки M_n:

$$L(M_n)+C=Ax_n+By_n+C=0.$$

Таким образом, координаты всех целочисленных точек прямой u удовлетворяют уравнению первой степени

$$Ax+By+C=0.$$

Нетрудно сообразить, что этому уравнению удовлетворяют координаты не только целочисленных, но и всех двоично-рациональных точек. В самом деле, двоично-рациональные точки мы вводили в свое время при помощи последовательного "сгущения" проективной шкалы; условимся называть "первым сгущением" шкалы совокупность всех целочисленных точек вместе с проективными центрами определяемых ими отрезков, "вторым сгущением" — совокупность всех точек "первого сгущения" вместе с проективными центрами определяемых ими отрезков и т. д.

Если точка $M_{k+\frac{1}{2}}$ есть проективный центр отрезка M_kM_{k+1}, то для ее координат имеют место равенства

$$x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2},\quad y_{k+\frac{1}{2}}=\frac{y_k+y_{k+1}}{2},$$

вследствие чего

$$L(M_k)+L(M_{k+2})-2L\left(M_{k+\frac{1}{2}}\right)=0.$$

Поэтому в случае $L(M_k)+C=0$ и $L(M_{k+1})+C=0$ должно быть $L\left(M_{k+\frac{1}{2}}\right)+C=0$. Таким образом, уравнению $Ax+By+C=0$ удовлетворяют координаты всех точек первого сгущения; аналогично рассуждая, убедимся, что ему же удовлетворяют координаты всех точек второго сгущения, и т. д. Так как функция $Ax+By+C=0$ непрерывна и равна нулю в точках множества, всюду плотного на прямой u, то эта функция равна нулю вообще во всех точках прямой u. Иначе говоря, координаты каждой точки прямой u удовлетворяют уравнению $Ax+By+C=0$; вместе с тем, очевидно, координатами точек прямой u исчерпываются все пары (x,y) решений этого уравнения. Следовательно, это уравнение есть не что иное, как уравнение прямой u. Мы видим, что оно представляет собой алгебраическое уравнение первой степени. Наше утверждение доказано.

Наряду с уравнением

$$Ax+By+C=0,$$

которое мы будем называть *общим уравнением прямой*, мы будем употреблять также следующие специальные его формы:

1) Уравнение, разрешенное относительно одной из координат, например, y:

$$y = kx + l;$$

оно по внешнему виду тождественно уравнению с угловым коэффициентом, часто употребляемому в аналитической геометрии евклидовой плоскости. Но, конечно, сейчас называть параметр **угловым** коэффициентом прямой не следует, так как в проективной геометрии все метрические понятия, в том числе и величина угла, отсутствуют.

2) Уравнение, содержащее координаты x_0, y_0 одной из точек прямой:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

3) Уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

оно по форме записи тождественно с так называемым уравнением "в отрезках", хорошо известным из элементарной аналитической геометрии. Но сейчас мы должны понимать a и b не как длины отрезков, отсекаемых прямой на осях, а как проективные координаты точек пересечения прямой с осями.

99. Перейдем к рассмотрению проективных координат в пространстве.

Пусть в проективном пространстве дана некоторая плоскость. Обозначим ее символом ∞, условимся называть бесконечно удаленной и будем представлять себе, что пространство разрезано по этой плоскости.

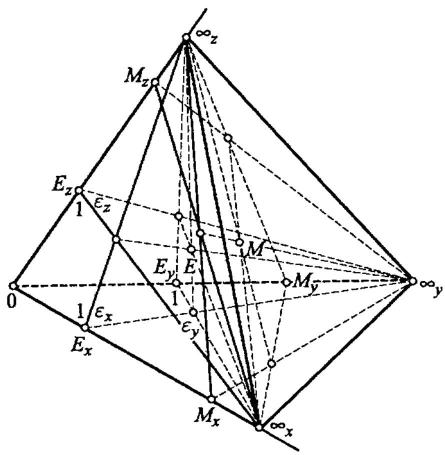


Рис. 113

В разрезанном проективном пространстве мы введем координатную систему, задавая какую-нибудь точку O, которую будем называть началом системы, три прямые, проходящие через O, которые назовем соответственно осью x, осью y и осью z, и еще точку E, не принадлежащую ни одной из трех плоскостей, определяемых попарно взятыми осями (рис. 113).

Пусть $\infty_x, \infty_y, \infty_z$ — бесконечно удаленные точки осей, т. е. точки пересечения этих осей с плоскостью ∞. Обозначим через ε_x плоскость, определяемую точками E, ∞_y, ∞_z, через ε_y — плоскость, определяемую точками E, ∞_x, ∞_z и через ε_z — плоскость, определяемую точками E, ∞_x, ∞_y. Плоскость ε_x пересечет ось x в некоторой точке E_x, плоскость ε_y пересечет ось y в некоторой точке E_y и плоскость ε_z пересечет ось z в некоторой точке E_z; пометим каждую из полученных точек числом 1.

После этого введем на оси x линейную систему проективных координат, определяемую тремя точками $O, 1, \infty_x$; аналогично введем координатные системы на оси y и на оси z, определяя их соответственно точками $O, 1, \infty_y$ и $O, 1, \infty_z$.

Рассмотрим теперь точку M, произвольно расположенную в разрезанном проективном пространстве.

Обозначим через M_x точку пересечения плоскости $M\infty_y\infty_z$ с осью x, через M_y — точку пересечения плоскости $M\infty_x\infty_z$ с осью y и через M_z — точку пересечения плоскости $M\infty_x\infty_y$ с осью z. Точка M_x в линейной системе координат на оси x имеет некоторую координату x, и также точки M_y на оси y и M_z на оси z имеют соответственно координаты y и z.

Числа x, y, z мы будем называть *проективными координатами точки M в пространстве.* Теперь мы докажем основное свойство проективных координат, формулируемое следующей теоремой.

Теорема 13. *В проективных координатах каждая плоскость определяется алгебраическим уравнением первой степени.*

Доказательство. Чтобы облегчить изложение доказательства этой теоремы, мы ограничимся выводом уравнения лишь таких плоскостей, которые не проходят через начало координат или через какую-нибудь из точек $\infty_x, \infty_y, \infty_z$.

Пусть дана некоторая плоскость α, пересекающая оси координат в точках A, B, C. Если точки A, B, C на координатных осях имеют соответственно координаты a, b, c, то при указанном выше ограничении должно быть: $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Мы покажем, что плоскость α имеет уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{*}$$

Рассмотрим на плоскости α произвольную точку M; пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — ее координаты. Обозначим через μ плоскость, определяемую точками M, ∞_y, ∞_z, через R — точку пересечения плоскости μ с осью x, через P и Q — точки, в которых прямая пересечения плоскостей α и μ встречает плоскости Oxy и Oxz (рис. 114). Очевидно, прямая PQ содержит точку M.

В проективной системе координат на плоскости $R\infty_y\infty_z$ прямая PQ имеет уравнение вида

$$\frac{y}{p} + \frac{z}{q} = 1.$$

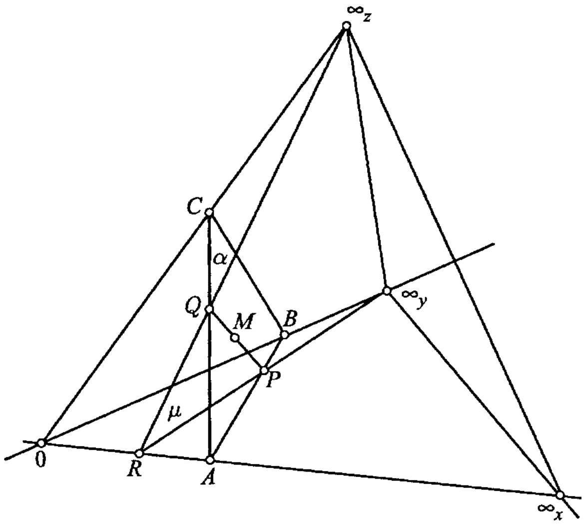


Рис. 114

Этому уравнению должны удовлетворять координаты $y = \bar{y}, z = \bar{z}$, так как точка M принадлежит прямой PQ; следовательно, имеем:

$$\frac{\bar{y}}{p} + \frac{\bar{z}}{q} = 1.$$

Определим теперь параметры p, q Для этого заметим, что уравнение прямой AB в проективных координатах на плоскости Oxy есть

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Но проективными координатами точки P на плоскости Oxy являются числа $\bar{x}, p$ (а в пространстве — числа $\bar{x}, p, 0$). Поэтому существует соотношение

$$\frac{\bar{x}}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

откуда

$$p = b\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right).$$

Аналогично из уравнения

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1,$$

определяющего прямую AC на плоскости Oxz, при $\bar{x} = x, z = q$ находим:

$$q = x\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right).$$

При этих значениях p и q равенство (**) дает:

$$\frac{\bar{y}}{b\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)} + \frac{\bar{z}}{c\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)} = 1$$

или

$$\frac{\bar{x}}{a} + \frac{\bar{y}}{b} + \frac{\bar{z}}{c} = 1.$$

Таким образом, координаты любой точки плоскости α удовлетворяют уравнению (*), и тем самым требуемое доказано*).

Специальные виды уравнения плоскости, когда она содержит начало координат или бесконечно удаленные точки осей, мы предоставляем вывести читателю. Все они охватываются общей формой

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Поскольку плоскость определяется уравнением первой степени, прямая в пространстве может быть задана двумя уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Эти уравнения путем алгебраических преобразований можно привести к "каноническому" виду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты какой-нибудь точки прямой.

100. До сих пор мы устраивали координатную систему на разрезанной проективной прямой, на разрезанной проективной плоскости и в разрезанном проективном пространстве. Иначе говоря, когда мы рассматривали проективную прямую, то с точками ее сопоставляли координаты так, что одна точка (которая обозначалась символом ∞) никакой координаты не получала. Когда мы рассматривали проективную плоскость и проективное пространство, то с точками

*)Мы должны были бы еще доказать, что координаты любой точки, не лежащей на плоскости α, не удовлетворяют уравнению (*); но это сразу следует из однозначной разрешимости уравнения (*) относительно каждой координаты.

их сопоставляли соответственно пары и тройки координат так, что точки некоторой прямой, а в пространстве — некоторой плоскости (обозначенных символом ∞), не получали никаких координат.

Чтобы можно было проективную прямую, проективную плоскость и проективное пространство арифметизировать в целом, приходится употреблять однородные координаты. В первую очередь мы опишем систему однородных координат на проективной прямой.

Пусть дана некоторая проективная прямая a. Возьмем на ней произвольно три точки, две из них пометим числами 0 и 1, а третью — символом ∞. Вслед за тем введем на прямой a проективную систему координат, определяемую точками $0, 1, \infty$. В этой системе любая точка прямой имеет определенную координату, за исключением точки ∞. Пусть M — какая угодно точка прямой a с координатой x; два числа x_1 и x_2, *не равные одновременно нулю*, мы будем называть однородными координатами точки M, если отношение $x_1 : x_2$ равно x. С точкой ∞ мы сопоставим однородные координаты x_1, x_2 при условии $x_2 = 0$. Построенная таким образом система однородных координат обладает следующими свойствами:

1) Каждая точка проективной прямой имеет однородные координаты.

2) Если x_1, x_2 — однородные координаты точки M, то $\rho x_1, \rho x_2$, где ρ — любое число, отличное от нуля, также суть однородные координаты точки M.

3) Разным точкам соответствуют всегда разные отношения их однородных координат.

4) Если $x_1 \to x_1^0$, $x_2 \to x_2^0$, то переменная точка M с однородными координатами x_1, x_2 имеет пределом точку M^0 с однородными координатами x_1^0, x_2^0.

Оперируя с однородными координатами, особенно важно хорошо представлять себе смысл второго свойства. Именно, каждая точка проективной прямой имеет бесконечно много пар однородных координат, которые, таким образом, сами по себе не определяются соответствующей им точкой: определяется лишь их отношение; подходящим выбором множителя ρ можно одну из координат $\rho x_1, \rho x_2$ сделать равной любому числу (например, единице). Так, однородными координатами точек 0 и ∞, которые мы теперь условимся обозначать через A_1 и A_2, являются пары чисел $(0, 1)$ и $(1, 0)$. В качестве однородных координат точки 1, которую мы теперь будем обозначать через E, можно указать пару чисел (1, 1). Очевидно, однородные координаты на проективной прямой определяются заданием точек $A_1(0,1), A_2(1,0)$ и $E(1,1)$.

101. Чтобы арифметизировать в целом проективную плоскость, сначала введем на ней систему проективных неоднородных координат с началом в точке O, осями Ox и Oy, с точкой единиц E и с бесконечно удаленной прямой ∞ (бесконечно удаленные точки осей обозначим через ∞_x и ∞_y). Тогда все точки проективной плоскости, кроме точек прямой ∞, будут иметь проективные координаты.

Вслед за тем мы введем на проективной плоскости однородные координаты; в первую очередь мы определим их для точек, не лежащих на прямой ∞. Однородными координатами точки M в случае, когда эта точка не лежит на прямой ∞, мы назовем три числа x_1, x_2, x_3, *не равных одновременно нулю*, и таких, что $x_1 : x_3 = x$, $x_2 : x_3 = y$, где x и y — проективные (неоднородные) координаты точки M. В том случае, когда точка M находится на прямой ∞, она не имеет неоднородных координат, и предыдущее определение однородных координат для такой точки непригодно. Однородными координатами точки M_∞, расположенной на прямой ∞, мы назовем три числа x_1, x_2, x_3 при условиях:

1) $x_3 = 0$;

2) из двух чисел x_1, x_3 хотя бы одно отлично от нуля;

3) отношение $x_1 : x_2$ равно отношению $B : -A$, где A и B — коэффициенты уравнения

$$Ax + By + C = 0$$

любой прямой, проходящей через точку M_∞, т. е. x_1 и x_2 должны быть таковы, что

$$Ax_1 + Bx_2 + C = 0.$$

Докажем допустимость третьего условия, именно, докажем, что отношение $B : -A$ не зависит от выбора прямой, проходящей через точку M_∞.

Пусть

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

— уравнения двух прямых, проходящих через M_∞. Так как эти две прямые имеют единственную общую точку M_∞, а этой точке, поскольку она принадлежит прямой ∞, не соответствуют в качестве ее неоднородных координат никакие числа, то два уравнения $(*)$ должны быть несовместными. Поэтому необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $B_1 : -A_1 = B_2 : -A_2$. Тем самым устанавливается, что третье условие допустимо.

Из определения однородных координат следует, что, какова бы ни была точка M, лежащая на прямой $Ax + By + C = 0$, ее однородные координаты удовлетворяют соотношению $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$.

Это соотношение мы будем называть уравнением прямой в однородных координатах и, изменяя обозначения коэффициентов A, B, C на u_1, u_1, u_3, будем писать его в виде:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

(оно не содержит свободного члена, т. е. является однородным; это обстоятельство характерно для однородных координат).

Основные свойства однородных координат на проективной плоскости аналогичны тем, какими обладают однородные координаты на прямой, именно:

1) каждая точка проективной плоскости имеет однородные координаты;

2) если x_1, x_2, x_3 — однородные координаты точки M, то $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$ (ρ — любое число, отличное от нуля) также суть однородные координаты точки M;

3) разным точкам соответствуют всегда разные отношения $x_1{:}x_2{:}x_3$ их однородных координат;

4) если $x_1 \to x_1^0$, $x_2 \to x_2^0$, $x_3 \to x_3^0$, то переменная точка M с однородными координатами x_1, x_2, x_3 имеет пределом точку M^0 с однородными координатами x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Существенно еще подчеркнуть, что ни для какой точки все три однородные координаты не обращаются в нуль одновременно. Любую из трех координат $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$, если она отлична от нуля, можно сделать равной единице за счет подходящего выбора множителя ρ. Например, для точки O в качестве однородных координат можно указать три числа $0, 0, 1$, для точки ∞_x — три числа $1, 0, 0$, для точки ∞_y — три числа $0, 1, 0$ и для точки E — три числа $1, 1, 1$. В дальнейшем вместо ∞_x, ∞_y и 0 мы будем писать A_1, A_2, A_3 и будем называть эти точки *вершинами координатного триэдра.* Очевидно, координатный триэдр $A_1(1,0,0), A_2(0,1,0), A_3(0,0,1)$ и точка единиц $E(1,1,1)$, будучи выбранными, определяют систему однородных координат на проективной плоскости. Выбор этих четырех точек должен быть подчинен лишь одному условию: никакие три из них не должны находиться на одной прямой.

Прямая A_1A_2 проективной плоскости (ранее обозначавшаяся символом ∞) содержит точки с третьей координатой, равной нулю. Соотношение $x_3 = 0$ есть не что иное, как уравнение прямой A_1A_2. Прямые A_2A_3 и A_1A_3 имеют соответственно уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

102. Построение однородных координат в проективном пространстве производится вполне аналогично только что описанному построению на плоскости. Сначала заданием осей Ox, Oy, Oz и плоскости ∞ должна быть введена система проективных неоднородных координат. В этой системе имеют координаты все точки пространства, за исключением точек плоскости ∞. Затем определяются однородные координаты. Если точка M не принадлежит плоскости ∞, то ее однородными координатами называются любые четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4, *не равные одновременно нулю*, такие, что $x_1 : x_4 = x$, $x_2 : x_4 = y$, $x_3 : x_4 = z$, где x, y, z — неоднородные координаты точки M.

Если точка M_∞ принадлежит плоскости ∞, то ее однородные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 определяются следующими условиями:

1) $x_4 = 0$;

2) из трех чисел x_1, x_2, x_3 хотя бы одно отлично от нуля;

3) отношение*) $x_1 : x_2 : x_3$ равно отношению $m : n : p$, где m, n, p — параметры в уравнениях

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

любой прямой, проходящей через точку M_∞.

Докажем допустимость третьего условия, именно, докажем, что отношение $m : n : p$ не зависит от выбора прямой, проходящей через точку M_∞.

Пусть

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{$*$}$$

и

$$\frac{x' - x'_0}{m'} = \frac{y' - y'_0}{n'} = \frac{z' - z'_0}{p'} \tag{$**$}$$

— уравнения двух прямых, проходящих через точку M_∞ плоскости ∞. Так как обе прямые проходят через одну точку, то должна существовать плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{α}$$

содержащая обе прямые. Это обстоятельство накладывает известное аналитическое ограничение на параметры уравнений ($*$) и ($**$). Чтобы получить это ограничение, мы обозначим каждое из равных отношений ($*$) через t и каждое из равных отношений ($**$) — через t'. Тогда вместо ($*$) и ($**$) можно будет записать следующие две системы параметрических уравнений:

$$\begin{array}{lcl} x = x_0 + mt, & & x' = x'_0 + m't', \\ y = y_0 + nt, & \text{и} & y' = y'_0 + n't', \\ z = z_0 + pt & & z' = z'_0 + p't'. \end{array} \tag{β}$$

Если первая прямая лежит в плоскости (α), то координаты каждой ее точки должны удовлетворять уравнению этой плоскости, поэтому

*) См. сноску в начале n° 71 (стр. 196).

равенство

$$Ax + By + Cz + D = (Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$$

должно иметь место при любом t. Следовательно,

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Так как и вторая прямая лежит в плоскости (α), то аналогично

$$Am' + Bn' + Cp' = 0, \quad Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 + D = 0.$$

Отсюда имеем систему соотношений

$$\begin{aligned} A(x' - x'_0) + B(y' - y'_0) + C(z' - z'_0) &= 0,\\ Am \qquad + Bn \qquad + Cp \qquad &= 0,\\ Am' \qquad + Bn' \qquad + Cp' \qquad &= 0, \end{aligned} \tag{γ}$$

которую можно рассматривать как систему однородных уравнений с неизвестными A, B, C. Эта система имеет нетривиальные решения, так как в уравнении плоскости (α) все три коэффициента A, B, C не могут быть равны нулю. Таким образом, система (γ) нетривиально совместна, вследствие чего

$$\begin{vmatrix} x' - x'_0 & y' - y'_0 & z' - z'_0 \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix} = 0. \tag{δ}$$

Это и есть условие, при выполнении которого две прямые лежат в одной плоскости.

Теперь легко показать, что если две рассматриваемые прямые имеют общую точку на плоскости ∞, то m, n, p и m', n', p' пропорциональны. В самом деле, поскольку общая точка этих прямых лежит на плоскости ∞, она не обладает неоднородными координатами. Поэтому ни при каких значениях t и t' соотношения (β) не могут привести к равенствам $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Если же мы предположим такие равенства, то придем к системе уравнений:

$$\begin{aligned} mt - m't' + (x' - x'_0) &= 0,\\ nt - n't' + (y' - y'_0) &= 0,\\ pt - p't' + (z' - z'_0) &= 0 \end{aligned} \tag{ε}$$

относительно чисел t, $-t'$ и 1. Так как определитель (δ) этой системы равен нулю, то одно из уравнений является линейным следствием двух других. Если наряду с этим хотя бы один из трех определителей

$\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} n & n' \\ p & p' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} p & p' \\ m & m' \end{vmatrix}$ отличен от нуля, то система (ε) допускает решения, что, как было замечено выше, невозможно. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} n & n' \\ p & p' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} p & p' \\ m & m' \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$m : n : p = m' : n' : p'.$$

Тем самым требуемое доказано.

Итак, мы определили однородные координаты для всех точек проективного пространства без исключения. Основные свойства этих координат вполне аналогичны тем, какие мы перечислили выше для однородных координат на прямой и на плоскости.

Весьма важным свойством введенных нами однородных координат является то, что какой бы ни была точка M, принадлежащая плоскости, определяемой в неоднородных координатах уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

однородные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 точки M всегда удовлетворяют соотношению

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0. \tag{2}$$

Действительно, если точка M не лежит в плоскости ∞, то $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ $(x_4 \neq 0)$, и из (1) тотчас вытекает (2); если же точка M есть точка плоскости ∞, то $x_4 = 0$, а $x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p$, где m, n, p — параметры уравнений любой прямой, проходящей через точку M. Но, как мы видели выше, между A, B, C и m, n, p осуществляется зависимость

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

которая вследствие соотношений $x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p$ дает:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

А это соотношение при $x_4 = 0$ совпадает с равенством (2).

Зависимость (2) между однородными координатами точек плоскости мы будем называть уравнением этой плоскости в однородных координатах. Изменяя обозначения коэффициентов уравнения плоскости, мы будем в дальнейшем писать его в виде

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

По определению однородных координат x_1, x_2, x_3, x_4 произвольной точки M, хотя бы одна из них отлична от нуля; изменяя все четыре координаты в одно и то же число раз, ту из них, которая отлична от нуля, можно сделать равной единице. Например, для точки O в качестве однородных координат можно указать четыре числа $0, 0, 0, 1$, для точки ∞_x — четыре числа $1, 0, 0, 0$, для точки ∞_y — четыре числа $0, 1, 0, 0$, для точки ∞_z — четыре числа $0, 0, 1, 0$ и для точки E — четыре числа $1, 1, 1, 1$. В дальнейшем вместо $\infty_x, \infty_y, \infty_z$ и O мы будем писать A_1, A_2, A_3, A_4 и будем называть эти точки *вершинами координатного тетраэдра*. Очевидно, система однородных координат в проективном пространстве определяется выбором координатного тетраэдра $A_1(1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 1, 0)$, $A_4(0, 0, 0, 1)$ и точки единиц E $(1, 1, 1, 1)$. Выбор этих пяти точек должен быть подчинен лишь одному условию: никакие четыре из них не должны находиться в одной плоскости.

Вопрос о том, как изменяются однородные координаты при изменении определяющих точек, решается в n° 114, где будут выведены формулы преобразования однородных координат.

§ 7. Проективное соответствие между элементами одномерных многообразий

103. Фундаментальным понятием проективной геометрии является понятие проективного отображения. Пусть между точками двух проективных прямых a и a' установлено какое-нибудь взаимно однозначное соответствие. Если M — произвольная точка прямой a, M' — соответствующая ей точка прямой a', то мы будем называть точку M' функцией точки M и употреблять обычный символ функциональной зависимости: $M' = f(M)$. Понятно, что точку M, в свою очередь, можно рассматривать как функцию точки M': $M = \varphi(M')$; функции $f(M)$ и $\varphi(M')$ уместно назвать взаимно обратными.

Взаимно однозначное соответствие $M' = f(M)$ между точками двух проективных прямых a и a' называется проективным, *если гармонически сопряженным парам точек M, N и P, Q прямой a всегда соответствуют также гармонически сопряженные пары точек M', N' и P', Q' прямой a'.*

Задание на прямой a' точек $M' = f(M)$, проективно соответствующих точкам M прямой a, называют еще *проективным отображением* прямой a на прямую a'. В том случае, когда a и a' совпадают, говорят, что дано проективное отображение прямой на самое себя.

Важным частным случаем проективного отображения одной прямой на другую является отображение, определяемое центральным проектированием. Пусть a и a' — две прямые, расположенные в плоскости α, S — какая-нибудь точка этой плоскости, не принадлежащая ни одной из прямых a и a'. Будем рассматривать как образ произвольной точки M прямой a ту точку $M' = f(M)$ прямой a', которая с точкой M лежит на одной прямой, выходящей из S. Такое отображение $M' = f(M)$ является проективным. В самом деле, согласно теореме 6 $n°$ 86, если M_1, M_2 и M_3, M_4 — произвольно взятые гармонически сопряженные пары точек прямой a, то пары соответствующих точек M_1', M_2' и M_3', M_4' прямой a' будут также гармонически сопряжены. А это обстоятельство и служит характеристическим признаком проективного отображения.

Таким образом, проективное отображение можно рассматривать как обобщение центрального проектирования.

Теперь мы докажем следующие две простые теоремы.

Теорема 14а. *Если отображение $M' = f(M)$ прямой a на прямую a' является проективным, то обратное ему отображение $M = = \varphi(M')$ также является проективным.*

Доказательство весьма просто. В самом деле, допустим, что отображение $M = \varphi(M')$ не проективное. Тогда на прямой a' существуют две гармонически сопряженные пары точек A', B' и C', D', которым на прямой a соответствуют две пары $A = \varphi(A'), B = \varphi(B')$ и $C = \varphi(C'), D = \varphi(D')$, не находящиеся в отношении гармонической сопряженности. Обозначим через D^* точку прямой a, которая вместе с точкой C составляет пару C, D^*, гармонически сопряженную с парой A, B. Очевидно, точки D и D^* различны.

Пусть $D^{*\prime} = f(D^*)$. Так как отображение $M' = f(M)$ взаимно однозначное, то D' и $D^{*\prime}$ также различны. В силу проективности отображения $M' = f(M)$ пары точек A', B' и $C', D^{*\prime}$ — гармонически сопряженные. Таким образом, для трех точек A', B', C' получаются различные четвертые гармонические точки D' и $D^{*\prime}$, что, как мы знаем, невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 14б. *Если $M' = f_1(M)$ — проективное отображение прямой a на прямую a', $M'' = f_2(M')$ — проективное отображение прямой a' на прямую a'' (причем все три прямые a, a', a'' могут, в частности, совпадать друг с другом), то отображение $M'' = = f_2 f_1(M)$ прямой a на прямую a'' также является проективным.*

Иначе можно сказать: *отображение, получаемое в результате последовательного выполнения двух проективных отображений, является проективным.*

Высказанное утверждение по существу очевидно. В самом деле, так как каждое отображение f_1 и f_2 сохраняет гармоническую сопряженность пар точек, то отображение, получаемое в результате их последовательного выполнения, тоже сохраняет гармоническую сопряженность пар точек и, следовательно, является проективным.

Свойство совокупности проективных отображений, выражаемое теоремой 14б, называют *групповым* (читателю сейчас полезно вернуться к $n°$ 19, где шла речь о групповом свойстве совокупности движений).

В элементарной геометрии система точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ на какой-либо прямой a считается эквивалентной системе точек $M_1', M_2', \ldots, M_n'$

на той же самой или на другой прямой a', если при помощи некоторого движения можно совместить первую систему со второй. Подобно этому в проективной геометрии система точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ прямой a считается эквивалентной системе точек $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ прямой a', если существует проективное отображение прямой a на прямую a', переводящее каждую точку M_i в точку M'_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

В частности, система $M_1, M_2, \dots, M_n$ эквивалентна (мы часто будем говорить еще: *проективно эквивалентна*) системе $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ если в результате серии центральных проектирований, из которых первое есть проектирование прямой a на прямую a_1, второе — проектирование прямой a_1 на прямую a_2, последнее — проектирование прямой a_{n-1} на прямую a', каждая точка M_i отобразится в точку M'_i.

Из теорем 14а и 14б следует, что:

1) если одна система прямолинейно расположенных точек проективно эквивалентна другой, то вторая проективно эквивалентна первой;

2) если две системы проективно эквивалентны третьей, то они проективно эквивалентны друг другу.

Проективное отображение потому именно является фундаментальным понятием проективной геометрии, что с его помощью определяется проективная эквивалентность точечных систем. В этом смысле оно сравнимо с понятием конгруэнтного перенесения *движения* в элементарной геометрии.

В ближайших параграфах проективные отображения будут самостоятельным предметом нашего внимательного исследования.

В первую очередь мы займемся вопросом о том, какими данными проективное соответствие определяется однозначно.

Ответ на поставленный вопрос дает теорема Штаудта. Она будет сформулирована и доказана позже, после того как будут установлены нижеследующие три нужные для ее доказательства леммы.

Лемма 1. *Пусть на проективной прямой a даны две пары точек M, N и P, Q. Для того чтобы на a существовала третья пара, гармонически сопряженная как с парой M, N, так и с парой P, Q, необходимо и достаточно, чтобы пары M, N и P, Q не разделяли друг друга.*

Доказательство необходимости. Предположим, что существует пара X, Y, которая гармонически разделяет пару M, N и пару P, Q. Введем на прямой a проективную систему координат (неоднородных), придавая точке X роль нулевой точки, точке Y — роль бесконечно удаленной, а точку единиц выбирая произвольным образом. Точка X (нулевая точка системы) является проективным центром отрезка MN. Поэтому, если x_1 и x_2 — координаты точек M и N, то $x_1 + x_2 = 0$. Следовательно, x_1 и x_2, отличаясь знаком, имеют общую абсолютную величину x. По той же причине координаты точек P, Q имеют общую абсолютную величину y. Нам известно, что в проективной системе координат на разрезанной проективной прямой точки и соответствующие им координаты находятся в одинаковых отношениях порядка. Поэтому, если $x < y$, то точки M, N расположены внутри отрезка PQ, если $y < x$, то точки P, Q лежат внутри отрезка MN. Но и в том, и в другом случае пары M, N и P, Q не разделяют друг друга.

Доказательство достаточности. Пусть дано, что M, N и P, Q не разделены. Докажем, что в этом случае всегда существует пара X, Y, которая гармонически разделяет как пару M, N, так и пару P, Q. Так как пары M, N и P, Q не разделяют друг друга, то обе точки P, Q находятся внутри одного из двух отрезков, на которые точки M, N разделяют проективную прямую. Возьмем внутри этого отрезка произвольную точку E и введем на проективной прямой систему неоднородных координат, принимая точку M за нулевую, точку N — за бесконечно удаленную и точку E — за точку единиц. Пусть p, q — координаты точек P, Q. Вследствие указанного выбора точки единиц числа p и q положительны. Пусть, далее, $y = f((x)$ — зависимость между координатами точек X, Y, гармонически разделяющих пару P, Q. Функция $y = f(x)$ не определена для $x = \dfrac{p+q}{2}$, так как $\dfrac{p+q}{2}$ есть координата проективного центра отрезка PQ, который является четвертой гармонической точкой к трем точкам P, Q, ∞; поэтому при $x = \dfrac{p+q}{2}$ имеем: $y = f(x) = \infty$. При всех остальных значениях x функция $y = f(x)$ имеет определенное численное значение и является непрерывной; последнее следует из теоремы 11 и из свойства 3 проективных координат, отмеченного в n° 97. Теперь заметим, что при $x \to \dfrac{p+q}{2}$ будет $y \to \infty$, причем если $x \to \dfrac{p+q}{2}$ и $x < \dfrac{p+q}{2}$, то $y \to -\infty$; если $x = p$, то $y = p$ (см. замечание в конце n° 93) и, следовательно, $y > 0$. Предположим обозначения выбранными так, что $p < q$; тогда при изменении x от p до $\dfrac{p+q}{2}$ функция $\varphi(x) = x + f(x)$, оставаясь непрерывной, изменяется от положительных значений к отрицательным. Вследствие этого должно существовать такое значение x, что $x+f(x) = x+y = 0$. Пусть X и Y — точки с такими именно координатами x и y. Они определяют отрезок XY с проективным центром в нулевой точке, т. е. в точке M. Иначе говоря, пара X, Y гармонически разделяет пару M, N (напомним, что точка N принята за бесконечно удаленную). Так как по определению функции $y = f(x)$ пара X, Y вместе с тем гармонически разделяет пару P, Q, то это и есть искомая пара точек.

Лемма 2. *Разделенность пар точек является свойством, инвариантным относительно проективных отображений.*

Эта лемма непосредственно вытекает из предыдущей. В самом деле, пусть на прямой a даны две пары точек M, N и P, Q; предположим их, например, неразделенными. Тогда по лемме 1 должна существовать пара X, Y, которая гармонически сопряжена как с парой M, N, так и с парой P, Q. При проективном отображении прямой a на какую-нибудь прямую a' точки M, N, P, Q и X, Y отобразятся в точки M', N', P', Q' и X', Y', причем пара X', Y' будет гармонически сопряжена как с парой M', N', так и с парой P', Q' (это следует прямо из определения проективного отображения). Но тогда по лемме 1 пары M', N' и P', Q' должны быть неразделенными. Итак, мы видим, что при проективном отображении неразделенные пары переходят в неразделенные. Но тогда, очевидно, разделенные пары всегда переходят в разделенные.

Действительно, если бы разделенные пары могли переходить в неразделенные, то при обратном отображении (которое также является проективным; см. теорему 14а) неразделенные перешли бы в разделенные, а мы доказали, что это невозможно. Лемма доказана.

Следующая лемма имеет чисто аналитический характер.

Лемма 3. *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, определенные для любого x, $-\infty < x < +\infty$, причем относительно $f(x)$ известно, что она монотонная, а относительно $\varphi(x)$ — что она непрерывная. Тогда, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают на всюду плотном множестве точек числовой прямой, то они совпадают тождественно.*

Обозначим через A всюду плотное множество точек числовой прямой, на котором по условию функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ принимают равные значения, и через x_0 — произвольную точку, не принадлежащую множеству A. Нам нужно доказать, что $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Предположим $f(x_0) > \varphi(x_0)$. Так как множество A всюду плотно, то мы можем выбрать в нем две точки x_1 и x_2 так, что при $x_1 < x_0 < x_2$ разность $x_2 - x_1$ будет сколь угодно близкой к нулю. Вследствие непрерывности $\varphi(x)$, при достаточно малой разности $x_2 - x_1$ величины $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$ будут столь мало отличаться от $\varphi(x_0)$, что вместе с неравенством $f(x_0) > \varphi(x_0)$ будут иметь место также неравенства $f(x_0) > \varphi(x_1)$ и $f(x_0) > \varphi(x_2)$. Но так как на множестве A функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют равные значения, а x_1 и x_2 выбраны из этого множества, то $\varphi(x_1) = f(x_1)$ и $\varphi(x_2) = f(x_2)$. Таким образом, при $x_1 < x_0 < x_2$ имеем $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) < f(x_0)$, что противоречит условию монотонности функции $f(x)$.

Приведя аналогичным путем к противоречию допущение $f(x_0) < < \varphi(x_0)$, мы закончим доказательство леммы.

Теперь мы можем доказать принадлежащую Штаудту основную теорему проективной геометрии.

Теорема 15. *Проективное соответствие между двумя прямыми однозначно определяется заданием трех пар соответствующих точек.*

Доказательство. Пусть a и a' — две проективные прямые, между которыми установлено проективное соответствие, относящее точке M прямой a точку $M' = f(M)$ прямой a'. Пусть, далее, A, B, C — три различные точки прямой a, $A' = f(A), B' = (B)$ и $C' = f(C)$ —

соответствующие им точки прямой a'. Мы должны показать, что не существует другого проективного отображения $M' = \varphi(M)$ прямой a на прямую a', при котором также $A' = \varphi(M)$, $B' = \varphi(B)$ и $C' = \varphi(C)$.

Для доказательства введем на прямой a проективную систему (неоднородных) координат, принимая точку A — за нулевую, точку B — за единичную и точку C — за бесконечно удаленную. Одновременно введем проективные координаты на прямой a', выбирая на ней в качестве нулевой, единичной и бесконечно удаленной соответственно точки A', B' и C'. После того как на прямых a и a' введены координатные системы, мы можем каждую точку M прямой a (кроме бесконечно удаленной) характеризовать ее координатой x и каждую точку M' прямой a' (кроме бесконечно удаленной) характеризовать координатой x'. При этом появляется возможность вместо соотношения $M' = f(M)$ рассматривать его арифметический эквивалент — функцию $x' = f(x)$, где x и x' — координаты проективно соответственных точек M и M'. Теорема, очевидно, будет доказана, если мы установим, что $x' = f(x)$ есть вполне определенная функция. Мы докажем сейчас, что $f(x) \equiv x$.

Если сопоставить определение проективного соответствия и определение проективных координат, то легко усмотреть источник тождества $f(x) \equiv x$. Прежде всего, так как точки A, B, C на прямой a и соответствующие им по отображению $M' = f(M)$ точки A', B', C' на прямой a' выбраны в качестве нулевой, единичной и бесконечно удаленной, то $f(0) = 0, f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$. Далее, точка D, которая в проективной шкале на прямой a помечается числом 2, вместе с точкой A составляет пару, гармонически сопряженную с парой B, C; поскольку проективное отображение (по определению) сохраняет свойство гармонической сопряженности, точка D должна отобразиться в такую точку D', что пара A', D' гармонически разделяет пару B', C'. Следовательно, точка D' на прямой a', как и точка D на прямой a, имеет координату 2, т. е. $f(2) = 2$. Аналогично рассуждая, убедимся, что $f(3) = 3$, $f(4) = 4$ и т. д., $f(-1) = -1$, $f(-2) = -2$ и т. д. Таким образом, при любом целом n имеем $f(n) = n$. Из определения проективного отображения также следует, что проективные центры отрезков с целочисленными концами на прямой a отображаются в проективные центры соответствующих отрезков с целочисленными концами на прямой a'; поэтому $f\left(\dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n}{2}$. Точно так же проективные центры отрезков $\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{n+1}{2}\right)$ на прямой a отображаются в проективные центры отрезков $\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{n+1}{2}\right)$ на прямой a'; поэтому $f\left(\dfrac{n}{2^2}\right) = \dfrac{n}{2^2}$, и т. д.

Итак, если x — двоичная дробь, то $f(x) = x$. Нужно показать, что $f(x) = x$ при любом x. С этой целью заметим, что $f(x)$, будучи функцией, определенной для любого x, $-\infty < x < +\infty$, является монотонной. В самом деле, рассмотрим три точки M_1, M_2, M_3 прямой a (отличные от точки C) и соответствующие им по отображению точки M_1', M_2', M_3' прямой a'. Предположим, что точка M_2 на разрезанной проективной прямой a лежит между точками M_1 и M_3; это означает, что пара M_2, C разделяет пару M_1, M_3. Но по лемме 2 тогда пара M_2', C' разделяет пару M_1', M_3'. Следовательно, точка M_2' на разрезанной прямой a' лежит между M_1' и M_3'. Таким образом, рассматриваемое отображение $M' = f(M)$ либо сохраняет порядок точек, либо изменяет его на противоположный; в зависимости от этого функция $x' = f(x)$ будет либо монотонно возрастающей, либо монотонно убывающей.

Выше мы видели, что если x — двоичная дробь, то $f(x) = x$. Следовательно, две функции $f(x)$ и $\varphi(x) = x$ принимают равные значения на некотором всюду плотном множестве точек числовой прямой (именно, на множестве двоичных дробей). Так как из этих двух функций $f(x)$ — монотонная, а $\varphi(x) = x$ — непрерывная, то по лемме 3 они совпадают тождественно, т. е. при любом x имеем $x' = f(x) = \varphi(x) = x$.

Установив это, мы, собственно говоря, уже доказали теорему. Действительно, коль скоро даны три пары точек A, A', B, B' и C, C', соответствующих в проективном отображении $M' = f(M)$ прямой a на прямую a', то при вышеописанном выборе координатных систем каждой точке M необходимо соответствует та точка M', которая на прямой a' имеет такую же координату, как точка M на прямой a. Значит, проективное соответствие заданием трех пар соответствующих точек вполне определяется.

Важным следствием доказанной теоремы является следующая

Теорема 16. *При нетождественном проективном отображении проективной прямой на самое себя число неподвижных точек не может быть более двух.*

Доказательство. Пусть $M' = f(M)$ — нетождественное проективное отображение некоторой проективной прямой u на самое себя. Предположим, что оно имеет три неподвижные точки A, B, C, т. е. что существуют точки A, B, C, совпадающие с соответствующими им точками A', B', C', так что $A' = f(A) = A$, $B' = f(B) = B$, $C' = f(C) = C$. Рассмотрим наряду с отображением $M' = f(M)$ еще тождественное отображение прямой u на себя, т. е. такое отображение, при котором всякая точка M совпадает с соответствующей ей точкой M' : $M' \equiv M$. По отношению к тождественному отображению все точки прямой u являются неподвижными, в том числе и точки A, B, C. Таким образом, как отображение $M' = f(M)$, так и тождественное отображение $M' \equiv M$ переводят точки A, B, C в эти же точки A, B, C. Они имеют, следовательно, общие три пары соответствующих точек. Так как каждое из них является проективным (отображение $M' = f(M)$ — по условию, отображение $M' \equiv M$ — очевидным образом), то вследствие предыдущей теоремы эти отображения не отличаются друг от друга. Иначе говоря, $M' = f(M)$ должно быть тождественным отображением, что, однако, исключено условием теоремы. Итак, допустив, что $M' = f(M)$ имеет три неподвижные точки, мы пришли к противоречию. Тем самым теорема доказана.

Тот же результат можно сформулировать иначе следующим образом.

Теорема 17. *Если при проективном отображении прямой на себя имеются три неподвижные точки, то все точки прямой будут неподвижными, т. е. отображение является тождественным.*

104. Условимся называть *одномерными проективными многообразиями:*

1) совокупность точек проективной прямой;

2) совокупность лучей плоского пучка, т. е. совокупность прямых, расположенных в одной плоскости и проходящих через какую-либо ее точку — центр пучка;

3) совокупность плоскостей, проходящих через одну прямую пространства (такая совокупность плоскостей называется *пучком*, а прямая, через которую проходят плоскости, называется *осью пучка*).

Понятие проективного соответствия, которое выше было определено для проективных прямых, естественным образом распространяется на случай произвольных одномерных многообразий.

Пусть Π и Π' — два каких угодно одномерных многообразия. Представим себе, что между их элементами установлено некоторое взаимно однозначное соответствие так, что произвольному элементу x многообразия Π соответствует элемент $x' = f(x)$ многообразия Π'. Соответствие $x' = f(x)$ мы будем называть *проективным*, если любым гармонически сопряженным парам элементов x_1, x_2 и x_3, x_4 многообразия Π соответствуют также гармонически сопряженные пары элементов x'_1, x'_2 и x'_3, x'_4 и многообразия Π'.

Следующая теорема представляет собой обобщение теоремы 15 на случай проективного соответствия между любыми одномерными многообразиями:

Теорема 18. *Проективное соответствие между двумя одномерными многообразиями однозначно определяется заданием трех пар соответствующих элементов.*

Доказательство. Пусть даны одномерные многообразия Π и Π', между которыми установлено проективное соответствие, относящее произвольному элементу x многообразия Π элемент $x' = f(x)$ многообразия Π'. Пусть, далее, a, b, c — три различных элемента из Π и a', b', c' — соответствующие им элементы из Π'. Нужно показать, что не существует проективного соответствия между Π и Π', отличного от $x' = f(x)$, которое также сопоставляло бы с элементами a, b, c элементы a', b', c'.

Чтобы упростить изложение, рассмотрим какой-нибудь определенный случай, например, предположим, что Π и Π' суть плоские пучки лучей. Возьмем в плоскости пучка Π какую угодно прямую u, не проходящую через центр пучка; подобным же образом возьмем в плоскости пучка Π' некоторую прямую u'. Обозначим через X точку, в которой луч x пучка Π пересекает прямую u, и через X' — точку, в которой луч $x' = f(x)$ пучка Π' пересекает прямую u'. Будем рассматривать соответствие между u и u', в котором точке X соответствует точка X'; представим его символической записью $X' = F(X)$. Нетрудно сообразить, что соответствие $X' = F(X)$ является проективным. Это непосредственно вытекает из определения проективного соответствия между пучками (оно сформулировано нами чуть выше для любых одномерных многообразий) и из сформулированного в конце n° 86 предложения об инвариантности свойства гармонической сопряженности относительно проектирований и сечении.

Таким образом, проективное соответствие $x' = f(x)$ между пучками Π и Π' индуцирует проективное соответствие $X' = F(X)$ между прямыми u и u'. При этом, очевидно, различные соответствия $x' = f(x)$ и $x' = \varphi(x)$ между Π и Π' индуцируют различные соответствия $X' = F(X)$ и $X' = \Phi(X)$ между u и u'. Пусть A, B, C — точки пересечения прямой u с лучами a, b, c и A', B', C' — точки пересечения прямой u' с лучами a', b', c'. Если бы кроме проективного соответствия $x' = f(x)$ между Π и Π' существовало еще другое соответствие $x' = \varphi(x)$, которое, как и первое, сопоставляло бы лучи a, b, c с лучами a', b', c', то имелись бы различные проективные соответствия $X' = F(X)$ и $X' = \Phi(X)$ между прямыми u и u', причем как $X' = F(X)$, так и $X' = \Phi(X)$ переводили бы точки A, B, C в точки A', B', C'. Но это противоречит теореме 15. Следовательно, кроме соответствия $x' = f(x)$, другого проективного соответствия между пучками Π и Π', переводящего a, b, c в a', b', c', не существует. Итак, проективное соответствие между пучками однозначно определяется заданием трех пар соответствующих лучей.

Если Π и Π' обозначают иные одномерные многообразия, всегда возможно при помощи операции сечения свести дело к проективным соответствиям между прямыми и таким путем во всех случаях получить теорему 18 как следствие теоремы 15.

Из теоремы 18 с очевидностью вытекает следующая

Теорема 19. *При нетождественном проективном отображении любого одномерного многообразия на себя число неподвижных элементов не может быть более двух.*

Эта теорема является обобщением теоремы 16, в которой идет речь о неподвижных точках при проективных отображениях прямой линии на самое себя.

105. Отметим еще одно предложение, нужное нам для дальнейшего.

Теорема 20. *Пусть даны одномерные проективные многообразия Π и Π'; пусть, далее, с каждым элементом x многообразия Π сопоставлен элемент $x' = f(x)$ многообразия Π', причем с разными элементами x_1 и x_2 сопоставлены также разные элементы*

$x'_1 = f(x_1)$ *и* $x'_2 = f(x_2)$. *Если при этом гармонически сопряженным парам элементов из* Π *всегда отвечают гармонически сопряженные пары элементов из* Π', *то* $x' = f(x)$ *является взаимно однозначным отображением* Π *на* Π'.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда Π и Π' суть прямые, так как все остальные случаи можно свести к этому при помощи операции сечения, подобно тому как это делалось при доказательстве теоремы 18.

Итак, предположим, что Π и Π' представляют собой прямые — обозначим их через u и u' — и что каждая точка M прямой u отображена в точку $M' = f(M)$ прямой u', причем разные точки прямой u отображаются в разные точки прямой u', и гармонически сопряженные пары точек прямой u отображаются в гармонически сопряженные пары точек прямой u'. Мы должны показать, что $M' = f(M)$ является взаимно однозначным отображением прямой u на прямую u', т. е. что каждая точка прямой u' представляет собой образ некоторой точки прямой u.

Нетрудно сообразить, что это утверждение непосредственно вытекает из рассуждений, с помощью которых доказывалась теорема 15. В самом деле, возьмем на прямой u какие-нибудь три точки и пометим две из них числами 0 и 1, а третью — символом ∞. Соответствующие пометки 0, 1 и ∞ дадим образам этих точек на прямой u'. Далее, на каждой из прямых u и u' введем систему проективных неоднородных координат, определяемую точками 0, 1 и ∞. Тогда символическое соотношение $M' = f(M)$ можно будет заменить арифметическим соотношением $x' = f(x)$ между координатами точек M и M'.

Теорема будет доказана, если мы установим, что функция $x' = f(x)$ при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ принимает все значения между $-\infty$ и $+\infty$. Но, повторяя рассуждения, употреблявшиеся при доказательстве теоремы 15, мы должны будем заключить, что $f(x) \equiv x$, откуда и будет следовать требуемое.

Здесь есть, однако, один скользкий пункт. Именно, в теореме 15 применяется лемма 2, относящаяся к проективному отображению одной прямой на другую. Отображение, которое мы рассматриваем сейчас, как и проективное, сохраняет гармоническую сопряженность пар точек, но в отличие от проективного заранее не предполагается взаимно однозначным.

Поэтому, прежде чем применять в данном случае утверждение леммы 2, нужно освободить ее доказательство от использования условия взаимной однозначности отображения. Припомним, что доказательство этой леммы распадалось на две части. Сначала было установлено, что проективное отображение $M' = f(M)$ прямой u на прямую u' переводит неразделенные пары точек прямой u в неразделенные пары точек прямой u'. В этой части взаимная однозначность отображения $M' = f(M)$ не требуется. Потом было показано, что разделенные пары прямой u переходят в разделенные же пары прямой u'. Это обстоятельство было установлено при помощи рассмотрения отображения, обратного к отображению $M' = f(M)$, а существование обратного отображения равносильно взаимной однозначности отображения $M' = f(M)$. Следовательно, эту часть доказательства леммы 2 нужно изменить. Переделка не потребует большого труда. После того как показано, что неразделенные пары при отображении $M' = f(M)$ переходят в неразделенные, доказательство того, что разделенные пары отображаются в разделенные, можно провести методом "от противного" следующим образом. Предположим, что двум парам точек A, B и C, D, которые на прямой u разделяют друг друга, соответствуют на прямой u' не разделяющие друг друга пары точек A', B' и C', D'. Так как пары A, B и C, D разделены, то по аксиоме II.3 пары A, C и B, D и пары A, D и B, C должны быть неразделенными. Напротив, так как пары A', B' и C', D' являются неразделенными, то по той же аксиоме II.3 либо пары A', C' и B', D', либо пары A', D' и C', D' будут разделенными. Таким образом, при нашем предположении на прямой u необходимо должны быть неразделенные пары, отображающиеся в разделенные пары на прямой u'. А это противоречит исходной посылке рассуждения. Тем самым требуемое доказано.

§ 8. Проективное соответствие между многообразиями двух и трех измерений

106. Теперь мы определим проективное отображение двумерных и трехмерных образов.

Сначала рассмотрим двумерный случай.

Пусть между точками двух плоскостей α и α' установлено взаимно однозначное соответствие, по которому произвольной точке M плоскости α отвечает точка $M' = f(M)$ плоскости α'.

Это соответствие называется *проективным*, если точкам любой прямой плоскости α соответствуют в плоскости α' точки, также лежащие на некоторой прямой.

Задание на плоскости α' точек $M' = f(M)$, проективно соответствующих точкам M плоскости α, называют еще *проективным отображением плоскости α на плоскость α'*. В том случае, когда α и α' совпадают, говорят, что дано проективное отображение плоскости α на самое себя.

По определению проективного отображения плоскости α на плоскость α', точки каждой прямой a плоскости α имеют своими образами точки, которые на плоскости α' располагаются на некоторой прямой a'. Эту прямую a' мы будем называть соответствующей по отображению прямой a.

Определение проективного соответствия требует, чтобы прямолинейно расположенные точки переходили в точки, также прямолинейно расположенные. Но в определении ничего не говорится по поводу точек, не лежащих на одной прямой, и заранее не исключается возможность, что такие точки отобразятся на одну прямую. Однако мы дальше докажем, что этот случай исключен, т. е. если образы лежат на одной прямой, то их прообразы также лежат на одной прямой. Иначе говоря, мы докажем, что отображение, обратное проективному, также является проективным (теорема 23а). Вместе с тем будет доказано, что при проективном отображении соответствие прямых, как и соответствие точек, является взаимно однозначным.

Важным частным случаем проективного отображения плоскости на плоскость является отображение, определяемое центральным проектированием.

При проектировании точек какой-либо плоскости α из произвольного центра на другую плоскость α' (как на экран), каждая точка M плоскости α отображается в некоторую точку $M' = f(M)$ плоскости α'. Отображение $M' = f(M)$ — проективное, так как любая прямая плоскости α проектируется в прямую же плоскости α'.

Докажем следующую теорему.

Теорема 21. *Если плоскость α проективно отображена на плоскость α', то гармоническим группам элементов плоскости α соответствуют по отображению на плоскости α' также гармонические группы элементов.*

Доказательство. 1) Пусть a — произвольная прямая плоскости α, a' — соответствующая ей прямая плоскости α'; A, B и C, D — произвольно выбранные гармонически сопряженные пары точек прямой a. Нужно показать, что пары точек A', B' и C', D' прямой a', соответствующих по отображению точкам A, B, C, D, также являются гармонически сопряженными. Заметим, прежде всего, что на плоскости α должна существовать точка, которая не лежит на прямой a и образ которой не лежит на прямой a'. В самом деле, если бы все точки плоскости α, не лежащие на прямой a, отобразились на прямую a', то некоторое множество точек прямой a должно было бы отобразиться на множество точек плоскости α', не лежащих на прямой a' (поскольку проективное отображение плоскости α на плоскость α' предполагается взаимно однозначным), но это исключено определением проективного отображения (согласно которому прямолинейный характер расположения точек сохраняется). Обозначим через R какую-нибудь точку плоскости α, которая не лежит на прямой a и образ которой R' в плоскости α' не лежит на прямой a'. Вследствие гармонической сопряженности пар A, B и C, D можно построить в плоскости α четырехвершинник T с диагональными точками A, B и с парой противоположных сторон, проходящих через C, D; кроме того, в качестве одной из вершин четырехвершинника T можно выбрать точку R (см. n° 86). Так как образ R' точки R не лежит на прямой a', то среди образов всех вершин четырехвершинника T никакие три не лежат на одной прямой. Поэтому образом четырехвершинника T является некоторый четырехвершинник T'.

Очевидно, точки A', B' представляют собой диагональные точки четырехвершинника T', а через точки C', D' проходят две его противоположные стороны. Отсюда следует, что пары точек A', B' и C', D' гармонически сопряжены.

2) Пусть P — произвольная точка плоскости α, P' — ее образ на плоскости α'; a, b и c, d — произвольно выбранные гармонически сопряженные пары лучей пучка на плоскости α с центром P. Нужно показать, что в пучке с центром P' пары лучей a', b' и c', d', соответствующих по отображению лучам a, b, c, d, также являются гармонически сопряженными. Это непосредственно вытекает из предыдущего. Заметим, прежде всего, что на плоскости α должна существовать прямая, которая не проходит через P и образ которой не проходит через P'. В самом деле, возьмем на плоскости α какую-нибудь точку Q, отличную от P_1, и обозначим ее образ на α' через Q'. Как было показано чуть выше, существует на плоскости α точка R, которая не лежит на прямой PQ и образ которой не лежит на $P'Q'$. Очевидно, прямая QR как раз и будет такой прямой, которая не проходит через P и образ которой не проходит через P'. Обозначим прямую QR буквой t, образ ее — буквой t'. Пусть A, B, C, D — точки, в которых лучи a, b, c, d пересекают прямую t; A', B', C', D' — точки, в которых лучи a', b', c', d' пересекают прямую t'. Ясно, что A', B', C', D' суть образы точек A, B, C, D. Так как пары лучей a, b и c, d гармонически сопряжены, то согласно предложению, сформулированному в конце n° 86, пары точек A, B и C, D будут гармонически сопряженными. Отсюда в силу первой части доказательства следует, что пары точек A', B' и C', D', являющиеся образами точек A, B и C, D, также гармонически сопряжены; но так как лучи a', b', c', d' проходят соответственно через точки A', B', C', D', то в согласии с упомянутым выше предложением из n° 86 пары лучей a', b' и c', d' находятся в отношении гармонической сопряженности. Тем самым теорема доказана полностью.

Из теорем 20 и 21 вытекает следующая

Теорема 22. *Если плоскость α проективно отображена на плоскость α', то при этом*

1) *множество точек каждой прямой a плоскости α взаимно однозначно отображается на множество точек соответствующей прямой a' плоскости α' и*

2) *множество лучей произвольного пучка на плоскости α с центром P взаимно однозначно отображается на множество лучей пучка, центр которого P' есть точка плоскости α', соответствующая по отображению точке P.*

Отсюда без труда может быть выведена

Теорема 23а. *Если $M' = f(M)$ — проективное отображение плоскости α на плоскость α', то обратное отображение $M = \varphi(M')$ плоскости α' на плоскость α также является проективным.*

Доказательство. Пусть a' — произвольная прямая плоскости α'. Возьмем на ней две какие-нибудь точки A' и B'; им соответствуют на плоскости α точки $A = \varphi(A')$ и $B = \varphi(B')$. Обозначим через a прямую, определяемую точками A, B. Так как отображение $M' = f(M)$ — проективное, то при его осуществлении все точки прямой a отображаются на прямую a'. По теореме 22 получаемое таким путем отображение прямой a на прямую a' оказывается взаимно однозначным, т.е. образы точек прямой a "заполняют" прямую a'. Иначе говоря, каждая точка прямой a' представляет собой образ какой-то точки прямой a. А это означает, что в том случае, когда точка M' лежит на a', точка $M = \varphi(M')$ лежит на a. Итак, при отображении $M = \varphi(M')$ точки плоскости α', лежащие на произвольной прямой, переводятся в точки, которые на плоскости α также лежат на одной прямой, что является характерным свойством проективного отображения. Теорема доказана.

Интересно, что имеет место следующая на первый взгляд удивительная теорема.

Пусть множество всех точек плоскости α взаимно однозначно отображено на некоторое множество G' точек плоскости α'. Если всякие точки плоскости α, лежащие на одной прямой, отображаются в точки плоскости α', также лежащие на одной прямой, то возможны лишь два случая: 1) *либо множество G' целиком расположено на какой-нибудь одной прямой плоскости α',* 2) *либо множество G' совпадает со всей плоскостью α' (тогда данное отображение есть проективное отображение плоскости α на всю плоскость α').*

Доказательство. Первый случай можно осуществить, если заранее взять на какой-нибудь прямой плоскости α' какое угодно точечное множество G' мощности континуума и любым способом взаимно однозначно отобразить плоскость α на G'.

Предположим теперь, что множество G' содержит точки плоскости α', не лежащие на одной прямой. В таком случае гармоническим группам элементов плоскости α соответствуют по отображению также гармонические группы элементов плоскости α' (доказывается аналогично теореме 21).

Отсюда и из теорем 20, 21 следует, что 1) множество точек каждой прямой a плоскости α взаимно однозначно отображается на множество точек соответствующей прямой a' плоскости α'; 2) множество лучей произвольного пучка на плоскости α с центром P взаимно однозначно отображается на множество лучей пучка, центр которого P' есть точка плоскости α', соответствующая по отображению точке P.

Возьмем на плоскости α какую-нибудь точку P и обозначим ее образ на α' через P'. Пусть M' — совершенно произвольная точка плоскости α'; пусть a' — прямая, соединяющая M' с P'. Согласно сказанному выше прямая a', как луч пучка с центром P' в плоскости α', должна соответствовать некоторой прямой a, принадлежащей пучку с центром P на плоскости α; кроме того, соответствие между точками прямых a и a' должно быть взаимно однозначным. Поэтому точка M', лежащая на прямой a', должна соответствовать некоторой точке M прямой a, т. е. некоторой точке плоскости α. Итак, образы точек плоскости α необходимо должны заполнить всю плоскость α'. Тем самым теорема доказана.

Далее мы отметим следующую очевидную теорему.

Теорема 23б. *Если $M' = f_1(M)$ — проективное отображение плоскости α на плоскость α', $M'' = f_2(M')$ — проективное отображение плоскости α' на плоскость α'' (причем все три плоскости могут, в частности, совпадать друг с другом), то отображение $M'' = f_2(f_1(M))$ плоскости α на плоскость α'' также является проективным.*

Иначе говоря: *отображение, получаемое в результате последовательного выполнения двух проективных отображений, является проективным.*

Высказанное утверждение очевидно. В самом деле, так как каждое из отображений f_1 и f_2 сохраняет прямолинейное расположение точек, то отображение, получаемое в результате их последовательного выполнения, обладает тем же свойством, следовательно, является проективным.

Свойство совокупности проективных отображений, выражаемое теоремой 23б, называют групповым.

Условимся говорить, что фигура Σ, лежащая в некоторой плоскости α, проективно эквивалентна фигуре Σ', лежащей в той же самой или в другой плоскости α', если существует проективное отображение плоскости α на плоскость α', при котором Σ отображается на Σ'.

В частности, фигура Σ проективно эквивалентна фигуре Σ', если в результате серии центральных проектирований плоскости α на плоскость α_1, плоскости α_1 на плоскость $\alpha_2, \ldots$, плоскости α_{n-1} на плоскость α',— фигура Σ проективно отображается на фигуру Σ'.

Из теорем 23а и 23б следует, что:

1) если одна фигура проективно эквивалентна другой, то вторая проективно эквивалентна первой;

2) если две фигуры проективно эквивалентны третьей, то они проективно эквивалентны друг другу.

Благодаря указанному сопоставлению фигур проективные отображения приобретают в проективной геометрии роль, аналогичную той, какую имеют конгруэнтные перемещения фигур (т. е. движения) в элементарной геометрии.

Некоторое время проективные отображения плоскостей будут самостоятельными объектами нашего исследования.

Теорема 24. *Если плоскость α проективно отображена на плоскость α', то при этом*

1) *каждая прямая a плоскости α отображается на соответствующую прямую a' плоскости α' проективно;*

2) *каждый пучок лучей плоскости α отображается на соответствующий пучок лучей плоскости α' также проективно.*

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно сопоставить теоремы 21 и 22 с определением проективного отображения одномерных многообразий.

Теперь мы получаем возможность доказать следующую важную теорему, которую можно рассматривать как обобщение на случай двумерных многообразий теоремы 15.

Теорема 25. *Проективное отображение плоскости α на плоскость α' однозначно определяется заданием четырех пар соответствующих по отображению точек при условии, что из четырех точек, задаваемых на плоскости α, никакие три не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть дано проективное отображение $M' = f(M)$ плоскости α на плоскость α'. Пусть, далее, A, B, C, D — четыре точки плоскости α, из которых никакие три не лежат на одной прямой, A', B', C', D' — соответствующие им точки плоскости α' (из определения проективного отображения и из теоремы 23а следует, что никакие три из точек A', B', C', D' также не лежат на одной прямой). Нужно показать, что не существует проективного отображения плоскости α на плоскость α', отличного от данного отображения $M' = f(M)$, но, вместе с тем, как и данное отображение, переводящего точки A, B, C, D в точки A', B', C', D'.

Возьмем на плоскости α произвольную точку M и обозначим через m прямую AM. Эта прямая входит в состав лучей пучка с центром A. Каким бы ни было проективное отображение α на α', переводящее точки A, B, C, D в точки A', B', C, D', определяемое им отображение пучка с центром A на пучок с центром A' является проективным (см. теорему 24). Далее, сколько бы ни существовало различных проективных отображений α на α', переводящих A, B, C, D в A', B', C', D', все они определяют одно общее проективное отображение пучка с центром A на пучок с центром A'. В самом деле, каждое из них переводит лучи AB, AC и AD первого пучка в лучи $A'B', A'C'$ и $A'D'$ второго; далее, по условию выбора точек A, B, C, D лучи AB, AC и AD (а также $A'B', A'C'$ и $A'D'$) различны; но по теореме 18 проективное отображение одномерных многообразий (в частности, пучков) однозначно определяется заданием трех пар соответствующих элементов. Поэтому при всех возможных проективных отображениях плоскости α на плоскость α', переводящих A, B, C, D в A', B', C', D', прямая m плоскости α отображается на вполне определенную прямую m', которая в проективном соответствии между рассматриваемыми пучками отвечает прямой m. Следовательно, при всех проективных отображениях плоскости α на плоскость α', переводящих A, B, C, D в A', B', C', D', точка M отображается на вполне определенную прямую, проходящую через A'.

Аналогично, рассматривая в плоскости α пучок лучей с центром B и его отображение на плоскость α', можно установить, что сколько бы ни было проективных отображений плоскости α на плоскость α', переводящих A, B, C, D и A', B', C', D', при всех этих отображениях точка M отображается на вполне определенную прямую, проходящую в плоскости α' через точку B'. Пересечением указанных прямых образ точки M на плоскости α' определяется одинаково при всех проективных отображениях α на α', переводящих A, B, C, D в A', B', C', D'. А так как точка M является произвольной, то из приведенных рассуждений вытекает, что, помимо данного проективного отображения $M' = f(M)$, другого проективного отображения α на α', которое, как и данное, переводило бы A, B, C, D в A', B', C', D', не существует. Теорема доказана.

Из теоремы 25 вытекает

Теорема 26. *При нетождественном проективном отображении плоскости на себя не может быть четырех неподвижных точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой.*

В самом деле, пусть $M' = f(M)$ — нетождественное проективное отображение плоскости α на самое себя. Предположим, что имеются четыре точки A, B, C, D, из которых никакие три не лежат на одной прямой и которые являются неподвижными при отображении $M' = f(M)$. Рассмотрим наряду с отображением $M' = f(M)$ тождественное отображение $M' \equiv M$. Очевидно, оно является проективным. Далее, при отображении $M' \equiv M$ точки A, B, C, D (как и все точки плоскости) остаются неподвижными. Таким образом, как отображение $M' = f(M)$, так и тождественное отображение $M' \equiv M$ переводят точки A, B, C, D в эти же точки A, B, C, D. Эти отображения имеют, следовательно, общие четыре пары соответствующих точек, расположенных так, как предусмотрено в теореме 25, и согласно теореме 25 не могут отличаться друг от друга. Иными словами, $M' = f(M)$ при нашем предположении должно быть тождественным отображением, что противоречит условию теоремы. Тем самым требуемое доказано.

Замечание. Ограничение, накладываемое на расположение точек, о которых идет речь в теоремах 25 и 26, существенно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим так называемое *гармоническое отображение.*

Пусть O — произвольно выбранная точка плоскости α, a — какая-нибудь прямая этой плоскости, не проходящая через точку O. Обозначим через M произвольную точку плоскости α и через A — точку, в которой прямая OM пересекает прямую a (рис. 115). Точку M', которая вместе с точкой M гармонически разделяет пару O, A, мы будем считать соответствующей точке M в гармоническом отображении плоскости α на самое себя, точку O будем называть *центром отображения*, прямую a — его *осью*. Для обозначения точки M' мы будем употреблять также символическую запись $M' = H(M)$.

Нетрудно установить, что гармоническое отображение $M' = H(M)$ является проективным. В самом деле, пусть u — какая угодно прямая плоскости α, P — точка ее пересечения с осью a, u'— проходящая через

P прямая, которая вместе с прямой u гармонически разделяет пару прямых a и PO. Очевидно, если точка M перемещается по прямой u, то соответствующая ей точка $M' = H(M)$ перемещается по прямой u'. Таким образом, при отображении $M' = H(M)$ каждая прямая отображается в прямую же. А это и служит характерным признаком проективного отображения.

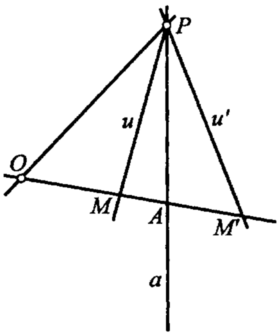


Рис. 115

Далее, согласно замечанию, сделанному в конце n° 93, если точка M совмещается с какой-либо точкой оси a, то соответствующая точка $M' = H(M)$ совместится с этой же точкой оси. Точно так же, если M совпадает с центром O, то совпадает с центром и точка $M' = H(M)$. Следовательно, центр O и все точки оси a представляют собой неподвижные точки отображения $M' = H(M)$. Мы видим, что проективное отображение $M' = H(M)$ плоскости α на себя обладает бесконечным множеством неподвижных точек (однако все они, кроме точки O, расположены на одной прямой). Таким образом, если некоторое проективное отображение плоскости на себя оставляет четыре точки неподвижными, то можно сделать заключение, что это отображение является тождественным, лишь в том случае, когда известно, что расположение неподвижных точек подчиняется указанному в теореме 26 ограничению.

107. В дальнейшем мы будем иногда употреблять выражение *двумерное проективное многообразие*; при этом мы будем подразумевать либо проективную плоскость, либо так называемую связку. *Связка* есть совокупность прямых и плоскостей проективного пространства, проходящих через какую-либо его точку (*центр связки*).

Можно определить проективное отображение для любых двумерных многообразий. Чтобы удобнее было это определение высказать, условимся называть *элементом первого рода* двумерного многообразия П каждую принадлежащую ему точку, если П — плоскость, и каждую принадлежащую ему прямую, если П — связка; *элементом второго рода* двумерного многообразия П будем называть принадлежащую ему прямую, если П — плоскость, и принадлежащую ему плоскость, если П — связка.

Пусть между элементами первого рода двух многообразий П и П$'$ установлено взаимно однозначное соответствие так, что произвольному элементу x многообразия П отвечает элемент $x' = f(x)$ многообразия П$'$. Соответствие (или отображение) $x' = f(x)$ называется *проективным*, если любой группе элементов первого рода многообразия П, принадлежащих одному элементу второго рода этого многообразия, соответствует в многообразии П$'$ группа элементов первого рода, также принадлежащих одному элементу второго рода.

Все теоремы, доказанные в предыдущем параграфе, естественно обобщаются на случай произвольных двумерных многообразий. Чтобы получить формулировки обобщенных теорем, нужно в формулировках теорем, приведенных в n° 106, всюду слова "точка" и "прямая" заменить выражениями "элемент первого рода" и "элемент второго рода". Чтобы убедиться в их справедливости, достаточно заметить, что элементы первого и второго рода связки при пересечении их плоскостью дают соответственно элементы первого и второго рода этой плоскости. Таким образом, исследование проективных отображений двумерных многообразий можно свести к исследованию проективных отображений плоскостей, которое и было проведено выше.

108. Теперь мы рассмотрим проективные отображения трехмерных проективных многообразий; *трехмерными проективными многообразиями* мы называем проективные пространства.

Пусть даны два проективных пространства Π и Π' (каждый из символов Π и Π' обозначает некоторое множество предметов, называемых точками, прямыми и плоскостями, для которых определены отношения взаимной принадлежности и порядка с соблюдением требований проективных аксиом). Пусть, далее, между точками Π и Π' установлено взаимно однозначное соответствие, по которому произвольной точке M пространства Π отвечает точка $M' = f(M)$ пространства Π'. Взаимно однозначное соответствие $M' = f(M)$ между точками пространств Π и Π' называется *проективным*, если точкам любой плоскости пространства Π соответствуют в пространстве Π' точки, также лежащие на некоторой плоскости.

Задание в пространстве Π' точек $M' = f(M)$, проективно соответствующих точкам M пространства Π, называют еще *проективным отображением пространства* Π *на пространство* Π'. В том случае, когда пространство Π и пространство Π' совпадают, говорят, что дано проективное отображение пространства на самого себя.

Основные свойства проективных отображений трехмерных многообразий представляют собой естественные обобщения соответствующих свойств проективных отображений двумерных многообразий и устанавливаются при помощи рассуждений, вполне аналогичных тем, какие проводились в n° 107. Поэтому мы ограничимся лишь формулировками главнейших теорем о проективных отображениях в трехмерном случае, не задерживаясь на их доказательствах.

Теорема 27. *Если пространство* Π *проективно отображено на пространство* Π', *то каждая гармоническая группа элементов пространства* Π *имеет своим образом в пространстве* Π' *также гармоническую группу элементов.*

Теорема 28. *При проективном отображении пространства* Π *на пространство* Π':

1) *Каждое одномерное многообразие пространства* Π *взаимно однозначно и проективно отображается на соответствующее одномерное многообразие пространства* Π'. *В частности, каждая прямая*

пространства П *взаимно однозначно и проективно отображается на соответствующую прямую пространства* П′.

2) *Каждое двумерное многообразие пространства* П *взаимно однозначно и проективно отображается на соответствующее двумерное многообразие пространства* П′. *В частности, каждая плоскость пространства* П *взаимно однозначно и проективно отображается на соответствующую плоскость пространства* П′.

Теорема 29а. *Если* $M' = f(M)$ — *проективное отображение пространства* П *на пространство* П′, *то обратное отображение* $M = \varphi(M')$ *пространства* П′ *на пространство* П *также является проективным.*

Теорема 29б. *Если* $M' = f_1(M)$ — *проективное отображение пространства* П *на пространство* П′, *и* $M'' = f_2(M')$ — *проективное отображение пространства* П′ *на пространство* П″, *то отображение* $M'' = f_2(f_1(M))$ *пространства* П *на пространство* П″ *также является проективным, т. е. совокупность проективных отображений пространств обладает групповым свойством.*

Теорема 30. *Проективное отображение пространства* П *на пространство* П′ *однозначно определяется заданием пяти пар соответствующих по отображению точек, при условии, что из пяти точек, задаваемых в пространстве* П, *никакие четыре не лежат в одной плоскости.*

Из теоремы 30 непосредственно вытекает следующая

Теорема 31. *При нетождественном проективном отображении пространства на себя не может быть пяти неподвижных точек, из которых никакие четыре не лежат на одной плоскости.*

Ограничение, наложенное в этой теореме на расположение точек, является существенным. В этом можно убедиться, обобщив на случай пространства понятие гармонического отображения, определение которого для плоскости дано нами в конце n° 106.

Кроме приведенных выше основных теорем, отметим дополнительно еще следующую теорему.

Пусть множество всех точек проективного пространства П *взаимно однозначно отображено на некоторое множество* G' *точек проективного пространства* П′. *Если всякие точки пространства* П, *лежащие на одной плоскости, отображаются в точки пространства* П′, *также лежащие на одной плоскости, то возможны лишь два случая:* 1) *либо множество* G' *целиком расположено на какой-нибудь одной плоскости пространства* П′, 2) *либо множество* G' *совпадает со всем пространством* П′ (*тогда данное отображение есть проективное отображение пространства* П *на все пространство* П′).

Эта теорема, естественно, обобщает теорему об отображении плоскостей, которая в n° 106 сформулирована и доказана после теоремы 23а.

По отношению к пространственным телам вводится понятие проективной эквивалентности так же, как оно было введено для фигур одного и двух измерений. Тело T пространства П называется *проективно эквивалентным* телу T' того же самого или другого пространства П$'$, если существует проективное отображение пространства П на пространство П$'$, при котором тело T отображается на тело T'.

Рефлексивность и транзитивность отношения проективной эквивалентности непосредственно следуют из теорем 29а и 29б.

§ 9. Аналитические представления проективных отображений. Инволюция

109. Теперь мы ставим своей ближайшей целью вывести соотношения между проективными координатами точек, соответствующих друг другу в проективном отображении.

Сначала мы рассмотрим проективные отображения плоскости на плоскость и пространства на пространство, а потом обратимся к одномерному случаю, именно, к проективному отображению прямых.

Пусть α и α' — две (не обязательно различные) плоскости. Введем на каждой из них какую-либо систему проективных однородных координат (если α и α' совпадают, то вводимые на них координатные системы, в частности, также могут совпадать). Далее, определим некоторое специальное отображение точек плоскости α в плоскость α', именно: выбрав как-нибудь числа $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, c_{33}$, будем считать точку $M'(x_1', x_2', x_3')$ плоскости α соответствующей по отображению точке $M(x_1, x_2, x_3)$ плоскости α', если координаты этих точек удовлетворяют равенствам:

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ' — любое число, не равное нулю. Такое отображение назовем *линейным* и будем употреблять для него символическую запись $M' = L(M)$.

Напомним читателю, что по основному свойству однородных координат выбор множителя ρ' не влияет на положение точки M' с координатами $\rho' x_1', \rho' x_2', \rho' x_3'$ (см. n° 101). Поэтому каждая точка M может иметь в качестве своего образа лишь одну-единственную точку M'. Числа c_{ik}, определяющие линейное отображение, мы запишем в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

которую назовем *матрицей линейного отображения*; сами числа c_{ik}

будем называть *коэффициентами отображения*, а определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \tag{3}$$

— *определителем отображения.*

Существенно заметить, что в случае $\Delta = 0$ не каждая точка плоскости α имеет образ.

В самом деле, если $\Delta = 0$, то система

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 &= 0, \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

допускает не равные одновременно нулю решения x_1^0, x_2^0, x_3^0; точка $M(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ не имеет образа на плоскости α', так как по формулам (1) в этом случае мы получаем $x_1' = 0, x_2' = 0, x_3' = 0$, что невозможно, поскольку x_1', x_2', x_3' суть однородные координаты (см. n° 101). Таким образом, областью определения отображения $M' = L(M)$ может оказаться не вся плоскость α, а плоскость α с исключением некоторого множества точек $\alpha_0(M)$. Легко понять, что в случае $\Delta = 0$ множество $\alpha_0(M)$ есть либо точка, либо прямая, либо даже вся плоскость α. Именно, если в системе $(*)$ имеются два существенных (т. е. линейно-независимых) уравнения, то система $(*)$ определяет отношение неизвестных x_1, x_2, x_3. В этом случае $\alpha_0(M)$ состоит из одной точки; если в системе $(*)$ имеется только одно существенное уравнение, то, очевидно, $\alpha_0(M)$ есть прямая (определяемая этим уравнением); если, наконец, в системе $(*)$ совсем нет существенных уравнений (т. е. если все $c_{ik} = 0$), то $\alpha_0(M)$ совпадает с плоскостью α.

Иначе говоря, $\alpha_0(M)$ есть точка, прямая или плоскость соответственно равенствам: $\operatorname{Rang} C = 2$, $\operatorname{Rang} C = 1$ или $\operatorname{Rang} C = 0$. Последний случай естественно считать исключенным из рассмотрения.

Для линейных отображений имеют место следующие теоремы.

Теорема 32. *Если линейное отображение $M' = L(M)$ точек плоскости α в плоскость α' имеет определитель, отличный от нуля, то $M' = L(M)$ является взаимно однозначным отображением плоскости α на плоскость α'.*

Доказательство. Пусть дано линейное отображение $M' = L(M)$, определяемое формулами (1), с определителем $\Delta \neq 0$. Тогда:

1) Каждая точка M плоскости α имеет образ на плоскости α'. В самом деле, какой бы ни была точка $M(x_1, x_2, x_3)$, по формулам (1) всегда определяются три числа $\rho' x_1'$, $\rho' x_2'$, $\rho' x_3'$; они не могут быть все равными нулю, так как при $\Delta \neq 0$ из равенств

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 &= 0, \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

следовало бы $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, что невозможно. Но три числа $\rho' x'_1$, $\rho' x'_2$, $\rho' x'_3$, если они не все равны нулю, в системе однородных координат на плоскости α' определяют некоторую точку M', которая и представляет собой образ точки M.

2) Каждая точка M' плоскости α' является образом одной и только одной точки M плоскости α.

В самом деле, если $\Delta \neq 0$, то из уравнений (1) при данных x'_1, x'_2, x'_3 и ρ' всегда и притом однозначно можно найти соответствующие значения x_1, x_2, x_3; если не все числа $x'_1 x'_1, x'_3$ равны нулю, то числа x_1, x_2, x_3 также не могут быть все равными нулю. Таким образом, соотношения (1) по однородным координатам точки M' всегда определяют однородные координаты некоторой точки M. Далее, для различных значений ρ' уравнения (1) определяют разные значения x_1, x_2, x_3, но отношения $x_1 : x_2 : x_3$ при изменениях ρ' не меняются. Следовательно, по данной точке M' точка M определяется однозначно.

Тем самым теорема доказана.

Если мы в уравнениях (1) положим $\rho' = \dfrac{1}{\rho}$ и при условии $\Delta \neq 0$ выразим из этих уравнений $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$, то получим равенства:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= c'_{11} x'_1 + c'_{12} x'_2 + c'_{13} x'_3, \\ \rho x_2 &= c'_{21} x'_1 + c'_{22} x'_2 + c'_{23} x'_3, \\ \rho x_3 &= c'_{31} x'_1 + c'_{32} x'_2 + c'_{33} x'_3, \end{aligned} \tag{4}$$

определяющие отображение плоскости α' на плоскость α, обратное данному отображению α на α'. Очевидно, обратное отображение, как и данное, является линейным. Коэффициенты c'_{ik} выражаются через коэффициенты c_{ik} по известным правилам алгебры. Они составляют матрицу

$$C' = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

обратную матрице C данного отображения, т. е. между C и C' имеет место соотношение

$$CC' = I,$$

где

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица. Как известно, в таком случае определители Δ и Δ' этих матриц находятся в аналогичной зависимости:

$$\Delta \Delta' = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\Delta' \neq 0$.

Теорема 33. *Если линейное отображение $M' = L(A)$ точек плоскости α в плоскость α' имеет определитель, равный нулю, то все образы точек плоскости α располагаются в плоскости α' на одной прямой. (В этом случае отображение $M' = L(A)$ не является взаимно однозначным.)*

В самом деле, если определитель отображения, заданного формулами (1), равен нулю, то существуют три числа u_1, u_2, u_3, из которых хоть одно отлично от нуля, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned} c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3 &= 0, \\ c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + c_{23}u_3 &= 0, \\ c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + c_{33}u_3 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Умножим почленно первое из равенств (1) на u_1, второе — на u_2, третье — на u_3 и просуммируем их; вследствие равенств (6) мы получим при любых x_1, x_2, x_3:

$$u_1x_1' + u_2x_2' + u_3x_3' = 0.$$

Таким образом, координаты точки $M' = L(M)$, независимо от того, как выбирается точка M, удовлетворяют уравнению некоторой прямой. Тем самым теорема доказана*).

Теорема 34. *Каким бы ни было линейное отображение $M' = L(M)$ точек плоскости α в плоскость α', образы точек любой прямой плоскости α располагаются в плоскости α' также на некоторой прямой.*

Доказательство. 1) Если $\Delta = 0$, то утверждение справедливо вследствие теоремы 33.

2) Если $\Delta \neq 0$, то вместе с данным отображением существует обратное ему, также линейное, определяемое формулами вида (4). Пусть $M(x_1, x_2, x_3)$ — произвольная точка некоторой прямой, определенной в плоскости α уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \tag{7}$$

Пусть, далее, $M'(x_1', x_2', x_3')$ — точка, которая в плоскости α' соответствует точке M; координаты точек M и M' связаны соотношениями (4). Умножая обе части уравнения (7) на ρ и заменяя $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$ по формулам (4), мы получим соотношение

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} u_1' &= c_{11}'u_1 + c_{21}'u_2 + c_{31}'u_3, \\ u_2' &= c_{12}'u_1 + c_{22}'u_2 + c_{32}'u_3, \\ u_3' &= c_{13}'u_1 + c_{23}'u_2 + c_{33}'u_3. \end{aligned}$$

*) Заметим, что если $\operatorname{Rang} C = 2$, то точки M' заполняют прямую. Если же $\operatorname{Rang} C = 1$, то все точки M' совпадают; образом служит единственная точка.

Таким образом, если M находится на прямой, определяемой в плоскости α уравнением (7), то M' находится на прямой, которая в плоскости α' определяется уравнением (8). Теорема доказана.

Сопоставляя теоремы 32 и 34 с определением проективного отображения плоскостей, приходим к следующей теореме.

Теорема 35. *Всякое линейное отображение точек плоскости α в плоскость α', определитель которого отличен от нуля, является проективным отображением плоскости α на плоскость α'.*

Дальше мы покажем, что верно и обратное: *каждое проективное отображение является линейным.* Прежде чем получить этот важный результат, нам придется доказать одну вспомогательную теорему.

Теорема 36. *Если M_1, M_2, M_3, M_4 — четыре точки плоскости α, расположенные в ней как угодно с соблюдением лишь условия, что никакие три из них не лежат на одном прямой, и M_1', M_2', M_3', M_4' — четыре точки плоскости α', расположение которых подчинено аналогичному условию, то существует линейное отображение плоскости α на плоскость α' с определителем, отличным от нуля, переводящее точки M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно в точки M_1', M_2', M_3', M_4'.*

Доказательство. Пусть x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} — координаты одной из данных точек M_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ в какой-либо системе однородных координат на плоскости α и $x_{1k}', x_{2k}', x_{3k}'$ — координаты точки M_k' $(k = 1, 2, 3, 4)$ в некоторой системе однородных координат на плоскости α'. Мы должны доказать возможность так выбирать параметры линейного отображения

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned} \qquad (1)$$

чтобы определитель его оказался отличным от нуля и чтобы оно переводило точки M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно в точки M_1', M_2', M_3', M_4'. Очевидно, для этого нужно установить, что из соотношений

$$\begin{aligned} \rho_k' x_{1k}' &= c_{11}x_{1k} + c_{12}x_{2k} + c_{13}x_{3k}, \\ \rho_k' x_{2k}' &= c_{21}x_{1k} + c_{22}x_{2k} + c_{23}x_{3k}, \\ \rho_k' x_{3k}' &= c_{31}x_{1k} + c_{32}x_{2k} + c_{33}x_{3k} \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

$(k = 1, 2, 3, 4)$ могут быть найдены параметры c_{ik} и величины ρ_k' (где ρ_k' — множитель левой части (1), соответствующий данному выбору однородных координат точек M_k и M_k'), притом так, что параметры c_{ik} будут удовлетворять условию $\Delta \neq 0$.

Заметим прежде всего, что ни один из определителей третьего порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} \end{Vmatrix} \qquad (\beta)$$

не равен нулю. В самом деле, если бы, например, имело место равенство

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

то существовали бы линейные связи

$$\begin{aligned} u_1x_{11} + u_2x_{21} + u_3x_{31} &= 0, \\ u_1x_{12} + u_2x_{22} + u_3x_{32} &= 0, \\ u_1x_{13} + u_2x_{23} + u_3x_{33} &= 0, \end{aligned}$$

и, таким образом, точки M_1, M_2, M_3 лежали бы на прямой $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$; а это исключено условием теоремы. Точно так же не равен нулю ни один из определителей третьего порядка матрицы, составленной из координат $x'_{1k}, x'_{2k}, x'_{3k}$ аналогично матрице (β).

Обратимся теперь к соотношениям (α). Полагая $k = 1, 2, 3$, напишем три равенства, которые дает первое из соотношений (α):

$$\begin{aligned} c_{11}x_{11} + c_{12}x_{21} + c_{13}x_{31} &= \rho'_1x'_{11}, \\ c_{11}x_{12} + c_{12}x_{22} + c_{13}x_{32} &= \rho'_2x'_{12}, \\ c_{11}x_{13} + c_{12}x_{23} + c_{13}x_{33} &= \rho'_3x'_{13}. \end{aligned} \qquad (\gamma)$$

Это есть система линейных уравнений с неизвестными c_{11}, c_{12}, c_{13}. Определитель системы (γ), который мы обозначим через D, по предыдущему, отличен от нуля. Следовательно,

$$c_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \rho'_1x'_{11} & x_{21} & x_{31} \\ \rho'_2x'_{12} & x_{22} & x_{32} \\ \rho'_3x'_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad c_{12} = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & \rho'_1x'_{11} & x_{31} \\ x_{12} & \rho'_2x'_{12} & x_{32} \\ x_{13} & \rho'_3x'_{13} & x_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$c_{13} = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \rho'_1x'_{11} \\ x_{12} & x_{22} & \rho'_2x'_{12} \\ x_{13} & x_{23} & \rho'_3x'_{13} \end{vmatrix}}{D},$$

или

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\rho'_1x'_{11}X_{11} + \rho'_2x'_{12}X_{12} + \rho'_3x'_{13}X_{13}}{D}, \\ c_{12} &= \frac{\rho'_1x'_{11}X_{21} + \rho'_2x'_{12}X_{22} + \rho'_3x'_{13}X_{23}}{D}, \\ c_{13} &= \frac{\rho'_1x'_{11}X_{31} + \rho'_2x'_{12}X_{32} + \rho'_3x'_{13}X_{33}}{D}, \end{aligned} \qquad (\delta_1)$$

где X_{ik} — алгебраическое дополнение элемента x_{ik} определителя D. Аналогичным способом, используя второе и третье из равенств (α), получим:

$$
\begin{aligned}
c_{21} &= \frac{\rho_1' x_{21}' X_{11} + \rho_2' x_{22}' X_{12} + \rho_3' x_{23}' X_{13}}{D}, \\
c_{22} &= \frac{\rho_1' x_{21}' X_{21} + \rho_2' x_{22}' X_{22} + \rho_3' x_{23}' X_{23}}{D}, \\
c_{23} &= \frac{\rho_1' x_{21}' X_{31} + \rho_2' x_{22}' X_{32} + \rho_3' x_{23}' X_{33}}{D},
\end{aligned} \tag{δ_2}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{31} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{11} + \rho_2' x_{32}' X_{12} + \rho_3' x_{33}' X_{13}}{D}, \\
c_{32} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{21} + \rho_2' x_{32}' X_{22} + \rho_3' x_{33}' X_{23}}{D}, \\
c_{33} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{31} + \rho_2' x_{32}' X_{32} + \rho_3' x_{33}' X_{33}}{D}.
\end{aligned} \tag{δ_3}
$$

Внесем теперь правые части равенств (δ_1), (δ_2) и (δ_3) в уравнения (α) при $k = 4$, полагая при этом для простоты $\rho_4' = 1$. После надлежащей группировки членов будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{11}' D_1}{D}\rho_1' + \frac{x_{12}' D_2}{D}\rho_2' + \frac{x_{13}' D_3}{D}\rho_3' &= x_{14}', \\
\frac{x_{21}' D_1}{D}\rho_1' + \frac{x_{22}' D_2}{D}\rho_2' + \frac{x_{23}' D_3}{D}\rho_3' &= x_{24}', \\
\frac{x_{31}' D_1}{D}\rho_1' + \frac{x_{32}' D_2}{D}\rho_2' + \frac{x_{33}' D_3}{D}\rho_3' &= x_{34}',
\end{aligned} \tag{ε}
$$

где

$$
\begin{aligned}
D_1 &= X_{11}x_{14} + X_{21}x_{24} + X_{31}x_{34}, \\
D_2 &= X_{12}x_{14} + X_{22}x_{24} + X_{32}x_{34}, \\
D_3 &= X_{13}x_{14} + X_{23}x_{24} + X_{33}x_{34}.
\end{aligned} \tag{ζ}
$$

Из выражений D_1, D_2, D_3 видно, что эти величины суть определители третьего порядка матрицы (β). Следовательно, $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$, $D_3 \neq 0$. Положим

$$
D' = \begin{vmatrix} x_{11}' & x_{12}' & x_{13}' \\ x_{21}' & x_{22}' & x_{23}' \\ x_{31}' & x_{32}' & x_{33}' \end{vmatrix};
$$

тогда определитель A системы (ε) выразится в виде

$$A = \frac{D'D_1D_2D_3}{D^3}.$$

Отсюда $A \neq 0$, вследствие чего система (ε) является определенной. Разрешая эту систему, найдем:

$$\rho'_1 = \frac{D}{D'D_1}\begin{vmatrix} x'_{14} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{24} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{34} & x'_{32} & x'_{33} \end{vmatrix}, \quad \rho'_2 = \frac{D}{D'D_2}\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{14} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{24} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{34} & x'_{33} \end{vmatrix},$$

$$\rho'_3 = \frac{D}{D'D_3}\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{14} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{24} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{34} \end{vmatrix}.$$

Так как все определители, через которые выражаются $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$, отличны от нуля (это было установлено в начале доказательства), то $\rho'_1 \neq 0, \rho'_2 \neq 0, \rho'_3 \neq 0$. После того как найдены $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$, параметры c_{ik} однозначно определяются равенствами (δ).

Линейное отображение (1) при найденных значениях c_{ik} является искомым, так как: 1) переводит точки M_1, M_2, M_3, M_4 в точки M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 и 2) имеет определитель, отличный от нуля; последнее непосредственно вытекает из теоремы 33. Теорема доказана.

Ранее в n° 106 мы доказали теорему 25, согласно которой проективное отображение одной плоскости на другую однозначно определяется заданием четырех пар соответствующих точек (при известном ограничении на их расположение). Предыдущие результаты позволяют высказать более сильную теорему, именно:

Теорема 37. *Каковы бы ни были четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 плоскости α, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и каковы бы ни были четыре точки M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 плоскости α', расположение которых удовлетворяет тому же условию, всегда существует и притом единственное проективное отображение плоскости α на плоскость α', переводящее M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно в M'_1, M'_2, M'_3, M'_4.*

Эта теорема непосредственно вытекает из теорем 35 и 36.

Попутно докажем аналогичную теорему для проективного отображения прямых.

Теорема 37а. *Каковы бы ни были три различные точки M_1, M_2, M_3 прямой a и каковы бы ни были три различные точки M'_1, M'_2, M'_3 прямой a', существует и притом единственное проективное отображение прямой a на прямую a', переводящее точки M_1, M_2, M_3 в точки M'_1, M'_2, M'_3.*

Доказательство. Так как единственность такого отображения установлена теоремой 15, то сейчас нужно лишь доказать существование этого отображения.

Проведем через прямую a какую-нибудь плоскость α и через прямую a' — плоскость α'. В плоскости α возьмем произвольную прямую u, проходящую через M_3 (но не совпадающую с прямой a), и на ней любые две точки P, Q; в плоскости α' возьмем произвольную прямую u', проходящую через M_3' (но не совпадающую с a'), и на ней любые две точки P', Q'. По теореме 37 существует проективное отображение плоскости α на плоскость α', переводящее точки M_1, M_2, P, Q в точки M_1', M_2', P', Q'. По теореме 24 при этом отображении прямая a проективно отображается на прямую a', причем так, что точка M_1 переходит в точку M_1', точка M_2 переходит в точку M_2' и точка M_3 — в точку M_3'; последнее следует из того, что точка M_3 находится на пересечении прямых a, u, а точка M_3' — на пересечении соответствующих прямых a', u'. Тем самым требуемое доказано.

Позднее в n° 140 мы покажем, как можно фактически осуществить проективное отображение прямой на прямую, определяемое тремя парами соответствующих точек, не прибегая к отображению плоскостей.

Теперь мы имеем возможность без всякого труда установить одну из главнейших теорем проективной геометрии:

Теорема 38. *Каждое проективное отображение плоскости на плоскость является линейным отображением с определителем, отличным от нуля.*

Доказательство весьма короткое. В самом деле, пусть $M' = f(M)$ — какое-нибудь проективное отображение плоскости α на плоскость α'. Выберем на плоскости α четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Пусть M_1', M_2', M_3', M_4' — соответствующие им точки плоскости α'. В силу теоремы 23а расположение точек M_1', M_2', M_3', M_4' удовлетворяет тому же условию. По теореме 36 существует линейное отображение $M' = L(M)$ плоскости α на плоскость α' с определителем, отличным от нуля, переводящее точки M_1, M_2, M_3, M_4 в точки M_1', M_2', M_3', M_4'. Из теорем 35 и 25 следует, что отображения $M' = f(M)$ и $M' = L(M)$ не отличаются друг от друга. Тем самым наша теорема доказана.

Теорема 38 решает поставленный в начале этого раздела вопрос об аналитическом представлении проективных отображений:

Каждое проективное отображение представляется в проективных координатах уравнениями

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1}$$

с отличным от нуля определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

110. Все теоремы, доказанные в предыдущем параграфе, естественно обобщаются на трехмерный случай. Не приводя их, мы ограничимся формулировкой основного предложения:

Каково бы ни было проективное отображение $M' = f(M)$ пространства Π на пространство Π', проективные координаты x_1', x_2', x_3', x_4' точки M' выражаются через проективные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 точки M при помощи линейных соотношений

$$\begin{aligned}
\rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4, \\
\rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4, \\
\rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4, \\
\rho' x_4' &= c_{41}x_1 + c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4
\end{aligned}$$

с постоянными коэффициентами c_{ik}; при этом определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

111. Теперь мы можем найти аналитические представления для проективных отображений прямой на прямую.

Пусть a и a' — две проективные прямые; пусть, далее $M' = f(M)$ — какое-нибудь проективное отображение прямой a на прямую a'. Введем на прямой a систему проективных однородных координат, определяя ее тремя точкам A_1, A_2 и E так, чтобы точки A_1 и A_2 получили соответственно координаты $(0, 1)$ и $(1, 0)$, а точка E — координаты $(1, 1)$ (см. конец n° 100). Аналогично, заданием трех точек A_1', A_2' и E' введем проективные однородные координаты на прямой a'. Наша цель — установить соотношения между координатами точек M и $M' = f(M)$.

Мы докажем, что координаты (x_1, x_2) точки M и координаты (x_1', x_2') точки $M' = f(M)$ связаны уравнениями

$$\begin{aligned}
\rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\
\rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2,
\end{aligned} \qquad (*)$$

где $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ — постоянные коэффициенты, определяемые отображением, $\rho' \neq 0$ — произвольный множитель; при этом определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Для доказательства проведем через прямую a какую-нибудь плоскость α и через прямую a' — какую-нибудь плоскость α'. После этого введем на плоскости α систему проективных однородных координат таким образом, чтобы точка A_1 получила координаты $(0, 1, 0)$, точка A_2 — координаты $(1, 0, 0)$ и точка E — координаты $(1, 1, 0)$. Прямая a, таким образом, будет определяться уравнением $x_3 = 0$, т. е. будет одной из прямых координатного триэдра; кроме того, если M — произвольная точка прямой a и $(x_1, x_2, 0)$ — ее координаты на плоскости α, то числа x_1, x_2 будут совпадать с однородными координатами точки M в той координатной системе, которая с самого начала была введена на прямой a (для определения указанной координатной системы на плоскости α нужно две вершины координатного триэдра поместить в точках A_1 и A_2, третью вершину A_3 взять произвольно, а точку единиц выбрать где-нибудь на прямой A_3E; см. n° 101). Аналогично введем проективные однородные координаты на плоскости α'.

После этого возьмем на прямой a три любые точки A, B, C и на прямой a' — соответствующие им по отображению $M' = f(M)$ точки A', B', C'. Возьмем еще на плоскости α какие-нибудь точки D, G так, чтобы D, G, C лежали на одной прямой, отличной от прямой a; аналогично на плоскости α' выберем точки D', G' так, чтобы D', G', C' лежали на одной прямой, отличной от a'. По теореме 37 существует проективное отображение $M' = F(M)$ плоскости α на плоскость α', переводящее точки A, B, D, G соответственно в точки A', B', D', G'. Очевидно, при этом точки прямой a будут отображаться в точки прямой a'; согласно теореме 24 отображение $M' = f(M)$ п р я м о й a на п р я м у ю a' является проективным. Не представляет труда получить формулы, выражающие координаты точки $M' = F(M)$ на прямой a' через координаты точки M на прямой a. Для этого следует сначала записать известные нам формулы:

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned} \qquad (**)$$

с помощью которых выражаются координаты точки $M' = F(M)$ через координаты точки M при любом расположении точки M на плоскости α, и положить в них $x_3 = 0$. Тогда последнее из равенств $(**)$ при любых x_1, x_2 необходимо должно дать $x_3' = 0$ (так как прямая a отображается в прямую a'); следовательно, $c_{31} = c_{32} = 0$

и, таким образом, при $x_3 = 0, x'_3 = 0$ находим:

$$\rho' x'_1 = c_{11} x_1 + c_{12} x_2,$$
$$\rho' x'_2 = c_{21} x_1 + c_{22} x_2.$$

Это и есть искомое соотношение между координатами точек M и $M' = F(M)$ прямых a и a', т. е. аналитическое представление отображения $M' = F(M)$. Но легко видеть, что отображение $M' = F(M)$ прямой a на прямую a' не отличается от данного отображения $M' = f(M)$. В самом деле, при отображении $M' = F(M)$ точка C прямой a отображается в точку C' прямой a'. Чтобы установить это, рассмотрим отображение $M' = F(M)$ всей плоскости α на плоскость α'; оно переводит прямые AB и DG в прямые $A'B'$ и $D'G'$, и значит, точку C, определяемую пересечением прямых AB, DG, — в точку C', определяемую пересечением прямых $A'B', D'G'$. Таким образом, как при отображении $M' = F(M)$, так и при отображении $M' = f(M)$ точки A, B, C прямой a переводятся в точки A', B', C' прямой a'. На основании теоремы 15 отсюда вытекает, что отображение $M' = F(M)$ совпадает с отображением $M' = f(M)$. Следовательно, формулы $(*)$ дают аналитическое представление произвольно заданного проективного отображения $M' = f(M)$ прямой a на прямую a'.

То, что определитель Δ отличен от нуля,

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

следует из взаимной однозначности проективного отображения. Действительно, если $\Delta = 0$, то из уравнений $(*)$ нельзя определить x_1, x_2 по произвольно данным x'_1, x'_2, т. е. отображение, определяемое формулами $(*)$, не взаимно однозначное вопреки условию.

Тем самым наше предложение доказано полностью.

Итак, проблему разыскания аналитических представлений проективных отображений мы решили в полном объеме. Коротко полученные результаты можно формулировать следующим образом: *проективные отображения проективных многообразий всегда представляются в однородных проективных координатах однородными линейными соотношениями.*

112. Во многих случаях бывает удобно использовать аналитические представления проективных отображений в неоднородных координатах. Эти представления непосредственно выводятся из формул, выражающих проективные отображения в однородных координатах.

Вспомним, что если x_1, x_2 — однородные проективные координаты какой-нибудь точки M прямой, то число $x = \dfrac{x_1}{x_2}$ является неоднородной проективной координатой этой же точки M (см. n° 100). Пусть дано некоторое проективное отображение $M' = f(M)$ прямой a

на прямую a'. Тогда, как нам известно, между однородными координатами точек M и M' существуют соотношения

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{aligned} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Деля почленно первое из этих равенств на второе и полагая $\frac{x_1}{x_2} = x$, $\frac{x_1'}{x_2'} = x'$, мы получим искомую зависимость между неоднородными координатами x и x' точек M и M':

$$x' = \frac{c_{11}x + c_{12}}{c_{21}x + c_{22}}. \tag{$*$}$$

Вводя новые обозначения коэффициентов: $c_{11} = \alpha$, $c_{12} = \beta$, $c_{21} = \gamma$, $c_{22} = \delta$, мы напишем это равенство в виде

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \tag{1}$$

Таким образом, если дано проективное отображение прямой a на прямую a', то неоднородные проективные координаты точек прямой a' выражаются через неоднородные проективные координаты соответствующих точек прямой a при помощи дробно-линейной функции с определителем, отличным от нуля.

Аналитические представления в неоднородных координатах проективных отображений плоскости на плоскость и пространства на пространство могут быть получены аналогичным способом.

Так, если $M' = f(M)$ — проективное отображение плоскости α на плоскость α', то между однородными проективными координатами точек M и M' существуют соотношения (1) n° 109. Деля почленно первое и второе из них на третье, полагая $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, $\frac{x_1'}{x_3'} = x'$, $\frac{x_1'}{x_3'} = y'$ и изменяя обозначения коэффициентов, мы получим искомые зависимости между неоднородными координатами (x, y) и (x', y') точек M и M' в виде:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \end{aligned} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0\right). \tag{2}$$

Аналогично, если $M' = f(M)$ — проективное отображение пространства Π на пространство Π', то координаты x', y', z' точки M' выражаются через проективные координаты x, y, z точки M при помощи равенств:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}, \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \right).$$

113. В заключение этого раздела мы остановимся на одном важном частном случае проективного отображения одномерных многообразий.

Пусть некоторое проективное одномерное многообразие П (прямая, линейный пучок или пучок плоскостей) проективно отображено на себя и пусть при этом произвольный его элемент p переходит в элемент $p' = f(p)$. Представим себе, что данное отображение совершается последовательно два раза. Тогда элемент p сначала переходит в элемент $p' = f(p)$, а затем — в элемент $p'' = f(p')$. Вообще говоря, элемент p'' не будет совпадать с элементом p.

Если, каков бы ни был элемент p, элемент $p'' = f(p')$, где $p' = f(p)$ совпадает с p, отображение $p' = f(p)$ называется инволюционным *или*, просто, инволюцией.

Инволюция и есть тот частный случай проективного отображения, который мы имеем в виду сейчас исследовать.

Инволюционный характер отображения $p' = f(p)$ может быть выражен:

1) либо тем, что для любого p имеет место соотношение $f(f(p)) = p$;

2) либо тем, что для любого p наряду с соотношением $p' = f(p)$ имеет место соотношение $p = f(p')$, т. е. обратное отображение совпадает с данным.

Обе характеристики непосредственно вытекают из определения инволюции (именно, из того, что $p'' = p$).

Предположим, что одномерное многообразие П, между элементами которого установлено инволюционное соответствие $p' = f(p)$, является пучком прямых или пучком плоскостей. Возьмем какую-либо прямую a, выбор которой ограничим лишь одним условием: если П — пучок прямых, то a лежит в его плоскости и не проходит через его центр, если П — пучок плоскостей, она не пересекает его ось. Обозначим через M точку пересечения прямой a с элементом p многообразия П, через M' — точку пересечения a с элементом p'. Очевидно, соответствие $M' = F(M)$ между точками прямой a, при котором точке M отвечает точка M', как и данное соответствие $p' = f(R)$, является инволюционным. Очевидно также, что свойства инволюционных соответствий $p' = f(p)$ и $M' = F(M)$ идентичны. Поэтому исследование инволюции одномерных многообразий достаточно провести для того случая, когда многообразие представляет собой прямую.

Пусть $M' = F(M)$ — какое-нибудь проективное отображение прямой a на самое себя. Введем на прямой a систему проективных (неоднородных) координат. Тогда, как нам известно, между координатами x и x' точек M и $M' = F(M)$ будет иметь место соотношение

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\Delta = \alpha\beta - \beta\gamma \neq 0). \tag{$*$}$$

Постараемся прежде всего выяснить, при каком условии на коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ отображение $M' = F(M)$ является инволюционным. Для этого, разрешая уравнение ($*$) относительно x, найдем аналитическое представление отображения, обратного данному. Оно будет:

$$x = \frac{-\delta x' + \beta}{\gamma x' - \alpha}. \tag{$**$}$$

Как было отмечено выше, инволюционное отображение характеризуется тем, что оно не отличается от обратного себе отображения. Сравнивая ($*$) и ($**$), тотчас находим, что представляемые этими формулами отображения совпадают либо в случае $\delta = -\alpha$, либо в случае $\delta = \alpha, \beta = 0, \gamma = 0$. При $\delta = \alpha, \beta = 0, \gamma = 0$ отображение является тождественным ($x' = f(x)$). Исключим из рассмотрения тождественную инволюцию. Тогда равенство $\delta = -\alpha$ есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы отображение, представленное формулой ($*$), было инволюционным.

Таким образом, инволюции суть те проективные отображения, которые представляются в форме

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha} \quad (\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma \neq 0). \tag{$***$}$$

Теперь мы докажем ряд простых теорем об инволюциях.

Теорема 39. *Пусть дано проективное отображение $M' = F(M)$ прямой a на самое себя. Если существует хотя бы одна точка M_0, образ которой $M_0' = F(M_0)$ с ней не совпадает, но которая при повторном отображении возвращается в исходное положение, то все точки возвращаются в исходное положение, и, таким образом, $M' = F(M)$ является инволюцией.*

Доказательство. Пусть $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ — аналитическое представление отображения $M' = F(M)$ в какой-либо системе проективных координат на прямой a, x_0 и x_0' — координаты точек M_0 и M_0'.

По условию

$$x_0' = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta} \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{\alpha x_0' + \beta}{\gamma x_0' + \delta} \quad (x_0 \neq x_0')$$

или

$$\gamma x_0 x_0' + \delta x_0' - \alpha x_0 - \beta = 0,$$
$$\gamma x_0 x_0' + \delta x_0 - \alpha x_0' - \beta = 0.$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, найдем:

$$\delta\,(x_0' - x_0) + \alpha\,(x_0' - x_0) = 0.$$

Так как $x_0' - x_0 \neq 0$, то отсюда следует, что $\delta = -\alpha$, и теорема доказана.

Теорема 40. *Если при инволюционном отображении проективной прямой на себя существуют неподвижные точки, то число их равно двум.*

Доказательство. Пусть $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ — аналитическое представление какой-нибудь инволюции. Очевидно, координаты неподвижных точек (для которых $x' = x$) определяются уравнением

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha},$$

или

$$\gamma x^2 - 2\alpha x - \beta = 0.$$

Если $\gamma \neq 0$, то это уравнение является квадратным и дискриминант его $\alpha^2 + \beta\gamma = -\Delta$ отличен от нуля. Таким образом, оно имеет либо два комплексных корня — в этом случае неподвижных точек инволюции нет, либо два различных вещественных корня — в этом случае существуют две неподвижные точки.

Если же $\gamma = 0$, то, полагая $-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = a$, мы представим соотношение между x и x' в виде $x' = -x + a$. В этом случае, очевидно, инволюция имеет две неподвижные точки: $x = \dfrac{a}{2}$ и $x = \infty$. Теорема доказана.

Инволюция, не оставляющая неподвижной ни одной точки прямой, называется *эллиптической*. Эллиптическая инволюция характеризуется условием $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma > 0$.

Инволюция, оставляющая неподвижными две точки, называется *гиперболической*. Для гиперболической инволюции $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma < 0$.

Иногда отображение $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ называют параболической инволюцией, если $\Delta = -\alpha^3 - \beta\gamma = 0$. Однако дробно-линейное отображение, определитель которого равен нулю, как мы знаем, не является взаимно однозначным и, следовательно, не входит в тот класс, который мы условились рассматривать*).

Теорема 41. *Если $M' = f(M)$ — гиперболическая инволюция с неподвижными точками A и B, то пара точек M, M' гармонически разделяет пару точек A, B.*

Доказательство. Выберем на прямой систему неоднородных проективных координат так, чтобы A в этой системе получила координату $x = 0$, а точка B (символическую) координату $x = \infty$. Пусть

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha} \qquad (*)$$

— аналитическое представление инволюции $M' = f(M)$ в выбранной координатной системе. Так как точка A — неподвижная, то при $x = 0$ необходимо $x' = 0$; отсюда $\beta = 0$. Так как точка B — неподвижная, то при $x \to \infty$ необходимо $x' \to \infty$; отсюда $\gamma = 0$. Таким образом, соотношение $(*)$ принимает вид

$$x' = -x.$$

Следовательно, $\dfrac{x + x'}{2} = 0$, т.е. точка A есть проективный центр отрезка xx', а это и означает, что пара M, M' гармонически разделяет пару A, B (см. n° 97, свойство 4 проективных координат, и n° 95, где дано определение проективного центра). Теорема доказана.

Эту теорему можно сформулировать еще следующим образом:

Гиперболическая инволюция $M' = f(M)$ с неподвижными точками A и B представляет собой гармоническое отображение друг на друга взаимно дополнительных отрезков с общими концами A, B (см. n° 93, в частности, замечание в конце параграфа).

Теорема 42. *Инволюция однозначно определяется заданием двух различных пар соответствующих точек.*

Для доказательства достаточно заметить, что инволюция $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ определяется численным заданием своих коэффициентов, среди которых имеются три независимых. Но так как пропорциональное изменение коэффициентов дробно-линейной функции не меняет

---

*) То, что отображение $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ при $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$ не является взаимно однозначным, помимо ранее высказанных общих соображений, может быть легко установлено еще таким путем: если $\Delta = 0$, то $\alpha : \gamma = \beta : \delta = q$; тогда $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \dfrac{q(\gamma x + \delta)}{\gamma x + \delta} = q$, следовательно, любой точке отвечает одна и та же точка с координатой $x' = q$.

ее, то, чтобы определить инволюцию, нужно определить лишь два отношения $\alpha : \beta : \gamma$, а для этого достаточно двух условий. Таковыми являются задания двух пар соответствующих точек. Если координаты заданных точек суть x_1, x_1' и x_2, x_2', то отношения параметров той инволюции, для которой эти точки являются соответствующими, могут быть найдены из уравнений

$$x_1' = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 - \alpha}, \quad x_2' = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 - \alpha},$$

или

$$\gamma x_1 x_1' - \alpha (x_1 + x_1') - \beta = 0.$$
$$\gamma x_2 x_2' - \alpha (x_2 + x_2') - \beta = 0.$$

Действительно, отсюда

$$\alpha : \beta : \gamma = \begin{vmatrix} x_1 x_1' & 1 \\ x_2 x_2' & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 + x_1' & x_1 x_1' \\ x_2 + x_2' & x_2 x_2' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 + x_1' & 1 \\ x_2 + x_2' & 1 \end{vmatrix}.$$

Отношения $\alpha : \beta : \gamma$ будут неопределенными лишь в том случае, когда все определители, записанные в правой части предыдущего равенства, обращаются в нуль. Но тогда $x_1 + x_1' = x_2 + x_2'$ и $x_1 x_1' = x_2 x_2'$, следовательно, либо $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2'$, либо $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$. Однако обе эти возможности исключены условием теоремы.

Таким образом, каковы бы ни были две различные пары точек M_1, M_1' и M_2, M_2', всегда существует, и притом единственная, инволюция, переводящая M_1 в M_1' и M_2 в M_2'. Теорема доказана.

Заметим, что по теореме 15 произвольное проективное отображение определяется заданием трех пар соответствующих точек; инволюция же, как мы видим, требует для своего определения задания двух пар. Очевидно, источником этого обстоятельства является то, что число параметров общего проективного отображения на единицу выше числа параметров инволюции.

В заключение сделаем еще следующее замечание.

Доказанные сейчас теоремы формулированы по отношению к инволюции на прямой. Если в формулировках этих теорем всюду заменить слова "точка прямой" словами "элемент одномерного многообразия", то получатся теоремы об инволюциях любых одномерных многообразий.

§ 10. Формулы преобразования проективных координат. Сложное отношение четырех элементов

114. Пусть на проективной прямой a введены две различные системы проективных однородных координат. Одну из них мы будем условно называть первой, другую — второй. Произвольная точка M прямой имеет координаты (x_1, x_2) в первой системе и (x_1', x_2') — во второй. Мы ставим себе задачу: вывести формулы, с помощью которых координаты (x_1', x_2') выражаются через координаты (x_1, x_2). Читателю важно уяснить себе, что эта задача по существу уже решена в предыдущем разделе.

В самом деле, в n° 111 установлена зависимость между координатами точек, соответствующих друг другу при проективном отображении прямой на прямую. Будем рассматривать тождественное отображение прямой a на себя, т. е. такое отображение, при котором каждая точка прямой a остается на месте. Тождественное отображение, очевидно, является проективным. Поэтому координаты (x_1, x_2) точки M в первой системе и координаты (x_1', x_2') ее образа, т. е. той же точки M во второй системе, должны быть связаны точно такими же уравнениями, какие мы получили в n° III, именно:

$$\begin{aligned}\rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2,\\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2\end{aligned} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix} \neq 0\right). \qquad (*)$$

Это и есть искомые формулы. Численные значения параметров c могут быть найдены в каждом конкретном случае преобразования координат по тем условиям, которыми это преобразование определяется.

Если мы поделим почленно первое из равенств $(*)$ на второе и изменим обозначения, полагая $c_{11} = \alpha, c_{12} = \beta$, $c_{21} = \gamma$, $c_{22} = \delta$, то получим формулу преобразования неоднородных проективных координат (на прямой):

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \qquad (**)$$

При помощи рассуждений, аналогичных тем, какие сейчас были проведены по отношению к прямой, можно установить, что известные нам формулы, выражающие зависимость между проективными координатами точек, соответствующих друг другу в проективном отображении плоскости на плоскость или пространства на пространство, одновременно являются формулами преобразования проективных координат на плоскости или в пространстве.

Естественно, что в том случае, когда эти формулы определяют преобразование (однородных) координат, входящие в них величины x_i и x_i' ($i = 1, 2, 3$ для плоскости и $i = 1, 2, 3, 4$ для пространства) представляют собой различные координаты о д н о й и т о й же точки.

115. Установив формулы преобразования проективных координат, мы решили тем самым задачу принципиальной важности. Только теперь мы имеем практическую возможность выяснить вопрос об инвариантности функций от координат точек или инвариантности соотношений между координатами точек, с которыми приходится иметь дело в проективной геометрии.

В частности, теперь мы можем дать определение весьма важному в проективной геометрии понятию *сложного отношения четырех* *элементов* одномерного многообразия. Определим сначала сложное отношение четырех точек прямой.

Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — четыре точки некоторой проективной прямой a. Введем на этой прямой какую-нибудь систему проективных координат (с вычислительной точки зрения сейчас удобнее пользоваться неоднородными координатами) и обозначим через t_1, t_2, t_3, t_4 координаты данных точек. Мы докажем, что *величина*

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}$$

не зависит от выбора координатной системы. Для доказательства рассмотрим наряду с первоначально введенной еще новую систему проективных координат. Если координату произвольной точки прямой a в старой системе мы обозначим через t, а координату этой же точки в новой системе — через t', то

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — постоянные, определяемые выбором координатных систем. В частности, для новых координат t'_1, t'_2, t'_3 точек M_1, M_2, M_3 имеют место равенства:

$$t'_1 = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}, \quad t'_2 = \frac{\alpha t_2 + \beta}{\gamma t_2 + \delta}, \quad t'_3 = \frac{\alpha t_3 + \beta}{\gamma t_3 + \delta}.$$

Отсюда

$$t'_3 - t'_1 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(t_3 - t_1)}{(\gamma t_1 + \delta)(\gamma t_3 + \delta)},$$
$$t'_2 - t'_3 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(t_2 - t_3)}{(\gamma t_2 + \delta)(\gamma t_3 + \delta)}$$

и

$$\frac{t'_3 - t'_1}{t'_2 - t'_3} = \frac{\gamma t_2 + \delta}{\gamma t_1 + \delta} \cdot \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}.$$

Аналогично

$$\frac{t'_4 - t'_1}{t'_2 - t'_3} = \frac{\gamma t_2 + \delta}{\gamma t_1 + \delta} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}.$$

Следовательно,

$$\frac{t'_3 - t'_1}{t'_2 - t'_3} : \frac{t'_4 - t'_1}{t'_2 - t'_4} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4},$$

что и требовалось доказать.

Величина

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4} \qquad (*)$$

называется сложным отношением четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4.

Из только что проведенного рассмотрения следует, что сложное отношение определяется исключительно расположением точек M_1, M_2, M_3, M_4, введение координатной системы требуется лишь для фактического разыскания его численного значения и играет, таким образом, чисто служебную роль.

Из формулы $(*)$ непосредственно усматриваются следующие свойства сложного отношения:

$$1) \quad (M_1M_2M_3M_4) = (M_3M_4M_1M_2),$$

т. е. в сложном отношении, не меняя его величины, можно переставлять первую и вторую пары точек.

$$2) \quad (M_1M_2M_4M_3) = \frac{1}{(M_1M_2M_3M_4)},$$

т. е. при перестановке точек внутри какой-нибудь пары величина сложного отношения меняется на обратную.

116. Докажем еще ряд важных теорем о сложном отношении четырех точек.

Теорема 43. *При любом проективном отображении прямой a на прямую a' сложное отношение произвольной группы точек M_1, M_2 M_3, M_4 прямой a равно сложному отношению соответствующих им точек M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 прямой a'.*

Для доказательства введем на прямых a и a' координатные системы; если t_i — координаты точек M_i и t'_i — координаты точек M'_i, то

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}$$

и

$$(M'_1M'_2M'_3M'_4) = \frac{t'_3 - t'_1}{t'_2 - t'_3} : \frac{t'_4 - t'_1}{t'_2 - t'_4}.$$

Согласно n° 112 между координатами t и t' проективно соответствующих точек прямых a и a' существует зависимость $t' = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$; но при помощи этой зависимости равенство $(M'_1M'_2M'_3M'_4) = (M_1M_2$ $M_3M_4)$ может быть установлено точно такими же вычислениями, какие были приведены в предыдущем параграфе.

Частным случаем предыдущей теоремы является следующая

Теорема 44. *Если a и a' — две прямые плоскости α и S — произвольная точка плоскости α, не принадлежащая ни одной из прямых a и a', то сложное отношение любой четверки точек M_1, M_2, M_3, M_4 прямой a равно сложному отношению их проекций M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 из центра S на прямую a'.*

То, что эта теорема является частным случаем предыдущей, следует из того, что центральное проектирование есть частный случай проективного отображения (см. n° 103). Теорему 44 можно формулировать еще так:

Четыре луча m_1, m_2, m_3, m_4 плоского пучка при пересечении с любой прямой, лежащей в плоскости пучка, определяют четыре точки, величина сложного отношения которых одинакова для всех прямых.

Эту величину называют *сложным отношением лучей* m_1, m_2, m_3, m_4; для обозначения ее употребляется символ $(m_1m_2m_3m_4)$.

Совершенно так же может быть определено сложное отношение четырех элементов пучка плоскостей, именно: если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — четыре плоскости, проходящие через одну прямую, то в пересечении с любой прямой пространства они определяют четыре точки, величина сложного отношения которых одинакова для всех прямых. Эту величину называют *сложным отношением четырех плоскостей* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и обозначают символом $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$.

Нижеприводимая теорема играет для проективных отображений пучков (лучей или плоскостей) такую же роль, как теорема 43 для проективных отображений прямых.

Теорема 45. *При любом проективном отображении пучка на пучок сложное отношение произвольной группы четырех элементов одного пучка равно сложному отношению соответствующих им элементов другого.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент одного пучка и $x' = f(x)$ — соответствующий ему по отображению элемент второго пучка. Пересечем элементы первого пучка какой-нибудь прямой a, элементы второго — прямой a' и обозначим через M точку пересечения прямой a с элементом x, через M' — точку пересечения прямой a' с элементом x'. Будем рассматривать отображение прямой a на прямую a', при котором точке M соответствует точка $M' = F(M)$. Отображение $M' = F(M)$, как и данное $x' = f(x)$, будет проективным. Поэтому, если M_1, M_2, M_3, M_4 — точки пересечения прямой a с произвольно выбранными элементами x_1, x_2, x_3, x_4 первого пучка, M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 — точки пересечения прямой a' с соответствующими элементами x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 второго пучка, то

$$(M'_1M'_2M'_3M'_4) = (M_1M_2M_3M_4)$$

(см. теорему 43); далее, по определению сложного отношения четырех элементов пучка имеем

$$(x_1x_2x_3x_4) = (M_1M_2M_3M_4)\,,$$
$$(x'_1x'_2x'_3x'_4) = (M'_1M'_2M'_3M'_4)\,.$$

Следовательно,

$$(x'_1x'_2x'_3x'_4) = (x_1x_2x_3x_4),$$

что и нужно было доказать.

Легко устанавливается также следующая теорема, которая охватывает теоремы 43 и 45.

Теорема 46. *При любом проективном отображении одного одномерного многообразия на другое сложное отношение произвольной группы четырех элементов первого многообразия равно сложному отношению соответствующих им элементов другого.*

В этой формулировке предусмотрены случаи отображения прямой на пучок лучей, прямой на пучок плоскостей и пучка лучей на пучок плоскостей.

Из теорем 46 и 24 следует

Теорема 47. *Если плоскость α проективно отображена на плоскость α', то сложное отношение любой группы четырех элементов, принадлежащих одному одномерному многообразию плоскости α, равно сложному отношению четырех соответствующих элементов плоскости α'.*

Из теорем 46 и 28 следует такая же теорема, относящаяся к проективным отображениям пространства на пространство.

Коротко полученные результаты можно выразить еще так:

Сложное отношение есть инвариант проективных отображений.

117. Пусть на какой-нибудь прямой a даны четыре точки A, B, C, D и на той же самой или на другой прямой a' даны четыре точки A', B', C', D'. Поставим вопрос: при каком условии существует проективное отображение прямой a на прямую a', переводящее точки A, B, C, D в точки A', B', C', D'?

Из теоремы 43 следует, что необходимым условием для этого является равенство сложных отношений группы точек A, B, C, D и группы точек A', B', C', D'. Нетрудно сообразить, что указанное условие является также и достаточным.

В самом деле, допустим, что $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Обозначим через $M' = (M)$ проективное отображение прямой a на прямую a', переводящее точки A, B, C в точки A', B', C'. Существование его обеспечивается теоремой 37а. Пусть $f(D) = D^*$. По теореме 43 $(ABCD) = (A'B'C'D^*)$. Следовательно, $(A'B'C'D^*) = (A'B'C'D')$. Отсюда и из определения сложного отношения тотчас следует, что точка D^* совпадает с точкой D'. Таким образом, действительно, при условии $(ABCD) = (A'B'C'D')$ существует проективное отображение прямой a на прямую a', именно — отображение $M' = f(M)$, переводящее точки A, B, C, D в точки A', B', C', D'.

По ранее данному определению система точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ прямой a считается проективно эквивалентной системе точек $M'_1, M'_2, \ldots$, M'_n прямой a', если существует проективное отображение прямой a на прямую a', переводящее точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно в точки $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$.

При помощи рассуждений, аналогичных предыдущим, легко установить предложение:

Для того чтобы система точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ прямой a была проективно эквивалентна системе точек $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ прямой a', необходимо и достаточно, чтобы сложное отношение любой группы четырех точек M_p, M_q, M_r, M_s первой системы было равно сложному отношению соответствующей четверки точек M'_p, M'_q, M'_r, M'_s второй системы.

Сложное отношение, позволяющее охарактеризовать проективную эквивалентность, является *основным инвариантом* проективной геометрии, подобно тому как расстояние между точками, характеризующее конгруэнтность, есть основной инвариант геометрии элементарной.

118. Если на произвольной прямой пара точек A, B гармонически разделяет пару точек C, D, то $(ABCD) = -1$.

Докажем это. Сначала заметим, что сложное отношение четырех различных точек никогда не может быть равным $+1$. В самом деле, если

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} = 1,$$

то $\dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \dfrac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}$ и при $x_1 \neq x_2$ необходимо $x_3 = x_4$ вопреки условию.

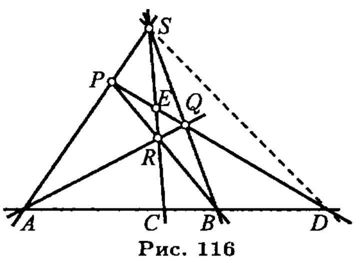


Рис. 116

Далее, по определению гармонической группы точек, если пара A, B гармонически разделяет пару C, D, то существует полный четырехвершинник $PQRS$, расположенный относительно точек A, B, C, D так, как показано на рис. 116. Спроектируем точки A, B, C, D из центра S на прямую PQ. В силу инвариантности сложного отношения при проектировании (см. теорему 44), мы получим $(ABCD) = (PQED)$. Спроектируем снова точки A, B, C, D на прямую PQ, но на этот раз из центра R. Тогда $(ABCD) = (QPED)$. Но согласно n° 115

$$(QPED) = \frac{1}{(PQED)}.$$

Таким образом, $(ABCD) = (PQED)$ и $(ABCD) = \dfrac{1}{(PQED)}$, откуда

$$(ABCD)^2 = 1$$

и $(ABCD) = \pm 1$. Так как, по доказанному выше, сложное отношение различных точек не может быть равным $+1$, то

$$(ABCD) = -1,$$

и требуемое доказано.

Отсюда и из определения сложного отношения четырех элементов пучка тотчас вытекает следующая общая теорема.

Теорема 48. *Если пара элементов x, y одномерного многообразия гармонически разделяет пару его элементов z, t, то $(xyzt) = -1$.*

119. Теперь мы выведем некоторые новые формулы, выражающие сложное отношение в проективных координатах.

Пусть на плоскости дана система проективных неоднородных координат с началом в точке O и с бесконечно удаленными точками осей ∞_x и ∞_y, (см. $n°$ 98). Рассмотрим какие-нибудь четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 плоскости, расположенные на одной прямой, и поставим себе задачу: выразить сложное отношение (M_1, M_2, M_3, M_4) через координаты (x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3), (x^4, y^4) рассматриваемых точек.

С этой целью спроектируем точки M_1, M_2, M_3, M_4 из точки ∞_y на ось x; пусть M_1', M_2', M_3', M_4' — получающиеся проекции. Они имеют координаты $(x^1, 0), (x^2, 0), (x^3, 0), (x^4, 0)$, и сложное отношение их может быть записано в виде

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = \frac{x^3 - x^1}{x^2 - x^3} : \frac{x^4 - x^1}{x^2 - x^4}.$$

Если мы обозначим через $M_1'', M_2'', M_3'', M_4''$ проекции точек M_1, M_2, M_3 M_4 из ∞_x на ось y, то, аналогично предыдущему,

$$(M_1''M_2''M_3''M_4'') = \frac{y^3 - y^1}{y^2 - y^3} : \frac{y^4 - y^1}{y^2 - y^4}.$$

По теореме 44,

$$(M_1M_2M_3M_4) = (M_1'M_2'M_3'M_4'),$$

$$(M_1M_2M_3M_4) = (M_1''M_2''M_3''M_4'');$$

следовательно, для выражения величины $(M_1M_2M_3M_4)$ пригодна любая из следующих формул:

$$\begin{aligned} (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{x^3 - x^1}{x^2 - x^3} : \frac{x^4 - x^1}{x^2 - x^4}; \\ (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{y^3 - y^1}{y^2 - y^3} : \frac{y^4 - y^1}{y^2 - y^4}. \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

Чтобы выразить сложное отношение $(M_1M_2M_3M_4)$ в однородных координатах, нужно в полученных формулах заменить неоднородные координаты x^i, y^i каждой точки M_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ отношениями однородных координат $\frac{x_1^i}{x_3^i}, \frac{x_2^i}{x_3^i}$ этой точки; поступая таким образом, мы найдем формулы

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^1 \\ x_3^3 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^1 \\ x_3^4 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^4 \\ x_3^2 & x_3^4 \end{vmatrix}},$$

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_2^3 & x_2^1 \\ x_3^3 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_2^4 & x_2^1 \\ x_3^4 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^2 & x_2^4 \\ x_3^2 & x_3^4 \end{vmatrix}} \tag{Б}$$

(в этих формулах номер точки указывается верхним индексом, а нижний индекс определяет номер координаты).

В пространстве сложное отношение четырех точек прямой выражается в проективных координатах точно такими же формулами, только число их на одну больше.

Отметим один специальный способ записи сложного отношения, вытекающий из формул (Б).

Пусть P и Q — две различные точки плоскости, однородные координаты которых обозначены через p_i и q_i $(i = 1, 2, 3)$. Легко показать, что всякая точка T с однородными координатами

$$t_i = p_i + tq_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

лежит на прямой PQ. В самом деле, если

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \sum u_ix_i = 0$$

— уравнение прямой PQ, то $\sum u_ip_i = 0$ и $\sum u_iq_i = 0$; но в этом случае и

$$\sum u_it_i = \sum u_i(p_i + tq_i) = \sum u_ip_i + t\sum u_iq_i = 0,$$

т. е. координаты точки T удовлетворяют уравнению прямой PQ.

Придадим параметру t два произвольных значения $t = \lambda$ и $t = \mu$ и выразим по формулам (Б) сложные отношения четырех точек

P, Q, L, M с однородными координатами p_i, q_i, $p_i + \lambda q_i$, $p_i + \mu q_i$; применяя, например, первую из формул (Б), мы получим:

$$(PQLM) = \frac{\begin{vmatrix} p_1 + \lambda q_1 & p_1 \\ p_3 + \lambda q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 + \lambda q_1 \\ q_3 & p_3 + \lambda q_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} p_1 + \mu q_1 & p_1 \\ p_3 + \mu q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 + \mu q_1 \\ q_3 & p_3 + \mu q_3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \lambda \frac{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}} : \mu \frac{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Здесь следует оговориться, что результат этих вычислений будет определенным лишь при условии $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Если же $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$, то придется использовать вторую из формул (Б). Результат вычислений будет определенным и совпадет с предыдущим, если $\begin{vmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Оба определителя $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}$ не могут быть равными нулю одновременно, так как в этом случае $p_1 : p_2 : p_3 = q_1 : q_2 : q_3$, что невозможно, поскольку точки PQ, по условию, различны. Итак,

$$(PQLM) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{В}$$

Такой способ записи сложного отношения очень прост и удобен для использования; очевидно, он применим также и в том случае, когда координаты точек P, Q, L, M даны в пространственной системе.

В заключение мы выведем формулу, выражающую сложное отношение четырех лучей пучка.

Пусть дан пучок с центром $S(x_0, y_0)$; уравнению любого его луча в неоднородной системе координат можно придать вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{$*$}$$

Обозначим через m_1, m_2, m_3, m_4 четыре луча данного пучка, через k_1, k_2, k_3, k_4 — соответствующие им значения параметра k в уравнении ($*$) и через $M_1(x_1, 0)$, $M_2(x_2, 0)$, $M_3(x_3, 0)$, $M_4(x_4, 0)$ — точки пересечения лучей m_1, m_2, m_3, m_4 с осью x. По определению сложного отношения четырех точек

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4};$$

по определению сложного отношения четырех лучей пучка $(m_1m_2m_3 m_4) = (M_1M_2M_3M_4)$.

Следовательно,

$$(m_1m_2m_3m_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}.$$

Из уравнения (*) при $y = 0$ находим:

$$x_i = x_0 - \frac{y_0}{k_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Заменяя в предыдущем выражении для $(m_1m_2m_3m_4)$ величины x_1, x_2, x_3, x_4 правыми частями этих равенств, получим после очевидных преобразований следующую формулу:

$$(m_1m_2m_3m_4) = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} : \frac{k_4 - k_1}{k_2 - k_4}. \tag{Г}$$

Она выражает сложное отношение четырех лучей через определяющие их параметры.

Из формулы (Г) легко получить аналитическое представление проективного отображения пучка на пучок, т. е. найти вид функции $k' = f(k)$, где k и k' — параметры, определяющие проективно соответствующие друг другу лучи двух пучков.

В самом деле, если k_1, k_2, k_3 — параметры каких-либо трех лучей первого пучка, k'_1, k'_2, k'_3 — параметры соответствующих лучей второго, то

$$\frac{k'_3 - k'_1}{k'_2 - k'_3} : \frac{k' - k'_1}{k'_2 - k'} = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} : \frac{k - k_1}{k_2 - k},$$

так как по теореме 45 сложное отношение есть инвариант проективного отображения пучков; выражая из этого уравнения k', найдем:

$$k' = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta}, \tag{Д}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — постоянные (зависящие от $k_1, k_2, k_3, k'_1, k'_2, k'_3$). Таким образом, проективное отображение пучка на пучок аналитически представляется дробно-линейной функцией. Определитель ее $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ отличен от нуля, так как в противном случае отображение, определяемое формулой (Д), не будет взаимно однозначным.

§ 11. Принцип двойственности

120. Принцип двойственности на проективной плоскости. В этом разделе мы сформулируем и докажем одно из замечательных положений проективной геометрии, известное под названием *принципа двойственности*. Вначале мы ограничимся двумерным случаем и изложим сущность принципа двойственности в проективной геометрии на плоскости.

В двумерной проективной геометрии рассматриваются объекты двух видов: точки и прямые. Свойства их взаимных отношений определены проективными аксиомами групп I, II, III, из которых только аксиомы I.1–I.3, 1.9, II.1–II.6 и III являются аксиомами двумерной геометрии, остальные (т. е. аксиомы I.4–I.8) имеют пространственный характер. Но, как показывает предыдущее изложение, чтобы иметь возможность получать теоремы двумерной проективной геометрии, не пользуясь построениями в трехмерном пространстве, приходится к аксиомам I.1–I.3, 1.9, II.1–II.6 и III присоединить еще предложение Дезарга. Перечисленные аксиомы вместе с предложением Дезарга мы будем называть *двумерными проективными аксиомами*. Анализ основ проективной геометрии обнаруживает, что с каждой двумерной проективной аксиомой может быть сопоставлено некоторое предложение таким образом, что эти два сопоставленных друг с другом предложения, если их надлежащим образом сформулировать, переходят одно в другое при замене слова "точка" словом "прямая" и слова "прямая" — словом "точка". Это обстоятельство, в котором по существу и содержится принцип двойственности на плоскости (точно мы выразим его дальше), станет ясным читателю после того, как мы фактически осуществим указанное сопоставление.

Начнем с аксиом первой группы. Ими определяются отношения взаимной принадлежности точек и прямых, выражаемые обычно словами: "точка лежит на прямой" или "прямая проходит через точку". Сейчас нам будет более удобно вместо этих оборотов речи употреблять иные, именно, говорить: "точка принадлежит прямой" или "прямая принадлежит точке". Соблюдая это условие, мы соответственно изменим словесное выражение аксиом I.1–I.3, I.9 и запишем их на левой стороне страницы; справа, рядом с каждой аксиомой приведем предложение, сопоставленное с ней в том смысле, как это было пояснено выше.

Впредь такие два предложения мы будем называть *двойственными* друг другу.

I.1. Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, принадлежащая точке A и точке B.	Каковы бы ни были две прямые a и b, существует точка A, принадлежащая прямой a и прямой b. (Это есть не что иное, как аксиома 1.9.)
I.2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, принадлежащей и точке A, и точке B.	Каковы бы ни были две различные прямые a и b, существует не более одной точки, принадлежащей и прямой a, и прямой b. (Это предложение непосредственно следует из аксиомы I.2.)

I.3. Каждой прямой принадлежит не менее трех точек. Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

Каждой точке принадлежит не менее трех прямых.

Существуют по крайней мере три прямые, не принадлежащие одной точке.

(Доказательство этого утверждения легко проводится при помощи аксиом I.1–I.3).

I.9. Каждые две прямые имеют общую точку.

Каждые две точки имеют общую прямую.

(Это есть не что иное, как аксиома I.1).

Предложение Дезарга. Пусть три точки A, B, C не принадлежат одной прямой, а также три точки A', B', C' не принадлежат одной прямой; пусть, далее, прямая, принадлежащая точкам A, B, с прямой, принадлежащей точкам A', B', имеет общую точку P; прямая, принадлежащая точкам B, C, с прямой, принадлежащей точкам B', C', имеет общую точку Q и прямая, принадлежащая точкам A, C, с прямой, принадлежащей точкам A', C', имеет общую точку R. Тогда если точки P, Q, R принадлежат одной прямой t, то три прямые, из которых одна принадлежит точкам A, A', другая — точкам B, B' и третья — точкам CC' имеют общую точку S (рис. 117).

Пусть три прямые a, b, c не принадлежат одной точке, а также три прямые a', b', c' не принадлежат одной точке; пусть, далее, точка, принадлежащая прямым a, b, с точкой, принадлежащей прямым a', b', имеет общую прямую p; точка, принадлежащая прямым b, c, с точкой, принадлежащей прямым b', c', имеет общую прямую q и точка, принадлежащая прямым a, c, с точкой, принадлежащей прямым a', c', имеет общую прямую r. Тогда если прямые p, q, r принадлежат одной точке T, то три точки, из которых одна принадлежит прямым a, a', другая — прямым b, b' и третья — прямым c, c', имеют общую прямую s (рис. 118).

(Это предложение представляет собой не что иное, как теорему 2, обратную теореме Дезарга.)

Таким образом, действительно, с каждой двумерной проективной аксиомой первой группы возможно сопоставить некоторое правильное (т. е. вытекающее из этих же аксиом) утверждение, так что сопоставляемые предложения оказываются двойственными друг другу.

Перейдем к рассмотрению аксиом второй группы II.1–II.6.

Основным понятием, с которым оперируют аксиомы II.1–II.6, является понятие о разделенных парах точек на прямой; с помощью

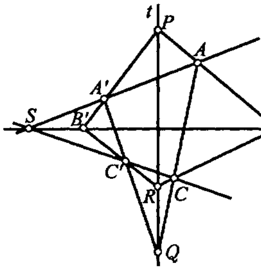


Рис. 117

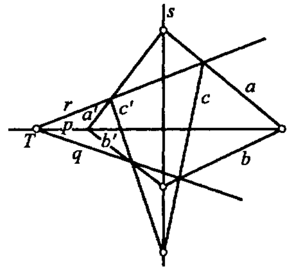


Рис. 118

этого понятия дается определение разделенных пар прямых, проходящих через одну точку (см. n° 89). Ниже выписаны аксиомы второй группы рядом с двойственными им предложениями; справедливость последних непосредственно следует из аксиом I, II и из определения разделенных пар прямых.

II.1. Каковы бы ни были три различные точки A, B, C, принадлежащие одной прямой u, существует такая точка D, принадлежащая прямой u, что пара точек A, B разделяет пару точек C, D.

Если пара A, B разделяет пару C, D, то все четыре точки A, B, C, D различны.

Каковы бы ни были три различные прямые a, b, c, принадлежащие одной точке U, существует такая прямая d, принадлежащая точке U, что пара прямых a, b разделяет пару прямых c, d.

Если пара a, b разделяет пару c, a, то все четыре прямые a, b, c, d различны.

II.2. Если пара точек A, B разделяет пару точек C, D, то пара B, A разделяет пару C, D и пара C, D разделяет пару A, B.

Если пара прямых a, b разделяет пару прямых c, d, то пара b, a разделяет пару c, d и пара c, d разделяет пару a, b.

II.3. Каковы бы ни были четыре различные точки A, B, C, D, принадлежащие прямой u, из них могут быть всегда и единственным образом составлены две разделенные пары.

Каковы бы ни были четыре различные прямые a, b, c, d, принадлежащие точке U, из них могут быть всегда и единственным образом составлены две разделенные пары.

II.4. Пусть A, B, C, D, E — точки, принадлежащие прямой u; если пары C, D и C, E разделяют пару A, B, то пара D, E не разделяет пару A, B.

Пусть a, b, c, d, e — прямые, принадлежащие точке U; если пары c, d и c, e разделяют пару a, b, то пара d, e не разделяет пару a, b.

II.5. Пусть A, B, C, D, E — точки, принадлежащие прямой u; если пары C, D и C, E не разделяют пару A, B, то пара D, E также не разделяет пару A, B.

Пусть a, b, c, d, e — прямые, принадлежащие точке U; если пары c, d и c, e не разделяют пару a, b, то пара d, e также не разделяет пару a, b.

II.6. Пусть a, b и c, d — две пары прямых, которые принадлежат одной точке S, u и u' — две прямые, не принадлежащие точке S; пусть, далее, A, B, C, D — точки, принадлежащие прямой u и, соответственно, прямым a, b, c, d, и A', B', C', D' — точки, принадлежащие прямой u' и, соответственно, прямым a, b, c, d. Тогда если пара A, B разделяет пару C, D, то пара A', B' разделяет пару C', D'.

Пусть A, B и C, D — две пары точек, которые принадлежат одной прямой s, U и U' —две точки, не принадлежащие прямой s; пусть, далее, a, b, c, d — прямые, принадлежащие точке U и, соответственно, точкам A, B, C, D, и a', b', c', d' — прямые, принадлежащие точке U' и, соответственно, точкам A, B, C, D. Тогда если пара a, b разделяет пару c, d, то пара a', b' разделяет пару c', d'.

Таким образом, и с аксиомами второй группы могут быть сопоставлены двойственные предложения.

Обратимся, наконец, к аксиоме непрерывности III.

Чтобы иметь возможность формулировать аксиому III (Дедекинда), нам пришлось в свое время предварительно определить линейный порядок точек на разрезанной проективной прямой. Напомним читателю это определение.

Пусть a — произвольная прямая. Выберем на ней какую-либо точку U, а для остальных точек прямой a установим отношение, выраженное словом "между", полагая, что из трех точек A, B, C точка C лежит между A и B, если пара A, B разделена парой C, U. Мы говорим, что в множестве точек прямой a, которое получается исключением точки U, установлен линейный порядок, если это множество упорядочено с соблюдением следующего условия: каждый раз, когда точка C лежит между точками A и B в смысле установленного порядка, точка C лежит между A и B также и в смысле принятого только что определения.

Имея в виду сформулировать предложение, двойственное аксиоме III, мы определим сейчас линейный порядок в множестве всех прямых, за исключением одной, проходящих через одну точку.

Пусть A — произвольная точка. Выберем среди прямых, проходящих через точку A, какую-либо прямую u, а для остальных установим отношение, выражаемое словом "между", полагая, что из трех прямых a, b, c прямая c проходит между a и b, если пара a, b разделена парой c, u. Мы будем говорить, что в множестве всех прямых, проходящих через A, с исключением прямой u, установлен линейный порядок, если это множество упорядочено с соблюдением следующего условия: каждый раз, когда прямая c расположена между прямыми a и b в смысле установленного порядка, прямая c расположена между a и b также и в смысле принятого только что определения.

Теперь мы можем аксиому III и двойственное ей утверждение высказать следующим образом:

Аксиома III. Пусть a — произвольная прямая, U — какая угодно точка, принадлежащая прямой a, и пусть в множестве остальных точек, принадлежащих этой прямой, введен линейный порядок. Если это множество разбито на два класса так, что:

1) каждая точка попадает в один и только в один класс;

2) каждый класс содержит точки;

3) каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго,—

то либо в первом классе существует точка, следующая (в смысле установленного порядка) за всеми точками этого класса, либо во втором классе существует точка, предшествующая всем остальным его точкам.

Пусть A — произвольная точка, u — какая угодно прямая, принадлежащая точке A, и пусть в множестве остальных прямых, принадлежащих этой точке, введен линейный порядок. Если это множество разбито на два класса так, что:

1) каждая прямая попадает в один и только в один класс,

2) каждый класс содержит прямые,

3) каждая прямая первого класса предшествует каждой прямой второго,—

то либо в первом классе существует прямая, следующая (в смысле установленного порядка) за всеми прямыми этого класса, либо во втором классе существует прямая, предшествующая всем остальным его прямым.

В справедливости предложения, двойственного аксиоме III, легко убедиться при помощи операции сечения. В самом деле, пусть S — произвольная точка и u — какая-нибудь прямая, не проходящая через точку S. Сопоставим с каждой прямой, проходящей через S, принадлежащую ей точку прямой u. Если в множестве всех прямых, кроме одной, проходящих через S, а также в множестве соответствующих этим прямым точек введен линейный порядок, то соответствующие элементы указанных множеств будут находиться либо всегда в одинаковых, либо всегда в противоположных отношениях порядка. Поэтому принцип Дедекинда имеет место в множестве прямых, проходящих через S, коль скоро он имеет место в множестве точек прямой u, т. е. предложение, двойственное аксиоме III, справедливо вследствие этой же аксиомы.

Итак, действительно, каждая аксиома двумерной проективной геометрии имеет двойственное себе предложение. На основании проведенного анализа мы можем высказать следующий принцип:

Принцип двойственности на плоскости. *Пусть имеются два множества объектов, называемых, соответственно, точками и прямыми, между которыми установлены отношения принадлежности и порядка с соблюдением требований всех аксиом двумерной проективной геометрии. Если переменить роли этих объектов, т. е. объекты первого множества назвать прямыми, объекты второго — точками, а взаимные отношения между ними оставить без изменения, то при этом требования проективных аксиом снова будут удовлетворены.*

121. Очевидно, мы можем развивать проективную геометрию, исходя по желанию либо из первоначально принятых аксиом, либо из двойственных им предложений. С логической точки зрения мы будем в обоих случаях заниматься одной и той же задачей.

Если фактически осуществить такое двойственное построение проективной геометрии, то вместе с каждой проективной теоремой будет получена двойственная ей; тогда все теоремы распределяются в пары таким образом, что, при надлежащей формулировке, одно предложение пары будет переходить в другое путем замены слова "точка" словом "прямая" и обратно. Нетрудно указать такую абстрактно логическую форму записи теорем проективной геометрии, при которой взаимно двойственные предложения соединяются в одно. Для этого нужно совсем отказаться от употребления слов "точка" и "прямая", заменив их словами "объект 1-го рода" и "объект 2-го рода". Каждую абстрактно сформулированную теорему можно будет тогда толковать двойственно, подразумевая один раз под объектами 1-го рода точки, а под объектами 2-го рода — прямые, а другой раз придавая объектам 1-го и 2-го рода противоположный смысл. Получаемые при этих двух толкованиях взаимно двойственные теоремы, будучи отнесены к одной определенной реализации проективной геометрии, выражают, вообще говоря, разные факты. Например, утверждение: "два объекта 1-го рода всегда определяют один и только один общий им объект 2-го рода" приводит к двум взаимно двойственным предложениям: 1) через две различные точки проходит всегда одна и только одна прямая, 2) две различные прямые всегда пересекаются в одной точке.

Если в этих двух предложениях слова "точка" и "прямая" понимать одинаковым образом, то, очевидно, эти предложения будут иметь различный конкретный смысл.

В проективной геометрии имеются теоремы, и среди них важные, которые открывались в разные годы и даже в разные эпохи, но которые, будучи двойственными друг другу, совпадают при абстрактно логическом построении проективной геометрии. Примером могут служить знаменитые теоремы Паскаля и Брианшона (см. n° 143), открытые с интервалом более 100 лет и оказавшиеся логически эквивалентными.

С современной точки зрения принцип двойственности не представляется как особенно поражающее явление. Он легко усматривается при абстрактно логическом взгляде на геометрию. Но в начале XIX века открытие принципа двойственности было в высокой степени оригинальным и прогрессивным; в частности, принцип двойственности сыграл большую роль в развитии абстрактного понимания геометрических объектов.

В нашем предыдущем изложении двойственный характер проективной геометрии постоянно проявлялся в том, что предложения о системе точек прямой сопоставлялись с аналогичными предложениями об элементах пучка. Заметим, что в элементарной геометрии нет двойственности. Так, в отношениях взаимной принадлежности евклидовы точки и прямые не двойственны друг другу; в самом деле, в то время, как на плоскости Евклида две точки всегда имеют общую прямую, две прямые не всегда имеют общую точку (могут быть параллельными). Отсутствует двойственность и в отношениях порядка; именно, все точки евклидовой прямой расположены в линейном порядке, а порядок лучей в пучке — циклический. Легко усматриваются также существенные различия в отношениях конгруэнтности отрезков и углов (которых совсем нет в проективной геометрии); например, на евклидовой плоскости треугольники с соответственно конгруэнтными сторонами равны, а треугольники с соответственно конгруэнтными углами, вообще говоря, не равны.

122. Естественно, что присущая двумерной проективной геометрии двойственность имеет определенное аналитическое выражение.

Чтобы получить наряду с двойственным сопоставлением фактов проективной геометрии надлежащее сопоставление соответствующих им аналитических соотношений, мы введем в употребление *координаты прямых.* Ниже дается их определение.

Пусть на плоскости введена система проективных однородных координат. Тогда каждая точка плоскости определяется отношением трех чисел x_1, x_2, x_3, а каждая прямая — уравнением вида

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \qquad (*)$$

Условимся коэффициенты u_1, u_2, u_3 уравнения $(*)$ называть координатами той прямой, которая этим уравнением определяется. Очевидно, координаты u_1, u_2, u_3 являются однородными, так как три числа u_1, u_2, u_3 и три числа $\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3$ определяют одну и ту же прямую. Иначе говоря, для определения прямой достаточно задать отношения $u_1 : u_2 : u_3$. Очевидно также, что любые три числа u_1, u_2, u_3 представляют собой координаты некоторой прямой, за исключением того случая, когда все эти три числа равны нулю.

Из предыдущего следует, что если (x_1, x_2, x_3) — координаты некоторой точки P, а (u_1, u_2, u_3) — координаты некоторой прямой p, то соотношение

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

является условием принадлежности точки P и прямой p друг другу. Отсюда мы имеем два следующих двойственных друг другу предложения:

При постоянных (u_1, u_2, u_3) и текущих (x_1, x_1, x_3) соотношение	При постоянных (x_1, x_2, x_3) и текущих (u_1, u_2, u_3) соотношение
(*) $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$	(*) $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$
определяет всевозможные точки, принадлежащие прямой (u_1, u_2, u_3); в этом смысле оно называется уравнением прямой (u_1, u_2, u_3).	определяет всевозможные прямые, принадлежащие точке (x_1, x_2, x_3), в этом смысле оно называется уравнением точки (x_1, x_2, x_3)*).

Далее заметим, что если (p_1, p_2, p_3) и (q_1, q_2, q_3) — координаты двух точек P и Q, то при любом λ числа $p_1 + \lambda q_1$, $p_2 + \lambda q_2$, $p_3 + \lambda q_3$ суть координаты некоторой точки L прямой PQ. В самом деле, пусть $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ — уравнение прямой PQ; координаты точек P и Q должны этому уравнению удовлетворять, следовательно, $u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0$ и $u_1q_1 + u_2q_2 + u_3q_3 = 0$. Но тогда

$$u_1(p_1 + \lambda q_1) + u_2(p_2 + \lambda q_2) + u_3(p_3 + \lambda q_3) = 0,$$

т. е. координаты точки L удовлетворяют уравнению прямой PQ и, значит, L действительно лежит на прямой PQ.

Аналогично, если (v_1, v_2, v_3) и (w_1, w_2, w_3) — координаты двух прямых v и w, то при любом λ числа $v_1 + \lambda w_1$, $v_2 + \lambda w_2$, $v_3 + \lambda w_3$ суть координаты некоторой прямой l, проходящей через точку пересечения прямых v и w.

В самом деле, пусть O — точка пересечения прямых v, w и $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$ — ее уравнение, координаты прямых v и w должны этому уравнению удовлетворять, следовательно, $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ и $x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = 0$. Но тогда

$$x_1(v_1 + \lambda w_1) + x_2(v_2 + \lambda w_2) + x_3(v_3 + \lambda w_3) = 0,$$

т. е. координаты прямой l удовлетворяют уравнению точки O и, значит, l действительно проходит через точку O.

---

*) Впрочем, при постоянных x_1, x_2, x_3 и переменных u_1, u_2, u_3 соотношение (*) более принято называть уравнением *пучка* с центром (x_1, x_2, x_3).

В n° 119 мы показали, что сложное отношение точек P, Q, L, M с координатами $p_i, q_i, p_i+\lambda q_i, p_i+\mu q_i$ $(i=1,2,3)$ выражается формулой

$$(PQLM) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{1}$$

В силу принципа двойственности сложное отношение прямых v, w, l, m с координатами v_i, w_i, $v_i+\lambda w_i$, $v_i+\mu w_i$ $(i=1,2,3)$ может быть выражено вполне аналогичной формулой

$$(vwlm) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) и из теоремы 48 вытекают следующие двойственные друг другу предложения:

Если точки P, Q, L, M имеют соответственно координаты $p_i, q_i, p_i+\lambda q_i$, $p_i+\mu q_i$ $(i=1,2,3)$, то необходимым и достаточным условием гармонической разделенности пар P, Q и L, M является равенство

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1.$$

Если прямые v, w, l, m имеют соответственно координаты v_i, w_i, $v_i+\lambda w_i$, $v_i+\mu w_i$ $(i=1,2,3)$, то необходимым и достаточным условием гармонической разделенности пар v, w и l, m является равенство

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1.$$

Нетрудно понять, что, подобно приведенным примерам, во всех иных случаях аналитические соотношения, отвечающие взаимно двойственным фактам проективной геометрии, переходят друг в друга при замене координат точек координатами прямых и обратно.

123. Принцип двойственности в проективном пространстве. В проективной геометрии пространства мы имеем дело с объектами трех видов, каковыми являются точки, прямые и плоскости, и с двумя формами их взаимных отношений: принадлежностью и порядком.

Условимся вместо принятых в наглядной геометрии выражений “точка лежит на плоскости” или “плоскость проходит через точку” употреблять выражение “точка принадлежит плоскости” или “плоскость принадлежит точке”; вместо выражений “точка лежит на прямой” или “прямая проходит через точку” употреблять выражение “точка принадлежит прямой” или “прямая принадлежит точке”; вместо выражений “прямая лежит на плоскости” или “плоскость проходит через прямую” употреблять выражение “прямая принадлежит плоскости” или “плоскость принадлежит прямой”.

Тогда если мы сформулируем соответствующим образом аксиомы I.1–I.9, которыми устанавливаются свойства отношений взаимной принадлежности объектов, то с каждой из этих аксиом можно будет сопоставить некоторое верное (вытекающее из аксиом I.1–I.9) предложение так, что два сопоставленных друг другу предложения переходят одно в другое путем замены слова "точка" словом "плоскость" и слова "плоскость" — словом "точка" (слово же "прямая" должно оставаться без изменения). Предложения, находящиеся в указанном сопоставлении, мы будем называть двойственными друг другу.

Ниже приводится попарная запись аксиом I.1–I.9 и двойственных им предложений, доказательство которых предоставляется читателю.

I.1. Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, принадлежащая точке A и точке B.	Каковы бы ни были две плоскости α и β, существует прямая a, принадлежащая плоскости α и плоскости β
I.2. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, принадлежащей точкам A и B.	Каковы бы ни были две различные плоскости α и β, существует не более одной прямой, принадлежащей плоскостям α и β.
I.3. Каждой прямой принадлежит не менее трех точек. Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.	Каждой прямой принадлежит не менее трех плоскостей. Существуют по крайней мере три плоскости, не принадлежащие одной прямой.
I.4. Каковы бы ни были три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой, существует некоторая плоскость α, принадлежащая точкам A, B, C. Каждой плоскости принадлежит не менее одной точки.	Каковы бы ни были три плоскости α, β, γ, не принадлежащие одной прямой, существует некоторая точка A, принадлежащая плоскостям α, β, γ. Каждой точке принадлежит не менее одной плоскости.
I.5. Каковы бы ни были три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой, им принадлежит не более одной общей плоскости.	Каковы бы ни были три плоскости α, β, γ, не принадлежащие одной прямой, им принадлежит не более одной общей точки.
I.6. Если две точки A, B, принадлежащие прямой a, принадлежат плоскости α, то каждая точка, принадлежащая прямой a, принадлежит плоскости α.	Если две плоскости α, β, принадлежащие прямой a, принадлежат точке A, то каждая плоскость, принадлежащая прямой a, принадлежит точке A.

I.7. Если двум плоскостям α, β принадлежит общая точка A, то им принадлежит еще по крайней мере одна общая точка B.

Если двум точкам A, B принадлежит общая плоскость α, то им принадлежит еще по крайней мере одна общая плоскость β.

I.8. Имеется не менее четырех точек, не принадлежащих одной плоскости.

Имеется не менее четырех плоскостей, не принадлежащих одной точке.

I.9. Каждые две прямые, принадлежащие одной плоскости, принадлежат общей точке.

Каждые две прямые, принадлежащие одной точке, принадлежат общей плоскости.

Приводить столь же подробную запись предложений, двойственных аксиомам II, III, нет надобности. Способ составления их формулировок достаточно выяснен предыдущим изложением, а доказательства проводятся с помощью совершенно тривиальных рассуждений.

Вследствие того, что все предложения, двойственные проективным аксиомам I, II, III, справедливы (т.е. следуют из этих же аксиом), имеет место

Принцип двойственности в пространстве. *Пусть имеются три множества объектов, называемых соответственно точками, прямыми и плоскостями, между которыми установлены отношения принадлежности и порядка с соблюдением требований всех аксиом проективной геометрии. Если переменить роли этих объектов так, что объекты первого множества назвать плоскостями, объекты третьего — точками (а объектам второго множества сохранить первоначальное название), взаимные же отношения между ними оставить без изменения, то при этом требования проективных аксиом снова будут удовлетворены.*

Очевидно, пространственную проективную геометрию, как и двумерную, можно развивать, исходя по желанию либо из первоначально принятых аксиом, либо из двойственных им предложений.

Если осуществить такое двойственное построение проективной геометрии, то вместе с каждой проективной теоремой будет получена двойственная ей.

Конечно, в тех случаях, когда мы, доказав некоторую проективную теорему, желаем получить двойственную ей, нет надобности фактически проводить ее доказательство; формулировка двойственной теоремы выводится из формулировки данной теоремы при помощи перестановки слов по схеме:

$$\begin{aligned} \text{точка} &\to \text{плоскость}, \\ \text{прямая} &\to \text{прямая}, \\ \text{плоскость} &\to \text{точка}, \end{aligned}$$

а справедливость ее устанавливается принципом двойственности.

12 – 10891

Взаимно двойственные предложения при фиксированном выборе геометрических объектов выражают, вообще говоря, различные конкретные факты. Например, все теоремы о фигурах, составленных из точек и прямых одной плоскости, дают, в качестве двойственных себе, теоремы о телах, составленных из прямых и плоскостей, проходящих через одну точку; иначе говоря, геометрии на плоскости двойственна геометрия в связке.

124. Руководствуясь принципом двойственности, мы введем наряду с координатами точек координаты плоскостей. Именно, мы будем называть координатами произвольной плоскости α коэффициенты u_1, u_2, u_3, u_4 ее уравнения

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$

определяющего плоскость α в какой-либо системе проективных однородных координат.

Очевидно, координаты (u_1, u_2, u_3, u_4) являются однородными, так как четыре числа u_1, u_2, u_3, u_4 и четыре числа $\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho u_4$ определяют одну и ту же плоскость. Итак, для определения плоскости достаточно задать отношения $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$. Очевидно, что любые четыре числа (u_1, u_2, u_3, u_4), и представляют собой координаты некоторой плоскости, за исключением того случая, когда все эти четыре числа равны нулю.

По предыдущему, если (x_1, x_2, x_3, x_4) — координаты некоторой точки P и (u_1, u_2, u_3, u_4) — координаты некоторой плоскости α, то соотношение

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

является условием взаимной принадлежности точки P и плоскости α. Отсюда имеем два двойственных друг другу предложения:

При постоянных (u_1, u_2, u_3, u_4) и текущих (x_1, x_2, x_3, x_4) соотношение

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

определяет всевозможные точки, принадлежащие плоскости (u_1, u_2, u_3, u_4); в этом смысле оно называется уравнением плоскости.

При постоянных (x_1, x_2, x_3, x_4) и текущих (u_1, u_2, u_3, u_4) соотношение

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$$

определяет всевозможные плоскости, принадлежащие точке (x_1, x_2, x_3, x_4), в этом смысле оно называется уравнением связки плоскостей.

Далее нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

Если x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — координаты трех точек X, Y, Z, то соотношения

$$p_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i$$

при любых α, β, γ (кроме $\alpha = \beta = \gamma = 0$) определяют координаты точки P, принадлежащей плоскости XYZ; поэтому указанные соотношения называются параметрическими уравнениями этой плоскости.

Если $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — координаты трех плоскостей α, β, γ, то соотношения

$$\pi_i = u\alpha_i + v\beta_i + w\gamma_i$$

при любых u, v, w (кроме $u = v = w = 0$) определяют координаты плоскости π, принадлежащей общей точке плоскостей α, β, γ; поэтому указанные соотношения называются параметрическими уравнениями связки плоскостей с центром в этой точке.

Если x_i, y_i $(s = 1, 2, 3, 4)$ — координаты двух точек X, Y, то соотношения

$$(*) \qquad p_i = \alpha x_i + \beta y_i$$

при любых α, β (кроме $\alpha = \beta = 0$) определяют координаты точки P, принадлежащей прямой XY; поэтому указанные соотношения называются параметрическими уравнениями этой прямой.

Если $\alpha_i \beta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — координаты двух плоскостей α, β, то соотношения

$$(*) \qquad \pi_i = u\alpha_i + v\beta_i$$

при любых u, v (кроме $u = v = 0$) определяют координаты плоскости π, принадлежащей прямой, по которой пересекаются плоскости α и β; поэтому указанные соотношения называются параметрическими уравнениями этой прямой (в плоскостных координатах).

Если равенства $(*)$ разделить на α и положить $\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda$, то текущие координаты p_i будут будут выражены через один параметр:

$$p_i = x_i + \lambda y_i.$$

Если равенства $(*)$ разделить на u и положить $\dfrac{v}{u} = t$, то текущие координаты π_i будут выражены через один параметр:

$$\pi_i = \alpha_i + t\beta_i.$$

В первом случае уравнения при различных значениях параметра определяют множество принадлежащих прямой точек, во втором случае — множество принадлежащих прямой плоскостей.

Согласно n° 119 сложное отношение четырех точек X, Y, L, M с координатами x_i, y_i $x_i + \lambda y_i$, $x_i + \mu y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ выражается формулой

$$(XYLM) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

В силу принципа двойственности отсюда следует, что сложное отношение четырех плоскостей $\alpha, \beta, \tau, \sigma$ с координатами α_i, β_i, $\alpha_i + t\beta_i$, $\alpha_i + s\beta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ выражается формулой

$$(\alpha, \beta, \tau, \sigma) = \frac{t}{s}.$$

Аналогично приведенным примерам, и в иных случаях аналитические соотношения, соответствующие взаимно двойственным фактам, переходят друг в друга при замене координат точек координатами плоскостей и координат плоскостей координатами точек.

§ 12. Алгебраические кривые и пучки. Алгебраические поверхности и связки. Комплексная проективная плоскость и комплексное проективное пространство

125. Одним из главных предметов исследования в проективной геометрии на плоскости являются алгебраические кривые и соответствующие им по принципу двойственности алгебраические пучки. Ниже дается их определение:

Алгебраической кривой называется совокупность точек, проективные однородные координаты которых удовлетворяют некоторому алгебраическому однородному уравнению, т.е. уравнению вида

$$\sum a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_n} = 0 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1, 2, 3),$$

где слева записана однородная форма степени n; коэффициенты $a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ предполагаются не зависящими от порядка записи индексов. Степень n этого уравнения называется порядком алгебраической кривой.

Алгебраическим пучком называется совокупность прямых, проективные однородные координаты которых удовлетворяют некоторому алгебраическому однородному уравнению, т.е. уравнению вида

$$\sum a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n} = 0 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1, 2, 3),$$

где слева записана однородная форма степени n; коэффициенты $a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ предполагаются не зависящими от порядка записи индексов. Степень n этого уравнения называется классом алгебраического пучка.

При $n = 1, 2, 3, \ldots$ соответственно имеем:

линию 1-го порядка, определяемую уравнением

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

пучок 1-го класса, определяемый уравнением

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0,$$

т. е. совокупность точек, принадлежащих одной прямой; линию 2-го порядка, определяемую уравнением

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \\ +2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0;$$

линию 3-го порядка, определяемую уравнением

$$a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{122}x_1x_2^2 + \\ + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + \\ + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + \\ + 6a_{123}x_1x_2x_3 + a_{333}x_3^3 = 0,$$

и т. д.

т. е. совокупность прямых, принадлежащих одной одной точке; пучок 2-го класса, определяемый уравнением

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 + \\ +2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0;$$

пучок 3-го класса, определяемый уравнением

$$a_{111}u_1^3 + 3a_{112}u_1^2u_2 + 3a_{122}u_1u_2^2 + \\ + a_{222}u_2^3 + 3a_{223}u_2^2u_3 + 3a_{233}u_2u_3^2 + \\ + 3a_{113}u_1^2u_3 + 3a_{133}u_1u_3^2 + \\ + 6a_{123}u_1u_2u_3 + a_{333}u_3^3 = 0,$$

и т. д.

Согласно высказанному определению алгебраические линии выделяются среди всех вообще линий по виду своих уравнений. Естественно поставить вопрос: не может ли алгебраичность уравнения нарушиться при переходе от одной системы проективных координат к другой? В таком случае было бы бессмысленно вводить в геометрию понятие алгебраической линии. Однако, как нетрудно показать, алгебраичность и степень уравнения инвариантны относительно преобразования проективных координат. В самом деле, мы знаем, что при изменении проективной системы однородных координат старые координаты точек плоскости оказываются линейными однородными функциями новых, а новые координаты в свою очередь линейно и однородно выражаются через старые. Но, очевидно, при этом мы получим в новых координатах однородную же форму, притом той же степени n, что и исходная. Следовательно, понятие алгебраической кривой и ее порядка имеет геометрический смысл, не зависящий от выбора координатной системы.

Чтобы установить аналогичное свойство определения алгебраических пучков, нужно в первую очередь вывести формулы, по которым изменяются однородные координаты прямых при изменении проективной координатной системы. С этой целью напишем уравнение произвольной прямой:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (*)$$

и уравнение этой же прямой в новых координатах:

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0. \qquad (**)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned} \tag{α}$$

— соотношения между новыми и старыми координатами точек.

Так как уравнения (*) и (**) определяют одну прямую, то при любых x_1, x_2, x_3 должно иметь место соотношение

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = \mu(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3);$$

заменяя здесь x_1', x_2', x_3' их выражениями через x_1, x_2, x_3, мы получим тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho'}\left[(c_{11}u_1' + c_{21}u_2' + c_{31}u_3')\,x_1 + (c_{12}u_1' + c_{22}u_2' + c_{32}u_3')\,x_2 + \right.\\ \left. + (c_{13}u_1' + c_{23}u_2' + c_{33}u_3')\,x_3\right] = \mu(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3). \end{aligned}$$

Полагая $\rho'\mu = \sigma$ и приравнивая соответствующие коэффициенты при x_i $(i = 1, 2, 3)$, найдем отсюда:

$$\begin{aligned} \sigma u_1 &= c_{11}u_1' + c_{21}u_2' + c_{31}u_3', \\ \sigma u_2 &= c_{12}u_1' + c_{22}u_2' + c_{32}u_3', \\ \sigma u_3 &= c_{13}u_1' + c_{23}u_2' + c_{33}u_3'. \end{aligned} \tag{β}$$

Это и есть нужные нам соотношения между старыми и новыми координатами прямых. Таким образом, формулы преобразования координат прямых имеют точно такое же строение, что и формулы преобразования координат точек (при этом определитель преобразования (β) равен определителю преобразования (α) и значит, $\neq 0$). Следовательно, понятие алгебраического пучка и его класса, как и понятие алгебраической кривой и ее порядка, имеет геометрический смысл, независимый от выбора координатной системы.

Понятно, что при замене в алгебраическом уравнении старых переменных линейными формами новых получается уравнение, коэффициенты которого, вообще говоря, отличаются от коэффициентов исходного уравнения. Ясно также, что все геометрические свойства линий и пучков и все связанные с ними геометрические величины должны представляться аналитически такими соотношениями между коэффициентами уравнений и такими функциями от этих коэффициентов, которые не меняются при изменении системы проективных координат.

Таким образом, *задача исследования алгебраических кривых и пучков в проективной геометрии на плоскости равносильна алгебраической задаче исследования инвариантов однородных форм с тремя аргументами.*

Еще одно замечание.

Рассматривая формулы (α) и (β), мы можем полагать также, что входящие в них координаты отнесены к о д н о й системе; тогда, например, в формулах (α) числа x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3 будут уже не разными координатами одной точки, а координатами разных точек M и M'. Как нам известно, отображение проективной плоскости на себя, при котором точка M переходит в точку M', определенную формулами (α), является проективным. При таком взгляде на формулы (α) и (β) (как на формулы проективного отображения) инвариантность структуры уравнения алгебраических образов относительно преобразований (α) и (β) означает, что *при проективном отображении алгебраические образы любого порядка или класса отображаются в алгебраические образы того же порядка или класса.*

Далее, очевидно, что если мы совершим некоторое проективное отображение, определяемое формулами (α), и одновременно по этим же формулам произведем изменение проективных координат, то произвольный алгебраический образ A в системе (x_1, x_2, x_3) и проективно соответствующий ему образ A' в системе (x'_1, x'_2, x'_3) будут иметь одинаковые уравнения. Поскольку алгебраические образы, которые могут быть проективно отображены друг на друга, имеют в подходящих координатах тождественные уравнения, они имеют и тождественные геометрические свойства. Это соответствует общему для всей проективной геометрии условию рассматривать фигуры, переходящие друг в друга при проективном отображении, как эквивалентные (подобно тому, как в элементарной геометрии считаются одинаковыми фигуры, совмещающиеся при помощи движений).

126. Произвольная прямая содержит не более n точек линии n-го порядка либо целиком состоит из точек этой линии. В самом деле, пусть

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n} = 0$$

— уравнение некоторой линии n-го порядка, p_i и q_i $(i = 1, 2, 3)$ — координаты двух точек P и Q. Координаты x_i $(i = 1, 2, 3)$ произвольной точки прямой PQ могут быть выражены как функции параметра λ:

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Эти формулы определяют общие точки прямой PQ и данной линии, если λ удовлетворяет уравнению

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \left(p_{\alpha_1} + \lambda q_{\alpha_1}\right) \left(p_{\alpha_2} + \lambda q_{\alpha_2}\right) \ldots \left(p_{\alpha_n} + \lambda q_{\alpha_n}\right) = 0. \qquad (*)$$

Предположим точку Q выбранной с соблюдением условия

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \ldots q_{\alpha_n} \neq 0$$

(что возможно, если прямая не состоит целиком из точек данной линии). В таком случае левая часть уравнения (*) содержит λ^n, и это уравнение имеет степень n. Так как каждому вещественному корню λ_i соответствует некоторая точка пересечения прямой PQ с данной алгебраической линией, а число вещественных корней уравнения (*) не больше n, то максимальное число общих точек прямой и линии n-го порядка действительно равно n.

Аналогично, произвольная точка содержит не более n прямых пучка n-го класса, либо все принадлежащие ей прямые входят в состав пучка. В самом деле, пусть

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_n} = 0$$

— уравнение некоторого пучка n-го класса и S — какая-нибудь точка, определенная пересечением двух прямых v и w с координатами v_i и w_i $(i = 1, 2, 3)$. Координаты u_i $(i = 1, 2, 3)$ произвольной прямой, принадлежащей точке S, могут быть выражены как функции параметра λ:

$$u_i = v_i + \lambda w_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Эти формулы определяют прямые, принадлежащие точке S и данному пучку, если λ удовлетворяет уравнению

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \left(v_{\alpha_1} + \lambda w_{\alpha_1}\right) \left(v_{\alpha_2} + \lambda w_{\alpha_2}\right) \ldots \left(v_{\alpha_n} + \lambda w_{\alpha_n}\right) = 0. \qquad (**)$$

Предположим прямую w выбранной с соблюдением условия

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \ldots w_{\alpha_n} \neq 0$$

(что возможно, если не все принадлежащие точке S прямые входят в состав данного пучка). В таком случае левая часть уравнения (**) содержит λ^n, и это уравнение имеет степень n. Так как каждому вещественному корню λ_i соответствует прямая, принадлежащая точке S и данному алгебраическому пучку, а число вещественных корней уравнения (**) не больше n, то максимальное число прямых пучка, проходящих через точку S, действительно равно n.

Доказанные предложения наводят на мысль, что порядок алгебраической кривой может быть истолкован наглядно-геометрически, как максимальное число точек этой кривой, принадлежащих одной прямой, а класс пучка — как максимальное число его прямых, принадлежащих одной точке. Однако нетрудно сообразить, что такое истолкование было бы ошибочно. Именно, существуют такие линии порядка n, которые с *любой* прямой имеют менее n общих точек. Достаточно для примера указать линию 2-го порядка $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, которая совсем не имеет точек.

Между тем, указанное геометрическое истолкование порядка кривой и класса пучка будет возможным, если мы расширим множество элементов проективной плоскости путем добавления новых, “мнимых” элементов. Введение мнимых элементов в геометрии столь же целесообразно, как и введение мнимых чисел в алгебре, так как позволяет придать надлежащую простоту формулировкам многих теорем.

Ниже излагается принцип введения мнимых элементов на проективной плоскости.

127. Пусть даны два множества объектов, называемых, соответственно, точками и прямыми, между которыми установлены отношения принадлежности и порядка с соблюдением требований двумерных проективных аксиом (иными словами, пусть дана проективная плоскость). Тогда, как мы знаем, со всеми точками могут быть по определенному закону взаимно однозначно сопоставлены отношения вещественных чисел x_1, x_2, x_3, называемых проективными однородными координатами точек, а со всеми прямыми — отношения вещественных чисел u_1, u_2, u_3, называемых проективными координатами прямых. Условимся называть *мнимой точкой* любую *систему трех комплексных чисел* x_1, x_2, x_3, если хоть одно из них отлично от нуля и если отношение хотя бы двух из них не может быть выражено действительным числом; точки (x_1, x_2, x_3) и $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$, где ρ — любое комплексное число, не равное нулю, будем считать совпадающими. При тех же условиях мы будем называть *мнимой прямой* тройку комплексных чисел u_1, u_2, u_3. Таким образом, любую тройку чисел можно рассматривать и как точку, и как прямую.

Если проективная система координат изменяется, то координаты всех точек преобразуются по формулам (α) n° 125, а координаты всех прямых — по формулам (β). Мы будем считать, что этими формулами определяются координаты мнимых точек и прямых в каждой вновь вводимой проективной системе координат.

Тем самым понятию мнимых точек и прямых придается инвариантный смысл. Именно, мы можем сказать, что *мнимые точки и прямые суть некоторые объекты, которые соответственно каждой системе проективных координат определяются тройками комплексных чисел с комплексными отношениями; две тройки чисел в одной системе координат определяют один и тот же объект, если входящие в них числа пропорциональны; две тройки чисел в разных системах координат определяют один и тот же объект, если они связаны соотношениями* (α) *или* (β), *в зависимости от того, является ли этот объект точкой или прямой.*

Для расширенного множества объектов устанавливаются отношения взаимной принадлежности: точка (x_1, x_1, x_2) считается принадлежащей прямой (u_1, u_2, u_3) при условии $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Из вычислений, приведших нас к формулам (β), следует, что это условие имеет инвариантный смысл (т. е. если для данной вещественной или мнимой точки и данной вещественной или мнимой прямой оно выполняется в одной системе координат, то выполняется и во всякой другой системе).

Отношения порядка для мнимых объектов не вводятся. Множество вещественных точек и прямых проективной плоскости, дополненное мнимыми элементами, мы будем называть *комплексной проективной плоскостью.*

Подобно точкам и прямым, и все остальные алгебраические образы комплексной проективной плоскости разделяются на вещественные и мнимые. Вещественными называются алгебраические образы, которые могут быть представлены уравнениями с вещественными коэффициентами, мнимыми — те, которые могут быть представлены только уравнениями с комплексными коэффициентами. Во избежание ошибочных воззрений заметим тут же, что могут быть вещественные образы, состоящие исключительно из мнимых элементов; например, линия $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ вещественна, однако не имеет ни одной вещественной точки.*)

На комплексной проективной плоскости каждая алгебраическая линия n-го порядка имеет со всякой прямой n точек пересечения (при надлежащем учете кратности точек). В самом деле, вернемся к рассмотрениям, проведенным в начале этого параграфа. Уравнение $(*)$ имеет n вещественных или комплексных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, с каждым из которых при помощи формул

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

сопоставляются три числа. Так как мы ввели в рассмотрение мнимые элементы, то теперь три числа (x_1, x_2, x_3), независимо от того, вещественны они или комплексны, мы можем рассматривать как координаты некоторой точки. Точки, соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, являются общими точками рассматриваемой линии и рассматриваемой прямой. Если при подсчете этих точек мы будем те из них, которые соответствуют кратным корням, считать столько раз, сколько единиц в показателе кратности, то всегда будет n точек пересечения прямой с линией n-го порядка.

Для пучков рассуждения аналогичны.

Итак, на комплексной проективной плоскости

порядок алгебраической линии равен числу точек этой линии, принадлежащих какой-нибудь прямой;	класс алгебраического пучка равен числу прямых этого пучка, проходящих через какую-либо точку.

*) Если мы допустим преобразования координат по формулам (α) и (β) с комплексными значениями коэффициентов c_{ik}, то различие между мнимыми и вещественными образами потеряет инвариантный смысл.

В заключение этого параграфа заметим, что алгебраический пучок представляет собой, вообще говоря, систему прямых, касательных к алгебраической линии.

В самом деле, так как каждая прямая $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ на проективной плоскости определяется заданием двух параметров, $u_1 : u_2 : u_3$, а уравнение пучка устанавливает между этими параметрами одну связь, то алгебраический пучок есть однопараметрическое семейство прямых; но однопараметрическое семейство прямых, вообще говоря, имеет огибающую; таким образом, алгебраический пучок состоит из прямых, касательных к линии. То, что эта линия является алгебраической, устанавливается несложными вычислениями по общим методам теории огибающих.

Сделанное замечание позволит читателю внести известную наглядность в представления об алгебраических пучках.

128. Алгебраические линии и алгебраические пучки, очевидно, являются взаимно двойственными понятиями проективной геометрии. Огибающей алгебраического пучка по принципу двойственности соответствует пучок касательных алгебраической кривой. Чтобы объяснить себе такое сопоставление, следует принять во внимание, что огибающая пучка состоит из характеристических точек, каждая из которых является общей точкой двух бесконечно близких прямых пучка; вполне понятно, что характеристической точке пучка по принципу двойственности отвечает касательная к кривой, т. е. прямая, проходящая через две ее бесконечно близкие точки. Следовательно, множеству характеристических точек алгебраического пучка (т. е. огибающей) соответствует, как двойственный образ, множество касательных к алгебраической линии (т. е. алгебраический пучок, огибаемый этой линией).

В проективной геометрии нередко говорят о классе кривой и о порядке пучка.

Классом алгебраической кривой называется класс алгебраического пучка ее касательных.

Иначе можно сказать: класс кривой есть число касательных (вещественных и мнимых), которые можно провести к ней из произвольной точки плоскости.

Порядком алгебраического пучка называется порядок его огибающей.

Иначе можно сказать: порядок пучка есть число его характеристических точек (вещественных и мнимых), расположенных на одной прямой.

Класс и порядок одного и того же алгебраического образа, вообще говоря, различны.

129. Мы не имеем возможности привести здесь содержательные теоремы из общей теории алгебраических кривых; ограничимся лишь несколькими замечаниями. Из основных предложений алгебры и анализа следует, что алгебраическая кривая, в отличие от некоторых трансцендентных (т. е. не алгебраических), не может иметь точек прекращения и не может иметь вид бесконечной нити, навитой на проективную плоскость. Иначе говоря, все алгебраические линии замкнуты. Например, знакомые читателю алгебраические линии плоскости Евклида — парабола и гипербола — при дополнении евклидовой плоскости бесконечно удаленными элементами замыкаются на бесконечности и, таким образом, на расширенной (т. е. на проективной) плоскости оказываются замкнутыми кривыми.

Так же можно доказать, что число отдельных кусков каждой алгебраической кривой конечно.

Что же касается проблемы классификации алгебраических кривых, то при $n > 3$ эта проблема выходит в сложные области алгебры (именно, в теорию инвариантов однородных форм от трех аргументов) и служит предметом специальных сочинений.

130. Вещественное проективное пространство может быть дополнено мнимыми элементами в полной аналогии с тем, как это делалось по отношению к плоскости. Именно, сначала можно определить мнимые точки и мнимые плоскости и отношение принадлежности вещественных и мнимых точек и плоскостей (аналогично определению мнимых точек, мнимых прямых и отношения принадлежности в n° 127); затем в качестве произвольной прямой можно рассматривать множество точек пересечения каких-нибудь двух плоскостей (при этом новыми, т. е. мнимыми, прямыми будут те, которые не определяются пересечением вещественных плоскостей). Получаемое таким образом множество вещественных и мнимых элементов с заданным отношением принадлежности и порядка (вещественных точек на вещественных прямых) называется *комплексным проективным пространством.*

В комплексном проективном пространстве определяются алгебраические поверхности и связки (которые представляют собой пространственные аналоги алгебраических кривых и пучков).

Алгебраической поверхностью называется совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_m} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = 1, 2, 3, 4),$$

левая часть которого представляет собой однородную форму от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 степени m. Число m называется *порядком поверхности.*

Алгебраической связкой называется совокупность плоскостей, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_m} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = 1, 2, 3, 4),$$

левая часть которого представляет собой однородную форму переменных u_1, u_2, u_3, u_4 степени m. Число m называется *классом* связки.

Алгебраические образы называются *вещественными*, если они могут быть представлены уравнениями с вещественными коэффициентами.

Распространяя рассуждения, приведенные в n° 126, на трехмерный случай, можно доказать, что

порядок алгебраической поверхности равен числу ее точек (вещественных и мнимых), принадлежащих одной прямой.

класс алгебраической связки равен числу ее плоскостей (вещественных и мнимых), проходящих через одну прямую.

В заключение отметим, что не все свойства уравнений алгебраических образов выражают геометрические свойства этих образов, а лишь те, которые не меняются при любом преобразовании проективных координат.

Таким образом, *задача исследования алгебраических поверхностей и связок в трехмерной проективной геометрии равносильна алгебраической задаче исследования инвариантов однородных форм от четырех аргументов.*

§ 13. Образы второй степени. Теория поляр

Общая задача исследования алгебраических образов данного порядка или класса m заключается в разыскании полной системы инвариантов однородного уравнения степени m, т. е. такой системы функций от коэффициентов уравнения степени m, которые:

1) инвариантны относительно линейного однородного преобразования аргументов левой части уравнения,

2) таковы, что если для двух уравнений степени m с численно заданными коэффициентами эти функции принимают соответственно равные значения, то данные уравнения преобразуются друг в друга при помощи некоторого линейного преобразования аргументов.

Иначе говоря, зная полную систему инвариантов уравнения степени m, мы можем по поводу двух произвольных образов порядка или класса m всегда решить вопрос, являются ли они проективно тождественными или нет.

Эта задача для больших m даже в двумерной геометрии представляет огромные трудности. Для $m = 3$ она была значительно продвинута Ньютоном*), который дал полную классификацию линий 3-го порядка, т. е. указал все проективно различные виды этих линий, из которых остальные получаются проективными преобразованиями. Случай $m = 2$ наиболее прост и полностью изучен совершенно элементарными средствами. Его мы рассмотрим в настоящем разделе с некоторой подробностью.

*) См. *Ф. Клейн.* Высшая геометрия. – ГОНТИ, 1939. – § 36.

Мы будем в своих рассмотрениях ограничиваться преимущественно двумерной геометрией; почти все результаты, которые мы получим, переносятся в трехмерную геометрию путем стандартных изменений формулировок и уравнений. Заметим еще, что при изучении образов второй степени нам достаточно будет исследовать линии второго порядка; свойства пучков второго класса тогда могут быть получены при помощи принципа двойственности.

Мы начнем с изложения теории поляр, которая в общем исследовании образов 2-й степени играет важную роль.

131. Определение и главнейшие свойства поляр. Пусть дана некоторая (вещественная) линия второго порядка, определенная уравнением

$$\sum a_{ik}x_ix_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}), \tag{α}$$

которое в подробной записи имеет вид:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Мы будем говорить, что точки P и Q гармонически расположены относительно данной линии второго порядка (α), если пара точек P, Q гармонически сопряжена с парой точек M_1, M_2, в которых эта линия пересекает прямую PQ (рис. 119).

Геометрическое место точек, гармонически расположенных с точкой P относительно линии второго порядка, называется полярой *точки P относительно этой линии.*

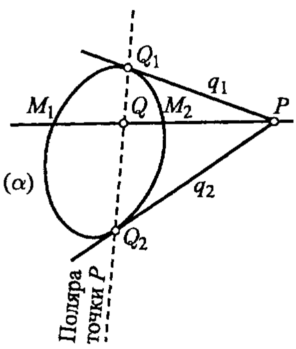


Рис. 119

Мы докажем сейчас, что поляра является прямой. С этой целью выведем уравнение поляры.

Предварительно постараемся получить условие для координат p_i и q_i точек P и Q, при котором точки P, Q гармонически расположены относительно линии (α). Как нам известно, координаты x_i любой точки M, расположенной на прямой PQ, имеют вид

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Общие точки линии (α) и прямой PQ мы найдем, если в качестве λ выберем корни λ_1 и λ_2 квадратного уравнения

$$a_{ik}(p_i + \lambda q_i)(p_k + \lambda q_k) = 0,$$

которое может быть написано в форме

$$\lambda^2 \sum a_{ik}q_iq_k + \lambda\left(\sum a_{ik}p_iq_k + \sum a_{ik}p_kq_i\right) + \sum a_{ik}p_ip_k = 0,$$

или, вследствие симметрии $a_{ik} = a_{ki}$ — в форме

$$\lambda^2 \sum a_{ik} q_i q_k + 2\lambda \sum a_{ik} p_i q_k + \sum a_{ik} p_i p_k = 0.$$

Согласно n° 119 две пары точек p_i, q_i и $p_i + \lambda_1 q_i$, $p_i + \lambda_2 q_i$ гармонически сопряжены, если $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$ или $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Отсюда и вследствие теоремы Виетта имеем искомое условие гармонического расположения точек P, Q относительно линии (α):

$$\sum a_{ik} p_i q_k = 0. \qquad (\beta)$$

Предполагая Q произвольной точкой, гармонически расположенной с точкой P относительно линии (α), и изменяя обозначения ее координат q_1, q_2, q_3 на x_1, x_2, x_3, получим уравнение поляры точки P

$$\sum a_{ik} p_i x_k = 0 \qquad (\gamma)$$

с текущими координатами x_k. В подробной записи уравнение (γ) имеет вид

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)x_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0. \qquad (\delta)$$

Мы видим, что это — уравнение первой степени; следовательно, поляра действительно есть прямая линия.

Если мы введем обозначение $\sum a_{ik} p_i p_k = \Phi(p_1, p_2, p_3)$, то уравнение поляры можно будет написать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} x_3 = 0.$$

По форме записи оно не отличается от представленного в однородных координатах уравнения прямой, касающейся линии $\Phi(p_1, p_2, p_3) = 0$ в точке (p_1, p_2, p_3); оно хорошо известно в анализе и в дифференциальной геометрии. Так как определение касательной и вывод ее уравнения, обычные в анализе, опираются лишь на такие свойства линий, которые имеют место в проективной геометрии, то мы вправе утверждать следующую теорему.

Теорема 49. *Если точка P лежит на линии второго порядка, то полярой ее является прямая, касательная к данной линии в этой точке.*

Далее, должна быть отмечена важная теорема, относящаяся к полярам произвольных точек:

Теорема 50 (принцип взаимности в теории поляр). *Если поляра точки P проходит через точку Q, то поляра точки Q проходит через точку P.*

Доказательство этого предложения непосредственно вытекает из уравнения поляры. В самом деле, если p_i — координаты точки P, то поляра этой точки имеет уравнение

$$\sum a_{ik} p_i x_k = 0,$$

и если q_i — координаты точки Q, то поляра точки Q имеет уравнение

$$\sum a_{ik} q_i x_k = 0.$$

Вследствие симметрии $a_{ik} = a_{ki}$ имеем

$$\sum a_{ik} p_i q_k = \sum a_{ik} q_i p_k.$$

Поэтому равенство $\sum a_{ik} p_i q_k = 0$, выражающее принадлежность точки Q поляре точки P, влечет равенство $\sum a_{ik} q_i p_k = 0$, выражающее принадлежность точки P поляре точки Q.

Из теорем 49 и 50 непосредственно вытекает следующая

Теорема 51. *Прямые, проходящие через некоторую точку P и касающиеся линии второго порядка, имеют точки прикосновения на поляре точки P* (рис. 119).

В самом деле, если q_1 — касательная и Q_1 — ее точка прикосновения, то по теореме 49 прямая q_1 является полярой своей точки прикосновения Q_1; а так как прямая q_1 проходит через точку P, то вследствие теоремы 50 поляра точки P проходит через точку Q_1, что и утверждается теоремой.

Заметим, что теореме 51 можно дать совершенно наглядное доказательство, рассматривая касательную PQ_1 как предел секущей PM_2M_1.

132. Если прямая p есть поляра точки P, то эта точка P называется *полюсом* прямой p.

Естественно поставить вопрос: каждая ли прямая имеет полюс? Чтобы решить этот вопрос, сравним уравнение произвольной прямой

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \qquad (\varepsilon)$$

с уравнением поляры (δ). Очевидно, прямая (ε) будет полярой некоторой точки, если ее уравнению можно придать форму уравнения поляры, т. е. если существуют такие числа p_1, p_2, p_3, что

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= u_1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= u_2, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= u_3; \end{aligned} \qquad (\zeta)$$

тогда точка с координатами p_1, p_2, p_3 и будет полюсом прямой (ε). Система (ζ) имеет решения при любых значениях u_1, u_2, u_3 в том и только в том случае, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Поэтому мы можем высказать следующее предложение:

Если линия второго порядка удовлетворяет условию $\Delta \neq 0$, *то относительно такой линии каждая прямая имеет полюс.*

Линии, для которых $\Delta = 0$, мы будем называть *вырожденными* (наглядное описание вырожденных линий будет дано в n° 134).

Следует отметить еще одно важное обстоятельство. Мы можем по формуле (δ) составить уравнение поляры для любой точки (p_1, p_2, p_3). Однако не всегда при этом будет получаться определенное уравнение, именно, не исключена возможность равенств

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= 0, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= 0, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= 0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Не вдаваясь в подробности исследования этого случая, заметим лишь, что если p_1, p_2, p_3 удовлетворяют соотношениям ($*$), то

$$\sum a_{ik}p_ip_k = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)p_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)p_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)p_3 = 0$$

и, следовательно, точка (p_1, p_2, p_3) лежит на линии второго порядка. Таким образом:

Неопределенную поляру могут иметь только точки, лежащие на данной линии второго порядка.

Кроме того, так как при условии $\Delta \neq 0$ система ($*$) несовместна (решение $p_1 = p_2 = p_3$ исключается), то можно утверждать предложение: *относительно невырожденной линии второго порядка все точки имеют определенные поляры.*

133. Пусть дана какая-нибудь невырожденная линия второго порядка. Тогда мы можем с каждой точкой плоскости сопоставить вполне определенную прямую — ее поляру, а с каждой прямой — вполне определенную точку — ее полюс.

Нетрудно показать, что при этом:

1) разным точкам соответствуют разные прямые;

2) разным прямым соответствуют разные точки;

3) точке пересечения двух прямых соответствует прямая, соединяющая их полюсы (это следует из теоремы 50);

4) прямой, соединяющей две точки, соответствует точка пересечения их поляр (это следует также из теоремы 50).

Вообще, при указанном сопоставлении геометрических элементов каждой фигуре A, состоящей из точек и прямых, соответствует некоторая фигура A', которая называется *полярным преобразованием* фигуры A относительно данной линии второго порядка.

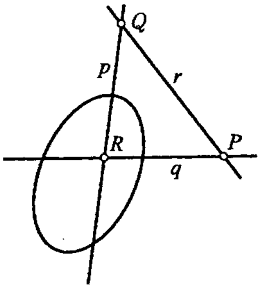


Рис. 120

Если фигура A' есть полярное преобразование фигуры A, то фигура A в свою очередь является полярным преобразованием фигуры A'; поэтому такие две фигуры называются также *взаимно полярными*. Фигура, совпадающая со своим полярным преобразованием, называется *автополярной*. Например, если мы возьмем произвольную точку P, на ее поляре p — произвольную точку Q и обозначим через q поляру точки Q, через R — точку пересечения прямых p, q и через r — поляру точки R (рис. 120), то, по теореме 50, прямая q пройдет через P, а прямая z — через P и Q; мы получим *автополярный трехвершинник*, каждая сторона которого является полярой противоположной вершины и, следовательно, каждая вершина — полюсом противоположной стороны. Автополярные трехвершинники будут существенно использованы в следующем параграфе. Заметим еще, что взаимно полярные фигуры вместе с тем являются и взаимно двойственными. Именно при помощи полярных преобразований фигур открыл принцип двойственности его автор — Понселе.

134. Теперь мы вплотную подходим к решению задачи определения всех проективно различных линий второго порядка и разыскания полной системы инвариантов уравнения второй степени.

Чтобы найти все виды линий второго порядка, мы будем строить такую систему координат, по отношению к которой уравнение произвольно заданной линии второго порядка принимает наиболее простую форму.

Пусть дана произвольная линия второго порядка k. Выберем вне этой линии какую угодно точку P и обозначим через p ее поляру; согласно замечанию, сделанному в конце n° 132, прямая p будет вполне определенной, так как P не принадлежит линии. Вслед за тем введем проективную систему координат, располагая вершины координатного триэдра так, чтобы одна вершина $A_1(1,0,0)$ совместилась с точкой P, а две другие вершины $A_2(0,1,0)$ и $A_3(0,0,1)$ расположились как-нибудь на прямой p; точку единиц $E(1,1,1)$ возьмем произвольно. Пусть

$$\sum a_{ik}x_ix_k = 0$$

— уравнение линии k в установленных координатах. Заметим теперь, что прямая p, поскольку она представляет собой сторону A_2A_3 координатного триэдра, имеет уравнение

$$x_1 = 0. \tag{$*$}$$

С другой стороны, уравнение этой же прямой, как поляры точки $A_1(1,0,0)$, может быть составлено по формуле (δ) n° 131; подставляя в эту формулу $p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0$, получим:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0. \tag{$**$}$$

Так как уравнения ($*$) и ($**$) определяют одну прямую, то необходимо

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0.$$

Таким образом, уравнение линии k в наших координатах принимает вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Если $a_{23} \neq 0$, то мы будем производить дальнейшую специализацию выбора координатного триэдра. Именно, точку A_1 выберем на прямой p как угодно, но при условии, чтобы она не принадлежала линии k; это возможно, так как в случае $a_{23} \neq 0$ на прямой $x_1 = 0$ существуют точки $(0, x_2, x_3)$, для которых $a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \neq 0$. В качестве же A_3 возьмем точку пересечения прямой p с полярой точки A_2; в выборе точки A_3 уже нет произвола, ибо, поскольку A_2 не лежит на линии k, она имеет определенную поляру.

Построенный нами координатный триэдр $A_1A_2A_3$ является автополярным относительно линии k, т. е. каждая его сторона представляет собой поляру противоположной вершины. В частности, прямая A_1A_3, уравнение которой

$$x_2 = 0, \tag{$***$}$$

есть поляра точки $A_2(0,1,0)$; подставляя в формулу (δ) n° 131 $p_1 = 0$, $p_2 = 1, p_3 = 0$, мы получим уравнение поляры точки A_3 в виде

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$

или, так как $a_{21} = a_{12} = 0$:

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \tag{$****$}$$

Сравнивая уравнения ($***$) и ($****$), найдем:

$$a_{23} = 0.$$

Следовательно, выбирая надлежащим образом координатный триэдр, мы всегда можем уравнение линии второго порядка привести к виду

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{I}$$

Что же касается дальнейших упрощений этого уравнения, то в этом вопросе приходится различать три случая:

1. Если $a_{22} = a_{33} = 0$, то уравнение (I) имеет вид

$$x_1^2 = 0, \tag{1}$$

и дальнейшие его упрощения невозможны.

2. Если $a_{33} = 0$ и $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$, то при помощи преобразования координат*)

$$x_1' = \sqrt{|a_{11}|}\,x_1, \quad x_2' = \sqrt{|a_{22}|}\,x_2, \quad x_3' = x_3$$

уравнение (I) может быть приведено к виду

$$\pm\, x_1'^2 \pm x_2'^2 = 0. \tag{2}$$

3. Если $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$, то после преобразования

$$x_1' = \sqrt{|a_{11}|}\,x_1, \quad x_2' = \sqrt{|a_{22}|}\,x_2, \quad x_3' = \sqrt{|a_{33}|}\,x_3$$

найдем:

$$\pm\, x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 0. \tag{3}$$

Эти упрощения, которые производятся уже при выбранном координатном триэдре A_1, A_2, A_3, требуют, очевидно, изменения точки единиц.

Простейшие уравнения (1), (2), (3) линии второго порядка называются *каноническими*. При помощи надлежащего изменения нумерации координат и умножения на -1 эти уравнения могут быть сведены к следующим:

$$x_1^2 = 0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 0,\\ x_1^2 - x_2^2 &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0,\\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Уравнение (1) определяет дважды взятую прямую $x_1 = 0$. Каждое из уравнений (2) определяет пару различных прямых, именно, уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 0$ — пару мнимых прямых $x_1 + ix_2 = 0, x_1 - ix_2 = 0$,

*) Напомним еще раз, что мы рассматриваем только вещественные линии и вещественные преобразования (т. е. все коэффициенты уравнений линий и формул преобразований предполагаются вещественными).

уравнение $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — пару вещественных прямых $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$.

Все линии второго порядка (1) и (2) — вырожденные, так как для уравнений $x_1^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ соответственно имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнения (3) определяют невырожденные линии второго порядка, так как для этих уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вырожденные линии, следовательно, являются парами прямых. Первому из уравнений (3) соответствует линия, не обладающая ни одной вещественной точкой; она называется *нулевой*. Второму из уравнений (3) соответствует кривая в собственном смысле этого слова; она называется *овальной*. Овальная кривая разбивает (вещественную) проективную плоскость на две области, из которых левая характеризуется условием

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$$

и называется *внутренней*, вторая — условием

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0$$

и называется *внешней*. Чтобы наглядно представить себе структуру этих областей, заметим, что прямая $x_3 = 0$ не пересекает внутреннюю область, так как при $x_3 = 0$ и при вещественных x_1, x_2 неравенство $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$ невозможно; поэтому для всех точек внутренней области $x_3 \neq 0$ и мы можем определять их неоднородными координатами $x = \dfrac{x_1}{x_3}$ и $y = \dfrac{x_2}{x_3}$. В неоднородных координатах внутренняя область характеризуется соотношением

$$x^2 + y^2 < 1$$

и, следовательно, топологически эквивалентна евклидову кругу*); отсюда следует, что внешняя область является листом Мёбиуса (см. n° 240).

---

*) Две фигуры называются *топологически эквивалентными*, если множество точек одной из них допускает взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное отображение на множество точек другой. Например, квадрат и круг топологически эквивалентны. Также эквивалентны куб и шар. Напротив, шар и тор топологически различны.

Теперь мы можем указать и полную систему инвариантов общего уравнения линии второго порядка

$$\sum a_{ik}x_ix_k = 0.$$

В первую очередь мы отметим в качестве инварианта этого уравнения ранг его матрицы

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|.$$

Здесь мы просто сошлемся на известное в алгебре (в разделе о квадратичных формах) предложение, гласящее: если аргументы x_i квадратичной формы $\sum a_{ik}x_ix_k$ заменить линейными однородными функциями новых аргументов x'_i, то при условии, что определитель, составленный из коэффициентов этих функций, отличен от нуля, квадратичная форма $\sum a'_{ik}x'_ix'_k$, получающаяся при таком преобразовании, имеет матрицу A' того же ранга, что и матрица A исходной формы:

$$\operatorname{Rang} A' = \operatorname{Rang} A.$$

Просматривая уравнения (1), (2), (3), мы видим, что ранг матрицы уравнения (1) равен 1, ранг матрицы уравнений (2) равен 2 и ранг матрицы уравнений (3) равен 3.

Так как ранг матрицы является инвариантом, то, имея уравнение произвольной линии второго порядка в любых координатах, мы по рангу его матрицы всегда можем определить, к какой из трех групп канонических уравнений (1), (2), (3) оно может быть приведено.

Далее, инвариантом уравнения $\sum a_{ik}x_ix_k = 0$ является сигнатура его левой части.

Сигнатурой квадратичной формы называется абсолютная величина разности между числом положительных и числом отрицательных членов в ее каноническом представлении. Инвариантность сигнатуры выражает известная в алгебре теорема об инерции квадратичных форм: канонические представления квадратичной формы, получаемые различными вещественными линейными преобразованиями, имеют одинаковую сигнатуру.

Зная, кроме ранга матрицы A, еще и сигнатуру левой части общего уравнения кривой второго порядка, мы не только можем указать, к какой из трех групп (1), (2), (3) канонических уравнений оно может быть приведено, но также — и к какому уравнению внутри соответствующей группы.

Следовательно, *ранг матрицы и сигнатура уравнения линии второго порядка составляют полную систему его инвариантов.*

Мы видим, что уравнение линии второго порядка имеет лишь два инварианта, для целочисленных значений которых имеется только пять различных комбинаций; соответственно этому имеется только пять проективно различных линий второго порядка, все остальные могут быть получены из них проективными преобразованиями.

Классификация линий второго порядка дается следующей таблицей:

Каноническая форма уравнения		Вид линии	Ранг	Сигнатура
$x_1^2 = 0$	Вырожденные линии	Пара слившихся прямых	1	1
$x_1^2 + x_2^2 = 0$		Пара мнимых прямых	2	2
$x_1^2 - x_2^2 = 0$		Пара вещественных прямых	2	0
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Невырожденные линии	Нулевая линия	3	3
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$		Овальная кривая	3	1

В отличие от линий второго порядка линии высших порядков всегда имеют континуальные инварианты и даже в классе линии третьего порядка имеется бесконечное множество проективно различных.

135. Теперь мы в немногих словах изложим главнейшие факты из теории пучков второго класса.

Общее уравнение пучка второго класса имеет вид

$$\sum a_{ik} u_i u_k = 0, \qquad (\alpha)$$

или, в более подробной записи:

$$a_{11} u_1^2 + 2a_{12} u_1 u_2 + a_{22} u_2^2 + 2a_{13} u_1 u_3 + 2a_{23} u_2 u_3 + a_{33} u_3^2 = 0;$$

здесь u_1, u_2, u_3 — текущие координаты произвольной прямой пучка. Мы будем говорить, что прямые s и t гармонически расположены относительно данного пучка второго класса (α), если пара прямых s и t гармонически сопряжена с парой прямых пучка (α), проходящих через общую точку прямых s и t.

По координатам s_i, t_i прямых s, t условие гармоничности их расположения относительно пучка (α) может быть записано в виде

$$\sum a_{ik} s_i t_k = 0. \qquad (\beta)$$

Это соотношение получается при помощи вывода, двойственного выводу соотношения (β) n° 131.

Отсюда следует, что совокупность прямых, гармонически расположенных с фиксированной прямой s относительно пучка (α), определяется уравнением

$$\sum a_{ik} s_i u_k = 0, \qquad (\gamma)$$

где u_k — текущие координаты (т. е. координаты произвольной прямой рассматриваемой совокупности).

Уравнение (γ) есть уравнение первой степени; следовательно, ***прямые, гармонически расположенные с фиксированной прямой*** s, ***составляют пучок первого класса; центр его*** S ***называется полюсом прямой*** s ***относительно данного пучка второго класса.***

Если мы введем обозначение $\sum a_{ik}s_is_k = \Phi(s_1, s_2, s_3)$, то уравнение (γ) можно будет написать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_1}u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial s_2}u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial s_3}u_3 = 0; \qquad (\delta)$$

коэффициенты, $\frac{\partial \Phi}{\partial s_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial s_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial s_3}$ уравнения (δ) суть координаты точки S.

Полюс прямой относительно пучка второго класса есть образ, двойственный поляре точки относительно линии второго порядка. Пучок второго класса (α) представляет собой семейства прямых, определяемых уравнениями

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \qquad (*)$$

коэффициенты которых u_k связаны условием

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Будем искать характеристические точки этого семейства, т. е. точки прикосновения прямых семейства с огибающей. По правилам дифференциальной геометрии характеристическая точка прямой (u_1, u_2, u_3) определяется уравнением $(*)$ при добавочном соотношении

$$x_1du_1 + x_2du_2 + x_3du_3 = 0, \qquad (**)$$

где du_1, du_2, du_3 связаны равенством

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}u_3 = 0. \qquad (***)$$

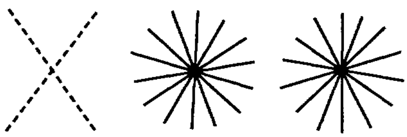
Сопоставляя равенства $(**)$ и $(***)$ и принимая во внимание, что кроме условия $(***)$ других ограничений для величин du_1, du_2, du_3 нет, можем заключить, что x_1, x_2, x_3 пропорциональны числам $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}$. Иначе говоря, $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}$ суть координаты характеристической точки прямой (u_1, u_2, u_3).

Выше, в n° 131, мы отметили, что координаты касательной в точке (p_1, p_2, p_3) линии второго порядка $\Phi(p_1, p_2, p_3) = 0$ суть числа $\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial p_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial p_3}$. Мы видим, что координаты характеристических точек пучка второго класса определяются по уравнению этого пучка точно так же, как координаты касательных прямых линии второго порядка определяются по уравнению этой линии. Это соответствует тому обстоятельству, что характеристические точки пучка суть образы, двойственные касательным линии.

Заметим еще, что выражения $\frac{\partial\Phi}{\partial s_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial s_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial s_3}$ координат полюса прямой (s_1, s_2, s_3) по форме записи не отличаются от выражений координат характеристической точки. Отсюда следует теорема, двойственная теореме 49:

Если прямая s принадлежит пучку второго класса, то полюсом ее является характеристическая точка.

Как и кривые второго порядка, пучки второго класса разделяются на вырожденные и невырожденные, вырожденные пучки характеризуются равенством $\Delta = 0$, где Δ — определитель третьего порядка, составленный из коэффициентов уравнения пучка. Геометрический смысл вырождения пучка второго класса легко установить по методу двойственности, зная геометрический смысл вырождения линии второго порядка: поскольку вырожденная линия второго порядка представляет собой совокупность точек, принадлежащих любой из двух определенных прямых (рис. 121, а), вырожденный пучок второго класса представляет собой совокупность прямых, принадлежащих любой из двух определенных точек (рис. 121,б). Иначе говоря, вырожденный пучок второго класса есть пара пучков первого класса (которые могут быть различными или слившимися, вещественными или мнимыми).



а) *б)*

Рис. 121

Что же касается невырожденных пучков второго класса, то они находятся в весьма простой связи с невырожденными кривыми второго порядка; эта связь выражается следующей теоремой.

Теорема 52. *Совокупность касательных невырожденной кривой второго порядка есть невырожденный пучок второго класса, огибающая невырожденного пучка второго класса есть невырожденная кривая второго порядка.*

Доказательство. Мы докажем первую часть этой теоремы; тогда справедливость второй части будет обеспечена принципом двойственности. Пусть

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

— уравнение кривой k второго порядка; p_1, p_2, p_3 — координаты точки ее прикосновения к прямой $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Сравнивая общее уравнение касательной

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)x_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0$$

с уравнением $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, получим равенства

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= \alpha u_1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= \alpha u_2, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= \alpha u_3, \end{aligned} \qquad (*)$$

где $\alpha(\neq 0)$ — произвольный множитель пропорциональности. Кроме того, так как точка прикосновения принадлежит касательной, то

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0. \qquad (**)$$

Если мы выразим из уравнений $(*)$ величины p_1, p_2, p_3 (возможность этого обеспечивается неравенством $\Delta \neq 0$) и подставим их выражения в соотношение $(**)$, то получим некоторую зависимость между u_1, u_2, u_3, которую можно рассматривать как условие прикосновения прямой с координатами (u_1, u_2, u_3) к данной линии k. Эту же зависимость можно получить, приравнивая нулю определитель системы, состоящей из уравнений $(*)$ и $(**)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & u_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (***)$$

Равенство $(***)$ характеризует координаты касательной, следовательно, как уравнение с текущими координатами u_1, u_2, u_3, оно определяет пучок касательных к линии k.

Мы видим, что $(***)$ есть уравнение второй степени. Значит, касательные к невырожденной линии второго порядка действительно составляют пучок второго класса.

Нужно еще доказать, что этот пучок — невырожденный.

С этой целью заметим, что при развертывании левой части уравнения $(***)$ получается квадратичная форма

$$A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3 + A_{33}u_3^2 = 0,$$

коэффициенты которой A_{ik} являются минорами элементов a матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Поэтому, если мы разделим левую часть уравнения пучка на величину Δ и положим $\dfrac{A_{ik}}{\Delta} = a_{ik}^*$, то уравнение его примет вид

$$a_{11}^*u_1^2 + 2a_{12}^*u_1u_2 + a_{22}^*u_2^2 + 2a_{13}^*u_1u_3 + 2a_{23}^*u_2u_3 + a_{33}^*u_3^2 = 0,$$

а матрица A^* этого уравнения будет обратной матрице A. Но тогда, как известно, между определителями Δ и Δ^* матриц A и A^* будет иметь место соотношение $\Delta\Delta^* = 1$, из которого следует, что $\Delta^* \neq 0$, а это и нужно было доказать.

Доказанную теорему можно выразить еще такими словами: *для каждого невырожденного образа второй степени класс и порядок совпадают* $(= 2)$.

По отношению к образам высших степеней такое утверждение неверно.

Так как невырожденные кривые второго порядка имеют также второй класс, то через каждую точку плоскости к кривой второго порядка можно провести две касательные прямые (различные или кратные, вещественные или мнимые).

136. Изложенные нами для случая двумерной геометрии методы исследования образов второй степени, естественно, обобщаются на трехмерный случай и приводят к аналогичным результатам. Именно, в проективном пространстве, как и на проективной плоскости, образы второй степени исчерпывающим образом характеризуются целочисленными значениями лишь двух инвариантов: ранга главной матрицы и сигнатуры левой части уравнения.

В проективном пространстве имеется лишь конечное число проективно различных поверхностей второго порядка и связок второго класса, из которых все остальные могут быть получены проективными преобразованиями.

Например, каждая поверхность второго порядка в зависимости от ранга и сигнатуры своего уравнения

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

может быть проективно преобразована в одну из поверхностей, представленных следующей таблицей:

Ранг= 1	Сигнатура	Ранг= 2	Сигнатура	Ранг= 3	Сигнатура	Ранг= 4	Сигнатура
$x_1^2 = 0$	1	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$	4
		$x_1^2 - x_2^2 = 0$	0	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	1	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$	2
						$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$	0

Уравнение $x_1^2 = 0$ определяет дважды взятую плоскость $x_1 = 0$. Каждое из уравнений $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ определяет пару плоскостей, причем уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 0$ определяет пару мнимых плоскостей $x_l + ix_2 = 0$ и $x_l - ix_2 = 0$, а уравнение $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — пару вещественных плоскостей $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$.

Каждое из уравнений $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$, $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ определяет конус с вершиной в точке $A_4(0,0,0,1)$, т. е. поверхность, состоящую из прямых, которые проходят через точку $A_4(0,0,0,1)$. Действительно, если некоторая точка $M_0(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$ лежит, например, на поверхности $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$, то выполнено $x_1^{02}+x_2^{02}-x_3^{02}=0$; но тогда для координат $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4$ любой точки $\overline{M}$ прямой A_4M_0 выполняется соотношение $\bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2-\bar{x}_3^2=0$, в чем легко убедиться, выразив координаты $\bar{x}_i$ параметрически:

$$\bar{x}_1=0+\lambda x_1^0=\lambda x_1^0, \qquad \bar{x}_3=0+\lambda x_3^0=\lambda x_3^0,$$
$$\bar{x}_2=0+\lambda x_2^0=\lambda x_2^0, \qquad \bar{x}_4=1+\lambda x_4^0.$$

Действительно, из этих соотношений имеем:

$$\bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2-\bar{x}_3^2=\lambda^2\left(x_1^{02}+x_2^{02}-x_3^{02}\right)=0.$$

Таким образом, каждая точка $\overline{M}$ прямой A_4M_0 принадлежит поверхности $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$, т. е. прямая, соединяющая точку A_4 с любой точкой поверхности, целиком лежит на этой поверхности, а это обстоятельство и характеризует конус с вершиной A_4. Очевидно, конус $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ не имеет вещественных образующих; он называется *нулевым*. Конус $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ — обладает бесконечным множеством вещественных образующих и называется *обыкновенным*.

Все перечисленные поверхности называются *вырожденными*; признаком вырожденной поверхности является обращение в нуль определителя матрицы ее уравнения.

Невырожденные поверхности второго порядка представлены в последней графе приведенной выше таблицы.

Первая из них не содержит ни одной вещественной точки и называется *нулевой*.

Вторую называют *овальной*; она топологически эквивалентна евклидовой сфере. Чтобы убедиться в этом, следует заметить, что для всех точек поверхности $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$ необходимо $x_4\neq 0$, поэтому их можно определять неоднородными координатами $x=\dfrac{x_1}{x_4}$, $y=\dfrac{x_2}{x_4}$, $z=\dfrac{x_3}{x_4}$; но в неоднородных координатах уравнение рассматриваемой поверхности имеет вид $x^2+y^2+z^2=1$ и не отличается от уравнения евклидовой сферы.

Третью поверхность называют *кольцевой*; она топологически эквивалентна тору. Это легко понять, если заметить, что поверхность $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ покрыта прямыми линиями. В самом деле, два уравнения первой степени

$$\begin{aligned} \mu(x_1+x_3)&=\lambda(x_2+x_4),\\ -\lambda(x_1-x_3)&=\mu(x_2-x_4) \end{aligned} \tag{$*$}$$

при любых λ и μ (не равных одновременно нулю) определяют прямую, лежащую на рассматриваемой поверхности, так как уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ является следствием уравнений (*); далее, через каждую точку поверхности проходит одна и только одна прямая из системы (*), так как для любых $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$, удовлетворяющих условию $x_1^{02} + x_2^{02} - x_3^{02} - x_4^{02} = 0$, можно найти одно и только одно отношение $\lambda_0 : \mu_0$ такое, что

$$\mu_0 \left(x_1^0 + x_3^0\right) = \lambda \left(x_2^0 + x_4^0\right),$$
$$-\lambda_0 \left(x_1^0 - x_3^0\right) = \mu_0 \left(x_2^0 - x_4^0\right).$$

Следовательно, при $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ прямая (*) проходит через назначенную точку $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$. Таким образом, действительные прямые (*) однократно и сплошь покрывают поверхность. Но система этих прямых образует замкнутую "трубку", так как, с одной стороны, проективная прямая замкнута, а с другой, прямые системы (*) проходят через овальную кривую, а именно: сечение поверхности $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ плоскостью $x_4 = 0$.

Кроме системы (*), данную поверхность покрывает еще система прямых, определяемых уравнениями

$$\begin{aligned} \mu(x_1 + x_3) &= \lambda(x_2 - x_4), \\ -\lambda(x_1 - x_3) &= \mu(x_2 + x_4). \end{aligned} \qquad (**)$$

Прямые (*) и (**) называются *прямолинейными образующими* поверхности.

Заметим, что хорошо знакомая читателю поверхность евклидова пространства — однополостный гиперболоид — при дополнении евклидова пространства бесконечно удаленными элементами превращается в кольцевую поверхность проективного пространства.

§ 14. Конструктивные теоремы и задачи проективной геометрии

137. В этом разделе мы познакомим читателя с некоторыми элементарными теоремами проективной геометрии, относящимися к линиям второго порядка. Они находят себе многочисленные приложения в евклидовых задачах на построение.

У читателя может возникнуть вопрос, имеем ли мы право применять теоремы проективной геометрии к исследованию фигур евклидовой плоскости? Чтобы убедиться в возможности такого применения, достаточно вспомнить, что евклидова плоскость превращается в проективную при помощи добавления бесконечно удаленных элементов. Таким образом, каждый проективный факт можно интерпретировать на плоскости Евклида, если мыслить ее дополненной бесконечно удаленной прямой.

В качестве примера рассмотрим с точки зрения элементарной геометрии сложное отношение четырех точек прямой и сложное отношение четырех лучей пучка.

Пусть A, B, C, D — какие-либо четыре точки евклидовой прямой a. Введем на евклидовой плоскости, содержащей прямую a, некоторую систему декартовых координат. Ось x для удобства совместим с прямой a; абсциссы точек A, B, C, D обозначим через x_a, x_b, x_c, x_d. Заметим, что декартова система на евклидовой плоскости является вместе с тем проективной системой, так как в декартовых координатах все прямые имеют уравнения первой степени. Поэтому

$$(ABCD) = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} : \frac{x_d - x_a}{x_b - x_d}$$

(см. n° 115). Но в декартовых координатах $x_c - x_a = AC$, $x_b - x_c = CB$, $x_d - x_a = AD$, $x_b - x_d = DB$, где AC, CB, AD и DB обозначают взятые с соответствующими знаками длины отрезков с концами A и C, C и B и т. д. Следовательно,

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}. \qquad (*)$$

Сложное отношение четырех лучей a, b, c, d, проходящих через одну точку O, в элементарной геометрии может быть определено формулой

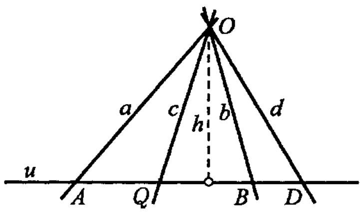


Рис. 122

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}, \qquad (**)$$

где (ac), (cb) и т. д. обозначают взятые с соответствующими знаками углы между лучами a и c, c и b и т. д.*)

Чтобы убедиться в справедливости формулы $(**)$, пересечем лучи a, b, c, d прямою u и обозначим через A, B, C, D точки пересечения, через h — длину перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую u (рис. 122). Выражая двумя способами площадь треугольника OAC,

---

*)Именно, выберем направление положительных поворотов вокруг точки O и на каждой прямой a, b, c, d введем положительное направление. Тогда под (ab), например, будем подразумевать величину угла, который составляет положительное направление прямой b с положительным направлением прямой a; эту величину будем считать положительной, если внутри указанного угла переход от a к b совершается в положительном направлении вокруг O, и отрицательной — в противном случае. Можно показать, что правая часть равенства $(**)$ не зависит от того, как выбираются положительные повороты вокруг O и какое направление на каждой из прямых a, b, c, d выбрано в качестве положительного.

мы получим:

$$\frac{1}{2}AC \cdot h = \frac{1}{2}OA \cdot OC \cdot \sin(ac).$$

Аналогично из треугольника OCB

$$\frac{1}{2}CB \cdot h = \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin(cb).$$

Отсюда

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}. \tag{1}$$

Точно так же, рассматривая треугольники OAO и ODB, найдем:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) имеем:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}.$$

После этого ясно, что формула (**) верна, так как сложное отношение $(abcd)$ по определению есть число, равное $(ABCD)$ (см. n° 116).

Мы показали сейчас примеры метрической интерпретации проективных объектов. В свою очередь, предложения элементарной геометрии, даже имеющие метрический характер, допускают проективную интерпретацию и часто представляются в новом свете, если их рассматривать с проективной точки зрения.

Например, теорема элементарной геометрии: прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения непараллельных сторон, делит параллельные стороны трапеции пополам — имеет весьма прозрачный проективный смысл, именно: середина отрезка вместе с бесконечно удаленной точкой гармонически разделяет пару его концов. В самом деле, рассматривая трапецию, изображенную на рис. 123, легко признать в ней полный четырехвершинник с одной бесконечно удаленной диагональной точкой; из гармонических свойств этого четырехвершинника следует, что пара точек A, B гармонически разделяется парой точек O, ∞. Иначе можно сказать: евклидов центр отрезка совпадает с его проективным центром.

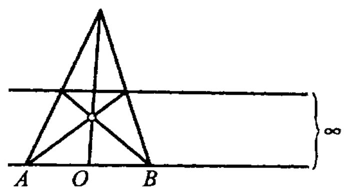


Рис. 123

Как было замечено немного выше, каждая декартова система координат на евклидовой плоскости является вместе с тем проективной системой. Отсюда следует, что линии второго порядка, изучаемые в аналитической геометрии, суть те же самые объекты, о которых у нас шла речь в предыдущих разделах, вернее сказать, становятся таковыми после дополнения евклидовой плоскости бесконечно удаленными элементами. В самом деле, если, исходя из декартовых координат x, y, мы введем однородные координаты x_1, x_2, x_3, полагая $x = \dfrac{x_1}{x_3}, y = \dfrac{x_2}{x_3}$, то общее уравнение кривой второго порядка в декартовых координатах

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

примет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

и совпадет с тем, какое мы изучали выше.

Ниже приводится ряд предложений и задач, все их можно рассматривать как предложения и задачи элементарной геометрии.

138. Этот параграф в данном разделе занимает совершенно изолированное положение и не связан с остальным материалом раздела. Здесь сообщаются предложения вспомогательного характера, которые будут использованы значительно позднее (в гл. IX).

Рассмотрим в евклидовой плоскости с заданной на ней системой декартовых координат какой нибудь круг k. Пусть дано взаимно однозначное отображение внутренней области круга k на себя, обозначим это отображение символом φ. Предположим, что φ отображает точки, лежащие на одной прямой, в точки, также лежащие на одной прямой, а точки, не лежащие на одной прямой, в точки, также не лежащие на одной прямой. Иначе говоря, мы предполагаем, что отображение φ каждую хорду круга k переводит снова в хорду, и разные хорды переводит в разные хорды.

При этих условиях для отображения φ координаты образа выражаются через координаты прообраза формулами

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$
$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \qquad (1)$$

где $a_1, b_1, \ldots, \gamma$ — некоторые постоянные, удовлетворяющие неравенству

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть P — произвольная точка, лежащая внутри k; a, b, c, d — четыре хорды, проходящие через P. Предположим, что a, b гармонически разделяют c, d. Тогда можно построить четырехвершинник G, вершины которого находятся на хордах a, b, а диагональные точки — на хордах c, d. При отображении φ точка P перейдет в некоторую точку P', хорды a, b, c, d перейдут в некоторые хорды a', b', c', d'. Четырехвершинник G перейдет в четырехвершинник G', у которого вершины будут находиться на хордах a', b', а диагональные точки — на хордах c', d'.

Значит, хорды a', b' гармонически разделяют хорды c', d'. Мы видим, что при отображении φ каждая гармоническая четверка хорд имеет образом также гармоническую четверку хорд. Следовательно, каждый пучок хорд отображается на соответствующей ему пучок хорд проективно.

Выберем внутри k четыре точки A, B, C, D так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Пусть A', B', C', D' — образы этих точек; в силу условий, наложенных на отображение φ, среди точек A', B', C', D' никакие три не лежат на одной прямой.

Согласно теореме 37 существует проективное отображение всей плоскости (дополненной бесконечно удаленными точками) на себя, которое переводит точки A, B, C, D в точки A', B', C', D'. Обозначим это отображение через ψ. Докажем, что внутри круга k отображения φ и ψ совпадают, т. е. что для любой точки, лежащей внутри k, образ относительно φ совпадает с образом относительно ψ.

Возьмем внутри круга k произвольную точку M и обозначим ее образы относительно φ и ψ через M' и M''. Как отображение φ, так и отображение ψ проективно отображают пучок хорд с центром A на пучок хорд с центром A', причем в первом случае хорда AM отображается на хорду $A'M'$, во втором — на хорду $A'M''$. И в том и в другом случае тройка различных хорд AB, AC, AD пучка с центром A отображается в одну и ту же тройку различных хорд $A'B', A'C', A'D'$ пучка с центром A'; но по теореме 18 проективное отображение пучков однозначно определяется заданием трех пар соответствующих элементов. Следовательно, хорда $A'M'$ должна совпасть с хордой $A'M''$, т. е. точки M' и M'' должны лежать на одной прямой с точкой A'. Аналогичными рассуждениями установим, что точки M' и M'' должны лежать на одной прямой с точкой B' и на одной прямой с точкой C'. Так как A', B', C' не лежат на одной прямой, то из предыдущих заключений следует, что M' и M'' совпадают. Итак, внутри круга k отображение φ совпадает с некоторым проективным отображением данной плоскости (дополненной бесконечно удаленными элементами) на себя. Согласно n° 112 декартовы координаты образа и прообраза любого проективного отображения связаны формулами вида (1) при условии (2). Тем самым наше утверждение доказано.

Из приведенного доказательства вытекает также следующее предложение.

13 — 10891

Пусть M_1M_2 — две произвольные точки внутри круга k; M'_1, M'_2 — их образы относительно φ , пусть P, Q и P', Q' — точки, в которых прямые M_1M_2 и $M'_1M'_2$ пересекают окружность k, обозначенные так, что порядок следования точек P, Q, M_1, M_2 на прямой M_1M_2 подобен порядку следования точек P', Q', M'_1, M'_2 на прямой $M'_1M'_2$. Тогда

$$(P'Q'M'_1M'_2) = (PQM_1M_2)\,. \tag{3}$$

В самом деле, при указанных условиях точки P', Q', M'_1, M'_2 являются образами точек P, Q, M_1, M_2 относительно отображения ψ. А так как отображение ψ проективно, то сложное отношение точек PQM_1M_2 равно сложному отношению их образов $P'Q'M'_1M'_2$.

139. Признак перспективного соответствия. Далее мы будем иметь дело только с проективными соответствиями между двумя прямыми и между двумя пучками; все изучаемые объекты будут предполагаться принадлежащими одной плоскости. Особое значение для нас сейчас будут иметь так называемые *перспективные соответствия*. Соответствие между точками двух прямых называется перспективным, если прямые, соединяющие соответствующие точки, проходят через одну точку плоскости (называемую *центром перспективы*; рис. 124).

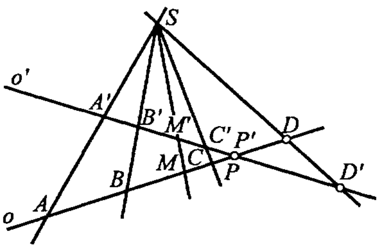


Рис. 124

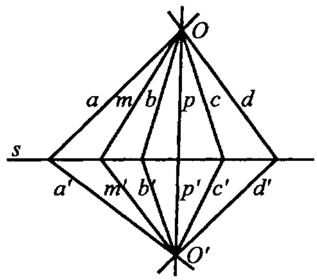


Рис. 125

Соответствие между лучами двух пучков называется *перспективным*, если точки пересечения соответствующих лучей лежат на одной прямой (называемой *осью перспективы*; рис. 125).

Очевидно, каждое перспективное соответствие является проективным (вследствие теоремы 6 n° 86; см. также n° 103). Однако далеко не каждое проективное соответствие является перспективным.

Следующие две теоремы дают полезный признак, выделяющий перспективные соответствия среди всех проективных.

Теорема 53. *Для того чтобы проективное соответствие между точками двух прямых было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы точке пересечения этих прямых, рассматриваемой в качестве элемента одной из них, на другой прямой соответствовала эта же самая точка.*

Теорема 54. *Для того чтобы проективное соответствие между лучами двух пучков было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы общему лучу этих пучков, рассматриваемому в качестве элемента одного из них, в другом пучке соответствовал этот же самый луч.*

Из этих двух теорем достаточно доказать одну: тогда справедливость другой будет обеспечена принципом двойственности.

Приведем доказательство теоремы 53.

Доказательство необходимости усматривается непосредственно: в самом деле, если между прямыми o и o' установлено перспективное соответствие с центром перспективы S, то пары соответствующих точек определяются пересечением прямых o и o' с лучами, исходящими из S; но луч, проходящий через общую точку прямых o и o', очевидно, определяет пару соответствующих точек P, P', которые сливаются друг с другом (рис. 124).

Доказательство достаточности. Пусть между точками прямых o и o' установлено проективное соответствие так, что точке P прямой o, в которой пересекаются прямые o и o', соответствует на прямой o' точка P', совпадающая с точкой P.

Возьмем на прямой o две точки A и B, на прямой o' — соответствующие им точки A' и B', и обозначим через S точку пересечения прямых AA', BB'. Далее, обозначим через M произвольную точку прямой o, через $M' = f(M)$ — точку, отвечающую ей в данном соответствии, и через $M^* = \varphi(M)$ — точку, в которой луч SM пересекает прямую o'. Соответствие $M^* = \varphi(M)$ по построению является перспективным (с центром перспективы S), следовательно, и проективным; кроме того, очевидно, в соответствии $M^* = \varphi(M)$ точкам A, B, P отвечают точки A', B', P'. Таким образом, мы имеем проективные соответствия $M' = f(M)$ и $M^* = \varphi(M)$ с тремя общими парами соответствующих точек A, A', B, B' и P, P'. По теореме 15 эти соответствия не могут быть различными, т. е. $M' = M^*$. Отсюда следует, что данное соответствие $M' = f(M)$ является перспективным с центром перспективы S. Теорема доказана.

140. Графическое построение проективных соответствий по данным трем парам соответствующих элементов. Пусть на прямой o даны три точки A, B, C, а на другой прямой o' — три точки A', B', C'. Мы знаем, что существует единственное проективное отображение $M' = f(M)$ прямой o на прямую o', переводящее точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'. Наша цель сейчас — указать графический способ построения для каждой точки M прямой o соответствующей точки $M' = f(M)$ прямой o'. С этой целью соединим прямою какие-нибудь две соответствующие точки из числа данных, например, B и B', и возьмем на соединяющей прямой точки S и S' (рис. 126). Далее установим между лучами пучков с центрами S и S' соответствие, назначая в качестве соответствующего лучу SM пучка S луч $S'M'$ пучка S'. Так как соответствие $M' = f(M)$ — проективное, то и установленное нами соответствие между лучами пучков S и S' будет проективным. Но оно будет, сверх того, и перспективным, так как лучу SB пучка S соответствует совпадающий с ним луч $S'B'$ пучка S' (см. теорему 54). Следовательно, все соответствующие лучи пучков S и S' пересекаются на одной прямой, каковой является ось перспективы. Отсюда имеем требуемое построение: после выбора точек S и S' проводим лучи $SA, S'A', SC, S'C'$ и строим прямую A^*C^*, как показано на рис. 126. Это и будет ось перспективы пучков S и S'.

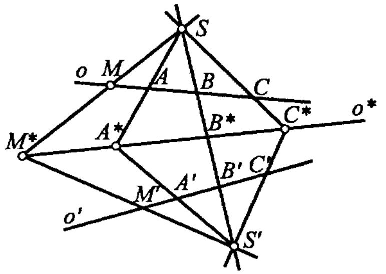


Рис. 126

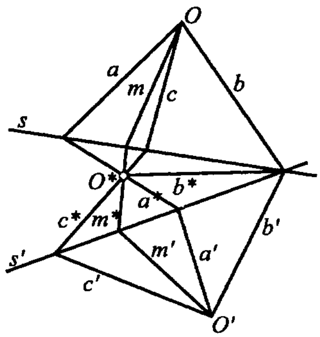


Рис. 127

Чтобы построить на прямой o' точку M', соответствующую точке M прямой o, достаточно провести луч SM и точку M^*, в которой он встретит прямую A^*C^*, соединить с точкой S'; прямая $S'M^*$ пересечет прямую o' в искомой точке $M' = f(M)$.

Построение проективно соответствующих лучей двух пучков является двойственным к описанному сейчас построению. Мы изложим его без подробных объяснений.

Пусть O и O' — центры двух пучков, между лучами которых установлено проективное соответствие и требуется по данному произвольному лучу m пучка O построить соответствующий луч $m' = f(m)$ пучка O', зная три луча a, b, c пучка O и три соответствующих им луча a', b', c' пучка O'. Для этого следует через точку пересечения каких-либо соответствующих лучей из числа данных, например, через точку пересечения лучей b и b', провести произвольно две прямые s и s' (рис. 127), далее, точку пересечения прямых a, s нужно соединить прямой с точкой пересечения прямых a', s' и точку пересечения прямых c, s соединить прямой с точкой пересечения прямых c', s'; проведенные таким образом прямые определят своим пересечением точку O^*. После этого построение луча $m' = f(m)$ проводится, как показано на рис. 127: точка пересечения луча m с прямой s соединяется с точкой O^*, и определяется точка пересечения соединяющей прямой с прямой s'; луч, идущий из O' в эту точку, и будет искомым лучом $m' = f(m)$.

Заметим, что соответствие между элементами одномерных многообразий, устанавливаемое при помощи некоторой последовательности операций проектирования и сечения, всегда является проективным (так как эти операции переводят гармонические группы элементов в гармонические же группы элементов). На основании изложенного в этом параграфе мы можем утверждать, что каким бы ни было проективное соответствие между элементами одномерных многообразий, оно всегда может быть получено как результат некоторой последовательности операций проектирования и сечения.

141. Проективное построение образов второй степени (теоремы Штейнера). Проективное соответствие между образами первой степени может быть использовано для построения образов второй степени. Метод такого построения содержится в нижеприводимых теоремах Штейнера.

Теорема 55. *Совокупность точек пересечения проективно соответствующих лучей двух пучков есть линия второго порядка, проходящая через центры этих пучков.*

Доказательство. Введем на плоскости какую-либо систему проективных координат, которые в данном случае удобно взять неоднородными. Пусть $S_1(x_1, y_1)$ и $S_2(x_2, y_2)$ — центры двух пучков, между лучами которых установлено некоторое проективное соответствие. Если

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{1}$$

— уравнение произвольного луча первого пучка,

$$y - y_2 = k'(x - x_2) \tag{2}$$

— уравнение соответствующего луча второго, то, как нам известно, параметр k' является дробно-линейной функцией параметра k:

$$k' = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{3}$$

(см. n° 119). Чтобы получить уравнение линии, описываемой при изменении k точкой пересечения лучей (1) и (2), нужно исключить параметры k и k' из уравнений (1), (2) и (3). Результат исключения имеет вид

$$\gamma(y - y_1)(y - y_2) + \delta(y - y_2)(x - x_1) - \\ - \alpha(y - y_1)(x - x_2) - \beta(x - x_1)(x - x_2) = 0 \tag{*}$$

и является, очевидно, уравнением второй степени относительно x, y.

Таким образом, действительно, общие точки соответствующих лучей пучков S_1 и S_2 составляют линию второго порядка. То, что эта линия проходит через S_1 и S_2, усматривается сразу; в самом деле, как значения $x = x_1$, $y = y_1$, так и значения $x = x_2$, $y = y_2$ удовлетворяют уравнению (*), значит, точки S_1 и S_2 принадлежат кривой. Впрочем, то, что точки S_1 и S_2 принадлежат к множеству точек пересечения соответствующих лучей пучков S_1 и S_2, ясно без всяких вычислений; например, точка S_2 принадлежит к этому множеству, так как луч S_1S_2 пучка пересекает в точке S_2 все лучи второго пучка, в том числе и соответствующий себе.

Заметим, попутно, что *общему лучу* S_1S_2 *пучков* S_1 *и* S_2, *если его отнести к первому пучку, во втором пучке соответствует луч, касающийся в точке* S_2 *линии второго порядка, образованной проективно соответствующими лучами пучков* S_1 *и* S_2; *а если луч* S_1S_2 *отнести ко второму пучку, то в первом пучке ему будет соответствовать луч* t_1, *касающийся этой линии в точке* S_1.

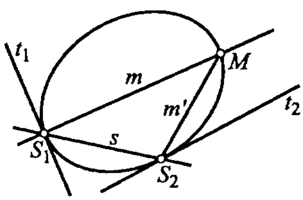


Рис. 128

В самом деле, пусть M — точка пересечения двух соответствующих лучей m и m', s — общий луч пучков S_1 и S_2, t_2 — касательная в точке S_2 (рис. 128). Предположим, что точка M стремится по кривой к S_2; тогда m стремится к s, m' — к t_2. Но проективное соответствие непрерывно (это следует из его аналитического представления). Поэтому предельные положения соответствующих лучей $s = \lim_{M\to S_2} m$ и $t_2 = \lim_{M\to S_2} m'$ являются соответствующими лучами, т. е. лучу s, как лучу первого пучка, во втором пучке соответствует луч t_2. Аналогично доказывается, что лучу s, как лучу второго пучка, в первом пучке соответствует луч t_1.

Уместно поставить вопрос: всякую ли линию второго порядка можно образовать при помощи двух проективных пучков, т. е. пучков, между лучами которых установлено проективное соответствие? Естественно, что при помощи проективных пучков с вещественными лучами можно построить лишь такие линии второго порядка, которые обладают бесконечным множеством вещественных точек. Следовательно, не могут быть построены: вырожденная линия второго порядка, составленная из двух мнимых прямых, и невырожденная нулевая линия (это и понятно, так как, коль скоро мы остаемся в пределах наглядно геометрических конструкций, образы, составленные из мнимых элементов, выпадают из поля нашего зрения).

Что же касается остальных линий второго порядка: дважды взятой вещественной прямой, пары различных вещественных прямых и овальной линии (см. n° 134), то все они могут быть построены вышеописанным способом:

1) Дважды взятая вещественная прямая представляет собой геометрическое место общих точек соответствующих лучей проективных пучков, если центры этих пучков совпадают и если луч одного из пучков, совпадающий с соответствующим лучом другого,

оказывается кратным. Например, пучки

$$y = kx, \quad y = k'x \tag{$*$}$$

с общим центром $(0, 0)$, между лучами которых установлено соответствие

$$k' = \frac{k}{1+k}, \tag{$**$}$$

имеют в качестве множества общих точек соответствующих лучей дважды взятую координатную ось, так как при исключении параметров k, k' из уравнений $(*)$ и $(**)$ получается $y^2 = 0$.

2) Пара различных вещественных прямых образуется пересечением соответственных лучей двух пучков, находящихся в перспективном соответствии. При этом ось перспективы является одной прямой пары, общий луч пучков — другой.

3) Овальная линия образуется пересечением соответствующих лучей двух пучков в том случае, когда между этими пучками установлено проективное, но не перспективное, соответствие: действительно, в этом случае общие точки соответствующих лучей не располагаются на прямых линиях.*)

Из теоремы 55 по принципу двойственности следует

Теорема 56. *Совокупность прямых, соединяющих соответствующие точки двух фиксированных прямых, находящихся в проективном соответствии, есть пучок второго класса, содержащий эти две прямые.*

Если фиксированные прямые s_1 и s_2 находятся в перспективном соответствии, то пучок второго класса, рассматриваемый в теореме 56, вырождается в пару пучков первого класса; один из них будет иметь своим центром центр перспективы данного соответствия, другой — общую точку прямых s_1 и s_2.

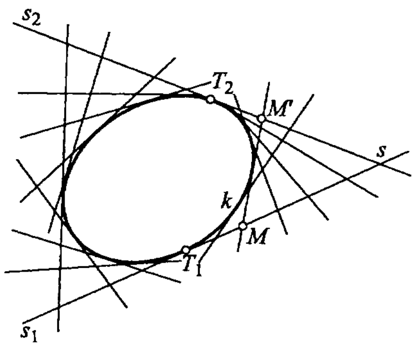


Рис. 129

Если прямые s_1 и s_2 находятся в проективном, но не в перспективном соответствии, то пучок второго класса, определяемый, как указано в теореме 56, является невырожденным. По теореме 52 этот пучок имеет огибающую, которая представляет собой невырожденную линию второго порядка. А поскольку пучок содержит прямые s_1 и s_2, огибающая его линия второго порядка касается этих прямых.

*) Напомним читателю, что все овальные линии второго порядка проективно эквивалентны.

На рис. 129 изображен невырожденный пучок второго класса, порождаемый проективным соответствием между прямыми s_1 и s_2, и изображена также огибающая этот пучок линия второго порядка k; буквами T_1, T_2 обозначены точки прикосновения линии k с прямыми s_1 и s_2, буквами M, M' — две произвольные соответствующие друг другу точки. Из чертежа можно усмотреть, что если точка M стремится к S, то M' стремится к T_2.

Таким образом, *если общую точку прямых s_1, s_2 мы отнесем к одной из этих прямых, то на другой ей будет соответствовать точка прикосновения с линией k* (т. е. характеристическая точка пучка второго класса).

Это предложение, очевидно, является двойственным к установленному выше предложению о касательных к кривой второго порядка с точками прикосновения в центрах образующих эту кривую проективных пучков (двойственное сопоставление касательных к кривой и характеристических точек пучка отмечено в конце $n°$ 127).

142. Обратные теоремы Штейнера. В предыдущем параграфе мы показали, что каждая линия второго порядка может быть определена как геометрическое место общих точек соответствующих лучей двух проективных пучков, и что она проходит через центры этих пучков.

Следующая теорема устанавливает, что центры проективных пучков, образующих линию второго порядка, являются рядовыми ее точками.

Теорема 57. *Пусть k — невырожденная линия второго порядка, P и P' — две произвольные ее точки. Если с каждым лучом m пучка P сопоставлен луч $m' = f(m)$ пучка P', пересекающий луч m на линии k, то соответствие $m' = f(m)$ — проективное.*

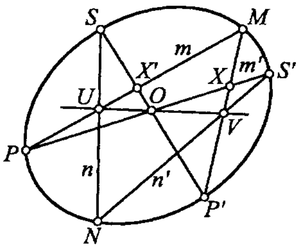


Рис. 130

Замечание. По отношению к вырожденным линиям эта теорема верна лишь при некоторых ограничениях на расположение точек P и P'; именно, если линия k представляет собой пару прямых, то обе точки должны находиться на одной из них. В противном случае соответствие $m' = f(m)$ не будет взаимно однозначным.

Доказательство. Мы знаем, что линия k может быть образована при помощи двух проективных пучков; пусть S и S' — центры проективных пучков, образующих линию k (рис. 130). Зафиксируем на линии некоторую точку M и обозначим через N переменную точку линии, через n и n' — лучи SN и $S'N$; по условию выбора точек S, S' соответствие $n' = \varphi(n)$ — проективное. Пусть, далее, U — точка пересечения прямой

PM с лучом n, V — точка пересечения прямой $P'M$ с лучом n'*). Так как соответствие $n' = \varphi(n)$ — проективное, то соответствие, по которому точке U прямой PM относится точка V прямой $P'M$, будет проективным соответствием между точками прямых PM и $P'M$. Но, более того, это соответствие является перспективным; в самом деле, если точка U, перемещаясь по прямой PM, совпадет с точкой M, то и соответствующая ей точка V одновременно совместится с точкой M, а это обстоятельство согласно теореме 53 и обеспечивает перспективный характер соответствия $U \sim V$. Найдем центр перспективы этого соответствия. С этой целью заметим, что если точка N совпадает с точкой P, то и точка U совпадает с P, а соответствующим положением точки V будет точка X, находящаяся на пересечении прямых $P'M$ и PS'. Таким образом, точки P и X соответствуют друг другу; следовательно, центр перспективы находится на прямой PX, или, что то же самое, на прямой PS'; аналогично рассуждая, убедимся, что центр перспективы расположен на прямой $P'S$. На рис. 130 он обозначен буквой O. Итак, прямая UV всегда проходит через точку O.

Зафиксируем теперь точку N, а точку M вообразим переменной. Будем рассматривать соответствие $m' = f(m)$ лучей, направленных из точек P и P' в точку M, вместе с ним соответствие $V = \Phi(U)$ между точками прямых SN и $S'N$ (эти прямые теперь неподвижны); здесь соответствующие точки U, V определяются пересечением прямых SN и $S'N$ с соответствующими лучами m, m' пучков P, P'. По предыдущему прямая UV всегда проходит через точку O (которая не меняется при изменении M); отсюда следует, что соответствие $V = \Phi(U)$ — перспективное, а поэтому соответствие $m' = f(m)$ является проективным (так как оно устанавливается при помощи некоторой последовательности операций проектирования и сечения). Теорема доказана.

На основании принципа двойственности**) из этой теоремы вытекает

Теорема 58. *Пусть k — невырожденная линия второго порядка, t и t' — две ее касательные; если с каждой точкой M прямой t сопоставлена точка $M' = f(M)$ прямой t так, что прямая MM' касается линии k, то соответствие $M' = f(M)$ — проективное.*

Из теорем 57 и 58 и из теоремы 46 вытекают, между прочим, следующие два предложения, двойственные друг другу:

1) *Если M и M' — любые две точки линии второго порядка, a, b, c, d и a', b', c', d' — лучи, идущие из этих точек к произвольным точкам A, B, C, D этой линии* (рис. 131), *то имеет место равенство сложных отношений*

*) Точки P и P' по условию теоремы суть произвольно заданные точки на кривой.

**) Применение его в данном случае обеспечено теоремой 52.

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

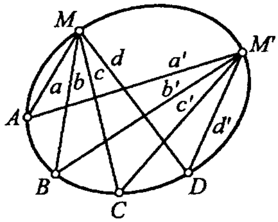


Рис. 131

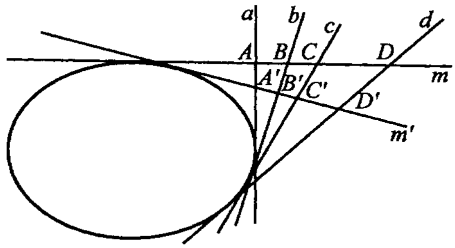


Рис. 132

2) *Если m и m' — любые две касательные к линии второго порядка A, B, C, D и A', B', C', D' — точки на прямых m и m', определяемые пересечением с четырьмя произвольными касательными a, b, c, d* (рис. 132), *то имеет место равенство сложных отношений.*

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

143. Построение линии второго порядка по данным пяти ее элементам. Полученные в предыдущем параграфе результаты позволяют утверждать ряд приводимых ниже предложений.

1) *Пять точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, всегда определяют единственную проходящую через них невырожденную линию второго порядка.*

В самом деле, пусть даны на плоскости пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим какие-нибудь две из них буквами S, S', три другие — буквами A, B, C. Проведем, далее, из точек S и S' лучи a, b, c и a', b', c' в точки A, B, C и установим между лучами пучков с центрами S и S' проективное соответствие так, чтобы лучам a, b, c отвечали лучи a', b', c'. Тогда геометрическое место точек пересечения соответствующих лучей пучков S и S' будет линией второго порядка, проходящей через данные точки; другой линии быть не может, так как проективное соответствие однозначно определяется заданием трех пар соответствующих элементов.

В $n°$ 140 мы изложили способ построения соответствующих пар лучей двух проективных пучков; применяя его в данном случае, можно построить, зная пять точек линии второго порядка, как угодно много других ее точек.

Между прочим, рис. 130 представляет схему прибора для вычерчивания линии второго порядка; в самом деле, вообразим, что по данным пяти точкам S, P, N, P', S' установлены неподвижные стержни $P'S, SN, NS'$ и $S'P$, с которыми соединены при помощи скользящих шарниров в точках U, V и неподвижных шарниров в точках P, O, P' подвижные стержни $PM, P'M$ и UV. Тогда, если стержень UV вращается вокруг точки O, то связанные с ним стержни PM и $P'M$

вращаются так, что точка их пересечения M вычерчивает линию второго порядка, проходящую через данные точки S, P, N, P', S'.

2) *Четыре точки плоскости, никакие три из которых не находятся на одной прямой, и прямая, проходящая через одну из них, определяют единственную линию второго порядка, проходящую через эти точки и касающуюся данной прямой.*

В самом деле, обозначим данные элементы так, как показано на рис. 133, и установим между лучами пучков S и S' проективное соответствие по трем парам соответствующих лучей a, a'; b, b'; c, c'. Тогда однозначно определенное геометрическое место точек пересечения соответствующих лучей пучков S и S' будет линией второго порядка, проходящей через точки A, B, S, S' и касающейся прямой c' (см. n° 141).

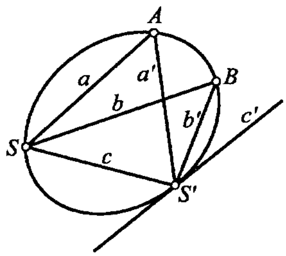


Рис. 133

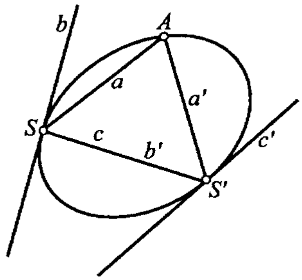


Рис. 134

3) *Три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, и две прямые, из которых одна проходит через одну из трех данных точек, а другая — через одну из двух других, определяют единственную линию второго порядка, проходящую через эти три точки и касающуюся данных прямых.*

В самом деле, обозначим данные элементы так, как показано на рис. 134, и установим между лучами пучков S и S' проективное соответствие по трем парам соответствующих лучей a, a'; b, b'; c, c'. Тогда геометрическое место точек пересечения соответствующих лучей пучков S и S' будет линией второго порядка, проходящей через точки S, A, S' и касающейся прямых b и c'.

На основании принципа двойственности из доказанных здесь предложений следует, что невырожденная линия второго порядка, как огибающая пучка второго класса, однозначно определяется заданием пяти своих элементов в одной из следующих комбинаций:

1) данные элементы — пять касательных;

2) данные элементы — четыре касательных и точка прикосновения на одной из них;

3) данные элементы — три касательных и точки прикосновения на двух из них.

144. Теоремы Паскаля и Брианшона. Теперь мы остановимся на двух предложениях проективной геометрии, которые известны под названием теорем Паскаля и Брианшона.

Теорема 59 (теорема Паскаля). *Каким бы ни был шестивершинник, вписанный в линию второго порядка, точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой* (рис. 135).

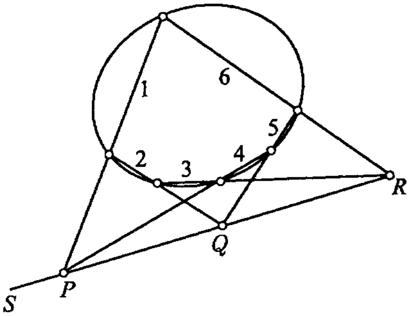


Рис. 135

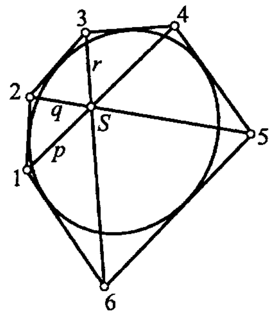


Рис. 136

Теорема 60 (теорема Брианшона). *Каким бы ни был шестивершинник, описанный вокруг линии второго порядка, прямые, соединяющие его противоположные вершины, проходят через одну точку* (рис. 136).

Эти две теоремы, очевидно, двойственны друг другу; поэтому достаточно доказать одну из них.

Внимательный анализ предыдущего материала обнаруживает, что теорема Паскаля является лишь перефразировкой теоремы Штейнера о построении линии второго порядка с помощью двух проективных пучков, и, следовательно, в скрытом виде доказана нами ранее. Чтобы убедиться в этом, нужно прежде всего указать правило, позволяющее распознавать пары противоположных сторон шестивершинника при любом расположении его вершин. С такой целью занумеруем числами $1, 2, 3, 4, 5, 6$ стороны шестивершинника в порядке их последовательного соединения; противоположными сторонами мы назовем те, номера которых отличаются на три, т. е. 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6. Заметив это, вернемся к фигуре, изображенной на рис. 130. Здесь мы имеем вписанный в линию второго порядка шестивершинник, стороны которого, перечисляемые в порядке их соединения, суть SN, NS', $S'P$, $PM, MP', P'S$; дадим им соответственно номера $1, 2, 3, 4, 5, 6$. На рис. 130 точка пересечения сторон $1, 4$ обозначена буквой U, точка пересечения сторон $2, 5$ — буквой V и точка пересечения сторон $3, 6$ — буквой O. В свое время было доказано, что три точки U, O, V лежат на одной прямой и что точки S, P, N, P', S', M на кривой совершенно произвольны; следовательно, тогда же была доказана и теорема Паскаля.

Теорема Брианшона, как уже было отмечено, вытекает из теоремы Паскаля по принципу двойственности.

145. Предельные случаи теорем Паскаля и Брианшона. Представим себе, что точки, определяющие какую-либо сторону вписанного шестивершинника, сливаются (например, точки, определяющие сторону 3 на рис. 135); тогда эта сторона превращается в касательную и получается фигура, изображенная на рис. 137.

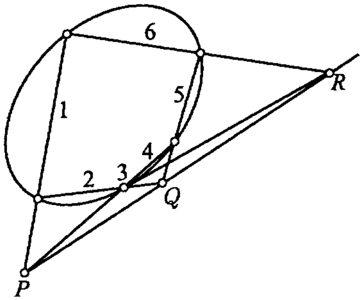


Рис. 137

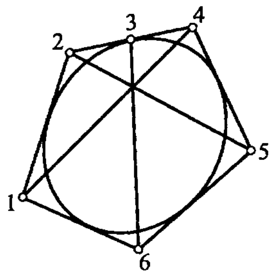


Рис. 138

Соответственно имеем теорему.

Касательная к линии второго порядка, проведенная в одной из вершин вписанного пятивершинника, пересекается со стороной, противоположной этой вершине, в точке, которая лежит на прямой, проходящей через точки пересечения остальных пар несмежных сторон этого пятивершинника.

Двойственный этому предельный случай теоремы Брианшона мы получим, полагая, что две смежные стороны описанного шестисторонника сливаются в одну, а общая их вершина превращается в точку прикосновения (рис. 138). Соответственно имеем теорему.

Прямая, соединяющая точку прикосновения одной из сторон описанного пятисторонника с противоположной вершиной, проходит через общую точку прямых, соединяющих остальные две пары несмежных вершин этого пятисторонника.

Другие предельные случаи теоремы Паскаля для вписанного четырехвершинника и вписанного трехвершинника и предельные случаи теоремы Брианшона для описанного четырехсторонника и описанного трехсторонника без объяснений представлены на рис. 139–142.

146. Задачи построения касательной в данной точке кривой второго порядка и точки прикосновения данной касательной.

Задача. Зная пять точек кривой второго порядка, построить касательную в одной из них.

Эта задача решается при помощи теоремы Паскаля для вписанного пятивершинника. Пусть отрезки, соединяющие данные точки, помечены числами $1, 2, 4, 5, 6$, как на рис. 137, а назначенная точка —

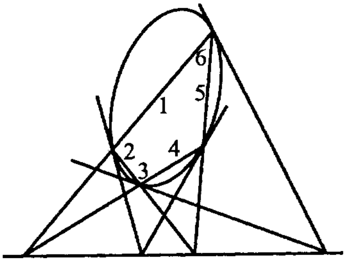


Рис. 139

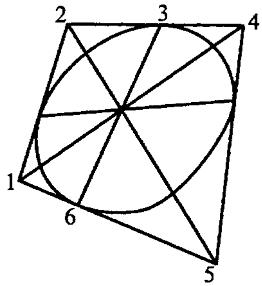


Рис. 140

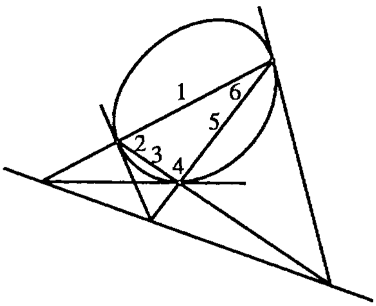


Рис. 141

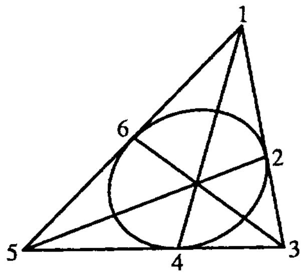


Рис. 142

числом 3; тогда, определяя сначала точки P, Q, а затем точку R, и соединяя точку R с точкой 3, получим искомую касательную.

З а д а ч а. Зная пять касательных кривой второго порядка, построить точку прикосновения одной из них.

Эта задача решается при помощи теоремы Брианшона для описанного пятисторонника. Пусть точки пересечения данных касательных помечены числами $1, 2, 4, 5, 6$, как на рис. 138. Тогда, соединяя прямыми точки $1, 4$ и точки $2, 5$, находим точку пересечения этих прямых; прямая, соединяющая эту точку с точкой 6, пересечением с прямой $2, 4$ определит на ней искомую точку прикосновения.

147. П р о е к т и в н о е с о о т в е т с т в и е м е ж д у т о ч к а м и к р и в о й в т о р о г о п о р я д к а. Мы подробно рассматривали в этом разделе проективное соответствие между элементами одномерных многообразий первой степени. Для многих вопросов проективной геометрии полезно обобщить понятие проективного соответствия на множество элементов одномерных многообразий второй степени.

Мы покажем сейчас, как выполняется такое обобщение, причем в своих рассуждениях будем иметь в виду к о н к р е т н ы й случай многообразия второй степени, именно, о в а л ь н у ю кривую второго порядка.

Условимся называть две пары точек A, B и C, D линии второго порядка k гармонически сопряженными, если они проектируются из какой-нибудь точки M линии k двумя парами гармонически сопряженных лучей. На основании первого из двух предложений, приведенных в конце n° 142, мы можем утверждать, что свойство гармонической сопряженности двух пар точек A, B и C, D линии второго порядка не связано с выбором точки M и, таким образом, определяется исключительно расположением самих точек A, B, C, D.

Взаимно однозначное соответствие между точками двух различных или совпадающих линий второго порядка k_1 и k_2 называется проективным, если в этом соответствии гармонически сопряженным парам точек линии k_1 отвечают также гармонически сопряженные пары точек линии k_2.

Высказанное определение, как видим, вполне аналогично определению проективного соответствия между точками прямых. Установление проективного соответствия мы будем еще называть *проективным отображением* линии k_1 на линию k_2. В том случае, когда линии k_1 и k_2 совпадают, говорят, что линия проективно отображена на себя. Именно этим случаем мы и будем сейчас интересоваться.

Пусть дано проективное отображение некоторой линии второго порядка k на самое себя; выберем на линии k какую-нибудь точку A и обозначим через A' ее образ. Далее, установим между лучами пучков с центрами A и A' соответствие, сопоставляя с произвольным лучом m' пучка A' луч m пучка A так, чтобы точка пересечения луча m с линией k была образом точки пересечения луча m' с этой линией. Нетрудно сообразить, что установленное соответствие является проективным. В самом деле, если m', n' и p', q' — две гармонически сопряженные пары лучей пучка A', то, по определению гармонической сопряженности на линии второго порядка, пары точек M, N и P, Q, в которых лучи m', n', p', q' пересекают линию, будут также гармонически сопряжены; при проективном отображении кривой на себя пары точек M, N и P, Q переходят в гармонически сопряженные пары точек M', N' и P', Q', которые из точки A проектируются гармонически сопряженными парами лучей m, n и p, q. Но именно эти лучи в пучке A и сопоставляются с лучами m', n', p', q' пучка A'. Таким образом, при установленном соответствии гармоническим группам элементов пучка A' отвечают гармонические группы элементов пучка A, а это и является характеристическим свойством проективного соответствия.

По поводу установленного соответствия между лучами пучков A и A' можно сказать больше: оно не только проективное, но и перспективное. Это следует из того, что лучу $A'A$ пучка A' отвечает луч AA' пучка A (см. теорему 54).

Следовательно, соответствующие лучи пучков A и A' пересекаются на одной прямой — на оси перспективы этих пучков. Отсюда имеем следующий весьма простой способ графической реализации проективного отображения линии второго порядка на себя, пригодный в том случае, когда это отображение определено заданием трех пар соответствующих точек (этот способ заключает в себе и доказательство того, что три пары соответствующих точек определяют проективное отображение). Пусть даны три пары проективно соответствующих точек линии второго порядка: A, A'; M_1, M_1', M_2, M_2' (рис. 143). Построим сначала ось перспективы пучков A и A', для чего найдем точку пересечения прямых AM_1' и $A'M_1$ точку пересечения прямых AM_2' и $A'M_2$; прямая, соединяющая эти точки, и будет осью перспективы. После того как она построена, мы можем для каждой точки M

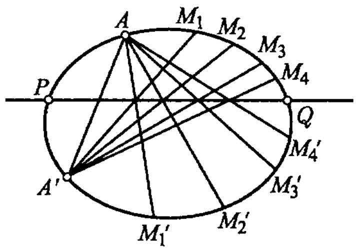


Рис. 143

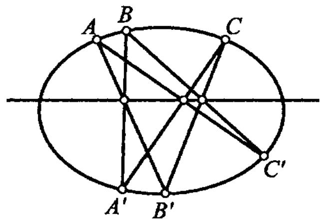


Рис. 144

линии найти соответствующую точку M', проектируя точку M из A' на ось перспективы и потом проектируя полученную на оси точку из A на кривую. На рис. 143 показано построение точек $M_3', M_4', \ldots$, соответствующих точкам $M_3, M_4, \ldots$

Заметим еще, что точки пересечения оси перспективы пучков A и A' с линией второго порядка являются неподвижными точками в проективном отображении линии на себя. В самом деле, из вышеописанного построения проективно соответствующих точек линии второго порядка непосредственно следует, что в том случае, когда точка M линии одновременно лежит на оси перспективы, соответствующая ей точка совпадает с нею, т. е. точка M отображается на себя. На рис. 143 можно видеть, как с приближением переменной точки линии к точке Q, в которой эту линию пересекает ось, соответствующая точка также приближается к точке Q.

В тот момент, когда переменная точка совмещается с Q, она совпадает с соответствующей себе. Поэтому неподвижную точку отображения называют еще *двойной*.

На основании изложенного, построение двойных точек проективного отображения начерченной линии второго порядка на самое себя сводится к построению оси перспективы пучков A и A'. Если ось перспективы этих пучков линию не пересекает, двойных точек отображения нет.

Замечательно, что ось перспективы пучков A и A' совпадает с осью перспективы любой другой пары пучков, проектирующих соответствующие точки линии и имеющих центры в двух соответствующих точках. В самом деле, пусть A, B, C — три точки линии, A', B', C' — точки, соответствующие им в некотором проективном отображении этой линии на себя (рис. 144). Выберем сначала в качестве центров пучков, проектирующих соответствующие точки линии, точки A и A'. Ось перспективы этих пучков s_a определится точкой пересечения прямых $A'B$ и AB' и точкой пересечения прямых $A'C$ и AC'. Затем выберем в качестве центров проектирующих пучков точки B и B'. Ось перспективы этих пучков s_b определится точкой пересечения прямых $B'A$ и BA' и точкой пересечения прямых $B'C$ и BC'. Но в силу теоремы Паскаля полученные три точки лежат на одной прямой и, следовательно, оси s_a и s_b совпадают.

Общую ось перспективы пучков A и A', B и B' и т.д. называют просто *осью перспективы проективного отображения кривой второго порядка на самое себя.*

Все изложенное позволяет высказать следующее утверждение.

Если дано проективное отображение кривой второго порядка на самое себя, то, каковы бы ни были две пары соответствующих точек M, N и M', N', прямые MN' и $M'N$ пересекаются всегда на определенной прямой, и эта прямая есть ось перспективы данного отображения.

148. Построение двойных точек проективного отображения прямой на самое себя. Результаты, полученные в предыдущем параграфе, позволяют решить следующую задачу.

Задача. Построить двойные точки проективного отображения прямой a на самое себя, если даны три пары соответствующих точек этого отображения A и A', B и B', C и C'.

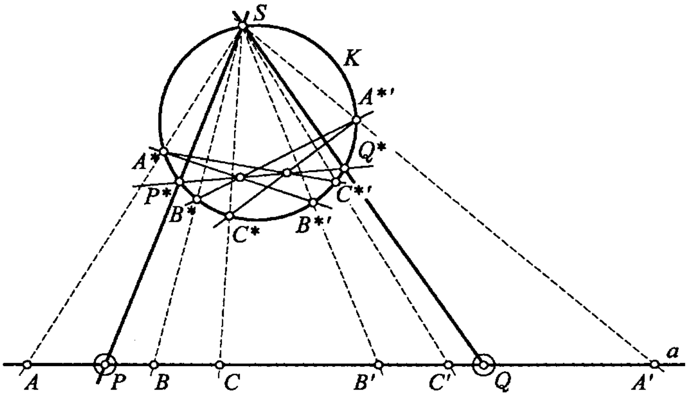


Рис. 145

Решение. Пользуясь циркулем, построим произвольную окружность k (рис. 145) и выберем на ней какую-нибудь точку S. Далее, установим между точками окружности k соответствие, назначая для произвольной точки M^* этой окружности соответствующую точку $M^{*\prime}$ так, чтобы пара точек M^*, $M^{*\prime}$ проектировалась из точки S в пару точек прямой a, соответствующих друг другу в данном проективном отображении. Очевидно, соответствие $M^* \sim M^{*\prime}$ является проективным (на окружности), а двойные точки его проектируются из S в двойные точки данного проективного отображения прямой a на себя.

Таким образом, задача приводится к построению двойных точек проективного отображения на себя окружности k. Чтобы построить их, спроектируем точки A, B, C, A', B', C' из точки S на окружность k; мы получим на окружности точки $A^*, B^*, C^*, A^{*\prime}, B^{*\prime}, C^{*\prime}$. Затем построим ось перспективы соответствия $M^* \sim M^{*\prime}$, определенного тремя парами соответствующих точек, A^* и $A^{*\prime}$, B^* и $B^{*\prime}$, C^* и $C^{*\prime}$, и определим точки P^*, Q^*, в которых построенная ось пересекает окружность. Проектируя точки P^*, Q^* из центра S на прямую a, найдем искомые двойные точки P, Q. (Все построения указаны на рис. 145.)

149. Построение точек пересечения произвольной прямой с линией второго порядка, определенной пятью точками.

Задача. Линия второго порядка k определена пятью точками S, S', A, B, C (рис. 146); найти точки ее пересечения с произвольной прямой a (линия k не предполагается фактически начерченной, известны только ее точки S, S', A, B, C).

Эта задача приводится к предыдущей.

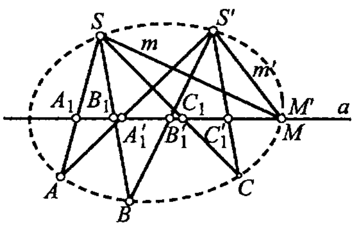


Рис. 146

В самом деле, линию k мы можем рассматривать как геометрическое место точек пересечения проективно соответствующих лучей m, m' пучков с центрами S, S', если соответствие $m \sim m'$ определено так, что лучам SA, SB, SC отвечают лучи $S'A, S'B, S'C$. Пары проективно соответствующих лучей m, m', пересекаясь с прямой a, определяют на ней пары проективно соответствующих точек M, M'; в частности, пары соответствующих лучей SA и $S'A, SB$ и $S'B, SC$ и $S'C$ определяют на прямой a пары соответствующих точек A_1 и A_1', B_1 и B_1', C_1 и C_1'. Точки пересечения прямой a с линией k суть те, в которых сходятся соответствующие лучи m, m'; следовательно, они представляют собой двойные точки проективного соответствия $M \sim M'$. Таким образом, чтобы решить задачу, мы должны построить двойные точки проективного отображения прямой a на себя, полагая, что это отображение определено тремя парами точек A_1 и A_1', B_1 и B_1', C_1 и C_1'. Требуемое построение указано в предыдущем параграфе.

Замечание. В том случае, когда прямая a проходит через одну из данных пяти точек, построение единственной неизвестной точки ее пересечения с линией k значительно упрощается. В этом случае можно воспользоваться теоремой Паскаля. На рис. 147 данные точки линии k помечены числами $1, 2, 3, 4, 5$, искомая точка пересечения прямой a с линией k — числом 6, буквы P, Q, R обозначают точки пересечения противоположных сторон шестивершинника $1, 2, 3, 4, 5, 6$; так как этот шестивершинник вписан в линию второго порядка k, точки P, Q, R лежат на одной прямой. Поэтому построение точки 6 можно вести следующим образом: сначала найти точки P и Q, затем, проводя прямую PQ, — точку R, наконец, соединяя точки 3 и R прямой, найти точку 6.

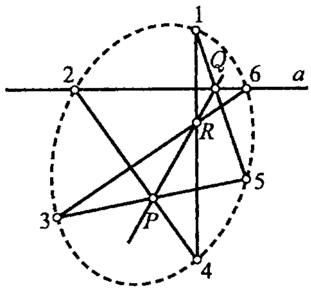


Рис. 147

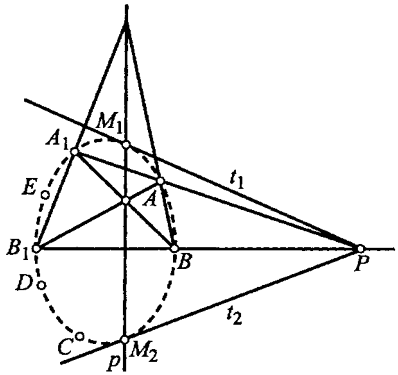


Рис. 148

150. Проведение касательных из данной точки плоскости к линии второго порядка, определенной пятью точками.

Задача. Пятью точками A, B, C, D, E определена линия второго порядка k, и дана произвольная точка P. Провести из точки P касательные к линии k.

Решение. Проведем через точку P и какие-нибудь две из данных пяти точек, например, A и B, две прямые линии PA и PB (рис. 148). Следуя только что изложенному методу, найдем точки A_1 и B_1, в которых прямые PA и PB встречают линию k. Затем построим полный четырехвершинник ABA_1B_1; из его гармонических свойств следует, что диагональ его p является полярой точки P относительно линии k (определение поляры см. в n° 131). Наконец, найдем точки M_1 и M_2 пересечения поляры p с линией k и соединим их прямыми t_1 и t_2 с точкой P. Из теоремы 51 следует, что t_1 и t_2 являются искомыми касательными.

151. Вторая теорема Дезарга. Мы изложим сейчас одну интересную теорему проективной геометрии о пучках кривых второго порядка, известную под названием второй теоремы Дезарга.

Пучком кривых второго порядка называется совокупность кривых, которые при различных значениях параметра λ (с учетом $\lambda = \infty$) определяются уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + \\ + \lambda\left(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}\right) = 0, \qquad (*)$$

где a_{ik}, b_{ik} — постоянные, x, y — текущие (проективные) координаты; очевидно, пучок представляет собой совокупность линий, проходящих через четыре точки пересечения двух линий:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

и

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0;$$

эти четыре точки, называемые *базисными точками пучка*, могут быть как вещественными, так и мнимыми.

Теорема 61 (Дезарга). *Линии второго порядка, принадлежащие какому-нибудь пучку, пересекают всякую прямую, которая не проходит через базисные точки пучка, в парах соответствующих точек одной инволюции.*

Прежде чем доказывать эту теорему, напомним читателю понятие инволюции. В n° 113 мы называли инволюцией на прямой такое проективное отображение прямой на себя, при котором каждая точка прямой после двукратного отображения возвращается на место, т. е. если точка $M' = f(M)$ является образом точки M, то $M'' = f(M') = M$. В проективных координатах на прямой координаты x, x' соответствующих в инволюции точек M, M' связаны соотношением

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

при условии $\alpha = -\delta$ (см. n° 113).

Приступим теперь к доказательству. Пусть a — произвольная прямая, о которой идет речь в теореме Дезарга. Предположим координатную систему выбранной так, что ее ось x совпадает с прямой a. Тогда для определения точек пересечения линий пучка с прямой a достаточно будет в уравнении $(*)$ положить $y = 0$. Получим:

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} + \lambda\left(b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}\right) = 0. \qquad (**)$$

Пусть x, x' — координаты двух точек M, M', в которых пересекает прямую a линия пучка, соответствующая некоторому значению λ. По теореме Виета, из $(**)$ имеем:

$$x + x' = -\frac{2(a_{13} + \lambda b_{13})}{a_{11} + \lambda b_{11}}, \qquad (\alpha)$$

$$xx' = \frac{a_{33} + \lambda b_{33}}{a_{11} + \lambda b_{11}}. \qquad (\beta)$$

Постараемся теперь найти зависимость между x и x'; для этого исключим λ из соотношений (α) и (β). В результате исключения получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x + x') + 2a_{13} & b_{11}(x + x') + 2b_{13} \\ a_{11}xx' - a_{33} & b_{11}xx' - b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$x' = \frac{(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})x + 2(a_{13}b_{33} - a_{33}b_{13})}{2(a_{13}b_{11} - a_{11}b_{13})x - (a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})}. \qquad (\gamma)$$

Мы видим, что x' выражается через x при помощи дробно-линейной функции; следовательно, соответствие $M(x) \sim M'(x')$ является проективным. Далее, сопоставляя формулу (γ) с общей формулой $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, мы видим, что условие $\delta = -\alpha$, характеризующее инволюцию, в данном случае выполнено.

Покажем, что определитель Δ преобразования (γ) не равен нулю. Но $\Delta = -(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})^2 - 4(a_{13}b_{11} - a_{11}b_{13})(a_{13}b_{33} - a_{33}b_{13})$ есть взятый с обратным знаком результат уравнений $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$ и $b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33} = 0$; если $\Delta = 0$, то эти уравнения имеют общий корень, т.е. прямая a проходит через базисную точку пучка, а это исключено условием теоремы. Следовательно, $\Delta \neq 0$, и теорема доказана.

В следующих двух параграфах даются приложения второй теоремы Дезарга.

152. Построение двойных точек инволюции. В n° 113 мы доказали теорему 42, согласно которой инволюция определяется заданием двух различных пар соответствующих точек. Сейчас мы покажем, как, зная две пары соответствующих точек инволюции, построить произвольно много других ее пар и двойные точки (если они существуют).

Пусть A, A' и B, B' — две пары соответствующих точек в некоторой инволюции на прямой a. Проведем через точки A и A' окружность k_a и через точки B и B' — окружность k_b, выбирая эти окружности так, чтобы они пересекались в двух точках; обозначим точки их пересечения буквами O_1 и O_2 (рис. 149а и 149б). Система окружностей, проходящих через точки O_1, и O_2, представляет собой частный случай пучка кривых второго порядка. По второй теореме Дезарга окружности этой системы пересекают прямую a в парах соответствующих точек одной инволюции. Таким образом, проводя через точки O_1 и O_2 различные окружности и определяя точки их пересечения

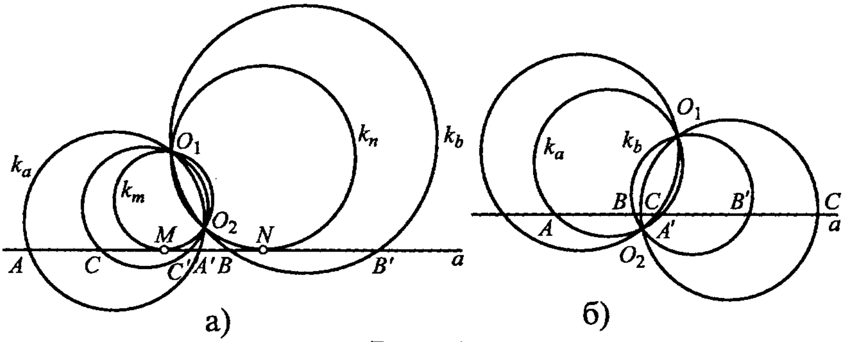


Рис. 149

с прямой a, мы получим различные пары точек, соответствующих друг другу в инволюции, определяемой парами A, A' и B, B'. Проводя через точки O_1 и O_2 две окружности k_m и k_n, касающиеся прямой a, мы найдем двойные точки инволюции, а именно, точки прикосновения окружностей k_m и k_n с прямой a. На рис. 149а двойные точки обозначены буквами M и N.

Сопоставляя рис. 149а и 149б, легко понять, что две пары точек A, A' и B, B' определяют гиперболическую инволюцию (т. е. обладающую двойными точками), если эти пары точек не разделяют друг друга, и эллиптическую (т. е. не имеющую двойных точек) — в том случае, когда они друг друга разделяют.

153. Определение кривой второго порядка по данным четырем ее точкам и одной касательной.

Задача. Даны четыре точки и касательная линии второго порядка. Найти точку прикосновения данной касательной.

Эту задачу можно рассматривать, как задачу определения кривой второго порядка по данным четырем ее точкам и одной касательной; в самом деле, после того, как мы определим точку прикосновения данной касательной, мы будем знать пять точек кривой, а пятью точками кривая второго порядка определяется вполне.

Решение. Пусть A, B, C, D — четыре данные точки искомой линии второго порядка и t — данная ее касательная. Рассмотрим пучок линий второго порядка с базисными точками A, B, C, D. Линии этого пучка согласно второй теореме Дезарга пересекают прямую t в парах соответствующих точек одной инволюции. Искомая линия включается в указанный пучок и точка ее прикосновения является двойной точкой этой инволюции. Таким образом, задача приводится к разыскиванию двойных точек инволюции. Для определения их нужно знать две пары соответствующих точек. Мы получим их, пересекая прямую t двумя какими-либо линиями пучка. Для этой цели удобнее всего взять две вырожденные линии пучка, например, пару прямых AB, CD и пару прямых AD, BC (рис. 150).

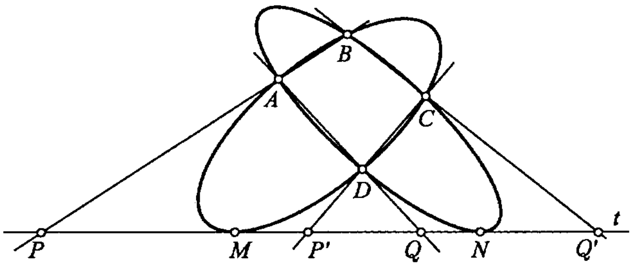


Рис. 150

Пусть P, P' и Q, Q' — пары точек, в которых эти вырожденные линии второго порядка пересекают прямую t. Если пары P, P' и Q, Q' не разделяют друг друга, то, применяя метод, изложенный в предыдущем параграфе, мы найдем две двойные точки инволюции M и N. Каждая из них является точкой прикосновения с прямой t некоторой линии второго порядка, проходящей через данные точки A, B, C, D. В этом случае, следовательно, задача имеет два решения.

Если пары P, P' и Q, Q' разделяют одна другую, то инволюция, определенная этими парами, не имеет двойных точек. В этом случае задача (на вещественной плоскости) решений не имеет.

154. Мы привели в этом разделе ряд конкретных теорем о проективных свойствах линий второго порядка. Источником их является изложенное нами выше построение линии второго порядка при помощи двух проективных пучков. Естественно поставить вопрос, можно ли распространить те же методы на теорию линий высших порядков. В принципе это возможно. Например, линии третьего порядка можно строить при помощи двух проективных пучков, из которых один является пучком линий второго порядка, а другой — пучком прямых. Как именно, — мы сейчас покажем.

Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + \\ + \lambda\left(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}\right) = 0 \quad (*)$$

— пучок линий второго порядка и

$$y - y_1 = \lambda'(x - x_1) \quad (**)$$

— пучок прямых. Сопоставим с линией пучка $(*)$, отвечающей некоторому значению параметра λ, ту прямую пучка $(**)$, которая отвечает значению параметра λ', определяемому формулой

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \quad (***)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — постоянные, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Такое соответствие между элементами пучков $(*)$ и $(**)$ будем называть *проективным.*

Результат исключения параметров λ и λ' из соотношений $(*)$, $(**)$ и $(***)$ представляет собой уравнение

$$\Phi(x, y) = 0$$

третьей степени относительно x, y. Отсюда имеем:

Геометрическое место точек пересечения соответствующих линий двух проективных пучков, из которых один представляет собой пучок, кривых второго порядка, а другой — пучок прямых, является линией третьего порядка.

Обобщая понятие проективного соответствия на случай двух пучков линий второго порядка, можно подобным же образом конструктивно определить линии четвертого порядка и т. д.

Проективное соответствие между пучками линий первого, второго и т. д. порядков представляется возможным высказать в чисто геометрических терминах; вместе с тем, следовательно, возможно дать конструктивное и чисто геометрическое определение образов высших степеней. Основанное на этой идее исследование конкретных свойств образов высших степеней предпринималось некоторыми авторами, однако оно отнюдь не так просто и наглядно, как исследование линий второго порядка, и по своему специальному характеру выходит из рамок задач этой книги.*)

*) Читателю, желающему более подробно ознакомиться с конструктивными предложениями проективной геометрии, мы рекомендуем книгу: *Н. А. Глаголев.* Проективная геометрия.

Глава VI

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ГЕОМЕТРИИ. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 1. Геометрия и теория групп

155. В предыдущих главах книги в ряде разделов, где определялась эквивалентность (равенство) геометрических фигур в различных геометрических системах (в элементарной геометрии, в проективной геометрии), мы отмечали так называемые групповые свойства совокупности тех преобразований, которые были положены в основу определения эквивалентных образов (групповые свойства движений, проективных преобразований). Во всех таких случаях мы имели дело с проявлениями теоретико-групповых принципов в геометрии, которые были разработаны Софусом Ли и Феликсом Клейном.

В современных геометрических исследованиях теоретико-групповые принципы играют важнейшую роль. Им посвящена настоящая глава книги.

156. Абстрактная группа. Основным предметом этой главы будут группы преобразований. Прежде чем определить их, мы напомним читателю, что такое группа вообще.

Определение группы. *Группа* есть совокупность объектов произвольной природы, которые в дальнейшем называются элементами и обозначаются буквами $a, b, c, d, \dots$, удовлетворяющая требованиям следующих аксиом.

1. *С каждой парой элементов совокупности, взятых в определенном порядке, сопоставлен по определенному закону некоторый элемент этой совокупности.* Если с двумя элементами a, b сопоставлен элемент c, то в таком случае употребляют символическое равенство

$$c = ab;$$

элемент c называется *произведением* элементов a, b.

2. (Закон ассоциативности.) *Каковы бы ни были три элемента a, b, c, всегда имеет место равенство*

$$(ab)c = a(bc).$$

3. *Существует такой элемент e, что для любого элемента a имеет место равенство*

$$ae = a.$$

Элемент e называется *единицей* группы.

4. *Каким бы ни был элемент a, существует такой, зависящий от a элемент x, что имеет место равенство*

$$ax = e.$$

Элемент x называется *обратным* элементу a и обозначается a^{-1}.

Из этих аксиом простыми рассуждениями можно вывести следующие теоремы *).

а) Если $ax = e$, то $xa = e$. Благодаря этому свойству группы нет надобности различать “правый” и “левый” обратные элементы.

б) Если e — единица группы, то для любого элемента a имеет место также равенство $ea = a$. Благодаря этому свойству группы нет надобности различать “правую” и “левую” единицы.

в) Если $ax = e$ и $ay = e$, то $x = y$, т.е. *обратный элемент по данному элементу a определяется однозначно.*

Как следствие отмеченных теорем имеем предложение: *по данным элементам a и b всегда, и притом однозначно, определяется элемент x, удовлетворяющий равенству $ax = b$, именно $x = a^{-1}b$, а также элемент y, удовлетворяющий равенству $ya = b$, именно $y = ba^{-1}$.* Таким образом, *в группе всегда, и притом однозначно, определено действие, обратное групповому умножению.*

Если элементы e и e^* для любого a удовлетворяют равенствам $ae = a$ и $ae^* = a$, то $e^* = e$, т.е. *каждая группа имеет только одну единицу.*

Дадим еще одно определение: если требования групповых аксиом удовлетворяются для некоторой части элементов группы, то такая часть элементов группы называется ее *подгруппой*; очевидно, подгруппа всегда содержит единицу группы и вместе с каждым своим элементом — обратный ему.

В этом параграфе у нас шла речь об абстрактной группе, в теории которой безразлична природа элементов группы и природа группового умножения; существенно только то, что требуется аксиомами 1–4. В дальнейшем мы будем иметь дело исключительно с конкретными *группами преобразований*; общее определение их дается в следующем параграфе.

157. Группы преобразований. Пусть M — произвольное множество; элементы его будем обозначать буквами $x, y, z, \ldots$ или $x', y', z', \ldots$ и т.д. Если с каждым элементом x множества M сопоставлен некоторый элемент $x' = f(x)$ этого множества, то мы будем говорить, что дано отображение множества M в себя.

*) См, например, *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. – Гостехиздат. 1938.

В том случае, когда 1) разным элементам x_1 и x_2 всегда соответствуют разные элементы $x'_1 = f(x_1)$ и $x'_2 = f(x_2)$ и 2) для каждого элемента x' множества M существует такой элемент x, что $x' = f(x)$, т. е. каждый элемент множества M является образом некоторого элемента этого множества, — отображение $x' = f(x)$ называется взаимно однозначным преобразованием множества M.

Пусть $x' = f(x)$ — некоторое взаимно однозначное преобразование множества M; если мы сопоставим с каждым элементом y множества M тот единственный элемент y', который согласно высказанному определению при данном отображении переводится в элемент y, т. е. такой элемент y', что $f(y') = y$, то получим некоторое новое взаимно однозначное преобразование $y' = \varphi(y)$ множества M. Оно называется *обратным* данному.

Таким образом, каждое взаимно однозначное преобразование $x' = f(x)$ имеет одно определенное обратное себе (тоже взаимно однозначное) преобразование. Преобразование, обратное данному $x'=f(x)$, обычно обозначается так: $x' = f^{-1}(x)$.

Пусть $x' = f_1(x)$ и $x' = f_2(x)$ — два взаимно однозначных преобразования множества M; если мы сопоставим с каждым элементом y множества M тот элемент y', в который переходит y при последовательном осуществлении сначала первого из двух данных преобразований, а затем — второго, т. е. элемент $y' = f_2(y^*)$, где $y^* = f_1(y)$, то получим некоторое взаимно однозначное преобразование. Оно называется *произведением* двух данных (взятых в определенной последовательности) и может быть представлено следующей символической записью: $x' = f_2(f_1(x))$.

Произведение преобразований, вообще говоря, зависит от того, в каком порядке они производятся, т. е. вообще говоря, $f_2(f_1(x)) \neq f_1(f_2(x))$.

Преобразование $e(x) = x$, оставляющее все элементы на своих местах, называется *тождественным*. Очевидно, если $x' = f(x)$ — некоторое взаимно однозначное преобразование и $x' = f^{-1}(x)$ — обратное ему, то $f(f^{-1}(x)) = x = e(x)$ и $f^{-1}(f(x)) = x = e(x)$, т. е. произведение данного преобразования и обратного ему есть тождественное преобразование (при этом порядок, в котором производятся данное и обратное ему преобразования, безразличен).

Пусть дано некоторое множество M. Будем рассматривать всевозможные взаимно однозначные преобразования этого множества; как обычно, будем представлять их символическими равенствами $x' = a(x)$, $x' = b(x)$, $x' = f(x)$ и т. п. или, что сейчас более удобно, — просто буквами $a, b, f, \ldots$ и т. д. Если a и b — два преобразования $x' = a(x)$ и $x' = b(x)$, то произведение их может быть представлено либо равенством $x' = a(b(x))$, либо равенством $x' = b(a(x))$, в зависимости от того, какое из них производится первым. В соответствии с этим условимся обозначать через $c = ab$ произведение преобразований a, b в том случае, когда b производится первым, и через $c = ba$ —

произведение преобразований a, b в том случае, когда a производится первым.

Нетрудно показать, что *совокупность всех взаимно однозначных преобразований множества M представляет собой группу, если произведение двух элементов этой совокупности, т. е. двух преобразований, понимать так, как это было выше определено.*

В самом деле:

1) Вместе с каждой парой преобразований a, b, взятых в определенном порядке, определено некоторое новое преобразование c — их произведение:

$$c = ab.$$

2) Если a, b, c — произвольные преобразования, то

$$(ab)c = a(bc).$$

Справедливость этого равенства очевидна. Действительно, если $x' = a(x), x' = b(x), x' = c(x)$ — данные преобразования, то $(ab)c$ и $a(bc)$ в равной мере обозначают преобразование $x' = a(b(c(x)))$. Мы видим, что произведение преобразований всегда подчиняется ассоциативному закону.

3) Существует такое преобразование e (именно — тождественное преобразование $e(x) = x$), что для любого преобразования a имеет место равенство

$$ae = a.$$

Действительно, если $x' = a(x)$ — преобразование, обозначенное буквой a, а $e(x) = x$ — тождественное преобразование, то ae представляет собой преобразование $x' = a(e(x)) = a(x)$, не отличающееся от a.

4) Каким бы ни было преобразование a, существует такое преобразование f, что имеет место равенство

$$af = e.$$

Именно этим преобразованием f служит обратное данному a, т. е. $f = a^{-1}$.

Мы видим, что совокупность всех взаимно однозначных преобразований множества M удовлетворяет групповым аксиомам 1–4. Следовательно, эта совокупность является группой. Единицей ее служит тождественное преобразование. Помимо группы всех преобразований множества M, группой преобразований этого множества называют также любую определенную совокупность преобразований, удовлетворяющую требованиям групповых аксиом.

Для того чтобы некоторая определенная совокупность преобразований множества M была группой, достаточно соблюдения следующих двух требований:

1) если a, b суть преобразования данной совокупности, то их произведение ab должно также входить в данную совокупность;

2) если a — какое-нибудь преобразование данной совокупности, то обратное преобразование a^{-1} также должно быть преобразованием данной совокупности.

Действительно, как было отмечено выше, закон ассоциативности для произведения преобразований всегда выполнен; кроме того, если данная совокупность вместе с каждым преобразованием a содержит обратное ему a^{-1} и вместе с каждыми двумя преобразованиями содержит их произведение, то в эту совокупность преобразований включается тождественное преобразование $e = aa^{-1}$ (единица группы преобразований). Следовательно, если совокупность преобразований удовлетворяет двум указанным требованиям, то она удовлетворяет требованиям всех групповых аксиом и, таким образом, является группой.

158. Геометрия данной группы. Пусть даны множество произвольных элементов M и некоторая группа его преобразований G. Условимся называть множество M пространством, элементы его — *точками*, а каждую совокупность точек — *фигурой*. Фигуру A назовем *эквивалентной*, или равной, фигуре B, если в группе G существует преобразование, превращающее фигуру A в фигуру B.

Из двух условий, характеризующих группу преобразований, которые сформулированы в конце n° 157, тотчас следует, что:

1) *Если фигура A эквивалентна фигуре B, то фигура B эквивалентна фигуре A.*

В самом деле, если фигура A эквивалентна фигуре B, то некоторое преобразование g группы G преобразует A в B; тогда обратное преобразование g^{-1} превращает B в A. Но по второму из двух упомянутых условий g^{-1} входит в группу G. Таким образом, в группе G есть преобразование, превращающее B в A, следовательно, фигура B эквивалентна A.

2) *Если две фигуры A и B эквивалентны третьей фигуре C, то фигуры A и B эквивалентны друг другу.*

В самом деле, если A эквивалентна C, то в группе G существует преобразование g, превращающее A в C; и если B эквивалентна C, то в группе G существует преобразование h, превращающее B в C. Тогда преобразование h^{-1} переводит C в B и, следовательно, произведение $h^{-1}g$ превращает A в B. Отсюда следует эквивалентность фигур A и B.

Мы видим, что условия, определяющие группу преобразований, нужны для обеспечения основных свойств эквивалентности фигур (рефлективности и транзитивности), без которых не было бы смысла употреблять термин "эквивалентны".

Следуя Ф. Клейну, мы назовем *геометрическими* такие свойства фигур пространства M и такие связанные с фигурами величины, которые инвариантны относительно любого преобразования из данной группы G и которые, следовательно, одинаковы у всех эквивалентных фигур. Систему предложений о свойствах фигур и величин, инвариантных относительно всех преобразований группы G, мы будем называть *геометрией группы* G.

Идея Клейна рассматривать различные геометрии как теории инвариантов соответствующих групп позволила вскрыть глубокие связи между геометриями, открытыми и исследованными к восьмидесятым годам XIX столетия. Эта идея была изложена Клейном при вступлении на эрлангенскую кафедру в 1878 году, в его лекции "Сравнительное рассмотрение новейших геометрических исследований", известной теперь под названием "Эрлангенской программы".

Конкретные приложения теоретико-групповых методов Клейна содержатся в следующем разделе.

§ 2. Проективная группа и ее основные подгруппы

159. В предыдущем параграфе мы определили понятие геометрии данной группы. Высказанное там определение является чрезвычайно общим, так как не накладывает никаких ограничений на пространство M и группу G. Понятно, что геометрия данной группы G будет содержательна лишь в том случае, когда эта группа G и пространство M, на котором она задается, в достаточной мере конкретизированы. В последующем мы ограничимся рассмотрением геометрии проективной группы.

Исследование, которое будет нами проведено, покажет нам в новом свете и в определенной системе все те различные геометрии, которые изучались в предыдущих главах. Чтобы не усложнять изложения громоздкими алгебраическими выкладками, мы будем вести его для двумерного случая. Так как при этом мы будем пользоваться исключительно аналитическим методом, то распространение полученных результатов на случай высших размерностей не представит никакого труда. Для этого лишь нужно будет каждое из соотношений, которые нам встретятся, заменить соотношением такой же структуры, но с большим числом переменных. Указанное видоизменение легко выполнит сам читатель.

160. Проективная группа. Рассмотрим проективную плоскость, т. е. совокупность точек, определяемых тройками однородных координат (x_1, x_2, x_3). Взаимно однозначное отображение плоскости на себя, при котором каждой точке $M(x_1, x_2, x_3)$ соответствует точка $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ с координатами

$$\begin{aligned} \rho' x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned} \qquad (1)$$

где c_{ik} — вещественные постоянные, удовлетворяющие условию

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а ρ' — любое число $\neq 0$, представляет собой проективное отображение, или, как мы еще говорим, проективное преобразование проективной плоскости.

В n° 106 мы показали, что совокупность проективных преобразований обладает групповыми свойствами; именно, по теореме 23а преобразование, обратное проективному, само является проективным, а по теореме 23б произведение двух проективных преобразований есть проективное преобразование. Вследствие этого и на основании n° 157 мы можем утверждать, что *совокупность проективных преобразований является группой.*

Заметим, что групповые свойства совокупности проективных преобразований легко установить чисто аналитическими средствами (в n° 106 они установлены геометрически). В самом деле, пусть

$$\rho'_1 x'_i = \sum_{\alpha=1}^{3} c^{(1)}_{i\alpha} x_\alpha \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

и

$$\rho'_2 x'_i = \sum_{\alpha=1}^{3} c^{(2)}_{i\alpha} x_\alpha \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

— аналитические представления двух проективных преобразований $M' = f_1(M)$ и $M' = f_2(M)$. Рассмотрим произвольную точку $M(x_1, x_2, x_3)$, первое преобразование переводит ее в некоторую точку $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$, а второе переводит точку $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ в точку $M''(x''_1, x''_2, x''_3)$. Согласно формулам (2) и (3) мы имеем:

$$\rho'_2 x''_i = \sum_{\alpha=1}^{3} c^{(2)}_{i\alpha} x'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} c^{(2)}_{i\alpha} \left(\frac{1}{\rho'_1} \sum_{\beta=1}^{3} c^{(1)}_{\alpha\beta} x_\beta \right) = \frac{1}{\rho'_1} \sum_{\beta=1}^{3} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} c^{(2)}_{i\alpha} c^{(1)}_{\alpha\beta} \right) x_\beta .$$

Если мы положим $\rho'_1 \rho'_2 = \rho^*$, $\sum_{\alpha=1}^{3} c^{(2)}_{i\alpha} c^{(1)}_{\alpha\beta} = c_{i\beta}$, то предыдущие соотношения можно будет записать в виде

$$\rho'' x''_i = \sum_{\beta=1}^{3} c_{i\beta} x_\beta \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Мы видим, что соотношения (4), аналитически представляющие преобразование $M'' = f_2(M') = f_2(f_1(M))$, т. е. произведение двух данных преобразований, имеют такую же структуру, как и соотношения (1). Далее, обозначим через $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ и C матрицы, составленные соответственно из величин $c_{ik}^{(1)}$, $c_{ik}^{(2)}$ и c_{ik}. Вследствие равенств $\sum\limits_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} c_{\alpha k}^{(1)} = c_{ik}$ матрица C является произведением матриц $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$:

$$C = C^{(2)} C^{(1)}. \tag{5}$$

Таким образом, произведение двух проективных преобразований (2) и (3) есть линейное преобразование (4), матрица которого равна произведению матриц преобразований (2) и (3).

Пусть $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, и Δ — определители матриц $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ и C. Из формулы (5) следует числовое равенство

$$\Delta = \Delta^{(1)} \Delta^{(2)}. \tag{6}$$

Отсюда, если $\Delta^{(1)} \neq 0$ и $\Delta^{(2)} \neq 0$, то и $\Delta \neq 0$. Тем самым доказано, что произведение проективных преобразований есть линейное преобразование с определителем, отличным от нуля, т. е. проективное преобразование.

Чтобы убедиться, что преобразование, обратное проективному, тоже является проективным, достаточно заметить, что при $\Delta \neq 0$ из соотношений (1) величины x_1, x_2, x_3 выражаются через x_1', x_2', x_3' линейно. Далее, линейное преобразование, получаемое обращением формул (1), очевидно, имеет матрицу, обратную матрице преобразования (1); определитель ее Δ' равен $\dfrac{1}{\Delta}$. Следовательно, $\Delta' \neq 0$.

Поскольку преобразование, обратное проективному, представляет собой линейное преобразование с определителем, отличным от нуля, оно само является проективным. Итак, путем несложных алгебраических выкладок мы установили, что совокупность проективных преобразований является группой, так как удовлетворяет двум условиям, которые согласно n° 157 характеризуют группу преобразований.

Группу проективных преобразований называют *проективной*. Каждое отдельное преобразование проективной группы определяется при помощи численного задания величин c_{ik} в формулах (1). Однако, вследствие однородности формул (1), для определения преобразования (1) достаточно задать восемь отношений величин c_{ik}. Эти восемь отношений называются *параметрами* проективной группы.

В том случае, когда каждое преобразование, входящее в (какую бы то ни было) группу, определяется путем численного задания n независимых параметров, говорят, что это — *n-членная группа*. Таким образом, проективная группа (на плоскости) является восьмичленной.

161. Инварианты проективной группы. Проективная геометрия представляет собой дисциплину, изучающую такие свойства фигур и такие связанные с фигурами величины, которые инвариантны относительно любого проективного преобразования. Поэтому ***мы можем проективную геометрию определить как геометрию проективной группы.***

При изучении проективной геометрии особый интерес представляют инварианты проективной группы, так как именно они в проективной геометрии являются геометрическими величинами.

Мы назовем инвариантом n произвольных точек относительно проективной группы скалярную функцию $F(M_1, M_2, \dots, M_n)$, не равную тождественно постоянной, но принимающую равные значения на таких системах n точек, которые переводятся друг в друга при помощи проективного преобразования*).

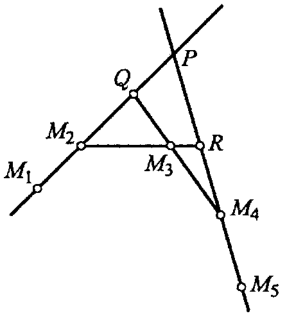


Рис. 151

Заметим, что проективная группа не имеет инвариантов от трех и менее точек. Это легко доказать рассуждением "от противного". В самом деле, допустим, что существует инвариант трех точек $F(M_1, M_2, M_3)$. Выберем на плоскости какие-нибудь три точки M_1^0, M_2^0, M_3^0 и обозначим через c значение функции $F(M_1^0, M_2^0, M_3^0)$. Пусть M_1, M_2, M_3 — л ю б ы е три точки. Мы знаем, что, каковы бы ни были три точки M_1, M_2, M_3 и три точки M_1^0, M_2^0, M_3^0, существует проективное преобразование, переводящее точки M_1, M_2, M_3 в точки M_1^0, M_2^0, M_3^0. Поэтому $F(M_1, M_2, M_3) = c = \mathrm{const}$ вопреки определению инварианта. Точно так же можно доказать, что проективная группа не имеет инварианта четырех п р о и з в о л ь н ы х точек. Но относительно проективной группы существует инвариант четырех точек, л е ж а щ и х н а о д н о й п р я м о й: таковым является сложное отношение (см. n° 115).

При $n \geqslant 5$ существуют уже инварианты произвольной системы n точек. Замечательно, что все они могут быть выражены через сложные отношения. Это обстоятельство станет ясным, если рассмотреть простейший случай $n = 5$.

Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 — пять произвольных точек плоскости. При помощи построения, указанного на рис. 151, мы можем по данным точкам M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 определить две четверки прямолинейно расположенных точек M_1, Q, M_2, P и M_5, R, M_4, P. Очевидно, сложные отношения $(M_1QM_2P) = f_1$ и $(M_5QM_4P) = f_2$ являются функциями точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, каковое обстоятельство мы выразим записью

$$f_1 = f_1(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$$

*) Чтобы избежать необходимости учета возможных специальных случаев, условимся, говоря о произвольных точках, число которых больше двух, подразумевать всегда такую группу точек, что никакие три из них не лежат на одной прямой.

и

$$f_2 = f_2(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5).$$

Эти функции являются инвариантами проективной группы. В самом деле, пусть $M_1', M_2', M_3', M_4', M_5'$ – новая система пяти точек и P', Q', R' — три точки, определенные по точкам M_i' так же, как P, Q, R — по точкам M_i. Если некоторое проективное отображение переводит точки $M_1, \ldots, M_5$ в точки $M_1', \ldots, M_5'$, то это же отображение переведет точки P, Q, R в точки P', Q', R', вследствие чего $(M_1QM_2P) = (M_1'Q'M_2'P')$ и $(M_5QM_4P) = (M_5'Q'M_4'P')$. Таким образом, всякий раз, когда система точек $M_1, \ldots, M_5$ проективно эквивалентна системе $M_1', \ldots, M_5'$, имеют место равенства $f_1(M_1, \ldots, M_5) = f_1(M_1', \ldots, M_5')$ и $f_2(M_1, \ldots, M_5) = f_2(M_1', \ldots, M_5')$. А это и означает, что f_1 и f_2 являются проективными инвариантами.

Более того, легко установить, что и обратно, если имеем $f_1(M_1, \ldots, M_5) = f_1(M_1', \ldots, M_5')$ и $f_2(M_1, \ldots, M_5) = f_2(M_1', \ldots, M_5')$, то система пяти точек $M_1, \ldots, M_5$ проективно эквивалентна системе $M_1', \ldots, M_5'$. В самом деле, пусть $M_1, \ldots, M_5$ и $M_1', \ldots, M_5'$ — две системы точек, удовлетворяющие соотношениям $f_1(M_1, \ldots, M_5) = f_1(M_1', \ldots, M_5')$ и $f_2(M_1, \ldots, M_5) = f_2(M_1', \ldots, M_5')$. Мы можем построить проективное отображение $M' = \varphi(M)$, которое переводит четыре точки M_1, M_2, M_4, M_5 в четыре точки M_1', M_2', M_4', M_5'; при этом же отображении точка P перейдет в точку P'. По условию $f_1(M_1, \ldots, M_5) = f_1(M_1', \ldots, M_5')$, т. е. $(M_1QM_2P) = (M_1'Q'M_2'P')$, и потому отображение $M' = \varphi(M)$ должно перевести точку Q в точку Q'. Аналогично, из равенства $f_2(M_1, \ldots, M_5) = f_2(M_1', \ldots, M_5')$ следует, что отображение $M' = \varphi(M)$ переводит точку R в точку R'. Но тогда, очевидно, отображение $M' = \varphi(M)$ переводит точку M_3 в точку M_3'. Тем самым эквивалентность системы $M_1, \ldots, M_5$ системе $M_1', \ldots, M_5'$ доказана.

Предположим теперь, что $F(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ — какой угодно проективный инвариант пяти точек. Возьмем произвольную систему точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 и будем ее деформировать так, чтобы величины $f_1(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ и $f_2(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ оставались неизменными. По предыдущему, все системы, получаемые такой деформацией, эквивалентны исходной и, следовательно, при этой деформации функция $F(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ сохраняет неизменную величину. Таким образом, если f_1 и f_2 получают определенные численные значения, то F также получает определенное численное значение, следовательно, F есть некоторая функция от f_1 и f_2, т. е. F имеет вид $F = \Phi(f_1, f_2)$.

Совершенно аналогичными рассуждениями можно показать, что любой проективный инвариант $F(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ при $n \geqslant 5$ выражается через сложные отношения. Поэтому сложное отношение называют *основным инвариантом* проективной группы.

162. Группы автоморфизмов. Пусть дана какая-нибудь группа преобразований G произвольного пространства M. Преобразования группы G, преобразующие в самое себя (т. е. отображающие на себя) некоторое точечное множество U пространства M, называются *автоморфными преобразованиями* или, короче, *автоморфизмами относительно множества* U; автоморфизмы могут перемещать точки множества U, но только так, что каждая точка множества U перемещается в точку этого же множества.

Совокупность всех преобразований группы G, автоморфных относительно некоторого множества U, является группой.

В самом деле:

1) Если каждое из двух преобразований группы G преобразует множество U в самое себя, то произведение этих преобразований есть преобразование группы G, обладающее тем же свойством, т. е. произведение двух автоморфизмов есть автоморфизм.

2) Если некоторое преобразование группы G преобразует множество U в самое себя, то обратное преобразование есть преобразование группы G, обладающее тем же свойством, т. е. преобразование, обратное автоморфизму, есть автоморфизм.

На основании изложенного в n° 157 эти свойства характеризуют групповой характер совокупности автоморфизмов.

163. Аффинная группа. Отметим на проективной плоскости произвольную прямую: условимся называть ее бесконечно удаленной и обозначать символом ∞. Совокупность проективных преобразований, автоморфных относительно прямой ∞, по предыдущему, является подгруппой проективной группы. Мы будем называть ее *аффинной группой*, а каждое принадлежащее ей преобразование — *аффинным.*

Очевидно, аффинные преобразования переводят конечные точки проективной плоскости (т. е. точки, не принадлежащие прямой ∞) в конечные же точки. Поэтому аффинные преобразования являются также взаимно однозначными преобразованиями множества конечных точек проективной плоскости, т. е. взаимно однозначными преобразованиями проективной плоскости, разрезанной вдоль прямой ∞.

Проективную плоскость без прямой ∞ мы будем называть *аффинной плоскостью* *).

Постараемся получить аналитическое представление аффинных преобразований. С этой целью введем на проективной плоскости, из рассмотрения которой мы сейчас исходили, проективные однородные координаты (x_1, x_2, x_3) так, чтобы в этих координатах прямая ∞ имела уравнение $x_3 = 0$. Пусть формулы

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned} \qquad (*)$$

определяют некоторое проективное преобразование. Это преобразо-

*) По своей топологической структуре аффинная плоскость не отличается от евклидовой.

вание будет аффинным, если из $x_3 = 0$ при любых x_1, x_2 следует равенство $x'_3 = 0$ (т. е. если прямая $x_3 = 0$ отображается на самое себя). А для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты c_{31} и c_{32} были равны нулю. Таким образом, мы получаем следующие представления аффинных преобразований:

$$\begin{aligned}
\rho' x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3,\\
\rho' x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3,\\
\rho' x'_3 &= \qquad\qquad\qquad\quad c_{33}x_3.
\end{aligned} \qquad (**)$$

Так как для каждой конечной точки $x_3 \neq 0$, то аффинная плоскость может быть арифметизирована в целом при помощи неоднородных координат $\dfrac{x_1}{x_3} = x$, $\dfrac{x_2}{x_3} = y$. Поэтому при исследовании аффинной группы употребление однородных координат излишне. Мы получим аналитическое представление аффинной группы в неоднородных координатах, если разделим первое и второе из равенств (**) на третье и положим $\dfrac{x_1}{x_3} = x$, $\dfrac{x_2}{x_3} = y$, $\dfrac{x'_1}{x'_3} = x'$, $\dfrac{x'_2}{x'_3} = y'$; если еще при этом ввести обозначения $\dfrac{c_{i1}}{c_{33}} = a_i$, $\dfrac{c_{i2}}{c_{33}} = b_i$, $\dfrac{c_{i3}}{c_{33}} = c_i$, то результат можно будет записать в виде

$$\begin{aligned}
x' &= a_1x + b_1y + c_1,\\
y' &= a_2x + b_2y + c_2.
\end{aligned} \qquad (\mathrm{A})$$

Каждое преобразование вида (A) является аффинным, но при условии $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$; в противном случае это преобразование не будет взаимно однозначным.

Так как формулы (A) содержат шесть параметров, то аффинная группа является шестичленной.

164. Инварианты аффинной группы. Геометрию аффинной группы называют *аффинной*.

Афинная геометрия, изучающая свойства фигур и связанные с фигурами величины, инвариантные относительно аффинной группы, существенно отличается от проективной геометрии. Например, в то время как в проективной геометрии (на проективной плоскости) всякие две прямые пересекаются, в аффинной геометрии (на аффинной плоскости) существуют параллельные прямые. Именно, прямые проективной плоскости, сходящиеся в некоторой точке прямой ∞, при разрезе проективной плоскости вдоль прямой ∞ превращаются в параллельные прямые аффинной плоскости (так как общая их точка при разрезе удаляется). Очевидно, в аффинной геометрии имеет место евклидов постулат о параллельных: через каждую точку вне данной прямой проходит одна и только одна прямая, параллельная данной. Заметим еще, что на аффинной прямой, как и на евклидовой, имеет место линейный порядок точек (см. n° 94).

Обратимся к вопросу об инвариантах аффинной группы, т. е. о величинах, геометрических с точки зрения аффинной геометрии.

Прежде всего, заметим, что все проективные инварианты вместе с тем являются и аффинными инвариантами. В самом деле, если некоторая функция инвариантна относительно всех проективных преобразований, то она инвариантна и при всех аффинных, так как аффинные преобразования составляют часть проективных. Напротив, существуют аффинные не проективные инварианты.

Основным аффинным инвариантом является *простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой.* Простое отношение трех точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, для обозначения которого мы введем символ $(M_1M_2M_3)$, может быть определено любой из двух формул*):

$$(M_1M_2M_3) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2},$$
$$(M_1M_2M_3) = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

Доказательство инвариантности функции $(M_1M_2M_3)$ не представляет никакого труда. В самом деле, пусть M_1', M_2', M_3' — три точки, получающиеся при помощи какого-либо преобразования вида (A) из точек M_1, M_2, M_3. Если через x_i', y_i' мы обозначим координаты точек M_i', то из формул (A) получим:

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) = \\ &= (M_1M_2M_3)\left[a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)\right], \\ x_3' - x_1' &= a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2), \end{aligned}$$

откуда

$$(M_1'M_2'M_3') = \frac{x_2' - x_1'}{x_3' - x_2'} = (M_1M_2M_3),$$

а это и означает, что функция $(M_1M_2M_3)$ инвариантна относительно любого аффинного преобразования. Аффинных инвариантов трех произвольно расположенных точек (не лежащих на одной прямой) не существует. Это объясняется тем, что произвольные три точки, не принадлежащие одной прямой, можно аффинно преобразовать в какие угодно другие три точки, не лежащие на одной прямой (в n° 161 мы указали, что проективная группа не имеет инвариантов

*) То, что эти формулы определяют одну величину, легко доказать, пользуясь уравнением прямой: $y = kx + l$.

четырех произвольных точек; доказательство предложения о том, что аффинная группа не имеет инварианта трех произвольных точек, вполне аналогично). При $n \geqslant 4$ существуют аффинные инварианты произвольной системы n точек. Замечательно, что все они могут быть выражены через простые отношения (это можно доказать при помощи рассуждений, аналогичных тем, какие мы проводили в n° 161). Поэтому простое отношение трех точек прямой *и* называется *основным инвариантом аффинной группы.*

Замечание. Аффинную плоскость и, соответственно, аффинную геометрию можно определить совершенно независимо от проективной геометрии при помощи надлежащей системы аксиом.

Именно, аффинной плоскостью можно назвать совокупность объектов двух видов — точек и прямых, удовлетворяющих требованиям аксиом пяти групп, из которых:

первая группа, определяющая отношения взаимной принадлежности объектов, содержит первые три аксиомы I группы системы аксиом евклидовой геометрии (n° 12) (т. е. двумерные аксиомы I группы);

вторая группа, определяющая порядок точек на прямой, совпадает со второй группой аксиом евклидовой геометрии (так как на аффинной прямой имеет место линейный порядок точек, то аффинные аксиомы порядка должны совпадать с аксиомами порядка евклидовой геометрии);

третья группа содержит аксиому непрерывности Дедекинда;

четвертая группа содержит аксиому параллельности Евклида;

пятая группа содержит предложение Дезарга (формулировку которого следует несколько изменить, учитывая существование параллельных прямых)*).

Для определения аффинного пространства следует принять все аксиомы трехмерной геометрии Евклида, кроме аксиом конгруэнтности.

В свое время мы доказали, что аксиомы, лежащие в основании элементарной геометрии, составляют полную систему. Точно так же можно доказать, что система аксиом аффинной геометрии полна. Между тем система аффинных аксиом является частью гильбертовой системы. Это обстоятельство на первый взгляд кажется парадоксальным. Однако объяснение его несложно.

Дело в том, что полнота аффинных аксиом, означающая, что любая их реализация изоморфна одной определенной реализации (например, арифметической), не препятствует прибавлению к аффинным аксиомам новых аксиом конгруэнтности, поскольку вместе с этими аксиомами вводится также и новое отношение геометрических объектов (именно, отношение конгруэнтности). В связи с этим см. определение полноты системы аксиом, высказанное в n° 75.

165. Аффинная унимодулярная группа. Аффинное преобразование

*) См. *Гильберт Д.* Основания геометрии.– М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned} \qquad (*)$$

мы будем называть *унимодулярным*, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Нетрудно показать, что аффинные унимодулярные преобразования составляют группу. В самом деле:

1) Произведение двух аффинных унимодулярных преобразований есть аффинное унимодулярное преобразование.

Чтобы доказать это, заметим, что если преобразование

$$\begin{aligned} x'' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y'' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}$$

является произведением преобразований

$$\begin{aligned} x' &= a_1^{(1)}x + b_1^{(1)}y + c_1^{(1)}, \\ y' &= a_2^{(1)}x + b_2^{(1)}y + c_2^{(1)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x'' &= a_1^{(2)}x' + b_1^{(2)}y' + c_1^{(2)}, \\ y'' &= a_2^{(2)}x' + b_2^{(2)}y' + c_2^{(2)}, \end{aligned}$$

то матрицы этих преобразований связаны соотношением

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1^{(2)} & b_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} & b_2^{(2)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_1^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} & b_2^{(1)} \end{Vmatrix}.$$

Отсюда для определителей этих матриц имеет место равенство $\Delta = \Delta^{(1)}\Delta^{(2)}$. Следовательно, если $\Delta^{(1)} = \pm 1$ и $\Delta^{(2)} = \pm 1$, то $\Delta = \pm 1$.

2) Преобразование, обратное аффинному унимодулярному, является аффинным унимодулярным.

Чтобы доказать это, достаточно заметить, что взаимно обратные аффинные преобразования имеют взаимно обратные матрицы, а следовательно, и взаимно обратные определители, т. е. если Δ_1 — определитель данного преобразования, Δ_2 — определитель обратного ему, то $\Delta_2 = \dfrac{1}{\Delta_1}$. Отсюда, если $\Delta_1 = \pm 1$, то $\Delta_2 = \pm 1$.

Мы видим, что совокупность унимодулярных преобразований удовлетворяет двум условиям, которые согласно n° 157 определяют групповой характер совокупности преобразований. Таким образом, унимодулярные преобразования действительно составляют группу. Мы будем называть ее, как и основанную на ней геометрию, *аффинной унимодулярной*.

Аффинная унимодулярная группа является пятичленной, так как в случае унимодулярного преобразования шесть параметров формул (*) связаны одним уравнением $a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$ и, следовательно, независимых из них имеется только пять.

Очевидно, все объекты общей аффинной геометрии являются, вместе с тем, и объектами аффинной унимодулярной геометрии. Но в последней имеются объекты, не принадлежащие первой, так как класс инвариантов аффинной унимодулярной группы шире класса инвариантов общей аффинной группы.

Мы покажем сейчас, что аффинная унимодулярная группа имеет инвариант трех произвольно расположенных точек. Пусть три произвольные точки аффинной плоскости $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ при некотором аффинном унимодулярном преобразовании переходят в три точки $M_1'(x_1', y_1')$, $M_2'(x_2', y_2')$, $M_3'(x_3', y_3')$. Тогда, как нетрудно установить прямым вычислением, имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда видно, что абсолютная величина определителя $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ является инвариантом трех точек M_1, M_2, M_3.

В аффинной унимодулярной геометрии с каждым треугольником $M_1M_2M_3$ можно сопоставить инвариант

$$S = \text{абс. вел. } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Число S называется *площадью треугольника* $M_1M_2M_3$. Очевидно, в аффинной унимодулярной геометрии можно определить также понятие площади многоугольника и площади криволинейной фигуры. Именно, площадью многоугольника можно назвать сумму площадей составляющих его треугольников, а площадью криволинейной фигуры — предел последовательности площадей многоугольников, аппроксимирующих эту фигуру.

Таким образом, унимодулярная геометрия имеет в числе своих объектов площади фигур.

166. Ортогональная группа. Аффинное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned} \tag{1}$$

называется *ортогональным*, если матрица его

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

удовлетворяет условию

$$AA' = I, \tag{3}$$

где штрих обозначает операцию транспонирования, а I — единичная матрица, т. е.

$$A' = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right\|, \quad I = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Докажем, что совокупность ортогональных преобразований обладает групповыми свойствами.

1) Произведение двух ортогональных преобразований есть ортогональное преобразование.

Доказательство. Пусть даны ортогональные преобразования с матрицами A_1 и A_2; произведение их есть аффинное преобразование с матрицей $A = A_2 A_1$. На основании правила перемножения матриц мы можем написать тождество

$$AA' = (A_2 A_1)(A_2 A_1)' = (A_2 A_1)(A_1' A_2') = A_2 (A_1 A_1') A_2'.$$

Отсюда и вследствие равенств $A_1 A_1' = I$, $A_2 A_2' = I$ имеем:

$$AA' = A_2 I A_2' = A_2 A_2' = I.$$

Тем самым требуемое доказано.

2) Преобразование, обратное ортогональному, является ортогональным.

Доказательство. Пусть A — матрица некоторого ортогонального преобразования и $B = A^{-1}$ — матрица преобразования, обратного ему. Из условия ортогональности $AA' = I$ следует, что $A' = A^{-1}$. Таким образом, $B = A'$. Отсюда

$$BB' = A'(A')' = A'A = A^{-1}A = I.$$

Тем самым требуемое доказано.

Таким образом, совокупность ортогональных преобразований есть группа. Мы будем называть ее *ортогональной группой.*

Из равенства (3) следует, что определитель матрицы A равен ± 1. Отсюда заключаем, что ортогональная группа является подгруппой унимодулярной группы.

Условие ортогональности, записанное в матричной форме (3), равносильно трем скалярным соотношениям:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку ортогональная группа выделяется из аффинной при помощи наложения трех связей на шесть параметров a_i, b_i, c_i, она является трехчленной.

Условиям ортогональности можно придать форму, отличную от формы (4). В самом деле, как показано выше (при доказательстве ортогональности преобразования, обратного данному), матрица A ортогонального преобразования удовлетворяет соотношению

$$A'A = I.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4'}$$

Системы равенств (4) и (4′) равносильны друг другу.

В отличие от всех ранее рассмотренных групп, ортогональная группа имеет инвариант двух точек. Таковым является, например, функция двух точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Инвариантность этой функции может быть установлена при помощи простых выкладок. Именно, пусть $M_1'(x_1', y_1')$ и $M_2'(x_2', y_2')$ — две точки, полученные ортогональным преобразованием из точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \rho(M_1', M_2') &= \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \\ &= \sqrt{\left[a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1)\right]^2 + \left[a_2(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1)\right]^2} = \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (b_1^2 + b_2^2)(y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Отсюда вследствие соотношений (4′) получаем:

$$\rho(M_1', M_2') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(M_1, M_2).$$

В геометрии ортогональной группы величина $\rho(M_1, M_2)$ называется *расстоянием* между точками M_1 и M_2. Расстояние представляет собой основной инвариант этой геометрии, так как все остальные инварианты могут быть выражены через расстояния.

Едва ли нужно объяснять, что геометрия ортогональной группы есть элементарная (евклидова) геометрия.

167. Сравнение различных геометрий. Мы рассмотрели проективную группу с ее основными подгруппами: аффинной, аффинной унимодулярной и ортогональной. Этим группам соответствуют геометрии: проективная, аффинная, аффинная унимодулярная и элементарная (евклидова).

Из перечисленных групп наиболее обширной является группа, лежащая в основе проективной геометрии (проективная группа), наиболее узкой — группа, лежащая в основе элементарной геометрии (ортогональная группа). Наряду с этим из перечисленных геометрий проективная геометрия имеет самый бедный класс объектов, элементарная — самый богатый. В элементарной геометрии можно рассматривать и аффинные объекты (простое отношение трех точек прямой, параллельность и т. д.) и проективные (сложное отношение четырех точек и т. д.). Напротив, в проективной геометрии не рассматриваются собственно аффинные свойства фигур, а в аффинной геометрии не рассматриваются метрические свойства, т. е. свойства, определяемые измерением отрезков.

Вообще, очевидно, чем шире группа, лежащая в основании геометрии, тем уже класс геометрических объектов. Это понятно, так как чем больше преобразований содержит группа, тем меньше соотношений и функций, остающихся инвариантными при всех ее преобразованиях. Но в связи с этим необходимо отметить, что свойства фигур и связанные с фигурами величины, инвариантные относительно какой-нибудь группы, являются более "стойкими", чем свойства фигур и величины, инвариантные относительно любой ее подгруппы, так как они выдерживают без изменений более многообразные преобразования.

§ 3. Геометрии Лобачевского, Римана и Евклида в проективной схеме

168. Группа автоморфизмов относительно невырожденной линии второго порядка. В этом разделе мы покажем, что геометрия Евклида, геометрия Лобачевского и геометрия Римана являются геометриями некоторых групп проективных автоморфизмов.

Пусть на проективной плоскости дана некоторая невырожденная линия второго порядка k. Мы будем рассматривать группу проективных автоморфизмов относительно линии k, т. е. группу проективных преобразований, отображающих линию k на самое себя (то, что совокупность произвольных автоморфизмов составляет группу, доказано в n° 162).

Имеют место следующие две важные теоремы:

Теорема А. *Если k — овальная линия и A, A' — две произвольные точки, расположенные во внутренней области линии k, то существуют два и только два автоморфизма относительно k,* *переводящие точку A в точку A' и произвольно данное направление при точке A — в произвольно данное направление при точке A'.*

Теорема Б. *Если k — нулевая линия и A, A' — две произвольные точки проективной плоскости, то существуют два и только два автоморфизма относительно k, переводящие точку A в точку A' и произвольно данное направление при точке A — в произвольно данное направление при точке A'* *).

Доказательство теоремы А. Пусть a и a' — прямые, проходящие через A и A' в данных направлениях (рис. 152). Обозначим через C и C' полюсы этих прямых относительно k, через B — точку, в которой поляра точки A пересекает прямую a, через B' — точку, в которой поляра точки A' пересекает прямую a'. Трехвершинник ABC является автополярным относительно k, т.е. все его стороны суть поляры противоположных вершин. Аналогичным свойством обладает трехвершинник $A'B'C'$.

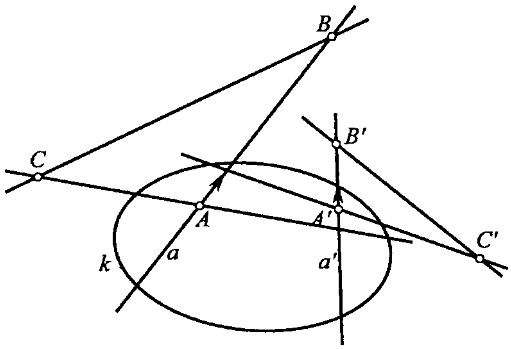


Рис. 152

Введем на плоскости систему проективных однородных координат x_1, x_2, x_3, принимая трехвершинник ABC в качестве координатного: $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$. В этих координатах уравнение линии k будет иметь вид (см. $n°$ 134):

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Выбирая надлежащим образом точку единиц $E(1,1,1)$, приведем уравнение линии k к виду

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Заметим, что именно члены, содержащие первые две координаты, должны входить в уравнение с одинаковыми знаками, так как точка

*) Определение нулевой и овальной линий второго порядка дано в $n°$ 134; в теореме Б проективную плоскость следует мыслить пополненной мнимыми элементами, иначе понятие нулевой линии не будет иметь смысла.

$A(0,0,1)$ лежит во внутренней области относительно линии k (для этой точки левая часть уравнения (1) отрицательна; см. n° 134).

Введем затем на плоскости новую систему проективных однородных координат x_1', x_2', x_3', принимая в качестве координатного трехвершинник A', B', C' так, чтобы его вершины имели следующие координаты: $A'(0,0,1)$, $B'(1,0,0)$, $C'(0,1,0)$. При надлежащем выборе точки единиц $E'(1,1,1)$ уравнение линии k в новых координатах будет

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0. \tag{2}$$

(В это уравнение с одинаковыми знаками должны входить именно члены, содержащие первые две координаты, так как точка $A'(0,0,1)$ лежит во внутренней области относительно линии k.)

Предположим, что существует автоморфизм относительно линии k, который переводит точку A в точку A', прямую a — в прямую a' и заданное направление — в заданное направление (последнее означает, что точки, лежащие на прямой a в заданном на ней циклическом порядке, переводятся в точки, расположенные в циклическом порядке, заданном на прямой a'). Так как при этом линия k преобразуется в себя, то полюс прямой a относительно k должен перейти в полюс прямой a' относительно k и поляра точки A должна перейти в поляру точки A'; иначе говоря, точки A, B, C должны перейти в точки A', B', C' (соответственно). В таком случае автоморфизм φ должен представляться формулами

$$\rho' x_1' = c_{11} x_1, \quad \rho' x_2' = c_{22} x_2, \quad \rho' x_3' = c_{33} x_3, \tag{3}$$

где x_1, x_2, x_3 — старые координаты прообраза, x_1', x_1', x_3' — новые координаты образа. Преобразуя уравнение (2) по формулам (3), получим:

$$c_{11}^2 x_1^2 + c_{22}^2 x_2^2 - c_{33}^2 x_3^2 = 0. \tag{4}$$

Это есть уравнение прообраза линии k в старых координатах. Так как φ — автоморфизм относительно линии k, то уравнения (1) и (4) должны быть эквивалентны; отсюда следует, что должны иметь место равенства

$$|c_{11}| = |c_{22}| = |c_{33}|.$$

Так как в формулах (3) множитель ρ' можно брать произвольно, то без потери общности мы можем считать модули чисел c_{11}, c_{22}, c_{33} равными единице и число c_{11} положительным. Допустим для определенности записи последующих формул, что заданное направление в точке A идет в область тех точек прямой AB, для которых $\dfrac{x_1}{x_3} \to 0$, и заданное направление в точке A' идет в область тех точек прямой $A'B'$, для которых $\dfrac{x_1'}{x_3'} > 0$; тогда необходимо должно быть $c_{33} > 0$, и мы получаем лишь две возможности: 1) $c_{11} = 1$, $c_{22} = 1$, $c_{33} = 1$; 2) $c_{11} = 1$, $c_{22} = -1$, $c_{33} = 1$. Таким образом, могут быть лишь два автоморфизма относительно k, удовлетворяющие условиям теоремы:

$$1)\quad \rho' x_1' = x_1, \quad \rho' x_2' = x_2, \quad \rho' x_3' = x_3, \tag{5}$$

$$2)\quad \rho' x_1' = x_1, \quad \rho' x_2' = -x_2, \quad \rho' x_3' = x_3, \tag{6}$$

Но очевидно, что каждое из этих проективных преобразований действительно является автоморфизмом относительно k и каждое из них переводит точку A в точку A', прямую a — в прямую a' и заданное направление на прямой a — в заданное направление на прямой a'. Тем самым теорема А доказана.

Доказательство теоремы Б получается почти дословным повторением предыдущего при замене уравнения $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ на уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (пересказывая предыдущее доказательство применительно к теореме Б, нужно исключить указания по поводу членов, которые должны входить в уравнение с одинаковыми знаками; эти указания теряют смысл, так как все члены уравнения $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ имеют одинаковые знаки).

Замечание. Из доказательства теоремы А видно, что каждый автоморфизм относительно овальной линии k преобразует внутренние точки этой линии также во внутренние, так как, согласно формулам (5) и (6), при $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$ будет $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 < 0$.

Содержание теорем А и Б можно высказать еще следующим образом:

1) *Каковы бы ни были два линейных элемента, расположенных во внутренней области овальной линии k, существуют два и только два автоморфизма относительно линии k, налагающих первый линейный элемент на второй.*

2) *Каковы бы ни были два линейных элемента проективной плоскости, существуют два и только два автоморфизма относительно заданной нулевой линии k, налагающих первый линейный элемент на второй.*

Аналогичным свойством обладают движения (вместе с зеркальными отражениями) на евклидовой плоскости. На основании такой аналогии мы будем называть автоморфизмы относительно невырожденной линии второго порядка k проективными движениями. Линию k, которая при данном проективном движении преобразуется в себя, назовем *абсолютом* этого движения. Движения с овальным абсолютом будем именовать *гиперболическими*, движения с нулевым абсолютом — *эллиптическими*.

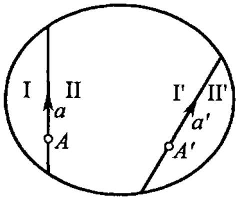


Рис. 153

На рис. 153 изображены овальная линия и внутри ее — два линейных элемента, приложенных к точкам A и A'; прямые, по которым направлены эти линейные элементы, обозначены буквами a и a'. Каждая из прямых a и a' разделяет внутреннюю область линии k на два сегмента; мы обозначили их через I, II и I', II'. Из рассуждений, с помощью которых была доказана теорема А, следует, что из двух автоморфизмов с абсолютом k, налагающих первый данный линейный элемент на второй, один отображает сегмент I на сегмент I' и сегмент II на сегмент II', а другой отображает сегмент I на сегмент II' и сегмент II — на сегмент I'. Если точка A' совпадает с точкой A и линейный элемент при точке A' совпадает с линейным элементом при точке A, то автоморфизмы, налагающие первый линейный элемент на второй, превращаются в автоморфизмы, оставляющие данный при точке A линейный элемент без изменения. Один из этих автоморфизмов будет тождественным отображением, другой будет отображать сегмент I на сегмент II и сегмент II — на сегмент I. Этот второй автоморфизм аналогичен евклидову зеркальному отражению относительно прямой.

169. Проективная метрика. Условимся называть геометрию группы гиперболических движений, имеющих общий абсолют,— *гиперболической*, геометрию группы эллиптических движений с общим абсолютом — *эллиптической.*

В любой из таких геометрий две фигуры считаются равными, или конгруэнтными, если одна из них преобразуется в другую при помощи некоторого автоморфизма относительно определяющего геометрию абсолюта (т. е. при помощи некоторого проективного движения). Как в гиперболической, так и в эллиптической геометрии существуют инварианты двух точек. Например, инвариантом двух произвольных точек P, Q является сложное отношение $(PQUV)$, где U, V — точки пересечения прямой PQ с абсолютом, а также любая функция этого сложного отношения. Особый интерес представляет инвариант вида $c \ln(PQUV)$, где c — постоянная. Мы покажем, что этот инвариант обладает свойствами, аналогичными тем, какие в элементарной геометрии характеризуют длину отрезка. Случаи гиперболической и эллиптической геометрии при этом целесообразно рассмотреть отдельно.

Сначала мы изучим свойства инварианта $c \ln(PQUV)$ в гиперболической геометрии.

Пусть k — овальная линия второго порядка, определяющая в качестве абсолюта гиперболическую геометрию, P, Q — две произвольные точки, расположенные во внутренней области линии k. Так как P, Q лежат внутри k, то точки U, V, в которых прямая PQ пересекает линию k, вещественны; кроме того, пара P, Q не разделяет пару U, V. При таком расположении точек P, Q, U, V величина $(PQUV)$ положительна, следовательно, $\ln(PQUV)$ является вещественным числом. Далее, если направление отрезка PQ противоположно направлению отрезка UV, то $(PQUV) > 1$ и $\ln(PQUV) > 0$, если же направления отрезков PQ и UV совпадают, то $(PQUV) < 1$ и $\ln(PQUV) < 0$.

Предположим, что имеет место первый случай. Возьмем на отрезке PQ произвольную точку R. Непосредственным вычислением легко показать, что

$$(PQUV) = (PRUV) \cdot (RQUV).$$

Логарифмируя это равенство, мы получим соотношение

$$\ln(PQUV) = \ln(PRUV) + \ln(RQUV). \qquad (*)$$

При том расположении точек, которое предположено нами, $(PQUV) >$ > 1, $(PRUV) > 1$ и $(RQUV) > 1$, следовательно, все члены равенства $(*)$ положительны.

Если отрезки PQ и UV имеют одинаковые направления, то все члены равенства $(*)$ отрицательны. И в том и в другом случае из $(*)$ следует, что

$$|\ln(PQUV)| = |\ln(PRUV)| + |\ln(RQUV)|.$$

Таким образом, если с произвольным отрезком PQ, лежащим внутри абсолюта k, мы сопоставим положительное число

$$\rho(PQ) = |c\ln(PQUV)|,$$

то при этом

1) с конгруэнтными отрезками будут сопоставлены равные числа, так как $\rho(PQ)$ — инвариант автоморфизмов абсолюта k;

2) числа, сопоставленные с отрезком PQ и с частями этого отрезка PR и RQ, будут удовлетворять равенству

$$\rho(PQ) = \rho(PR) + \rho(RQ).$$

Точно такими же свойствами характеризуется длина отрезка в элементарной геометрии. На основании этой аналогии мы назовем положительное число $\rho(PQ)$ длиной отрезка PQ в гиперболической геометрии с абсолютом k.

Наряду с положительным числом $\rho(PQ)$, с произвольным отрезком PQ можно сопоставить относительное число

$$s(PQ) = c\ln(PQUV),$$

которое в том случае, когда постоянная c выбрана в е щ е с т в е н н о й, либо совпадает с длиною $\rho(PQ)$ отрезка PQ, либо отличается от нее знаком.

Обратимся теперь к рассмотрению инварианта $c\ln(PQUV)$ в эллиптической геометрии.

Абсолют эллиптической геометрии, который мы обозначим буквой k, представляет собой нулевую линию второго порядка; она определяется в проективных координатах уравнением с вещественными коэффициентами, но состоит исключительно из мнимых точек. Каковы бы ни были вещественные точки P, Q на проективной плоскости, точки U, V, в которых прямая PQ пересекает абсолют, являются мнимыми, причем координаты точки U суть числа, комплексно сопряженные с координатами точки V. Нетрудно показать, что при этих условиях сложное отношение $(PQUV)$ представляет собой комплексное число с модулем, равным единице. В самом деле, если мы введем на прямой PQ систему проективных неоднородных координат и обозначим через p, q, u, v координаты точек P, Q, U, V, то $u = \alpha + \beta i$, $v = \alpha - \beta i$ и

$$(PQUV) = \frac{u-p}{q-u} : \frac{v-p}{q-v} = \frac{[(\alpha - p) + \beta i][(q-\alpha) + \beta i]}{[(\alpha - p) - \beta i][(q-\alpha) - \beta i]}.$$

Мы видим, что сложное отношение $(PQUV)$ есть частное двух комплексно сопряженных чисел, следовательно, $|(PQUV)| = 1$.

Как всякое число, модуль которого равен 1, сложное отношение $(PQUV)$ может быть представлено в виде

$$(PQUV) = e^{i\varphi},$$

где φ — вещественная величина, определенная с точностью до слагаемого $\pm 2\pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Отсюда следует, что $\ln(PQUV) = i\varphi$ является величиной чисто мнимой и многозначной.

Таким образом, если мы возьмем ч и с т о м н и м у ю постоянную c, то с произвольным отрезком PQ будет сопоставлена вещественная многозначная величина

$$s(PQ) = c \ln(PQUV). \qquad (**)$$

Чтобы сопоставить с произвольным отрезком PQ одно определенное значение этой величины, рассмотрим на проективной прямой, содержащей данный отрезок PQ, вещественную переменную точку X. Положим $(PXUV) = e^{i\theta}$. При $X \equiv P$ имеем:

$$(PPUV) = 1 \text{ и } \theta = \theta_0 = \ldots = -4\pi, -2\pi, 0, +2\pi, +4\pi, \ldots;$$

если X занимает произвольное положение внутри отрезка PQ, то из уравнения $(PXUV) = e^{i\theta}$ определяется счетное множество соответствующих значений θ. В том случае, когда X, оставаясь внутри отрезка PQ, приближается к точке P, каждое из этих значений приближается к одному определенному значению θ_0. То значение θ, которое приближается к $\theta_0 = 0$, обозначим через $\tilde{\theta}$ и будем называть главным. Условимся также называть главным значением $\ln(PQUV)$ предел, к которому стремится величина $\tilde{\theta}$ в том случае, когда X, оставаясь внутри отрезка PQ, стремится к точке Q.

Теперь мы можем с каждым отрезком PQ сопоставить вполне определенное вещественное число

$$s(PQ) = c\ln(PQUV), \qquad (**)$$

где c — мнимая постоянная, $\ln(PQUV)$ — главное значение натурального логарифма величины $(PQUV)$.

Очевидно, при этом

1) с конгруэнтными отрезками будут сопоставлены равные числа, так как $s(PQ)$ — инвариант автоморфизмов абсолюта k;

2) числа, сопоставленные с отрезком PQ и с частями этого отрезка PR и RQ, имея одинаковые знаки, будут удовлетворять равенству

$$s(PQ) = s(PR) + s(RQ).$$

Эти свойства инварианта $s(PQ)$ дают основание назвать число $|s(PQ)|$ длиною отрезка PQ в эллиптической геометрии с абсолютом k.

Заметим, между прочим, что в эллиптической геометрии длина всей проективной прямой, равная длине отрезка PQ с соединенными концами, выражается числом $2\pi|c|$.

После того как мы определили в гиперболической и в эллиптической геометриях длину отрезка, естественно определить в этих геометриях расстояние между двумя точками.

В гиперболической геометрии, полем которой является внутренняя область абсолюта, расстоянием между двумя точками мы назовем длину единственного отрезка, который эти точки соединяет.

В эллиптической геометрии, полем которой является вся вещественная проективная плоскость*), расстоянием между двумя точками мы назовем длину наименьшего из двух отрезков, определяемых этими точками.

Как в гиперболической, так и в эллиптической геометрии расстояние $\rho(X, Y)$ между произвольными точками X, Y обладает следующими свойствами:

1) $\rho(X, X) = 0$.

2) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X) > 0$, если $X \not\equiv Y$.

3) $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geqslant \rho(X, Z)$.

Иначе говоря, величина $\rho(X, Y)$ обладает основными свойствами, присущими расстоянию в евклидовом пространстве.

Доказательство свойств 1)–3) мы не приводим (требует доказательства только последнее из них; первые два — очевидны).

---

*) Напомним читателю, что абсолютом эллиптической геометрии является нулевая линия, которая состоит из мнимых точек и не разделяет вещественную проективную плоскость на какие-либо области.

Описанное в этом параграфе определение длин отрезков и расстояний между точками, инвариантных относительно группы автоморфизмов абсолюта k, называют *проективной метрикой и притом эллиптической* или *гиперболической* — в зависимости от вида абсолюта.

Замечание. Поскольку группа автоморфизмов абсолюта k, согласно теоремам А и Б, транзитивна относительно линейных элементов, мы можем ввести как в гиперболической, так и в эллиптической геометрии *процесс измерения длин.* Для этого надлежит прежде всего выбрать какой-нибудь отрезок AB в качестве единицы измерения. Каким бы ни был другой отрезок PQ, существует (вследствие теорем А и Б) автоморфизм абсолюта k, отображающий точку A в точку P и переводящий направление отрезка AB в направление отрезка PQ. Если при этом точка B отобразится в точку P_1, лежащую внутри отрезка PQ, то на отрезке PQ будет отложен отрезок PP_1, конгруэнтный с точки зрения геометрии абсолюта k отрезку AB. Откладывая вслед за тем на отрезке P_1Q отрезок $P_1P_2 \equiv AB$, потом на отрезке P_2Q — отрезок $P_2P_3 \equiv AB$ и т. д., мы определим, сколько отрезков, конгруэнтных отрезку AB, содержит отрезок PQ. Так будет найдена целая часть длины отрезка PQ. Далее могут быть найдены десятые доли длины, сотые и т. д.

Понятно, что длина, найденная в результате этого измерения, будет выражаться числом $c\ln(PQUV)$, где U, V — точки пересечения прямой PQ с абсолютом k. При этом значение постоянной c зависит от выбора линейной единицы AB, именно $c = \dfrac{1}{\ln(ABUV)}$.

170. Покажем, что гиперболическая геометрия внутри овального абсолюта является геометрией Лобачевского.

С этой целью возьмем какую-нибудь овальную линию второго порядка и обозначим ее буквой k. Элементы гиперболической геометрии, определяемой абсолютом k, мы условимся называть *гиперболическими точками и гиперболическими прямыми.* Гиперболические точки суть точки проективной плоскости, лежащие внутри k, гиперболические прямые суть расположенные внутри k отрезки проективных прямых, т. е. хорды линии k. Точки самой линии k не причисляются к гиперболическим объектам, поэтому отрезки, изображающие гиперболические прямые, являются открытыми (не содержащими своих концов).

Отношения взаимной принадлежности гиперболических объектов удовлетворяют требованиям I группы аксиом евклидовой геометрии.

В самом деле, интерпретируя надлежащим образом простейшие свойства хорд линии второго порядка, находим, что:

1) Через любые две гиперболические точки проходит гиперболическая прямая. В этом заключается требование аксиомы I.1.

2) Через любые две гиперболические точки проходит только одна гиперболическая прямая. В этом заключается требование аксиомы I.2.

3) На каждой гиперболической прямой существуют две гиперболические точки (даже бесконечно много гиперболических точек); существуют три гиперболические точки, не лежащие на одной гиперболической прямой. В этом заключается требование аксиомы I.3.

Остальные аксиомы I группы имеют пространственный характер и в двумерной геометрии не учитываются.

Далее, так как на открытом отрезке имеет место линейный порядок расположения точек, то в гиперболической геометрии внутри k выполнены требования аксиом II.1–II.3. Аксиома Паша II.4 в гиперболической геометрии верна, так как она верна на проективной плоскости (см. n° 89).

Таким образом, в гиперболической геометрии оказываются выполненными требования всех аксиом порядка.

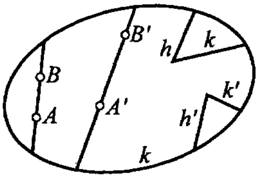


Рис. 154

Обратимся к аксиомам конгруэнтности. На рис. 154 изображены два гиперболических отрезка AB и $A'B'$ и два гиперболических угла (h, k) и (h', k'). В гиперболической геометрии отрезок AB считается конгруэнтным отрезку $A'B'$, если существует автоморфизм абсолюта k, отображающий отрезок AB на отрезок $A'B'$; $\angle(h, k)$ считается конгруэнтным $\angle(h', k')$, если существует автоморфизм, переводящий гиперболические полупрямые h, k в гиперболические полупрямые h', k'. Из теоремы А, доказанной в n° 168, следует, что на каждой гиперболической прямой по каждую сторону от любой ее точки можно отложить отрезок, конгруэнтный произвольно данному отрезку, и что к каждой полупрямой с любой стороны можно приложить угол, конгруэнтный произвольно данному углу.

Таким образом, вследствие теоремы А в гиперболической геометрии оказываются удовлетворенными основные требования аксиом III.1 и III.4. Вследствие группового характера совокупности автоморфизмов два отрезка, конгруэнтные третьему, конгруэнтны между собой; тем самым удовлетворено требование аксиомы III.2.

Путем несложного анализа можно убедиться, что и все остальные требования аксиом конгруэнтности в гиперболической геометрии удовлетворены (излагать этот анализ мы не будем).

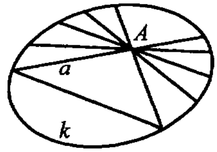


Рис. 155

Наконец, в гиперболической геометрии справедлив принцип непрерывности Дедекинда, так как он осуществляется на каждой проективной прямой. Отсюда и из теоремы 41 (n° 23) следует, что в гиперболической геометрии верны предложения Архимеда и Кантора.

Итак, в гиперболической геометрии внутренней области абсолюта k удовлетворяются требования всех аксиом I–IV. Но тогда, как мы знаем, должно удовлетворяться либо требование аксиомы о параллельных Евклида, либо требование аксиомы о параллельных Лобачевского. Очевидно, имеет место второй случай. В самом деле, через произвольную точку A внутри линии k проходит бесконечно много хорд, не пересекающих данную хорду a (рис. 155), а это означает, что в гиперболической геометрии через каждую точку проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную гиперболическую прямую.

На основании всего изложенного приходим к следующему предложению: *гиперболическая геометрия внутренней области овального абсолюта есть неевклидова геометрия Лобачевского.*

171. Интересно рассмотреть, как выглядят различные конкретные факты геометрии Лобачевского при интерпретации их внутри абсолюта k.

Отметим некоторые из них.

Например, гиперболическая прямая h перпендикулярна к гиперболической прямой p, если она на проективной плоскости проходит через полюс прямой p относительно абсолюта k.

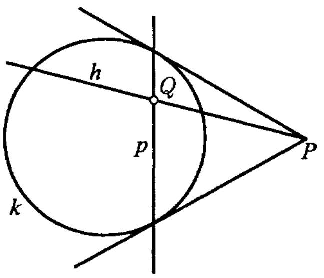


Рис. 156

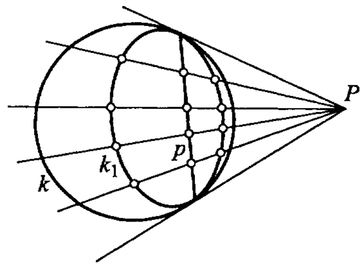


Рис. 157

В самом деле, пусть h и p — гиперболические прямые, пересекающиеся в точке Q; пусть, кроме того, прямая h, будучи продолженной из внутренней области абсолюта, проходит через полюс P прямой p (рис. 156). Произведем гармоническое отображение проективной плоскости на самое себя, выбрав в качестве центра этого отображения точку P и в качестве оси — ее поляру p. Из определения поляры и из определения гармоническою отображения (см. $n°$ 131 и замечание в конце $n°$ 106) следует, что при указанном отображении сегменты внутренней области абсолюта k, разделяемые прямой p, переходят друг в друга. Таким образом, это отображение по отношению к линии k является автоморфизмом, который с точки зрения гиперболической геометрии может рассматриваться как зеркальное отражение относительно прямой p.

Далее очевидно, что части прямой h, разделенные точкой Q, отображаются друг на друга, тогда как прямая p остается неподвижной. Следовательно, смежные углы, определяемые прямыми h и p, с точки зрения гиперболической геометрии абсолюта k конгруэнтны друг другу, и значит, прямая h перпендикулярна к прямой p.

Заметим попутно, что известный в теории поляр принцип взаимности (который гласит: если одна прямая содержит полюс другой, то вторая содержит пóлюс первой) в гиперболической геометрии означает взаимность свойства перпендикулярности двух прямых (если одна прямая перпендикулярна к другой, то вторая перпендикулярна к первой).

Остановимся еще на интерпретации известных в неевклидовой геометрии эквидистант и орициклов (см. *пп*° 36–40).

Пусть k_1 — овальная линия второго порядка, расположенная во внутренней области абсолюта k и касающаяся абсолюта в точках его пересечения с прямой p (рис. 157). Очевидно, при гиперболическом зеркальном отражении относительно любой прямой, проходящей через точку P, являющуюся полюсом прямой p относительно абсолюта, линия k_1 отображается на себя. Следовательно, все хорды линии k_1, направленные в точку P, являются гиперболически конгруэнтными отрезками; кроме того, прямая p перпендикулярна к этим хордам и делит их пополам. Поэтому линия k_1 с точки зрения гиперболической геометрии представляет собой эквидистанту с осью p. Если обе точки прикосновения линии k_1 с абсолютом сливаются в одну, то в пределе линия k_1 превращается в о р и ц и к л. На доказательстве последнего обстоятельства мы останавливаться не будем.

Многие другие примеры гиперболической интерпретации неевклидовых фактов читатель может найти в книге Бальдус "Неевклидова геометрия" (М.–Л.: Гос. техн.-теор. изд-во, 1933).

172. Докажем теперь, что *эллиптическая геометрия является геометрией Римана* (см. *пп*° 63–68).

Будем предполагать, что проективная плоскость, на которой устанавливается эллиптическая геометрия, представляет собой бесконечно удаленную плоскость евклидова пространства E, дополненного бесконечно удаленными элементами. Пусть в евклидовом пространстве E задана декартова прямоугольная система координат x, y, z с началом в точке O. Исходя из этих координат, введем однородные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 (см. n° 102). Будем считать, что пространство E дополнено не только бесконечно удаленными, но также и мнимыми элементами (см. n° 127).

Уравнение $x_4 = 0$ определяет бесконечно удаленную плоскость. Уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ определяет на этой плоскости нулевую линию 2-го порядка. Примем ее в качестве абсолюта эллиптической геометрии на плоскости $x_4 = 0$. Одновременно установим на этой плоскости основные отношения римановой геометрии так, как это делалось в n° 67. Нам надлежит установить тождественность этих двух геометрий.

Сопоставляя отношения связи и порядка в этих геометриях, убедимся, что они одинаковы (такие же, как отношения связи и порядка в проективной геометрии). Остается выяснить вопрос о конгруэнтности фигур; именно, нужно показать, что две фигуры плоскости $x_4 = 0$, конгруэнтные в смысле эллиптической геометрии, будут конгруэнтны также в смысле римановой геометрии, и обратно. Иначе говоря, нужно показать, что каждое преобразование точек плоскости $x_4 = 0$, которое является движением в смысле эллиптической геометрии, будет движением в смысле римановой геометрии, и обратно.

Рассмотрим какую-нибудь сферу k, центр которой предположим находящимся в точке O. Сопоставим с произвольной точкой M плоскости $x_4 = 0$ пару диаметрально противоположных точек сферы k, которые получаются проектированием точки M из центра сферы k. С произвольной фигурой F плоскости $x_4 = 0$ сопоставим на сфере k фигуру, состоящую из пар диаметрально противоположных точек, которые соответствуют точкам фигуры F. Согласно n° 67 две фигуры плоскости $x_4 = 0$ считаются конгруэнтными в смысле римановой геометрии, если конгруэнтны соответствующие им фигуры на сфере k. Отсюда следует, что на плоскости $x_4 = 0$ каждое движение в смысле римановой геометрии представляет собой такое преобразование точек, при котором образы и прообразы суть проекции образов и прообразов при некотором вращении сферы k вокруг центра или при некотором зеркальном отражении сферы k относительно диаметральной плоскости.

Заметим теперь, что каждое вращение сферы k вокруг центра или зеркальное отражение этой сферы относительно диаметральной плоскости определяется в декартовых прямоугольных координатах формулами вида:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, \end{aligned} \tag{1}$$

где x', y', z' — координаты образа, x, y, z — координаты прообраза. Коэффициенты в формулах (1) связаны условием

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2}$$

Если x, y, z — декартовы координаты какой-нибудь точки на сфере k, то проекция этой точки на плоскость $x_4 = 0$ имеет в качестве однородных координат числа x_1, x_2, x_3, пропорциональные x, y, z (см. n° 102). Отсюда следует, что на плоскости $x_4 = 0$ каждое движение в смысле римановой геометрии определяется формулами вида:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}$$

где x_1', x_2', x_3' — координаты образа, x_1, x_2, x_3 — координаты прообраза, ρ — любое число, не равное нулю. Вследствие тождества (2) всякий раз, когда $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, будет также $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$. Таким образом, на плоскости $x_4 = 0$ каждое движение в смысле римановой геометрии является проективным преобразованием, автоморфным относительно нулевой линии $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 0$. Этим доказано, что на плоскости $x_4 = 0$ каждое движение в смысле римановой геометрии будет также движением в смысле эллиптической геометрии с абсолютом $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Докажем обратное, т. е. что каждое движение в смысле эллиптической геометрии является движением в смысле римановой геометрии. Рассмотрим какое-нибудь движение в смысле эллиптической геометрии; обозначим его символом f. Возьмем в плоскости $x_4 = 0$ произвольную точку M и произвольную направленную прямую a, проходящую через M. Движение f переводит точку M в некоторую точку M' и направленную прямую a — в некоторую направленную прямую a'. Пусть f_1 и f_2 — два движения в смысле римановой геометрии, каждое из которых переводит M в M' и a в a'. Согласно ранее доказанному f_1 и f_2 суть движения в смысле эллиптической геометрии. Но в эллиптической геометрии существуют т о л ь к о д в а движения, переводящие M в M' и a в a' (см. n° 168, теорема Б). Следовательно, f совпадает либо с f_1, либо с f_2, т. е. произвольно взятое движение в смысле эллиптической геометрии является движением в смысле римановой геометрии. Итак, на плоскости $x_4 = 0$ множество всех движений в смысле эллиптической геометрии совпадает с множеством всех движений в смысле римановой геометрии. Тем самым тождественность этих геометрий доказана.

173. Г р у п п а К л е й н а. Теперь мы покажем, что и геометрия Евклида является геометрией некоторой группы проективных автоморфизмов.

Возьмем на проективной плоскости какую-нибудь прямую и обозначим ее символом ∞; на прямой ∞ возьмем любые две мнимые точки I_1 и I_2, которые в произвольной системе проективных однородных координат имеют комплексно сопряженные координаты.

Для удобства последующих выкладок предположим координатную систему выбранной с таким расчетом, чтобы прямая ∞ представлялась уравнением $x_3 = 0$ и чтобы координатами точек I_1 и I_2 были числа $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$.

Мы будем рассматривать *совокупность проективных преобразований, автоморфных относительно пары точек I_1 и I_2*. Эту совокупность, которая согласно n° 162 является группой, мы назовем группой Клейна.

Постараемся получить аналитические представления автоморфизмов Клейна. С этой целью прежде всего заметим, что все автоморфизмы Клейна являются вместе с тем автоморфизмами относительно прямой $x_3 = 0$, поэтому они могут быть аналитически представлены формулами

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= \qquad\qquad\qquad\quad c_{33}x_3 \end{aligned} \tag{$*$}$$

(подробнее по этому поводу см. n° 163).

Далее мы должны учесть две возможности:

1) автоморфизм может каждую точку I_1 и I_2 оставить на своем месте;

2) автоморфизм может перевести точку I_1 в точку I_2 и точку I_2 — в точку I_1.

В первом случае, подставляя в уравнения ($*$) сначала

$$x_1 = 1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 0, \quad x_1' = 1, \quad x_2' = i, \quad x_3' = 0, \quad \rho' = \rho_1,$$

потом

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = 0, \quad x_1' = 1, \quad x_2' = -i, \quad x_3' = 0, \quad \rho' = \rho_2,$$

получим:

$$\rho_1 = c_{11} + ic_{12}, \quad \rho_1 i = c_{21} + ic_{22}$$

и

$$\rho_2 = c_{11} - ic_{12}, \quad -\rho_2 i = c_{21} - ic_{22}.$$

Отсюда

$$c_{21} = -c_{12}, \quad c_{22} = c_{11}.$$

Во втором случае, подставляя в уравнения ($*$) сначала

$$x_1 = 1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 0, \quad x_1' = 1, \quad x_2' = -i, \quad x_3' = 0, \quad \rho' = \sigma_1,$$

потом

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = 0, \quad x_1' = 1, \quad x_2' = i, \quad x_3' = 0, \quad \rho' = \sigma_2,$$

найдем:

$$\sigma_1 = c_{11} + ic_{12}, \quad -\sigma_1 i = c_{21} + ic_{22}$$

и

$$\sigma_2 = c_{11} - ic_{12}, \quad \sigma_2 i = c_{21} - ic_{22}.$$

Отсюда

$$c_{21} = c_{12}, \quad c_{22} = -c_{11}.$$

Таким образом, формулы, представляющие автоморфизмы Клейна, необходимо имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= \mp c_{12}x_1 \pm c_{11}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= \phantom{\mp c_{12}x_1 \pm c_{11}x_2 + {}} c_{33}x_3, \end{aligned} \qquad (**)$$

причем верхние знаки второй строки соответствуют автоморфизмам первого типа, а нижние соответствуют автоморфизмам второго типа. Вполне очевидно также, что эти формулы при любых значениях своих параметров определяют автоморфизмы Клейна; в самом деле, если мы подставим в формулы (**) $x_1 = 1, x_2 = \pm i, x_3 = 0$, то получим $x_1' : x_2' : x_3' = 1 : \pm i : 0$. Следовательно, аналитическое представление группы Клейна в однородных координатах найдено.

Имея в виду рассматривать группу Клейна на аффинной плоскости, которая получается путем разреза проективной плоскости вдоль прямой $x_3 = 0$ и для всех точек которой $x_3 \neq 0$, мы перейдем к неоднородным координатам. Положим

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{x_1'}{x_3'} = x', \quad \frac{x_2'}{x_3'} = y'$$

и поделим почленно первые два равенства (**) на третье. Мы получим соотношения

$$x' = \frac{c_{11}}{c_{33}}x + \frac{c_{12}}{c_{33}}y + \frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad y' = \mp\frac{c_{12}}{c_{33}}x \pm \frac{c_{11}}{c_{33}}y + \frac{c_{23}}{c_{33}}.$$

Если ввести новую запись параметров, полагая

$$\frac{c_{11}}{c_{33}} = r\cos\varphi, \quad \frac{c_{12}}{c_{33}} = -r\sin\varphi, \quad \frac{c_{13}}{c_{33}} = u, \quad \frac{c_{23}}{c_{33}} = v,$$

то предыдущие равенства можно будет записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} x' &= r(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + u, \\ y' &= r(\pm x\sin\varphi \pm y\cos\varphi) + v. \end{aligned} \qquad (***)$$

Из этих формул видно, что группа Клейна совпадает с совокупностью таких преобразований евклидовой плоскости, которые получаются путем сочетания движений, зеркальных отражений и изменения расстояний между всеми точками в r раз. Такие преобразования называют *преобразованиями подобия.*

Таким образом, имеет место следующее фундаментальное предложение:

Если подобные фигуры евклидовой плоскости считать эквивалентными, то евклидову геометрию можно рассматривать как геометрию группы Клейна.

Заметим, что совокупность мнимых прямых, проходящих через точку I_1 или через точку I_2, представляет собой вырожденный пучок второго класса. Поскольку он отображается на себя при всех преобразованиях группы Клейна, мы назовем его *абсолютом* этой группы. Применяя этот термин, можно сказать, что геометрия Евклида есть геометрия группы автоморфизмов относительно некоторого вырожденного абсолюта.

174. Свойства циклических точек и формула Лагерра. Теперь мы будем исходить из рассмотрения евклидовой плоскости. Введем на ней декартовы ортогональные координаты x, y и вслед за тем однородные координаты x_1, x_2, x_3, считая, что точка с декартовыми координатами x, y имеет однородные координаты x_1, x_2, x_3 ($x_3 \neq 0$), если $x_1 : x_3 = x$, $x_2 : x_3 = y$. Наконец, дополним евклидову плоскость бесконечно удаленной прямой $x_3 = 0$. Точки $I_1(1, i, 0)$ и $I_2(1, -i, 0)$ называются круговыми или *циклическими* точками дополненной евклидовой плоскости. Такое название дается им потому, что они являются общими точками всех окружностей. В самом деле, уравнение любой окружности в однородных координатах

$$x_1^2 + x_2^2 + 2Ax_1x_3 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2 = 0 \tag{$*$}$$

удовлетворяется при $x_1 = 1, x_2 = \pm i, x_3 = 0$, следовательно, окружность ($*$) проходит через точки I_1 и I_2.

Мнимые прямые, проходящие через какую-либо циклическую точку, называются *изотропными* или *минимальными*.

Уравнение изотропной прямой, проходящей через точку I_1, имеет вид $x_1+ix_2+cx_3 = 0$; уравнение изотропной прямой, проходящей через точку I_2, имеет вид $x_1 - ix_2 + cx_3 = 0$. В неоднородных координатах изотропные прямые определяются уравнениями вида

$$y = ix + l$$

или

$$y = -ix + l.$$

Замечательно, что расстояние между любыми двумя конечными точками изотропной прямой равно нулю. В самом деле, если $X_1(x_1, y_1)$ и $X_2(x_2, y_2)$ — две конечные точки изотропной прямой, то

$$y_2 - y_1 = \pm i(x_2 - x_1),$$

откуда

$$\rho(X_1, X_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + i^2} = 0.$$

Благодаря указанному свойству изотропные прямые и называют минимальными. Очевидно, через каждую вещественную точку (x_0, y_0)

проходят две изотропные прямые

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0);$$

обозначим их через j_1 и j_2. Пусть u_1 и u_2 — две вещественные прямые, проходящие через (x_0, y_0), с угловыми коэффициентами k_1 и k_2. Мы можем составить сложное отношение двух пар прямых u_1, u_2 и j_1, j_2, пользуясь формулой, выведенной в n° 119:

$$(u_1 u_2 j_1 j_2) = \frac{i - k_1}{k_2 - i} : \frac{-i - k_1}{k_2 + i}.$$

Эта величина является инвариантом группы Клейна, и естественно ожидать, что она связана определенным соотношением с евклидовой величиной угла между прямыми u_1 и u_2. Действительно, обозначив величину $\angle(u_1, u_2)$ через φ, так что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

и произведя нижеуказанные преобразования правой части предыдущего равенства, найдем:

$$(u_1 u_2 j_1 j_2) = \frac{i - k_1}{k_2 - i} : \frac{-i - k_1}{k_2 + i} = \frac{(i - k_1)(k_2 + i)}{(k_2 - i)(-i - k_1)} =$$
$$= \frac{k_1 k_2 + 1 - i(k_2 - k_1)}{k_1 k_2 + 1 + i(k_2 - k_1)} = \frac{1 - i\operatorname{tg}\varphi}{1 + i\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = e^{-2i\varphi}.$$

Отсюда $-2i\varphi = \ln(u_1 u_2 j_1 j_2)$ и

$$\varphi = \frac{i}{2}\ln(u_1 u_2 j_1 j_2). \qquad (**)$$

Формула (**), известная под названием *формулы Лагерра*, представляет евклидов угол в виде проективного инварианта. Она аналогична формулам, выражающим длину отрезка в гиперболической и в эллиптической геометриях (см. n° 169). Источником этой аналогии является принцип двойственности (подробнее об этом см. *Ф. Клейн.* Неевклидова геометрия. — М.–Л. — Киев: ОНТИ НКТП СССР, 1936.– Гл. VI).

На основании изложенного в последних параграфах читатель мог убедиться, что теоретико-групповые методы сводят в единую схему главнейшие геометрические системы (Евклида, Лобачевского, Римана) и тем самым позволяют видеть нечто единое в том, что, казалось бы, является противоположным.

Глава VII

ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО

§ 1. Многомерное аффинное пространство

175. Главным предметом этой главы является пространство Минковского; оно имеет значительный интерес с точки зрения математического аппарата физики, поскольку непосредственно связано с уравнениями специальной теории относительности. Пространство Минковского представляет собой аффинное пространство с некоторой особой метрикой, т. е. аффинное пространство, в котором некоторым образом определены расстояния между точками (тем самым конгруэнтность фигур, движение и т. п.).

В связи с физикой особенно важным оказывается четырехмерное пространство Минковского. Имея в виду изучение этого пространства, мы должны предварительно изложить теорию многомерных аффинных пространств. Изложение дано на основе понятия линейного пространства, в главной части независимо от предыдущих аксиоматических построений.

176. Пусть L — какое-нибудь множество; допустим, что 1) дано правило, согласно которому с каждой парой элементов x, y множества L сопоставлен некоторый элемент того же множества L; мы будем называть его *суммой* x *и* y и обозначать через $x+y$, 2) дано правило, согласно которому с каждой парой x, λ, состоящей из элемента x множества L и вещественного числа λ, также сопоставлен элемент множества L; мы будем называть его *произведением* x *на* λ и обозначать через λx (или $x\lambda$). Действия сложения элементов L и умножения их на вещественные числа могут быть заданы как угодно, но при этом должны соблюдаться требования следующих аксиом:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Среди элементов множества L существует элемент θ такой, что $x + \theta = x$ для любого x; θ называется *нулевым* элементом L.
4. Для каждого x существует такой элемент y, что $x + y = \theta$; элемент y называется *обратным* элементу x и обозначается через $-x$.
5. $1 \cdot x = x$.

6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$; здесь и далее α, β обозначают любые вещественные числа.

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Множество L, для элементов которого определены действия сложения и умножения на вещественные числа с соблюдением перечисленных аксиом, называется вещественным *линейным пространством*, элементы линейного пространства мы будем называть также *векторами*. В дальнейшем мы просто будем говорить о линейном пространстве, не отмечая, что речь идет именно о вещественном пространстве, поскольку иных пространств мы рассматривать не будем.

Одним из простейших конкретных примеров линейного пространства является множество геометрических векторов, сложение которых и умножение на вещественные числа определено по правилам элементарной векторной алгебры.

Из аксиом 1–8 могут быть выведены следующие теоремы (мы приводим их без доказательства, отсылая читателя к любому курсу линейной алгебры):

1) В линейном пространстве содержится только один нулевой элемент.

2) Для каждого элемента x существует только один обратный элемент $-x$.

3) $0 \cdot x = \theta$ для любого x.

4) $\theta \cdot \alpha = \theta$ для любого числа α.

177. Если имеет место равенство

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda l = \theta, \tag{1}$$

где $x, y, \ldots, l$ — векторы, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ — числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля, то говорят, что векторы $x, y, \ldots, l$ *линейно зависимы*; если из (1) следует $\alpha = 0, \beta = 0, \ldots, \lambda = 0$, то векторы $x, y, \ldots, l$ называются *линейно независимыми*.

Линейное пространство называется n-мерным, если в нем имеется n линейно независимых векторов, но любые векторы в числе $n + 1$ линейно зависимы.

Пример. Рассмотрим множество K_n, элементами (векторами) которого являются упорядоченные группы, состоящие из n вещественных чисел каждая: $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Определим операции сложения произвольных векторов $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ и умножения вектора $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ на произвольное вещественное число λ следующими правилами:

$$1)\ x + y = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\}; \quad 2)\ \lambda x = \{\lambda x_1; \ldots; \lambda x_n\}.$$

При этом, как легко проверить, соблюдены все требования аксиом 1–8 (нулевым вектором является $\theta = \{0, 0, \ldots, 0\}$); если $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — произвольный вектор, то обратный ему $-x = \{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}$. Следовательно, K_n с данными операциями представляет собой линейное пространство.

В пространстве K_n имеется n линейно независимых векторов, например: $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}, \{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \{0, 0, 0, \ldots, 1\}$. С другой стороны, любые векторы в числе $n + 1$ линейно зависимы. В самом деле, рассмотрим произвольные векторы $a_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\}, a_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\}, \ldots, a_{n+1} = \{a_{n+1\,1}, a_{n+1\,2}, \ldots, a_{n+1\,n}\}$ и составим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \ldots & a_{n+1\,n} \end{pmatrix}.$$

По известной теореме о ранге матрицы максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов. Но в этой матрице всего n столбцов; следовательно, число линейно независимых столбцов не больше n, значит, и число линейно независимых строк не больше n. Таким образом, строчки этой матрицы, общее число которых $n + 1$, должны быть связаны линейной зависимостью, что означает линейную зависимость векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Итак, в пространстве K_n имеется n линейно независимых векторов, но любые векторы в числе $n + 1$ линейно зависимы. Следовательно, K_n есть n-мерное линейное пространство; его называют n-мерным *координатным* или *арифметическим* пространством.

В линейном n-мерном пространстве каждая группа линейно независимых векторов, взятых в числе n, называется *базисом*. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис, x — произвольный вектор. Так как общее число векторов $x, e_1, \ldots, e_n$ равно $n + 1$, то должно иметь место равенство

$$\alpha x + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n = \theta, \tag{2}$$

где хотя бы одно из чисел $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ отлично от нуля. Число α не может быть равным нулю, так как тогда векторы $e_1, \ldots, e_n$ оказались бы линейно зависимыми. Поэтому мы можем делить на α и привести равенство (2) к виду

$$x = \left(-\frac{\beta_1}{\alpha}\right) e_1 + \ldots + \left(-\frac{\beta_n}{\alpha}\right) e_n;$$

вводя обозначения $-\beta_k/\alpha = x_k$, получим:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n. \tag{3}$$

Выражение числа x по формуле (3) называется *разложением x по базису* $e_1, \ldots, e_n$; числа $x_1, \ldots, x_n$ называются *координатами* x относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$. Легко убедиться, что разложение x по данному базису единственно; в самом деле, допустим, что кроме (3) имеет место еще равенство

$$x = x'_1 e_1 + \ldots + x'_n e_n. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$(x'_1 - x_1)\, e_1 + \ldots + (x'_n - x_n)\, e_n = \theta; \tag{5}$$

так как векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то из (5) получаем: $x'_1 - x_1 = 0, \ldots, x'_n - x_n = 0$, или $x'_1 = x_1, \ldots, x'_n = x_n$, т. е. разложения (3) и (4) не могут отличаться друг от друга. Умножая (3) на число λ, получим:

$$\lambda x = (\lambda x_1) e_1 + \ldots + (\lambda x_n) e_n,$$

т. е. *умножению вектора на число соответствует умножение всех его координат на то же число.*

Пусть, далее, произвольный вектор y разложен по базису $e_1, \ldots, e_n$

$$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n. \tag{6}$$

Складывая почленно (3) и (6), получим:

$$x + y = (x_1 + y_1) e_1 + \ldots + (x_n + y_n) e_n,$$

т. е. *сложению векторов отвечает сложение их соответствующих координат.* Таким образом, если в n-мерном линейном пространстве выбран базис, то задание векторов этого пространства и операции над его векторами полностью арифметизируются, причем совершенно единообразно (независимо от природы тех предметов, которые являются элементами пространства). Иначе говоря, все n-мерные линейные пространства изоморфны одному конкретному n-мерному линейному пространству, именно арифметическому пространству K_n.

178. Пусть в каком угодно линейном пространстве L произвольно заданы линейно независимые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Будем рассматривать множество L' всех линейных комбинаций векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, т. е. множество всех векторов вида

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — любые числа. Очевидно, если x и y — два вектора из L', то $x + y$ также принадлежит L'; если λ — любое число, то λx принадлежит L'; нулевой вектор $\theta = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_m$ и вектор $-x = (-\lambda_1) a_1 + \ldots + (-\lambda_m) a_m$ принадлежат L'. Таким образом, множество L' само является линейным пространством. Оно изоморфно координатному пространству K_m и поэтому m-мерно. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ составляют базис в L'; числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ являются координатами вектора x из L' по этому базису.

179. Пусть даны какое-нибудь множество $\mathfrak{A}$, элементы которого далее называются точками и обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, и некоторое n-мерное линейное пространство L, векторы которого мы будем обозначать малыми латинскими буквами $a, b, x, y, \ldots$ (кроме нулевого вектора, который мы обозначили буквой θ). Предположим, что с каждой упорядоченной парой точек A, B из множества $\mathfrak{A}$ сопоставлен некоторый вектор x из L. Если в паре A, B точка A считается первой и при этом условии с парой A, B сопоставлен вектор x, то мы будем употреблять запись:

$$AB = x.$$

С произвольной парой одинаковых точек сопоставляется один вектор из L, поскольку такую пару считать упорядоченной не имеет смысла. Сопоставление векторов из L с парами точек из $\mathfrak{A}$ может быть каким угодно; предполагается только, что соблюдены требования следующих двух аксиом:

1. *Для любой точки A и для любого вектора x найдется единственная точка B такая, что $AB = x$.*

2. *Если $AB = x$, $BC = y$, то $AC = x + y$. Множество точек, связанное указанным способом с n-мерным линейным пространством, называется n-мерным аффинным пространством.*

Из аксиом 1, 2 легко выводятся две теоремы:

1. *С каждой парой совпавших точек сопоставлен нулевой вектор.*

В самом деле, пусть x — любой вектор и $AA = z$. Согласно аксиоме 1 найдется точка B такая, что $AB = x$, а из аксиомы 2 следует, что $AB = z + x$; таким образом, $z + x = x$ для любого x, откуда $z = \theta$.

2. *Если $AB = x$, то $BA = -x$.*

В самом деле, если $BA = y$, то из аксиомы 2 имеем $AA = x + y$, откуда $x + y = \theta$ и $y = -x$.

Далее для упрощения формулировок мы будем упорядоченные пары точек аффинного пространства просто называть *векторами.* На основании изложенного ясно, что в смысле линейных операций (сложения и умножения на число) упорядоченные пары точек аффинного пространства играют роль, вполне аналогичную свободным геометрическим векторам обычной векторной алгебры. Существенно, однако, что мы имеем дело с векторами в пространстве любой размерности.

180. В аффинном пространстве можно ввести аффинные координаты. Аффинная система координат определяется заданием начала координат O и координатного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Пусть M — произвольная точка; разложим ее радиус-вектор OM по координатному базису:

$$OM = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Коэффициенты этого разложения называются *координатами* точки M в заданной системе.

1/2 15 — 10891

Если M^* — другая точка, то

$$OM^* = x_1^* e_1 + x_2^* e_2 + \ldots + x_n^* e_n.$$

Отсюда

$$MM^* = OM^* - OM = (x_1^* - x_1)\, e_1 + \ldots + (x_n^* - x_n)\, e_n.$$

Таким образом, как и в обычной векторной алгебре, координаты вектора MM^* получаются вычитанием координат точки M из координат точки M^*.

Выведем формулы преобразования аффинных координат при переходе к новому началу O' и к новому базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$. Предположим, что известны координаты $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ точки O' относительно старой системы и коэффициенты разложений векторов нового базиса по старому базису:

$$\begin{aligned} e_1' &= p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + \ldots + p_{1n}e_n, \\ e_2' &= p_{21}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' &= p_{n1}e_1 + p_{n2}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Запишем формулы (1) кратко в виде:

$$e_i' = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} e_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Если M — произвольная точка, то

$$OM = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

$$OM = O'M + OO' = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

Здесь штрихами помечены новые координаты точки M. Сравнивая правые части двух последних соотношений и пользуясь формулами (2), найдем:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k = \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_i' \sum_{k=1}^{n} p_{ik} e_k \right\} + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i' + a_k \right\} e_k.$$

В этой цепочке равенств исходное разложение и разложение, полученное в конце выкладки, даны по одному и тому же базису. Так как разложение по данному базису единственно, получаем:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i' + a_k,$$

или в подробной записи:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{11}x_1' + p_{21}x_2' + \ldots + p_{n1}x_n' + a_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= p_{1n}x_1' + p_{2n}x_2' + \ldots + p_{nn}x_n' + a_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти формулы выражают старые координаты произвольной точки через ее новые координаты. Обозначим через P матрицу, составленную из коэффициентов в правых частях формул (1). Так как векторы $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ линейно независимы, то строки матрицы P также должны быть линейно независимы. Поэтому определитель матрицы P отличен от нуля. Такой же определитель имеет матрица P^*, получаемая транспонированием матрицы P; следовательно, для P^* существует обратная матрица. Очевидно, коэффициенты при $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ в правых частях (3) составляют матрицу P^*. Если обозначить через q_{ik} элементы матрицы $Q = (P^*)^{-1}$, т. е. обратной матрицы для P^*, то из (3) получим:

$$\begin{aligned} x_1' &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n + b_1, \\ x_2' &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \ldots + q_{2n}x_n + b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \ldots + q_{nn}x_n + b_n, \end{aligned} \tag{4}$$

где $b_i = -\sum\limits_{k=1}^{n} q_{ik}a_k$. Формулы (4) выражают новые координаты точки через ее старые координаты.

Согласно изложенному, если формулы (4) отвечают некоторому преобразованию аффинных координат, то определитель матрицы $Q = (q_{ik})$ не равен нулю. Обратно, если заранее написаны формулы вида (4) с любыми числами b_i и с любой матрицей $Q = (q_{ik})$, определитель которой не равен нулю, то эти формулы отвечают некоторому преобразованию аффинных координат. В самом деле, если $\operatorname{Det} Q \neq 0$, то из уравнений $\sum_{k=1}^{n} q_{ik}a_k = -b_i$ найдутся a_k, т. е. найдется начало новой системы; кроме того, обращая матрицу Q, мы найдем P^*, затем P, после чего по формулам (1) найдем новый базис.

181. Для определенности будем дальше считать $n = 4$. В аффинном четырехмерном пространстве естественным образом определяются *прямые, плоскости* и *гиперплоскости.*

Пусть A — данная точка, a — данный вектор ($a \neq \theta$); будем называть *прямой*, проходящей через точку A в направлении вектора a, множество точек M, определяемых уравнением

$$AM = \lambda a \tag{1}$$

при всевозможных численных значениях параметра λ; сама точка A соответствует значению $\lambda = 0$.

Легко понять, что все точки прямой равноправны в том смысле, что каждой из них можно придать роль точки A. В самом деле, если B — какая угодно точка рассматриваемой прямой, отвечающая значению параметра $\lambda = \lambda_1$, то

$$BM = AM - AB = (\lambda - \lambda_1)a = \mu a, \tag{2}$$

где $\mu = \lambda - \lambda_1$. Таким образом, множество точек M, определяемых уравнением (1) с параметром λ, может быть также определено уравнением (2) с параметром μ; в силу уравнения (2) точка B соответствует значению $\mu = 0$.

Пусть теперь даны точка A и два линейно независимых вектора a и b; будем называть *плоскостью*, проходящей через A в направлениях векторов a, b, множество точек M, определяемых уравнением

$$AM = \lambda a + \mu b \tag{3}$$

при всевозможных численных значениях параметров λ и μ.

Наконец, если даны точка A и три линейно независимых вектора a, b, c, то множество точек M, определяемых уравнением

$$AM = \lambda a + \mu b + \nu c \tag{4}$$

при всевозможных численных значениях трех параметров λ, μ, ν, мы будем называть *гиперплоскостью*, проходящей через точку A в направлениях векторов a, b, c.

Как и в случае прямой, легко показать, что все точки плоскости или гиперплоскости равноправны в том смысле, что каждой из них можно придать роль точки A.

Существенно заметить, что гиперплоскость можно рассматривать как трехмерное аффинное пространство. В самом деле, множество L' всех линейных комбинаций векторов a, b, c представляет собой трехмерное линейное пространство (см. $n°$ 178); вместе с тем, если M_1 и M_2 — две точки гиперплоскости, определяемые уравнением (4) при $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_1$ и при $\lambda = \lambda_2, \mu = \mu_2, \nu = \nu_2$, то с упорядоченной парой точек M_1, M_2 сопоставлен вектор

$$M_1M_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)a + (\mu_2 - \mu_1)b + (\nu_2 - \nu_1)c$$

из L'. Это сопоставление удовлетворяет требованиям двух аксиом $n°$ 179; следовательно, гиперплоскость по определению $n°$ 179 есть аффинное пространство, причем трехмерное, поскольку трехмерно линейное пространство L'. Параметры λ, μ, ν в уравнении (4) представляют собой не что иное, как координаты точки M в аффинной системе координат, которая определяется внутри гиперплоскости заданием точки A в качестве начала координат и тройки векторов a, b, c в качестве базиса. Конечно, ту же самую гиперплоскость можно определить уравнением вида (4), взяв вместо точки A любую другую точку этой гиперплоскости и вместо векторов a, b, c — три других линейно независимых вектора из L'; такое изменение уравнения (4) соответствует переходу к другой аффинной системе координат внутри данной гиперплоскости.

Аналогично предыдущему можно показать, что каждая плоскость является двумерным аффинным пространством; каждая прямая представляет собой одномерное аффинное пространство.

182. Из определения прямых, плоскостей и гиперплоскостей непосредственно вытекают следующие предложения:

1) Каковы бы ни были две различные точки A, B, существует одна и только одна прямая, которая проходит через точки A, B (т. е. содержит эти точки); именно, это будет прямая, которая проходит через A в направлении вектора $a = AB$.

2) Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует одна и только одна плоскость, которая проходит через точки A, B, C (именно, плоскость, проходящая через A в направлениях векторов AB, AC).

3) Каковы бы ни были четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, существует одна и только одна гиперплоскость, проходящая через точки A, B, C, D (именно, гиперплоскость, проходящая через A в направлениях векторов AB, AC, AD).

4) Если две различные точки A, B принадлежат некоторой плоскости α, то все точки прямой AB принадлежат плоскости α. Для доказательства достаточно задать плоскость α уравнением

$$AM = \lambda a + \mu b,$$

взяв $a = AB$; тогда все точки прямой AB определяются этим же уравнением при переменном λ и при $\mu = 0$.

5) Если две различные плоскости α, β имеют две общие точки A, B, которые не совпадают друг с другом, то все общие точки плоскостей α, β лежат на прямой AB. В самом деле, если бы среди общих точек плоскостей α, β нашлась точка, не лежащая на прямой AB, то плоскости α, β должны были бы совпасть, вопреки условию.

6) Если три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, принадлежат некоторой гиперплоскости α, то вся плоскость ABC принадлежит α (доказывается аналогично четвертому предложению).

7) Если две различные гиперплоскости α, β имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости.

15 — 10891

Доказательство. Пусть e_1, e_2, e_3 — линейно независимые векторы в гиперплоскости α. Так как гиперплоскости α и β различны, то в гиперплоскости β найдется вектор e_4 такой, что e_1, e_2, e_3, e_4 линейно независимы; кроме того, в гиперплоскости β найдутся еще два вектора e_5, e_6, составляющие независимую тройку вместе с e_4. Так как все пространство четырехмерно, то e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 связаны линейной зависимостью:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = 0;$$

здесь $\lambda_5 \neq 0$. Аналогично имеется зависимость

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_6 e_6 = 0,$$

где $\mu_6 \neq 0$. Положим:

$$a = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \lambda_3 e_3,$$
$$b = \mu_4 e_4 + \mu_6 e_6 = -\mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 - \mu_3 e_3.$$

Векторы a и b принадлежат гиперплоскости α и гиперплоскости β; с другой стороны, эти векторы линейно независимы (так как $\lambda_5 \neq 0$, $\mu_6 \neq 0$). Поэтому, если A — общая точка α и β, то уравнение

$$AM = \lambda a + \mu b$$

определяет плоскость, принадлежащую и α и β. Этой плоскостью исчерпываются все общие точки гиперплоскостей α, β, так как в противном случае α и β должны были бы совпасть (согласно третьему предложению).

8) Если плоскость α имеет общую точку с гиперплоскостью β, то либо α целиком лежит в β, либо α и β пересекаются по прямой (доказывается аналогично предыдущему).

183. Пусть произвольная прямая определена уравнением $AM = \lambda a$; пусть M_1, M_2, M_3 — три различные точки этой прямой, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — соответствующие им значения параметра λ. Будем говорить, что точка M_2 лежит между M_1 и M_3, если $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ или $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$. Если вместо вектора a мы возьмем вектор $b = \sigma a$ ($\sigma \neq 0$), то та же прямая определится уравнением $AM = \mu b$, где $\mu = \dfrac{\lambda}{\sigma}$. Согласно новому уравнению точкам M_1, M_2, M_3 соответствуют значения нового параметра: $\mu_1 = \dfrac{\lambda_1}{\sigma}, \mu_2 = \dfrac{\lambda_2}{\sigma}, \mu_3 = \dfrac{\lambda_3}{\sigma}$. Ясно, что в случае, когда число λ_2 заключено между числами λ_1 и λ_3, μ_2 также заключено между μ_1 и μ_3. Таким образом, высказанное определение не зависит от выбора направляющего вектора прямой; легко показать, что оно не зависит и от выбора точки A.

После того как определено понятие "между", обычным образом определяется отрезок, треугольник и т. п. Внутри каждой плоскости для любого треугольника справедливо утверждение Паша; справедливо утверждение, что каждая прямая, лежащая в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две области, и т. д.

184. В аффинном пространстве естественно определяется *параллельность* двух прямых, прямой и плоскости и т. д. Две прямые, определенные уравнениями

$$A_1M = \lambda a_1, \quad A_2M = \lambda a_2,$$

называются параллельными, если они не совпадают и если их направляющие векторы пропорциональны (т. е. если a_2 равен произведению a_1 на некоторое число). Прямая

$$A_1M = \lambda a_1$$

называется параллельной плоскости

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2,$$

если она не лежит в этой плоскости и если вектор a_1 может быть разложен по векторам a_2, b_2. Прямая

$$A_1M = \lambda a_1$$

называется параллельной гиперплоскости

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2,$$

если она не лежит в этой гиперплоскости и если вектор a_1 может быть разложен по векторам a_2, b_2, c_2. Две плоскости

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1, \quad A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2$$

называются параллельными, если они не совпадают и если векторы a_1, b_1, могут быть разложены по векторам a_2, b_2. Плоскость

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1$$

называется параллельной гиперплоскости

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2,$$

если она не лежит в этой гиперплоскости и если векторы a_1, b_1 могут быть разложены по векторам a_2, b_2, c_2. Наконец, две гиперплоскости

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1, \quad A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2$$

называются параллельными, если они не совпадают и если векторы a_1, b_1, c_1 могут быть разложены по векторам a_2, b_2, c_2. Справедливы следующие утверждения:

1) две прямые параллельны в том и только в том случае, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются; через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит одна и только одна прямая, параллельная данной;

2) прямая и плоскость параллельны в том и только в том случае, если они лежат в одной гиперплоскости и не пересекаются;

3) прямая параллельна гиперплоскости в том и только в том случае, если она ее не пересекает;

4) плоскость параллельна гиперплоскости в том и только в том случае, если она ее не пересекает;

5) две гиперплоскости параллельны в том и только в том случае, если они не пересекаются. В силу изложенных предложений видно, что по крайней мере геометрия трехмерного аффинного пространства, развиваемая в этом разделе, не отличается от геометрии трехмерного аффинного пространства в смысле n° 164 (см. замечание в конце n° 164).

185. Утверждения предыдущего параграфа, как и утверждения n° 183, легко доказать алгебраически (аналогично тому, как делается в обычной аналитической геометрии), если пользоваться уравнениями геометрических образов в аффинных координатах.

Пусть задана аффинная система координат. Тогда каждое уравнение первой степени

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5 = 0 \tag{1}$$

определяет гиперплоскость. В самом деле, если $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ — какое-нибудь решение уравнения (1), то это уравнение может быть записано в виде

$$A_1\left(x_1 - x_1^0\right) + A_2\left(x_2 - x_2^0\right) + A_3\left(x_3 - x_3^0\right) + A_4\left(x_4 - x_4^0\right) = 0. \tag{2}$$

Полагая $x_i - x_i^0 = u_i$, получим:

$$A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 + A_4u_4 = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет три линейно независимых решения:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), \quad (b_1, b_2, b_3, b_4), \quad (c_1, c_2, c_3, c_4),$$

причем каждое решение уравнения (3) представляется в виде линейной комбинации этих трех решений:

$$x_i - x_i^0 = u_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i \tag{4}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4);$$

придавая параметрам λ, μ, ν всевозможные численные значения, мы получим все решения u_i уравнения (3) и вместе с тем все решения x_i

уравнения (1). Если обозначать через M точку с координатами x_i, через A — точку с координатами x_i^0, через a, b, c — векторы, имеющие координаты a_i, b_i, c_i, то числовые равенства (4) будут равносильны одному векторному равенству

$$AM = \lambda a + \mu b + \nu c. \tag{5}$$

Тем самым показано, что множество точек M, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), совпадает с гиперплоскостью, определяемой уравнением (5).

Обратно, каждая гиперплоскость определяется уравнением первой степени вида (1). В самом деле, если гиперплоскость задана уравнением вида (5), то, переходя к равносильным ему уравнениям (4) и исключая параметры λ, μ, ν, мы получим уравнение вида (2), которое очевидным образом приводится к уравнению вида (1).

Из только что доказанных утверждений и из предложений 7), 8) n° 182 следует, что 1) два совместных и независимых уравнения первой степени определяют плоскость; 2) три совместных и независимых уравнения первой степени определяют прямую.

186. В аффинном пространстве можно рассматривать гиперповерхности второго порядка, т. е. гиперповерхности, которые определяются в аффинных координатах уравнением второй степени. Мы не будем излагать классификацию гиперповерхностей второго порядка; в общих чертах она аналогична хорошо известной аффинной классификации поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве. Остановимся только на одном частном случае, который нам будет важен в дальнейшем.

Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — координаты переменной точки M и $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ — координаты постоянной точки A. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_k - x_k^0\right) = 0, \tag{1}$$

левая часть которого есть квадратичная форма аргументов $x_1 - x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_4 - x_4^0$ с коэффициентами g_{ik}; будем обозначать эту форму буквой Φ. Если мы положим $x_i = x_i^0$, то уравнение (1) будет удовлетворено. Это значит, что точка A принадлежит гиперповерхности, определяемой уравнением (1). Пусть M — другая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1). Будем двигать точку M по прямой, идущей из точки A. Тогда разности $x_i - x_i^0$ будут изменяться пропорционально, и левая часть уравнения (1) будет оставаться равной нулю. Следовательно, если некоторая точка M лежит на гиперповерхности (1), то все точки прямой AM лежат на этой гиперповерхности. Гиперповерхность (1), таким образом, состоит из прямых, проходящих через точку A, и поэтому называется конусом второго порядка с вершиной A. Конечно, может случиться, что ни одна точка, кроме A, не удовлетворяет своими координатами уравнению (1); так будет, если Φ — знакоопределенная форма. В этом случае конус называют *мнимым*. Если же Φ — знакопеременная и невырожденная форма (т. е. знакопеременная форма, определитель которой отличен от нуля: $\operatorname{Det} g_{ik} \neq 0$), то конус 1) обладает бесконечным множеством образующих его прямых; 2) является четырехмерным, т. е. не лежит целиком в какой-нибудь гиперплоскости; 3) разделяет пространство на две области, в одной из которых $\Phi > 0$, в другой $\Phi < 0$. Такой конус называется действительным и невырожденным конусом второго порядка. Мы не будем доказывать, что действительный невырожденный конус обладает перечисленными свойствами, а поясним сущность дела на примере. Рассмотрим уравнение

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \left(x_3 - x_3^0\right)^2 - \left(x_4 - x_4^0\right)^2 = 0, \tag{2}$$

левая часть которого есть квадратичная форма относительно $x_i - x_i^0$ с коэффициентами $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -1$, $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. Эта форма не вырождена, так как $\operatorname{Det} g_{ik} = -1 \neq 0$, и знакопеременна (положительна при $x_1 \neq x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 = x_4^0$, отрицательна при $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 \neq x_4^0$). Следовательно, уравнение (2) определяет действительный невырожденный конус второго порядка. Чтобы нагляднее представить себе свойства конуса, определяемого уравнением (2), полезно заметить, что всякая гиперплоскость $x_4 - x_4^0 = C$ пересекает этот конус по трехмерной сфере

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \left(x_3 - x_3^0\right)^2 = C^2$$

аналогично тому, как плоскость, перпендикулярная к оси обычного круглого конуса, пересекает его по окружности. Множество точек, для которых левая часть уравнения (2) отрицательна, называется *внутренней областью конуса* (2). Внутренняя область распадается на *две полости*, в одной из которых $x_4 > x_4^0$, в другой $x_4 < x_4^0$.

187. Теперь мы займемся предложением, которое в дальнейшем будет играть особенно важную роль.

Пусть задана некоторая аффинная система координат и даны четыре функции:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_3' &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_4' &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned} \tag{1}$$

каждая из которых определена на всем пространстве; тем самым дано отображение пространства в себя, поскольку с каждой точкой $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ сопоставлена точка $M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$. *Допустим, что отображение* (1) *является взаимно однозначным отображением пространства на себя* (любой точке M' соответствует один и только один прообраз M); *пусть, кроме того, оно коллинеарно, т. е. любым трем точкам* M_1, M_2, M_3, *лежащим на одной прямой, соответствуют образы* M'_1, M'_2, M'_3, *также лежащие на одной прямой. При этих условиях функции* f_1, f_2, f_3, f_4 *линейны, т. е. имеют вид*

$$\begin{aligned} x'_1 &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + q_{14}x_4 + b_1, \\ x'_2 &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3 + q_{24}x_4 + b_2, \\ x'_3 &= q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3 + q_{34}x_4 + b_3, \\ x'_4 &= q_{41}x_1 + q_{42}x_2 + q_{43}x_3 + q_{44}x_4 + b_4, \end{aligned} \tag{2}$$

причем определитель матрицы $Q = (q_{ik})$ *отличен от нуля.*

Коротко: *если отображение коллинеарно, то оно линейно.*

Мы изложим основные этапы доказательства этой теоремы, опуская некоторые детали рассуждений.

1) Будем рассматривать какое-нибудь взаимно однозначное коллинеарное отображение аффинного пространства на себя. Пусть A, B, C — три точки пространства, не лежащие на одной прямой, α — плоскость, определяемая точками A, B, C. Предположим, что образы A', B', C' этих точек также не лежат на одной прямой, и обозначим через α' плоскость, проходящую через A', B', C'. Тогда образы всех точек плоскости α располагаются в плоскости α'. В самом деле, пусть M — любая точка α; проведем через M в плоскости α две разные прямые a и b так, чтобы a пересекла прямые AC и BC в двух разных точках P, Q, а прямая b пересекла прямые AC и BC в двух разных точках R, S. Из определения рассматриваемого отображения (и из пункта 4 n° 182) следует, что точки P', Q', R', S', соответствующие по отображению точкам P, Q, R, S, лежат в плоскости α'. Но образ M' точки M определяется пересечением прямых $P'Q'$ и $R'S'$, следовательно, точка M' также лежит в плоскости α'.

2) Согласно определению коллинеарного отображения образы точек произвольной прямой a располагаются на определенной прямой a'; будем говорить, что прямая a' соответствует по отображению прямой a. Если в плоскости α, о которой шла речь в предыдущем пункте, некоторые две прямые a, b параллельны, то соответствующие им прямые a', b' в плоскости α' также параллельны (это следует из взаимной однозначности рассматриваемого отображения). Поэтому мы можем дополнить плоскости α и α' бесконечно удаленными точками (аналогично тому, как делалось в nn° 80, 81) и распространить на них данное отображение, считая, что бесконечно удаленная точка прямой a на плоскости α имеет своим образом бесконечно удаленную точку прямой a' на плоскости α'. Итак, каждой точке плоскости α соответствует точка плоскости α'; точкам, которые в плоскости α лежат на одной прямой, соответствуют точки плоскости α', также лежащие на одной прямой; бесконечно удаленной прямой плоскости α соответствует бесконечно удаленная прямая плоскости α'; наконец,

на плоскости α есть три точки A, B, C, которые не лежат на одной прямой и образы которых A', B', C' в плоскости α' также не лежат на одной прямой. Согласно n° 106 такое отображение является проективным отображением дополненной плоскости α на дополненную плоскость α'.

3) Пусть теперь точки A, B, C остаются при рассматриваемом отображении на месте, т. е. совпадают со своими образами. В таком случае плоскость α остается на месте и проективно отображается на себя. Заметим, что вместе с точками A, B, C остаются неподвижными бесконечно удаленные точки прямых CA и CB. Обозначим буквой a прямую, проходящую через точку A и через бесконечно удаленную точку прямой CB, буквой b — прямую, которая проходит через B и через бесконечно удаленную точку прямой CA. Прямые a и b остаются на своих местах; следовательно, остается на месте точка P, в которой они пересекаются. Таким образом, остаются на месте четыре точки A, B, C, P плоскости α, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Отсюда и из теоремы 26 n° 106 следует, что все точки плоскости α остаются на своих местах.

4) Пусть в пространстве имеются четыре точки A, B, C, D, которые не лежат в одной плоскости и при данном отображении пространства остаются на своих местах. Обозначим теперь буквой α гиперплоскость, определяемую точками A, B, C, D, и докажем, что все ее точки остаются на местах. Рассмотрим произвольную точку M гиперплоскости α. Обозначим через K точку пересечения прямой DM с плоскостью ABC; из предыдущего пункта следует, что точка K остается на месте. Аналогично остается на месте точка пересечения прямой CM с плоскостью ABD. Отсюда следует, что и сама точка M остается на месте.

5) Пусть A, B, C, D, E — пять точек пространства, не лежащих в одной гиперплоскости; если эти точки остаются на месте, то все точки пространства остаются на своих местах. Это утверждение выводится из утверждения пункта 4) так же, как утверждение пункта 4) было выведено из утверждения пункта 3).

6) Рассмотрим теперь коллинеарное отображение, данное в условии теоремы; обозначим его символически: $M' = f(M)$. Пусть O, e_1, e_2, e_3, e_4 — начало и базис заданной системы аффинных координат; пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — концы базисных векторов, приложенных к точке O. Из определения базиса следует, что пять точек O, A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в одной гиперплоскости; в таком случае их прообразы $O^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*$ также не лежат в одной гиперплоскости. Поэтому существует система аффинных координат с началом O^* и базисом, составленным из векторов $a_i^* = O^*A_i^*$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Условимся называть эту систему новой, а первоначально данную — старой. Пусть M — произвольная точка пространства, x_i^* — ее координаты относительно новой системы, M' — образ точки M в силу данного

отображения, x'_i — координаты M' в старой системе. Определим еще одно отображение, $M'' = \varphi(M)$, следующим способом: точка M'' имеет в старой системе точно такие же координаты x^*_i, какие M имеет относительно новой системы. Очевидно, что отображение $M'' = \varphi(M)$ взаимно однозначно, причем оно само и обратное ему отображение $M = \psi(M'')$ коллинеарны (в самом деле, если, например, M движется по прямой, которая определяется какими-нибудь тремя уравнениями первой степени в новой системе, то траектория M'' определяется совершенно такими же уравнениями в старой системе и, следовательно, также является прямой). Заметим, что отображение $M = \psi(M'')$ переводит точки O, A_i в точки O^*, A^*_i. Построим теперь отображение $M' = f(\psi(M''))$; иначе говоря, сначала отобразим M'' в точку $M = \psi(M'')$, затем точку M — в точку $M' = f(M)$. Отображение $M' = f(\psi(M''))$ является взаимно однозначным и коллинеарным (так как составляющие его отображения обладают этими свойствами); кроме того, отображение $M' = f(\psi(M''))$ оставляет на месте точки O, A_i, (так как сначала эти точки переходят в точки O^*, A^*_i, а затем возвращаются на свои места). Отсюда и из пункта 5) следует, что при отображении $M' = f(\psi(M''))$ все точки остаются на своих местах, т. е. каждая точка M' совпадает со своим прообразом M''. Следовательно, точка $M' = f(M)$ имеет в старой системе точно такие же координаты, какие M имеет в новой системе: $x'_i = x^*_i$. Но согласно n° 180 новые координаты x^*_i произвольной точки выражаются через ее старые координаты x_i линейно. Таким образом, x'_i являются линейными функциями величин x_i, т. е. имеют вид (2). Неравенство нулю определителя матрицы Q следует из однозначной обратимости формул (2), которая обеспечена условием теоремы.

188. Взаимно однозначное и коллинеарное отображение аффинного пространства на себя называется *аффинным преобразованием* этого пространства. Согласно доказанной теореме *каждое аффинное преобразование представляется в аффинных координатах линейными формулами вида* (2), *с не равным нулю определителем матрицы* Q. Для каждого аффинного преобразования существует обратное преобразование, которое также является аффинным; это следует из доказанной теоремы (так как коллинеарное преобразование представляется линейными формулами, то обратное ему преобразование также представляется линейными формулами и, следовательно, коллинеарно). Очевидно, далее, что произведение двух аффинных преобразований есть аффинное преобразование. Таким образом, все аффинные преобразования данного аффинного пространства составляют группу, ее называют *аффинной группой* этого пространства. Теория инвариантов аффинной группы n-мерного аффинного пространства называется n-мерной *аффинной геометрией*. Введенные выше понятия прямой, плоскости, гиперплоскости, параллельности и т. д. инвариантны относительно аффинной группы, соответственно этому они являются объектами аффинной геометрии.

§ 2. Евклидовы пространства и пространство Минковского

189. Пусть дано n-мерное (вещественное) аффинное пространство $\mathfrak{A}$. Предположим, что с каждой парой векторов x, y этого пространства сопоставлено некоторое вещественное число, обозначаемое далее символом xy, причем соблюдены требования следующих трех аксиом:

1. $xy = yx$.

2. $x(\lambda y + \mu z) = \lambda(xy) + \mu(xz)$, где λ, μ — любые вещественные числа.

Из этих аксиом, в частности, следует, что для нулевого вектора θ и любого вектора x будет $\theta x = 0$ (так как $\theta = 0 \cdot x$, то $\theta x = x\theta = x(0 \cdot x) = 0(xx) = 0$).

3. Если $xy = 0$ для какого-нибудь x и для любого y, то $x = \theta$.

Число xy называется *скалярным произведением* векторов x и y. Аффинное n-мерное пространство с заданным скалярным произведением его векторов называется евклидовым n-мерным пространством (нашим определением введено вещественное евклидово пространство, поскольку мы полагали, что $\mathfrak{A}$ — вещественное аффинное пространство и (x, y) — вещественные числа).

190. Рассматривая какое-нибудь евклидово n-мерное пространство, возьмем в нем произвольную аффинную систему координат; пусть O — начало этой системы, $e_1, \dots, e_n$ — базис. Обозначим через g_{ik} скалярное произведение произвольной пары базисных векторов e_i, e_k:

$$e_i e_k = g_{ik}; \tag{1}$$

согласно аксиоме 1 должно быть $g_{ik} = g_{ki}$. Пусть теперь x и y — любые векторы,

$$x = \sum_{i=1}^{n} = x_i e_i, \quad y = \sum_{k=1}^{n} = y_k e_k \tag{2}$$

— их разложения по данному базису. Перемножим скалярно левые и правые части равенств (2); перемножая правые части почленно (на основании аксиомы 2) и пользуясь таблицей умножения (1) базисных векторов, мы получим:

$$xy = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i y_k; \tag{3}$$

правая часть этого равенства представляет собой билинейную форму от координат векторов x, y с коэффициентами g_{ik}.

Обозначим через g определитель матрицы (g_{ik}); *из аксиомы* 3 *следует, что* $g \neq 0$ (т. е. матрица (g_{ik}) является невырожденной).

В самом деле, если $g = 0$, то можно подобрать вектор $x \neq 0$ так, что для его координат x_i все суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} g_{ik} x_i$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ будут равны нулю; но тогда $xy = 0$ при любом y, что исключено аксиомой 3.

Итак, *в n-мерном евклидовом пространстве скалярное произведение xy выражается билинейной формой от координат векторов x, y, коэффициенты которой составляют симметричную и невырожденную матрицу.*

Пусть теперь дано аффинное n-мерное пространство и мы хотим ввести в нем скалярное произведение, т. е. сделать это пространство евклидовым. С этой целью выберем в данном пространстве аффинную систему координат, назначим числа g_{ik}, соблюдая условие $g_{ik} = g_{ki}$, и с произвольной парой векторов x, y сопоставим число xy по формуле (3). Аксиомы 1 и 2 при этом будут соблюдаться, так как выбранная матрица g_{ik} симметрична и правая часть равенства (3) линейна относительно аргументов x_i и относительно аргументов y_i. Для соблюдения аксиомы 3 необходимо числа g_{ik} брать так, чтобы определитель g_{ik} матрицы (g_{ik}) был не равен нулю. Легко убедиться, что это условие является также и достаточным. В самом деле, допустим что $g \neq 0$; если $xy = 0$ при любом y, то из (3) следует равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} g_{ik}x_i = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а так как $g \neq 0$, то из этих равенств получаем $x_i = 0$ или $x = \theta$.

Итак, если в n-мерном аффинном пространстве определить число xy по формуле (3), взяв в правой части любую билинейную форму с симметричной и невырожденной матрицей, то xy будет удовлетворять всем трем аксиомам скалярного произведения.

Замечание. Как было сейчас показано, аксиома 3 равносильна невырожденности матрицы (g_{ik}). Поэтому аксиому 3 называют *условием невырожденности.*

191. В евклидовом пространстве рассматриваются следующие важные понятия:

1. *Ортогональность векторов, прямых и т. д.* Векторы x и y называются *ортогональными* или *перпендикулярными* друг к другу, если $xy = 0$. Две прямые называются ортогональными, если ортогональны их направляющие векторы; прямая и плоскость ортогональны, если направляющий вектор прямой ортогонален каждому направляющему вектору плоскости; аналогично определяется ортогональность прямой и гиперплоскости.

2. *Норма вектора.* Норма вектора x обозначается символом $\|x\|$ и определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{x^2}, \tag{1}$$

где $x^2 = xx$. Для определенности мы будем предполагать перед корнем знак плюс. Однако следует иметь в виду, что данное выше общее определение скалярного произведения не исключает случая $x^2 < 0$; в этом случае вектор имеет мнимую норму. Не исключается также возможность $\|x\| = 0$ при $x \neq 0$.

Вектор x называется *единичным*, если $x^2 = 1$, *мнимо-единичным*, если $x^2 = -1$, *изотропным*, если $x^2 = 0$ при $x \neq \theta$.

Из формул (3) n° 190 и (1) n° 191 следует выражение нормы вектора в координатах:

$$\|x\|^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i x_k. \tag{2}$$

Здесь справа стоит квадратичная форма, аргументами которой являются координаты вектора x; ее называют *метрической формой евклидова пространства*. Поскольку $\operatorname{Det} g_{ik} \neq 0$, метрическая форма является невырожденной.

3. *Расстояние между двумя точками.* Расстояние между точками A и B полагается равным норме вектора AB:

$$\rho(A, B) = \|AB\|.$$

Будем обозначать координаты точек большими буквами (чтобы не путать их с координатами векторов). Пусть точки A и B имеют координаты $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$. Тогда координатами вектора AB будут $x_1 = X_1^* - X_1$, $x_2 = X_2^* - X_2$ и т. д.; отсюда и из формулы (2) получаем:

$$\rho^2(A, B) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \left(X_i^* - X_i\right)\left(X_k^* - X_k\right). \tag{3}$$

Общее определение евклидова пространства не исключает, что расстояние между некоторыми точками может быть мнимым или равным нулю. Пусть A — фиксированная точка с координатами X_i^0, M — переменная точка, координаты которой мы обозначим через X_i. Будем искать все точки M, которые находятся на нулевом расстоянии от A; для координат этих точек получается уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \left(X_i - X_i^0\right)\left(X_k - X_k^0\right) = 0. \tag{4}$$

Если метрическая форма является знакоопределенной, то уравнение (4) удовлетворяется только при $X_i = X_i^0$; в этом случае $\rho(A, M) = 0$ только тогда, когда M совпадает с A. Если же метрическая форма знакопеременна, то уравнение (4) определяет действительный невырожденный конус второго порядка с вершиной A, называемый *изотропным конусом* в точке A (изотропный конус не вырожден, поскольку не вырождена метрическая форма; см. n° 186). Прямые, образующие изотропный конус, называются *изотропными прямыми*. Каждая изотропная прямая характеризуется тем, что для любой пары ее точек расстояние равно нулю.

192. В аффинном пространстве каждая прямая, плоскость или гиперплоскость в свою очередь является аффинным пространством соответствующей размерности (см. n° 181). Если аффинное пространство превращено в евклидово, т. е. для любой пары его векторов определено скалярное произведение, то тем самым определено скалярное произведение для любой пары векторов данной прямой, данной плоскости или данной гиперплоскости. Поэтому данная прямая, данная плоскость или данная гиперплоскость становится евклидовым пространством соответствующей размерности, если внутри этой прямой, плоскости или гиперплоскости соблюдается условие невырожденности, чего может и не быть. Именно, по условию невырожденности, если $xy = 0$ для определенного x и для *любого* y, то $x = \theta$; но может случиться, что на некоторой прямой, плоскости или гиперплоскости есть вектор $x \neq \theta$ такой, что $xy = 0$ для *любого* y, *лежащего на этой прямой, плоскости* или *гиперплоскости*. Например, скалярное произведение любых двух векторов, лежащих на изотропной прямой, равно нулю. Аналогично прямым те плоскости и гиперплоскости евклидова пространства, внутри которых не соблюдается условие невырожденности, называются *изотропными*.

193. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис аффинной системы координат, в которой метрическая форма пространства имеет вид (2) n° 191. Перейдем к новому базису $e'_1, \dots, e'_n$, полагая

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} e_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \operatorname{Det} p_{ik} \neq 0; \tag{1}$$

тогда старые координаты x_i произвольного вектора x выражаются через его новые координаты x'_i формулами

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x'_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

(См. n° 180; положения нового и старого начал координат нас не интересуют, поскольку мы сейчас имеем дело с координатами векторов, а не точек; формулы преобразования координат векторов однородны, т. е. свободные члены в правых частях этих формул равны нулю.) Подставим в метрическую форму (2) n° 191 вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ их выражения через $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$; тем самым мы приведем метрическую форму к новым координатам. Согласно теории квадратичных форм коэффициенты p_{ik} линейного преобразования (2) можно подобрать так (соблюдая условие $\operatorname{Det} p_{ik} \neq 0$), что в новых координатах метрическая форма примет канонический вид, т. е. будет содержать только члены с квадратами координат, число этих членов будет равно n (вследствие невырожденности формы), а коэффициентами при них будут служить числа $+1$ или -1. Иначе говоря, если мы обозначим коэффициенты преобразованной формы через σ_{ik}, то получим:

$$\sigma_{ii} = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sigma_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

В найденных специальных координатах имеем:

$$\|x\|^2 = x_1'^2 + \ldots + x_m'^2 - x_{m+1}'^2 - \ldots - x_n'^2;$$

здесь первые m коэффициентов σ_{ii} положительны, чего всегда можно достигнуть надлежащей нумерацией координат. Случаи, когда в этом выражении все коэффициенты положительны ($m = n$) или все отрицательны ($m = 0$), не исключаются. Учтем, что $e_i'e_k' = \sigma_{ik}$; отсюда следует, что

$$e_1'^2 = \ldots = e_m'^2 = +1, \quad e_{m+1}'^2 = \ldots = e_n'^2 = -1,$$
$$e_i'e_k' = 0, \quad i \neq k,$$

т. е. базисные векторы единичны или мнимо-единичны и попарно ортогональны. Такой базис называется *ортонормированным*. Нами доказано, что в каждом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду может быть выполнено бесконечно многими способами; это означает, что *в евклидовом пространстве существует бесконечно много различных ортонормированных базисов.* Согласно закону инерции теории квадратичных форм число отрицательных членов в каноническом представлении метрической формы не зависит от способа приведения ее к каноническому виду. Это число выражает геометрические свойства данного евклидова пространства и называется его *индексом.* Индекс вместе с тем есть число мнимо-единичных векторов в любом ортонормированном базисе.

Если индекс равен нулю, то норма вектора, скалярное произведение двух векторов и т. д. выражаются формулами, которые вполне аналогичны хорошо известным формулам обыкновенной аналитической геометрии. В этом случае геометрические свойства пространства по существу не отличаются от свойств обычного трехмерного евклидова пространства, точнее, могут отличаться только по размерности. Соответственно евклидово пространство с нулевым индексом называется *собственно евклидовым*; остальные евклидовы пространства называются *псевдоевклидовыми.* Евклидово пространство с индексом, равным единице, называется пространством *Минковского*; оно и будет предметом нашего дальнейшего изложения.

194. Пусть в пространстве Минковского введена система координат с каким-нибудь началом O и с ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_n$. Базисные векторы мы предположим занумерованными так, что $e_1^2 = \ldots = e_{n-1}^2 = +1$, $e_n^2 = -1$. Тогда норма вектора x с координатами x_i выразится формулой

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2; \tag{1}$$

для скалярного произведения двух векторов x, y с координатами x_i, y_i получим выражение

$$xy = x_1 y_1 + \ldots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n; \tag{2}$$

для квадрата расстояния между двумя точками $A(X_i)$, $B(X_i^*)$ будем иметь

$$\rho^2(A, B) = (X_1^* - X_1)^2 + \ldots + \left(X_{n-1}^* - X_{n-1}\right)^2 - (X_n^* - X_n)^2. \tag{3}$$

Изотропный конус с вершиной $A(X_1^0, \ldots, X_n^0)$ в данных координатах определяется уравнением

$$\left(X_1 - X_1^0\right)^2 + \ldots + \left(X_{n-1} - X_{n-1}^0\right)^2 - \left(X_n - X_n^0\right)^2 = 0 \tag{4}$$

и является действительным и невырожденным. Точки, в которых левая часть уравнения (4) отрицательна, составляют внутреннюю область изотропного конуса; внутренняя область распадается на две полости, в одной из которых $X_n > X_n^0$, в другой $X_n < X_n^0$.

195. Для наглядности рассмотрим некоторые объекты пространства Минковского в случаях $n = 2$ и $n = 3$.

1. Построим модель двумерной геометрии Минковского на евклидовой плоскости. Условимся, прежде всего, точки, векторы и линейные операции над векторами понимать обычным образом. Выберем систему аффинных координат с началом O и базисом e_1, e_2; координаты X_1, X_2 произвольной точки M будут также иметь обычный смысл (например, X_1 изображается отрезком, который отсекает прямая, проходящая через M параллельно второй оси; конечно, этот отрезок должен измеряться масштабом e_1). Более того, ничто не мешает нам взять векторы e_1, e_2 одинаковой длины и перпендикулярными друг другу с евклидовой точки зрения. Тогда выбранная система координат будет просто декартовой прямоугольной. Однако скалярное произведение двух векторов x, y с координатами x_i, y_i $(i = 1, 2)$ мы введем в смысле геометрии Минковского, полагая

$$xy = x_1 y_1 - x_2 y_2;$$

соответственно норма вектора x определится равенством

$$\|x\|^2 = x_1^2 - x_2^2.$$

Изотропный конус, вершину которого для простоты мы возьмем в начале координат, дается уравнением

$$X_1^2 - X_2^2 = 0;$$

он состоит из двух евклидовых координатных биссектрис (рис. 158).

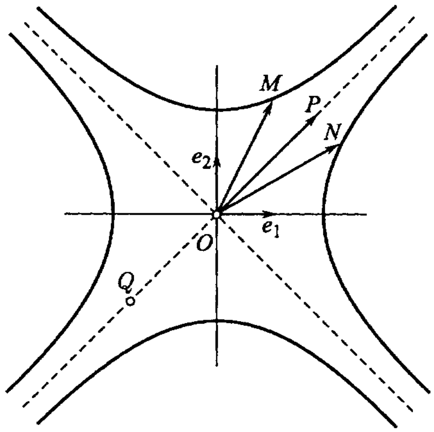


Рис. 158

Вектор OP на любой из этих биссектрис имеет норму, равную нулю; любые точки P, Q координатной биссектрисы находятся на нулевом расстоянии друг от друга. Внутренняя область изотропного конуса определяется неравенством $X_1^2 - X_2^2 < 0$; ее составляют точки, лежащие внутри двух вертикальных углов, один из которых ограничен верхними лучами биссектрис, другой — нижними. Всякая точка M, расположенная во внутренней области изотропного конуса, находится на мнимом расстоянии от начала координат. Пусть $\rho(O, M) = ai$; тогда все точки, которые имеют то же расстояние от точки O, удовлетворяют уравнению

$$X_1^2 - X_2^2 = -a^2.$$

В смысле геометрии Минковского эти точки составляют окружность мнимого радиуса ai; в евклидовом смысле они лежат на обыкновенной гиперболе (поскольку последнее уравнение определяет гиперболу с вершинами на второй координатной оси). Всякая точка N, расположенная во внешней области изотропного конуса, находится на действительном расстоянии от точки O. Пусть $\rho(O, N) = a$; тогда все точки, находящиеся на том же расстоянии от O, удовлетворяют уравнению

$$X_1^2 - X_2^2 = a^2.$$

В евклидовом смысле это уравнение определяет гиперболу с вершинами на первой координатной оси; в смысле геометрии Минковского эта же гипербола является окружностью действительного радиуса a.

Векторы OM и ON с координатами (x_1, x_2), (y_1, y_2) перпендикулярны друг другу в смысле Минковского, если $x_1y_1 - x_2y_2 = 0$; в евклидовом смысле это равенство выражает симметрию направлений OM и ON относительно координатных биссектрис. В частности, два вектора, лежащие на одной координатной биссектрисе, перпендикулярны друг другу в смысле геометрии Минковского.

2. Построение модели трехмерной геометрии Минковского можно выполнить аналогично предыдущему в трехмерном евклидовом пространстве. Положим в основу обычную прямоугольную систему

координат с базисом e_1, e_1, e_3; для двух произвольных векторов x, y с координатами x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ определим скалярное произведение в смысле Минковского формулой

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Тогда норма вектора x будет определяться формулой

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,$$

изотропный конус — уравнением

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0,$$

его внутренняя область — неравенством

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 < 0.$$

С евклидовой точки зрения изотропный конус является обычным конусом вращения вокруг третьей координатной оси; его внутренняя область состоит из двух полостей этого конуса. Всякая точка, лежащая внутри изотропного конуса, находится на мнимом расстоянии от начала координат. Если это расстояние равно ai, то все точки, которые находятся на том же расстоянии от точки O, образуют сферу мнимого радиуса ai, в евклидовом смысле она является двухполостным гиперболоидом, имеющим уравнение

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = -a^2.$$

Евклидов однополостный гиперболоид, который определяется уравнением

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = a^2,$$

изображает в геометрии Минковского сферу действительного радиуса a.

Если в формулах, выражающих xy и $\|x\|^2$, третьи координаты положить равными нулю, то получатся двумерные формулы обычной векторной алгебры. Это означает, что в координатной плоскости, которая проходит через векторы e_1, e_2, имеет место собственно евклидова геометрия. Вообще, всякая плоскость, которая проходит через начало координат и не содержит ни одной образующей изотропного конуса, является двумерным собственно евклидовым пространством (поскольку на ней нет изотропных прямых). Всякая плоскость, которая проходит через начало координат и пересекает изотропный конус по двум образующим, является двумерным пространством Минковского. Изотропный конус метрики Минковского *на этой плоскости* и его внутренняя область определяются пересечением плоскости с пространственным изотропным конусом. Если плоскость, секущая пространственный изотропный конус, превращается в его касательную плоскость, то прямые, из которых составлен изотропный конус *плоскости*, сливаются и внутренняя область этого конуса исчезает. Изотропный конус такой плоскости оказывается вырожденным. Следовательно, каждая плоскость, касательная к изотропному конусу трехмерного пространства Минковского, является изотропной плоскостью этого пространства.

Свойства четырехмерного пространства Минковского следует представлять себе по естественной аналогии с рассмотренной трехмерной моделью.

196. Каждое аффинное преобразование пространства Минковского, при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами, мы будем называть *движением* в этом пространстве. Пусть в пространстве Минковского, которое мы предположим четырехмерным, введена аффинная система координат с началом O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4 ($e_4^2 = -1$). Тогда каждое аффинное преобразование, переводящее точку $M(X_i)$ в точку $M'(X_i')$, представляется формулами вида (2) n° 187; мы запишем их сокращенно:

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k + b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Легко понять, что преобразование (1), вообще говоря, не будет сохранять расстояния между точками; для этого его коэффициенты должны удовлетворять некоторым условиям. Постараемся найти эти условия.

Прежде всего рассмотрим частный случай преобразования (1):

$$X_i' = X_i + b_i. \tag{2}$$

Пусть точки $M(X_i)$ и $N(X_i^*)$ переводятся преобразованием (2) в точки $M'(X_i')$ и $N'(X_i^{*\prime})$; если $x_i = X_i^* - X_i$ — координаты вектора MN, $x_i' = X_i^{*\prime} - X_i'$ — координаты вектора $M'N'$, то вследствие формул (2) имеем: $x_i' = x_i$; отсюда следует, что нормы векторов MN и $M'N'$ одинаковы. Таким образом, преобразование (2) при любых b_i сохраняет расстояние между точками; этот частный случай движения называется *параллельным сдвигом*. Очевидно, параллельный сдвиг можно подобрать так, что начало координат переместится в любую заранее назначенную точку.

В другом частном случае преобразования (1), когда $b_i = 0$, начало координат остается на месте.

Любое преобразование вида (1) можно получить путем последовательного проведения двух рассмотренных преобразований: сначала параллельным сдвигом переместить начало координат вместе с базисом в новое положение, затем произвести преобразование, которое в этих новых координатах задается формулами вида (1) с той же матрицей (q_{ik}), но со свободными членами, равными нулю. Так как параллельный сдвиг явно не представляет интереса, то в дальнейшем мы будем считать формулы (1) однородными:

$$X'_i = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k. \tag{3}$$

Пусть $M(X_i)$ и $N(X_i^*)$ — две произвольные точки, $M'(X'_i)$ и $N'(X_i^{*\prime})$ — их образы, $x_i = X_i^* - X_i$ и $x'_i = X_i^{*\prime} - X'_i$ — координаты векторов MN и $M'N'$. Из формул (3) имеем:

$$x'_i = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} x_k. \tag{4}$$

Равенство расстояний $\rho(M', N')$ и $\rho(M, N)$ равносильно равенству норм векторов $M'N'$ и MN; следовательно, формулы (3) будут определять движение, если коэффициенты q_{ik} подобраны так, что

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \tag{5}$$

При этом соотношение (5) должно соблюдаться, как следствие равенств (4), при любых x_1, x_2, x_3, x_4. Обозначим через σ_{ik} коэффициенты метрической формы в ортонормированных координатах ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = +1$, $\sigma_{44} = -1$, $\sigma_{ik} = 0$, если $i \neq k$), запишем левую часть (5) в виде двойной суммы с коэффициентами σ_{ik} и применим формулы (4):

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} x'_1 x'_k = \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} \left(\sum_{\alpha=1}^{4} q_{i\alpha} x_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^{4} q_{k\beta} x_\beta \right) =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \left(\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} q_{i\alpha} q_{k\beta} \right) x_\alpha x_\beta;$$

правую часть (5) также напишем в виде двойной суммы:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta.$$

Вследствие (5) полученные выражения должны быть одинаковыми; отсюда

$$\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} q_{i\alpha} q_{k\beta} = \sigma_{\alpha,\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Это и есть искомые условия на коэффициенты q_{ik}, при соблюдении которых преобразование (3) или (1) является движением. Условиям (6) можно придать матричную запись. Обозначим, как и раньше, через Q матрицу с элементами q_{ik}, через Q^* — матрицу с элементами $q^*_{\alpha i} = q_{i\alpha}$ (Q^* получается из Q транспонированием), через I — матрицу с элементами σ_{ik}. Тогда соотношения (6) можно записать в виде

$$\sum_{i,k=1}^{4} q^*_{\alpha i}\sigma_{ik}q_{k\beta} = \sigma_{\alpha,\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Но в таком виде они, очевидно, эквивалентны одному матричному равенству:

$$Q^*IQ = I \tag{8}$$

или в подробной записи:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} & q_{41} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} & q_{42} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{43} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, *аффинное преобразование* (1) *является движением тогда и только тогда, когда его матрица Q удовлетворяет условию* (8).

Заметим, что неравенство нулю определителя матрицы Q отсюда уже вытекает само собой; более того, из соотношения (8) имеем: $(\mathrm{Det}\, Q)^2 = 1$, следовательно,

$$\mathrm{Det} Q = \pm 1. \tag{9}$$

197. С помощью формул (6) легко показать, что при любом движении в пространстве Минковского сохраняются скалярное произведение и ортогональность векторов. В самом деле, пусть векторы $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ в результате движения переходят в векторы

$x' = \sum x_i' e_i$, $y' = \sum y_i' e_i$ (разложенные по тому же базису). Тогда

$$x'y' = x_1'y_1' + x_2'y_2' + x_3'y_3' - x_4'y_4' = \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} x_i' y_k' =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} \left(\sum_{\alpha=1}^{4} q_{i\alpha} x_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^{4} q_{k\beta} x_\beta \right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \left(\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} q_{i\alpha} q_{k\beta} \right) x_\alpha x_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 = xy.$$

Итак, $x'y' = xy$. В частности, если $xy = 0$, то $x'y' = 0$, т. е. *образы ортогональных векторов ортогональны*. Отсюда получается важный вывод: *в пространстве Минковского всякое движение переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

198. Если при некотором движении данная точка пространства остается на месте, то изотропный конус пространства, имеющий вершину в данной точке, также остается на месте (его точки перемещаются в новые положения, но остаются на нем). В самом деле, предположим, например, что остается неподвижным начало координат O. Если M — произвольная точка изотропного конуса с вершиной O, то $\rho(O, M) = 0$, а так как при движении расстояния сохраняются, то для образа M' точки M имеем $\rho(O, M') = 0$; следовательно, M' лежит на том же изотропном конусе. Аналогичными рассуждениями можно показать, что при таком движении точки, лежащие внутри изотропного конуса, остаются в его внутренней области; не исключено, однако, что две полости изотропного конуса меняются местами.

199. Множество всех движений в пространстве Минковского составляет группу, так как произведение двух движений есть движение и преобразование, обратное движению, также является движением.

Эти групповые свойства с очевидностью вытекают из определения движений. Группа движений в пространстве Минковского представляет собой одну из подгрупп аффинной группы. Из группы всех движений в пространстве Минковского в свою очередь можно выделить подгруппу движений, оставляющих на месте некоторую точку. Еще более узкую группу составляют те движения, при которых остается на месте каждая полость изотропного конуса.

200. Преобразование

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k + b_i, \quad \operatorname{Det} q_{ik} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

представляющее некоторое движение в пространстве Минковского, называется *общим преобразованием Лоренца*. Общее преобразование

Лоренца характеризуется условием (8) n° 196 на матрицу $Q = (q_{ik})$. Числа b_i, которые могут быть любыми, не играют существенной роли при изучении общих преобразований Лоренца; поэтому, отвлекаясь от чисел b_i часто общим преобразованием Лоренца называют однородное преобразование

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

при том же условии на матрицу Q. Множество всех общих преобразований Лоренца составляет группу, которая называется *общей группой Лоренца*.

Если преобразование (1) представляет движение в пространстве Минковского, при котором каждая полость изотропного конуса остается на месте, то такое преобразование называется просто *преобразованием Лоренца*. Эти преобразования, помимо условия (8) n° 196 на матрицу Q, характеризуются тем, что точку $(0, 0, 0, x_4)$, $x_4 > 0$, переводят в точку (x_1', x_2', x_3', x_4'), $x_4' > 0$. Преобразования Лоренца составляют группу, называемую *группой Лоренца*.

201. Преобразованиям Лоренца (или общим преобразованиям Лоренца) можно дать еще иное геометрическое истолкование.

Пусть дана система координат с началом O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4 ($e_4^2 = -1$); пусть, далее, вводится новая система координат с началом O' и ортонормированным базисом e_1', e_2', e_3', e_4' ($e_4'^2 = -1$). Тогда, если

$$e_i' = \sum_{k=1}^{4} p_{ik} e_k \tag{1}$$

— разложения векторов нового базиса по старому базису, а

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k + b_i \tag{2}$$

— выражения новых координат через старые координаты, то матрица $Q = (q_{ik})$ получается из матрицы $P = (p_{ik})$ с помощью транспонирования и обращения: $Q = (P^*)^{-1}$ (см. n° 180). Так как старый и новый базисы являются ортонормированными, то в обозначениях n° 196 имеем:

$$e_i e_k = \sigma_{ik}, \quad e_i' e_k' = \sigma_{ik}.$$

Отсюда

$$\sigma_{ik} = e_i' e_k' = \sum_{\alpha=1}^{4} p_{i\alpha} e_\alpha \sum_{\beta=1}^{4} p_{k\beta} e_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} (e_\alpha e_\beta) p_{i\alpha} p_{k\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha\beta} p_{i\alpha} p_{k\beta}. \tag{3}$$

Если ввести элементы матрицы P^*, т. е. $p^*_{\beta k} = p_{k\beta}$, то предыдущие равенства примут вид

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{4} p_{i\alpha}\sigma_{\alpha\beta}p^*_{\beta k} = \sigma_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Все эти соотношения равносильны одному матричному равенству

$$PIP^* = I. \tag{5}$$

Но так как матрицы P^* и Q взаимно обратны, то

$$P^*Q = E, \quad Q^*P = E,$$

где E — единичная матрица. Поэтому, умножая обе части равенства (5) слева на матрицу Q^*, справа — на матрицу Q, получим:

$$Q^*PIP^*Q = EIE = I = Q^*IQ,$$

или

$$Q^*IQ = I. \tag{6}$$

Последнее равенство в точности совпадает с равенством (8) n° 196. Следовательно, *всякое преобразование координат, соответствующее переходу от одной ортонормированной системы к новой ортонормированной системе, есть общее преобразование Лоренца* (вообще говоря, неоднородное). Обратно, если базис e_1, e_2, e_3, e_4 является ортонормированным и соблюдено условие (6), то, поскольку из (6) следует (5), затем (4), затем (3), мы получим $e'_i e'_k = \sigma_{ik}$, т. е. новый базис будет также ортонормированным. Следовательно, *всякое общее преобразование Лоренца можно рассматривать как преобразование ортонормированных координат.* При таком истолковании общих лоренцовых преобразований среди них *просто лоренцовы преобразования характеризуются тем, что базисные векторы e_4 и e'_4 находятся в одной полости изотропного конуса.*

202. В заключение этого раздела мы укажем на замечательную связь, которая имеет место между группой Лоренца и группой движений в геометрии Лобачевского. Для простоты изложения будем рассматривать трехмерное пространство Минковского с изотропным конусом

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0. \tag{1}$$

Пересечем этот конус плоскостью $X_3 = 1$. В сечении образуется окружность

$$X_1^2 + X_2^2 = 1, \quad X_3 = 1, \tag{2}$$

которую мы будем обозначать буквой k. Пусть задано однородное преобразование Лоренца

$$\begin{aligned} X'_1 &= q_{11}X_1 + q_{12}X_2 + q_{13}X_3,\\ X'_2 &= q_{21}X_1 + q_{22}X_2 + q_{23}X_3,\\ X'_3 &= q_{31}X_1 + q_{32}X_2 + q_{33}X_3; \end{aligned} \tag{3}$$

ему соответствует движение в пространстве Минковского, переводящее произвольную точку $M(X_1, X_2, X_3)$ в точку $M'(X_1', X_2', X_3')$ и оставляющее на месте начало координат.

С данным преобразованием Лоренца мы сопоставим некоторое преобразование плоскости $X_3 = 1$. Именно, если P — точка пересечения прямой OM с плоскостью $X_3 = 1$, P' — точка пересечения с той же плоскостью прямой OM', то мы будем считать P' образом точки P. Это преобразование нетрудно выразить в координатах.

Пусть $(x, y, 1)$ — координаты точки P; так как O, P, M лежат на одной прямой, то

$$\frac{x}{X_1} = \frac{y}{X_2} = \frac{1}{X_3}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{X_1}{X_3}, \quad y = \frac{X_2}{X_3}.$$

Аналогично, если $(x', y', 1)$ — координаты P', то

$$x' = \frac{X_1'}{X_3'}, \quad y' = \frac{X_2'}{X_3'}.$$

Отсюда и из формул (3) получаем:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{q_{11}x + q_{12}y + q_{13}}{q_{31}x + q_{32}y + q_{33}}, \\ y' &= \frac{q_{21}x + q_{22}y + q_{23}}{q_{31}x + q_{32}y + q_{33}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку $\operatorname{Det} q_{ik} \neq 0$, то отображение плоскости $X_3 = 1$ на себя, которое выражено формулами (4), является проективным (см. n° 112). Учтем, что данное в пространстве преобразование Лоренца оставляет на месте изотропный конус и его внутреннюю область; отсюда следует, что на плоскости $X_3 = 1$ преобразование (4) оставляет на месте окружность k и ее внутреннюю область. Поэтому преобразование (4) есть неевклидово движение в метрике Лобачевского, которая определена на плоскости $X_3 = 1$ внутри абсолюта k (см. n° 170). Мы показали, что каждое преобразование Лоренца индуцирует внутри k на плоскости $X_3 = 1$ некоторое неевклидово движение. Покажем теперь, что по заранее данному внутри k неевклидову движению можно найти, и притом однозначно, индуцирующее его преобразование Лоренца.

Пусть дано неевклидово движение формулами вида (4). Тогда искомое преобразование Лоренца должно иметь вид

$$\begin{aligned} X_1' &= \lambda\,(q_{11}X_1 + q_{12}X_2 + q_{13}X_3)\,, \\ X_2' &= \lambda\,(q_{21}X_1 + q_{22}X_2 + q_{23}X_3)\,, \\ X_3' &= \lambda\,(q_{31}X_1 + q_{32}X_2 + q_{33}X_3)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

где λ — некоторое число $\neq 0$. При любом $\lambda \neq 0$ формулы (5) задают в пространстве аффинное преобразование. Докажем, что при надлежащем выборе λ это аффинное преобразование будет преобразованием Лоренца.

В самом деле, преобразование (4) оставляет на месте окружность k и ее внутреннюю область; отсюда следует, что аффинное преобразование (5) оставляет на месте изотропный конус и его внутреннюю область. Алгебраически это означает, что вследствие равенств (5) имеет место соотношение

$$X_1'^2 + X_2'^2 - X_3'^2 = \sigma\left(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2\right), \tag{6}$$

где σ пропорционально λ^2 с положительным множителем пропорциональности. Выберем λ, соблюдая равенство $\sigma = 1$; тогда преобразование (5) будет выражать движение в пространстве Минковского. Заметим еще, что $q_{33} \neq 0$, так как в противном случае внутренняя точка $(0, 0, 1)$ изотропного конуса будет переводиться преобразованием (5) в наружную точку $(\lambda q_{13}, \lambda q_{23}, 0)$, что исключено. Поэтому мы можем выбрать знак λ так, что $\lambda q_{33} > 0$. При этом условии преобразование (5) оставляет каждую полость изотропного конуса на месте и, следовательно, является преобразованием Лоренца. Ясно, что требуемый выбор λ однозначен.

Итак, трехмерные однородные преобразования Лоренца взаимно однозначно сопоставлены с движениями в двухмерной геометрии Лобачевского. При этом легко проверить, что с произведением двух преобразований Лоренца сопоставлено произведение соответствующих неевклидовых движений. Следовательно, *трехмерная однородная группа Лоренца и группа движений в двухмерной геометрии Лобачевского изоморфны.*

Аналогично можно показать изоморфизм четырехмерной однородной группы Лоренца и группы движений в трехмерной геометрии Лобачевского.

§ 3. Пространство событий специальной теории относительности

203. Пусть рассматривается некоторое событие M. Представим себе, что по существу дела нас интересует не природа события M, а только место этого события и время, когда оно происходит; кроме того, допустим, что событие M происходит в столь малой части пространства и в столь короткий промежуток времени, что можно считать его происходящим в определенной точке и мгновенно. Тогда рассматриваемое событие M будем называть элементарным. Место произвольного элементарного события определяется относительно некоторого заранее выбранного материального тела, и время устанавливается по определенным часам. Например, можно определять место каждого события относительно Земли, а время отсчитывать по часам Пулковской обсерватории.

Пусть выбрано некоторое материальное тело T, относительно которого определяется место произвольного элементарного события; пусть с телом T скреплены три декартовы взаимно перпендикулярные оси и дан масштаб, по отношению к которым место события M характеризуется координатами x, y, z (считая геометрические свойства реального пространства евклидовыми); пусть, наконец, даны часы, по которым момент события M характеризуется числом t (считая равным числу единиц времени от некоторого начального момента). Комплекс тела T, масштаба, осей, часов и начального момента называется *системой отсчета*, числа x, y, z, t называются *координатами* события M в данной системе отсчета.

Выбор системы отсчета может быть изменен; тогда то же самое событие M в новой системе отсчета будет иметь, вообще говоря, другие координаты x', y', z', t'. Если при этом берется прежнее тело T, а меняются только связанные с ним оси, масштаб, единица измерения времени и начальный момент, то изменение системы отсчета и соответствующее преобразование координат событий называется *тривиальным*. В противоположность ему мы будем называть изменение системы отсчета и соответствующее преобразование координат событий *существенным*, если вместо тела T берется другое тело T', *которое движется относительно* T.

Для физики принципиально важным является вопрос о том, как преобразуются координаты событий при существенном изменении системы отсчета. Разумеется, такой вопрос имеет смысл ставить лишь по отношению к каким-нибудь определенным, достаточно обозримым классам систем отсчета. Далее излагается решение этого вопроса для инерциальных систем.

204. Некоторую систему отсчета S назовем *инерциальной*, если каждая свободная материальная точка движется относительно системы S прямолинейно и равномерно. Говоря о свободной материальной точке, мы имеем в виду тело малых размеров, настолько удаленное от других тел, что действием их на это тело можно пренебречь.

Пусть S и S' — две инерциальные системы отсчета, M — произвольное событие. Наша цель — получить или охарактеризовать формулы, которые выражают координаты (x', y', z', t') события M в системе S' через координаты (x, y, z, t) того же события в системе S.

Рассмотрим сначала, как решается этот вопрос с точки зрения классической физики. Прежде всего, в классической физике допускается, что можно произвести всеобщую синхронизацию часов и тем самым для всех инерциальных систем установить единый отсчет времени; тогда $t' = t$. Наряду с этим считается возможным установить единый масштаб для измерений длин отрезков на всех координатных осях систем S и S'. Из этих предположений и из закона сложения скоростей классической кинематики следует, что при некотором специальном выборе координатных осей в системах S и S' координаты любого события M при переходе от системы S к системе S' будут изменяться по формулам

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{1}$$

(координатные оси выбраны так, что ось $O'x'$ скользит по оси Ox, а оси $O'y'$, $O'z'$ остаются параллельными осям Oy, Oz; v — скорость движения S' относительно S).

Таким образом, из допущений классической физики искомые формулы легко выводятся и имеют очень простой вид.

Заметим, однако, что возможность всеобщей синхронизации часов вовсе не так очевидна, как может показаться на первый взгляд. Можно было бы синхронизировать часы на всех инерциальных системах, если бы существовали мгновенно распространяющиеся сигналы. Достаточно было бы в одной инерциальной системе поставить часы на определенную фазу, тотчас подать сигнал на другие системы и там поставить часы на ту же фазу в момент получения сигнала; затем можно было бы унифицировать ход часов, подав второй сигнал через определенный промежуток времени. При этом все инерциальные системы оказались бы равноправными в том смысле, что подача сигнала из любой системы и прием его в любой другой системе происходили бы при одинаковых фазах часов этих систем. Но мгновенно распространяющихся сигналов в природе нет. Если употреблять световые сигналы, то указанным сейчас способом можно установить лишь приближенную синхронизацию часов на инерциальных системах, скорость движения которых друг относительно друга мала по сравнению со скоростью света.

В приближенном смысле не вызывают сомнений также и два других допущения, на которые мы ссылались (возможность унификации масштабов, классический закон сложения скоростей).

Соответственно и формулы (1) приближенно верны, если v мало по сравнению со скоростью света.

Но формулы (1) противоречат экспериментальным данным современной физики больших скоростей. Дело обстоит здесь следующим образом. Давно известно, что законы механики одинаковы во всех инерциальных системах. Этому положению формулы (1) не противоречат, если подразумевать законы классической механики, поскольку ее уравнения инвариантны относительно преобразования по формулам (1). Из формул (1) вместе с тем следует, что законы электродинамики должны зависеть от выбора инерциальной системы, поскольку уравнения электродинамики не инвариантны относительно преобразования (1). Прежде всего, скорость света должна быть разной относительно разных инерциальных систем; именно, если в системе S свет распространяется по направлению оси x со скоростью c, то согласно формулам (1) в системе S' должна наблюдаться скорость света $= c - v$. Однако надлежащие эксперименты не обнаружили такого эффекта. Ввиду этого обстоятельства в физике принят *постулат о независимости скорости света от выбора инерциальной системы отсчета*. Отсюда берет свое начало специальная теория относительности, открытая трудами Лоренца, Пуанкаре, Минковского и, особенно, Эйнштейна, согласно которой не только законы механики, но и законы электродинамики одинаковы во всех инерциальных системах. Исходные допущения классической физики, которые приводят к формулам (1), теория относительности заменяет более точными положениями, согласующимися с экспериментальной физикой больших скоростей. Тем самым и формулы (1) заменяются более точными формулами. Они будут выведены в ближайших параграфах. При этом нам придется существенно использовать геометрические понятия, развитые в двух предыдущих разделах.

205. Пусть S — какая-нибудь инерциальная система отсчета, M — произвольное элементарное событие, t, x, y, z — координаты этого события в системе S (здесь и далее время t считается первой координатой для удобства записи некоторых последующих формул). Обозначим через $\mathfrak{A}$ аффинное четырехмерное пространство, в котором любым способом выбраны начало O и базис a_1, a_2, a_3, a_4 аффинной системы координат. Условимся с событием M сопоставлять точку пространства $\mathfrak{A}$, которая относительно выбранных начала и базиса определяется координатами t, x, y, z; будем говорить, что эта точка изображает событие M в пространстве $\mathfrak{A}$. Точку, изображающую событие, будем обозначать той же буквой, что и само событие.

Аффинное четырехмерное пространство $\mathfrak{A}$, точки которого изображают всевозможные элементарные события, называется *пространством событий*. Отметим, что события, которые в течение некоторого промежутка времени $t_1 \leq t \leq t_2$ происходят в точке физического пространства, неподвижной относительно осей системы S и имеющей координаты x_0, y_0, z_0, изображаются в пространстве $\mathfrak{A}$ отрезком $t_1 \leq t \leq t_2$, $x = x_0, y = y_0, z = z_0$; очевидно, такой отрезок параллелен вектору a_1. Соответственно этому координатная ось, которая в пространстве событий направлена по базисному вектору a_1, называется *временно́й осью*.

206. Теперь мы сделаем первый шаг в решении задачи о преобразовании координат событий при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Пусть, кроме системы S, рассматривается другая, также инерциальная система отсчета S'; t, x, y, z — координаты произвольного события M относительно S; t', x', y', z' — координаты того же события относительно S'. Тогда t', x', y', z' являются определенными функциями от t, x, y, z:

$$\begin{aligned} t' &= f(t, x, y, z), \\ x' &= \varphi(t, x, y, z), \\ y' &= \psi(t, x, y, z), \\ z' &= \chi(t, x, y, z). \end{aligned} \qquad (1)$$

Предположим, что 1) f, φ, ψ, χ определены при любых значениях t, x, y, z; 2) по любым значениям t', x', y', z' из уравнений (1) определяются, и притом единственным образом, t, x, y, z.

Тем самым мы предполагаем, что относительно каждой из систем S, S' события могут происходить где угодно и когда угодно; эти предположения означают также, что системы S, S' инерциальны все время.

Мы докажем, что формулы (1) *линейны, т. е. имеют вид*

$$\begin{aligned} t' &= c_{11}t + c_{12}x + c_{13}y + c_{14}z + d_1, \\ x' &= c_{21}t + c_{22}x + c_{23}y + c_{24}z + d_2, \\ y' &= c_{31}t + c_{32}x + c_{33}y + c_{34}z + d_3, \\ z' &= c_{41}t + c_{42}x + c_{43}y + c_{44}z + d_4. \end{aligned} \tag{2}$$

Кроме того, $\operatorname{Det} c_{ik} \neq 0$.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, нам придется сделать еще одно физическое допущение. Именно, мы будем предполагать, что через любое место физического пространства, в любой момент времени, в любом направлении может пролетать свободная материальная точка с любой скоростью, известной экспериментальной физике (мы не делаем, однако, предположения, что материальная точка может лететь вообще с любой скоростью, так как произвольно больших скоростей никто не наблюдал и такое предположение не обосновано; более того, как будет видно из дальнейшего, оно оказалось бы и неверным). Говоря о скорости материальной точки, будем иметь в виду скорость относительно системы S. Обозначим через C такое положительное число, что любая скорость, меньшая C, достижима.

Пусть какая-нибудь свободная материальная точка летит в пространстве. Так как система S инерциальна, то по отношению к системе S движение этой точки является прямолинейным и равномерным. Поэтому уравнения движения такой точки должны иметь вид

$$x - x_0 = l(t - t_0), \quad y - y_0 = m(t - t_0), \quad z - z_0 = n(t - t_0), \tag{3}$$

где l, m, n — составляющие скорости летящей точки, (x_0, y_0, z_0) — то место, где находится точка в момент $t = t_0$. В силу допущения, которое мы приняли в начале доказательства, числа t_0, x_0, y_0, z_0 можно считать любыми. Что касается l, m, n, то они должны удовлетворять неравенству

$$l^2 + m^2 + n^2 < C^2. \tag{4}$$

Тот факт, что летящая точка в момент t находится в месте (x, y, z), есть событие, которое в пространстве событий $\mathfrak{A}$ изображается точкой (t, x, y, z). Весь процесс движения летящей точки изображается в пространстве событий некоторой прямой, так как t, x, y, z связаны тремя независимыми уравнениями (3) первой степени (см. n° 185).

Обозначим эту прямую буквой b. Заметим, далее, что из соотношений (3) и (4) следует неравенство

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - C^2(t - t_0)^2 < 0, \qquad (5)$$

которое определяет внутреннюю область некоторого действительного невырожденного конуса второго порядка с вершиной (t_0, x_0, y_0, z_0) (см. n° 186); мы обозначим его буквой K_0. Так как неравенство (5) есть следствие соотношений (3) и (4), то прямая b, проходящая через вершину конуса K_0, лежит в его внутренней области. Из принятых допущений вытекает также, что каждая прямая пространства событий, проходящая внутри конуса K_0 через его вершину, может изображать процесс движения некоторой свободной материальной точки, пролетающей в момент t_0 через место (x_0, y_0, z_0).

Обратимся теперь к уравнениям (1). В силу этих уравнений с каждой точкой $M(t, x, y, z)$ пространства событий сопоставляется точка $M'(t', x', y', z')$, т.е. определено некоторое отображение $M' = f(M)$; в силу условий, наложенных на уравнения (1), это отображение является взаимно однозначным отображением пространства событий на себя. Учтем теперь, что система отсчета S' также является инерциальной. Поэтому, если t, x, y, z представляют собой текущие координаты в уравнениях (3), то t', x', y', z' удовлетворяют аналогичным уравнениям, хотя бы и с другими параметрами (поскольку уравнения (3) определяют движение свободной материальной точки, а такое движение в системе S' будет прямолинейным и равномерным). Отсюда следует, что если в пространстве событий множество точек M лежит на прямой b, то соответствующие точки $M' = f(M)$ также лежат на некоторой прямой b'. Итак, 1) в пространстве событий для любой точки $M_0(t_0, x_0, y_0, z_0)$ определен конус K_0 с вершиной M_0; 2) если прямая b проходит через M_0 внутри K_0, то при отображении $M' = f(M)$ образы всех точек прямой b располагаются на некоторой прямой b'. Докажем теперь, что, какой бы ни была прямая b, образы ее точек также располагаются на прямой, т.е. что отображение $M' = f(M)$ коллинеарно.

Возьмем на прямой b три различные точки M_1, M_2, M_3; пусть K_1, K_2, K_3 — конусы, которые определены для точек M_1, M_2, M_3 аналогично тому, как конус K_0 был определен для точки M_0. Сейчас уже естественно считать, что прямая b не проходит через внутренние области конусов K_i. Проведем через M_1 внутри K_1 произвольную прямую b_1. Прямые b и b_1 определяют содержащую их (двумерную) плоскость β. Проведем через точки M_2 и M_3 прямые b_2^* и b_3^*, параллельные прямой b_1; эти прямые расположатся в плоскости β и внутри соответствующих конусов K_2 и K_3. Из непрерывности левой части неравенства (5) следует, что при малом изменении координат направляющих векторов прямых b_2^* и b_3^* измененные направляющие векторы будут определять прямые, также лежащие внутри конусов

K_2 и K_3. Поэтому найдутся прямые b_2 и b_3, которые 1) проходят через M_2 и M_3 в плоскости β и внутри конусов K_2 и K_3; 2) расположены так, что все три прямые b_1, b_2, b_3 попарно пересекаются в трех различных точках P, Q, R плоскости β.

Пусть P', Q', R' — образы точек P, Q, R при отображении $M'=f(M)$. Вследствие взаимной однозначности этого отображения точки P', Q', R' различны. Если R' лежит на прямой $P'Q'$, то $M_i' = f(M_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ лежат на той же прямой. Следовательно, в этом случае доказывать больше нечего. Допустим, что P', Q', R' не лежат на одной прямой. Тогда они определяют содержащую их плоскость β'. Так как прямые b_1, b_2, b_3 проходят внутри конусов K_1, K_2, K_3, то образы их точек располагаются на трех прямых b_1', b_2', b_3'. Прямые b_1', b_2', b_3' попарно пересекаются в точках P', Q', R' и поэтому содержатся в плоскости β' (см. n° 182); вместе сними плоскость β' содержит точки $M_i' = f(M_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Через точку M_i внутри конуса K_1 можно провести прямую c_1, не лежащую в плоскости β. Повторяя по отношению к прямой c_1 точно такое же построение, какое было проведено по отношению к прямой b_1, мы получим аналогично предыдущему плоскость γ', которая содержит точки M_1', M_2', M_3' и не совпадает с плоскостью β'. Так как плоскости β' и γ' различны, то все их общие точки лежат на одной прямой. Тем самым точки M_1', M_2', M_3' лежат на одной прямой, и коллинеарность отображения $M' = f(M)$ установлена. Но согласно n° 187, если отображение $M' = f(M)$ коллинеарно, то в аффинных координатах оно представляется линейными формулами с определителем, отличным от нуля. Тем самым наше утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Доказательство сохраняет силу, если считать, что система S' инерциальна *относительно* системы S, т. е. если требовать только, чтобы всякое прямолинейное и равномерное движение материальной точки (с допустимой скоростью) относительно S являлось прямолинейным и равномерным также относительно S'. Взаимность такого отношения S и S' для доказательства не потребовалась.

Теперь мы знаем, что искомые формулы преобразования координат событий имеют линейный вид. Дальнейшее сводится к установлению коэффициентов этих формул, что мы сделаем, исходя из постулата о независимости скорости света от выбора инерциальной системы отсчета. Предварительно нам придется немного дополнить понятие пространства событий, изложенное в n° 205.

207. Определяя пространство событий $\mathfrak{A}$, мы исходили из рассмотрения в физическом пространстве некоторой инерциальной системы отсчета S. Вместе с S мы выбрали в аффинном пространстве S' начало O и базис a_1, a_2, a_3, a_4 аффинной системы координат; точка M, изображающая событие, строится в выбранной системе по координатам события (t, x, y, z), которые считаются данными относительно S. Если S' — любая другая инерциальная система отсчета, в которой то же событие имеет координаты t', x', y', z', то эти новые координаты выражаются через t, x, y, z по линейным формулам (2) n° 206 с определителем, отличным от нуля. Но согласно n° 180 любое линейное преобразование четырех переменных, определитель которого отличен от нуля, можно рассматривать как преобразование аффинных координат в четырехмерном аффинном пространстве. Это значит, что существует новая система аффинных координат в пространстве $\mathfrak{A}$, определяемая некоторым началом O' и некоторым базисом a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, относительно которой точка M, изображающая данное событие, имеет координаты t', x', y', z'. Таким образом, каждой инерциальной системе отсчета в физическом пространстве сопоставляется определенная аффинная система координат в пространстве событий.

208. Пусть M_0 и M — два события, которые наблюдаются с точки зрения инерциальной системы отсчета S. Будем считать, что M_0 происходит в данном месте (x_0, y_0, z_0) физического пространства в данный момент t_0. Место (x, y, z) события M будем полагать произвольным; момент события M обозначим через t. Предположим, что в случае $t_0 < t$ световой сигнал, посланный с места события M_0 в момент t_0, попадает к месту события M точно в момент t либо, наоборот, если $t < t_0$, световой сигнал, сообщающий о событии M, попадает к месту события M_0 точно в момент t_0.

Тогда

$$-c^2(t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = 0, \tag{1}$$

где c — скорость света, так как пройденный сигналом путь равен его скорости, умноженной на соответствующий промежуток времени. В пространстве $\mathfrak{A}$ события M_0 и M изображаются двумя точками, которые мы обозначим также через M_0 и M, причем M_0 является постоянной точкой, а M — текущей. Множество всех точек M пространства $\mathfrak{A}$, определяемых уравнением (1), представляет собой конус с вершиной в точке M_0 (см. n° 186); этот конус называется *световым конусом* пространства событий в точке M_0. Уравнение (1) задает световой конус в аффинной системе O, a_1, a_2, a_3, a_4, которая отвечает инерциальной системе S.

Внутренняя область светового конуса определяется неравенством

$$-c^2(t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < 0.$$

Это неравенство вместе с условием $t > t_0$ определяет одну полость светового конуса, которую мы назовем *верхней*. Верхней полости соответствуют те события M, к месту которых световой сигнал, сообщающий о событии M_0, успевает дойти раньше этих событий. Другую полость светового конуса, отвечающую условию $t < t_0$, будем называть *нижней*; ей соответствуют события M, которые предшествуют M_0, причем световой сигнал, сообщающий о событии M, также успевает попасть к месту события M_0 раньше этого события.

Внешняя область светового конуса соответствует тем событиям M, которые не могут быть связаны информацией с событием M_0 даже с помощью световых сигналов (так будет, например, если M_0 и M происходят в разных местах системы S и одновременно, т. е. так, что $t = t_0$).

209. Теперь мы имеем возможность заняться определением коэффициентов в формулах преобразования координат событий при изменении инерциальной системы отсчета. Перейдем к аффинной системе $O', a_1', a_2', a_3', a_4'$, отвечающей системе отсчета S'. В новой системе точки M_0 и M имеют новые координаты, но световой конус определяется аналогично предыдущему уравнением

$$-c^2\left(t'-t_0'\right)^2+\left(x'-x_0'\right)^2+\left(y'-y_0'\right)^2+\left(z'-z_0'\right)^2=0 \tag{2}$$

при том же значении c; это следует из постулата о независимости скорости света от выбора инерциальной системы отсчета.

Преобразуем уравнение (2) к старым координатам t, x, y, z по формулам (2) n° 206. Мы получим:

$$\begin{aligned}-c^2\left(t'-t_0'\right)^2&+\left(x'-x_0'\right)^2+\left(y'-y_0'\right)^2+\left(z'-z_0'\right)^2=\\&=A(t-t_0)^2+B(t-t_0)(x-x_0)+\ldots+K(z-z_0)^2. \quad (3)\end{aligned}$$

Здесь справа написана квадратичная форма относительно разностей $t-t_0$, $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, коэффициенты которой $A, B, \ldots, K$ представляют собой некоторые выражения, составленные из коэффициентов c_{ik} формул (2) n° 206 и из числа c.

Если правую часть равенства (3) положить равной нулю, то получится уравнение светового конуса в старых координатах. Но тот же конус и тоже в старых координатах определен уравнением (1). Отсюда следует, что коэффициенты правой части равенства (3) должны быть пропорциональны коэффициентам уравнения (1).

Таким образом, в действительности равенство (3) должно иметь вид

$$\begin{aligned}-c^2\left(t'-t_0'\right)^2&+\left(x'-x_0'\right)^2+\left(y'-y_0'\right)^2+\left(z'-z_0'\right)^2=\\&=H\left\{-c^2(t-t_0)^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}, \quad (4)\end{aligned}$$

где H — некоторое выражение, составленное из коэффициентов c_{ik} формул (2) n° 206, причем $H > 0$ (вследствие закона инерции квадратичных форм). Допустим теперь, что *в одной из двух систем отсчета* S, S' линейный масштаб и единица измерения времени изменяются в одно и то же число раз; в таком случае все разности $t-t_0$, $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ умножаются на одно число (одновременно происходит пропорциональное изменение коэффициентов c_{ik} в формулах (2) n° 206). Следовательно, при некотором согласовании линейных масштабов и единиц измерения времени в системах S, S' мы можем добиться равенства $H = 1$. В дальнейшем мы будем считать, что такое согласование произведено в каждом случае; при этом условии для любой пары точек M_0, M как следствие формул (2) n° 206 должно соблюдаться равенство

$$-c^2\left(t'-t'_0\right)^2+\left(x'-x'_0\right)^2+\left(y'-y'_0\right)^2+\left(z'-z'_0\right)^2= \\ = -c^2(t-t_0)^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2. \quad (5)$$

Таким образом, для того чтобы формулы (2) n° 206 выражали преобразование координат событий при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, их коэффициенты должны быть подобраны так, чтобы тождественно соблюдалось равенство (5). Отсюда получаются необходимые условия на коэффициенты искомых формул. Но, более того, эти условия оказываются также и достаточными; именно, как покажет дальнейший анализ, при соблюдении этих условий произвол выбора коэффициентов точно соответствует произволу выбора возможных инерциальных систем.

Нам нет необходимости проводить какие-либо выкладки для получения условий, о которых идет речь. Требуемый результат по существу уже получен в предыдущем разделе, где мы рассматривали пространство Минковского; нужно только суметь извлечь его оттуда. С этой целью введем в пространство событий метрику Минковского.

Сопоставим с произвольной парой точек M_0, M пространства событий число

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{-c^2(t-t_0)^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, \quad (6)$$

которое назовем *расстоянием* между точками M_0, M или между событиями M_0, M. Вместе с тем мы определим скалярное произведение произвольной пары векторов M_0M, M_0N, полагая его равным билинейной форме от координат векторов M_0M, M_0N; коэффициенты этой билинейной формы мы, естественно, возьмем такими же, какие имеет квадратичная форма, стоящая под знаком квадратного радикала в равенстве (6) (см. n° 191).

Формула (6) выражает расстояние между событиями в координатах, относящихся к определенной инерциальной системе отсчета S. Но, как показывает равенство (5), выбор инерциальной системы отсчета здесь безразличен. Иначе говоря, метрика *Минковского, введенная в пространстве событий, инвариантна относительно перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

Расстояние между двумя событиями M_0 и M может быть мнимым, равным нулю и положительным. Именно, $\rho(M_0, M)$ мнимо, если M_0 и M могут быть связаны информацией с помощью сигнала, скорость которого $< c$; $\rho(M_0, M) = 0$, если информация возможна только с помощью светового сигнала; $\rho(M_0, M) > 0$, если даже световой сигнал, сообщающий об одном событии, не может предупредить другое. Эти три класса событий M отвечают соответственно внутренней области светового конуса с вершиной M_0, самому конусу и его внешней области (см. n° 208). Отметим попутно, что световой конус пространства событий представляет собой не что иное, как изотропный конус метрики Минковского, введенной в этом пространстве.

Из формулы (6) следует, что норма первого базисного вектора выбранной системы аффинных координат равна ci; нормы остальных базисных векторов равны единице. Заменим первый базисный вектор мнимо-единичным вектором того же направления; остальные векторы оставим без изменения, но будем обозначать теперь базисные векторы через e_1, e_2, e_3, e_4 (в n° 207 мы употребляли символы a_1, a_2, a_3, a_4). Таким образом,

$$e_1 = \frac{1}{c}a_1, \quad e_2 = a_2, \quad e_3 = a_3, \quad e_4 = a_4.$$

Соответственно первой координатой события теперь будет не t, а ct. Введем новые обозначения координат события, считая

$$ct = X_1, \quad x = X_2, \quad y = X_3, \quad z = X_4;$$

координаты X_i будем называть нормированными координатами события. Из формулы (6) имеем:

$$\rho^2(M_0, M) = -\left(X_1 - X_1^0\right)^2 + \left(X_2 - X_2^0\right)^2 + \\ + \left(X_3 - X_3^0\right)^2 + \left(X_4 - X_4^0\right)^2, \tag{7}$$

где X_k^0 и X_k — нормированные координаты событий M_0 и M. В согласии с формулой (7) скалярное произведение двух векторов x, y с координатами x_k, y_k выражается формулой

$$xy = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4. \tag{8}$$

Поскольку формулы (7) и (8) имеют канонический вид, базис e_1, e_2, e_3, e_4 является ортонормированным; $e_1^2 = -1$ (см. n° 193). Пусть в физическом пространстве мы переходим от инерциальной системы S к инерциальной системе S'. Тогда координаты событий преобразуются по линейным формулам; запишем их для нормированных координат сокращенно в виде

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k + b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{9}$$

Это преобразование соответствует в пространстве событий переходу от аффинной системы O, e_1, e_2, e_3, e_4, сопоставленной с S, к аффинной системе $O', e_1', e_2', e_3', e_4'$, которая сопоставлена с S'. Вследствие инвариантности метрики пространства событий, базис e_1', e_2', e_3', e_4' также является ортонормированным, причем $e_1'^2 = -1$. Таким образом, *если в физическом пространстве одна инерциальная система отсчета заменяется другой, то координаты произвольного события* (X_1, X_2, X_3, X_4) *преобразуются по формулам* (9), *которые совпадают с формулами преобразования ортонормированных координат в четырехмерном пространстве Минковского.*

Тем самым поставленная задача в основном решена, поскольку вопрос о преобразовании ортонормированных координат изучен в предыдущем разделе (см. n° 201). Остается только одна деталь, о которой мы будем сейчас говорить.

210. Для простоты изложения заметим, что с помощью тривиального преобразования инерциальных систем отсчета S и S' формулы (9) можно сделать однородными. В самом деле, вспомним, что инерциальная система отсчета представляет собой комплекс материального тела T, трех декартовых осей, которые твердо связаны с телом T, масштаба, часов и начального момента отсчета времени. Передвигая параллельно декартовы оси одной из систем S, S', добьемся такого их расположения, что в некоторое мгновение начальная точка осей системы S совпадет с начальной точкой осей системы S', момент наблюдений этого события в системах S и S' примем в качестве начального момента отсчета времени в каждой из этих систем. Тогда нулевым значениям t, x, y, z будут соответствовать нулевые значения t', x', y', z'. Следовательно, в формулах (9) свободные члены b_i будут равны 0 и мы получим:

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k. \tag{1}$$

В пространстве событий формулы (1) соответствуют изменению базиса ортонормированных координат с сохранением начала. Рассмотрим световой конус с вершиной в начале координат. Так как первые векторы e_1, e_1' старого и нового базисов мнимоединичны, то они оба находятся во внутренней области светового конуса. Так как верхняя полость светового конуса отвечает будущим событиям относительно нулевого момента отсчета времени в системе S, то e_1 направлен именно в верхнюю полость. Но тогда и e_1' должен быть направлен в ту же полость светового конуса. Отсюда следует, что преобразование (1) нормированных координат событий соответствует в пространстве событий переходу к новому ортонормированному базису при условии, что новый базисный вектор e_1' находится в той же полости светового конуса, где лежит старый базисный вектор e.

Согласно n° 201 это утверждение можно сформулировать следующим образом: *каждое преобразование нормированных инерциальных координат событий есть четырехмерное преобразование Лоренца* (имеется в виду преобразование Лоренца в строгом смысле).

211. Теперь мы сразу можем написать условия, которым должны удовлетворять коэффициенты q_{ik}, если формулы (1) n° 210 выражают преобразование нормированных инерциальных координат событий; достаточно сослаться на матричное соотношение (6) n° 201 (см. также n° 196). Следует только иметь в виду, что сейчас мнимоединичным вектором является e_1, а не e_4, как в nn° 196–201. Поэтому в данном случае

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Итак, *если формулы* (1) n° 210 *выражают преобразование нормированных инерциальных координат, то матрица* $Q = (q_{ik})$ *удовлетворяет условиям*

$$Q^*IQ = I, \quad q_{11} > 0 \tag{2}$$

(соотношение $q_{11} > 0$ означает, что e_1 и e'_1 лежат в одной полости светового конуса).

212. Матрице Q можно придать очень простой вид, если выполнить надлежащие тривиальные преобразования рассматриваемых инерциальных систем.

Представим себе, что в инерциальной системе S мы переходим к новым декартовым осям, но отсчет времени и масштаб оставляем прежними. Тогда координаты событий получат тривиальное преобразование с матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ 0 & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix},$$

поскольку $t' = t$ и x', y', z' выражаются только через x, y, z. Матрица

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}$$

представляет собой обычную трехмерную ортогональную матрицу, хорошо известную из аналитической геометрии. Преобразование координат с данной матрицей Q соответствует в пространстве событий переходу от базиса e_1 к базису e'_1, причем если

$$e'_1 = \sum_{k=1}^{4} p_{ik} e_k,$$

то матрица $P = (p_{ik}) = (Q^*)^{-1}$ (см. n° 180).

Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}.$$

Это значит, что $e_1' = e_1$, а векторы e_2', e_3', e_4' выражаются только через векторы e_2, e_3, e_4 по формулам, коэффициенты которых составляют матрицу

$$p_1 = \begin{pmatrix} p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $P_1 = (Q_1^*)^{-1}$, и следовательно, P_1 также является трехмерной ортогональной матрицей. Следовательно, векторы e_2', e_3', e_4' лежат в гиперплоскости векторов e_2, e_3, e_4 и могут быть получены в результате обычного евклидова движения тройки векторов e_2, e_3, e_4 как целого. Здесь следует иметь в виду, что в гиперплоскости $e_2e_3e_4$ осуществляется трехмерная евклидова геометрия (см. n° 195). Обратно, если в пространстве событий $e_1' = e_1$, а векторы e_2', e_3', e_4' получаются из тройки векторов e_2, e_3, e_4 евклидовым движением в гиперплоскости $e_2e_3e_4$, то такое преобразование соответствует тривиальному переходу в системе S к новым декартовым осям.

Пусть теперь S и S' — две произвольные инерциальные системы (согласованные только в смысле n° 210), e_i и e_i' — соответствующие им базисы в пространстве событий (начальные точки O и O' совмещены). Если $e_1' = e_1$, то S' получается тривиальным изменением S, что не представляет интереса. Будем считать, что $e_1' \neq e_1$ (случай $e_1' = -e_1$ вообще исключен; см. n° 210). Обозначим через α гиперплоскость векторов e_2, e_3, e_4, через α' — гиперплоскость векторов e_2', e_3', e_4'. Эти гиперплоскости имеют общую точку O и не совпадают друг с другом. Поэтому и согласно n° 182 гиперплоскости α, α' пересекаются по двумерной плоскости β. Сохраним без изменения вектор e_1, а тройку векторов e_2, e_3, e_4 переведем евклидовым движением внутри гиперплоскости α в новое положение так, чтобы e_2, e_3 расположились на плоскости β. Аналогично, сохраняя e_1' переведем тройку векторов e_2', e_3', e_4' евклидовым движением внутри α' в такое положение, чтобы e_2' и e_3' также попали на плоскость β и, кроме того, совместились с векторами e_2, e_3. Обозначения векторов в их новых положениях оставим прежними. Каждому из произведенных изменений базисов e_i, e_i', соответствует тривиальное изменение систем S, S' физического пространства.

Теперь мы имеем:

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + p_{13}e_3 + p_{14}e_4, \\ e'_2 &= p_{21}e_1 + p_{22}e_2 + p_{23}e_3 + p_{24}e_4, \\ e'_3 &= \quad \theta + \quad \theta + \quad e_3 + \quad \theta, \\ e'_4 &= \quad \theta + \quad \theta + \quad \theta + \quad e_4. \end{aligned}$$

Умножим скалярно обе части первого равенства на обе части третьего; так как $e'_1e'_3 = 0$, $e_1e_3 = 0$, $e_2e_3 = 0$, $e_4e_3 = 0$, а $e_3^2 = 1$, то $p_{13} = 0$. Точно также можно показать, что $p_{14} = 0$, $p_{23} = 0$, $p_{24} = 0$. Следовательно, матрица P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$Q = (P^*)^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Итак, при помощи тривиального изменения и инерциальных систем S, S' формулы преобразования нормированных координат событий всегда возможно привести к виду

$$\begin{aligned} X'_1 &= q_{11}X_1 + q_{12}X_2, \\ X'_2 &= q_{21}X_1 + q_{22}X_2, \\ X'_3 &= X_3, \\ X'_2 &= X_4. \end{aligned} \tag{2}$$

213. Для определения оставшихся коэффициентов можно использовать условия (2) n° 211. Однако по отношению к специализированным системам S, S' искомое преобразование имеет настолько простую запись, что мы предпочтем получить окончательный результат непосредственно, исходя из тождества (5) n° 209, которое выражает инвариантность метрики пространства событий.

Вернемся к физическому обозначению координат событий и соответственно предыдущим уравнениям напишем:

$$t' = At + Bx, \quad x' = Dt + Ex, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{1}$$

Тождество (5) n° 209 в данном случае принимает вид

$$-c^2t'^2 + x'^2 = -c^2t^2 + x^2.$$

Подставляя в левую часть этого тождества выражения (1) и сравнивая коэффициенты получаемой слева квадратичной формы с соответствующими коэффициентами правой части, найдем:

$$-c^2A^2 + D^2 = -c^2, \tag{2}$$

$$-c^2AB + DE = 0, \tag{3}$$

$$-c^2B^2 + E^2 = 1. \tag{4}$$

Заметим теперь, что по физическим соображениям, которые изложены в n° 210 (см. также n° 211), должно быть $A > 0$. Из физических соображений также следует, что $E \neq 0$, причем можно считать $E > 0$ (выбрав надлежащее направление на оси x). Вследствие равенства (3), имеем:

$$\frac{D}{cA} = \frac{cB}{E}.$$

Обозначим каждое из этих отношений через $-\beta$; тогда $D = -\beta cA$, $cB = -\beta E$. Отсюда и из равенств (2), (4) получаем:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

после чего найдем B и D. Таким образом,

$$t' = \frac{t - \dfrac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{5}$$

Мы использовали все алгебраические условия. Следовательно, параметр β является произвольным, точнее говоря, с математической точки зрения он должен удовлетворять только неравенству

$$1 - \beta^2 > 0. \tag{6}$$

Этот параметр имеет простой физический смысл. Чтобы обнаружить его, рассмотрим произвольную точку M физического пространства, неподвижную в системе S'; координаты x', y', z' этой точки постоянны. Относительно системы S точка M движется; дифференцируя последние три уравнения (5), найдем скорость точки M в системе S:

$$\frac{dx}{dt} = \beta c, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Таким образом, все точки, неподвижные в системе S', движутся относительно системы S с одной и той же скоростью $(\beta c, 0, 0)$, направленной по оси x. Эта общая для всех точек S' скорость называется скоростью движения системы S' относительно S; обозначая ее составляющую по оси x буквой v, получим $\beta = v/c$. Из неравенства (6) имеем:

$$v^2 < c^2. \tag{7}$$

Если свойства физического пространства не накладывают других ограничений на скорость v, с которой одна инерциальная система может двигаться относительно другой, то и с точки зрения физики параметр β ограничен только неравенством (6). В этом случае, следовательно, других условий, кроме соотношений (2) n° 211, на коэффициенты q_{ik} преобразования (1) n° 210 нет, и задача, которой мы занимались, решена полностью.

Иначе говоря, *каждое преобразование нормированных инерциальных координат есть четырехмерное преобразование Лоренца; каждое четырехмерное преобразование Лоренца можно рассматривать как преобразование нормированных инерциальных координат.*

Вместе с тем можно сказать, что преобразования нормированных инерциальных координат образуют группу, изоморфную четырехмерной группе Лоренца. Однородные преобразования нормированных инерциальных координат образуют группу, изоморфную однородной четырехмерной группе Лоренца и тем самым изоморфную группе неевклидовых движений трехмерной геометрии Лобачевского (см. n° 202).

214. Отметим некоторые выводы, к которым приводят наши рассуждения и выкладки.

1. Из неравенства (7) n° 213 следует, что скорость движения одной инерциальной системы относительно другой может быть только меньшей скорости света.

2. Подставляя $\beta = \dfrac{v}{c}$ в формулы (5), найдем:

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{1}$$

Если v мало по сравнению со скоростью света c, то

$$t' \approx t, \quad x' \approx x - vt, \quad y' \approx y, \quad z' \approx z,$$

и мы получим приближенные формулы классической физики (см. n° 204).

3. Если два события (t_1, x_1), (t_2, x_2) происходят в разных точках оси x системы S и одновременны относительно этой системы $(t_2 = t_1)$, то из первой формулы (1) следует $t_1' \neq t_2'$, поскольку $x_2 \neq x_1$. Таким образом, события, одновременные в системе S, не являются одновременными в системе S'. Поэтому всеобщая синхронизация часов, допускаемая классической физикой, невозможна (в связи с этим см. n° 204).

4. Пусть на оси x' системы S' покоится стержень длиною $\Delta x' = x_2' - x_1'$; предположим, что в системе S, относительно которой этот стержень движется, он измеряется в определенный момент t. Из второго уравнения (1) получаем:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Таким образом, длина стержня относительно S меньше, чем относительно S'. Но если в системе S' мы повернем этот стержень и расположим на оси y, то из третьего уравнения (1) получим $\Delta y = \Delta y'$. Следовательно, мы можем сравнивать твердые масштабные стержни в системах S и S', располагая их поперек движения; но выбрать одинаковые масштабы на всех осях обеих систем S и S' нельзя. Значит, допущение о возможности унификации масштабов на всех осях противоречиво.

5. Пусть материальная точка движется в системе S' по оси x' со скоростью

$$\frac{dx'}{dt'} = u'.$$

Система S' движется относительно S со скоростью v. Подсчитаем скорость $u = \dfrac{dx}{dt}$, которую имеет движущаяся точка относительно S. С этой целью напишем уравнения, обратные уравнениям (1):

$$t = \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v + \dfrac{dx'}{dt'}}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx'}{dt'}},$$

то есть,

$$u = \frac{v + u'}{1 + \dfrac{v}{c^2}u'}. \qquad (2)$$

Эта формула заменяет классический закон сложения скоростей, согласно которому должно быть $u = v + u'$ (в связи с этим см. n° 204). Заметим, что

$$\frac{v + c}{1 + \dfrac{v}{c^2}c} = c.$$

Это значит, что по закону сложения скоростей (2) скорость света в сумме со скоростью v дает снова скорость света. Тем самым именно формула (2), а не классический закон сложения скоростей согласуется с постулатом о независимости скорости света от выбора инерциальных систем отсчета*).

---

*) Подробнее о математических основах теории относительности см. в книге: *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.

Часть III
ГЕОМЕТРИЯ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Глава VIII
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКИ

§ 1. Метрическая форма евклидовой плоскости

215. Источником всех наших дальнейших выводов является внимательный анализ структуры тех формул, с помощью которых может быть выражен результат измерения геометрических величин. Прежде всего мы рассмотрим простейший случай, когда измерения производятся на евклидовой плоскости.

Пусть дана на плоскости декартова ортогональная система координат с осями Ox и Oy. Тогда, как известно из аналитической геометрии, квадрат расстояния Δs между двумя точками $M(x, y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ определяется равенством

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \tag{1}$$

Далее, если $M_2(x+\delta x, y+\delta y)$ — еще какая угодно точка, то косинус угла φ между отрезками MM_1 и MM_2 определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{\Delta x\, \delta x + \Delta y\, \delta y}{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \tag{2}$$

Наконец, прямоугольник с вершинами $P_1(x, y)$, $P_2(x + \Delta x, y)$, $P_3(x,\ y + \Delta y)$, $P_4(x + \Delta x, y + \Delta y)$ имеет площадь σ, определяемую равенством

$$\sigma = \Delta x\, \Delta y. \tag{3}$$

Из этих формул при помощи известных предельных переходов могут быть получены более общие формулы дифференциальной геометрии, применимые к криволинейным образам. Именно, если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — параметрические уравнения гладкой кривой, то длина ее дуги s, соответствующая изменению параметра t от a до b, выражается интегралом

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

и квадрат дифференциала дуги имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Если $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{\delta y}{\delta x}$ — угловые коэффициенты направлений двух кривых в точке их пересечения, то угол φ между кривыми может быть найден из равенства

$$\cos\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \tag{II}$$

Наконец, если Σ — некоторая квадрируемая область, то площадь ее σ определяется равенством

$$\sigma = \iint\limits_{(\Sigma)} dx\,dy. \tag{III}$$

Формулы (I), (II), (III) аналитически характеризуют закон измерения длин, углов и площадей, выражаемый аксиомами планиметрии Евклида. Поэтому говорят, что указанными формулами определяется метрика евклидовой плоскости.

Для записи правых частей формул (I), (II), (III) мы употребляли декартову ортогональную систему координат. Если бы мы использовали какую-нибудь другую координатную систему, то выражения для ds^2, $\cos\varphi$ и σ получили бы иной вид.

Пусть, например, r и θ — полярные координаты произвольной точки, $r = \varphi(t)$, $\theta = \psi(t)$ — уравнения некоторой кривой. Тогда дифференциал дуги этой кривой, соответствующий данному dt, может быть выражен через дифференциалы $dr = \varphi'(t)\,dt$, $d\theta = \psi'(t)\,dt$ при помощи соотношения

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \tag{I'}$$

Если $dr, d\theta$ — изменения полярных координат при бесконечно малом смещении точки (r, θ) по направлению некоторой кривой, а $\delta r, \delta\theta$ — изменения координат при смещении этой точки по направлению другой кривой, то косинус угла φ между кривыми определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{dr\,\delta r + r^2 d\theta\,\delta\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}\sqrt{\delta r^2 + r^2\delta\theta^2}}. \tag{II$'$}$$

Наконец, если Σ — квадрируемая область и σ — ее площадь, то

$$\sigma = \iint\limits_{(\Sigma)} r\,dr\,d\theta. \tag{III$'$}$$

Формулы (I$'$), (II$'$), (III$'$) аналитически определяют метрику евклидовой плоскости при помощи полярных координат.

Чтобы отвлечься от тех особенностей, которые вызываются в формулах для ds^2, $\cos\varphi$ и σ применением той или иной координатной системы, и обнаружить общий принцип конструкции этих формул, мы запишем эти формулы в произвольных координатах. Искомые выражения мы получим, отправляясь от формул (I), (II), (III).

Пусть дана какая-нибудь координатная система (u, x), определяемая уравнениями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, с помощью которых по координатам u, v произвольной точки плоскости могут быть найдены декартовы координаты x, y этой же точки (класс допустимых координатных систем мы ограничим требованием непрерывной дифференцируемости функций $x(u,v)$, $y(u,v)$ и условием неравенства нулю их якобиана: $D\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) \neq 0$, последнее условие гарантирует обратимость соотношений $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ в окрестности произвольной точки и непрерывную дифференцируемость функций $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$).

Рассмотрим некоторую линию $u = u(t)$, $v = v(t)$; если dt — изменение параметра t и ds — дифференциал дуги этой линии, соответствующий dt, то выражение ds через $du = u'(t)\,dt$ и $dv = v'(t)\,dt$ можно получить, подставляя в правую часть равенства

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{I}$$

величины

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Выполняя эту подстановку, группируя члены, содержащие du^2, $du\,dv$,

dv^2, и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 &= E, \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} &= F, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 &= G, \end{aligned} \tag{α}$$

найдем:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2. \tag{I*}$$

Здесь E, F, G суть величины, которые при данном выборе координатной системы (u, v) определяются уравнениями (α) в каждой точке плоскости совершенно независимо от выбора кривой, проходящей через эту точку. Напротив, дифференциалы du, dv зависят исключительно от того, как перемещается точка с координатами u, v. Таким образом, выражение в правой части (I*) представляет собой квадратичную форму с аргументами du, dv и с коэффициентами E, F, G.

Далее, если du, dx и $\delta u, \delta x$ — дифференциалы координат u, v, соответствующие смещению точки в двух разных направлениях, составляющих друг с другом угол φ , то, подставляя в формулу (II)

$$\cos\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

величины

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad & dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \\ \delta x &= \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v, \quad & \delta y &= \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v \end{aligned}$$

и принимая во внимание равенства (α), найдем:

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \tag{II*}$$

Наконец, производя замену переменных в интеграле (III), найдем следующее выражение для площади σ области Σ:

$$\sigma = \iint\limits_{\Sigma} dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2} du\,dv =$$
$$= \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2}\, du\,dv. \qquad (\mathrm{III}^*)$$

Таким образом, мы получили три формулы:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad (\mathrm{I}^*)$$

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}, \qquad (\mathrm{II}^*)$$

$$\sigma = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2}\, du\,dv, \qquad (\mathrm{III}^*)$$

которые в произвольной координатной системе выражают длины, углы и площади на евклидовой плоскости. Они содержат формулы (I)–(III) и (I′)–(III′) как частные случаи.

Теперь легко заметить, что выражения для $\cos\varphi$ и σ совершенно определенным образом конструируются из квадратичной формы ds^2.

Именно, числитель в правой части формулы (II*) есть билинейная форма, получаемая поляризацией формы (I*), а в интеграле формулы (III*) под знаком радикала стоит не что иное, как дискриминант формы (I*).

Следовательно, метрика евклидовой плоскости определяется в каждой системе координат квадратичной формой (I*), которая по этой причине называется *метрической.*

Исследования математиков и механиков XIX столетия показали, что геометрические системы, в которых измерение величин, подобно тому, как это имеет место на евклидовой плоскости, аналитически определяется к в а д р а т и ч н о й дифференциальной формой, оказываются весьма общим явлением в геометрии. Они собственно и составляют предмет дифференциальной геометрии. Например, вычисление длин, углов и площадей на каждой поверхности евклидова пространства, как известно из теории поверхностей (и что мы в свое время подробно напомним читателю), ведется по формулам точно такой же структуры, что и (I*)–(III*).

Наша ближайшая цель — доказать, что в указанный класс геометрических систем включается неевклидова *геометрия Лобачевского*, т. е. что *и в этой геометрии метрика определяется некоторой квадратичной дифференциальной формой.*

§ 2. Вычисление расстояния между двумя точками на плоскости Лобачевского

216. Имея в виду исследовать дифференциально-геометрический характер метрики плоскости Лобачевского, мы должны прежде всего вывести формулу, выражающую расстояние между двумя точками через их координаты (в какой-нибудь достаточно удобной координатной системе).

Формула (1) n° 215 выражает евклидово расстояние между двумя точками через их декартовы координаты; в основе этой формулы лежит теорема Пифагора.

В неевклидовой геометрии Лобачевского теоремы Пифагора нет, а получение теоремы, сходной с нею, довольно хлопотливо; кроме того, координатные системы, которые на плоскости Лобачевского можно ввести по аналогии с декартовой, здесь оказываются во многих отношениях не очень удобными для использования.

Поэтому мы не пойдем по пути развертывания синтетической теории Лобачевского, а изберем другой путь, непосредственно приводящий к решению поставленной задачи. Заранее оговоримся, что плоскость Лобачевского будет при этом рассматриваться не изолированно, а как объект пространства Лобачевского.

Обозначим рассматриваемую плоскость (в пространстве Лобачевского) буквой α и отметим на этой плоскости какую-нибудь точку O.

Существуют две орисферы, которые касаются плоскости α в точке O (они расположены по разные стороны от α); выберем из них какую-нибудь одну и обозначим ее буквой Σ. Все дальнейшее основано на том, что элементарная геометрия орисферы Σ есть геометрия Евклида (см. n° 47).

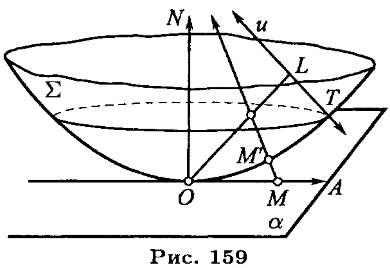


Рис. 159

Мы установим сейчас некоторое специальное отображение плоскости α в орисферу Σ. Именно, произвольной точке M плоскости α поставим на орисфере Σ в соответствие точку M', где орисфера пересекается с прямой, проходящей через M параллельно перпендикуляру к α в точке O (рис. 159; направление параллельности предполагается установленным в ту сторону от плоскости α, с которой расположена орисфера Σ). Легко понять, что образы всех точек плоскости α не заполняют орисферу Σ целиком; постараемся определить заполненную ими область.

Рассмотрим в плоскости α какую-нибудь прямую OA, проходящую через точку O; пусть ON — перпендикуляр к плоскости α в точке O (точка N лежит с той стороны от α, с какой находится орисфера Σ).

Отложим на биссектрисе угла AON отрезок l, выбрав его так, чтобы ему соответствовал угол параллельности $\Pi(l) = \pi/4$; конец этого отрезка обозначим буквой L.

Вследствие выбора величины l прямая u, перпендикулярная к отрезку OL в его конце L и лежащая в плоскости угла AON, будет в одну сторону параллельна лучу OA, в другую — лучу ON (рис. 159). Поскольку прямая u параллельна ON, она является осью орисферы Σ и, следовательно, пересекает Σ в некоторой точке T. Возьмем теперь на луче OA произвольную точку M (отличную от точки O) и проведем через нее луч, параллельный ON. Этот луч проходит в плоскости AON между параллельными прямыми TL и ON. Следовательно, точка M', в которой он пересекает орицикл OT, лежит между точками O и T. С другой стороны, если мы возьмем на орицикле OT между O и T любую точку P' и проведем через нее прямую, параллельную прямой ON по направлению от O к N, то она будет в том же направлении параллельна прямой u; эта прямая в другом направлении будет уклоняться от прямой u в сторону луча OA и, следовательно, пересечет луч OA в какой-то точке P. Это означает, что каждая точка орицикла OT, лежащая между O и T, является образом некоторой точки луча OA. Наконец, ясно, что точка O соответствует сама себе. Итак, образы всех точек луча OA заполняют дугу орицикла OT с одним исключенным концом T.

Отсюда непосредственно заключаем, что образы всех точек плоскости α заполняют на орисфере Σ область, которую "заметает" дуга OT (с исключенным концом T), вращаясь вокруг прямой ON.

С точки зрения геометрии на орисфере эта область представляет собой не что иное, как внутреннюю часть круга k, центром которого является точка O, а радиусом — дуга орицикла OT. Дуга OT называется радиусом кривизны пространства Лобачевского. Если мы выберем какую-нибудь дугу орицикла в качестве единицы измерения длин на орисфере Σ, то длина дуги OT будет выражена некоторым числом R. *Число R* (при выбранном масштабе) *мы также будем называть радиусом кривизны.*

Сопоставим с выбранным масштабом некоторую определенную часть пространства; пусть это будет, например, внутренняя область сферы E, радиус которой равен расстоянию между концами масштабной дуги орицикла. Число $1/R$ можно рассматривать как "меру неевклидовости" пространства внутри E. Именно, чем больше R, тем менее отличается пространство Лобачевского внутри E от евклидова. Точный смысл последнего утверждения заключается в следующем: если x — любой отрезок, лежащий внутри E, то угол параллельности $\Pi(x)$ равномерно стремится к $\pi/2$ при $R \to \infty$ (см. n° 230).

В предельном случае $R = \infty$ круг k распространяется на всю орисферу Σ, но тогда орисфера Σ совпадает с плоскостью α и пространство оказывается евклидовым.

Введем на орисфере Σ декартову прямоугольную систему координат (x', y') с началом в точке O и с выбранным уже ранее масштабом. В этих координатах граница круга k представится уравнением

$$x'^2 + y'^2 = R^2.$$

Теперь мы установим некоторую координатную систему и на плоскости Лобачевского α. Именно, с каждой точкой M плоскости α мы сопоставим в качестве координат два числа:

$$x = \frac{x'}{R}, \quad y = \frac{y'}{R},$$

где x', y' — декартовы координаты образа M' этой точки на орисфере Σ.

Из предыдущего следует, что координаты любой точки плоскости α удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 < 1;$$

обратно, если два заранее данных числа x, y удовлетворяют такому неравенству, то на плоскости α существует (точно одна) точка, координаты которой суть данные числа x, y. *Числа x, y называются бельтрамиевыми координатами точки M.*

217. Теперь мы уточним нашу задачу и сформулируем ее следующим образом: *вывести формулу, выражающую расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ плоскости α через данные их бельтрамиевы координаты x_1, y_1 и x_2, y_2.*

Для удобства читателя вывод требуемой формулы разделен на этапы.

1. В предыдущем параграфе мы установили некоторое специальное отображение плоскости α на внутреннюю часть круга орисферы Σ. Это отображение обладает следующим свойством, на котором основываются все дальнейшие заключения: образы точек произвольной прямой плоскости α составляют внутри круга k дугу некоторого орицикла. В самом деле, при построении образа точки M плоскости α мы проводим через M луч, параллельный лучу ON, до пересечения с орисферой Σ (см. рис. 159); точка пересечения M' и есть образ точки M. Пусть в плоскости α дана произвольная прямая a. Проведем через каждую ее точку луч, параллельный лучу ON; все проведенные лучи располагаются в одной плоскости λ, параллельной лучу ON, и заполняют в этой плоскости некоторую полосу. Кроме того, все проведенные лучи являются нормалями орисферы Σ; следовательно, плоскость λ пересекает орисферу Σ нормально. Но нормальное сечение орисферы Σ плоскостью λ есть орицикл, часть которого, лежащая внутри k, и представляет собой собрание образов всех точек прямой a. Итак, образы всех точек произвольно взятой на плоскости α прямой a составляют дугу орицикла, что и утверждалось.

2. Рассмотрим какое-нибудь движение плоскости α по самой себе, т. е. некоторое отображение плоскости α на себя такое, что расстояние между любыми двумя ее точками равно расстоянию между их образами. Запишем это отображение символически в виде $M^* = \varphi(M)$, где M — произвольная точка плоскости α, M^* — ее образ; запишем также символически в виде $M' = \psi(M)$ ранее рассмотренное нами отображение плоскости α на внутреннюю часть круга k орисферы Σ. Два отображения $M^* = \varphi(M)$ и $M' = \psi(M)$ индуцируют отображение $M'^* = \chi(M')$ внутренней части круга k на самое себя; здесь M' — произвольная точка, лежащая внутри k, M'^* — ее образ, причем $M'^* = \chi(M') = \psi(M^*)$, $M^* = \varphi(M)$, $M = \psi^{-1}(M')$, где ψ^{-1} — символ, обозначающий отображение, обратное отображению ψ. Иначе говоря, при движении точек плоскости α перемещаются их образы на орисфере Σ; это перемещение и представлено символической записью $M'^* = \chi(M')$.

Заметим теперь, что при движении $M^* = \varphi(M)$ точки, расположенные на какой-нибудь прямой плоскости α, переходят в точки, также расположенные на прямой; короче: при движении плоскости α по себе все ее прямые переходят в прямые же. Далее, как было установлено в предыдущем пункте, при отображении $M' = \psi(M)$ точки, расположенные на какой-нибудь прямой плоскости α, переходят в точки, составляющие внутри k дугу орицикла; короче: при отображении $M' = \psi(M)$ плоскости α на круг k прямые этой плоскости переходят в дуги орициклов. Сопоставляя эти два обстоятельства, заключаем, что при отображении $M'^* = \chi(M')$ круга k на себя все дуги орициклов, лежащие внутри k, переходят также в дуги орициклов.

В смысле элементарной геометрии орисферы Σ, которая есть геометрия Евклида, орициклы суть прямые линии. Приняв это во внимание, мы можем предыдущее заключение высказать следующим образом: при помощи отображения $M'^* = \chi(M')$ внутренняя часть круга k отображается на себя так, что все хорды круга k переходят снова в хорды.

3. Определим сложное отношение четырех точек орицикла точно так же, как определяется сложное отношение четырех точек евклидовой прямой (см. n° 137, формулу $(*)$).

Пусть M_1', M_2' — две произвольные точки, лежащие на орисфере Σ внутри круга $k, M_1'^*, M_2'^*$ — их образы относительно отображения χ; пусть P', Q' и P'^*, Q'^* — точки, в которых орициклы $M_1'M_2'$ и $M_1'^*M_2'^*$ пересекают окружность k, обозначенные так, что порядок следования точек P', Q', M_1', M_2' на орицикле $M_1'M_2'$ подобен порядку следования точек $P'^*, Q'^*, M_1'^*, M_2'^*$ на орицикле $M_1'^*M_2'^*$. Тогда

$$(P'^*Q'^*M_1'^*M_2'^*) = (P'Q'M_1'M_2'),$$

т. е. сложное отношение точек $P'^*, Q'^*, M_1'^*, M_2'^*$ равно сложному отношению точек P', Q', M_1', M_2' (см. n° 138).

4. Последний результат является ключом к решению нашей задачи.

Мы ищем формулу, которая позволяет вычислять расстояние между произвольными точками M_1 и M_2 плоскости α, если известны их бельтрамиевы координаты.

Рассмотрим образы M_1' и M_2' точек M_1 и M_2 при отображении $M' = \psi(M)$ плоскости α на внутреннюю часть круга k орисферы Σ (см. пункт 2) и проведем на Σ через M_1' и M_2' орицикл; обозначим через P' и Q' точки его пересечения с границей круга k. Пусть $(P'Q'M_1'M_2')$ — сложное отношение точек P', Q', M_1', M_2', которое определяется на орисфере Σ в обычном евклидовом смысле.

Мы утверждаем, что *расстояние между произвольно взятыми точками M_1, M_2 на плоскости Лобачевского α выражается формулой*

$$\rho(M_1, M_2) = c\,|\ln(P'Q'M_1'M_2')|\,, \qquad (*)$$

где c — положительная постоянная, выбор которой соответствует выбору масштаба.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\rho(M_1, M_2) > 0$, если точки M_1 и M_2 различны. Действительно, если M_1 и M_2 — разные точки, то $\dfrac{P'M_1'}{M_1'Q'} \neq \dfrac{P'M_2'}{M_2'Q'}$, следовательно, $(P'Q'M_1'M_2') \neq 1$ и $\ln(P'Q'M_1'M_2') \neq 0$. Далее мы установим следующие факты.

1) Пусть при каком-нибудь движении $M^* = \varphi(M)$ плоскости α по себе точки M_1, M_2 переходят в точки M_1^*, M_2^*. Точкам M_1, M_2, M_1^*, M_2^* плоскости α соответствуют на орисфере Σ точки $M_1', M_2', M_1'^*, M_2'^*$, а движению $M^* = \varphi(M)$ соответствует отображение $M'^* = \chi(M')$ круга k на себя, переводящее M_1', M_2' в $M_1'^*, M_2'^*$. Обозначим, как это делалось выше, через P', Q' точки пересечения орицикла $M_1'M_2'$ с границей круга k; аналогично, при помощи точек $M_1'^*, M_2'^*$ определим точки P'^*, Q'^*. Если обозначения P', Q' и P'^*, Q'^* надлежащим образом согласованы, то на основании пункта 3 мы имеем равенство сложных отношений

$$(P'^*Q'^*M_1'^*M_2'^*) = (P'Q'M_1'M_2')\,.$$

Отсюда тотчас следует равенство

$$\rho\,(M_1^*, M_2^*) = \rho(M_1, M_2).$$

2) Возьмем на прямой M_1M_2 третью точку M_3 так, чтобы точка M_2 лежала между M_1 и M_3. На орисфере Σ точкам M_1, M_2, M_3 соответствуют точки M_1', M_2', M_3', лежащие на одном орицикле, причем M_2' лежит между M_1' и M_3'. Символы P' и Q' пусть имеют старый смысл; мы только предположим, что на орицикле $M_1'M_2'M_3'$ направление $P'Q'$ противоположно направлению $M_1'M_2'M_3'$. При последнем условии будет $\dfrac{P'M_1'}{M_1'Q'} > \dfrac{P'M_2'}{M_2'Q'}$, следовательно, $(P'Q'M_1'M_2') > 1$ и точно так же

$$(P'Q'M_2'M_3') < 1, \quad (P'Q'M_1'M_3') < 1.$$

Напишем равенства

$$(P'Q'M_1'M_3') = \frac{P'M_1'}{M_1'Q'} : \frac{P'M_3'}{M_3'Q'} = \left(\frac{P'M_1'}{M_1'Q'} : \frac{P'M_2'}{M_2'Q'}\right)\cdot\left(\frac{P'M_2'}{M_2'Q'} : \frac{P'M_3'}{M_3'Q'}\right) = \\ = (P'Q'M_1'M_2')\,(P'Q'M_2'M_3')\,.$$

Отсюда

$$\ln(P'Q'M_1'M_3') = \ln(P'Q'M_1'M_2') + \ln(P'Q'M_2'M_3')\,.$$

Так как все рассматриваемые сложные отношения больше единицы, то логарифмы их положительны и, следовательно, совпадают со своими абсолютными величинами. Мы можем, таким образом, написать

$$|\ln(P'Q'M_1'M_3')| = |\ln(P'Q'M_1'M_2')| + |\ln(P'Q'M_2'M_3')|\,,$$

что приводит к равенству

$$\rho(M_1, M_3) = \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3).$$

3) Пусть некоторый отрезок E_1E_2 назначен в качестве единицы длины. Так как E_1, E_2 — различные точки, то $c_1 = |\ln(P_e'Q_e'E_1'E_2')| > 0$ (здесь P_e', Q_e' — точки пересечения орицикла $E_1'E_2'$ с границей круга k). Если в формуле (*) мы положим $c = \dfrac{1}{c_1}$, то получим:

$$\rho(E_1E_2) = 1.$$

Итак, формула (*) относит каждому отрезку определенное положительное число, причем

1) равным отрезкам соответствуют равные числа;

2) если M_2 — точка отрезка M_1M_3 и отрезкам M_1M_2 и M_2M_3 соответствуют числа $\rho(M_1, M_2) = a$, $\rho(M_2, M_3) = b$, то отрезку M_1M_3 соответствует число $\rho(M_1, M_3) = a + b$;

3) некоторому отрезку E_1E_2 соответствует число, равное 1.

Но этими условиями однозначно определяется длина отрезка (см. n° 20). Тем самым доказано, что формула (*) выражает длину отрезка M_1M_2.

На этом заканчивается принципиальная часть вывода искомой формулы; все дальнейшее сводится к элементарным вычислениям.

5. Как и в n° 216, мы будем обозначать через x, y бельтрамиевы координаты точки M плоскости α, через x', y' — декартовы координаты ее образа M' на орисфере Σ; при этом $x' = Rx, y' = Ry$.

Вместе с данными точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости α, расстояние между которыми мы должны выразить, рассмотрим их образы $M_1'(x_1'; y_1')$, $M_2'(x_2'; y_2')$ на Σ. Пусть $M'(x'; y')$ — произвольная точка орицикла $M_1'M_2'$; полагая $\dfrac{M_1'M'}{M'M_2'} = \lambda$, мы получим известные соотношения

$$x' = \frac{x_1' + \lambda x_2'}{1+\lambda}, \quad y' = \frac{y_1' + \lambda y_2'}{1+\lambda}. \tag{1}$$

Пусть $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ — значения параметра λ, при которых точка M' попадает в положения P' и Q' на границе круга k; мы имеем:

$$(P'Q'M_1'M_2') = \frac{P'M_1'}{M_1'Q'} : \frac{P'M_2'}{M_2'Q'} = \frac{M_1'P'}{P'M_2'} : \frac{M_1'Q'}{Q'M_2'} = \frac{\lambda_1}{\lambda^2}.$$

Чтобы найти λ_1, λ_2 нам следует подставить правые части равенств (1) в уравнение границы круга k

$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

и решить полученное квадратное уравнение относительно λ. Выполняя эту подстановку и переходя к бельтрамиевым координатам данных точек, получим:

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 - (1+\lambda)^2 = 0;$$

полагая здесь для краткости

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 \quad -1 &= \Omega_{11}, \\ x_1x_2 + y_1y_2 - 1 &= \Omega_{12}, \\ x_2^2 + y_2^2 \quad -1 &= \Omega_{22}, \end{aligned}$$

мы напишем последнее уравнение в виде

$$\Omega_{22}\lambda^2 + 2\Omega_{12}\lambda + \Omega_{11} = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega_{12} \pm \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{22}}.$$

При надлежащей нумерации корней λ_1, λ_2 получаем*):

$$(P'Q'M_1'M_2') = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}} < 1.$$

Следовательно,

$$\rho(M_1, M_2) = c \ln \frac{-\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}. \tag{2}$$

*) Здесь следует учесть, что все величины $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{22}$ отрицательны.

Это и есть искомая формула. Мы сделаем только еще один шаг, именно наложим определенное условие на выбор постоянной c. Дело в том, что в свое время мы предположили установленным некоторый масштаб на орисфере Σ; кроме того, мы ввели масштаб на плоскости α. До тех пор, пока выбор этих двух масштабов ничем взаимно не обусловлен, постоянная c остается неопределенной.

Выбор масштабов будет связан следующим условием. Пусть M — произвольная точка на плоскости α, M' — ее образ на орисфере Σ; предположим, что точка M приближается по прямой к точке O, тогда точка M' будет приближаться к точке O по орициклу. Мы потребуем равенства

$$\lim_{M\to O}\frac{OM}{OM'}=1,$$

где OM — длина прямолинейного отрезка, OM' — длина дуги орицикла. При этом условии определим постоянную c.

Будем считать для удобства выкладок, что точка M' находится на оси Ox декартовой системы орисферы Σ. Тогда

$$OM'=x'=Rx,\quad OM=\rho(O,M)=c\ln\frac{1+x}{1-x}$$

[мы пользуемся формулой (2), полагая $x_1=0, y_1=0, x_2=x, y_2=0$] и, следовательно,

$$\lim_{M\to 0}\frac{OM}{OM'}=\lim_{x\to 0}\frac{c}{Rx}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{2c}{R}=1;$$

отсюда $c=\dfrac{R}{2}$.

Формула, выражающая неевклидово расстояние между двумя точками через их бельтрамиевы координаты, получает окончательный вид:

$$\rho(M_1,M_2)=\frac{R}{2}\ln\frac{\Omega_{12}-\sqrt{\Omega_{12}^2-\Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12}+\sqrt{\Omega_{12}^2-\Omega_{11}\Omega_{22}}}. \tag{3}$$

218. Мы хотим теперь дать такое описание бельтрамиевой системы координат, которое не использовало бы объемлющего пространства.

Будем пока исходить из рассмотрения декартовой системы на орисфере Σ, как это делалось в n° 216, где бельтрамиевы координаты были введены впервые.

Пусть Ox' и Oy' — два орицикла, которые служат осями декартовой системы орисферы Σ (рис. 160). При отображении плоскости α на орисферу Σ орициклы Ox' и Oy' имеют своими прообразами две взаимно перпендикулярные прямые плоскости α, проходящие через точку O; мы обозначим их символами Ox и Oy. Возьмем на плоскости α внутри угла, составленного положительными направлениями прямых Ox и Oy, произвольную точку M с бельтрамиевыми координатами

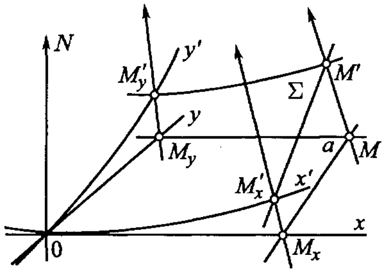


Рис. 160

x, y; ее образ M' на орисфере Σ имеет (положительные) декартовы координаты $x' = Rx, y' = Ry$. Опустим из точки M перпендикуляр на прямую Ox и обозначим его основание через M_x. Из точки M_x проведем луч, параллельный лучу ON (ON имеет тот же смысл, что и в n° 216); точку его пересечения с орисферой Σ обозначим символом M'_x. Теперь заметим, что 1) точка M'_x лежит на орицикле Ox' и именно на его положительной части; 2) точки M, M', M_x, M'_x лежат в одной плоскости; 3) прямая MM_x перпендикулярна к плоскости NOM_x, следовательно, проходящая через нее плоскость $MM'\ M_xM'_x$ также перпендикулярна к плоскости NOM_x; 4) последнее обстоятельство позволяет заключить, что дуга орицикла $M'M'_x$ перпендикулярна к орициклу Ox'. Итак, точка M'_x, которая по построению соответствует на орисфере Σ точке M_x, представляет собой в смысле геометрии орисферы основание перпендикуляра, опущенного из точки M' на ось Ox'. Аналогичным образом строятся точки M_y и M'_y на Oy и Oy' (общая картина наших построений изображена на рис. 160). На основании изложенного мы имеем:

$$OM'_x = x' = Rx,$$
$$OM'_y = y' = Ry.$$

Положим

$$OM_x = \xi, \quad OM_y = \zeta$$

и выразим эти величины через x и y. Найдем ξ; другая величина ζ получится аналогично. Так как декартовы координаты точки M'_x нам известны, они суть x' и 0, то мы знаем и бельтрамиевы координаты точки M_x: x и 0. Таким образом, для определения ξ нам достаточно применить формулу (3) n° 217, полагая в ней $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = x$, $y_2 = 0$. Мы получаем

$$\xi = \frac{R}{2}\ln\frac{1+x}{1-x};$$

точно так же найдем

$$\zeta = \frac{R}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

Обращение этих равенств дает нужные нам выражения бельтрамиевых координат:

$$x = \operatorname{th}\frac{\xi}{R}, \quad y = \operatorname{th}\frac{\zeta}{R}; \tag{1}$$

здесь th есть символ, обозначающий гиперболический тангенс. При выводе этих формул мы предполагали числа x, y, ξ и ζ положительными; но если под ξ и ζ подразумевать отрезки OM_x и OM_y с учетом знака по обычному правилу, то формулы (1) будут выражать бельтрамиевы координаты при любом положении точки M. Это следует из того, что гиперболический тангенс есть нечетная функция, т. е. $\operatorname{th}(-\alpha) = -\operatorname{th}\alpha$.

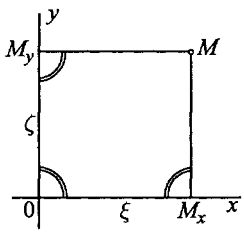


Рис. 161

Теперь мы имеем возможность описать бельтрамиевы координаты, совершенно отвлекаясь от объемлющего плоскость пространства: *на плоскости x выбираются две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy и масштаб*; *из произвольной точки M на ось Ox опускается перпендикуляр MM_x, на ось Oy — перпендикуляр MM_y* (рис. 161). *Тем самым определяются два числа $OM_x = \xi$ и $OM_y = \zeta$. Бельтрамиевы координаты точки M суть числа*

$$x = \operatorname{th}\frac{\xi}{R}, \quad y = \operatorname{th}\frac{\zeta}{R}.$$

Если мы пожелаем по наперед заданным бельтрамиевым координатам x, y построить соответствующую им точку, то мы должны сначала найти отрезки ξ и ζ, затем отложить их от начала координат на соответствующих осях и, наконец, в концах отложенных отрезков восставить к осям перпендикуляры; пересечением этих перпендикуляров и определится точка с данными координатами x, y.

Указанные перпендикуляры будут иметь точку пересечения в том и только в том случае, когда данные числа x, y удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 < 1;$$

выполнение этого неравенства, как мы знаем, необходимо и достаточно для того, чтобы числа x, y были бельтрамиевыми координатами какой-нибудь точки плоскости Лобачевского (см. $n°$ 216).

Замечательно, что в бельтрамиевых координатах прямая определяется уравнением первой степени. В самом деле, пусть u — некоторая прямая плоскости α, M — переменная точка этой прямой с текущими бельтрамиевыми координатами x, y. На орисфере Σ образом прямой u является орицикл u', образом точки M — точка M' с декартовыми координатами x', y'. Так как в геометрии орисферы орицикл u' играет роль прямой, то в декартовых координатах ему соответствует уравнение первой степени

$$A'x' + B'y' + C' = 0.$$

Полагая в этом уравнении $x' = Rx$, $y' = Ry$ и вводя величины $A'R = A$, $B'R = B$, $C' = C$, получим уравнение данной прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

Мы видим, что это есть уравнение первой степени (при дополнительном условии: $x^2 + y^2 < 1$).

219. Несколько позднее нам придется сталкиваться с преобразованием бельтрамиевых координат.

Пусть на плоскости Лобачевского даны две системы бельтрамиевых координат (предположим для простоты, что с одним и тем же масштабом). Произвольная точка M плоскости в одной из этих систем имеет координаты $(x; y)$, в другой — $(\bar{x}; \bar{y})$; величины $(\bar{x}; \bar{y})$ суть функции от x, y. Нам важно будет знать, что эти функции 1) непрерывно дифференцируемы, 2) имеют отличный от нуля якобиан.

Докажем это. Произведем движение плоскости по себе, совмещающее новые координатные оси со старыми осями. Точка M при этом перейдет в точку $M^* = \varphi(M)$. Нетрудно сообразить, что старые координаты (x^*, y^*) точки M^* равны новым координатам точки M. Таким образом,

$$x^* = \bar{x}, \quad y^* = \bar{y}.$$

Рассмотрим снова знакомое нам отображение плоскости на орисферу Σ, касающуюся плоскости в начале старой системы координат. Движение $M^* = \varphi(M)$ индуцирует отображение на себя внутренней области круга k орисферы Σ; как и раньше, мы запишем его символически в виде $M'^* = \chi(M')$.

Отображение $M'^* = \chi(M')$ переводит хорды круга k снова в хорды. Отсюда и на основании n° 138 заключаем, что в декартовой системе координат (x', y'), которая на Σ соответствует бельтрамиевой системе (x, y) данной плоскости, это отображение представляется формулами вида

$$\begin{aligned} x'^* &= \frac{a_1' x' + b_1' y' + c_1'}{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma'}, \\ y'^* &= \frac{a_2' x' + b_2' y' + c_2'}{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma'} \end{aligned} \qquad (*)$$

при условии

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пользуясь соотношениями $x' = Rx, y' = Ry$, $x'^* = Rx^* = R\bar{x}$, $y'^* = Ry^* = R\bar{y}$, получим из формул $(*)$:

$$\bar{x} = \frac{a_1' R x + b_1' R y + c_1'}{\alpha' R^2 x + \beta' R^2 y + \gamma' R},$$
$$\bar{y} = \frac{a_2' R x + b_2' R y + c_2'}{\alpha' R^2 x + \beta' R^2 y + \gamma' R}. \qquad (**)$$

Введем новые обозначения коэффициентов, полагая

$$\begin{aligned} a_1' R &= a_1, & b_1' R &= b_1, & c_1' &= c_1, \\ a_2' R &= a_2, & b_2' R &= b_2, & c_2' &= c_2, \\ \alpha' R^2 &= \alpha, & \beta' R^2 &= \beta, & \gamma' R &= \gamma. \end{aligned}$$

Тогда формулы $(**)$ примут вид

$$\bar{x} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$
$$\bar{y} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \qquad (***)$$

причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

(так как $\Delta = R^3 \Delta'$ и $\Delta' \neq 0$). Формулы $(***)$ дают выражения новых бельтрамиевых координат произвольной точки M через ее старые бельтрамиевы координаты (коэффициенты $a_1, b_1, \ldots, \gamma$ в этих формулах зависят от того, как расположены новые оси относительно старых осей). Убедимся теперь, что формулы $(***)$ имеют смысл при всех допустимых значениях бельтрамиевых координат, т. е. при всех значениях x, y, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 < 1$. В самом деле, если бы при $x_0^2 + y_0^2 < 1$ оказалось $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$, то для значений x, y, достаточно близких к $x_0 y_0$ и удовлетворяющих условиям $x^2 + y^2 < 1$, $\alpha x + \beta y + \gamma \neq 0$, соответствующие значения $\bar{x}, \bar{y}$ могли бы быть сколь угодно большими; но это невозможно вследствие неравенства $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 < 1$.

Итак, $\bar{x}, \bar{y}$ выражаются через x, y при помощи рациональных дробей, знаменатели которых отличны от нуля при всех допустимых значениях x, y.

Отсюда следует, что $\bar{x}, \bar{y}$ непрерывно дифференцируемы по x, y во всех точках плоскости Лобачевского.

Далее, несложное вычисление приводит к формуле

$$D \cdot \left(\frac{\bar{x}, \bar{y}}{x, y} \right) = \frac{\Delta}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^3}.$$

Отсюда заключаем, что функции $\bar{x}, \bar{y}$ во всех точках плоскости Лобачевского имеют не равный нулю якобиан.

§ 3. Метрическая форма плоскости Лобачевского

220. Теперь мы имеем возможность установить принципиальный результат, который был объявлен еще в n° 217: доказать, что метрика плоскости Лобачевского определяется некоторой дифференциальной квадратичной формой. С этой целью мы будем искать выражение длины дуги произвольной гладкой линии. Основой последующих выкладок является формула (3) n° 217, выражающая расстояние между двумя точками плоскости Лобачевского через их бельтрамиевы координаты. Эту формулу мы представим сейчас в некотором специальном виде.

Пусть M_1 и M_2 — две точки плоскости Лобачевского. Бельтрамиевы координаты первой точки мы обозначим через $(x; y)$, бельтрамиевы координаты второй — через $(x+\Delta x, y+\Delta y)$; длину отрезка M_1M_2 обозначим через $\Delta\rho$. Величины Δx и Δy будем предполагать бесконечно малыми. Выразим величины $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{22}$, входящие в правую часть формулы (3) n° 217; мы имеем:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= x^2 + y^2 - 1, \\ \Omega_{12} &= x^2 + y^2 - 1 + x\Delta x + y\Delta y, \\ \Omega_{22} &= x^2 + y^2 - 1 + 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Вследствие основного соотношения $x^2 + y^2 < 1$, связывающего бельтрамиевы координаты произвольной точки, все эти величины отрицательны. Из соотношений (1) находим:

$$\begin{aligned} \Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22} &= (\Omega_{12} - \Omega_{11})^2 - \Omega_{11}(\Omega_{22} - 2\Omega_{12} + \Omega_{11}) = \\ &= (x\Delta x + y\Delta y)^2 + (1 - x^2 - y^2)(\Delta x^2 + \Delta y^2) = \\ &= (1 - y^2)\Delta x^2 + 2xy\Delta x\Delta y + (1 - x^2)\Delta y^2, \end{aligned} \tag{2}$$

откуда видно, что $\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}$ представляет собой положительную величину, бесконечно малую вместе с $\Delta x, \Delta y$.

На основании формулы (3) n° 217 получаем:

$$\begin{aligned} \Delta\rho = \frac{R}{2}\ln\frac{\Omega_{12}-\sqrt{\Omega_{12}^2-\Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12}+\sqrt{\Omega_{12}^2-\Omega_{11}\Omega_{22}}} &= \frac{R}{2}\ln\left(1 - \frac{2\sqrt{\Omega_{12}^2-\Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12}+\sqrt{\Omega_{12}^2-\Omega_{11}\Omega_{22}}}\right) = \\ &= R\frac{\sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{1 - x^2 - y^2} + \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y), \end{aligned} \tag{3}$$

где α — бесконечно малая величина высшего порядка сравнительно с $\sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}$. Равенства (3) и (2) дают нужный нам специальный вид формулы (3) n° 217:

$$\Delta\rho = R\frac{\sqrt{(1-y^2)\Delta x^2 + 2xy\Delta x\Delta y + (1-x^2)\Delta y^2}}{1-x^2-y^2} + \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y), \tag{4}$$

из которого уже легко выводится выражение длины дуги.

Пусть какая-нибудь линия определена параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

При изменении t на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$ переменная точка описывает некоторую дугу A_0A линии так, что при $t = t_0$ переменная точка совпадает с началом дуги A_0, при $t = T$ — с концом дуги A. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ вместе со своими производными первого порядка непрерывны на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и их производные ни в одной точке этого отрезка не обращаются одновременно в нуль, то мы будем называть дугу A_0A гладкой.*)

Существенно установить, что свойство линии быть гладкой не зависит от того, к какой системе бельтрамиевых координат эта линия отнесена. С этой целью рассмотрим произвольное преобразование данных бельтрамиевых координат в новые бельтрамиевы координаты. Пусть (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ соответственно старые и новые координаты произвольной точки плоскости; $\bar{x}, \bar{y}$ суть функции от x, y:

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y), \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y).$$

В n° 219 мы показали, что эти функции непрерывно дифференцируемы и имеют отличный от нуля якобиан. Отсюда следуют существование и непрерывность производных $\frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}$:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\partial\bar{y}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\bar{y}}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Далее, если $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ не равны одновременно нулю, то $\frac{d\bar{x}}{dt}$ и $\frac{d\bar{y}}{dt}$ также не могут одновременно обращаться в нуль, так как

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\bar{x}}{\partial x} & \frac{\partial\bar{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial\bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial\bar{y}}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

---

*) Условие $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0$ здесь имеет такой же смысл, как и в евклидовой дифференциальной геометрии (см. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.–Л.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1980.).

Таким образом, свойство гладкости, которое предложено по отношению к системе (x, y), будет выполнено и по отношению к любой другой системе $(\bar{x}, \bar{y})$.

Вводя понятие длины дуги A_0A, мы будем поступать так же, как поступают при определении длины дуги линии в евклидовой геометрии. Разобьем отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant T$ произвольным образом на части точками $t_1, t_2, \ldots, t_n$, расположенными в возрастающем порядке:

$$t_0 < t_1 < t_1 < \ldots < t_n = T.$$

Каждой точке t_i будет на дуге A_0A соответствовать некоторая точка A_i. Построим ломаную $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A$ и обозначим длину ее через σ. Таким образом, каждому разбиению отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant T$ относится некоторое положительное число σ — длина соответствующей ломаной.

Представим себе теперь, что берется некоторая последовательность разбиений отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant T$, такая, что максимальная длина частичного отрезка разбиения стремится к нулю. Если соответствующая последовательность чисел σ стремится к некоторому пределу s, не зависящему от выбора последовательности разбиений отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant T$, то значение этого предела, т. е. число s, мы будем называть длиной дуги A_0A.

Положим

$$A_iA_{i+1} = \Delta\rho_i,$$
$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \Delta x_i, \quad y(t_{i+1}) - y(t_i) = \Delta y_i.$$

Тогда, согласно формуле (4), длина ломаной определится равенством

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\rho_i = R\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{(1-y_i^2)(\Delta x_i)^2 + 2x_iy_i\Delta x_i\Delta y_i + (1-x_i^2)(\Delta y_i)^2}{(1-x_i^2-y_i^2)^2}} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i).$$

Переходя к пределу, найдем отсюда:

$$s = R\int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{(1-y^2)x'^2 + 2xyx'y' + (1-x^2)y'^2}}{1-x^2-y^2}\,dt, \tag{5}$$

где штрихи обозначают дифференцирование по t *).

*) Чтобы доказать, что $\sum \alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i) \to 0$, достаточно заметить, что $\alpha_i = \alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i)$ имеет второй порядок малости относительно $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Точнее, если вся линия лежит в области $1 - x^2 - y^2 > \varepsilon > 0$, то отношение $\frac{|\alpha_i|}{\Delta t_i^2}$ ограничено сверху числом, которое зависит от ε и от верхних граней величин $|x'(t)|$, $|y'(t)|$. Это следует из определения α_i согласно равенству (3) и из выражения $\Delta x_i, \Delta y_i$ через Δt_i по формуле Лагранжа.

Существование интеграла, стоящего в правой части полученной формулы, обеспечивается непрерывностью функций $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$ и $y'(t)$. Предположим верхний предел интеграла в формуле (5) переменным; тогда этой формулой дуга кривой выражается как функция от T:

$$s = s(T).$$

Определяя дифференциал дуги, найдем:

$$ds = R\frac{\sqrt{(1-y^2)dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1-x^2)dy^2}}{1-x^2-y^2}$$

или

$$ds^2 = R^2\frac{(1-y^2)dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}. \tag{6}$$

Таким образом, *квадрат дифференциала дуги является квадратичной формой дифференциалов dx и dy.*

Введем обозначения:

$$\frac{R^2(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^2} = E(x,y), \quad \frac{R^2xy}{(1-x^2-y^2)^2} = F(x,y),$$
$$\frac{R^2(1-x^2)}{(1-x^2-y^2)^2} = G(x,y). \tag{7}$$

Тогда (6) запишется в виде

$$ds^2 = Edx^2 + 2F\,dx\,dy + Gdy^2. \tag{8}$$

Квадратичная форма $E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$ определяет измерение длин линий на плоскости Лобачевского. Поэтому мы назовем ее *метрической формой плоскости Лобачевского.*

221. Теперь мы установим формулу, выражающую угол между двумя линиями.

Как было показано выше (см. n° 218), в бельтрамиевых координатах прямая определяется уравнением первой степени:

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Если какая-нибудь точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на этой прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (1), т. е. должно быть

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \tag{2}$$

Вычитая почленно из уравнения (1) равенство (2), получим:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

где $k = -\dfrac{A}{B}$.

Величину k в последнем уравнении мы будем называть *направляющим параметром прямой.*

Угол между двумя произвольными линиями, естественно, определяется как угол между их касательными. Так как в бельтрамиевых координатах прямая представляется уравнением первой степени, то уравнение касательной в этих координатах имеет точно такой же вид, как уравнение касательной в декартовых координатах евклидовой плоскости, и направляющий параметр ее выражается точно так же, как угловой коэффициент касательной в евклидовой геометрии.

В самом деле, пусть дана кривая, определенная параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Возьмем на этой кривой две точки M и M', соответствующие двум значениям параметра t и t'. Уравнение секущей MM' в бельтрамиевых координатах, очевидно, имеет вид

$$\frac{X - \varphi(t)}{\varphi(t') - \varphi(t)} = \frac{Y - \psi(t)}{\psi(t') - \psi(t)}.$$

Отсюда, деля знаменатели в обеих частях на $t' - t$ и переходя к пределу при $t' \to t$, получим уравнение касательной в форме

$$\frac{X - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{Y - \psi(t)}{\psi'(t)}$$

и направляющий параметр

$$k = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{dy}{dx}.$$

Рассмотрим какие-нибудь две линии, направления которых в их общей точке $M(x, y)$ определены параметрами $k_1 = \dfrac{dy}{dx}$, $k_2 = \dfrac{\delta y}{\delta x}$. Мы докажем, что угол φ между этими линиями выражается формулой точно такой же структуры, какую имеет формула (II*) n° 215, выражающая евклидов угол в произвольных координатах; именно

$$\cos\varphi = \frac{E\,dx\,\delta x + F(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + G\,dy\,\delta y}{\sqrt{E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + Gdy^2}\sqrt{E\,\delta x^2 + 2F\,\delta x\,\delta y + G\,\delta y^2}}. \tag{3}$$

Прежде всего мы установим, что правая часть этой формулы представляет собой инвариант относительно преобразования бельтрамиевых координат.

Рассмотрим наряду с координатной системой (x, y) новую бельтрамиеву систему $(\bar{x}, \bar{y})$, начало и направления осей которой произвольны. Представим метрическую формулу плоскости Лобачевского в новых координатах:

$$ds^2 = \bar{E}\,d\bar{x}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{x}\,d\bar{y} + \bar{G}\,d\bar{y}^2.$$

Так как ds^2 не зависит от координатной системы, то должно иметь место следующее тождество:

$$\bar{E}\,d\bar{x}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{x}\,d\bar{y} + \bar{G}\,d\bar{y}^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2. \tag{4}$$

Полагая, что связь между старыми и новыми координатами устанавливается формулами

$$x = x(\bar{x}, \bar{y}), \qquad y = y(\bar{x}, \bar{y}),$$

подставим в правую часть тождества (4) вместо x и y эти их выражения через $(\bar{x}, \bar{y})$; мы получим:

$$\bar{E}\,d\bar{x}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{x}\,d\bar{y} + \bar{G}\,d\bar{y}^2 = \left[E\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right)^2 + 2F\,\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + G\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^2\right] d\bar{x}^2 +$$
$$+ 2\left[E\,\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + F\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right) + G\,\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\right] d\bar{x}\,d\bar{y} +$$
$$+ \left[E\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2F\,\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + G\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\right)^2\right] d\bar{y}^2.$$

Но dx и dy как дифференциалы независимых переменных являются произвольно изменяющимися величинами, поэтому коэффициенты квадратичной дифференциальной формы, стоящей в левой части последнего тождества, равны соответствующим коэффициентам формы в его правой части, т. е.

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= E\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right)^2 + 2F\,\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + G\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^2, \\
\bar{F} &= E\,\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + F\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right) + G\,\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}, \\
\bar{G} &= E\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2F\,\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + G\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Числитель правой части формулы (3) представляет собой билинейную форму

$$E\,dx\,\delta x + F(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + G\,dy\,\delta y,$$

т. е. однородное выражение, линейное относительно каждой из двух систем переменных dx, dy и $\delta x, \delta y$. Легко видеть, что эта форма инвариантна относительно преобразования бельтрамиевых координат, т. е.

$$\bar{E}\,d\bar{x}\,\delta\bar{x}+\bar{F}(d\bar{x}\,\delta\bar{y}+d\bar{y}\,\delta\bar{x})+\bar{G}\,d\bar{y}\,\delta\bar{y} = E\,dx\,\delta x+F(dx\,\delta y+dy\,\delta x)+G\,dy\,\delta y. \tag{5а}$$

В самом деле, заменяя в левой части величины $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ их выражениями (5), и пользуясь равенствами

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}d\bar{y}, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}d\bar{y}, \tag{5б}$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\delta\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\delta\bar{y}, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\delta\bar{x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\delta\bar{y}, \tag{5в}$$

после простых преобразований получим правую часть равенства (5а), тем самым докажем справедливость этого равенства. Однако равенство (5а) можно получить совсем просто, не вникая в то, как выражаются $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ через E, F, G при условии (4), т. е. не выписывая формул (5). Дело в том, что равенство (4) соблюдается тождественно, при любых $d\bar{x}, d\bar{y}$, как следствие формул (5б). Поэтому (или, если угодно, вследствие формул (5в)) имеем

$$\bar{E}\,\delta\bar{x}^2 + 2\bar{F}\,\delta\bar{x}\,\delta\bar{y} + \bar{G}\,\delta\bar{y}^2 = E\,\delta x^2 + 2F\,\delta x\,\delta y + G\,\delta y^2, \tag{4а}$$

а также

$$\bar{E}\,(d\bar{x} + \delta\bar{x})^2 + 2\bar{F}\,(d\bar{x} + \delta\bar{x})\,(d\bar{y} + \delta\bar{y}) + \bar{G}\,(d\bar{y} + \delta\bar{y})^2 =$$
$$= E\,(dx + \delta x)^2 + 2F\,(dx + \delta x)\,(dy + \delta y) + G\,(dy + \delta y)^2. \tag{4б}$$

Вычитая (4) и (4а) из (4б), получим (5а).

Мы доказали инвариантность числителя правой части формулы (3). Инвариантность знаменателя выражается равенствами (4) и (4а).

Итак, правая часть формулы (3) представляет собой инвариант относительно изменения бельтрамиевых координат.

Пусть нам даны точка M с бельтрамиевыми координатами x, y и две линии, проходящие через точку M с направляющими параметрами

$$k_1 = \frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Чтобы установить, что формула (3) определяет угол φ между данными линиями, введем новую систему бельтрамиевых координат, начало которой поместим в точку M. Новой системе координат будут соответствовать новые значения E, F, G и новые значения направляющих параметров данных линий (отношений дифференциалов новых координат); величина же правой части формулы (3) останется неизменной. Не желая усложнять дело лишними символами, мы сохраним старые обозначения величин.

В точке M теперь имеем: $x = 0, y = 0$; пользуясь формулами (7) n° 220, находим в точке M следующие значения коэффициентов E, F, G:

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2,$$

и формула (3) принимает вид

$$\cos\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \tag{$*$}$$

Рассмотрим орисферу Σ, которая касается нашей плоскости в точке M, т. е. в начале новой системы координат; отобразим плоскость на орисферу так, как это делалось в n° 216. Каждой точке плоскости с бельтрамиевыми координатами (x, y) соответствует на Σ точка с декартовыми координатами (x', y'), причем

$$x = \frac{x'}{R}, \quad y = \frac{y'}{R}.$$

Заменим в правой части формулы ($*$) аргументы по этим формулам; мы получим

$$\cos\varphi = \frac{dx'\delta x' + dy'\delta y'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2}\sqrt{\delta x'^2 + \delta y'^2}}. \tag{$**$}$$

Эта формула совпадает с евклидовой формулой (II) n° 215; отсюда ясно, что она определяет на орисфере Σ угол между образами данных двух линий. Но в точке прикосновения орисферы Σ к нашей плоскости угол между любыми двумя линиями на плоскости равен углу между их образами на орисфере. Следовательно, формула ($**$), а значит, и формула ($*$), определяет угол между двумя данными линиями на рассматриваемой плоскости Лобачевского. Тем самым доказано, что в произвольной точке и в любых бельтрамиевых координатах угол определяется формулой (3).

222. Обратимся, наконец, к вопросу об измерении площадей.

Будем рассматривать на плоскости Лобачевского совокупность всевозможных конечных областей, ограниченных замкнутыми гладкими или кусочно-гладкими кривыми. Предположим, что каждой такой области поставлено в соответствие положительное число, причем соблюдаются следующие условия:

1) конгруэнтным областям отнесены равные числа;

2) если область Ω разделяется кусочно-гладкой линией на две области Ω_1 и Ω_2, то число, отнесенное области Ω, равно сумме чисел, отнесенных областям Ω_1 и Ω_2.

Иначе можно сказать, что задана положительная функция области

$$\sigma = f(\Omega),$$

которая: 1) на конгруэнтных областях принимает равные значения и 2) обладает свойством аддитивности, т. е.

$$f(\Omega_1 + \Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2)$$

(здесь $\Omega_1 + \Omega_2$ следует понимать как область, состоящую из точек областей Ω_1 и Ω_2 и из точек разделяющей линии).

Определим еще понятие непрерывности функции области; предварительно нам придется определить сходимость последовательности областей.

Поместим в каждой точке ограниченной области Ω центр круга радиуса ε. Совокупность внутренних точек всех таких кругов условимся называть ε-окрестностью области Ω. Аналогично определяется ε-окрестность границы области. Обозначим через Ω'_ε множество всех точек области Ω, кроме тех, которые входят в ε-окрестность ее границы. Пусть дана бесконечная последовательность ограниченных областей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \ldots$; мы скажем, что последовательность $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \ldots$ сходится к области Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N, что при всяком $n \geqslant N$ область Ω_n включается в ε-окрестность области Ω и сама включает множество Ω'_ε.

Функцию области $f(\Omega)$ естественно назвать непрерывной в том случае, когда для любой области Ω и для любой сходящейся к ней последовательности областей Ω_n имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(\Omega_n) = f(\Omega).$$

Для положительной функции области из условий 1) и 2) вытекает свойство непрерывности. Однако мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения. Чтобы упростить дело, можно просто предполагать, что рассматриваемые далее положительные функции области являются непрерывными.

Площадью области Ω плоскости Лобачевского назовем значение, которое принимает на этой области положительная функция $f(\Omega)$, удовлетворяющая условиям 1) и 2).

Уместно поставить вопрос: в какой мере требования 1) и 2) определяют положительную функцию $f(\Omega)$? Этот вопрос решается следующей теоремой.

Теорема. *Если $\varphi(\Omega)$ — какая-нибудь положительная функция области, удовлетворяющая условиям* 1) *и* 2), *то всякая другая положительная функция области, удовлетворяющая тем же условиям, представляется в виде $k\varphi(\Omega)$, где k — положительная постоянная.*

Таким образом, согласно нашему определению, площади всех областей определяются с точностью до постоянного множителя. Этот множитель будет фиксирован, если некоторой области Ω_0 приписать площадь, равную единице; тогда площадь произвольной области представится в виде

$$f(\Omega) = \frac{\varphi(\Omega)}{\varphi(\Omega_0)},$$

где $\varphi(\Omega)$ — произвольная положительная функция области, удовлетворяющая условиям 1) и 2).

Перейдем к доказательству высказанной выше теоремы. Заметим, что из предложений n° 48 вытекает справедливость утверждения теоремы для треугольников; именно, если $f(\Omega)$ — положительная функция области, удовлетворяющая условиям 1) и 2), Δ — некоторый треугольник и $D(\Delta)$ — дефект этого треугольника, то

$$f(\Delta) = k' D(\Delta), \tag{1}$$

где k' — постоянная, не зависящая от выбора Δ. Пусть $\varphi(\Omega)$ — другая положительная функция области, также удовлетворяющая условиям 1) и 2); аналогично

$$\varphi(\Delta) = k'' D(\Delta). \tag{2}$$

Полагая

$$\frac{k'}{k''} = k,$$

из (1) и (2) будем иметь:

$$f(\Delta) = k\varphi(\Delta). \tag{3}$$

Очевидно, такое же соотношение связывает значения, принимаемые функциями $f(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$ на произвольных многоугольниках. В самом деле, пусть S — произвольный многоугольник. Разобьем его каким-нибудь образом на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$:

$$S = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n.$$

Применяя равенство (3) к треугольникам:

$$f(\Delta_1) = k\varphi(\Delta_1),$$
$$\ldots$$
$$f(\Delta_n) = k\varphi(\Delta_n)$$

и суммируя почленно полученные соотношения, найдем:

$$f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + \ldots + f(\Delta_n) = k\left[\varphi(\Delta_1) + \ldots + \varphi(\Delta_n)\right].$$

1/4 17 — 10891

Но в силу свойства аддитивности функций f и φ мы можем последнее равенство представить в виде

$$f\left(\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n\right) = k\varphi\left(\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n\right)$$

или

$$f(S) = k\varphi(S).$$

Пусть теперь Ω будет произвольная область. Выберем какую-нибудь последовательность многоугольников $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \ldots$, сходящуюся к области Ω в определенном выше смысле (на доказательстве возможности такого выбора мы не останавливаемся). Как только что было доказано, для любого из этих многоугольников имеет место равенство $f(\Omega_n) = k\varphi(\Omega_n)$. Отсюда, переходя к пределу по $n \to \infty$ и принимая во внимание непрерывность функций f и φ, найдем:

$$f(\Omega) = k\varphi(\Omega),$$

т. е. действительно, условиями 1) и 2) положительная функция области определяется с точностью до постоянного множителя. Остается доказать существование функции с этими свойствами.

Мы покажем сейчас, что двойной интеграл

$$f(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy \tag{4}$$

является непрерывной и положительной функцией области, удовлетворяющей условиям 1) и 2).

Прежде всего заметим, что подынтегральная функция

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{R^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

положительна и непрерывна во всех точках плоскости Лобачевского в силу основного для бельтрамиевых координат неравенства $x^2+y^2<1$. Отсюда следует, что интеграл, стоящий в правой части равенства (4), существует при любом выборе ограниченной области Ω и имеет положительное значение.

Далее, если функции E, F и G фиксированы, т. е. если выбрана какая-нибудь определенная бельтрамиева система координат, то значение интеграла (4) определяется лишь выбором области интегрирования. Существенно, что это значение в действительности не зависит от выбора системы бельтрамиевых координат. Для доказательства рассмотрим наряду с координатной системой (x, y) новую бельтрамиеву систему $(\bar{x}, \bar{y})$; пусть E, F, G и $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ — коэффициенты метрической формы плоскости Лобачевского соответственно в старых и новых координатах. Пользуясь формулами (5) n° 221, после несложных вычислений получим:

$$\begin{vmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \dfrac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \dfrac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix}^2. \tag{5}$$

Составив в новых координатах выражение, аналогичное выражению (4), мы на основании равенства (5) и известной формулы замены переменных в кратном интеграле найдем:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}\, d\bar{x}\, d\bar{y} = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \dfrac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \dfrac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{matrix} \right\| d\bar{x}\, d\bar{y} = \\ = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy.$$

Тем самым инвариантность интеграла (4) относительно преобразования координат доказана.

Теперь мы докажем, что функция области $f(\Omega)$, заданная равенством (4), удовлетворяет условиям 1) и 2).

Пусть будут Ω и Ω' две конгруэнтные области. Нужно показать, что $f(\Omega) = f(\Omega')$. В силу конгруэнтности областей Ω и Ω' существует такое движение плоскости, при котором область Ω налагается на область Ω'. Допустим, что при этом движении координатные оси Ox, Oy займут положения $O'x', O'y'$. Будем рассматривать наряду со старой системой бельтрамиевых координат x, y новую систему x', y' с осями $O'x'$ и $O'y'$; пусть будут

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$$

и

$$ds^2 = E'dx'^2 + 2F'dx'dy' + G'dy'^2$$

два представления метрической формы плоскости Лобачевского соответственно в старой и новой системе. Обозначим через M произвольную точку области Ω и через M' — точку, в которую M переходит при наложении области Ω на область Ω'. Легко видеть, что старые координаты точки M равны новым координатам точки M' и значения функций E, F, G в точке M соответственно равны значениям функций

E', F', G' в точке M'. Ввиду этого имеет место следующее равенство:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega'} \sqrt{E'G' - F'^2}\, dx' dy'.$$

Но, как мы видели, значение интеграла (4), распространенного на какую-нибудь область, не зависит от того, какая система координат положена при этом в основу рассмотрения; таким образом,

$$\iint\limits_{\Omega'} \sqrt{E'G' - F'^2}\, dx' dy' = \iint\limits_{\Omega'} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy,$$

откуда

$$\iint\limits_{\Omega'} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy.$$

Тем самым устанавливается, что функция

$$f(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy$$

удовлетворяет условию 1). То, что она удовлетворяет также условию 2), непосредственно вытекает из свойства аддитивности интеграла: если область разбита на две области Ω_1 и Ω_2, то

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega_1} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy + \iint\limits_{\Omega_2} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy,$$

или

$$f(\Omega_1 + \Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2).$$

Выше мы условились значение положительной функции $f(\Omega)$, удовлетворяющей условиям 1) и 2), называть площадью области Ω. Согласно этому определению и вследствие доказанной выше теоремы площадь области может быть выражена формулой

$$f(\Omega) = k \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy, \tag{6}$$

где k — постоянная, которая фиксируется выбором единицы измерения площадей.

Единицу измерения площадей мы сейчас поставим в определенную зависимость от единицы измерения длин.

В евклидовой геометрии зависимость между единицей площадей и единицей длин устанавливается тем, что в качестве единицы площади берется квадрат, сторона которого равна линейной единице. Нечто аналогичное мы сделаем и в геометрии Лобачевского.

Рассмотрим снова орисферу Σ, которая касается плоскости в начале выбранной системы бельтрамиевых координат; бельтрамиевым координатам (x, y) на плоскости соответствуют декартовы координаты (x', y') на орисфере Σ.

Пусть Q' обозначает квадрат на орисфере Σ (квадрат — в смысле евклидовой геометрии орисферы Σ), имеющий одну вершину в начале координат, одну сторону — на положительной полуоси Ox', другую сторону — на положительной полуоси Oy'. Длину стороны этого квадрата обозначим через a. На плоскости квадрату Q' соответствует некоторый четырехугольник Q (подробнее: Q есть прообраз Q' при отображении плоскости на Σ, которое было определено в n° 216).

Обозначим через $S(Q')$ евклидову площадь квадрата Q' $[S(Q')=a^2]$, через $S(Q)$ — площадь четырехугольника Q при некотором выборе единицы площадей на плоскости. *Выбор единицы площадей мы подчиняем условию*

$$\lim_{a\to 0} \frac{S(Q)}{S(Q')} = 1.$$

Исходя из этого условия, найдем значение постоянной k в формуле (6).

Заметим, что (замкнутая) область Q' в декартовых координатах (x', y') на орисфере Σ определяется неравенствами $0 \leqslant x' \leqslant a$, $0 \leqslant y' \leqslant a$. Так как точке (x', y') орисферы Σ соответствует на плоскости точка с бельтрамиевыми координатами $x = \dfrac{x'}{R}$, $y = \dfrac{y'}{R}$, то (замкнутая) область Q в бельтрамиевых координатах плоскости определяется неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{R}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{R}.$$

Отсюда находим:

$$S(Q) = k \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = k \int\limits_0^{\frac{a}{R}} \int\limits_0^{\frac{a}{R}} \frac{R^2 dx\, dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}.$$

После этого элементарные вычисления дают:

$$\lim_{a\to 0} \frac{S(Q)}{S(Q')} = \lim_{a\to 0} \frac{k \int\limits_0^{\frac{a}{R}} \int\limits_0^{\frac{a}{R}} \dfrac{R^2 dx\, dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}}{a^2} = k.$$

17 — 10891

Следовательно,
$$k = 1.$$

Мы видим, что при указанном выборе единицы площадей площадь произвольной области Ω выражается равенством
$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy.$$

Заметим, что площадь треугольника Δ в этом случае дается формулой
$$S(\Delta) = R^2 D(\Delta),$$
где $D(\Delta)$ — дефект (полезно сравнить это выражение с формулой (I′) n° 48).

223. Итак, формулы
$$ds^2 = E\, dx^2 + 2F\, dx\, dy + G\, dy^2, \tag{I}$$
$$\cos\varphi = \frac{E\, dx\delta x + F(dx\delta y + dy\delta x) + G\, dy\delta y}{\sqrt{E\, dx^2 + 2F\, dx\, dy + G\, dy^2}\sqrt{E\, \delta x^2 + 2F\, \delta x\delta y + G\, \delta y^2}}. \tag{II}$$
$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy, \tag{III}$$
из которых первая в подробной записи имеет вид
$$ds^2 = R^2 \frac{(1 - y^2)dx^2 + 2xydx\, dy + (1 - x^2)dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \tag{$*$}$$
определяют в бельтрамиевых координатах на плоскости Лобачевского измерение длин, углов и площадей.

Структура этих формул точно совпадает со структурой формул (I*), (II*), (III*) n° 215, с помощью которых определяется измерение геометрических величин на плоскости Евклида. Но, конечно, значения коэффициентов E, F, G в формулах (I*) — (III*) n° 215 отличаются от значений коэффициентов E, F, G в формулах (I) — (III) настоящего параграфа.

Так как величины E, F, G в формулах (II) и (III) являются коэффициентами формы ($*$), то говорят, что форма ($*$) определяет метрику плоскости Лобачевского.

224. До сих пор мы пользовались исключительно бельтрамиевыми координатами. Теперь мы расширим класс допустимых координатных систем. Отправляясь от некоторой данной системы бельтрамиевых координат (x, y), мы будем вводить новые координаты с помощью любых двух соотношений вида

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{*}$$

если только функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и имеют отличный от нуля якобиан при всех значениях x, y, ограниченных условием $x^2 + y^2 < 1$. Числа (u, v) считаются новыми координатами точки $M(x, y)$. Условия непрерывной дифференцируемости и неравенства нулю якобиана ставятся для того, чтобы по отношению к новым координатам сохранилось определение гладкой линии, высказанное в n° 220 для бельтрамиевых систем. Кроме того, при этих условиях уравнения $(*)$ обратимы и обращение их дает функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{**}$$

непрерывно дифференцируемые и с отличным от нуля якобианом. В координатах (u, v) направление гладкой линии $u = u(t), v = v(t)$ определяется отношением $\dfrac{dv}{du}$; действительно, из равенств $(**)$ мы имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}$$

и, следовательно, направляющий параметр $k = \dfrac{dy}{dx}$ известен, если известно отношение $\dfrac{dv}{du}$.

Преобразуя формулы (I), (II), (III) n° 223 к новым переменным (u, v), мы получим формулы точно такой же структуры (но с другими величинами E, F, G):

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{I}$$

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}, \tag{II}$$

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \tag{III}$$

которые в системе (u, v) выражают дифференциал дуги, угол между линиями и площадь области. Для того чтобы вести по этим формулам счет, нужно знать только коэффициенты квадратичной формы (I): $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$. На основании этого мы говорим, что квадратичная форма (I) определяет метрику плоскости Лобачевского в координатах (u, v).

Рассмотрим один важный пример преобразования координат:

$$x = \operatorname{th}\frac{\xi}{R}, \quad y = \frac{\operatorname{th}\dfrac{\eta}{R}}{\operatorname{ch}\dfrac{\xi}{R}}, \tag{1}$$

где (ξ, η) — новые координаты, th и ch — символы, обозначающие гиперболические тангенс и косинус. Если x, y удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < 1$, то уравнения (1) однозначно обратимы, они определяют, следовательно, преобразования координат на всей плоскости Лобачевского. Заменяя x, y в метрической форме

$$ds^2 = R^2 \frac{(1 - y^2)dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1 - x^2)dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

правыми частями равенств (1), после несложных преобразований получим метрическую форму плоскости Лобачевского в координатах ξ, η:

$$s^2 = d\operatorname{ch}^2\frac{\eta}{R} \cdot d\xi^2 + d\eta^2.$$

Согласно формулам (II) и (III) отсюда

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{ch}^2\dfrac{\eta}{R} \cdot d\xi\,\delta\xi + d\eta\,\delta\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{\eta}{R} \cdot d\xi^2 + d\eta^2}\sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{\eta}{R} \cdot \delta\xi^2 + \delta\eta^2}},$$

$$S(D) = \iint\limits_{(D)} \operatorname{ch}\frac{\eta}{R} \cdot d\xi\,\delta\eta.$$

В метрической форме (2) отсутствует член с произведением $d\xi d\eta$. Заметим, что в общих координатах (u, v) с соответствующей метрической формой

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

F будет равно нулю в том и только в том случае, когда сеть координатных линий

$$u = \text{const},$$
$$v = \text{const}$$

ортогональна. В самом деле, очевидно, направления координатных линий характеризуются дифференциалами $dv, du = 0$ и $dv = 0$, du, причем в первом случае dv, а во втором du являются произвольными переменными. Отсюда и из (II), обозначая через φ угол между линиями $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Таким образом, если $\varphi = \pi/2$, то $F = 0$, и обратно.

Исчезновение члена с произведением $d\xi d\eta$ в форме (2) означает, следовательно, ортогональность координатной сети $\xi = \text{const}, \eta = \text{const}$.

Дадим геометрическое описание координат ξ, η. Рассмотрим взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, которые служат для определения бельтрамиевых координат x, y (рис. 162). Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости; опустим из M перпендикуляр на Ox и обозначим его основание через M_x. Сравнивая первую из формул (1) $x = \operatorname{th}\dfrac{\xi}{R}$ с первой из формул (4) n° 218, видим, что они тождественны. Следовательно, $\xi = OM_x$. Отсюда заключаем, что уравнение $\xi = c$ (где c — постоянная) определяет прямую, перпендикулярную к оси Ox. Из формулы (2) находим, что для этой линии $ds^2 = d\eta^2$, или $ds = \pm d\eta$. Интегрирование последнего соотношения дает $M_xM = \pm\eta + a$ ($a = \text{const}$). Полагая во второй из формул (1) $y = 0$, получим соответственно $\eta = 0$. Это означает, что в том случае, когда точка M лежит на оси Ox, должно быть $\eta = 0$. Таким образом, $a = 0$ и $M_xM = \pm\eta$. Заметим, наконец, что в силу второй из формул (1) $\eta > 0$, если $y > 0$, и $\eta < 0$, если $y < 0$. Следовательно, число η выражает отрезок M_xM с учетом знака по обычному правилу. Числа (ξ, η) называются *первыми координатами* точки M; числа (ξ, ζ), с помощью которых в n° 218 выражены бельтрамиевы координаты (x, y) (см. также рис. 162), носят название *вторых координат* точки M.

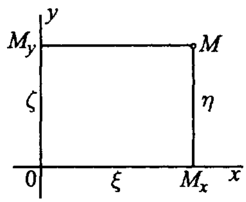


Рис. 162

В геометрии Лобачевского всегда $\eta \neq \zeta$.

Теперь легко понять, что координатные линии $\xi = \text{const}$ суть прямые, перпендикулярные к оси Ox, а координатные линии $\eta = \text{const}$ — ортогональные к ним эквидистанты.

§ 4. Внутренняя геометрия поверхности и задача Бельтрами

225. Внутренней геометрией какой-нибудь поверхности называют совокупность таких ее свойств, которые могут быть выявлены при помощи измерений, производимых на самой этой поверхности.

Очевидно, евклидова планиметрия является частным случаем внутренней геометрии, понимаемой в указанном смысле.

Результаты, полученные нами в предыдущих разделах, естественно выдвигают вопрос: нельзя ли и планиметрию Лобачевского с известной точки зрения рассматривать как внутреннюю геометрию некоторой поверхности пространства Евклида?

Этот вопрос, поставленный в работе Бельтрами "Опыт истолкования неевклидовой геометрии" (1868), будет служить предметом нашего внимания на протяжении ближайших пунктов.

Мы начнем с некоторых простейших фактов дифференциальной геометрии. Хотя большинство из них (если не все) общеизвестно, тем не менее нам представляется целесообразным поступить таким образом с целью сделать ясной нашу терминологию и тем самым оградить читателя от возможных недоразумений при знакомстве с дальнейшим материалом.

Прежде всего условимся точно, что мы будем понимать под словом "поверхность".

Мы ограничимся простейшим случаем поверхности без самопересечений, которую можно определить как некоторое множество точек пространства (сейчас мы предполагаем пространство евклидовым).

Пусть в евклидовом пространстве дано точечное множество S. Если M_0 — любая точка множества S, то мы будем называть окрестностью точки M_0 в множестве S подмножество $U(M_0)$ этого множества, которое является пересечением S с какой-нибудь окрестностью точки M_0 в евклидовом пространстве. Дальнейшее определение заключается в требовании наличия окрестностей $U(M)$ точек M, обладающих определенными свойствами.

Чтобы описать эти свойства, рассмотрим систему декартовых ортогональных координат с началом в точке O и с осями Ox, Oy, Oz. Кроме того, вообразим себе какую-нибудь плоскость с двумерной декартовой системой координат, оси которой обозначены через u и v (далее она называется u, v-плоскостью).

Множество S мы будем называть поверхностью, если для каждой его точки M_0 существует такая окрестность $U(M_0)$, что все ее точки имеют координаты, представляемые уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v), \\ z &= z(u,v), \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

причем

1) $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ являются функциями, определенными и однозначными в некоторой области D плоскости u, v.

2) Каждой паре чисел u, v из области D уравнения (α) относят точку с координатами x, y, z, принадлежащую окрестности $U(M_0)$; разным парам чисел u, v уравнения (α) относят разные точки (т. е. уравнениями (α) устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками области D и точками окрестности $U(M_0)$).

3) Функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ в области D непрерывны, обладают непрерывными частными производными первого порядка, и ранг

матрицы

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{Vmatrix} \qquad (*)$$

равен двум.

Смысл последнего условия мы разъясним чуть позже.

Без потери общности будем считать, ради наглядности, что область D является односвязной областью плоскости (u, v). Вместе с тем соответствующая ей окрестность $U(M_0)$ произвольной точки M_0 будет односвязной областью на поверхности S.

Иногда окрестности, о которых шла речь, называют координатными. Мы не будем осложнять наше изложение этим прилагательным, но в дальнейшем, говоря об окрестностях точек поверхности, будем иметь в виду окрестности именно такого вида.

В некоторых случаях вся поверхность является окрестностью любой своей точки (например — плоскость или параболоид). В общем случае поверхность представляет собой собрание конечной или бесконечной системы областей описанного вида. Таким образом, определяя поверхность, мы допускаем, что множество ее точек может иметь в целом весьма сложное строение, но вблизи каждой точки его структура должна быть в определенных отношениях канонизирована.

Чтобы сделать понятие поверхности более удобным для использования, целесообразно прибавить к ее определению еще условие связности. Это условие можно высказать, например, в следующей форме.

Пусть U и V — какие-нибудь окрестности двух точек поверхности. Мы будем говорить, что эти две окрестности соединяются цепочкой окрестностей, если на поверхности существуют такие точки и такие их окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_n$, что U_1 имеет общую часть с U, U_n имеет общую часть с V и окрестности U_k, U_{k+1} имеют общую часть при любом $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Поверхность мы назовем *связной*, если на ней любые две окрестности можно соединить цепочкой окрестностей.

Рассмотрим какую-нибудь область U поверхности S, представленную уравнениями вида (α). Каждая точка M области U определяется при помощи уравнений (α) заданием двух чисел u и v. Поэтому числа u, v мы будем называть координатами точки M на поверхности и употреблять обычное в аналитической геометрии обозначение: $M(u, v)$. Этим координатам часто дают наименование *внутренних*.

Исходя из координат u, v, можно ввести в области U бесконечно много других внутренних координатных систем. Чтобы это сделать, следует лишь составить какие-нибудь уравнения:

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v),$$
$$\bar{v} = \bar{v}(u, v),$$

которые для каждой пары чисел $\bar{u}, \bar{v}$ позволяют определить новую пару чисел u, v, причем правые части этих уравнений должны быть подчинены точно тем же ограничениям, которые высказаны в n° 224 для уравнений $(*)$.

Мы определяли поверхность с помощью трех уравнений (α). Их можно заменить одним векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \tag{β}$$

в левой части которого записан радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M поверхности (т. е. вектор $\overline{OM}$), а в правой — векторная функция с составляющими $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$.

Если пользоваться уравнением (β), то легко уяснить геометрический смысл условий 3 в приведенном выше определении поверхности. Именно, требуются, во-первых, существование и непрерывность векторов

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

и, во-вторых, выполнение неравенства $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$, так как составляющими этого векторного произведения являются определители матрицы $(*)$. Последнее неравенство означает, что векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не коллинеарны; тогда они определяют касательную к поверхности плоскость. Рассмотрим теперь уравнения вида

$$\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t); \end{aligned}$$

они определяют на поверхности линию (траекторию точки $M(u,v)$ при переменном t). Направление этой линии в пространстве дается вектором

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}.$$

Очевидно, направление линии будет определено, если дано отношение дифференциалов $du : dv$. Поэтому $du : dv$ мы будем называть *параметром направления*.

Введем обычные в дифференциальной геометрии обозначения:

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G.$$

Тогда мы можем найти квадрат дифференциала дуги линии на поверхности, полагая

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Кроме того, если $du : dv$ и $\delta u : \delta v$ — параметры двух направлений, которым соответствуют касательные к поверхности векторы $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, то угол φ между этими направлениями определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{d\boldsymbol{r}\,\delta\boldsymbol{r}}{\sqrt{d\boldsymbol{r}^2}\sqrt{\delta\boldsymbol{r}^2}} = \frac{(\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)(\boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v)}{ds\,\delta s} = \\ = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

Наконец, как известно из элементарного анализа, если область U поверхности соответствует области D плоскости u, v, то площадь области U вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Итак, мы имеем три основных соотношения:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{I}$$

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}, \tag{II}$$

$$\sigma = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \tag{III}$$

которые в координатной системе u, v с помощью функций $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ выражают дифференциал дуги, угол между двумя линиями и площадь области. Из этих формул видно, что измерения длин, углов и площадей на поверхности вполне определяются коэффициентами квадратичной формы

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{I}$$

Поэтому говорят, что форма (I) определяет метрику поверхности и называют эту форму *метрической.*

Понятно, что с изменением координатной системы меняются коэффициенты метрической формы и одновременно меняются дифференциалы координат, отвечающие какому-нибудь смещению точки по линии, расположенной на поверхности. При этом, если E, F, G — коэффициенты метрической формы в одной системе внутренних координат, $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ — коэффициенты в другой системе, а du, dv и $d\bar{u}, d\bar{v}$ — дифференциалы старых и новых координат, определяемые одним и тем же элементом линии, то

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \bar{E}\,d\bar{u}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{G}\,d\bar{v}^2,$$

так как левая и правая части выражают одну и ту же величину ds^2.

Зная формулы преобразования координат и E, F, G, легко вычислить $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$. Заметим, что зависимость между E, F, G и $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ получается формально алгебраическими выкладками. Поэтому вычисление $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ по данным E, F, G можно производить, пользуясь формулами (5) n° 221, где мы решали с алгебраической точки зрения точно такой же вопрос, как и сейчас.

Если коэффициенты двух форм связаны соотношениями (5) n° 221, то мы будем говорить, что эти две формы переводятся друг в друга преобразованием координат. Такие формы называются *эквивалентными.*

В соответствии с этим определением можно сказать, что метрика каждой поверхности в различных внутренних координатах определяется различными метрическими формами, но все эти формы эквивалентны между собой.

226. Рассмотрим какую-нибудь область U на поверхности S и область U' на поверхности S'. Предположим, что между точками области U и точками области U' установлено взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие. Тогда мы будем иметь также соответствие между линиями области U и линиями области U'; именно: каждой линии L области U соответствует в области U' линия L', состоящая из точек, соответствующих точкам линии L. Точно так же каждой области V, лежащей внутри U, отвечает на U' область V', состоящая из точек, соответствующих точкам V. Фигуру A' (например, линию) из области U', соответствующую фигуре A из области U, мы будем называть *образом фигуры* A.

Если каждая гладкая дуга l в области U имеет своим образом на U' гладкую дугу l' такой же длины, что и l, то соответствие называется изометричным или просто изометрией. Области U и U', между которыми возможно установить изометричное соответствие, называются изометричными друг другу.

Чтобы получить аналитический признак изометричности областей, представим себе, что в области U введены какие-нибудь внутренние координаты u, v. В области U' мы введем систему внутренних координат, особым образом связанную с системой u, v области U. Именно, с каждой точкой M' на U' мы будем сопоставлять в качестве ее координат два числа, равные координатам в системе (u, v) на U той точки M этой области U, которая соответствует точке M'. Короче говоря, координатная система в области U' вводится так, что соответствующие точки в U и U' имеют численно равные координаты.

Пусть $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ и $E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2$ — метрические формы областей U и U' в данных координатах. Рассмотрим соответствующие элементы двух линий на U и U'. Они характеризуются одними и теми же дифференциалами du, dv. По условию изометрии мы должны иметь:

$$Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 = E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2. \qquad (*)$$

Так как выбор пары соответствующих элементов двух линий областей U и U' ничем не ограничен, то в равенстве $(*)$ du и dv являются совершенно произвольными величинами. Поэтому из $(*)$ получаем:

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

Таким образом, области U и U' в данных координатах (u, v) имеют одинаковые метрические формы. Обратное предложение: если две поверхности имеют одинаковые метрические формы, то они изометричны, — является очевидным.

(Заметим, что в произвольных координатах метрические формы изометричных поверхностей могут не совпадать, но будут эквивалентными.)

Из формул (I)—(III) n° 225 следует, что *в случае изометрии наряду с равенством длин соответствующих дуг оказываются также равными величины углов между соответствующими направлениями и площади соответствующих областей.*

Поэтому все те свойства поверхности, которые могут быть выявлены при помощи производимых на ней измерений, для изометричных поверхностей оказываются одинаковыми. Это дает повод говорить, что изометричные поверхности имеют общую внутреннюю геометрию. Внутренняя геометрия, общая для совокупности изометричных между собой поверхностей, определяется одной метрической формой.

Чтобы наглядно показать, как построить бесконечно много разных поверхностей с общей внутренней геометрией, мы попросим читателя представить себе, что поверхность физически реализована из гибкого, но нерастяжимого материала. Будем деформировать эту поверхность так, чтобы не возникало складок или разрывов. Получаемые таким путем поверхности вследствие нерастяжимости их материала будут изометричны между собой и, следовательно, будут обладать общей внутренней геометрией.

Например, придавая листу бумаги цилиндрическую форму, мы наглядно докажем, что кусок плоскости и некоторая часть цилиндра имеют одинаковую внутреннюю геометрию. Если же мы попытаемся наложить лист бумаги на сферу или на седло (гиперболический параболоид), то в первом случае образуются складки, во втором — разрывы. Это обстоятельство наглядно выражает тот факт, что внутренняя геометрия каждого куска сферы или седла существенно отлична от геометрии в любой части плоскости.

Непрерывную деформацию поверхности, при которой сохраняется ее внутренняя геометрии, называют *изгибанием.*

Обратимся к материалу n° 224. Мы определили там метрическую форму плоскости Лобачевского и вывели формулы (I)–(III), с помощью которых выражаются длины линий, величины углов и площади областей. Структура этих формул совершенно тождественна со структурой формул (I)–(III) n° 225. Естественно поэтому возникает вопрос, существует ли в евклидовом пространстве поверхность, метрическая форма которой эквивалентна метрической форме плоскости Лобачевского. Можно ожидать, что внутренняя геометрия такой поверхности совпадает с планиметрией Лобачевского, т. е. включает в систему своих предложений все аксиомы планиметрии Лобачевского.

Если точно формулировать поставленный вопрос в терминах изометрии, то сейчас же можно усмотреть, что он приводит к двум различным задачам:

1) Найти поверхность, для каждой точки которой существует окрестность, изометричная некоторой области плоскости Лобачевского.

Относительно такой поверхности нельзя еще сказать, что ее геометрия в целом тождественна геометрии плоскости Лобачевского.

(Так, например, каждая точка круглого цилиндра имеет окрестность, которую можно развернуть и наложить на некоторую часть евклидовой плоскости. Однако геометрия круглого цилиндра в целом существенно отлична от геометрии плоскости.)

Мы будем говорить, что на поверхности, удовлетворяющей условиям проблемы, осуществляется геометрия Лобачевского "в малом".

2) Найти поверхность, допускающую изометричное отображение на всю плоскость Лобачевского.

Внутренняя геометрия такой поверхности должна представлять собой реализацию неевклидовой планиметрии внутри пространства Евклида. Из положительного решения второй задачи непосредственно следовала бы логическая непротиворечивость двумерной неевклидовой системы. Именно такую цель преследовал Бельтрами, которому, как указывалось выше, принадлежит постановка этих задач. Но Бельтрами решил только первую из них. Что касается второй, то, как выяснилось впоследствии, она решения не имеет.

Именно, Д. Гильбертом доказано, что в евклидовом пространстве не существует поверхности с требуемым свойством*).

Результаты Бельтрами, имеющие самостоятельный геометрический интерес, независимо от доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, мы изложим с достаточной подробностью.

§ 5. Геометрия на поверхности постоянной кривизны

227. Наша цель — найти, если это возможно, в евклидовом пространстве поверхность, для каждой точки которой существует окрестность, изометричная некоторой области плоскости Лобачевского.

Предположим, что такая поверхность существует; обозначим ее через S. Постараемся изучить свойства, которыми должна обладать

---

*) *Гильберт Д.* Основания геометрии. Добавление V. – Гостехиздат, 1948. Следует заметить, что в этой теореме Гильберта речь идет о поверхностях, текущий радиус-вектор которых удовлетворяет условию трехкратной непрерывной дифференцируемости по внутренним координатам (u, v).

поверхность S. Это в дальнейшем поможет обнаружить существование такой поверхности.

Пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки поверхности S. По условию, для каждой из них существует на S окрестность, изометричная некоторой части плоскости Лобачевского. Обозначим такие окрестности точек M_1 и M_2, соответственно через U_1 и U_2. Пусть U_1 изометрично отображается на область U_1' плоскости Лобачевского, а точка M_1 при этом пусть отображается в точку M_1' внутри U_1'; аналогично, обозначим через U_2' область, получаемую изометричным отображением на плоскость Лобачевского окрестности U_2, и через M_2' — точку, соответствующую в этом отображении точке M_2.

На плоскости Лобачевского внутри области U_1' имеется другая область $\bar{U}_1'$, покрывающая точку M_1' и имеющая настолько малые размеры, что при конгруэнтном ее перемещении, совмещающем точку M_1' с M_2', она покроет часть $\bar{U}_2'$ плоскости, целиком лежащую внутри U_2'. Кроме того, при перемещении области $\bar{U}_1'$ в новое положение $\bar{U}_2'$ любое направление при точке $\bar{M}_1'$ можно совместить с любым направлением при точке M_2' (это свойство совокупности движений мы назвали в n° 45 транзитивностью относительно линейных элементов). Обозначим теперь через $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$ области на поверхности S, которые при изометричных отображениях U_1 и U_2 на U_1' и U_2' соответствуют областям $\bar{U}_1'$ и $\bar{U}_2'$ плоскости Лобачевского.

Вследствие изометрии областей $\bar{U}_1'$ и $\bar{U}_2'$ должны быть изометричны друг другу также и области $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$. Таким образом, какова бы ни была точка M_1 поверхности S, всегда существует окрестность этой точки, которую можно изометрично отобразить на некоторую часть поверхности S так, чтобы точка M_1 отобразилась при этом в любую другую наперед назначенную точку M_2 этой же поверхности. Кроме того, из приведенных рассуждений следует, что при этом любое направление на поверхности S, исходящее из точки M_1, может быть отображено на любое направление, исходящее их точки M_2.

Если мы согласимся изометричные области поверхности S называть конгруэнтными с точки зрения ее внутренней геометрии и будем употреблять терминологию, введенную в n° 45, то полученный результат можно сформулировать следующим образом: *поверхность S допускает совокупность движений, транзитивную относительно линейных элементов.*

Нужно только иметь в виду два обстоятельства:

1) Изометричные области поверхности S как образы объемлющего евклидова пространства, вообще говоря, не являются конгруэнтными.

В данном случае речь идет о движениях в смысле внутренней геометрии поверхности, но отнюдь не о движениях в смысле евклидовой геометрии пространства.

2) Поверхность S в целом может не обладать способностью перемещаться по себе самой столь свободно, чтобы совокупность этих

движений была транзитивной относительно линейных элементов, даже если их рассматривать с точки зрения внутренней геометрии.

В данном случае речь идет не о движениях всей поверхности по себе, а о движении по ней достаточно малых ее кусков.

При этих оговорках можно все же усмотреть большую аналогию между поверхностью S, внутренняя геометрия которой "в малом" есть геометрия Лобачевского, и поверхностями, на которых осуществляется элементарная геометрия, в том смысле, как мы определяли это понятие в n° 45.

Чтобы наглядно представить себе движение в смысле внутренней геометрии, вообразим кусок гибкой, н о н е р а с т я ж и м о й пленки, который плотно приложен к поверхности. Перемещение этого куска по поверхности изображает движение в смысле внутренней геометрии, если перемещаемый кусок в каждом новом положении плотно примыкает к поверхности. Интересующая нас поверхность S должна быть искривленной таким образом, чтобы кусок из гибкой нерастяжимой пленки, приложенный к любому ее месту, можно было, не отрывая, свободно перемещать по ней и вращать вокруг любой ее точки, причем, однако, величина куска, допускающего такие перемещения, может зависеть от того, из какой в какую точку мы его перемещаем.

Ограничим класс рассматриваемых поверхностей дополнительным требованием "гладкости третьего порядка". Это означает, что правые части уравнений (α) n° 225 предполагаются трижды непрерывно дифференцируемыми функциями. В таком случае к рассматриваемым поверхностям становится применимой классическая теория поверхностей.

Принимая во внимание теорему Гаусса об инвариантности полной кривизны при изометричных отображениях,*) мы можем на основании изложенного заключить: *поверхность S необходимо имеет одинаковую полную кривизну во всех своих точках.*

Такая поверхность называется *поверхностью постоянной кривизны.* Докажем теорему: *каждая поверхность постоянной кривизны допускает совокупность движений, понимаемых в смысле внутренней геометрии, транзитивную относительно линейных элементов.*

Сначала проведем некоторые подготовительные вычисления. Пусть S — какая угодно поверхность постоянной кривизны. Возьмем на этой поверхности произвольную точку M_0 и проведем через нее какую-нибудь геодезическую линию Γ. Отложим на Γ от точки M_0 дугу длины u и через конец ее проведем перпендикулярно к Γ геодезическую длины v. Конец последней обозначим через M. В некоторой

*) Полной кривизной поверхности в данной точке называется произведение ее главных кривизн в этой точке: $K = 1/(R_1R_2)$. Доказательство теоремы Гаусса, как и другие сведения из теории поверхностей, которые используются в этом параграфе, читатель может найти в книге: *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.–Л.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1950.

окрестности $U(M_0)$ точки M_0 величины u, v можно рассматривать как координаты точки M. Именно, u, v будут полугеодезическими координатами в окрестности $U(M_0)$. Метрическая форма в системе u, v имеет вид $ds^2 = Edu^2 + dv^2$.

Условимся называть линию $\Gamma(v = 0)$ базисной геодезической линией координатной системы u, v, точку $M_0(u = 0, v = 0)$ — начальной точкой или просто началом.

Так как координата u равна длине дуги линии Γ, то при $v = 0$ должно быть $ds^2 = du^2$. Сравнивая это равенство с соотношением $ds^2 = E\,du^2$, которое получается из метрической формы при $v = 0$, находим:

$$E(u, 0) \equiv 1.$$

Заметим дальше, что, поскольку Γ — геодезическая, вдоль Γ должна быть равной нулю геодезическая кривизна: $\dfrac{1}{\rho_g} = 0$. Воспользуемся известной в теории поверхностей формулой

$$\frac{1}{\rho_g} = \sqrt{EG - F^2}\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right\},$$

выражающей геодезическую кривизну координатной линии $v = \text{const}$. Так как $\dfrac{1}{\rho_g} = 0$, то при $v = 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right\} = \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EF - F^2)} = 0.$$

Но в полугеодезической системе $F(u, v) = 0$; таким образом, из последнего равенства имеем:

$$E_v(u, 0) = 0.$$

Теперь мы определим функцию $E(u, v)$, исходя из того, что поверхность с метрической формой

$$ds^2 = E\,du^2 + dv^2$$

имеет постоянную полную кривизну.

Известно, что в полугеодезических координатах полная кривизна K поверхности определяется равенством

$$K = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial v^2}.$$

Нам придется, следовательно, интегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial v^2} + K\sqrt{E} = 0 \qquad (\alpha)$$

в предположении $K = \text{const}$ при начальных условиях

$$E(u,0) = 1, \quad E_v(u,0) = 0. \tag{β}$$

Рассмотрим три случая:

1. $K = 0$. Из уравнения (α) находим:

$$\sqrt{E} = \varphi(u)v + \psi(u).$$

В силу начальных условий (β) имеем: $\psi(u) \equiv 1$ и $\varphi(u) \equiv 0$. Таким образом, метрическая форма имеет вид:

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \tag{А}$$

2. $K > 0$. Интегрируя уравнение (α) как линейное уравнение второго порядка, получим общее решение

$$\sqrt{E} = \varphi(u)\cos(\sqrt{K}v) + \psi(u)\sin(\sqrt{K}v).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (β), следует выбрать произвольные функции интегрирования $\varphi(u) \equiv 1$ и $\psi(u) \equiv 0$. Таким образом, метрическая форма имеет вид:

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K}v)du^2 + dv^2. \tag{Б}$$

3. $K < 0$. В этом случае общее решение уравнения (α) будет:

$$\sqrt{E} = \varphi(u)e^{\sqrt{-K}v} + \psi(u)e^{-\sqrt{-K}v}.$$

В силу начальных условий

$$\sqrt{E(u,0)} = \varphi(u) + \psi(u) \equiv 1.$$

$$\left(\sqrt{E(u,0)}\right)_v = (\varphi(u) - \psi(u))\sqrt{-K} = 0.$$

Отсюда

$$\varphi(u) \equiv \psi(u) \equiv \frac{1}{2}$$

и

$$\sqrt{E} = \frac{e^{\sqrt{-K}v} + e^{-\sqrt{-K}v}}{2} = \operatorname{ch}(\sqrt{-K}\,v).$$

Метрическая форма имеет вид:

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}\,v)\,du^2 + dv^2. \tag{В}$$

Мы видим, таким образом, что *в полугеодезических координатах с геодезической базисной линией метрическая форма поверхности постоянной кривизны K определяется единственно лишь численным значением K.*

Возьмем теперь две произвольные точки M_1 и M_2 поверхности S и каждую из них примем за начало полугеодезической системы координат. Направления базисных геодезических при этом могут быть выбраны вполне произвольно. Обозначим через U_1 область существования полугеодезической системы с начальной точкой M_1 и через M_2 — область существования полугеодезической системы с начальной точкой M_2.

Если положительное число ε достаточно мало, то при $-\varepsilon < u < +\varepsilon$, $-\varepsilon < v < +\varepsilon$ точка с координатами (u, v) первой системы принадлежит U_1, а точка с координатами (u, v) второй системы принадлежит U_2.

Пусть Q_1 и Q_2 — области, определяемые соответственно в первой и второй системе координат неравенствами $-\varepsilon < u < +\varepsilon$, $-\varepsilon < v < +\varepsilon$ (Q_1 и Q_2 имеют форму, сходную с квадратом). Из только что проведенных выкладок следует, что метрическая форма области Q_1 в координатах первой системы совпадает с метрической формой области Q_2 в координатах второй системы. Поэтому, если мы установим соответствие между точками этих областей по равенству координат, то это соответствие будет изометричным. Таким образом, области Q_1 и Q_2 с точки зрения внутренней геометрии поверхности S конгруэнтны. Из произвола выбора базисных геодезических в координатных системах, употребляемых в этом рассуждении, следует, что совокупность конгруэнтных перемещений на поверхности S транзитивна относительно линейных элементов. Теорема доказана.

Проведенное нами исследование метрической формы поверхности постоянной кривизны позволяет высказать еще следующую теорему:

Каковы бы ни были две поверхности одной и той же постоянной кривизны, каждая достаточно малая часть любой из них может быть изометрически отображена на некоторую часть другой поверхности.

Две поверхности одинаковой постоянной кривизны имеют в малых частях одинаковую внутреннюю геометрию.

Заметим, что две поверхности, имеющие различные постоянные кривизны, не могут быть изометричными друг другу. В самом деле, если бы в каких-то координатах эти поверхности имели одинаковые метрические формы, то, вычисляя полные кривизны этих поверхностей, мы должны были бы получить одинаковые константы.

228. На основании всего изложенного мы приходим к такому заключению: при исследовании в малом внутренней геометрии поверхностей заданной постоянной кривизны достаточно изучить какой-нибудь один представитель этого класса.

Рассмотрим три случая возможных значений полной кривизны $K = \text{const}$: $K = 0, K > 0$ и $K < 0$.

1) Простейшей поверхностью постоянной нулевой кривизны является плоскость. Внутренняя геометрия плоскости есть планиметрия Евклида. Она определяется метрической формой
$$ds^2 = du^2 + dv^2. \tag{$*$}$$
Так как метрическая форма любой поверхности постоянной нулевой кривизны может быть приведена к виду ($*$), то каждая достаточно малая часть такой поверхности может быть изометрически отображена или, как говорят, развернута на плоскость. Ввиду этого поверхности нулевой кривизны называют *развертывающимися*. Вместе с тем развертывающиеся поверхности можно себе представить наглядно как поверхности, полученные в процессе изгибания плоскости или некоторой части плоскости, или как поверхности, составленные из деформированных плоских частей.

Например, параболический цилиндр получается изгибанием всей плоскости. Его внутренняя геометрия в целом тождественна планиметрии Евклида.

Круглый цилиндр получается изгибанием плоской полосы. При этом еще должно быть произведено попарное соединение точек, лежащих на краях этой полосы. В малых частях круглый цилиндр имеет внутреннюю геометрию Евклида, однако его геометрия в целом существенно отлична от геометрии евклидовой плоскости.

То же самое можно сказать и относительно конуса, на примере которого удобно продемонстрировать движение в смысле внутренней геометрии и уяснить смысл ограничений в теоремах, относящихся к этому понятию.

Обозначим через D часть круглого конуса, которая однократно накрывается плоским кружком с центром в точке M (читатель может представить себе конус в виде деревянной модели, а кружок сделанным из бумаги). Каждая другая часть конуса, которая может быть накрыта тем же кружком, изометрична D. Таким образом, движения кружка по конусу являются движениями в смысле внутренней геометрии. Нетождественность движений в смысле внутренней геометрии конуса с движениями в пространстве наглядно выражается деформацией кружка при движении его по конусу.

Перемещая кружок, мы можем центр его, первоначально помещенный в точке M, совместить с любой точкой M' конуса. Однако если точка M' дана близко к вершине конуса, то размеры кружка придется соответственно ограничить. Во всяком случае, если расстояние точки M' от вершины меньше радиуса кружка, то при совмещении центра с M' кружок не уместится на конусе; кроме того, следует принять во внимание, что часть конуса, близкую к вершине, кружок может обернуть несколько раз (поэтому в теоремах о движении на поверхности речь идет о перемещении достаточно малой ее части).

2) Простейшей поверхностью постоянной положительной кривизны $K > 0$ является сфера, радиус которой $R = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$.

Поместим центр сферы в начало декартовой ортогональной системы координат пространства и введем на сфере внутренние координаты u, v, равные географическим координатам (т. е. долготе и широте), помноженным на R. В пространстве каждая точка сферы будет определена уравнениями

$$x = R\cos\frac{u}{R}\cos\frac{v}{R},$$
$$y = R\sin\frac{u}{R}\cos\frac{v}{R},$$
$$z = R\sin\frac{v}{R}.$$

Тогда в любой части сферы, не содержащей верхнего и нижнего полюса, для которых $v = \pm\frac{1}{2}\pi R$, будет:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \cos^2\frac{v}{R}du^2 + dv^2.$$

Полагая здесь $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, мы получим:

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K}\,v)du^2 + dv^2,$$

что в точности совпадает с найденным в предыдущем параграфе выражением (B).

Таким образом, система u, v является полугеодезической системой, базисной линией которой служит экватор в плоскости $z = 0$.

Изгибая некоторую часть сферы, мы можем получить бесконечное множество других поверхностей с постоянной положительной кривизной.

3) Одной из простейших поверхностей постоянной отрицательной кривизны $K < 0$ является *псевдосфера*.

Описание этой поверхности мы сейчас и дадим.

Рассмотрим плоскую линию, известную под названием трактрисы, характеризуемую следующим свойством: отрезок ее касательной от точки прикосновения до точки пересечения с некоторой определенной прямой есть постоянная величина.

Чтобы не тратить время на длинные выкладки, мы попросим читателя, рассматривая рис. 163а, где изображена *трактриса*, уяснить себе некоторые ее особенности без доказательств.

На рис. 163а длина постоянного отрезка касательной обозначена буквой a, прямая, по которой скользит конец этого отрезка,— буквой u. Прежде всего, очевидно, что трактриса имеет точку возврата, расположенную на расстоянии a от прямой u; это есть наиболее удаленная от u точка трактрисы. Из точки возврата идут две симметричные друг другу ветви, каждая из которых неограниченно

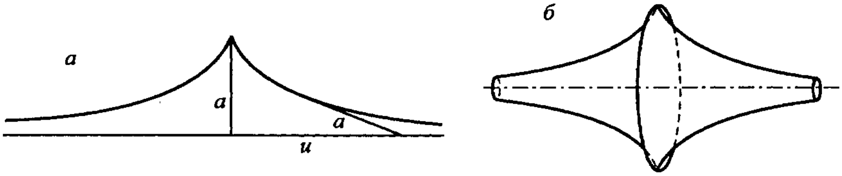


Рис. 163

приближается к прямой u. Эта прямая, таким образом, является асимптотой трактрисы. Легко понять также, что в неособых точках трактриса имеет выпуклость, обращенную к асимптоте. Поверхность, образованная вращением трактрисы вокруг асимптоты, называется *псевдосферой* (рис. 163б).

Псевдосфера имеет две части, состоящие из регулярных точек; каждая из этих частей при удалении в бесконечность стягивается к оси вращения. Эти части соединены друг с другом вдоль ребра возврата. В соответствии с нашим определением поверхности (см. n° 225), мы должны считать ребро возврата не принадлежащим поверхности. В дальнейшем, говоря о псевдосфере, мы будем иметь в виду одну из двух ее регулярных частей. Теперь мы докажем, что псевдосфера имеет во всех точках постоянную отрицательную кривизну. Для этого достаточно доказать, что кривизна псевдосферы постоянна (и отрицательна) вдоль какого-нибудь ее меридиана.

Выберем декартову ортогональную систему (x, y, z) так, чтобы ось x совместилась с осью вращения псевдосферы, а плоскость $x = 0$ содержала ребро возврата. Рассмотрим меридиан псевдосферы, расположенный в первой четверти плоскости (x, y); пусть будет $y = f(x)$ его уравнение. При каждом $x > 0$ мы будем иметь $a > y > 0$; кроме того, так как при возрастании x точка трактрисы приближается к оси x, то $y' < 0$, а так как выпуклость трактрисы обращена к оси x, то $y'' > 0$.

Обозначим через M произвольную точку меридиана $y = f(x)$ и построим в этой точке внешнюю нормаль псевдосферы. Приняв во внимание, что главные направления поверхности вращения суть направления ее меридиана и широты, вычислим главные кривизны псевдосферы в точке M.

Нормаль псевдосферы направлена в сторону вогнутости кривой $y = f(x)$, поэтому главная кривизна $\dfrac{1}{R_1}$, соответствующая направлению меридиана, положительна и точно равна кривизне этого меридиана, т. е.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Кривизна широты есть $\frac{1}{y}$; следовательно, вторая главная кривизна $\frac{1}{R_2}$ может быть определена формулой

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos\varphi}{y},$$

где φ — угол между нормалью и отрезком y. Очевидно, этот угол равен углу наклона касательной к оси x, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = y'$ и $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$. Отсюда

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}.$$

Полную кривизну $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ в точках меридиана $y = f(x)$ мы можем теперь выразить формулой

$$K = -\frac{y''}{y\,(1+y'^2)^2}. \tag{1}$$

Построим в точке $M(x, y)$ касательную к кривой $y = f(x)$ и обозначим через $(X, 0)$ координаты точки пересечения этой касательной с осью x. Из уравнения

$$Y - y = y'(X - x)$$

при $Y = 0$ находим

$$X - y = -\frac{y}{y'}.$$

По определению трактрисы

$$X - x = -a\cos\varphi \quad (a = \mathrm{const}).$$

Таким образом, мы имеем равенство

$$\frac{y}{y'} = a\cos\varphi.$$

Заменяя в нем $\cos\varphi$ выражением $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, получим дифференциальное уравнение трактрисы:

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'} = -a.$$

Отсюда

$$y'^2(a^2 - y^2) = y^2,$$
$$y''(a^2 - y^2) = y(1 + y'^2).$$

Из последних двух соотношений находим:

$$y'' = \frac{y'^2(1 + y'^2)}{y},$$

откуда в силу (1)

$$K = -\frac{y'^2}{y^2(1 + y'^2)}.$$

Вследствие уравнения (2) имеем, наконец:

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Тем самым доказано, что псевдосфера имеет во всех точках одинаковую отрицательную кривизну $-\frac{1}{a^2}$, где a — параметр трактрисы, вращением которой образована данная псевдосфера. Очевидно, существует псевдосфера с любой, наперед заданной отрицательной кривизной. Чтобы построить меридиан псевдосферы с данной кривизной, нужно лишь проинтегрировать уравнение (2) при данном значении параметра a. На основании предыдущего мы можем утверждать, что в окрестности любой точки псевдосферы метрическая форма в полугеодезических координатах (с базисной геодезической) имеет вид

$$ds^2 = \mathrm{ch}^2\left(\sqrt{-K}\,v\right)du^2 + dv^2$$

(n° 227 формула (C)).

Изгибая некоторый кусок псевдосферы, можно получить бесконечное множество других поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

Итак, каково бы ни было K ($-\infty < K < +\infty$), в пространстве Евклида существует поверхность постоянной кривизны K.

Что касается решения проблемы Бельтрами, то мы приходим теперь к следующему заключению: если в евклидовом пространстве существуют поверхности, на которых в малом осуществляется геометрия Лобачевского, то одной из таких поверхностей будет либо сфера, либо плоскость, либо псевдосфера.

Заметим, что построение полугеодезических координат поверхности производится точно так же, как построение первых координат в плоскости Лобачевского (см. n° 224). Поэтому в полугеодезических координатах метрическая форма поверхности с внутренней геометрией Лобачевского должна совпасть с метрической формой плоскости Лобачевского, выраженной в первых координатах. В конце n° 224 мы нашли выражение метрической формы плоскости Лобачевского в первых координатах ξ, η:

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{R}\, d\xi^2 + d\eta^2. \qquad (**)$$

Нам остается сопоставить это выражение с метрическими формами сферы, плоскости и псевдосферы, которые, как нам известно, в полугеодезических координатах имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2\left(\sqrt{-K}\, v\right) du^2 + dv^2, \\ ds^2 &= du^2 + dv^2, \\ ds^2 &= \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{-K} v\right) du^2 + dv^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что $(**)$ совпадает именно с последней из этих трех форм $\left(\text{при } \dfrac{1}{R} = \sqrt{-K}\right)$.

Отсюда следует теорема Бельтрами:

В окрестности каждой точки псевдосферы имеет место геометрия Лобачевского.

Разрежем псевдосферу вдоль какого-нибудь ее меридиана; мы получим односвязную область D, ограниченную ребром возврата и краями разреза. Пусть D' — область плоскости Лобачевского, изометричная области D. Постараемся описать область D' *) в терминах геометрии Лобачевского. Так как меридианы являются геодезическими псевдосферы, то при изометричном отображении D на D' меридианы отобразятся на некоторую систему прямых. Это будет система прямых, параллельных друг другу в смысле Лобачевского. Последнее вытекает из асимптотического сближения меридианов, а следовательно, и их отображений. Отображениями широт, очевидно, будут ортогональные траектории указанной системы параллельных прямых, т. е. орициклы (вернее, дуги орициклов).

Таким образом, область D' ограничена двумя лучами параболического пучка (см. n° 39) и дугою ортогонального к этому пучку орицикла. На рис. 164 эта область помечена штриховкой.

С помощью некоторого искусственного приема можно реализовать в евклидовом пространстве и более обширную часть плоскости Лобачевского. Для этого вообразим себе счетное множество одинаковых

---

*) Следовало бы доказать существование области D', но на этом мы останавливаться не будем.

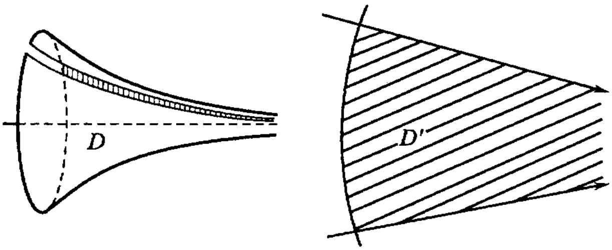


Рис. 164

и совмещенных друг с другом псевдосфер. В расположении этих псевдосфер нами мыслится определенный порядок, именно: на псевдосферу, которую мы обозначим через A_0, наложена псевдосфера A_1, на нее псевдосфера A_2 и т.д.; кроме того, псевдосфера A_0 сама наложена на псевдосферу A_{-1}, эта последняя — на A_{-2} и т. д. Теперь разрежем все псевдосферы вдоль какого-нибудь их общего меридиана. Наблюдателю, который со стороны оси смотрит на разрез, один край разреза каждой псевдосферы представляется левым, другой — правым. Соединим левый край каждой псевдосферы A_n с правым краем псевдосферы A_{n+1}. Тогда получится поверхность Σ, которую можно воображать в виде бесконечной ленты, плотно навитой на псевдосферический шаблон. Поверхность Σ, очевидно, изометрична части плоскости Лобачевского, расположенной со стороны вогнутости некоторого орицикла.

Иначе можно сказать: часть плоскости Лобачевского, лежащая со стороны вогнутости орицикла, может быть реализована в евклидовом пространстве в виде бесконечной обертки (или, как говорят, накрывающей поверхности) псевдосферы.

Как мы уже отмечали раньше, Гильбертом доказано, что в евклидовом пространстве нет поверхности, изометричной всей плоскости Лобачевского. Таким образом, попытка Бельтрами реализовать неевклидову планиметрию в виде внутренней геометрии некоторой поверхности не могла увенчаться успехом.

Несмотря на это, исследования Бельтрами имеют большое принципиальное значение.

Во-первых, даже частичная реализация неевклидовой планиметрии в евклидовом пространстве изменила скептическое отношение геометров к работам Лобачевского. Поэтому открытия Бельтрами сыграли важную роль в общем развитии науки.

Во-вторых, благодаря Бельтрами евклидова планиметрия, планиметрия Лобачевского и геометрия на сфере оказались объединенными в общей дифференциально-геометрической схеме. Именно, выяснилось, что все эти геометрические системы осуществляются на поверхностях постоянной кривизны K и соответствуют случаям $K = 0$, $K < 0$, $K > 0$.

После всего изложенного становится понятным аналитический источник тесной зависимости, которая существует между геометрией Лобачевского и сферической геометрией.

В самом деле, метрическая форма сферы

$$ds^2 = \cos^2\left(\sqrt{-K}\, v\right) du^2 + dv^2 \tag{$*$}$$

и метрическая форма псевдосферы

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{-K}\, v\right) du^2 + dv^2 \tag{$**$}$$

различны в вещественной области. Но если допускать мнимые значения для величины $\sqrt{K}$ или $\sqrt{-K}$, то, как известно,

$$\cos\left(\sqrt{K}\, v\right) = \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{-K}\, v\right).$$

Таким образом, при замене $\sqrt{K}$ на $\sqrt{-K}$ формы ($*$) и ($**$) переходят друг в друга.

§ 6. Вывод основных метрических соотношений в геометрии Лобачевского

229. В настоящем разделе мы сообщим ряд метрических предложений геометрии Лобачевского, которые остались в стороне от основной линии нашего изложения.

Мы не встретим больше никаких принципиальных трудностей. После того как установлены главнейшие метрические формулы геометрии Лобачевского (*пп*° 216–222), все другие задачи метрического характера, возникающие в этой геометрии, легко решаются применением полученных формул.

В основу наших вычислений мы положим некоторую систему бельтрамиевых координат (x, y). Как известно (см. n° 216), бельтрамиевы координаты произвольной точки плоскости Лобачевского связаны соотношением

$$x^2 + y^2 < 1. \tag{$*$}$$

Рассмотрим евклидову плоскость Σ с декартовой прямоугольной системой координат (x, y). Соотношение ($*$) определяет на Σ внутреннюю область единичного круга k_1. Сопоставим с произвольной точкой плоскости Лобачевского, бельтрамиевы координаты которой суть x, y, точку плоскости Σ (лежащую внутри круга k_1), декартовы координаты которой суть те же числа x, y. Тем самым мы установим некоторое специальное отображение всей плоскости Лобачевского на внутренность круга k_1; при этом отображении образами прямых Лобачевского будут хорды круга k_1 (конечно, с исключенными концами).

Введем внутри круга k_1 искусственную метрику. Именно, расстоянием между двумя внутренними точками круга k_1 назовем число, равное расстоянию между их прообразами на плоскости Лобачевского, величиною угла между двумя хордами a и b условимся считать число, равное величине угла между прямыми Лобачевского, которые служат прообразами хорд a и b; аналогично определим площади областей. Практически это означает, что вычисление основных геометрических величин мы должны вести в декартовых координатах по формулам геометрии Лобачевского, выражающим соответствующие величины в бельтрамиевых координатах.

Мы получаем таким путем некоторую реализацию плоскости Лобачевского внутри евклидова круга k_1. Этой реализацией мы и будем оперировать в дальнейшем.

Существенно заметить, что наши выводы будут иметь общий характер, т. е. не будут связаны с особенностями выбранной реализации. Это ясно, так как соотношение (*) и основные метрические формулы геометрии Лобачевского выведены нами, исходя из аксиом геометрии Лобачевского, вне зависимости от того, на каких объектах эти аксиомы считаются реализованными*).

230. Выражение функции $\Pi(l)$ через элементарно-трансцендентные функции.

Пусть на плоскости Лобачевского даны произвольная прямая a и точка O на расстоянии $l > 0$ от этой прямой. Опустим из точки O на прямую a перпендикуляр OP и проведем через O прямую b, параллельную прямой a. Острый угол α между прямыми b и OP называется углом параллельности для отрезка $OP = l$ и представляет собой функцию аргумента l : $\alpha = \Pi(l)$ (см. n° 33). Мы покажем сейчас, что $\Pi(l)$ с помощью весьма простой формулы выражается через элементарно трансцендентные функции аргумента l.

Расположим начало бельтрамиевых координат в точке O, ось Ox направим по отрезку OP; точка P будет иметь бельтрамиевы координаты $x = x_1$, $y = 0$. На основании изложенного в n° 218 прямая a определяется уравнением $x = \operatorname{th}\dfrac{l}{R} = x_1 (= \text{const})$; следовательно, при изображении объектов Лобачевского внутри круга k_1 прямая a изобразится в виде хорды, перпендикулярной к оси Ox (рис. 165), прямая b изобразится хордой, сходящейся с хордой a на границе круга k_1 (это

*) Мы не можем, однако, утверждать, что нами доказана полнота системы аксиом двумерной геометрии Лобачевского (понятие полноты системы аксиом изложено в n° 75). Для этого следовало бы вывести основные метрические формулы геометрии Лобачевского без привлечения пространственных аксиом. Такой вывод дан Г. Либманом, но проводится с помощью довольно продолжительных рассуждений (см. приложение VII в книге: *Лобачевский Н. И.* Геометрические исследования по теории параллельных линий. – Изд. АН СССР, 1945. Более простой вывод найден недавно А. В. Погореловым и изложен в книге: *Погорелов А. В.* Основания геометрии. – М.: Наука, 1968).

следует из определения параллельности прямых в геометрии Лобачевского). Как показано в n° 221, формула, определяющая на плоскости Лобачевского угол между двумя направлениями при некоторой точке M, совпадает с евклидовой формулой (II), n° 215, если M находится в начале координат. Отсюда заключаем, что евклидов угол между хордой b и отрезком OP равен α.

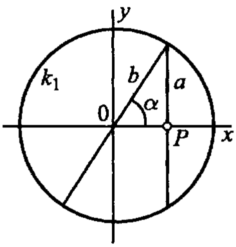


Рис. 165

Мы имеем евклидово тригонометрическое соотношение $x_1 = \cos\alpha$. Наряду с этим имеем зависимость $x_1 = \operatorname{th}\dfrac{l}{R}$ (см. первую из формул (4) n° 218). Из последних двух соотношений получаем: $\cos\alpha = \operatorname{th}\dfrac{l}{R}$, или, после несложных преобразований, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = e^{-\frac{l}{R}}$. Принимая во внимание, что $\alpha = \Pi(l)$, находим отсюда формулу Лобачевского:

$$\Pi(l) = 2\operatorname{arctg} e^{-\frac{l}{R}}.$$

231. Тригонометрия Лобачевского.

Мы установим сейчас соотношения между сторонами и углами неевклидова треугольника. Рассмотрим прежде всего прямоугольный треугольник ABC с катетами $CB = a, CA = b$, с гипотенузой $AB = c$ и с острыми углами $CAB = \alpha$, $CBA = \beta$. Поместим начало бельтрамиевых координат в точку A, ось абсцисс направим по катету AC (рис. 166). Обозначим через x_1, y_1 координаты точки C, через x_2, y_2 — координаты точки B. Мы имеем $x_1 = \operatorname{th}\frac{b}{R}$, $y_1 = 0, x_2 = x$; координату y_2 постараемся определить из формулы (3) n° 217. Полагая в этой формуле $\rho(B, C) = a$, найдем:

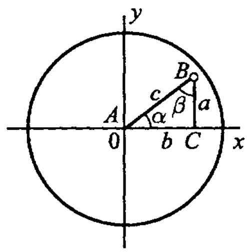


Рис. 166

$$a = \frac{R}{2}\ln\frac{1 - x_1^2 + y_2\sqrt{1 - x_1^2}}{1 - x_1^2 - y_2\sqrt{1 - x_1^2}} = \frac{R}{2}\ln\frac{1 + y_2\operatorname{ch}\dfrac{b}{R}}{1 - y_2\operatorname{ch}\dfrac{b}{R}}.$$

Отсюда

$$y_2 = \frac{\operatorname{th}\dfrac{a}{R}}{\operatorname{ch}\dfrac{b}{R}}.$$

Применяя к треугольнику ABC, как к объекту евклидовой геометрии, евклидово соотношение $y_2 = x_1 \operatorname{tg}\alpha$, получаем формулу геометрии Лобачевского:

$$\operatorname{th}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{tg}\alpha \tag{1}$$

(зависимость между двумя катетами и одним острым углом).

Заметим теперь, что евклидова длина c_e отрезка AB выражается через длину c этого отрезка в смысле геометрии Лобачевского формулой $c_e = \operatorname{th}\frac{c}{R}$ (для доказательства достаточно направить ось абсцисс из точки A по отрезку AB и применить первую из формул (1) n° 218).

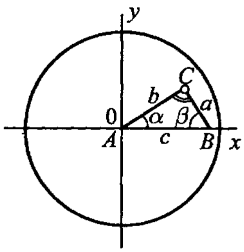


Рис. 167

Приняв это во внимание, мы сразу получаем из евклидовой формулы $b_e = c_e \cos\alpha$ следующую формулу геометрии Лобачевского:

$$\operatorname{th}\frac{b}{R} = \operatorname{th}\frac{c}{R}\cos\alpha \tag{2}$$

(зависимость между гипотенузой, катетом и прилежащим острым углом).

Расположим теперь оси координат относительно треугольника ABC так, как показано на рис. 167. Выразим угол β при помощи формулы (3) n° 221. Прежде всего подставим в выражения (7) n° 220 для коэффициентов E, F, G координаты точки B: $x = \operatorname{th}\frac{c}{R}$, $y = 0$; формула (3) n° 221 примет вид:

$$\cos\beta = \frac{dx\,\delta x + \left(1 - \operatorname{th}^2\frac{c}{R}\right) dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + \left(1 - \operatorname{th}^2\frac{c}{R}\right) dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \left(1 - \operatorname{th}^2\frac{c}{R}\right)\delta y^2}}.$$

Считая, что dx, dy соответствуют смещению по оси Ox ($dy = 0$), $\delta x, \delta y$ соответствует смещению по прямой BC $\left(\frac{\delta x}{\delta y} = -\operatorname{tg}\beta_e\right.$, где β_e — евклидова величина угла $\left.ABC\right)$, и подставляя

$$1 - \operatorname{th}^2\frac{c}{R} = \frac{1}{1 - \operatorname{ch}^2\frac{c}{R}},$$

мы получим из предыдущего равенства

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\operatorname{tg}^2\beta_e}{\operatorname{ch}^2\frac{c}{R}}}}.$$

Сравнивая последнее соотношение с известной формулой $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$, находим:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R}\cdot\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta_e. \qquad (*)$$

Заметим, что в центре круга k_1 евклидовы углы совпадают с углами в смысле Лобачевского; поэтому $\alpha_e = \alpha$ и $\operatorname{tg}\beta_e = \operatorname{ctg}\alpha_e = \operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда и из формулы $(*)$ получаем новое соотношение тригонометрии Лобачевского:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R}\cdot\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha \qquad (3)$$

(зависимость между гипотенузой и двумя острыми углами).

Формула (3) устанавливает зависимость между линейной величиной и угловыми величинами. В евклидовой геометрии нет аналога этой формуле, так как в ней имеет место подобие фигур.

Вернемся к расположению треугольника, показанному на рис. 166. Мы имеем евклидово соотношение

$$c_e^2 = x_1^2 + y_2^2, \quad \text{где} \quad c_e = \operatorname{ch}\frac{c}{R}, \quad x_1 = \operatorname{ch}\frac{b}{R}, \quad y_2 = \frac{\operatorname{th}\dfrac{a}{R}}{\operatorname{ch}\dfrac{b}{R}};$$

после несложных выкладок получаем отсюда:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}\cdot\operatorname{ch}\frac{b}{R}, \qquad (4)$$

(зависимость между гипотенузой и двумя катетами).

Укажем еще две формулы, вывод которых легко проведет сам читатель:

$$\operatorname{sh}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{c}{R}\sin\alpha \qquad (5)$$

(зависимость между гипотенузой, катетом и противолежащим острым углом) и

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R}\sin\beta = \cos\alpha \qquad (6)$$

(зависимость между катетом и двумя острыми углами).

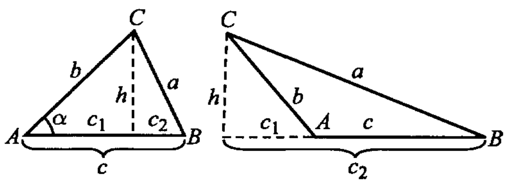


Рис. 168

232. Пусть теперь ABC — произвольный треугольник плоскости Лобачевского. Проводя в нем высоту h (как показано на рис. 168) и применяя формулу (4), получаем:

$$\operatorname{ch}\frac{h}{R}=\frac{\operatorname{ch}\frac{b}{R}}{\operatorname{ch}\frac{c_1}{R}}=\frac{\operatorname{ch}\frac{a}{R}}{\operatorname{ch}\frac{c_2}{R}}$$

(отрезки c_1 и c_2 показаны на рис. 168). Отсюда

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R}=\frac{\operatorname{ch}\frac{b}{R}}{\operatorname{ch}\frac{c_1}{R}}\operatorname{ch}\frac{c_2}{R}=\frac{\operatorname{ch}\frac{b}{R}}{\operatorname{ch}\frac{c_1}{R}}\operatorname{ch}\left(\frac{c}{R}\mp\frac{c_1}{R}\right)=\operatorname{ch}\frac{b}{R}\left(\operatorname{ch}\frac{c}{R}\mp\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cdot\operatorname{th}\frac{c_1}{R}\right);$$

но вследствие формулы (2) имеем:

$$\operatorname{th}\frac{c_1}{R}=\pm\operatorname{th}\frac{b}{R}\cos\alpha.$$

Из последних двух соотношений вытекает формула

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R}=\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R}-\operatorname{sh}\frac{b}{R}\cdot\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha. \tag{А}$$

233. Формулы (1)–(6), как и формула (А), уже были установлены ранее в n° 61. Однако в n° 61 эти формулы были доказаны нами только для специальной модели геометрии Лобачевского. Здесь мы доказали формулы (1)–(6), (А), исходя из аксиом геометрии Лобачевского, не делая каких-либо предположений относительно природы геометрических элементов. Тем самым мы доказали формулы (1)—(6), (А) для любой модели геометрии Лобачевского.

В n° 62 мы сопоставили формулу (А) с основной формулой сферической тригонометрии:

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}+\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha. \tag{Б}$$

Формула (Б) переходит в формулу (А) путем замены R на Ri ($i=\sqrt{-1}$). Это означает, что тригонометрию Лобачевского можно рассматривать как тригонометрию на сфере мнимого радиуса. Такая зависимость между формулами Лобачевского и формулами сферической тригонометрии исчерпывающим образом объясняется с дифференциально-геометрической точки зрения. Дело в том, что геометрия Лобачевского является геометрией постоянной отрицательной кривизны $K=-\frac{1}{R^2}$, геометрия на сфере есть геометрия постоянной положительной кривизны $K=\frac{1}{R^2}$. При замене R на Ri метрическая форма сферы переходит в метрическую форму плоскости Лобачевского. Вместе с тем и все метрические соотношения сферической геометрии переходят в соответствующие соотношения геометрии Лобачевского.

Глава IX

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФОРМЫ ГЕОМЕТРИИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Двумерные многообразия с дифференциально-геометрической метрикой

234. Мы знаем, что каждая поверхность евклидова пространства имеет вполне определенную внутреннюю геометрию. Но внутренняя геометрия, со своей стороны, отнюдь не определяет несущую ее поверхность. Действительно, при помощи изгибания можно получить бесконечно много поверхностей, различных по форме, но с общей внутренней геометрией.

Таким образом, структура пространственного расположения точек поверхности для ее внутренней геометрии является обстоятельством в значительной степени случайным. И уж во всяком случае, если известна метрическая форма поверхности для некоторой системы внутренних координат, то все факты внутренней геометрии этой поверхности могут быть получены без какой-либо апелляции к объемлющему пространству. Поэтому возникает мысль обобщить понятие внутренней геометрии так, чтобы можно было от объемлющего пространства отвлечься совсем.

Целесообразность такого обобщения можно усмотреть, в частности, если обратиться к материалу предыдущего раздела. Так, мы знаем, что метрика плоскости Лобачевского, как и метрика каждой поверхности евклидова пространства, определяется квадратичной формой. Абстрактно плоскость Лобачевского существует — это было доказано в конце главы III. Но наложить ее в ц е л о м на какую-нибудь поверхность пространства Евклида невозможно. В данном случае, как и во многих других геометрических вопросах, рамки классической теории поверхностей оказываются слишком тесными.

Раздвигая их, мы придем к столь общему пониманию геометрии, что сумеем включить в одну схему самые разнообразные геометрические системы и среди них — систему Лобачевского.

235. Пусть дано какое-нибудь множество R (конкретная природа его элементов для нас безразлична). Элементы этого множества мы будем называть точками и обозначать буквами x, y, z и т. д. Пусть для каждой пары точек x, y определено в качестве расстояния число $\rho(x, y)$. Множество R с заданными расстояниями между его точками называется *метрическим пространством*, если функция $\rho(x, y)$ удовлетворяет трем условиям:

1. $\rho(x, x) = 0$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$ при $x \not\equiv y$;
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Указанные условия называются аксиомами метрического пространства; последняя из них носит название аксиомы треугольника.

Хотя эти аксиомы предъявляют весьма слабые требования к функции $\rho(x, y)$, все же они дают возможность установить для произвольного метрического пространства ряд важных понятий и теорем. Так, в любом метрическом пространстве может быть определено *понятие сходящейся последовательности точек*: последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится к точке a, если $\rho(x_n, a) \to 0$. Легко доказать, что *одна и та же последовательность не может сходиться к двум разным точкам*. В самом деле, допустим, что $x_n \to a$ и $x_n \to b$, причем $a \not\equiv b$; так как вследствие второй аксиомы $\rho(a, b) > 0$, то при достаточно большом n мы имеем: $\rho(x_n, a) < \dfrac{1}{2}\rho(a, b)$ и $\rho(x_n, b) < \dfrac{1}{2}\rho(a, b)$; но отсюда $\rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \rho(a, b)$, что противоречит третьей аксиоме.

Далее, естественным образом определяется *понятие непрерывного отображения одного метрического пространства в другое*: отображение $x' = f(x)$ пространства R в пространство R' (т. е. сопоставление с каждой точкой x из R некоторой точки x' из R') называется *непрерывным* в точке a, если каждая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящаяся к точке a, отображается в последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$, сходящуюся к точке $f(a)$; символически:

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Если отображение $x' = f(x)$ непрерывно в каждой точке пространства R, то оно называется непрерывным на всем пространстве, или просто непрерывным.

В качестве примеров метрического пространства мы можем в первою очередь указать евклидову плоскость (а также евклидово пространство) и плоскость Лобачевского (а также пространство Лобачевского). Рассмотрим, далее, какую-нибудь поверхность S евклидова пространства (полагая ее определенной, как в n° 225). Нетрудно доказать, что любые две точки x, y поверхности S можно соединить на этой поверхности гладкой или кусочно-гладкой дугой; такая дуга необходимо спрямляема, т. е. имеет определенную длину. Если мы назовем внутренним расстоянием между двумя точками x, y поверхности S число $\rho(x,y)$, равное нижней грани длин линий, соединяющих на поверхности точки x и y, то $\rho(x,y)$ будет удовлетворять аксиомам 1–3 (доказательство опускаем). Таким образом, любая поверхность с определенными на ней внутренними расстояниями между точками также является метрическим пространством.

Мы видим, что понятие метрического пространства охватывает все знакомые нам геометрические системы как весьма частные случаи. Чтобы подчеркнуть общность этого понятия, укажем, что на любом множестве можно назначить расстояния между парами точек с соблюдением аксиом 1–3.

Пусть дано какое угодно множество M с элементами $x, y, z, \ldots$ Условимся считать $\rho(x,y) = 0$, если $x \equiv y$, $\rho(x,y) = 1$, если $x \not\equiv y$. Аксиомы 1–3 при этом, очевидно, удовлетворены и, следовательно, множество M с назначенными расстояниями есть метрическое пространство.

Такая общность понятия метрического пространства показывает, что для построения содержательной геометрической теории аксиомы 1–3 слишком бедны. Мы добавим сейчас к аксиомам 1–3 ряд новых и сильных требований. Тем самым мы получим достаточно конкретный и вместе с тем очень общий класс метрических пространств, которые мы будем называть (двумерными) *римановыми многообразиями или многообразиями с дифференциально-геометрической метрикой.*

Вот эти требования.

1) Условимся называть ε-окрестностью (ε — положительное число) или просто окрестностью точки a метрического пространства совокупность всех его точек x, для которых выполняется неравенство $\rho(x,a) < \varepsilon$.

Мы потребуем, чтобы для каждой точки a пространства существовала окрестность U, допускающая взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное отображение на евклидову плоскость.

В окрестности U мы введем некоторую координатную систему, именно: будем называть координатами u, v точки x из окрестности U декартовы координаты той точки евклидовой плоскости, которая соответствует x в силу указанного отображения. Условия непрерывности, которые предъявлены к этому отображению, означают следующее: если x_0 — постоянная точка с координатами u_0, v_0, x — переменная точка с координатами u, v, то всякий раз, когда $u \to u_0$, $v \to v_0$ имеет место $\rho(x, x_0) \to 0$, и, обратно, если $\rho(x,x_0) \to 0$, то $u \to u_0$, $v \to v_0$.

2) Пусть некоторые две окрестности с заданными в них координатами имеют общую часть. Мы *требуем, чтобы в общей части двух окрестностей координаты произвольной точки, заданные в одной окрестности, выражались через координаты этой точки, заданные в другой окрестности, однозначно обратимыми уравнениями, правые части которых имеют непрерывные частные производные и отличный от нуля функциональный определитель.*

18 — 10891

Метрическое пространство при этих двух условиях мы будем называть *гладким двумерным многообразием.*

Для гладкого многообразия можно определить понятие гладкой линии и направления.

Будем называть *закрытой гладкой дугой* или, короче, *отрезком* в окрестности U многообразия S множество точек этой окрестности, координаты которых определяются уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

где t принадлежит некоторому закрытому интервалу $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, если 1) функции $u(t), v(t)$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ непрерывны и обладают непрерывными производными, 2) если производные $u'(t), v'(t)$ ни при каком значении t не обращаются одновременно в нуль и 3) если функции $u(t), v(t)$ при двух различных значениях t не принимают одновременно равных значений.

Точки отрезка, соответствующие значениям $t = \alpha$ и $t = \beta$, назовем его *концами.*

Очевидно, перечисленные свойства уравнений, определяющих некоторый отрезок, сохраняются при переходе к координатам любой другой окрестности, содержащей этот отрезок.

Таким образом, поскольку при определении отрезка выбор покрывающей его окрестности безразличен, понятие отрезка имеет инвариантный смысл.

Мы будем говорить, что гладкая дуга в каждой своей точке имеет *направление*, которое задается отношением дифференциалов $du = u'(t)\,dt$, $dv = v'(t)\,dt$ (здесь существенно, что $u'(t)$ и $v'(t)$ не могут одновременно обращаться в нуль, так как в противном случае отношение $du : dv$ могло бы быть неопределенным); в новой системе координат (u^*, v^*) направление той же кривой задается отношением дифференциалов

$$du^* = \frac{\partial u^*}{\partial u}du + \frac{\partial v^*}{\partial v}dv, \quad dv^* = \frac{\partial v^*}{\partial u}du + \frac{\partial v^*}{\partial v}dv.$$

Конечную систему гладких отрезков (принадлежащих, вообще говоря, разным окрестностям многообразия) называют *кусочно-гладкой* дугой, если при надлежащей нумерации этих отрезков один конец первого из них совпадает с концом второго отрезка, другой конец второго совпадает с концом третьего и т. п. Свободные концы первого и последнего отрезков называются концами кусочно-гладкой дуги.

Если в общих концах соседние отрезки имеют совпадающие направления, то в этом случае система отрезков составляет *гладкую дугу*, которую следует называть *закрытой*, так как она обладает концами (каковыми являются свободные концы первого и последнего отрезков).

Аналогично этому можно определить понятие открытой гладкой и кусочно-гладкой дуги, составленной из счетного множества отрезков i_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, соединенных так, что конец отрезка i_n совпадает с началом отрезка i_{n+1}. Открытую гладкую дугу мы будем называть просто *линией*.

3) В метрическом пространстве можно определить понятие спрямляемой дуги и ее длины точно так же, как это делается в евклидовом пространстве*). *Мы потребуем, чтобы каждая фиксированная закрытая дуга любой гладкой линии $u = u(t), v = v(t)$ была спрямляемой и чтобы на гладкой линии длина дуги с одним закрепленным и с одним переменным концом $(u(t), v(t))$ была дифференцируемой функцией параметра t.*

4) *Мы потребуем, наконец, чтобы в каждой окрестности с заданной системой координат (u, v) существовали три непрерывные функции $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$, с помощью которых дифференциал дуги гладкой линии $u = u(t), v = v(t)$ определяется формулой*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad \text{где} \quad u = u'(t)\,dt, \quad dv = v'(t)\,dt.$$

Метрическое пространство, удовлетворяющее всем поставленным условиям, мы будем называть *двумерным дифференциально-геометрическим или двумерным римановым многообразием*. Впрочем, чтобы сделать это понятие более удобным для использования, целесообразно, кроме перечисленных требований, поставить еще условие связности; его можно высказать точно в такой же форме, как условие связности поверхности (см. n° 225).

236. Условимся называть углом между направлениями $du : dv$ и $\delta u : \delta v$ величину φ, определяемую равенством

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

Величина, стоящая здесь справа, инвариантна относительно изменения координат (что может быть доказано, как в n° 221); следовательно, выбор координатной системы при определении угла безразличен.

*) Пусть в пространстве R дана непрерывная дуга L, т.е. дан непрерывный образ отрезка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, точки которого (образа) помечены соответствующими значениями их прообразов из отрезка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и считаются упорядоченными по возрастанию пометок. Рассмотрим произвольную систему точек $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ отрезка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; ей соответствует на дуге L система точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Составим сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1})$. Если множество всех таких сумм (как множество чисел) ограничено, то дуга L называется спрямляемой; верхняя грань этого множества есть длина дуги L.

Наконец, назовем площадью области D многообразия S величину интеграла

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F}\, du\, dv,$$

распространенного на область D. Инвариантность такого определения доказана в n° 222.

Таким образом, вычисление длин, углов и площадей на произвольном дифференциально-геометрическом многообразии производится точно по таким же формулам, как и на поверхности (см. n° 225, формулы (I), (II), (III)).

Далее, мы можем назвать полной кривизной многообразия в произвольной ее точке величину K, которая вычисляется по формуле, выражающей полную кривизну поверхности через коэффициенты ее метрической формы; аналогично можно определить геодезическую кривизну линии. Однако при вычислении этих величин приходится двукратно дифференцировать коэффициенты метрической формы E, F, G и правые части уравнений линии $u = u(t), v = v(t)$. Поэтому нам придется понятие гладкого многообразия и его метрику ограничить дополнительными требованиями гладкости; именно, *мы предположим, что функции E, F, G непрерывно дифференцируемы до второго порядка, а все допустимые преобразования координат — до третьего порядка.*

При этих дополнительных условиях дифференциально-геометрическое многообразие называется *регулярным**). На регулярном многообразии можно обычным образом определить геодезические линии: либо как экстремали вариационной задачи $\min \int ds$, либо как линии нулевой геодезической кривизны. Для нахождения геодезических можно пользоваться известной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \left\{ {1 \atop 11} \right\} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{ {1 \atop 12} \right\} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{ {1 \atop 22} \right\} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0,$$
$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left\{ {2 \atop 11} \right\} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{ {2 \atop 12} \right\} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{ {2 \atop 22} \right\} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0;$$

семейство геодезических совпадает с семейством интегральных кривых этой системы. Отсюда следует, что через каждую точку регуляр-

*) Если совершается переход к новым координатам $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$, то функции E, F, G, соответствующие этим новым координатам, выражаются через E, F, G и $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}, \dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}, \dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}$ (см. формулы (5) n° 221); поэтому гладкость функций $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ должна быть на единицу выше гладкости функций E, F, G.

ного многообразия в любом направлении проходит одна геодезическая линия.

В геометрии многообразия геодезические играют роль прямых.

Мы перенесли все объекты внутренней геометрии поверхности на случай абстрактного двумерного дифференциально-геометрического многообразия. Тем самым мы получили понятие во всяком случае более широкое, чем понятие внутренней геометрии поверхности евклидова пространства, так как оно охватывает, например, и геометрию плоскости Лобачевского.

Дифференциально-геометрическое многообразие мы определили, отправляясь от понятия метрического пространства, с помощью ряда дополнительных условий. Эти условия выражены нами в аналитических терминах. Постараемся вскрыть их геометрический смысл.

Рассмотрим произвольную точку $M_0(u_0, v_0)$ многообразия с метрической формой $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$. Пусть E_0, F_0, G_0 — значения функций E, F, G в точке M_0. С помощью вычислений, которые мы здесь приводить не будем, можно доказать следующее:

Пусть $M(u, v)$ и $M'(u + \Delta u, v + \Delta v)$ — две точки многообразия и $\rho(M, M')$ — расстояние между ними; если точки M и M' стремятся к M_0, то

$$\lim \frac{\rho(M, M')}{\sqrt{E_0\,\Delta u^2 + 2F_0\,\Delta u\Delta v + G_0\,\Delta v^2}} = 1. \qquad (*)$$

Возьмем теперь в евклидовой плоскости E декартову косоугольную систему координат (u, v), масштабные векторы которой e_1, e_2 выбраны при условиях*)

$$|e_1| = \sqrt{E_0}, \quad |e_2| = \sqrt{G_0}, \quad \cos(e_1, e_2) = \frac{F_0}{\sqrt{E_0 G_0}}.$$

Если $M^*(u, v)$ и $M^{*\prime}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ — две точки плоскости E, то евклидово расстояние $\rho_E(M^*, M^{*\prime})$ между ними выражается формулой

$$\rho_E\,(M^*, M^{*\prime}) = \sqrt{E_0\Delta u^2 + 2F_0\Delta u\Delta v + G_0\Delta v^2}.$$

Приняв это во внимание, мы можем на основании соотношения $(*)$ придти к следующему выводу.

Для каждой точки M_0 многообразия существует окрестность, допускающая такое отображение на евклидову плоскость E, что если M и M' — две точки окрестности и M^*, $M^{*\prime}$ — их образы, то

$$\rho(M, M') = \rho_E\,(M^*, M^{*\prime}) + \eta(M, M')\rho(M, M'),$$

где $\eta(M, M')$ есть величина бесконечно малая при бесконечно малых $\rho(M_0, M)$ и $\rho(M_0, M')$.

*) Эти условия можно соблюсти, так как вследствие положительной определенности метрической формы $E_0 > 0$, $G_0 > 0$ и $F_0^2 < E_0 G_0$.

Иначе говоря, $\rho(M, M')$ отличается от $\rho_E(M^*, M^{*\prime})$ на малую высшего порядка сравнительно с размерами окрестности.

В этом и заключается основной геометрический смысл условий, определяющих римановы многообразия. Можно сказать, что с помощью этих условий мы выделяем класс метрических пространств, которые в бесконечно малом имеют евклидов характер.

Изложенная здесь идея хорошо иллюстрируется материалом *пп*° 220–222, где дифференциально-геометрические свойства плоскости Лобачевского были установлены путем некоторого отображения ее на евклидову плоскость, представленную в виде орисферы.

237. Пусть дано какое-нибудь дифференциально-геометрическое (риманово) многообразие. Рассмотрим на нем произвольную область H Легко убедиться, что H в свою очередь является дифференциально-геометрическим многообразием. Это многообразие заведомо есть часть другого, более обширного; если бы нам было дано только многообразие H, то мы могли бы его "продолжить", т. е. включить в другое многообразие, а именно — в наше исходное.

При исследовании внутренней геометрии многообразий желательно отмести те из них, которые могут быть "продолжены"; в противном случае это исследование потонет в массе неинтересных частностей.

Принимая во внимание сказанное, мы предъявим к многообразиям *требование полноты* (которое, однако, является более сильным, чем требование непродолжаемости). Формулировка этого требования использует понятие фундаментальной последовательности, известное читателю для случая евклидовой геометрии из курса элементарного анализа.

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется фундаментальной, если $\rho(x_n, x_m)$ стремится к нулю, когда номера n и m бесконечно возрастают. В евклидовой плоскости любая фундаментальная последовательность является сходящейся, т. е. если $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(x_n, x_m) = 0$, то существует такая точка x, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Это свойство евклидовой плоскости в элементарном анализе называется общим принципом сходимости.

В случае произвольного дифференциально-геометрического многообразия общий принцип сходимости может не иметь места. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующий простой пример.

Возьмем в евклидовой плоскости последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящуюся к точке x: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Эта последовательность будет вместе с тем фундаментальной последовательностью. Удалим из плоскости точку x, а метрику оставшейся части сохраним без изменения. В многообразии, которое мы таким путем получим, точки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ по-прежнему составляют фундаментальную последовательность, но предела эта последовательность не имеет.

Дифференциально-геометрические многообразия, в которых существуют фундаментальные последовательности, не имеющие предела, называются неполными. Каждое полное многообразие является непродолжаемым.

В дальнейшем неполные многообразия не рассматриваются.

238. Определив дифференциально-геометрическое двумерное многообразие, мы дали тем самым важное обобщение понятия поверхности и ее внутренней геометрии. Объясним его смысл и выгоду.

В классической теории поверхностей поверхности рассматриваются как объекты евклидова пространства. Если некоторая поверхность имеет внешнее уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v),$$

то ее внутренняя геометрия определяется квадратичной формой $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ с совершенно определенными коэффициентами

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2.$$

Таким образом, каждая поверхность имеет определенную метрику, или внутреннюю геометрию. Иначе говоря, внутренняя геометрия поверхности определяется особенностями пространственного расположения ее точек. Если мы желаем средствами теории поверхностей реализовать внутреннюю геометрию с данными свойствами, то должны разыскать поверхность, имеющую нужную внутреннюю геометрию, т. е. отличающуюся таким пространственным расположением своих точек, которому соответствует как раз интересующая нас метрика. Между тем, по характеру задачи изучения в н у т р е н н е й геометрии поверхности пространственная структура поверхности не является интересной.

Когда мы рассматриваем внутреннюю геометрию абстрактного многообразия, которое не обязательно следует мыслить внутри какого-либо пространства, то мы свободны от необходимости принимать во внимание такое побочное обстоятельство, каким является форма поверхности в качестве пространственного объекта. Отвлекаясь от посторонних свойств изучаемых образов, мы облегчаем свое исследование.

С другой стороны, задача разыскания поверхности, метрика которой обладает определенными свойствами, может не иметь решения, т. е. в пространстве может совсем не существовать поверхности с нужной метрикой. Тем не менее может случиться, что эта самая метрика реализуется на каком-нибудь абстрактном многообразии, так как метрику абстрактного многообразия мы можем задавать по своему усмотрению с весьма большой степенью произвола. Примером тому служит проблема Бельтрами. На ближайших страницах будут указаны многочисленные другие примеры.

В следующем разделе мы будем рассматривать двумерные многообразия п о с т о я н н о й кривизны, т.е. многообразия, полная кривизна которых во всех точках одинакова (определение полной кривизны многообразия дано в n° 236).

Многообразия постоянной кривизны по многим своим свойствам достойны первоочередного внимания. Достаточно указать, что они, и только они, среди всех двумерных дифференциально-геометрических многообразий допускают свободное движение по себе своих достаточно малых частей. Если две изометричные области многообразия называть конгруэнтными, то более точно высказанное утверждение можно формулировать так:

Многообразия постоянной кривизны, и только они, допускают такие конгруэнтные перемещения своих достаточно малых частей (т.е. такие изометричные отображения их друг на друга), что совокупность этих перемещений транзитивна относительно линейных элементов. Чтобы убедиться в этом, читателю нужно вернуться к n° 227, где доказано точно такое же утверждение для поверхностей. Так как рассуждения в n° 227 велись исключительно в области понятий внутренней геометрии поверхности, то они непосредственно применимы к абстрактным метризованным многообразиям.

Кроме того, на основании полученных в n° 227 результатов мы можем утверждать, что каждое многообразие постоянной кривизны K в малых частях обладает в случае $K = 0$ геометрией Евклида, в случае $K < 0$ — геометрией Лобачевского и в случае $K > 0$ — геометрией на сфере.

Таким образом, абстрактные многообразия постоянной кривизны, как и поверхности, при изучении их в малом распадаются лишь на три класса.

Но, изучая эти многообразия "в целом", мы обнаружим такое богатство различий в их природе, какое никак нельзя было бы себе представить, оставаясь в рамках элементарной теории поверхностей.

§ 2. Параболические пространственные формы

239. *Каждое полное дифференциально-геометрическое многообразие постоянной кривизны называется пространственной формой геометрии данной постоянной кривизны* (условие полноты высказано в n° 237). Условимся две пространственные формы геометрии данной кривизны считать эквивалентными, если они имеют одинаковый топологический тип, т.е. если они допускают взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное отображение друг на друга. С наглядной точки зрения это означает, что мы допускаем деформации пространственной формы, исключающие "разрывы" и "склеивания".

При таком условии получается естественное распределение всех пространственных форм в легко обозримое множество классов эквивалентных между собой форм; каждый класс характеризуется указанием какого-нибудь одного представителя.

Не имея в виду давать полной топологической классификации двумерных многообразий, мы укажем только, что все двумерные многообразия разделяются на *открытые и замкнутые.* Многообразие называется замкнутым, если из любого бесконечного множества его точек можно выбрать сходящуюся последовательность (т. е. если для этого многообразия справедлив принцип Больцано–Вейерштрасса).

Многообразие, не являющееся замкнутым, называется открытым.

Примеры замкнутых многообразий: сфера, тор. Примеры открытых многообразий: плоскость, любая область на плоскости, любая область на сфере, не покрывающая всей сферы.

В дальнейшем геометрию постоянной кривизны K мы будем называть *параболической*, если $K = 0$; *эллиптической*, если $K > 0$; и *гиперболической*, если $K < 0$.

240. Среди параболических пространственных форм в первую очередь должна быть указана *евклидова плоскость* (как примеры эквивалентных ей форм можно назвать параболический цилиндр, связную часть гиперболического цилиндра, орисферу пространства Лобачевского и т. д.).

Кроме евклидовой плоскости (и эквивалентных ей форм) существуют еще четыре пространственные формы параболической геометрии; их топологические представители суть: обыкновенный цилиндр, односторонний цилиндр, тор и односторонний тор. Рассмотрим их в указанном порядке.

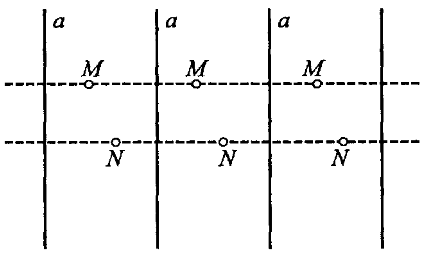


Рис. 169

Разделим плоскость системой параллельных прямых $\{a\}$ на одинаковые полосы (рис. 169) и зададим в плоскости какое-нибудь направление, например, перпендикулярное к прямым $\{a\}$ (задание направления самих прямых $\{a\}$ исключается). Возьмем в какой-нибудь полосе произвольную точку M. Передвигая выбранную полосу в заданном направлении, мы можем наложить ее на любую другую полосу; точка M при этом займет некоторое новое положение, в котором мы снова обозначим ее буквой M. Совокупность всех точек, которые получаются таким путем из точки M, мы обозначим символом $\{M\}$. Каждую совокупность точек $\{M\}$ мы условимся рассматривать как элемент ("точку") нового множества R. В множество K мы введем метрику: если $x = \{M\}$ и $y = \{N\}$ — две точки из R, то в качестве расстояния $\rho(x, y)$ мы назначим минимум евклидовых расстояний между точками совокупности $\{M\}$ и точками совокупности $\{N\}$. По определению

$\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Убедимся, что $\rho(x,y)$ удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства (см. n° 235).

1) Если совокупности $\{M\}$ и $\{N\}$ тождественны, то минимальное евклидово расстояние точек $\{M\}$ от точек $\{N\}$ равно нулю, следовательно, при $x \equiv y$ имеем $\rho(x,y) = 0$.

2) Если совокупности $\{M\}$ и $\{N\}$ различны, то минимальное евклидово расстояние точек $\{M\}$ от точек $\{N\}$ больше нуля; вследствие этого и по определению функции $\rho(x,y)$ при $x \not\equiv y$ имеем $\rho(x,y) = \rho(y,x) > 0$.

3) Пусть $x = \{M\}$, $y = \{N\}$ и $z = \{P\}$ — три произвольные точки пространства R. Обозначим через N_1 какую-нибудь точку из $\{N\}$; в совокупностях $\{M\}$ и $\{P\}$ существуют соответственно такие точки M_1 и P_1, что $\rho(x,y) = M_1N_1$ и $\rho(y,z) = N_1P_1$, где M_1N_1 и N_1P_1 — евклидовы расстояния. Для евклидовых расстояний мы имеем: $M_1N_1 + N_1P_1 \geqslant M_1P_1$; но $M_1P_1 \geqslant \rho(x,z)$, следовательно, $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z)$.

Тем самым установлено, что R является метрическим пространством.

Функция $\rho(x,y)$ определена так, что достаточно малая ε-окрестность произвольной точки $x = \{M\}$ пространства R изометрична ε-окрестности точки M евклидовой плоскости; отсюда следует, что R есть двумерное многообразие нулевой кривизны.

Наконец, вследствие полноты евклидовой плоскости многообразие R также является полным. Таким образом, R есть некоторая параболическая пространственная форма.

Чтобы внести в наши рассмотрения бóльшую наглядность, представим себе, что плоскость как бесконечная лента навернута на круглый цилиндр, так, что каждая полоса обертывает цилиндр точно один раз. При этом все точки любой совокупности $\{M\}$ совпадают с одной точкой на цилиндре. Тем самым наглядно устанавливается, что круглый цилиндр есть пространственная форма параболической геометрии, эквивалентная ранее рассмотренному многообразию R.

Мы придем к тому же результату, если попросту условимся отождествлять все точки каждой совокупности $\{M\}$, в частности, точки, лежащие “друг против друга” на разных границах одной какой-нибудь полосы. Ясно, что попарное соединение точек, лежащих на разных границах полосы (как показано на рис. 170, где соединяемые точки обозначены одной буквой), дает “трубку”.

Итак, *мы обнаружили класс пространственных форм геометрии нулевой кривизны, топологический тип которых представляется круглым цилиндром.*

Вернемся снова к плоскости, разделенной параллельными прямыми $\{a\}$ на одинаковые полосы; зададим еще одну прямую b, перпендикулярную к прямым $\{a\}$ (рис. 171). Пусть M — произвольная точка, взятая в какой-нибудь полосе. Передвинем выбранную полосу вдоль прямой b так, чтобы она совместилась с соседней полосой; точка M

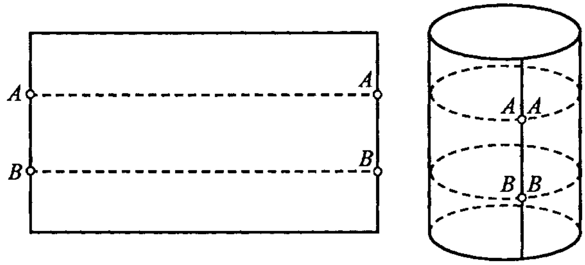


Рис. 170

при этом займет новое положение. Отразим зеркально полученную точку относительно прямой b и обозначим ее образ снова буквой M. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную совокупность точек $\{M\}$.

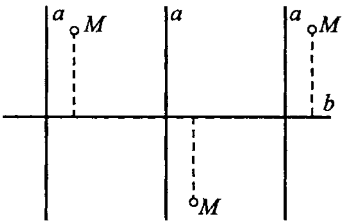


Рис. 171

Каждую совокупность точек $\{M\}$ условимся считать элементом нового метрического пространства R; расстояние $\rho(x, y)$ между двумя точками $x=\{M\}$ и $y=\{N\}$ пространства R, как и в предыдущем случае, примем равным минимуму евклидовых расстояний между точками совокупности $\{M\}$ и точками совокупности $\{N\}$. Легко понять, что R представляет собой пространственную форму геометрии нулевой кривизны.

Мы получим эту же пространственную форму, если, ограничиваясь одной полосой, будем отождествлять ее граничные точки, попадающие в одну совокупность $\{M\}$ (схема отождествления точек показана на рис. 172, где отождествляемые точки обозначены одинаковыми буквами). Получаемое таким путем многообразие называется *односторонним цилиндром*.

Рассмотрим теперь вместо бесконечной полосы плоскости множество точек, лежащих внутри некоторого прямоугольника $ABCD$ и на его сторонах AB и CD с исключением самих точек A, B, C, D (таким образом, полностью исключены отрезки AD и BC). Легко доказать, что такое множество топологически эквивалентно бесконечной полосе плоскости, ограниченной двумя параллельными прямыми (т. е. допускает отображение на эту полосу — взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное). Отождествим теперь попарно точки отрезков AB и CD, расположенные симметрично относительно центра прямо-

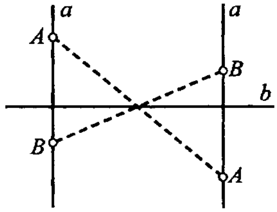


Рис. 172

угольника (при этом точка A соединится с C, точка B с O; на рис. 173 стрелками показаны направления отрезков AB и CD, которые после соединения этих отрезков должны совпасть). Так мы получим многообразие с евклидовой метрикой, топологически эквивалентное одностороннему цилиндру (однако оно не является пространственной формой, так как не удовлетворяет условию полноты); его называют *листом Мёбиуса.*

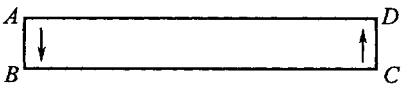


Рис. 173

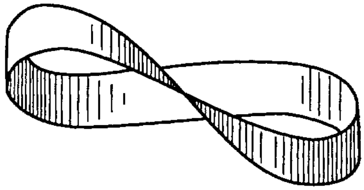


Рис. 174

Описанное выше соединение противоположных сторон прямоугольника можно осуществить реально при помощи бумажной полоски и тем самым построить модель листа Мёбиуса (рис. 174). Пользуясь этой моделью, легко убедиться, что изображаемая ею поверхность является *односторонней*: ее нельзя покрасить в две краски так, чтобы краски сходились только на краю. Модель листа Мёбиуса делает до некоторой степени наглядным наше представление об одностороннем цилиндре, а также оправдывает его название. Итак, *мы получили третий класс параболических пространственных форм, представленных односторонним цилиндром и топологически эквивалентных листу Мёбиуса.*

Рассмотрим теперь на плоскости две системы параллельных прямых $\{a\}$ и $\{b\}$, которые разбивают ее на равные прямоугольники (рис. 175). Возьмем в каком-нибудь из них произвольную точку M. Перемещая выбранный прямоугольник по направлениям прямых $\{a\}$ и $\{b\}$, мы можем совместить его с любым другим прямоугольником; точка M при этом будет занимать бесконечное множество новых положений, в каждом из которых мы снова обозначим ее буквой M. Так получается бесконечная совокупность точек $\{M\}$; условимся ее рассматривать как элемент нового множества R. В полной аналогии с предыдущим мы вводим в множестве R метрику: если $x = \{M\}$ и $y = \{N\}$ — две точки R, то $\rho(x, y)$ есть минимум евклидовых расстояний между точками совокупности $\{M\}$ и точками совокупности $\{N\}$. Получаемое таким путем метрическое пространство оказывается полным многообразием

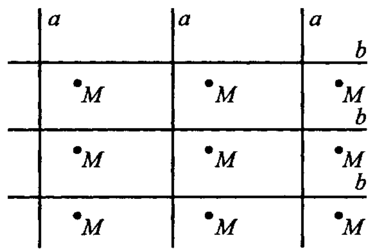


Рис. 175

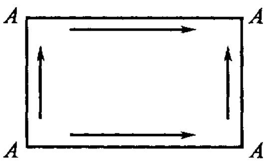


Рис. 176

нулевой кривизны, т. е. пространственной формой параболической геометрии.

Наглядное представление этой формы дает прямоугольник с попарно отождествленными точками его противоположных сторон (рис. 176, где стрелками указаны направления сторон, которые при отождествлении этих сторон должны совпасть; так как все вершины прямоугольника соединяются в одну точку, то они помечены одинаковыми буквами). Заметим теперь, что при отождествлении двух противоположных сторон прямоугольника получается "трубка"; последующее отождествление двух других сторон дает тор (рис. 177). Таким образом, *топологический тип нового класса пространственных форм представляется тором* (поэтому они называются *кольцевыми*).

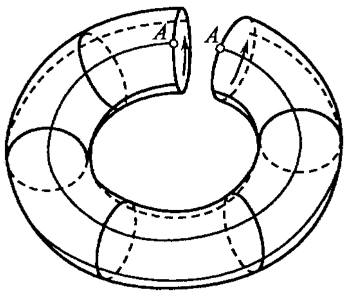


Рис. 177

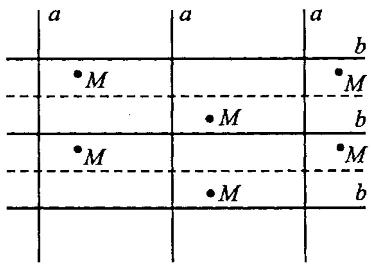


Рис. 178

Вернемся к плоскости, разделенной на равные прямоугольники прямыми $\{a\}$ и $\{b\}$, но дополнительно проведем в каждой полосе между соседними прямыми $\{b\}$ среднюю линию (рис. 178). Пусть M — произвольная точка какого-нибудь прямоугольника; передвигая выбранный прямоугольник вдоль полосы между двумя прямыми $\{a\}$ и накладывая его последовательно на все другие прямоугольники этой полосы, мы получим бесконечный ряд новых положений точки M; отметим все эти точки одной буквой M. Теперь каждый прямоугольник рассматриваемой полосы мы переместим вдоль прямых $\{b\}$ в соседнюю полосу и отмеченную в нем точку отразим зеркально относительно средней линии прямоугольника (проходящей между прямыми $\{b\}$); все полученные точки снова обозначим буквой M. Последний процесс будем продолжать бесконечно. Получаемые таким путем совокупности точек $\{M\}$ мы условимся рассматривать как элементы нового метрического пространства R, метрика которого определяется точно таким же условием, как и во всех предыдущих случаях.

Мы приходим к параболической пространственной форме, которая представляется прямоугольником с попарно отождествленными точками противоположных сторон по схеме рис. 179. Это многообразие называется *односторонним тором.*

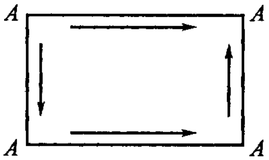


Рис. 179

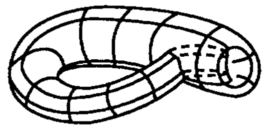


Рис. 180

Попытаемся сделать модель одностороннего тора.

Соединяя две горизонтальные стороны прямоугольника, изображенного на рис. 179, мы получим "трубку"; но чтобы соединить затем и вертикальные стороны прямоугольника так, как требует схема рис. 179, нам придется пропустить один конец этой трубки через стенку и соединить с другим концом изнутри (рис. 180). Односторонний тор представить в пространстве в виде поверхности без самопересечения невозможно.

Параболические пространственные формы, представляемые односторонним тором, называются односторонне кольцевыми.

Мы установили сейчас, что существуют многообразия нулевой кривизны, топологически эквивалентные как обыкновенному, так и одностороннему тору. Этот результат получен только благодаря тому, что мы ввели понятие абстрактного дифференциально-геометрического многообразия. Никакая регулярная поверхность евклидова пространства, имеющая топологический тип обыкновенного или одностороннего тора, не может иметь натуральную метрику всюду нулевой кривизны. Таким образом, мы не могли бы обнаружить кольцевые параболические формы, если бы оставались в рамках евклидовой теории поверхностей.

241. Мы обнаружили пять классов пространственных форм параболической геометрии, топологические представители которых суть:

1) плоскость,
2) круглый цилиндр,
3) односторонний цилиндр,
4) тор,
5) односторонний тор.

Среди перечисленных многообразий имеется три открытых (первое, второе и третье) и два замкнутых (четвертое и пятое); наряду с этим мы имеем из них три двусторонних (первое, второе, четвертое) и два односторонних (третье и пятое). В топологии доказывается, что все эти многообразия топологически различны.

Кроме пяти перечисленных, никакие другие двумерные многообразия не могут нести на себе параболическую геометрию, т. е. не могут быть параболически метризованы с сохранением требования полноты. Доказательство этого утверждения коротко намечено в книге Клейна "Неевклидова геометрия", глава IX. Конечно, всякая область плоскости, цилиндра и т. д. представляет собою метризованное многообразие с геометрией нулевой кривизны, однако во всех этих случаях не удовлетворяется требование полноты. Все параболические формы, по самому своему определению, в малых частях имеют такую же геометрию, как и евклидова плоскость. Но в целом каждой пространственной форме соответствует своя геометрическая система, в которой точками являются элементы многообразия данной формы, прямыми — его геодезические линии. Взаимные отношения между точками и прямыми подчиняются всем аксиомам Гильберта только в геометрической системе первой из перечисленных пяти параболических пространственных форм. В геометрических системах остальных четырех форм имеют место совсем иные предложения, в большинстве своем отличные от евклидовых.

Например, в геометрии цилиндра, геодезическими которого являются винтовые линии и окружности, ортогональные к образующим, утверждение: через две точки проходит только одна прямая — неверно.

§ 3. Эллиптические пространственные формы

242. Существует два класса эллиптических пространственных форм; их представители суть 1) сфера, 2) эллиптическая плоскость.

То, что сфера есть пространственная форма эллиптической геометрии, усматривается непосредственно, так как полная кривизна сферы радиуса r во всех ее точках равна $\frac{1}{r}$. Таким образом, сфера как поверхность евклидова пространства имеет натуральную метрику постоянной положительной кривизны.

Мы покажем сейчас, что существует полное дифференциально-геометрическое многообразие постоянной положительной кривизны, которое сфере топологически неэквивалентно.

Пусть в евклидовом пространстве дана сфера S радиуса r.

Рассмотрим множество R, элементами которого являются пары диаметрально противоположных точек сферы S. В множестве R мы введем метрику; именно, если $x = \{M_1, M_2\}$ и $y = \{N_1, N_2\}$ — два элемента множества R (здесь M_1, M_2 и N_1, N_2 — две пары диаметрально противоположных точек сферы S), то в качестве расстояния $\rho(x, y)$ мы назначим минимум расстояний по сфере S между точками пары $\{M_1, M_2\}$ и точками пары $\{N_1, N_2\}$.

Легко показать (при помощи рассуждений, аналогичных проведенным в начале n° 240), что функция $\rho(x, y)$ удовлетворяет аксиомам 1–3 n° 235, т. е. что R есть метрическое пространство.

Далее, очевидно, что для каждой точки $x = \{M_1, M_2\}$ пространства R существует ε-окрестность, изометричная ε-окрестности точки M_1 (или M_2) на сфере S. Следовательно, R есть дифференциально-геометрическое многообразие постоянной положительной кривизны. Наконец, из полноты сферы S следует полнота многообразия R.

Таким образом, R представляет собой пространственную форму геометрии положительной кривизны. Эту форму (как и все эквивалентные ей) называют *эллиптической плоскостью.*

Сфера и эллиптическая плоскость топологически не эквивалентны. Чтобы убедиться в этом, заметим, что сфера обладает следующим свойством: каждая простая замкнутая кривая, лежащая на сфере, разделяет сферу на две части. Это свойство должно сохраниться при любом топологическом отображении сферы (т. е. при взаимно однозначном и в обе стороны непрерывном отображении сферы на другое многообразие). Между тем, эллиптическая плоскость таким свойством не обладает. В самом деле, рассмотрим множество пар диаметрально противоположных точек одного большого круга сферы S; обозначим его через L. Множество L как подмножество из R топологически эквивалентно окружности. Следовательно, на эллиптической плоскости R множество L является простой замкнутой кривой. Но кривая L не разделяет R на две части, так как любые две пары диаметрально противоположных точек сферы, не принадлежащие множеству L (т. е. любые две точки из R, не лежащие на L), могут быть непрерывно переведены друг в друга, минуя L. Отсюда и следует, что сфера и эллиптическая плоскость топологически различны.

Итак, мы обнаружили две пространственные формы геометрии положительной кривизны, определяющие два разных класса форм; обе эти формы замкнуты.

Иных эллиптических форм нет. Доказательство этого утверждения, однако, не просто, и мы его приводить не будем.

243. Здесь мы опишем два новых представления эллиптической плоскости.

1) Обозначим через T множество, элементами которого являются все прямые, проходящие через центр сферы S (т. е. связку прямых, концентричную с S). В множестве T мы введем метрику, полагая $\rho(x, y) = \alpha r$, где α — наименьший угол между прямыми x и y, r — радиус сферы S.

Если мы сопоставим с каждой прямой из T пару диаметрально противоположных точек сферы S, в которых эта прямая пересекает сферу, то получим изометричное отображение T на R. Отсюда следует, что связка T с установленной метрикой есть новое представление эллиптической плоскости.

2) Дополним евклидово пространство бесконечно удаленными элементами так, как это делается в проективной геометрии (см. n° 80). Возьмем в пространстве произвольную плоскость α и будем рас-

сматривать ее как проективную плоскость, т. е. с учетом бесконечно удаленных точек. В проективной плоскости α мы введем метрику.

С этой целью возьмем какую-нибудь связку прямых T, центр которой не лежит в плоскости α. Сопоставим с каждой прямой u связки T точку x плоскости α, лежащую на прямой u. Сопоставление оказывается взаимно однозначным (здесь существенно, что плоскость пополнена бесконечно удаленными точками; благодаря этому прямым связки, которые параллельны плоскости α, соответствуют ее бесконечно удаленные точки). В качестве расстояния между двумя точками x, y плоскости α назначим число $\rho(x, y)$, равное расстоянию между теми элементами связки T, которые соответствуют точкам x, y (метрика связки T определена выше). Ясно, что при таком определении расстояний на плоскости α соответствие между точками плоскости α и прямыми связки T является изометричным. Следовательно, метризованная указанным способом проективная плоскость есть пространственная форма, эквивалентная T. Мы получаем новое представление эллиптической плоскости α виде метризованной проективной плоскости.

244. Попытаемся сделать топологическою модель проективной плоскости в виде топологически эквивалентной ей поверхности евклидова пространства.

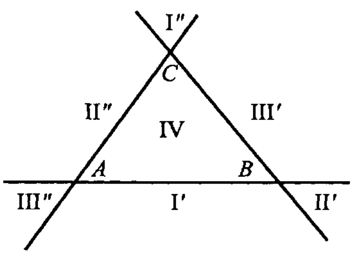


Рис. 181

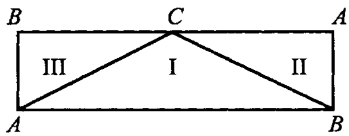


Рис. 182

Возьмем в евклидовой плоскости α три прямые, не проходящие через одну точку; они разделяют плоскость α на семь областей, которые на рис. 181 помечены значками I′, I″, II′, II″, III′, III″, IV. При добавлении к плоскости α бесконечно удаленных точек первоначально различные области I′ и I″ соединяются в одну связную область; ее мы обозначим римской цифрой I и назовем треугольником, так как она ограничена отрезками трех прямых. Аналогично области II′ и II″ соединяются в один треугольник II и области III′ и III″ — в один треугольник III. Таким образом, плоскость, пополненная бесконечно удаленными точками, тремя своими прямыми разделяется на четыре треугольника I, II, III, IV. Теперь заметим, что если мы удалим из рассматриваемого многообразия треугольник IV, то оставшаяся область будет топологически эквивалентна ленте Мёбиуса.

Это станет наглядно ясным, если изобразить треугольники I, II, III, как на рис. 182. Читатель сам легко убедится, что схема взаимного соединения треугольников I, II, III на рис. 182 не отличается от схемы соединения треугольников, помеченных теми же цифрами на рис. 18I. При этом вершины A и B треугольника II следует считать соединенными с вершинами, которые обозначены теми же буквами у треугольника III. Очевидно, что при таком соединении треугольники I, II, III образуют ленту Мёбиуса, контур которой состоит из прямолинейных звеньев CA, AB, BC. Плоскость, пополненная бесконечно удаленными точками, получается соединением контура ленты Мёбиуса с контуром треугольника IV.

Известно, что треугольник топологически эквивалентен части сферы, остающейся после вырезания в сфере какого-нибудь круглого отверстия. Таким образом, соединение контура $CABC$ ленты Мёбиуса с контуром треугольника IV приводит к поверхности, топологически эквивалентной той, какая получается заклеиванием лентой Мёбиуса сферы с одним отверстием. Эта поверхность является односторонней. В трехмерном евклидовом пространстве указанную конструкцию без самопересечения поверхности осуществить невозможно. Изображение проективной плоскости в виде сферы с одним отверстием, заклеенным лентой Мёбиуса, позволяет наглядно истолковать особенности взаимного расположения проективных прямых на проективной плоскости. Отсюда, например, легко усматривается, что проективная прямая не разделяет проективную плоскость на две части.

В этом мы убедимся, если из проективной плоскости вырежем кружок, не затрагивая данную прямую a; оставшаяся часть проективной плоскости будет лентой Мёбиуса, содержащей прямую a, которую мы для нарядности вообразим совмещенной со средней линией этой ленты Мёбиуса, но замкнутый разрез ленты Мёбиуса по средней линии не разделяет ее на две части, что обнаруживает простая модель из бумаги.

245. Двум эллиптическим пространственным формам соответствуют две геометрические системы: геометрия на сфере и геометрия на эллиптической плоскости. Геометрия на эллиптической плоскости представляет собой не что иное, как двумерную геометрию Римана (см. *пп*° 63–67). Соответственно этому эллиптическую плоскость называют также плоскостью Римана.

§ 4. Гиперболические пространственные формы

246. В отличие от эллиптической геометрии, которая имеет два класса топологически эквивалентных пространственных форм, и параболической геометрии, для которой существует пять классов, гиперболическая геометрия может быть реализована с соблюдением условия полноты на бесконечном множестве топологически различных двумерных многообразий. Даже среди замкнутых многообразий имеется бесконечно много таких, на которых можно задать метрику постоянной кривизны $K < 0$.

На основании результатов, изложенных в *пп*° 216–222 и 227–228, мы можем утверждать, что каждая плоскость в аксиоматически определенном пространстве Лобачевского представляет собой дифференциально-геометрическое многообразие постоянной отрицательной кривизны; это многообразие является полным, что доказывается совершенно так же, как полнота евклидовой плоскости (с использованием аксиом только абсолютной геометрии). Мы можем, следовательно, заключить, что *плоскость Лобачевского есть одна из гиперболических пространственных форм. Определяемый ею класс характеризуется следующим образом: его представители суть полные дифференциально-геометрические многообразия постоянной отрицательной кривизны, топологически эквивалентные обыкновенной* (евклидовой) *плоскости. Все эти многообразия называются гиперболическими плоскостями.*

247. Считая данной некоторую гиперболическую плоскость, мы покажем, как построить бесконечное множество других гиперболических форм. Прежде всего займемся замкнутыми формами.

Мы воспользуемся одним известным в элементарной топологии методом конструирования замкнутых двумерных многообразий. Некоторое время мы будем стоять на чисто топологической точке зрения, т. е. будем допускать любые непрерывные деформации фигур, хотя бы и нарушающие их метрические свойства. Кроме того, чтобы облегчить изложение, мы будем пользоваться наглядно описательными приемами.

Вообразим квадрат, изготовленный из тонкой резиновой пленки (рис. 183). Соединяя его стороны, помеченные одной буквой a, так,

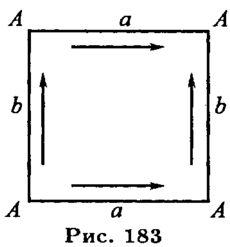


Рис. 183

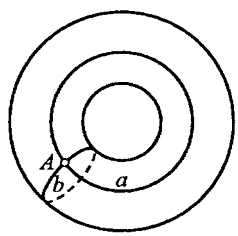


Рис. 184

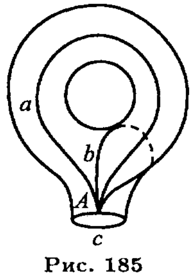


Рис. 185

чтобы указанные стрелками направления этих сторон совпали, мы превратим этот квадрат в трубку. После этого, соединяя границы отверстий трубки, мы получим тор (рис. 184). Таким образом, тор можно рассматривать как квадрат, у которого попарно склеены противоположные стороны так, что направления их, помеченные на рис. 183

стрелками, совпадают, а все четыре вершины соединяются в одной точке (на рис. 183 соединяемые стороны обозначены одной буквой: все четыре вершины помечены одной буквой A; на рис. 184, где изображен готовый тор, обозначения соответствуют употребляемым на рис. 183).

Представим себе, что в торе сделано отверстие так, что после этого он превращается в "ручку" (рис. 185). Пусть край этого отверстия проходит через точку A. Тогда на исходном квадрате край отверстия представится в виде замкнутой линии с, проходящей через точку A (рис. 186). Разрывая линию c в точке A и совершая некоторую деформацию фигуры, изображенной на рис. 186, мы можем превратить ее в пятиугольник, показанный на рис. 187. Обратно, склеивая стороны этого пятиугольника, помеченные одной буквой a, так, чтобы направления их, указанные стрелками, совместились, аналогично склеивая стороны, обозначенные буквой b, и оставляя свободной сторону c в качестве границы фигуры, мы снова получим ручку.

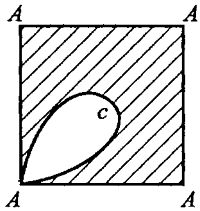


Рис. 186

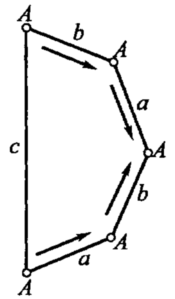


Рис. 187

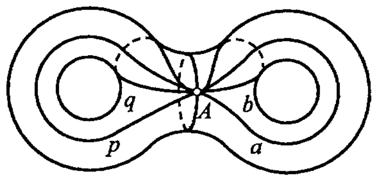


Рис. 188

Склеивая границы двух ручек, мы получим "крендель" (рис. 188). Вместе с тем его, очевидно, можно рассматривать как восьмиугольник, стороны которого попарно склеены по схеме, указанной на рис. 189, где соединяемые стороны обозначены одинаковыми буквами, а направления их, которые должны быть совмещены, помечены стрелками. Действительно, такой восьмиугольник возникает из двух пятиугольников, изображающих ручки, при соединении их по свободным сторонам.

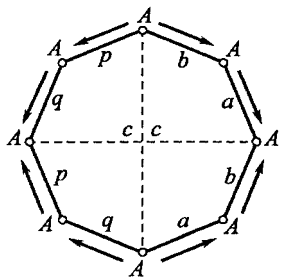


Рис. 189

Аналогично тому, как тор — поверхность рода 1 — получается попарным соединением сторон квадрата, крендель — поверхность рода 2 — попарным соединением сторон восьмиугольника, — каждая замкнутая двусторонняя поверхность рода p может быть получена путем попарного соединения сторон $4p$-угольника по определенной схеме, которую мы показываем для частного случая $p = 3$ на рис. 190, 191.

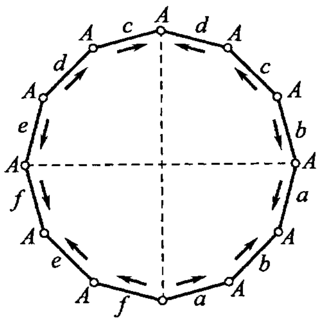


Рис. 190

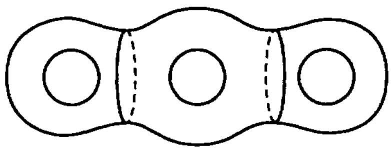


Рис. 191

Теперь займемся построением замкнутых пространственных форм гиперболической геометрии. Докажем прежде всего, что существует форма, топологически эквивалентная поверхности рода $p = 2$ (т. е. “кренделю“).

Рассмотрим на плоскости Лобачевского некоторую точку O и проведем через нее четыре прямые так, чтобы они составили правильную звезду. Откладывая на каждой из этих прямых в обе стороны от точки O конгруэнтные отрезки длины z и соединяя прямолинейными отрезками их концы, мы получим правильный восьмиугольник P_8. Исключим из рассмотрения точки плоскости Лобачевского, внешние по отношению к этому восьмиугольнику, а стороны его попарно отождествим, следуя той схеме, какая дается рис. 189. При этом предполагается, что при отождествлении двух сторон попарно отождествляются точки, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Обозначим через R множество, элементами которого являются 1) внутренние точки восьмиугольника P_8; 2) пары отождествляемых точек сторон; 3) восьмерка (отождествленных) вершин. Полагая, что все точки плоскости Лобачевского, представляющие некоторый элемент x множества R, обозначены одной буквой M, мы будем этот элемент записывать символически в виде $x = \{M\}$. Условимся расстояние между двумя точками P и Q плоскости Лобачевского обозначать через $d(P, Q)$.

В множестве R мы введем метрику. Именно, если $x = \{M\}$ и $y = \{N\}$ — два элемента R, то в качестве $\rho(x, y)$ мы назначим наименьшее из двух чисел

$$d_1 = d(M, N),$$
$$d_2 = \min\left[d(M, T_1) + d(N, T_2)\right],$$

где T_1 и T_2 — любые две отождествляемые точки. Тем самым R превращается в метрическое пространство, топологически эквивалентное “кренделю”. Мы можем мыслить R в виде “кренделя”, на котором задана искусственная метрика, при помощи накрытия “кренделя” восьмиугольником P_8 (т. е. при помощи некоторого отображения восьмиугольника P_8 на “крендель”). Эта метрика будет обычной метрикой Лобачевского в каждой достаточно малой окрестности любой точки “кренделя”, за исключением, может быть, окрестностей той точки, в которой совмещаются все вершины восьмиугольника.

Указанная точка окажется особой точкой метризованного “кренделя”, если сумма внутренних углов восьмиугольника будет отличаться от четырех прямых. Чтобы метрика, заданная нами на кренделе, была всюду регулярной, мы должны употреблять такой восьмиугольник, у которого сумма внутренних углов равна четырем прямым.

Таким образом, вопрос о возможности регулярной гиперболической метризации “кренделя” сводится к вопросу о существовании в геометрии Лобачевского правильного восьмиугольника с нужной нам суммой углов. Этот вопрос легко решается в утвердительном смысле.

В самом деле, пусть $S(r)$ — сумма внутренних углов восьмиугольника P_8; через r здесь обозначено расстояние от вершины восьмиугольника до его центра (эта величина упоминалась при построении P_8). Заметим, что на плоскости Лобачевского сумма внутренних углов бесконечно уменьшающегося треугольника стремится к π. Поэтому $S(r) \to 6\pi$ при $r \to 0$ (т. е. $S(r)$ стремится к сумме внутренних углов евклидова восьмиугольника). Отсюда следует, что при достаточно малом $r = r_0 S_0(r_0) > 2\pi$. С другой стороны, если мы обозначим через $\beta(r)$ величину половины одного угла восьмиугольника P_8, а через $\delta = \delta(r)$ — половину стороны этого восьмиугольника, то, очевидно, $\beta(r) < \Pi(\delta(r))$, где Π — функция Лобачевского.

Так как при $r \to \infty$ также и $\delta(r) \to \infty$ (см. лемму II n° 30), а при $\delta \to \infty$ $\Pi(\delta) \to 0$, то вследствие предыдущего неравенства $\beta(r)$ при $r \to \infty$ стремится к нулю. Отсюда при $r \to \infty$ имеем $S(r) = 16\beta(r) \to 0$. Таким образом, для достаточно больших r должно быть $S(r) < 2\pi$.

В силу непрерывности функции $S(r)$ существует такое $r = r_1$, что $S(r_1) = 2\pi$. Тем самым требуемое доказано.

Заметив, что на плоскости Лобачевского всякий четырехугольник имеет сумму внутренних углов, меньшую 2π, легко понять, что нашим методом построить всюду определенную гиперболическую метрику на торе нельзя. Можно доказать, что тор (который есть поверхность рода $p = 1$) вообще не является топологическим представителем пространственных форм гиперболической геометрии.

Напротив, каждая двусторонняя замкнутая поверхность рода $p > 2$, как и в рассмотренном случае $p = 2$, может быть гиперболически метризована. Это сразу следует из того, что на плоскости Лобачевского существует правильный 4р-угольник с суммой внутренних углов, равной 2π.

Аналогичные соображения позволяют установить, что и каждая односторонняя замкнутая поверхность, кроме проективной плоскости и одностороннего тора, допускает гиперболическую метризацию*).

Все изложенное в этом параграфе мы резюмируем следующей теоремой.

Различных классов замкнутых гиперболических пространственных форм бесконечно много; топологическими представителями их служат все замкнутые поверхности, кроме тех, какие представляют параболические и эллиптические пространственные формы.

248. По поводу открытых пространственных форм гиперболической геометрии мы скажем лишь несколько слов. Таких форм также имеется бесконечное множество. Чтобы это стало ясным, достаточно показать несколько примеров.

Рассмотрим на плоскости Лобачевского бесконечную полосу P_1, ограниченную двумя параллельными прямыми. Пусть P_2 — еще одна точно такая же полоса. Если идентифицировать прямые, ограничивающие полосу P_1, с прямыми, ограничивающими полосу P_2, а внутренние точки этих полос считать различными, то получится многообразие, гомеоморфное цилиндру, со всюду определенной на нем гиперболической метрикой. Условие полноты при этом с очевидностью выполняется.

Иначе можно поступить еще так: взять два экземпляра полосы плоскости Лобачевского, ограниченной двумя расходящимися прямыми, наложить их друг на друга и идентифицировать совместившиеся границы. Тогда снова получится гиперболически метризованный цилиндр.

Между прочим, полученные двумя указанными способами гиперболически метризованные многообразия имеют одинаковую внутреннюю геометрию в малом, один топологический тип и оба являются полными, но метрические их свойства в целом существенно различны (одно из них есть трубка, бесконечно расширяющаяся в одну сторону и бесконечно сужающаяся в другую, второе представляет собой трубку, бесконечно расширяющуюся в обе стороны).

Если рассматривать два наложенных друг на друга "треугольника" с бесконечно простирающимися сторонами (такие фигуры на плоскости Лобачевского, очевидно, существуют) и идентифицировать точки

*) Односторонние замкнутые поверхности получаются из $2n$-угольников при помощи попарного отождествления их сторон по специальной схеме; в частном случае $n = 2$ мы демонстрировали эту схему в n° 240 при построении одностороннего тора. Краткие, но достаточные для данного вопроса сведения по топологии замкнутых поверхностей, а также фотографии моделей некоторых замкнутых односторонних поверхностей в евклидовом пространстве (с самопересечениями, конечно) читатель найдет в книге: *Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Э.* Наглядная геометрия. - Изд. 2-е. — М.-Л.: Гостехиздат, 1951.

на их границах, то получится полное гиперболически метризованное открытое многообразие нового топологического типа.

Этот прием можно варьировать без конца. Нельзя, однако, таким приемом получить, например, гиперболическую метрику на сфере; если бы мы идентифицировали точки на границе двух совмещенных кругов плоскости Лобачевского, то имели бы сферу с гиперболической метрикой, но с особой линией. В данном случае прием не дает многообразия со всюду определенной метрикой, так как плоскость Лобачевского (как и плоскость Евклида) не симметрична относительно окружности.

249. Подведем итоги нашего исследования. Мы получили бесконечно много различных многообразий, несущих на себе геометрию постоянной кривизны. Все многообразия, обладающие метрикой данной постоянной кривизны, имеют общую геометрию в малом. Каждое из них допускает конгруэнтные, в смысле своей геометрии, перемещения по себе своих достаточно малых частей, и совокупность этих перемещений транзитивна относительно линейных элементов. Но метризованные многообразия разных топологических типов в целом обладают разными геометриями. Каждому из них соответствует своя система теорем, выражающих свойства принадлежащих этому многообразию объектов. Класс таких геометрий является естественным обобщением геометрий Евклида, Лобачевского и Римана.

В этом разделе мы занимались исключительно геометриями двух измерений. С неевклидовыми геометриями размерности $n \geqslant 3$ читатель может познакомиться по книгам: *Ф. Клейн.* Неевклидова геометрия, *П. К. Рашевский.* Риманова геометрия и тензорный анализ, *Э. Картан.* Геометрия римановых пространств (см. также первое издание настоящей книги).

§ 5. Теорема Гильберта*)

250. Нам уже несколько раз пришлось убедиться в том, что геометрия Лобачевского оказала большое влияние на возникновение и развитие новых геометрических понятий. В этом разделе мы вводим понятие *обобщенного многообразия*, частным случаем этого понятия является обычная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве.

Вспомним проблему Бельтрами. В *пп*° 225, 226 мы показали, как Бельтрами пробовал строить модель геометрии Лобачевского как поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Ему удалось это сделать только локально. Действительно, он обнаружил, что в малой окрестности любой неособой точки поверхности с постоянной отрицательной кривизной, как, например, псевдосферы, имеет место геометрия Лобачевского. Однако

*) Параграф добавлен из последнего прижизненного издания книги: *N. Éfimov.* Géométrie Supérieure. – Moscow: Éditions MIR, 1981. Перевод с исправлениями сделан Турчиным В. Э. под руководством проф. Э. Р. Розендорна. (Прим. ред.)

псевдосфера не может служить моделью полной плоскости Лобачевского, поскольку в ней есть особенности — ребро возврата. Естественным образом можно сформулировать вопрос более общим образом: если не удается построить реализацию геометрии Лобачевского как поверхности в евклидовом пространстве, значит, необходимо расширить класс исследуемых объектов.

Для построения модели в первую очередь имеет значение внутренняя метрика на поверхности, а не то, как точки поверхности расположены в пространстве. Тем самым, необходимо искать объект, который бы представлял искомую метрику. Нам, в принципе, уже попадались объекты такой природы: это римановы многообразия. Чаще их называют дифференцируемыми многообразиями (в данном случае они двумерны); их определение не требует наличия объемлющего пространства.

Понятие дифференцируемого многообразия элементарнее понятия поверхности (поскольку, говоря о поверхности, мы также интересуемся расположением ее точек в пространстве). Однако исторически понятие поверхности возникло раньше понятия дифференцируемого многообразия. Случай не редкий в математике: очень часто вещи более простые возникают после более сложных. Тем не менее заметим, что строгое и достаточно общее определение дифференцируемого многообразия не так уж просто (смотри *Г. де Рам.* Дифференцируемые многообразия. — P. Hermann, 1955). Нам не потребуется здесь давать это определение.

Вышесказанным мы хотели показать, что геометрия Лобачевского положила начало понятию дифференцируемого многообразия.

Тем не менее проблема остается. Не исключено, что неудача в поисках модели плоскости Лобачевского как поверхности в евклидовом пространстве кроется лишь в том, что мы "плохо искали". Возможно существует среди поверхностей евклидова пространства полная всюду регулярная поверхность с постоянной отрицательной кривизной, что и было бы искомой моделью (подчеркнем, что псевдосфера не подходит — она содержит ребро возврата и, следовательно, нерегулярна).

Эта проблема была разъяснена Д. Гильбертом, которому принадлежит следующая теорема: *в трехмерном евклидовом пространстве не существует поверхности постоянной отрицательной кривизны.* Доказательство мы дадим чуть позднее, а вначале уточним и упростим несколько общих понятий.

251. Простейшим примером двумерного многообразия является евклидова плоскость, снабженная декартовой системой координат (x, y). Ее определение можно встретить в любой книге по элементарной геометрии в главе "Плоская геометрия".

Однако уже на этой стадии необходима аккуратность с вводимыми понятиями. Дейсвительно, когда говорят "евклидова плоскость" подразумевается множество точек (x, y), которые связаны между собой определенными соотношениями: в частности, каждой паре точек мы ставим в соответствие евклидово расстояние между ними. Напротив, когда говорят о евклидовой плоскости как примере двумерного дифференцируемого многообразия, мы забываем о метрических свойствах плоскости, в том числе и о расстоянии между точками. Единственно важными свойствами плоскости остаются лишь те, которые необходимы для нахождения производных (функций и отображений).

252. Пусть на плоскости задана метрика

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2, \tag{1}$$

где E, F, G — непрерывные функции; и форма (1) всюду положительно определена. Пусть P_1, P_2 две произвольные точки, $s(P_1, P_2)$ — длина некоторой дифференцируемой дуги $x = x(t)$, $y = y(t)$, соединяющей точки P_1 и P_2, которая измеряется по метрике (1). Точка $(x(t), y(t))$ пробегает эту дугу от P_1 до P_2 в то время, как t варьируется от t_1 до t_2. Когда говорим, что дуга измеряется по метрике (1), подразумеваем, что ее длина $s(P_1, P_2)$ равна интегралу

$$s(P_1, P_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Ex'^2 + 2Fx'y' + Gy'^2}dt,$$

где $\qquad E = E(x(t), y(t)), \quad F = F(x(t), y(t)), \quad G = G(x(t), y(t)).$

Расстояние определяется как обычно, полагая

$$\rho\,(P_1,\, P_2) = \inf s\,(P_1,\, P_2),$$

нижняя граница в правой части берется по множеству дифференцируемых дуг, соединяющих P_1 с P_2. Нетрудно показать, что функция $\rho(P_1, P_2)$ удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. Тем самым мы имеем дело с метрическим многообразием. Если его метрика определена описанным методом, полученное многообразие называется *пространством Римана*; было бы однако правильнее его называть *пространством Гаусса*, коль скоро речь идет о двумерном многообразии (ведь именно Гаусс предложил изучать внутреннюю метрику поверхности).

Двумерное многообразие может служить моделью плоскости Лобачевского: достаточно правильным образом подобрать функции E, F, G. В силу n° 228, мы можем положить

$$E = \mathrm{ch}^2(\sqrt{-K}y), \quad F = 0, \quad G = 1,$$

где K произвольно выбранная отрицательная постоянная. Имеем

$$ds^2 = \mathrm{ch}^2(\sqrt{-K}y)\,dx^2 + dy^2, \tag{2}$$

что есть метрическая форма плоскости Лобачевского (смотри n° 224). Искомая модель тем самым построена.

Чтобы это доказать, следует, очевидно, убедиться, что для этой модели выполнены все аксиомы геометрии Лобачевского. Первым делом необходимо понять, как воплощаются в ней фундаментальные понятия. Скажем, к примеру, что роль прямых в ней играют геодезические (что, впрочем, верно для произвольной модели геометрии, снабженной формой (1), а не только модели геометрии Лобачевского, снабженной формой (2)). Покажем также, что метрика (2) полна: это означает, что метрическое пространство, рассмотренное в данном параграфе, полно, когда (1) представлено формой (2).

Заметим, что $\mathrm{ch}^2\sqrt{-K}y \geq 1$. Это означает, что расстояние между точками по метрике (2) всегда неменьше евклидового. Поскольку евклидова плоскость $-\infty < x,\ y < +\infty$ полна, метрика (2) также является полной.

253. Мы видели в n° 252, что построения плоскости Лобачевского как многообразия не представляет особой сложности: достаточно правильным образом выбрать функции E, F и G в (1). Проблемы возникают, когда мы пытаемся представить эту модель в виде поверхности. Непреодолимый характер этих проблем определяет сущность теоремы Гильберта. Перед тем как перейти к доказательству теоремы, задержимся некоторое время на самом понятии поверхности.

В нашем изложении многообразие будет первичным понятием, предполагаемое известным а приори, в то время как поверхность будет понятием производным.

254. Как обычно через C^m мы будем обозначать класс функций на плоскости (x, y), имеющих непрерывные производные порядка $\geq m$. Впрочем необязательно определять эти функции на всей плоскости: они могут быть определены лишь в некоторой области D. Чтобы излишне не усложнять обозначения, мы будем отдельно оговаривать область определения.

Итак, предположим, что функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, $\zeta(x, y) \in C^m$, $m \geq 1$, определены на плоскости (x, y). Мы будем считать, что ξ, η, ζ являются ортогональными декартовыми координатами переменной точки P в евклидовом пространстве E^3. Значит, задание функций $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, $\zeta(x, y)$ эквивалентно заданию m-кратно непрерывно дифференцируемого отображения $f(x, y)$ плоскости (x, y) в пространство E^3. Мы потребуем дополнительно, чтобы отображение f было всюду невырожденным, т. е. чтобы матрица

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

имела ранг 2, $\operatorname{rang} f'(x, y) = 2$, в любой точке (x, y). Если все перечисленные условия выполнены, говорят, что отображение $f(x, y)$ является *m-кратно дифференцируемым погружением плоскости* (x, y) в трехмерное евклидово пространство. Такое погружение также называется *поверхностью* (m-кратно дифференцируемой). Условие $\operatorname{rang} f'(x, y) = = 2$ означает, что поверхность допускает касательную плоскость.

Отметим два обстоятельства:

1) Простота нашего определения поверхности является лишь кажущейся. Действительно, мы говорили о погружении только плоскости (x, y), то есть, многообразия достаточно частного вида. Однако это нам помогает ясно представить общее определение поверхности: достаточно взять многообразие, отличное от плоскости (например, сферу, тор и т. д.).

2) Привлечем внимание читателя к тому факту, что мы определили поверхность как отображение (погружение), а не как образ (множество точек). Разъясним это замечание. Пусть дано погружение многообразия D (для простоты будем считать, что D — это плоскость (x, y)). Может оказаться, что две различные точки M_1, $M_2 \in D$ ($M_1 \not\equiv M_2$) имеют одинаковый образ $P = f(M_1) = f(M_2)$. Нам следует, тем самым, рассматривать две копии точки P, одну являющуюся образом M_1, а другую — образом M_2. Эта идея может быть выражена по-другому: если $P = f(M)$ и $M \in D$, тогда пары (P, M) различны при различных M. Поверхность следует определять как множество таких пар, считая, что M пробегает

все точки D. Безусловно, если отображение $P = f(M)$ взаимнооднозначно с образом – образы никаких двух точек не совпадают, то поверхность определяется как образ D, то есть, как множество точек.

255. Предположим, что поверхность определена как погружение многообразия D; для простоты как и ранее полагаем, что D есть плоскость (x, y). Также будем предполагать, что наше погружение определено функциями $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ и $\zeta(x,y) \in C^m$, $m \geq 1$. Последние задают метрику

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2, \tag{3}$$

которая легко может быть выражена в координатах (x, y) и, тем самым, рассмотрена как метрика на D. Про эту метрику говорят, что она *индуцирована* заданным на D погружением.

256. Предположим теперь, что речь идет о погружении метрического многообразия, то есть считаем, что на D была определена а приори некоторая метрика (как мы это предположили вначале этого раздела). С другой стороны, погружение f индуцирует на D новую метрику. Если она совпадает с исходной метрикой, то говорят, что f есть изометрическое погружение метрического многообразия D. Другими словами, погружение изометрично, если правая часть равенства (3) индуцирует на D ту же метрику, что мы изначально определили.

257. Пусть S — поверхность, определенная как погружение D. Будем говорить, что поверхность S полна, если идуцированная на D метрика полна. Таким образом, целостность поверхности всегда определяется в смысле ее внутренней геометрии.

258. Наконец, сформулируем и докажем теорему Гильберта.

Теорема. *Полная плоскость Лобачевского не допускает изометрического погружения регулярности C^m, при $m \geq 3$, в трехмерное евклидово пространство.*

Доказательство. Мы будем представлять плоскость Лобачевского как полную евклидову плоскость $-\infty < x, y < +\infty$, снабженную метрикой

$$ds^2 = dx^2 + B^2\,dy^2, \tag{4}$$

где $B = B(x,y) = \operatorname{ch}\sqrt{-K}x$ (смотри n° 228, формула (**)), где K есть постоянная отрицательная кривизна, например $K = -1$.

Заметим,что $B \geq 1$, а значит, многообразие, снабженное метрикой (4), полно. Далее заметим, что $B\,dx\,dy \geq dx\,dy$, то есть любой двумерный кусок поверхности имеет площадь не меньшую, чем если бы она имела в еклидовой метрике. Это означает, например, что полное многообразие с метрикой (4) имеет бесконечно большую площадь.

Следующие рассмотрения требуют некоторый минимум знаний в теории поверхностей, с которыми можно ознакомиться в любой книге по элементарной геометрии (смотри, например, *Погорелов А.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974, или *Blaschke W.* Einführung in die Differentialgeometrie. — Berlin: Springer-Verlag, 1950).

(Заметим, что мы поменяли ролями координаты x и y относительно предыдущего обозначения ds^2 в этом разделе. В первом случае мы руководились желанием упростить сравнение с другими формулами книги, в то время как сейчас мы стремимся следовать традиционной форме записи выводимых соотношений.)

Предположим, что плоскость Лобачевского допускает изометрическое погружение в E^3 и что это — погружение высокой регулярности C^m, $m \geq 3$. Поверхность S характеризуется второй фундаментальной квадратичной формой, коэффициенты которой L, M, N регулярности $m-2 \geq 1$ удовлетворяют условиям Гаусса–Петерсона–Кодацци. Ниже мы будем пользоваться приведенными коэффициентами второй фундаментальной формы, а именно: $\lambda = L/B$, $\mu = M/B$, $\nu = N/B$. В этих обозначениях уравнение Гаусса есть

$$\lambda\nu - \mu^2 = K, \tag{5}$$

в то время как уравнения Петерсона–Кодацци примут сокращенный вид:

$$\lambda'_y - \mu'_x = a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu, \tag{6}$$

$$\nu'_x - \mu'_y = a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu, \tag{7}$$

где величины a_i, b_i являются известными, так как зависят только от метрики. Возникает, тем самым, система уравнений (5)–(7) с тремя неизвестными функциями λ, μ, ν на плоскости.

Из общей формы уравнений Петерсона–Кодацци (смотри книгу по дифференциальной геометрии) легко выводятся выражения для b_1 и b_2 (единственные, которые нам потребуются):

$$b_1 = 2\Gamma^2_{12}, \quad b_2 = 2\Gamma^1_{12},$$

где Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля данной метрической формы $\Big($заметим, что в предыдущих главах книги мы использовали другое обозначение: $\left\{ {i \atop jk} \right\}\Big)$. Если метрика имеет вид (4), уравнения (6), (7) становятся

$$(B\lambda)'_y - (B\mu)'_x = B'_x\mu, \tag{8}$$

$$\nu'_x - \mu'_y = B'_x(B\lambda). \tag{9}$$

Предположим, что уравнения (5)–(7) допускают глобальные решения λ, μ, ν на плоскости. Это означает, что на всей плоскости имеется *сеть кривых, определенных уравнением*

$$\lambda\, dx^2 + 2\mu\, dx\, dy + \nu\, dy^2 = 0. \tag{10}$$

При $K < 0$ в силу (5) эта система вещественна и локально регулярна (это означает, что любая точка плоскости допускает окрестность в форме криволинейного параллелограмма, регулярно заполненного двумя семействами интегральных кривых уравнения (10)). В каждой точке угол между интегральными кривыми, проходящими через эту точку, отличен от 0 и π. Заметим, что интегральные кривые (10) являются *характеристиками* системы уравнений (5), (6), (7) на плоскости (x, y); мы будем пользоваться этим выражением, не придавая, впрочем, ему особой важности. На самой поверхности S эти кривые называются еще *асимптотическими линиями* уравнения (10). Чтобы излишне не переполнять терминологию, будем также их называть характеристиками на S.

Поскольку сеть характеристик регулярна (по крайней мере, локально) на плоскости (x, y), мы можем в окрестности любой точки ввести локальные координаты (u, v) так, что координатная сеть $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ отождествляется в этой окрестности с сетью характеристик. Скажем тогда, что характеристики $v = \text{const}$ образуют первое семейство, а характеристики $u = \text{const}$ — второе семейство. Определим положительные направления на характеристиках таким образом, чтобы пара u, v-напрвлений задавала ту же ориентацию, что и пара x, y-направений. Угол, образованный положительными направлениями характеристик, обозначим через ω. Элемент длины в координатах (u, v) запишется в виде:

$$ds^2 = e^2\,du^2 + 2eg\cos\omega\,du\,dv + g^2\,dv^2. \tag{11}$$

Здесь $e > 0$, $g > 0$, $0 < \omega < \pi$.

Заметим,что в координатах (u, v) $\lambda = \nu = 0$. Получаем $\mu = \sqrt{-K} = \text{const}$ (смотри (5)). Положим $\mu > 0$. Поскольку $\mu = \text{const}$ и $\lambda = \nu = 0$, получаем из (6) и (7), что

$$b_1 = 2\Gamma^2_{12} = 0, \quad b_2 = 2\Gamma^1_{12} = 0. \tag{12}$$

Выписав стандартные выражения для символов Кристоффеля, из формулы (12) немедленно вытекает

$$e'_v = 0, \quad g'_u = 0. \tag{13}$$

Из этого вытекает, что характеристики образуют сеть Чебышева, другими словами, в любом четырехугольнике сети длины противоположных сторон равны (заметим, что для доказательства этого утверждения мы пользуемся лишь тем, что $K = \text{const} < 0$). Действительно, возьмем отрезок кривой $v = \text{const}$, заключенный между двумя кривыми $u = u_1$, $u = u_2$; его длина $\delta(v)$ имеет выражение $\delta(v) = \int_{u_1}^{u_2} e(u, v)\,du$. Откуда, согласно (13), имеем $\delta'(v) = 0$, то есть, $\delta(v)$ остается неизменным.

Однако из того, что кривые образуют сеть Чебышева и метрика полна, следует, что наша локально регулярная сеть должна быть глобально регулярной. В принципе, это то же самое, что сказать, что любые две кривые, принадлежащие различным семействам, обязательно пересекаются. Мы не будем доказывать это утверждение; читатель без труда найдет его абсолютно элементарное доказательство в нашей статье "Поверхности медленно изменяющейся отрицательной кривизны"(Успехи математических наук. XXI. выпуск 5(131). 1966.)

Рассмотренное утверждение приводит к простому, но тем не менее важному следствию. А именно, мы утверждаем, что четырехугольники системы характеристик могут иметь сколь угодно большую площадь. Чтобы это доказать, возьмем в рассмотренном многообразии некоторый геодезический диск $\varkappa$. Рассмотрим все характеристики, проходящие через его внутренние или граничные точки. Они образуют полосу, ограниченную характеристиками $u = u_1$, $u = u_2$ $(u_1 < u_2)$. Аналогично получаем ограниченную полосу, состоящую из характеристик второго семейства: пусть $v = v_1$, $v = v_2$ ее граничные характеристики. Поскольку система характеристик глобально регулярна, характеристики $u = u_1$, $u = u_2$ пересекаются с характеристиками $v = v_1$, $v = v_2$, образуя, тем самым, четырехугольник, содержащий диск $\varkappa$. Однако во внутренней геометрии Лобачевского диск $\varkappa$ может иметь сколь угодно большую площадь (которая растет экспоненциально как функция от радиуса). Следовательно, четырехугольники системы характеристик могут также иметь сколь угодно большую площадь.

С другой стороны, вычислим геодезическую кривизну $\varkappa_1$ характеристики первого семейства. В соответствии со стандартной формулой получаем

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial\omega}{\partial s_1},$$

где s_1 — натуральный параметр на характеристике. Аналогичным образом для характеристик второго семейства

$$\varkappa_2 = +\frac{\partial\omega}{\partial s_2}.$$

Тем самым для произвольной дуги l характеристики любого из двух семейств

$$\left|\int_l \varkappa\, ds\right| \geq \pi$$

(здесь $\varkappa = \varkappa_i$, если l принадлежит i-му семейству, $i = 1, 2$).

Применим формулу Гаусса–Бонне к четырехугольнику, состоящему из характеристик. Для простоты положим $K = -1$. Получаем

$$\iint K\, d\sigma + \oint \varkappa\, ds + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi,$$

где α_j — угол, на который поворачивается направление ориентированной стороны четырехугольника, проходя через j-ю вершину. Отсюда

$$\left|\iint K\, d\sigma\right| \geq 14\pi,$$

что означает, что площадь четырехугольников сети характеристик ограничена. Это противоречит предыдущим результатам. Тем самым теорема Гильберта доказана.

259. Иногда теорема Гильберта формулируется в более общей форме: *любая полная погруженная в E^3 поверхность класса C^m постоянной отрицательной кривизны имеет регулярность* $m < 3$. Заметим, что поверхность определяется здесь как погружение многообразия D с произвольной топологической структурой, в то время как в нашем доказательстве D рассматривается как плоскость.

Тем не менее теорема Гильберта в формулировке, данной в n° 258 (назовем ее теоремой А), нисколько не отличается от теоремы Гильберта в вышеприведенной формулировке (теорема В). Действительно, очевидно, что теорема А есть частный случай теоремы В. С другой стороны, теорема В легко выводится из теоремы А.

Для этого предположим, что существует в E^3 полная регулярная ($m \geq 3$) поверхность постоянной отрицательной кривизны, определенная C^m-погружением многообразия D класса C^m, где D имеет произвольную топологическую структуру.

Однако, если это так, универсальным накрытием D будет односвязная поверхность постоянной отрицательной кривизны, то есть, плоскость Лобачевского, что исключено в силу результатов, полученных в n° 258. Значит, теорема B следует из теоремы A.

(Мы не даем определения универсального накрытия. Читатель может найти его в книгах по элементарной топологии.)

260. Известно огромное множество утверждений о поверхностях отрицательной кривизны, которые связаны с теоремой Гильберта. Читатель найдет в нашей статье, которую мы цитируем в n° 258, достаточно длинный, но далеко не исчерпывающий список работ, связанных с теоремой Гильберта. Основная часть этих работ посвящена вопросу о том, является ли существенным в теореме Гильберта условие о глобальном постоянстве отрицательной кривизны. С. Кон-Фоссен, к примеру, предполагал в одной из своих достаточно старых работ, что утверждение Гильберта остается верным, если вместо равенства $K = \mathrm{const} < 0$, определяющего глобальную кривизну, рассмотреть неравенство $K \leq \mathrm{const} < 0$. Это утверждение оказалось верным. Другими словами, имеет место теорема: *для любой полной регулярной поверхности, погруженной в E^3 и имеющей в каждой точке отрицательную кривизну K, имеем* $\sup K = 0$.

Условие регулярности выражается в этой теореме как C^2; тем самым и для теоремы Гильберта достаточно рассматривать гладкость C^2.

Читатель найдет ее доказательство в статье: *Н. Ефимов.* Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Математический сборник. — 1964. Т 64(106), №2. — С. 286–320. Это доказательство получило значительное развитие в статье: *Тилла Клотц (Милнор).* Теорема Ефимова // Advances of Mathematics. — 1972. Предложенное доказательство основано на теории отображений; оно привело к возникновению некоторых новых понятий, которые в свою очередь позволили выявить некоторые новые свойства отображений; смотри: *Н. Ефимов.* Дифференциальные критерии гомеоморфной природы некоторых отображений и их применение в теории поверхностей // Математический сборник. — 1968. Т. 76(118), № 1. — С. 499–512.

261. В качестве заключения нам бы хотелось процитировать теорему, в которой речь идет о поверхностях отрицательной кривизны, предполагая, что поверхность имеет класс регулярности C^2 и допускает однозначную проекцию на плоскость. Теорема эта восходит к тем далеким временам, когда еще не думали существенно обобщать теорему Гильберта на случай переменной кривизны и пытались лишь доказать, что не существует поверхности $z = f(x,y)$, $-\infty < x,y < +\infty$, такой, что глобально ее кривизна $K \leq \mathrm{const} < 0$. Но не только этот факт оказался верным, но и удалось установить некоторые неожиданные оценки. В следующей теореме содержится пример подобной оценки: *пусть $f(x,y)$ имеет класс C^2 во внутренности и на границе квадрата со стороной a. Предположим, что кривизна поверхности $z = f(x,y)$, ограниченной этим квадратом, будет везде ≥ -1. Тогда существует такая константа c, что $a \leq c$.* В качестве константы c можно взять $c = 19$ (смотри *Ефимов Н. В.* Доклады Академии наук СССР. - Т. 93, № 3. 1953). Е. Хейнц предположил другое доказательство с улучшенной оценкой (Math. Ann. 1955). Н. Ефимов дополнительно улучшил этот результат (Математический сборник, 1976).