# Векторная алгебра и ее приложения

для студентов и аспирантов математических, физических и технических специальностей

М.Г. Любарский

2010

Этот учебник возник на основе лекций по высшей математике, которые автор читал в начале нулевых годов на радио-физическом факультете Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Автор хотел написать учебник «как лучше», и ему трудно судить, удалось ли это. Зато с уверенность можно сказаться, что получилось не «как всегда», хотя рассматриваемые темы вполне традиционные: векторные и евклидовы пространства, линейные отображения и матрицы, определители, системы линейных уравнений и аналитическая геометрия. Есть, по крайней мере, два важных отличия этого учебника от большинства подобных курсов.

Во-первых, автор стремился получить все результаты в многомерном случае, хотя всегда подробно обсуждаются двух-и трехмерные случаи. Особенно это относится к аналитической геометрии.

Во-вторых, используется понятие многомерного ориентированного объема. В традиционных курсах векторной алгебры определитель обычно вводится как некий сложный и непонятно откуда взявшийся алгоритм вычисления числа по квадратной матрице. Лишь потом студент осознает, что это понятие очень полезно, но не понимает, почему это так – геометрический смысл определителя, как правило, остается ему неизвестным. В предлагаемом учебнике определитель и алгоритм его вычисления теряют свою мистичность, так как выводятся (даже в многомерном случае) из простых геометрических соображений. Хотя на это уходят время и силы, зато потом не нужно доказывать свойства определителя – они очевидны и легко запоминаются.

Предлагаемый курс векторной алгебры преподавателю легко адаптировать под свою аудиторию. Можно отбросить некоторые темы, не входящие в учебный план, и отказаться от ряда доказательств, не содержащих идеи, необходимые для дальнейшего изложения (наиболее громоздкие из таких доказательств специально вынесены в дополнения). Главное – сохранить наглядный геометрический подход, который автор, как и многие другие, считает наиболее плодотворным в современной математике.

Любарский Михаил Григорьевич
lyubarsky@gmail.com

# Оглавление

# Предисловие

Алгебра – часть математики, изучающая *алгебраические операции*. В школьном курсе алгебры рассматриваются операции над числами. Результатами, полученными в школьном курсе, являются, например, формула для бинома Ньютона или алгоритм решения квадратного уравнения. Ниже изучаются операции над более сложными объектами – векторами.

Основное назначение векторной алгебры вполне геометрическое – научиться ориентироваться в многомерных пространствах. Благодаря тому, что мы живем в трехмерном пространстве, не вызывают затруднения такие понятия, как длина, площадь, объем, угол, вправо, влево. Легко ответить на вопрос, что представляет собой пересечение двух несовпадающих и непараллельных друг другу плоскостей. Или, сколько граней имеет куб. И что представляют собой его грани. В многомерных пространствах подобные понятия и вопросы вызывают естественное затруднение. Ответы на них могут быть неожиданными. Например, в четырехмерном пространстве, хотя это непросто себе представить, две плоскости могут иметь одну и только одну общую точку. Четырехмерный куб имеет восемь граней, причем каждая из них является обычным трехмерным кубом. Отметим, что четырехмерное пространство, как и пространства больших размерностей, – это не измышление, а например, одно из основных понятий общей теории относительности А. Эйнштейна.

Не нужно думать, что векторная алгебра пригодится только при изучении теории относительности. Ее понятия и методы являются основой для изучения высшей математики и, конечно, других математических, физических и технических дисциплин. Многомерные пространства встретятся при решении систем линейных уравнений, изучении функций многих переменных, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теоретической механики, теории вероятностей и других дисциплин. Более того уже в курсе высшей математики Вы встретитесь с пространствами бесконечной размерности. Работать с такими пространствами придется при изучении рядов Фурье, математической физики, а далее квантовой механики и многих других наук.

Векторная алгебра предоставляет алгебраический аппарат для решения геометрических задач в пространствах любой размерности. Развитые в этой теории методы настолько мощны, что значительно упрощают решение задач даже в обычном трехмерном пространстве.

Итак, начнем …

# § 1. Векторные пространства

## 1. Определение векторного пространства

Понятие *векторного* или, как его еще называют, *линейного пространства* является базовым в математике и как следствие во всем современном естествознании. Приведенное ниже определение может показаться слишком абстрактным в том смысле, что оно ничего не говорит о природе элементов этого пространства. Но в этом заключается преимущество данного определения – оно охватывает огромное число конкретных линейных пространств. Такой подход не является новым для вас – даже школьные «векторы-стрелки» могут в зависимости от задачи изображать силу, скорость, ускорение, напряженность электрического поля и т. п. Наиболее важные примеры конкретных векторных пространств будут рассмотрены ниже.

Определение 1. *Векторным* (или *линейным*) *пространством* называется множество $V$ объектов любой природы, для элементов которого определены операции *сложения* и *умножения* на число. Это означает, что любым двум элементам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ сопоставлен третий элемент из этого же множества, который называется их *суммой* и обозначается через $\mathbf{x}+\mathbf{y}$. Кроме того каждому элементу $\mathbf{x}$ и любому числу $\lambda$ сопоставлен элемент $\lambda\mathbf{x}$ из множества $V$, называемый их *произведением.* Элементы линейного пространства называются *векторами* (или *точками*). Операции сложения векторов и умножения их на число должны удовлетворять следующим требованиям:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (коммутативность сложения векторов)
2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (ассоциативность сложения векторов)
3. $\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$ (ассоциативность умножения на число)
4. $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел)
5. $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов)

Замечание. Прежде, чем перечислять дальнейшие требования, отметим, что эти свойства легко запомнить: они хорошо известны из школьной алгебры, если под векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ понимать числа. Не стоит удивляться – числа с обычными операциями сложения и умножения образуют векторное пространство. Дальнейшие свойства векторных пространств с этой точки зрения тоже не представляют собой ничего нового.

6. $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$, где 1– число, а $\mathbf{x}$ – любой вектор.
7. Существует вектор $\mathbf{0}$, называемый *нулем векторного пространства,* то есть такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$.
8. У каждого вектора $\mathbf{x}$ существует *противоположный вектор* $-\mathbf{x}$, такой что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=0$. Сложение с противоположным вектором удобно записывать как вычитание: $\mathbf{y}+(-\mathbf{x})=\mathbf{y}-\mathbf{x}$.

Не нужно думать, что здесь перечислены все свойства векторного пространства. Приведены только *аксиомы векторного пространства*. Это означает, что указан минимальный набор свойств, из которых все остальные вытекают логическим путем. Например, попытайтесь ответить на следующие вопросы.

Задание 1.

1. Может ли быть в векторном пространстве два нуля, отличных друг от друга?
2. Может ли у вектора $\mathbf{x}$ быть два различных противоположных вектора?
3. Докажите, что $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$, где нуль в левой части равенства – число, а в правой – нуль векторного пространства.
4. Докажите, что $-\mathbf{x}=(-1)\mathbf{x}$, где в левой части равенства стоит вектор, противоположный вектору $\mathbf{x}$, а в правой – вектор $\mathbf{x}$, умноженный на число $(-1)$.
5. Докажите, что $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$ для любого числа $\lambda$.
6. Докажите, что из равенства $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$ следует, что либо $\lambda=0$, либо $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Эти вопросы не так просты, как кажутся. Поэтому ответы на них приведены в конце параграфа в дополнении 1.

Замечание. Свойства 3 и §очень удобны для нахождения нуля векторного пространства и обратного элемента. Это стоит запомнить.

Пример 1. Нулевое пространство.

Это самое простое линейное пространство, состоящее всего из одного элемента. По необходимости (см. п. 7) он обязан быть нулем. Операции сложения и умножения на число определяются так: $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, и $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$ для любого числа $\lambda$. Легко проверить, что выполнены все аксиомы векторного пространства.

Пример 2. «Геометрические векторы».

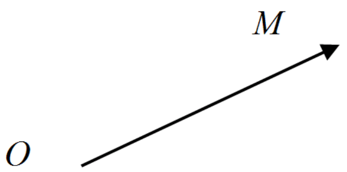



Рис. 1.

В трехмерном пространстве (в котором мы живем) зададим точку $O$, называемую *центром*, и сопоставим любой точке $M$ направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 1). Такой направленный отрезок называется *геометрическим вектором*.

В совокупности всех геометрических векторов определим операцию сложения по «правилу параллелограмма», как это показано на рис. 2.

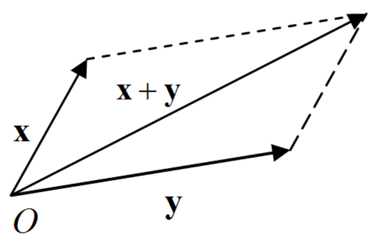



Рис.2.

Операцию умножения на число $\lambda$ зададим как умножение длины вектора на это число. Причем, если $\lambda$ отрицательное, то направление вектора меняется на противоположное.

Геометрические векторы часто рассматривают на плоскости и даже на прямой, то есть в двух- и одномерном пространствах.

Задание. Проверьте, выполнены ли все аксиомы векторного пространства. В частности укажите, какой вектор является нулем этого пространства, и какой вектор противоположен данному вектору.

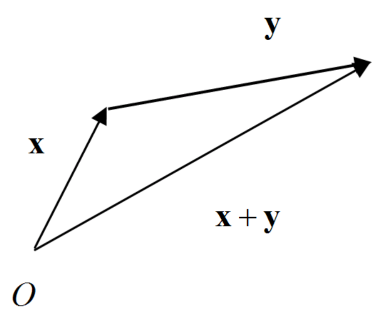



Рис. 3

З а м е ч а н и е . Очень часто рассматривают геометрические векторы, начало которых лежат не в центре $O$, а в какой-либо другой точке. Например, символом $\overrightarrow{AB}$ обозначают вектор, начинающийся в точке $A$ и заканчивающийся в точке $B$. *В дальнейшем будем считать совпадающими векторы, у которых одинаковые длины и направления.* Иначе говоря, вектор можно перемещать так, чтобы он оставался параллельным самому себе. В частности можно поместить его начало в центр $O$. Правило параллелограмма, например, при этом можно заменить эквивалентным ему «правилом треугольника» (см. рис. 3).

П р и м е р 3 . П р о с т р а н с т в о $\mathbb{R}^n$.

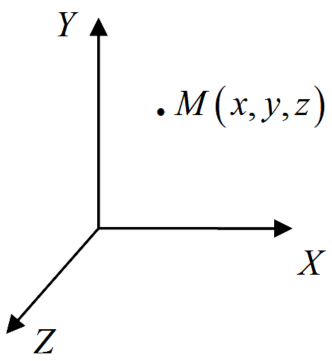



Рис. 4.

Это пространство состоит из всевозможных упорядоченных наборов из $n$ чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При $n = 3$ такие наборы можно (и очень рекомендуется) рассматривать как координаты точек в трехмерном пространстве (в котором мы живем), если в этом пространстве введена декартова система координат (см. рис. 4). Таким образом, можно считать, что пространство $\mathbb{R}^3$ – это трехмерное пространство с декартовой системой координат. Оно называется трехмерным декартовым пространством.

Аналогично декартовы пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ – это плоскость с двумя осями декартовых координат и соответственно прямая с одной осью декартовых координат.

*Пространство $\mathbb{R}^n$ используется в математике как многомерное обобщение трехмерного пространства.*

Определим сложение векторов и умножение на число как покоординатные. То есть

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_{1,} y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n); \\ &\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}.$$

З а м е ч а н и е . Может показаться, что многомерные пространства не нужны – ведь мы живем в трехмерном пространстве. Разве что, вспомнив Эйнштейна, можно добавить еще одно временное измерение. Однако это не так. Материальная точка – самый простой объект в механике – подчиняется уравнению Ньютона и, двигаясь по прямой, описывается двумя координатами – пространственной координатой и скоростью ее изменения. Если же точка движется в пространстве, то ее состояние задается 6 координатами – по две на каждое измерение. А если рассматривается система, состоящая всего из двух материальных точек в пространстве, то нужно 12 координат. Так что даже для такой несложной системы приходится использовать пространство $\mathbb{R}^{12}$.

З а д а н и е . Проверьте, выполнены ли все аксиомы линейного пространства. Укажите, какой вектор является нулем этого пространства и какой вектор противоположен данному вектору.

Пример 4. Многочлены.

Рассмотрим совокупность всех многочленов независимой переменной $x$ степени не выше $N$, то есть совокупность функций вида $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, где $n\le N$. Натуральное число $n$ называется степенью многочлена, а числа $a_0,a_1,\ldots,a_0$ – его коэффициентами. (Отметьте удобный способ нумерации коэффициентов: у каждого слагаемого сумма индекса коэффициента и степени $x$ равна степени многочлена $n$.)

Задание. Проверьте, что операции обычного сложения многочленов и умножения их на число превращают эту совокупность многочленов в векторное пространство. Выясните, останется ли то же верным, если снять ограничение на степень многочлена. (Ответ: да.)

Пример 5. Функциональное пространство.

Не ограничиваясь многочленами, рассмотрим пространство $F_D$ всех функций, отображающих некоторое множество $D$ в числовую ось. Это означает, что $D$ – общая для всех функций область определения, а области значений всех функций лежат на числовой оси. Операции сложения и умножения на число определим так. Суммой двух функций $f_1$ и $f_2$ назовем такую функцию $f_1+f_2$, что $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$ для всех $x$ из $D$. Умножение функции $f$ на число $\lambda$ определим аналогичным образом: $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ для всех $x$ из $D$.

Задание. Убедитесь, что пространство $F_D$ с так определенными операциями является векторным пространством.

## 2. Полнота и независимость системы векторов. Базис векторного пространства

Поскольку в векторном пространстве имеются всего две алгебраические операции, то самым сложным выражением, которое можно составить из чисел и набора векторов $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_\mathbf{n}\}$, является следующее:

$$\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Это выражение называется *линейной комбинацией векторов* $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_\mathbf{n}\}$.

Определение 2. Система векторов $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_\mathbf{n}\}$ называется полной, если любой вектор $\mathbf{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этой системы:

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n. \qquad (1)$$

Наличие в векторном пространстве полной системы векторов значительно упрощает решение многих задач, так как проверка каких-либо свойств для бесконечного числа элементов векторного пространства сводится к проверке этих свойств для линейной комбинации конечного числа заранее определенных векторов. Естественно, что при этом желательно, чтобы в полной системе не было лишних векторов, то есть таких, что если их отбросить, свойство полноты сохранится. Довольно очевидно (это будет показано ниже в теореме 1), что из полной системы можно исключить вектор, который сам является линейной комбинацией остальных. Полную систему, из которой нельзя исключить ни одного элемента без потери свойства полноты называют *минимальной*. Следующее определение помогает сформулировать, какая полная система обладает этим свойством.

О п р е д е л е н и е 3. Система векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ называется *линейно независимой*, если ни один ее вектор нельзя представить в виде линейной комбинации остальных. Систему, не являющуюся линейно независимой, называют *линейно зависимой.*

Таким образом, число векторов полной системы можно уменьшать, пока она остается линейно зависимой. Минимальная полная система поэтому является линейно независимой.

Соотношение между полнотой и линейной независимостью является симметричным. Как будет показано в теореме 1, число векторов какой-либо линейно независимой системы можно увеличивать без потери этого свойства, пока система неполная. Так что *максимальная* линейно независимая система, к которой нельзя добавить ни один вектор без потери линейной независимости, является полной.

Приведенные соображения показывают, что полезно рассматривать системы векторов, являющиеся одновременно полными и линейно независимыми.

О п р е д е л е н и е 4 . Полная и одновременно линейно независимая система векторов называется б*азисом векторного пространства*. Базис можно охарактеризовать как минимальную полную систему или как максимальную линейно независимую систему.

Перед изучением свойств базиса докажем утверждения, которые были приведены выше без доказательства. Однако предварительно сформулируем очень удобный признак линейной независимости системы векторов, который часто принимают в качестве определения этого свойства.

Л е м м а 1 . Система векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда из равенства

$$\alpha_1 \mathbf{f_1} + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + ... + \alpha_m \mathbf{f}_m = \mathbf{0} \tag{2}$$

следует, что все коэффициенты $\alpha_i$, $i = 1, 2, ..., m$, равны нулю.

◄ Если в равенстве (2) хотя бы один коэффициент, например, $\alpha_1$ не равен нулю, то можно разделить это равенство на $\alpha_1$ и найти вектор $\mathbf{f}_1$:

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{f}_2 - ... - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}\mathbf{f}_m,$$

как линейную комбинацию остальных векторов. Значит, система $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ линейно зависимая.

Обратно, если система линейно зависимая, то какой-то вектор, например, $\mathbf{f}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов:

$$\mathbf{f_1} = \beta_2 \mathbf{f}_2 + ... + \beta_m \mathbf{f}_m,$$

или

$$\mathbf{f_1} - \beta_2 \mathbf{f}_2 - ... - \beta_m \mathbf{f}_m = \mathbf{0}.$$

Таким образом существует равная нулю линейная комбинация, в которой по крайней мере один коэффициент (при $\mathbf{f}_1$) не равен нулю. ►

Т е о р е м а 1.

1. Если система векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_\mathbf{n}\}$ полная, то число элементов этой системы можно уменьшить без потери свойства полноты в том и только в том случае, если эта система является линейно зависимой.
2. Если система векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ линейно независимая, то число элементов этой системы можно увеличить без потери свойства линейной независимости в том и только в том случае, если эта система не является полной.

◀ Д о к а з а т е л ь с т в о п е р в о г о у т в е р ж д е н и я. Если какой-либо вектор можно исключить из системы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_\mathbf{n}\}$ без потери свойства полноты, то он, как и любой другой элемент векторного пространства, должен быть представим в виде линейной комбинации оставшихся векторов. То есть система является линейно зависимой.

Обратно, если система $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_\mathbf{n}\}$ является линейно зависимой, то некоторый вектор из этой системы представим в виде линейной комбинации остальных векторов. Поэтому, подставив его в таком виде в формулу (1), получим, что произвольный вектор $\mathbf{x}$ является линейной комбинацией оставшихся векторов.

Д о к а з а т е л ь с т в о в т о р о г о у т в е р ж д е н и я. Если систему $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ можно пополнить вектором $\mathbf{f}_{m+1}$ без потери свойства линейной независимости, то это означает, что этот вектор не является линейной комбинацией векторов из исходной системы. То есть исходная система неполная.

Наоборот, если система $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ неполная, то найдется вектор $\mathbf{f}_{m+1}$, который нельзя представить в виде линейной комбинации ее векторов. Покажем, что дополненная этим вектором система $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{f}_{m+1}\}$ остается линейно независимой.

Пусть

$$\alpha_1\mathbf{f_1} + \alpha_2\mathbf{f}_2 + ... + \alpha_m\mathbf{f}_m + \alpha_{m+1}\mathbf{f}_{m+1} = \mathbf{0}.$$

Коэффициент $\alpha_{m+1}$ должен равняться нулю, иначе из этого соотношения можно было бы найти вектор $\mathbf{f}_{m+1}$ как линейную комбинацию элементов исходной системы, что противоречит выбору этого вектора. Остальные коэффициенты (см. лемму 1) равны нулю в силу линейной независимости исходной системы. Поскольку все коэффициенты линейной комбинации оказались равными нулю, то по лемме 1 пополненная система линейно независима. ▶

В о п р о с. Может ли линейно независимая система содержать нуль векторного пространства? (Ответ: нет.) Является ли система, состоящая из одного ненулевого вектора линейно независимой? (Ответ: да.)

З а д а н и е 2. Вернемся к примеру 2 «Геометрические векторы».

1. Покажите, что два вектора образуют линейно независимую систему тогда и только тогда, когда они неколлинеарные (т.е. не лежат на одной прямой).
2. Покажите, что три вектора образуют линейно независимую систему тогда и только тогда, когда они некомпланарные (т.е. не лежат в одной плоскости).
3. Может ли линейно независимая система состоять из четырех векторов? (Ответ: нет).
4. Какое минимальное число векторов должна иметь полная система?

З а д а н и е . Обратимся к примеру 3 «Пространство $\mathbb{R}^n$». Покажите, что вопрос о линейной независимости системы векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ сводится к существованию ненулевых решений у системы $n$ линейных однородных уравнений относительно $m$ координат. (Подсказка: Запишите равенство (2) для этого случая, выполните все алгебраические действия в левой части и приравняйте соответствующие координаты в обеих частях равенства. Например, $\mathbf{f}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{f}_2 = (4,5,6)$. Равенство (2) в этом случае имеет вид $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(4,5,6) = (0,0,0)$, или $(\alpha_1 + 4\alpha_2, 2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + 6\alpha_2) = (0,0,0)$. Отсюда

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

По лемме 1 векторы $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ линейно независимы в том и только в том случае, если система линейных однородных уравнений имеет только нулевые решения.)

Следующее свойство базиса используется наиболее часто.

Т е о р е м а 2 . Если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_\mathbf{n}\}$ – базис, то любой вектор $\mathbf{x}$ единственным образом может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_\mathbf{1} + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n. \tag{3}$$

Это представление называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ *по базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_\mathbf{n}\}$.

◄ Существование представления (3) вытекает из полноты базиса. Единственность этого представления – из линейной независимости базиса. Действительно, если имеется еще одно разложение

$$\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{e}_\mathbf{1} + \beta_2\mathbf{e}_2 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n,$$

то вычитая это равенство из равенства (3), получим:

$$\mathbf{0} = (\alpha_\mathbf{1} - \beta_1)\mathbf{e}_\mathbf{1} + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{e}_n,$$

что в силу линейной независимости базиса означает (см. лемму 1) равенство нулю всех коэффициентов линейной комбинации в правой части равенства. То есть $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1,2,...,n$. ►

З а д а н и е . Докажите обратное утверждение:

Л е м м а 2 . Если полная система $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_\mathbf{n}\}$ такова, что любой вектор $\mathbf{x}$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации (3), то эта система является линейно независимой и, значит, представляет собой базис.

(Подсказка: воспользуйтесь леммой 1, предварительно заметив, что нуль векторного пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_\mathbf{n}\}$ с нулевыми коэффициентами.)

В о п р о с . Существует ли базис в нулевом пространстве, рассмотренном в примере 1? (Ответ: нет.)

З а д а н и е 3 . Покажите, что

1. в пространстве геометрических векторов базис образует любая тройка некомпланарных векторов;
2. в пространстве $\mathbb{R}^n$ система $\{(1,0,..,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)\}$ из $n$ векторов образует базис. Этот базис называется *каноническим базисом* пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим удобное свойство канонического базиса: вектор $(x_1,x_2,...,x_n)$ в этом базисе имеет координаты $(x_1,x_2,...,x_n)$;
3. в пространстве многочленов степени не выше $N$ система векторов $\{P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,...,\ P_N(x)=x^N\}$ является базисом. В пространстве многочленов любой степени существуют линейно независимые системы векторов, состоящие из сколь угодно большого числа членов;
4. в функциональном пространстве $F_D$ с конечным множеством $D=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ базисом являются функции вида: $f_k(x_s)=0$ при $k\neq s$, и $f_k(x_s)=1$ при $k=s$, где $k,s=1,2,...,n$. Если же множество $D$ бесконечно, то в пространстве $F_D$ существуют линейно независимые системы, содержащие сколь угодно много векторов.

З а м е ч а н и е . Определенный в этом пункте базис называют *конечным,* так как он состоит из конечного числа векторов. В пространстве многочленов любой степени нет конечного базиса. Но можно указать более общий *счетный* базис, то есть базис, элементы которого можно пронумеровать натуральными числами. В пространстве многочленов счетный базис, например, состоит из всех натуральных степеней переменной $x$. В функциональном пространстве $F_D$ конечный базис существует только в том случае, если область определения $D$ состоит из конечного числа точек. Если множество $D$ счетное, то существует счетный базис. Если же множество $D$ несчетное, например, это – интервал $[0,1]$, то разумное определение базиса можно дать, только наложив дополнительные ограничения на функции, входящие в это пространство.

*Далее рассматриваются векторные пространства только с конечным базисом***.** Они называются *конечномерными векторными пространствами* в отличие от остальных пространств, которые называются *бесконечномерными*. Однако к бесконечномерным пространствам еще придется вернуться, например, при изучении рядов Фурье или решении дифференциальных уравнений в частных производных.

З а д а н и е (более сложное). Выясните, при каком $N$ система многочленов

$$\{P_0(x)=1+x,\ P_1(x)=x+x^2,...,\ P_{N-1}(x)=x^{N-1}+x^N,\ P_N(x)=x^N+1\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше $N$. (Ответ: при четном $N$.)

## 3. Изоморфизм векторных пространств

Из теоремы 2 следует, что если в линейном пространстве зафиксировать базис $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$, то каждому вектору $\mathbf{x}$ однозначным образом соответствует набор коэффициентов $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ его разложения (3) по этому базису. Это принято записывать так: $\mathbf{x}=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{\mathbf{n}}\right)$. Каждый коэффициент $\alpha_i$ называется *координатой вектора* $\mathbf{x}$*, соответствующей базисному вектору* $\mathbf{e}_i$, а слагаемое вида $\alpha_i\mathbf{e}_i$ в сумме (3) – *проекцией вектора* $\mathbf{x}$ *на вектор* $\mathbf{e}_i$. Замена векторов в каком-либо соотношении наборами их координат называется *переходом к координатной форме*.

З а д а н и е .

1. Найдите проекции и координаты многочлена $x^4+3x^3-2x^2+x-1$ в базисе $\left\{1,x,x^2,x^3,x^4\right\}$.
2. Сделайте то же самое в базисе $\left\{1+x,x+x^2,x^2+x^3,x^3+x^4,x^4+1\right\}$.

   (П о д с к а з к а . Запишите требуемое разложение с неопределенными координатами $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_5$:
   $$x^4+3x^3-2x^2+x-1=\alpha_1\left(1+x\right)+\alpha_2\left(x+x^2\right)+\alpha_3\left(x^2+x^3\right)+\alpha_4\left(x^3+x^4\right)+\alpha_5\left(x^4+1\right),$$
   а затем найдите их, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$.)
3. Покажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ разложение вектора по базису сводится к решению линейной системы относительно неизвестных координат. (У к а з а н и е. Запишите равенство (3), выполните все действия в правой части и приравняйте соответствующие координаты в левой и правой частях равенства. Например, разложим вектор $\mathbf{x}=\left(1,2\right)$ в базисе $\mathbf{e}_1=\left(3,4\right)$ и $\mathbf{e}_2=\left(5,6\right)$. Равенство (3) в этом случае имеет вид $\left(1,2\right)=\alpha_1\left(3,4\right)+\alpha_2\left(5,6\right)$, или $\left(1,2\right)=\left(3\alpha_1+5\alpha_2,4\alpha_1+6\alpha_2\right)$. Отсюда
   $$\begin{cases}3\alpha_1+5\alpha_2=1\\4\alpha_1+6\alpha_2=2\end{cases}.$$

Следующее простое утверждение имеет очень далеко идущие следствия.

Т е о р е м а 3 . При сложении двух векторов их координаты, соответствующие одному и тому же базисному вектору, складываются:
$$\mathbf{x}=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right),\ \mathbf{y}=\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{y}=\left(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n\right).$$
А при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число:
$$\mathbf{x}=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)\Rightarrow\lambda\mathbf{x}=\left(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,...,\lambda\alpha_n\right).$$

Кратко это формулируется так: *сложение векторов и умножение их на число в координатной форме являются покоординатными*.

◀ По условию $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e}_2+...+\alpha_n\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y}=\beta_1\mathbf{e_1}+\beta_2\mathbf{e}_2+...+\beta_n\mathbf{e}_n$. Поэтому
$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y}&=\left(\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e}_2+...+\alpha_n\mathbf{e}_n\right)+\left(\beta_1\mathbf{e_1}+\beta_2\mathbf{e}_2+...+\beta_n\mathbf{e}_n\right)=\\&=\left(\alpha_1+\beta_1\right)\mathbf{e_1}+\left(\alpha_2+\beta_2\right)\mathbf{e}_2+...+\left(\alpha_n+\beta_n\right)\mathbf{e}_n\end{aligned}.$$

Это и означает, что $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\left(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n\right)$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. ►

Количество векторов в базисе называется его *рангом*.

В а ж н о е с л е д с т в и е . Из теоремы 3 следует, что наличие в векторном пространстве $V$ базиса ранга $n$ с математической точки зрения сводит это пространство к пространству $\mathbb{R}^n$. Действительно, в силу теоремы 3 все операции над векторами в пространстве $V$ можно производить в координатной форме, то есть с помощью наборов отвечающих им координат, причем точно так же, как это делается в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это означает, что любое утверждение для пространства $V$, которое можно вывести из аксиом векторного пространства, достаточно доказать в пространстве $\mathbb{R}^n$. Благодаря теореме 3 утверждение автоматически переносится на любое пространство с базисом ранга $n$.

Интуитивно ясно, что при $n \neq m$ пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ различны. (Например, пространство $\mathbb{R}^1$ – это совокупность декартовых координат точек прямой, $\mathbb{R}^2$ – плоскости, а $\mathbb{R}^3$ – окружающего нас трехмерного пространства.) Поэтому в одном и том же векторном пространстве $V$ не могут быть базисы различного ранга $n$ и $m$. Иначе пространство $V$ сводилось бы в зависимости от выбора базиса и к $\mathbb{R}^n$, и к $\mathbb{R}^m$. Это – основное утверждение о базисах. Оно сформулировано в следующей теореме и строго доказано в дополнении 2 после введения некоторых дополнительных понятий.

Теорема 4. Все базисы одного и того же векторного пространства $V$ имеют одинаковый ранг. Его значение называют *размерностью* пространства $V$ и обозначают через $\dim V$.

Сказанное выше теперь можно выразить более общим образом:

Если некоторое утверждение, вытекающее из аксиом векторного пространства, доказано в каком-либо векторном пространстве $V$ размерности $n$, то оно справедливо в пространстве $\mathbb{R}^n$ и, значит, в любом другом векторном пространстве $W$ той же размерности. Кратко это можно сформулировать так:

Теорема 5. Все векторные пространства одной и той же размерности *изоморфны* (то есть, идентичны, тождественны).

Свойство изоморфности векторных пространств одной и той же размерности очень полезно. Оно позволяет переносить результаты, полученные для одного конкретного векторного пространства, на другое. Вот простейший пример.

Вычисление суммы двух векторов в пространстве геометрических векторов требует построения параллелограмма, для чего, по крайней мере, нужны линейка и циркуль (и, добавим, знание начертательной геометрии). Эта же задача в пространстве $\mathbb{R}^3$ решается арифметическим сложением трех пар чисел – координат складываемых векторов. Этот прием широко используется в аналитической геометрии, механике, электродинамике и других науках.

Кроме того при решении задач векторной алгебры появляется возможность рассматривать наиболее удобное конкретное векторное пространство. Например, мы будем всегда стараться иллюстрировать проводимые общие рассуждения рисунками, относящимися к частному случаю двух- или трехмерного пространства, на которых соответствующая задача изображена в с помощью геометрических векторов. Это существенно помогает в решении задач, поскольку позволяет подключить геометрическую интуицию, очень развитую у человека в трехмерном пространстве.

Свойство изоморфности двух векторных пространств $V$ и $W$ одной и той же размерности фактически было установлено с помощью некоторого соответствия между векторами этих пространств. Это соответствие имеет специальное название и состоит в следующем.

Определение 5. Пусть в пространствах $V$ и $W$ зафиксированы базисы, так что каждому вектору из этих пространств взаимно однозначно соответствует набор координат. *Изоморфизмом векторных пространств* $V$ и $W$ называется соответствие между векторами этих пространств, такое что вектору $\mathbf{x}$ из пространства $V$ сопоставляется вектор $\mathbf{y}$ из пространства $W$ с тем же набором координат, что и у $\mathbf{x}$.

Рассмотрение изоморфизмов каких бы то ни было введенных математических объектов является в математике совершенно обязательным принципом. Вообще, это – общенаучный принцип классификации. Например в зоологии отдельно рассматривают семейства парнокопытных и кошачьих. На математическом языке это означает, что все кошки изоморфны друг другу, но не изоморфны коровам. В биологии существует классификация, делящее все живое на животных, растения и вирусы. При этой классификации кошки изоморфны коровам и, например, улиткам, но не изоморфны березам.

Введение изоморфизмов позволяет указать ту степень абстрактности, с какой данная наука собирается изучать свои объекты. Одним из известных Вам изоморфизмов является соотношение подобия геометрических фигур. Если размеры не интересуют геометра, то для него, например, все подобные треугольники одинаковы.

Примеры. Определим размерности векторных пространств, рассмотренных в примерах 1 – 5.

1. Размерность пространства геометрических векторов равна (см. задание 3 п. 1) трем.
2. Наличие канонического базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. задание 3 п. 2) показывает, что размерность этого пространства равна $n$.
3. Размерность пространства многочленов степени не выше $N$ равна (см. задание 3 п. 3) $N+1$. Размерность пространства многочленов любой степени естественно назвать *бесконечной*.
4. То же относится и к функциональному пространству с областью определения $D$, состоящей из бесконечного числа точек.
5. Размерность нулевого пространства, не имеющего базиса, естественно считать равной нулю.

Возникает закономерный вопрос, существует ли базис в данном векторном пространстве и, если существует, то каков его ранг. Приведем алгоритм построения базиса векторного пространства, позволяющий дать ответ на этот вопрос.

1. Произвольно выберем ненулевой вектор $\mathbf{e}_1$. Если система $\{\mathbf{e}_1\}$ полна, то процесс завершен – совокупность $\{\mathbf{e}_1\}$ представляет собой базис. Иначе переходим к следующему пункту.
2. Произвольно выберем вектор $\mathbf{e}_2$, не являющийся линейной комбинацией векторов из системы $\{\mathbf{e}_1\}$. Снова проверяем полна ли получившаяся система векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Если да, то процесс завершен. Иначе переходим к следующему пункту.

3. … и так далее каждый раз добавляем произвольный вектор, не являющийся линейной комбинацией уже выбранных векторов, и проверяем полноту получившейся системы. Если процесс закончится на конечном шаге, то базис построен. Если нет, то пространство бесконечномерное.

Этот алгоритм основан на втором утверждении теоремы 1, показывающем, что линейно независимую систему можно расширять без потери этого свойства, пока не будет достигнута полнота системы.

Задание. Докажите утверждение.

Следствие теоремы 4. В векторном пространстве размерности $n$ любые $n+1$ вектор образуют линейно зависимую систему. (Подсказка: Предположите противное, а именно, что некоторая система, состоящая из $n+1$ вектора, является линейно независимой. Тогда с помощью приведенного выше алгоритма ее можно дополнить до базиса, который будет содержать не менее, чем $n+1$ вектор.)

## 4. Векторные подпространства и линейные оболочки

Определение 6. Подмножество $U$ векторного пространства $V$ называется его *подпространством*, если $U$ само является векторным пространством с теми же операциями сложения и умножения на число.

Замечание. Если мы хотим проверить, является ли данное множество $U$ подпространством, то нет нужды заново проверять все аксиомы векторного пространства. Достаточно проверить, что $U$ *замкнуто* относительно операций сложения и умножения на число. То есть,

$$\mathbf{x},\mathbf{y}\in U \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}\in U;\ \mathbf{x}\in U \Rightarrow \lambda\mathbf{x}\in U \text{ для любого числа } \lambda .$$

Действительно, в проверке нуждаются только требования 7 и 8 определения 1, заключающиеся в том, что в $U$ существуют нуль и для любого вектора – ему противоположный вектор. Но для замкнутых относительно обеих операций подмножеств это легко следует из утверждений 3 и 4 задания 1.

Примеры.

1. В пространстве геометрических векторов подпространствами являются совокупности векторов вида $\overrightarrow{OM}$, где точка $M$ лежит на какой-либо прямой или в какой-либо плоскости, содержащей центр $O$. Кроме того подпространством является нулевое пространство, состоящее из вектора $\overrightarrow{OO}$ нулевой длины.
2. В пространстве $\mathbb{R}^n$ подпространствами являются множества векторов $(x_1,x_2,...,x_n)$, удовлетворяющих одному или нескольким условиям вида $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n=0$.
3. В пространстве многочленов примером подпространства может служить совокупность многочленов, обращающихся в нуль в некоторых заданных точках $x_1,x_2,...,x_m$.
4. В функциональном пространстве подпространством является, например, совокупности всех непрерывных или дифференцируемых функций.

Пусть $E=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_k\}$ – любая система векторов в векторном пространстве $V$.

О п р е д е л е н и е 7. *Линейной оболочкой* $L(E)$ системы векторов $E$ называется совокупность всех векторов, которые можно представить в виде линейной комбинации векторов из $E$.

П р и м е р ы .

1. В пространстве геометрических векторов линейной оболочкой какого-либо отличного от нуля вектора $\overrightarrow{OM_0}$ являются все векторы $\overrightarrow{OM}$, лежащие на прямой, проходящей через точки $O$ и $M_0$.
2. Линейной оболочкой системы двух неколлинеарных векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ являются все вектора $\overrightarrow{OM}$, лежащие в плоскости, задаваемой точками $O$, $M_1$ и $M_2$.
3. Если даны три некомпланарных вектора, то их оболочка совпадает со всем пространством.

З а д а н и е . Сформулируйте свойство полноты системы векторов в терминах линейных оболочек. (Ответ: система векторов является полной в том и только в том случае, если ее линейная оболочка совпадает со всем пространством.)

З а д а н и е . Докажите, что линейная оболочка $L(E)$ – векторное подпространство пространства $V$. Это подпространство называют *подпространством, натянутым на векторы* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k$.

В о п р о с . С чем совпадает линейная оболочка полной системы векторов? В каком случае система векторов является базисом в подпространстве, натянутом на эти вектора?

О п р е д е л е н и е 8. *Суммой* (*векторной*) двух подмножеств $M_1$ и $M_2$ векторного пространства $V$ называется совокупность всех векторов, являющихся суммой двух векторов, один из которых принадлежит первому подмножеству, а второй – второму.

Это определение кратко можно записать так: $M_1 + M_2 = \{v : v = v_1 + v_2, v_1 \in M_1, v_2 \in M_2\}$. В формулах, описывающих множества каких-либо объектов, фигурные скобки {...} читаются как «совокупность всех» (или «набор всех», «множество всех»), а двоеточие читается как «таких, что», «обладающих свойством» и т. п.

П р и м е р ы 4. Рассмотрим трехмерное декартово пространство $\mathbb{R}^3$, то есть трехмерное пространство с осями декартовых координат $X$, $Y$ и $Z$, в котором координаты точек рассматриваются как векторы пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда все координатные оси, например, $X = \{(x, y, z) : y = z = 0\}$ являются векторными подпространствами. То же можно сказать о всех координатных плоскостях, например, о плоскости $XY = \{(x, y, z) : z = 0\}$.

1. Координатная плоскость $XY$ является векторной суммой координатных осей $X$ и $Y$.
2. Векторная сумма координатной плоскости $XY$` и координатной оси $Z$ представляет собой все пространство.

3. Векторной суммой координатной плоскости $XY$` и координатной оси $X$ является плоскость $XY$`.
4. Векторная сумма двух координатных плоскостей $XY$` и $YZ$ представляет собой все пространство.

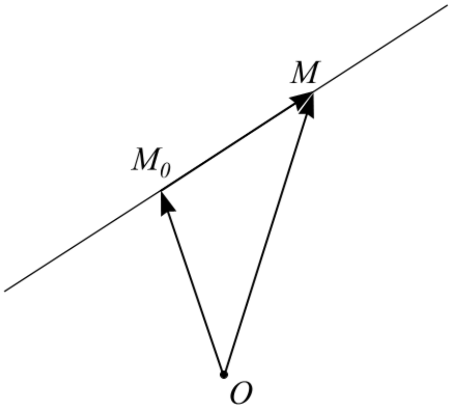


Рис. 5.

З а д а н и е . Покажите, что любую прямую в пространстве геометрических векторов (то есть совокупность всех векторов $\overrightarrow{OM}$, таких что точки $M$ лежат на одной и той же прямой) можно представить как сумму одномерного подпространства и некоторого вектора $\overrightarrow{OM_0}$. (Подсказка: проверьте, что векторы вида $\overrightarrow{M_0M}$ образуют одномерное подпространство. См. рис. 5.)

Аналогично, покажите, что любую плоскость можно представить как сумму двумерного подпространства и какого-то вектора.

З а д а н и е . Докажите, что
1. сумма двух подпространств векторного пространства является векторным подпространством.
2. пересечение $V_1 \cap V_2 = \{v : v \in V_1, v \in V_2\}$ двух подпространств, то есть совокупность всех векторов, лежащих и в $V_1$, и в $V_2$, образует векторное подпространство. В частности пересечение двух линейных подпространств обязательно содержит нуль как непременный элемент любого векторного пространства..

О п р е д е л е н и е 9. Сумма двух подпространств $V_1$ и $V_2$ называется *прямой* и обозначается символом $V_1 \oplus V_2$, если пересечение этих подпространств содержит только нуль векторного пространства. Особо интересен случай, когда прямая сумма двух подпространств совпадает со всем пространством. В этом случае говорят, что *векторное пространство* $V$ *распадается в прямую сумму этих подпространств*.

Т е о р е м а 6. Каждый вектор $\mathbf{v}$ из прямой суммы $V_1 \oplus V_2$ имеет единственное представление в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_1 \in V_1$, и $\mathbf{v}_2 \in V_2$. Вектор $\mathbf{v}_1$ называется *проекцией вектора* $\mathbf{v}$ *на подпространство* $V_1$ (*параллельно подпространству* $V_2$). Аналогично, $\mathbf{v}_2$ – *проекция на* $V_2$ (*параллельно подпространству* $V_1$).

◄ Предположим, что есть еще одно разбиение вектора $\mathbf{v}$ на проекции: $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Тогда $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, или $\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2$. Так как по условию общим вектором подпространств $V_1$ и $V_2$ может быть только нулевой вектор, то обе части последнего равенства совпадают с нулевым вектором и, следовательно, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$, и $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$. ►

В о п р о с . Какая сумма подпространств из приведенных в предыдущем примере 4 является прямой?

Л е м м а 3 .

Если пространство $V$ распадается в прямую сумму подпространств $V_1$ и $V_2$ с базисами $E_1$ и $E_2$ соответственно, то объединение $E$ этих базисов является базисом в $V$.

Наоборот, если базис $E$ пространства $V$ разбит на две подсистемы $E_1$ и $E_2$, то $V$ – прямая сумма векторных подпространств $V_1$ и $V_2$, являющихся линейными оболочками $E_1$ и $E_2$ соответственно.

◄ Д о к а ж е м п е р в о е у т в е р ж д е н и е . Любой вектор $\mathbf{x}$ в силу теоремы 6 можно представить в виде суммы двух проекций $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ на подпространства $V_1$ и $V_2$ соответственно. Каждую из этих проекций можно разложить соответственно по базисам $E_1$ и $E_2$. Поэтому любой вектор $\mathbf{x}$ представим в виде линейной комбинации векторов из объединения $E$ базисов $E_1$ и $E_2$. Таким образом $E$ является полной системой.

Рассмотрим произвольное разложение вектора $\mathbf{x}$ по системе векторов из $E$. Пусть $\mathbf{v}_1$ – сумма проекций на векторы из базиса $E_1$, а $\mathbf{v}_2$ – из базиса $E_2$. Тогда в силу теоремы 6 $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ суть проекции вектора $\mathbf{x}$ на подпространства $V_1$ и $V_2$ соответственно. Поэтому рассматриваемое представление вектора $\mathbf{x}$ по системе векторов из $E$ является единственным. Согласно лемме 2 объединение базисов $E$ в этом случае является базисом всего пространства $V$.

Д о к а ж е м в т о р о е у т в е р ж д е н и е . Если $E$ – базис, то разложение произвольного вектора $\mathbf{x}$ по этому базису дает представление этого вектора в виде суммы двух векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, один из которых принадлежит линейной оболочке подсистемы $E_1$, а второй $E_2$. Поэтому пространство $V$ совпадает с суммой линейных оболочек векторов из $E_1$ и $E_2$ соответственно. Эта сумма прямая, так как любой ненулевой вектор, принадлежащий обеим оболочкам, имеет два разложения по базису $E$ – одно как линейная комбинация векторов из подсистемы $E_1$, а второе как линейная комбинация векторов из подсистемы $E_2$. Это невозможно в силу единственности разложения по базису $E$. ►

В о п р о с . Если $V = V_1 + V_2$, где сумма не является прямой, то будет ли объединение $E$ базисов этих подпространств полной системой векторов? Линейно независимой? (Ответ: да, нет.)

З а д а н и е . Докажите самостоятельно следующее утверждение.

Т е о р е м а 7 . Размерность прямой суммы подпространств $V_1$ и $V_2$ равна сумме размерностей каждого из этих подпространств:

$$\dim\left(\mathrm{V}_1 \oplus V_2\right) = \dim V_1 + \dim V_2 .$$

(Подсказка: рассмотрите пространство $V = V_1 \oplus V_2$ и какие-либо базисы $E_1$ и $E_2$ подпространств $V_1$ и $V_2$ соответственно, после чего воспользуйтесь первым утверждением леммы 3.)

Вопрос. Что можно сказать о размерностях подпространств $V_1$, $V_2$ и $V_1+V_2$, если сумма не является прямой? (Ответ: $\dim(V_1+V_2)<\dim V_1+\dim V_2$.)

Следующее очень полезное утверждение позволяет рассматривать любое подпространство как одно из двух подпространств, в прямую сумму которых распадается все пространство.

Теорема 8. Пусть $V_1$ – какое-либо подпространство векторного пространства $V$. Тогда найдется подпространство $V_2$, такое что $V=V_1\oplus V_2$. Подпространство $V_2$ называют *дополнительным к подпространству* $V_1$.

◄ Пусть $E_1$ – какой-нибудь базис в подпространстве $V_1$. Дополним его до базиса $E$ всего пространства, например, с помощью алгоритма построения базиса векторного пространства. Пусть $E_2$ – совокупность добавленных в этом процессе векторов. Тогда по второму утверждению леммы 3 пространство $V$ является прямой суммой подпространства $V_1$ и подпространства $V_2$, являющегося линейной оболочкой векторов из $E_2$. ►

Задание. Докажите, что размерность подпространства, отличного от всего пространства, строго меньше размерности пространства. (Подсказка: примените теорему 7 к прямой сумме рассматриваемого подпространства и дополнительного к нему подпространства.)

Первое утверждение, сформулированное в лемме 2, дает практический способ нахождения проекций любого вектора из прямой суммы $V=V_1\oplus V_2$ на подпространства $V_1$ и $V_2$. Действительно, согласно этому утверждению можно выбрать специальный базис, одна часть которого $E_1$ является базисом первого подпространства, а вторая $E_2$ – второго. Разложим заданный вектор по этому базису. Тогда сумма проекций на вектора из $E_1$ даст проекцию на подпространство $V_1$, а сумма проекций вектора из $E_2$ – проекцию на $V_2$.

Пример. В декартовом пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим плоскость $XY$ и ось $Z$ как векторные подпространства. Их прямая сумма совпадает со всем пространством. Найдем проекции на эти подпространства произвольного вектора $\mathbf{v}=(x,y,z)$. Легко подобрать нужный базис, о котором идет речь в первом утверждении леммы 2. Подходит, например, канонический базис: $\mathbf{e}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$, первые два элемента которого являются базисом плоскости $XY$, а третий – оси $Z$. Разложение вектора $\mathbf{v}$ по этому базису имеет вид $\mathbf{v}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3=(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2)+(z\mathbf{e}_3)$. Вектор в первой скобке является проекцией на плоскость $XY$, а во торой – на ось $Z$. Итак, нужное разложение – $(x,y,z)=(x,y,0)+(0,0,z)$.

Нужно отметить, что в случае подпространств более общего положения, не говоря о случае большей размерности, вычисления становятся весьма громоздкими. В следующем параграфе для частного случая ортогональных подпространств будет предложен более эффективный прием.

## Дополнение 1

Ответы к заданию 1.

1. Ответ: нет. Пусть в линейном пространстве имеются два нуля $\mathbf{0_1}$ и $\mathbf{0_2}$. Рассмотрим выражение $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2$. По определению нуля векторного пространства (см. п. 7 определения 1) $\mathbf{x}+\mathbf{0_2}=\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$. В частности, $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0_1}$. Аналогично, $\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$. Благодаря коммутативности сложения (п. 1 определения 1) из этих двух равенств следует $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$.
2. Ответ: нет. Докажите это самостоятельно, рассмотрев выражение $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})_1+(-\mathbf{x})_2$, где $(-\mathbf{x})_1$ и $(-\mathbf{x})_2$ – два вектора, противоположных вектору $\mathbf{x}$.
3. $0\mathbf{x}=0\mathbf{x}+\mathbf{0}=0\mathbf{x}+\mathbf{x}-\mathbf{x}=0\mathbf{x}+1\mathbf{x}-\mathbf{x}=(0+1)\mathbf{x}-\mathbf{x}=1\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
4. Определите, какие аксиомы линейного пространства были использованы в приведенной цепочке равенств.
5. $\mathbf{x}+(\text{-}1)\mathbf{x}=1\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}=(1-1)\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
6. Какие аксиомы и предыдущие результаты здесь использованы?
7. $\lambda\mathbf{0}=\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}+\lambda(-\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}+\lambda(-1)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+(-\lambda)\mathbf{x}=(\lambda-\lambda)\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
8. Ответьте на тот же вопрос, что и в предыдущем пункте
9. Пусть $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Требуется доказать, что если $\lambda\neq 0$, то $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Докажите это самостоятельно, умножив обе части равенства на $\lambda^{-1}$.

## Дополнение 2

Лемма 4. Пусть векторное пространство $V$ распадается в прямую сумму своих подпространств $U$ и $W$, и $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,...,\mathbf{f}_n\}$ – базис этого пространства. Тогда проекции векторов базиса на подпространств $U$ образуют в этом подпространстве полную систему векторов, обязательно являющуюся линейно зависимой. То же , конечно, верно для проекций на подпространство $U$ .

◄ Для каждого базисного вектора $\mathbf{e}_i$ обозначим через $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{w}_i$ его проекции на подпространства $U$ и $W$ соответственно. Пусть $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{f}_1+\alpha_2\mathbf{f}_2+...+\alpha_n\mathbf{f}_n$ – произвольный не равный нулю вектор. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=\alpha_1(\mathbf{u}_1+\mathbf{w}_1)+\alpha_2(\mathbf{u}_2+\mathbf{w}_2)+...+\alpha_n(\mathbf{u}_n+\mathbf{w}_n)=\\&=(\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+...+\alpha_n\mathbf{u}_n)+(\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2+...+\alpha_n\mathbf{w}_n)\end{aligned}.$$

Это – разложение вектора $\mathbf{x}$ в сумму проекций на подпространства $U$ и $W$, где выражение в первой скобке является проекцией вектора $\mathbf{x}$ на $U$ , а во второй – на $W$ . При этом среди коэффициентов $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ найдутся отличные от нуля.

Пусть теперь $\mathbf{x}$ принадлежит подпространству $U$ . Разложение его в сумму проекций очевидно: $\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}$. Сравнивая эти два разложения, получим в силу единственности (см. теорему 6):

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+...+\alpha_n\mathbf{u}_n \text{ и } \mathbf{0}=\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2+...+\alpha_n\mathbf{w}_n.$$

Первое из этих равенств означает полноту системы проекций базисных векторов на подпространство $U$ в этом подпространстве, а второе – линейную зависимость системы проекций базиса на подпространство $W$. Так как подпространства $U$ и $W$ входят в условия леммы симметрично, то обе системы проекций обладают полнотой и являются линейно зависимыми. ►

Доказательство теоремы 4 о равенстве рангов всех базисов одного и того же векторного пространства.

◄ Утверждение теоремы 4 очевидно, если в пространстве $V$ есть базис, состоящий из одного вектора $\mathbf{e}$. Действительно, в этом случае любые два не равные нулю векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ могут быть представлены в виде $\mathbf{f}_1 = a_1\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}_2 = a_2\mathbf{e}$ с ненулевыми коэффициентами $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Это означает, что любой из этих векторов может быть выражен через другой, то есть любая система векторов, имеющая более одного вектора, является линейно зависимой и, следовательно, не может быть базисом.

Общий случай может быть сведен к уже рассмотренному следующим рассуждением. Пусть в пространстве существуют два базиса разного ранга: $E_n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $F_m = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$, причем для определенности положим $n > m$. Разобьем пространство $V$ в прямую сумму подпространств $U$ и $W$, первое из которых является линейной оболочкой первых $n-1$ векторов $E_{n-1} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_{n-1}\}$, а второе – оставшегося вектора $\mathbf{e}_n$ (см. второе утверждение леммы 3).

Рассмотрим систему, состоящую из проекций на $U$ векторов базиса $F_m$. Согласно лемме 4 это полная линейно зависимая система в подпространстве $U$. Поэтому (см. первое утверждение теоремы 1), отбрасывая некоторые из элементов этой системы, можно получить базис $F_{m_1}$ подпространства $U$ ранга $m_1$, причем $m_1 \le m-1 < n-1$. Кроме того в подпространстве $U$ имеется базис $E_{n-1}$ ранга $n-1$. Таким образом в подпространстве $U$ повторяется та же ситуация, что и в исходном пространстве $V$. А именно, существуют два базиса разной размерности, но в отличие от предыдущего ранг большего из этих базисов стал на единицу меньше.

Повторяя это рассуждение достаточное количество раз, придем к случаю, уже рассмотренному в начале доказательства, когда в пространстве имеется базис ранга 1. ►

# § 2. Евклидовы пространства

Евклидовы пространства это конечномерные векторные пространства с дополнительной операцией скалярного произведения векторов. Скалярное произведение позволяет ввести в векторных пространствах геометрические понятия длины, угла, объема.

## 1. Скалярное произведение.

О п р е д е л е н и е 1. *Скалярным произведением* называется операция в векторном пространстве $V$, которая сопоставляет каждой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ некоторое число, обозначаемое через $\mathbf{xy}$. Эта операция должна удовлетворять следующим требованиям:

1. $\mathbf{xy}=\mathbf{yx}$ (коммутативность)
2. $(\lambda\mathbf{x})\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{xy})$
3. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z}=\mathbf{xz}+\mathbf{yz}$ (дистрибутивность)
4. $\mathbf{xx}\geq\mathbf{0}$, причем равенство возможно только при $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Векторное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым*

З а д а н и е . Докажите, что нуль векторного пространства обладает свойством: $\mathbf{0x}=0$ для всех векторов $\mathbf{x}$ векторного пространства. (Подсказка: воспользуйтесь свойством 2.)

З а д а н и е 1. Проверьте, что любое подпространство евклидова пространства, рассматриваемое как векторное пространство, является евклидовым с тем же скалярным произведением, что и у всего пространства.

П р и м е р 1.

В пространстве геометрических векторов определим скалярное произведение формулой $\mathbf{xy}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\varphi$, где знак модуля означает длину соответствующего вектора, а $\varphi$ – угол между этими векторами.

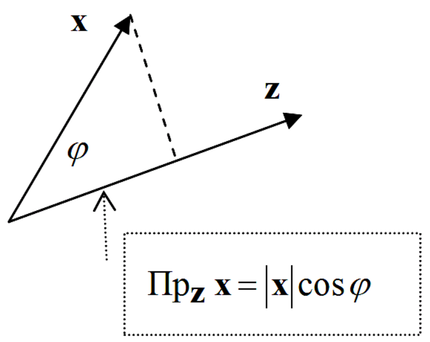



Рис. 1

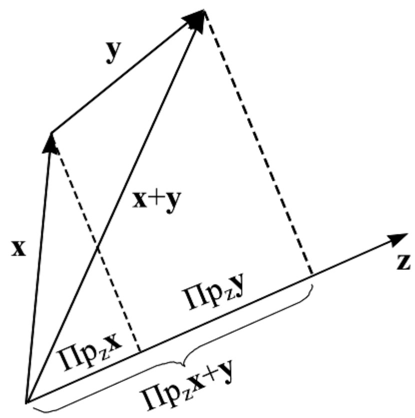



Рис. 2

Свойства 1, 2 и 4 легко проверяются. Свойство 3 представляет собой геометрическую теорему.

Доказательство свойства 3.

◀ Обозначим через $\text{Пр}_{\mathbf{z}}\,\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\cos\varphi$ ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x}$ на прямую, задаваемую вектором $\mathbf{z}$ (см. рис. 1). При этом, очевидно, $\mathbf{xz} = \text{Пр}_{\mathbf{z}}\,\mathbf{x}\cdot|\mathbf{z}|$.

При сложении векторов, как это следует из рис. 2, их проекции тоже складываются, то есть

$$\text{Пр}_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \text{Пр}_{\mathbf{z}}\,\mathbf{x} + \text{Пр}_{\mathbf{z}}\,\mathbf{y}.$$

Умножая это равенство на $|\mathbf{z}|$, получим требуемое свойство 3. ▶

Пример 2.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, x, ..., x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ следующим образом:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Задание. Самостоятельно проверьте, что все требования определения 1 выполнены.

В пространстве геометрических векторов такие геометрические понятия, как длина и угол, выражаются через скалярное произведение. Действительно,

$$\mathbf{xx} = |\mathbf{x}||\mathbf{x}|\cos 0 = |\mathbf{x}|^2;\ \ \mathbf{xy} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\varphi,$$

и, следовательно,

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{xx}}, \tag{4}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}. \tag{5}$$

Эти формулы позволяют ввести понятия длины вектора и угла между векторами в любом евклидовом пространстве. Для этого нужно просто принять формулы (4) и (5) в качестве определений этих понятий.

Определение 2. В произвольном евклидовом пространстве длиной вектора $\mathbf{x}$ называется величина $|\mathbf{x}|$, определенная формулой (4), а углом $\varphi$ между двумя векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – величина, определенная формулой (5).

Таким образом скалярное произведение, позволяющее определить длины векторов и углы между ними, задает *геометрию евклидового пространства*. Под этим понимается, что в евклидовом пространстве можно формулировать и доказывать утверждения, аналогичные теоремам геометрии. Примеры таких теорем, показывающих, что понятия длины и угла в евклидовых пространствах обладают привычными геометрическими свойствами, приведены ниже. Предварительно нужно проверить, что определение угла между векторами корректно, то есть аргумент арккосинуса в формуле (5), всегда по модулю меньше единицы.

Заметьте, что далее мы не ограничиваемся пространством геометрических векторов, а рассматриваем произвольное евклидово пространство.

Естественно говорить, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ *ортогональны* (или *перпендикулярны*), если $\mathbf{xy} = 0$, то есть если угол между ними согласно формуле (5) равен $\pi/2$.

Начнем с проверки корректности формулы (5).

Неравенство Коши-Буняковского. Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выполнено неравенство

$$|\mathbf{xy}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

◀ Можно считать, что $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$, иначе в обеих частях неравенства стоят нули, и тогда оно выполнено.

Выберем число $\alpha$ так, чтобы вектор $\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}$ был ортогонален вектору $\mathbf{y}$, или в терминах скалярного произведения, чтобы было выполнено равенство $(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y})\mathbf{y}=0$ (см. рис. 3).

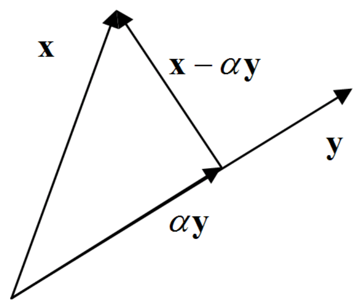



Рис. 3.

Это возможно, так как число $\alpha$ можно просто найти из этого условия. А именно, раскрыв скобки (свойство 3 определения 1), получим равенство $\mathbf{xy}-\alpha|\mathbf{y}|^2=\mathbf{0}$, откуда $\alpha=\dfrac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{y}|^2}$.

Вектор $\alpha\mathbf{y}$ естественно назвать *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на прямую, задаваемую вектором $\mathbf{y}$ (см. рис. 3). По аксиоме 4 определения 1 $(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y})(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}) \ge 0$. Поэтому, раскрыв скобки, найдем:

$$|\mathbf{x}|^2 - 2\alpha\mathbf{xy} + \alpha^2|\mathbf{y}|^2 \ge 0.$$

Подставим теперь в это неравенство выражение для $\alpha$. После очевидных сокращений и приведения подобных членов получим:

$$|\mathbf{x}|^2 - \frac{(\mathbf{xy})^2}{|\mathbf{y}|^2} \ge 0, \text{ или } (\mathbf{xy})^2 \le |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2.$$

Это и есть неравенство Коши-Буняковского.▶

Неравенство треугольника. Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выполнено неравенство $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$.Иначе говоря, длина любой стороны треугольника (см. рис. 4) меньше суммы длин двух других сторон.

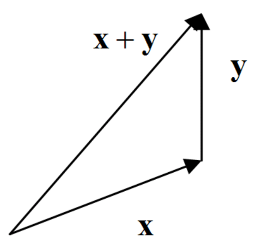



Рис. 4.

◀ Оценим длину вектора $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ (см. рис. 4), воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского:

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{xy} + |\mathbf{y}|^2 \le \\ \le |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, получим требуемое неравенство. ▶

В о п р о с . В каком случае в неравенстве Коши-Буняковского и неравенстве треугольника достигается знак равенства? (Ответ: когда $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{y}$ для некоторого числа $\alpha$. Иначе говоря, когда совокупность векторов $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ линейно зависима.)

З а д а н и е . Напишите неравенство Коши-Буняковского для двух векторов $\mathbf{x}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_1)$ и $\mathbf{y}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ из пространства $\mathbb{R}^n$. Это неравенство выглядит довольно мудрено даже при $n=3$.

Т е о р е м а П и ф а г о р а . Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, то $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2$. В геометрической терминологии – квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

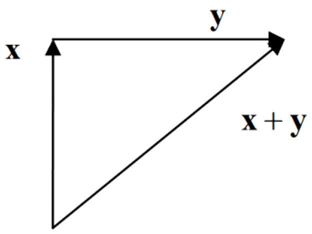



Рис. 5

◀Так как по условию $\mathbf{xy}=0$, то

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y})=|\mathbf{x}|^2+2\mathbf{xy}+|\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2.$$

(См. рис. 5.)

З а м е ч а н и е . Рассмотрим тривиальное равенство $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2+2\mathbf{xy}+|\mathbf{y}|^2$, которое встречалось выше при доказательствах неравенства треугольника и теоремы Пифагора. Если рассматривать его в пространстве геометрических векторов, то оно представляет собой «теорему косинусов»:

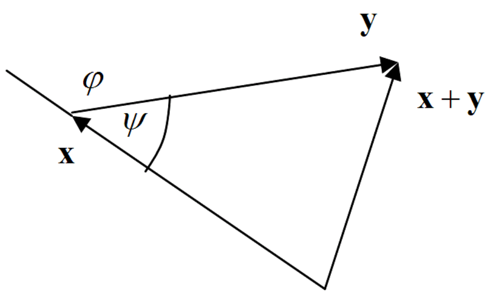



Рис. 6

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2-2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\psi+|\mathbf{y}|^2.$$

Здесь $\psi$ – внутренний угол треугольника, дополнительный к углу $\varphi$ – углу между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (см. рис 6.). Так что $\cos\varphi=-\cos\psi$.

В школьном курсе геометрии эта теорема доказывается с помощью довольно сложных построений.

## 2. Ортогональные базисы

О п р е д е л е н и е 3 . Система векторов $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_k\}$ называется *ортогональной*, если все входящие в нее векторы попарно ортогональны: $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=0$ при $i\neq j$. Система называется *нормированной*, если длины всех ее векторов равны единице: $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=1$ при $i=j$ . Если система обладает двумя этими свойствами, ее называют *ортонормированной.*

Т е о р е м а 1 . Любая ортогональная система, не содержащая нулевых векторов, линейно независима.

◀ Пусть линейная комбинация векторов ортогональной системы $E = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k\}$ равна нулю:

$$\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_k\mathbf{e}_k = 0.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на произвольный вектор $\mathbf{e}_s$, принадлежащий системе $E$. В силу ее ортогональности получим: $\alpha_s\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s = 0$, и так как по условию $\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s \neq 0$, то $\alpha_s = 0$.

Таким образом, все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, и по лемме 1 § 1 система $E$ линейно независима. ▶

Среди базисов евклидового пространства наиболее удобны *ортонормированные базисы* то есть базисы, представляющие собой ортонормированную систему. Например, очень просто найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в таком базисе, хотя в случае произвольного базиса (см. задние 2 § 1) для этого нужно решить систему $n$ линейных уравнений, где $n$ – размерность пространства. ,

Действительно, пусть $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ – ортонормированный базис, и

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Умножим обе части этого равенства на базисный вектор $\mathbf{e}_s$. По свойству ортогональности получим $\mathbf{x}\mathbf{e}_s = \alpha_s\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s$. Так как базис нормирован, то $\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s = 1$ и, следовательно, $\alpha_s = \mathbf{x}\mathbf{e}_s$.

Итак, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2 . Разложение вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе имеет вид

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}\mathbf{e_1})\mathbf{e_1} + (\mathbf{x}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\mathbf{x}\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$$

П р и м е р ы . Убедитесь сами, что

1. в пространстве геометрических векторов ортонормированным базисом является любая тройка взаимно перпендикулярных векторов единичной длины. Такой базис часто называют ортонормированным репером.
2. в пространстве $\mathbb{R}^n$ канонический базис $\{(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)\}$ является ортонормированным

З а д а н и е . Проверьте, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ базис, состоящий из векторов $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ и $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, является ортонормированным, и разложите в этом базисе произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Следующая теорема несмотря на свою простоту является основополагающей.

Т е о р е м а 3 . Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют в некотором ортонормированном базисе координаты $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ соответственно, то

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_n\beta_n.$$

З а д а н и е . Проверьте это самостоятельно.

В а ж н о е с л е д с т в и е . Из теоремы 3 следует, что наличие в евклидовом пространстве $V$ ортонормированного базиса ранга $n$ фактически сводит это пространство к евклидовому пространству $\mathbb{R}^n$. Действительно, в силу теоремы 3 скалярное произведение векторов из $V$ можно вычислить с помощью наборов отвечающих им координат в ортонормированном базисе. Причем по тому же правилу, что и в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это означает, что любое утверждение для пространства $V$, которое можно вывести из аксиом евклидового пространства, достаточно доказать в пространстве $\mathbb{R}^n$. Благодаря теореме 3 утверждение оказывается верным в каждом евклидовом пространстве, имеющем ортонормированный базис ранга $n$.

Таким образом, если некоторое утверждение, сформулированное в терминах скалярного произведения, доказано в каком-либо евклидовом пространстве с ортонормированным базисом ранга $n$, то оно справедливо и в любом другом евклидовом пространстве с ортонормированным базисом того же ранга. В этом случае говорят, что такие евклидовы пространства *изоморфны*. Свойство изоморфности евклидовых пространств устанавливается тем же изоморфизмом, что и свойство изоморфности векторных пространств (см определение 4 § 1), но при условии, что базисы, зафиксированные в этих пространствах, являются ортонормированными. В этом случае изоморфизм векторных пространств называется *изоморфизмом евклидовых пространств*.

В связи с этим возникает вопрос, имеет ли каждое евклидово пространство ортонормированный базис. Ответ на это дает следующая теорема.

Т е о р е м а 4 . В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Л е м м а 1 . Если $E_k = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k\}$ – неполная ортонормированная система векторов, то можно указать единичный вектор $\mathbf{e}_{k+1}$, ортогональный всем векторам этой системы.

◄ Произвольно выберем вектор $\mathbf{x}$, не принадлежащий линейной оболочке $L\{E_k\}$. Непосредственным вычислением легко убедиться, что вектор

$$\mathbf{h} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{x}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 - ... - (\mathbf{x}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k, \tag{6}$$

ортогонален всем векторам системы $E_k$. Этот вектор не равен нулю, так как в противном случае из равенства (6) следовало бы, что вектор $\mathbf{x}$ принадлежит линейной оболочке $L\{E_k\}$.

Остается положить $\mathbf{e}_{k+1} = \dfrac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$. ►

◄ Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4 основано на алгоритме, который называется *процессом Грама-Шмидта*. Этот процесс почти полностью совпадает с алгоритмом, приведенным в предыдущем параграфе, для построения базиса векторного пространства. Единственное отличие заключается в том, что каждый раз к уже построенной системе векторов добавляется не произвольный вектор, лежащий вне линейной оболочки этой системы, а вектор единичной длины, ортогональный ко всем векторам системы.

Алгоритм построения ортонормированного базиса евклидова пространства.

1. Произвольно выберем единичный вектор $\mathbf{e}_1$.Если система $\{\mathbf{e}_1\}$ полна, то процесс завершен – эта система представляет собой ортонормированный базис. Если нет, переходим к следующему пункту.
2. Произвольно выберем единичный вектор $\mathbf{e}_2$, ортогональный вектору $\mathbf{e}_1$ (что возможно благодаря лемме 1), и рассмотрим систему $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Снова проверяем, полна ли она. Если да, процесс завершен. Иначе переходим к следующему пункту.
3. …и так далее каждый раз добавляем единичный вектор, ортогональный ко всем уже построенным векторам, и проверяем полноту полученной системы. В силу конечномерности векторного пространства это процесс закончится на конечном шаге. ►

Важный вывод. Из теоремы 4 вытекает теперь следующее утверждение.

Теорема 5. Все евклидовы пространства одной и той же размерности евклидово изоморфны.

Пример применения теоремы 5.

Покажем, что неравенства Коши-Буняковского, неравенство треугольника и теорему Пифагора, доказанные в начале параграфа для произвольного евклидового пространства, можно было вообще не доказывать.

Действительно, в формулировках этих теорем участвуют всего два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (и некоторые их линейные комбинации). Поэтому все рассматриваемые утверждения относятся к двумерному подпространству, натянутому на эти вектора. Легко проверить, что любое подпространство евклидового пространства является евклидовым пространством (см. задание 1). Из теоремы 5 следует, что указанные утверждения достаточно доказать в каком-либо двумерном евклидовом пространстве. Например, в пространстве геометрических векторов на плоскости. Но для плоскости эти результаты уже получены в школьном курсе геометрии.

Можно пойти гораздо дальше. Ведь для длин и углов, определенных в случае абстрактных евклидовых пространств формулами (4) и (5), не были доказаны ни геометрические теоремы, например, о сумме углов треугольника, ни тригонометрические формулы, например, для косинуса суммы двух углов. Все утверждения такого рода, сводящиеся к геометрическим или стереометрическим задачам, в силу теоремы 5 автоматически переносятся на произвольные евклидовы пространства. Поэтому главные трудности, которые возникают при изучении евклидовых пространств, связаны с существенно многомерными задачами, то есть такими, что их нельзя сформулировать в терминах пространства размерности два или три.

Задание. Пользуясь процессом Грамма-Шмидта, постройте ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, первым вектором которого является вектор $\mathbf{e}_1 = {}^{1}\!/\!_{\sqrt{3}}(1,1,1)$. (Указание: для нахождения вектора, ортогонального к уже построенным, пользуйтесь формулой (6).)

## 3. Ортогональная проекция и ортогональные дополнения

Говорят, что вектор $\mathbf{z}$ *ортогонален подпространству* $U$, если $\mathbf{z}$ ортогонален любому вектору из этого подпространства.

Задание. В силу теоремы 4 в любом подпространстве $U$ евклидового пространства $V$ существует ортонормированный базис. Покажите, что вектор $\mathbf{z}$ *ортогонален* подпространству $U$ тогда и только тогда, когда он ортогонален каждому вектору этого базиса. Из леммы 1 тогда будет вытекать следующее фундаментальное утверждение.

Теорема 6. Для каждого подпространства, не совпадающего со всем пространством, найдется ненулевой ортогональный ему вектор.

Говорят, что подпространство $W$ *ортогонально подпространству* $U$, если каждый вектор из $W$ ортогонален $U$.

Задание.

1. Покажите, что в этом случае подпространство $U$ ортогонально подпространству $W$. Так что эти подпространства *взаимно ортогональны*.
2. Докажите, что общим вектором взаимно ортогональных подпространств является только нуль. Поэтому *сумма взаимно ортогональных подпространств всегда прямая.* (Подсказка: общий вектор взаимно ортогональных подпространств ортогонален сам себе.)

Определение 3. *Ортогональным дополнением подпространства* $U$ евклидового пространства $V$ называется совокупность $U_\perp$ всех векторов, ортогональных этому подпространству.

Пример. Рассмотрим декартово пространство $\mathbb{R}^3$, то есть трехмерное пространство с системой декартовых координат $X$, $Y$ и $Z$. Тогда ортогональным дополнением оси $X$ является плоскость $YZ$, то есть $X_\perp = YZ$. Ортогональным дополнением этой плоскости является ось $X$, то есть $YZ_\perp = X$.

Задание.

1. Докажите, что ортогональное дополнение любого подпространства $U$ является подпространством. Проверьте, что $U$ и $U_\perp$ взаимно ортогональны.
2. Найдите в пространстве $\mathbb{R}^3$ ортогональное дополнение подпространства, натянутого на вектор $\mathbf{v} = (1,1,1)$. (Подсказка: обозначьте через $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, произвольный вектор, лежащий в искомом ортогональном дополнении, и запишите в координатной форме его характеристическое свойство: $\mathbf{xv} = \mathbf{0}$. Из полученного равенства выразите, например, координату $x_3 = f(x_1, x_2)$. Тогда все векторы ортогонального дополнения будут иметь вид $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$.)

Следующее утверждение об ортогональных дополнениях является основным.

Т е о р е м а 7 . Прямая сумма $U \oplus U_{\perp}$ подпространства $U$ и его ортогонального дополнения $U_{\perp}$ совпадает со всем пространством $V$.

◀ Если предположить, что прямая сумма $U \oplus U_{\perp}$ не совпадает со всем пространством, то по теореме 6 найдется отличный от нуля вектор $\mathbf{z}$, ортогональный этому подпространству. В частности, вектор $\mathbf{z}$ ортогонален и подпространству $U$, и подпространству $U_{\perp}$. Из первого следует, что $\mathbf{z}$ принадлежит подпространству $U_{\perp}$ как ортогональному дополнению $U$, а из второго, – что он в этом случае ортогонален сам себе. То есть $\mathbf{zz} = 0$, что возможно только при $\mathbf{z} = 0$. ▶

С л е д с т в и е 1 . Сумма размерностей любого подпространства $U$ и его ортогонального дополнения $U_{\perp}$ равна размерности всего пространства.

◀ Это вытекает из предыдущей теоремы и теоремы 7 § 1. ▶

С л е д с т в и е 2 . Пусть $\mathbf{a}$ – какой-либо вектор евклидова пространства $V$, имеющего размерность $n$. Тогда совокупность $U$ всех векторов, ортогональных вектору $\mathbf{a}$, образует подпространство размерности $n-1$.

Наоборот, если $U$ – подпространство размерности $n-1$, то существует единственный (с точностью до числового множителя) вектор $\mathbf{a}$, ортогональный подпространству $U$.

◀ Совокупность $U$ всех векторов, ортогональных вектору $\mathbf{a}$, очевидно является ортогональным дополнением одномерного подпространства, натянутого на вектор $\mathbf{a}$. Поэтому $U$ – подпространство, имеющее в силу следствия 1 размерность $n-1$.

Если $U$ – подпространство размерности $n-1$, то его ортогональное дополнение одномерно. Поэтому все ортогональные $U$ векторы пропорциональны друг другу. ▶

С л е д с т в и е 3 . Пусть $U$ – подпространство евклидового пространства $V$. Тогда каждый вектор $\mathbf{x}$ пространства $V$ единственным образом может быть представлен в виде суммы:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}, \tag{7}$$

где вектор $\mathbf{x}_0$ принадлежит подпространству $U$, а вектор $\mathbf{h}$ ортогонален этому подпространству. Вектор $\mathbf{x}_0$ называется (см. рис. 7) *ортогональной проекцией вектора* $\mathbf{x}$ *на подпространство* $U$, а вектор $\mathbf{h}$ – его *ортогональной* (*подпространству* $U$) *составляющей*.

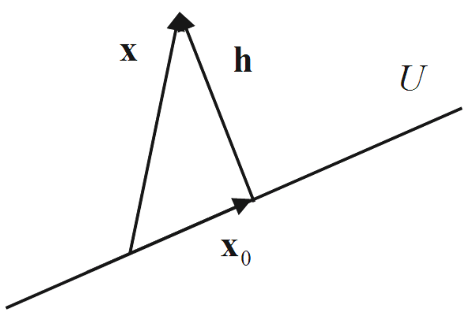



Рис. 7

Если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k\}$ – ортонормированный базис подпространства $U$, то ортогональную проекцию можно вычислить по формуле

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{x}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + ... + (\mathbf{x}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k. \tag{8}$$

◀ Представление (7) – это не что иное, как представление вектора $\mathbf{x}$ в виде суммы проекций на подпространства $U$ и $U_{\perp}$, соответствующие прямой сумме $U \oplus U_{\perp}$. Формула (8) – это разложение проекции $\mathbf{x}_0$ на подпространство $U$ по ортонормированному базису этого подпространства. ►

З а д а н и е . Найдите ортогональную проекцию произвольного вектора $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ из пространства $\mathbb{R}^3$ на подпространство $U$, натянутое на векторы (1,1,1) и (1,-1,0). (Подсказка: постройте ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ в подпространстве $U$ и воспользуйтесь формулой (8).)

Ортогональная проекция обладает естественным геометрическим свойством: перпендикуляр есть кратчайшее расстояние от точки до подпространства. Предварительно условимся о следующем.

О п р е д е л е н и е 4 *Расстоянием между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ будем называть длину вектора их разности, то есть величину $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$. В частности, длина любого вектора $\mathbf{x}$ является его расстоянием до нуля $\mathbf{0}$ векторного пространства.

Т е о р е м а 8 . Пусть $\mathbf{x}$ произвольный вектор, а вектор $\mathbf{y}$ лежит в подпространстве $U$. Тогда расстояние от $\mathbf{x}$ до $\mathbf{y}$, то есть длина вектора $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, является наименьшей, если вектор $\mathbf{y}$ равен проекции $\mathbf{x}_0$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $U$. В связи с этим длину вектора $\mathbf{h}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ называют *расстоянием от вектора* $\mathbf{x}$ *до подпространства* $U$.

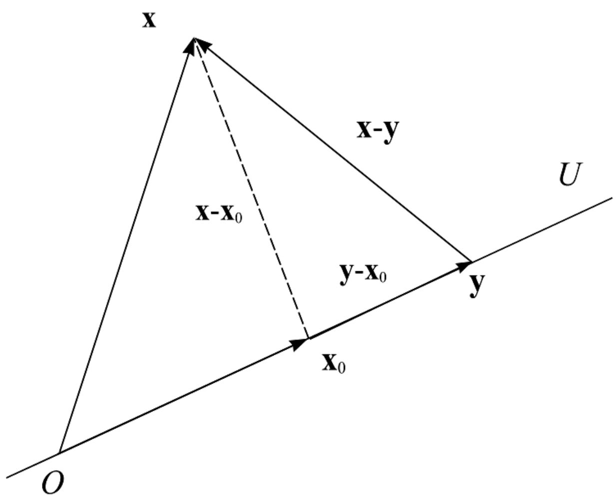



Рис. 8

◄Рассмотрим прямоугольный треугольник, с вершинами $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}$, то есть треугольник, образуемый (см. рис. 8) векторами $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_0-\mathbf{y}$ как сторонами. На языке векторной алгебры это означает, что имеет место равенство $\mathbf{x}-\mathbf{y}=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+(\mathbf{x}_0-\mathbf{y})$, причем $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0-\mathbf{y})=0$.

По теореме Пифагора

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+(\mathbf{x}_0-\mathbf{y})|^2=|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2+|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0|^2.$$

Отсюда следует, что $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2\geq|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2$, причем равенство достигается только при $\mathbf{y}=\mathbf{x}_0$. ►

В условия основной теоремы 7 подпространства $U$ и его ортогональное дополнение $U_\perp$ входят несимметрично в том смысле, что второе подпространство определяется через первое. Оказывается, что на самом деле имеет место полная симметрия.

З а д а н и е . Докажите, что ортогональное дополнение $(U_\perp)_\perp$ ортогонального дополнения $U_\perp$ совпадает с исходным подпространством $U$. Таким образом подпространства $U$ и $U_\perp$ являются *взаимно дополнительными*. (Подсказка: заметьте, что подпространство $U$, являющееся ортогональным своему ортогональному дополнению $U_\perp$, целиком лежит в подпространства $(U_\perp)_\perp$. После чего воспользуйтесь следствием 1, показывающим, что размерности подпространств $U$ и $(U_\perp)_\perp$ совпадают.)

## 4. Координатный метод и решение простых геометрических задач

Для решения геометрических задач методами векторной алгебры принципиально важным является введение в пространство декартовой системы координат. Наиболее употребительна *прямоугольная декартова система координат*, оси которой $X$, $Y$ и $Z$ перпендикулярны друг другу (см. рис. 9).

Введение какой-либо системы координат (в частности, декартовой) является одной из основных идеей *аналитической геометрии*, которая позволяет аналитическими (то есть алгебраическими) методами решать геометрические задачи. Эта идея заключается в том, что положение точки в пространстве можно описать с помощью набора из трех чисел – координат этой точки. Более подробно методы аналитической геометрии рассмотрены в § § 7-9.

В качестве примера приведем простейшую геометрическую задачу, формулировка которой уже предполагает, что в пространстве имеется декартова система координат.

Г е о м е т р и ч е с к а я  з а д а ч а 1 . Найти расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

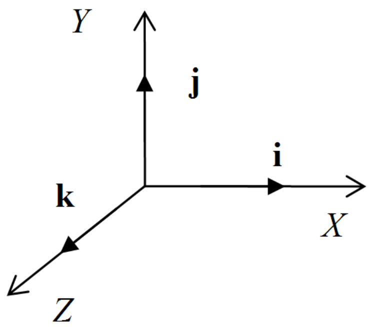



Рис. 9

В этой задаче положения точек $M_1$ и $M_2$ заданы их декартовыми координатами. Ее решение, как и решения других задач, приведенных ниже, основывается на простом геометрическом факте.

Рассмотрим пространство геометрических векторов, откладываемых от центра $O$, который помещен в начало координат. Выберем ортонормированный базис, векторы которого направлены вдоль осей. Этот базис называется *декартовым базисом*. Для его векторов употребляются специальные обозначения. Вектор, направленный вдоль оси $X$, обозначают символом $\mathbf{i}$, вдоль оси $Y$ – $\mathbf{j}$, и вдоль оси $Z$ – $\mathbf{k}$ (см. рис. 9).

Т е о р е м а 9 . Если точка $M$ в декартовом пространстве имеет координаты $(x, y, z)$, то указывающий на нее геометрический вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет в декартовом базисе те же координаты $(x, y, z)$.

◄ Согласно теореме 2 координату $\alpha$ вектора $\overrightarrow{OM}$, соответствующую базисному вектору $\mathbf{i}$, можно вычислить по формуле $\alpha = \overrightarrow{OM}\,\mathbf{i}$. Поэтому, пользуясь определением скалярного произведение в пространстве геометрических векторов, найдем:

$$\alpha = \overrightarrow{OM}\,\mathbf{i} = |\overrightarrow{OM}||\,\mathbf{i}\,|\cos\varphi_X = |\overrightarrow{OM}|\cos\varphi_X ,$$

где $|\overrightarrow{OM}|$ – длина вектора $\overrightarrow{OM}$, а $\varphi_X$ – угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью $X$.

Другими словами, $\alpha$ – длина ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось $X$ или, что то же самое, декартова координата $x$ точки $M$.

Аналогично проверяется, что остальные координаты $\beta$ и $\gamma$, отвечающие базисным векторам $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, совпадают соответственно с декартовыми координатами $y$ и $z$ точки $M$. ►

З а м е ч а н и е. На алгебраическом языке теорема 9 означает, что отображение, сопоставляющее геометрическому вектору $\overrightarrow{OM}$ координаты точки $M$, является изоморфизмом между пространством геометрических векторов и декартовым пространством $\mathbb{R}^3$. Этот изоморфизм является изоморфизмом евклидовых пространств, так как переводит декартов базис пространства геометрических векторов в канонический базис пространства $\mathbb{R}^3$. То есть ортонормированный базис – в ортонормированный.

Р е ш е н и е  з а д а ч и  1. Рассмотрим геометрический вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, начинающийся в точке $M_1$ и заканчивающийся в точке $M_2$. По смыслу геометрических векторов расстояние между точками равно длине этого вектора. Последнюю можно найти по формуле (4):

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_2}} .$$

Чтобы вычислить скалярное произведение под знаком корня, перейдем к *координатной форме* этого соотношения. По только что доказанной теореме 9 $\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2)$ и тогда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Поэтому

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Хотя этот результат вряд ли покажется неожиданным, он демонстрирует сущность координатного метода, с помощью которого можно решать и более сложные задачи.

Г е о м е т р и ч е с к а я  з а д а ч а  2. Найти все углы треугольника с вершинами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Р е ш е н и е. Найдем только один угол при вершине $M_1$. Остальные углы найдите самостоятельно.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Угол между ними и есть искомый угол. Поэтому по формуле (5):

$$\varphi = \arccos \frac{\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} =$$

$$= \arccos \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

З а м е ч а н и е . Эту формулу, как и вообще формулы в координатном виде, ни в коем случае не следует запоминать. Производя конкретные вычисления, нужно помнить только общие формулы, в данном случае формулу (5).

Проанализируем решение задач 1 и 2. Первым делом они были переформулированы в терминах геометрических векторов. В задаче 1 расстояние между заданными точками было заменено длиной вектора, соединяющего эти точки. В задаче 2 угол между двумя сторонами треугольника был заменен углом между соответствующими векторами. Далее мы применили стандартный прием – в полученных соотношениях для длины вектора и величины угла, перешли к координатной форме.

Таким образом *геометрические векторы являются посредниками между геометрическими и алгебраическими соотношениями*. Хотя геометрические векторы не фигурируют ни в постановке рассмотренных задач, ни в их ответах, обращение к ним позволило найти расстояние между точками и величину угла треугольника исключительно с помощью алгебраических операций над числами.

*Описание геометрических соотношений в терминах геометрических векторов и последующий переход от векторных соотношений к их координатной форме представляют собой суть метода решения геометрических задач с помощью векторной алгебры.*

Отметим в этой схеме роль теоремы 9. Вообще переход к координатной форме можно осуществить, выбрав любой ортонормированный базис в пространстве геометрических векторов. Однако при этом возникает трудоемкая задача разложения заданного геометрического вектора по выбранному базису. Теорема 9 показывает, что использование ортонормированного базиса, согласованного с декартовой системой координат, делает эту задачу абсолютно простой. Ничего вычислять не нужно – координаты любого вектора $\overrightarrow{OM}$ в этом базисе совпадают с координатами точки $M$.

Рассмотрим еще две простых задачи, решение которых основано на применении методов векторной алгебры.

Г е о м е т р и ч е с к а я з а д а ч а 3 . Найти расстояние *d* между точкой $M_3(1,2,3)$ и прямой, проходящей через точки $M_1(2,1,3)$ и $M_2(3,1,2)$.

Р е ш е н и е . Чтобы воспользоваться теоремой 8, рассмотрим направленный вдоль прямой $M_1M_2$ единичный вектор

$$\mathbf{e_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),$$

и вектор

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{M_1M_3} = (-1,1,0).$$

Тогда проекция $\mathbf{x}_0$ вектора $\mathbf{x}$ на прямую $M_1M_2$, то есть на подпространство с ортонормированным базисом $\{\mathbf{e_1}\}$, по формуле (8) равна:

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{xe_1})\mathbf{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}((-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-1))\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \frac{1}{2}(-1,0,1).$$

Ортогональная составляющая вектора $\mathbf{x}$ равна:

$$\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (-1+\frac{1}{2}, 1-0, 0+\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Наконец, искомое расстояние $d$ совпадает с длиной вектора $\mathbf{h}$. То есть

$$d = |\mathbf{h}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

З а д а н и е . Найдите расстояние от точки $M_4(1,2,3)$ до плоскости, в которой лежат точки $M_1(2,3,1)$, $M_2(3,1,2)$ и $M_3(0,0,0)$.

Г е о м е т р и ч е с к а я   з а д а ч а 4 . Найти площадь параллелограмма, имеющего вершины в точках $O(0,0)$, $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Иначе говоря, – параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{f}_1 = (x_1,y_1)$ и $\mathbf{f}_2 = (x_2,y_2)$ как на сторонах.

Р е ш е н и е . Выберем в качестве основания параллелограмма вектор $\mathbf{f}_2$. Тогда высотой служит ортогональная к $\mathbf{f}_2$ составляющая вектора $\mathbf{f}_1$, то есть вектор $\mathbf{h} = \mathbf{f}_1 - \left(\mathbf{f}_1\frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}\right)\frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}$. Площадь параллелограмма $S$ равна произведению длин этих векторов. Поэтому найдем сначала длину вектора $\mathbf{h}$:

$$|\mathbf{h}|^2 = \mathbf{hh} = \left(\mathbf{f}_1 - \left(\mathbf{f}_1\frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}\right)\frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}\right)^2 = |\mathbf{f}_1|^2 - 2\left(\mathbf{f}_1\frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}\right)^2 + \left(\mathbf{f}_1\frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}\right)^2 = |\mathbf{f}_1|^2 - \left(\mathbf{f}_1\frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}\right)^2.$$

Теперь

$$S^2 = |\mathbf{h}|^2|\mathbf{f}_2|^2 = \left(|\mathbf{f}_1|^2 - \left(\mathbf{f}_1\frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|}\right)^2\right)|\mathbf{f}_2|^2 = |\mathbf{f}_1|^2|\mathbf{f}_2|^2 - (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2)^2.$$

После того, как выражение для $S^2$ найдено в наиболее простом векторном виде, перейдем к координатной форме: $S^2 = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2)^2$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим, что $S^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2$, или

$$S = |x_1y_2 - x_2y_1|.$$

З а м е ч а н и е . Формула для объема параллелепипеда, построенного на трех заданных векторах как на ребрах, также, как и ее вывод указанным выше способом, являются значительно более громоздкими. В § 4 формула для объема параллелепипеда будет получена с помощью универсального метода, позволяющего вычислять объемы даже в многомерных пространствах.

Рассмотренные здесь простые геометрические задачи можно решить и геометрическими методами, но векторная алгебра позволяет это сделать быстрее и, главное, в пространствах любой размерности.

Более сложные геометрические задачи будут решены в дальнейшем в § § 7-9.

# § 3. Линейные отображения

Линейные отображения являются самым простым классом отображений и потому очень широко используются во всех областях математики.

## 1. Основные определения

*Отображение* – синоним слова функция – употребляется в случаях, когда области определения и значения являются более общими структурами, чем числовая ось. Отображение означает закон или правило, по которому каждой точке одного множества сопоставляется точка другого множества. В нашем случае рассматриваются отображения одного векторного пространства $V$ в другое векторное пространство $W$. Тот факт, что $A$ является таким отображение, обозначают так: $A : V \to W$.

Определение 1. Отображение $A : V \to W$ одного векторного пространства в другое называется *линейным*, если выполнены следующие условия:

1. $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2)$ для любых векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ пространства $V$;
2. $A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x})$ для любого вектора $\mathbf{x}$ пространства $V$ и любого числа $\lambda$;

Чтобы подчеркнуть, что отображение линейное, вместо $A(\mathbf{x})$ пишут $A\mathbf{x}$.

Задание. Покажите, что $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Примеры 1.

1. В пространстве $V$ геометрических векторов рассмотрим отображение $A_\varphi : V \to V$, состоящее в повороте каждого вектора вокруг некоторой оси, проходящей через центр $O$, на угол $\varphi$.
2. Рассмотрим отображение $A_\Sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сопоставляющее точке $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ точку $\mathbf{y} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)$ пространства $\mathbb{R}$.
3. Пусть $P_n$ и $P_{n+1}$ – пространства многочленов степени не выше $n$ и $n+1$ соответственно. Рассмотрим отображение $A_x : P_n \to P_{n+1}$, состоящее в умножении каждого многочлена из пространства $P_n$ на независимую переменную $x$.
4. В произвольном векторном пространстве $V$, имеющем подпространство $U$, рассмотрим отображение $P : V \to U$, которое сопоставляет каждому вектору его ортогональную проекцию на $U$. Такое преобразование $P$ называется *ортогонально проектирующим преобразованием* (или, кратко, *ортопроектором*).
5. Изоморфизм векторных пространств $I : V \to W$ (см. § 1 определение 5).

Задание 1. Проверьте, что все эти отображения линейны. (Подсказка для примера 5: вернитесь к теореме 3 § 1.)

Определение 2. Множество значений отображения $A : V \to W$, то есть множество всех векторов $\mathbf{y}$, таких что $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ для некоторого вектора $\mathbf{x}$ из $V$, называется *образом* этого отображения и обозначается через $\operatorname{Im} A$.

Множество векторов $\mathbf{x}$, таких что $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, называется *ядром отображения* $A$ и обозначается через $\operatorname{Ker} A$.

З а д а н и е 2. Покажите, что $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ – подпространства векторных пространств $V$ и $W$ соответственно. Найдите эти подпространства для отображений из примеров 1 – 4.

Следующая простая теорема имеет огромное число приложений и показывает насколько линейные отображения проще всех остальных.

Т е о р е м а 1. Если $\mathbf{x}_0$ – решение уравнения $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$, то любое другое решение этого уравнения имеет вид $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{z}$, где $\mathbf{z}$ – вектор, принадлежащий ядру отображения $A$. Более того, любой вектор такого вида является решением уравнения $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$.

◄ Если $\mathbf{x}$ – решение, то $A\mathbf{z}=A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=A\mathbf{x}-A\mathbf{x}_0=\mathbf{y}-\mathbf{y}=\mathbf{0}$, и следовательно, вектор $\mathbf{z}$ принадлежит ядру. Наоборот, если вектор имеет вид $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{z}$, где $\mathbf{z}$ принадлежит ядру, то $A\mathbf{x}=A(\mathbf{x}_0+\mathbf{z})=A\mathbf{x}_0+A\mathbf{z}=\mathbf{y}+\mathbf{0}=\mathbf{y}$. ►

Т е о р е м а 2. Уравнение $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ имеет решение в том и только в том случае, если вектор $\mathbf{y}$ лежит в образе отображения $A$. Это решение единственно тогда и только тогда, когда ядро содержит только нуль: $\operatorname{Ker} A=\{\mathbf{0}\}$.

◄ Первое утверждение совпадает с определением образа отображения $A$, второе следует из теоремы 1. ►

О п р е д е л е н и е 3. Отображение $A\colon V\to W$ (не обязательно линейное) называется *взаимно однозначным*, если для каждого вектора $\mathbf{y}$ из $W$ найдется один и только один вектор $\mathbf{x}$ из $V$, такой что $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$. Другими словами, отображение $A$ взаимно однозначно, если уравнение $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ при любом $\mathbf{y}$ имеет единственное решение.

Из теоремы 2 сразу же вытекает следующий признак взаимной однозначности, сформулированный в терминах ядра и образа отображения.

Т е о р е м а 3. Линейное отображение $A\colon V\to W$ является взаимно однозначным в том и только в том случае, если выполняются два условия:

1. $\operatorname{Im} A=W$;
2. $\operatorname{Ker} A=\{\mathbf{0}\}$.

З а д а н и е. С помощью теоремы 3 определите, какие отображения из примеров 1–5 являются взаимно однозначными. (Ответ: в примерах 1 и 5.)

Сформулируем доказанные утверждения в терминах базиса пространства $V$. Предварительно докажем вспомогательные утверждения, первое из которых устанавливает простой, но очень важный факт – линейные отображения полностью определяются своими значениями на векторах какого-либо базиса.

Пусть $E=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ – базис векторного пространства $V$, и $A\colon V\to W$ – линейное отображение. Рассмотрим систему векторов $AE=\{A\mathbf{e}_1,A\mathbf{e}_2,\ldots,A\mathbf{e}_n\}$, называемую *образом базиса* $E$ *при отображении* $A$.

Л е м м а 1. Образ $AE$ базиса $E$ при отображении $A$ однозначным образом задает линейное отображение $A$.

◄Для любого вектора $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+...+\alpha_n\mathbf{e}_n$ пространства $V$ в силу линейности отображения $A$ выполнено

$$A\mathbf{x}=A\left(\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+...+\alpha_n\mathbf{e}_n\right)=\alpha_1A\mathbf{e}_1+\alpha_2A\mathbf{e}_2+...+\alpha_nA\mathbf{e}_n. \quad (9)$$

Поэтому чтобы найти $A\mathbf{x}$ по заданному $\mathbf{x}$, достаточно знать вектора $A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2,..., A\mathbf{e}_n$.

Наоборот, если $AE$ произвольная система $n$ векторов из пространства $W$, то отображение $A$, определенное формулой (9), является линейным. ►

Л е м м а 2. Справедливы следующие утверждения:

1. Линейная оболочка $L(AE)$ образа базиса $AE$ совпадает с образом отображения $A$.
2. Система векторов $AE$ линейно независима в том и только в том случае, если $\operatorname{Ker} A=\{\mathbf{0}\}$.

◄ Д о к а ж е м п е р в о е у т в е р ж д е н и е. Из соотношения (9) следует, что каждый вектор вида $A\mathbf{x}$ представим в виде линейной комбинации векторов из системы $AE$. И наоборот, любая линейная комбинация векторов из $AE$ имеет вид $A\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ – вектор с координатами, равными коэффициентам рассматриваемой линейной комбинации. Это и означает, что $L(AE)=\operatorname{Im} A$.

Д о к а ж е м в т о р о е у т в е р ж д е н и е. Для доказательства линейной независимости системы векторов $AE$ воспользуемся леммой 1 § 1.

Пусть линейная комбинация $\alpha_1A\mathbf{e}_1+\alpha_2A\mathbf{e}_2+...+\alpha_nA\mathbf{e}_n$ векторов из системы $AE$ равна нулю. В силу равенства (9) это означает, что вектор $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+...+\alpha_n\mathbf{e}_n$ с координатами, совпадающими с коэффициентами этой линейной комбинации, принадлежит ядру отображения $A$. Поэтому, если ядро состоит только из нуля, то $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ и все его координаты, то есть коэффициенты линейной комбинации, равны нулю. Таким образом, если $\operatorname{Ker} A=\{\mathbf{0}\}$, то система векторов $AE$ линейно независима.

Наоборот, равенство $A\mathbf{x}=0$ для некоторого вектора $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+...+\alpha_n\mathbf{e}_n$ согласно соотношению (9) возможно только тогда, когда линейная комбинация в правой части этого соотношения равна нулю. Поэтому, если система $AE$ линейно независима, то все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Значит вектор $\mathbf{x}$, для которого эти коэффициенты являются координатами, равен нулю. Таким образом, если система векторов $AE$ линейно независима, то $\operatorname{Ker} A=\{\mathbf{0}\}$. ►

Следующая теорема дает признак взаимной однозначности линейного отображения и, в частности, показывает, что взаимно однозначное отображение может быть только между векторными пространствами одной и той же размерности.

Т е о р е м а 4. Линейное отображение $A:V\to W$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда образ базиса $AE=\{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2,..., A\mathbf{e}_n\}$ является базисом векторного пространства $W$.

◄ Это утверждение следует из теоремы 3, так как в силу леммы 2 полнота системы $AE$ эквивалентна условию $\operatorname{Im} A=W$, а ее линейная независимость – условию $\operatorname{Ker} A=\{\mathbf{0}\}$. ►

Следствие 1. Любое линейное взаимно однозначное отображение $A: V \to W$ является изоморфизмом векторных пространств $V$ и $W$. Наоборот, каждый изоморфизм этих пространств является линейным взаимно однозначным отображением.

◀ Действительно, если $A$ – взаимно однозначное отображение, то по теореме 4 система $AE$ является базисом. В этом случае координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $E$ и координаты вектора $A\mathbf{x}$ в базисе $AE$ совпадают. То есть отображение $A$ является изоморфизмом векторных пространств.

Наоборот, если отображение $A$ – изоморфизм, то его линейность установлена в задании 1, а взаимная однозначность, если учесть теорему 3, – в задании 2. (Если вы не выполнили эти задания, то сделайте это сейчас.) ▶

Следствие 2. Для любого линейного отображения $A: V \to W$ сумма размерностей подпространств $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ равна размерности пространства $V$:

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim V .$$

◀ Пусть $U$ – какое-либо дополнительное подпространство к подпространству $\operatorname{Ker} A$, так что пространство $V$ распадается в прямую сумму этих подпространств. Согласно теореме 7 § 1 сумма их размерностей совпадает с размерностью всего пространства: $\dim \operatorname{Ker} A + \dim U = \dim V$. Остается проверить, равенство $\dim U = \dim \operatorname{Im} A$. Для этого рассмотрим линейное отображение $A_U : U \to \operatorname{Im} A$, совпадающее с отображением $A$ на множестве $U$, и покажем, что оно взаимно однозначно. Тогда нужное равенство будет следовать из теоремы 4, показывающей, что взаимно однозначное преобразование может быть только между пространствами одной и той же размерности.

Так как любой вектор $\mathbf{x}$ пространства $V$ можно представить в виде суммы проекций $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$ соответственно на подпространства $\operatorname{Ker} A$ и $U$, то $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{u} = A\mathbf{u}$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im} A_U = \operatorname{Im} A$. По определению прямой суммы подпространство $U$ не может содержать ненулевых векторов из $\operatorname{Ker} A$. Поэтому $\operatorname{Ker} A_U = \{\mathbf{0}\}$, и по теореме 3 отображение $A_U$ взаимно однозначно. ▶

Если $A: V \to W$ – взаимно однозначное отображение, то определено *обратное отображение* $A^{-1}: W \to V$, сопоставляющее любому вектору $\mathbf{y}$ решение уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Иначе говоря, обратное отображение – это такое отображение, что $A^{-1}(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из пространства $V$, и $A\left(A^{-1}\mathbf{y}\right) = \mathbf{y}$ для любого $\mathbf{y}$ из пространства $W$.

Задание. Докажите, что у взаимно однозначного линейного отображения $A: V \to W$ обратное отображение тоже линейно и взаимно однозначно. (Подсказка: обратное отображение, как и прямое отображение, является изоморфизмом векторных пространств $V$ и $W$.)

Задание. Найдите обратное отображение для первого отображения из примера 1.

## 2. Матрицы линейных отображений

Если выбрать базис в векторном пространстве, то каждый вектор характеризуется набором чисел – совокупностью его координат в этом базисе. Аналогичным свойством обладают линейные отображения.

Пусть $A: V \to W$ – линейное отображение $n$-мерного пространства $V$ в $m$-мерное пространство $W$. Выберем в первом пространстве базис $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ и базис $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ – во втором. Рассмотрим совокупность векторов $AE = \{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, ..., A\mathbf{e}_n\}$, которая согласно лемме 1 взаимно однозначно определяет отображение $A$.

Каждый вектор $A\mathbf{e}_k$ разложим в базисе пространства $W$:

$$A\mathbf{e}_k = a_{1k}\mathbf{f}_1 + a_{2k}\mathbf{f}_2 + ... + a_{mk}\mathbf{f}_m$$

Набор чисел $\{a_{sk} : s = 1, 2, ..., m,\ k = 1, 2, ..., n\}$ однозначно определяет вектора $A\mathbf{e}_k$ и, значит, отображение $A$. Его принято записывать в виде таблицы,

$$\begin{array}{c|l}
\text{столбцы} & \\
\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow & \\
\hline
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \ \text{строки} \\ \leftarrow \end{array}
\end{array}$$

Рис. 1

в которой $k$-тым столбцом являются координаты вектора $A\mathbf{e}_k$. Такие таблицы называют *матрицами*. В данном случае – это *матрица, отвечающая отображению* $A$. Она, естественно, зависит от выбора базисов в пространствах $V$ и $W$. Ее *размерность* $m \times n$ (читается $m$ на $n$), что означает наличие $m$ строк и $n$ столбцов.

Подытожим сказанное.

Лемма 3. Если зафиксировать базисы в пространствах $V$ и $W$, то каждому линейному отображению $A: V \to W$ отвечает матрица размерности $m \times n$, где $n$ и $m$ – размерности пространств $V$ и $W$ соответственно. Это соответствие между линейными отображениями пространства $V$ в пространство $W$ и матрицами размерности $m \times n$ является взаимно однозначным.

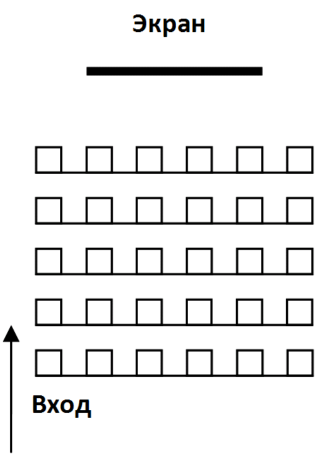



Рис. 2

Обратим внимание на индексацию элементов матрицы (см. рис. 1). Первый индекс определяет строку, в которой находится элемент $a_{sk}$, а второй – столбец. Чтобы это запомнить, можно воспользоваться следующим мнемоническим правилом. Представьте себе кинозал, такой как изображен на рис. 2. Зритель по своему билету ищет сначала ряд (первый индекс), потом место (второй индекс).

Вопрос: где находится элемент $a_{23}$?

Неплохой ответ: второй ряд, третье место.

Отличный ответ: на пересечении второй строки и третьего столбца.

Матрицу, имеющую $n$ столбцов и $m$ строк для краткости обозначают так: $\left(a_{sk}\right)_{s=1\ldots m,\,k=1\ldots n}$, или $\left(a_{sk}\right)_{m\times n}$, или просто $\left(a_{sk}\right)$.

Кроме того, если матрица $\left(a_{sk}\right)$ отвечает отображению $A$, то удобно этой же буквой обозначать и матрицу, то есть писать $A=\left(a_{sk}\right)$.

З а д а н и е .

1. Выбрав подходящие базисы, найдите матрицы, отвечающие линейным отображениям из примеров 1. (Указание: наиболее просто это сделать, если выбрать в пространствах определения и значений следующие базисы:

   п. 1. в обоих пространствах – ортонормированный репер, один из векторов которого направлен вдоль оси вращения;

   п. 2. канонические базисы (см. задание 3 п. 2 § 1) в обоих пространствах;

   п. 3. в обоих пространствах степени независимой переменной, то есть $1, x, x^2, \ldots$;

   п. 4. в пространстве $U$ – произвольный ортонормированный базис, в пространстве $V$ – ортонормированный базис, дополняющий базис пространства $U$;

   п. 5. в обоих пространствах те базисы, с помощью которых определен изоморфизм (см. § 1 определение 5)
2. Пусть в пространствах $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$ зафиксированы канонические базисы (см. задание 3 п. 2 § 1). Опишите, как действует отображение $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, если оно в этих базисах задано матрицей

   $$\text{a)}\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \text{b)}\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix},\ \text{c)}\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

   (Подсказка: проще всего представить себе действие того или иного отображения, посмотрев, как оно действует на базисные векторы).

Рассмотрим совокупность $H\left(V,W\right)$ всех линейных отображений векторного пространства $V$ в векторное пространство $W$. Для отображений из этой совокупности определим операцию сложения и умножения на число:

$$\left(A+B\right)\mathbf{x}=A\mathbf{x}+B\mathbf{x},$$

$$\left(\lambda A\right)\mathbf{x}=\lambda A\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{x}$ из пространства $V$.

Уже проверено (см. пример 5 § 1.), что введенные операции превращают совокупность $H\left(V,W\right)$ в векторное пространство.

Т е о р е м а 5. При сложении отображений из $H\left(V,W\right)$ и умножении их на число соответствующие им матрицы складываются и умножаются покомпонентным образом:

$$\begin{gathered}A=\left(a_{sk}\right),\ B=\left(b_{sk}\right)\Rightarrow A+B=\left(a_{sk}+b_{sk}\right)\\ A=\left(a_{sk}\right)\Rightarrow \lambda A=\left(\lambda a_{sk}\right)\end{gathered},$$

З а д а н и е . Докажите эту теорему самостоятельно.

Совокупность всех матриц размерности $m\times n$ можно рассматривать как пространство $\mathbb{R}^{mn}$. То есть можно рассматривать каждую матрицу как упорядоченный набор $mn$ чисел.

Теорема 5 показывает, что взаимно однозначное соответствие между векторным пространством $H(V,W)$ и евклидового пространством $\mathbb{R}^{mn}$ является линейным. Согласно следствию 1 – это изоморфизм векторных пространств. Таким образом, *связь между линейными отображениями и матрицами точно такая же, как между векторами и наборами их координат*.

З а д а н и е : Выясните, чему равна, размерность пространства $H(V,W)$. (Ответ: $mn$ ).

Пока остается неясным, почему матрицу не записывают в одну строку, как это делается для координат вектора. Ответ на это дает решение следующей рутинной (то есть встречающейся на каждом шагу) задачи.

З а д а ч а . Найти координаты вектора $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, если известны координаты вектора $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и матрица линейного отображения $A = (a_{sk})_{m\times n}$. Предполагается, что $A$ отображает пространство $V$ в пространство $W$, и в этих пространствах зафиксированы базисы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ соответственно.

Р е ш е н и е . По условию $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$. Поэтому

$$A\mathbf{x} = A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \alpha_1 A\mathbf{e}_1 + \alpha_2 A\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n A\mathbf{e}_n .$$

Если $A\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{f}_1 + \beta_2\mathbf{f}_2 + ... + \beta_m\mathbf{f}_m$, то

$$\beta_k = \alpha_1 a_{k1} + \alpha_2 a_{k2} + ... + \alpha_n a_{kn} .$$

(Напомним, что $k$ -тая координата вектора $A\mathbf{e}_1$ есть $a_{k1}$, вектора $A\mathbf{e}_2$ – $a_{k2}$, и так далее.)

Эту формулу трудно запомнить, поэтому есть следующее мнемоническое правило. Запишем координаты вектора $\mathbf{x}$ в виде матрицы, состоящей из одного столбца, справа от матрицы отображения $A$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -- \\ \alpha_n \end{pmatrix} = ...$$

Чтобы получить правильный результат, нужно «умножить» строку в левой матрице на столбец в правой матрице и результат записать в той же строке. *Умножение строки на столбец* совпадает с вычислением скалярного произведения вектор-строки на вектор-столбец:

$$... = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n \\ \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + ... + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Это правило называется *умножением матриц*, в данном случае матрицы размерности $m\times n$ на матрицу размерности $n\times 1$.

П р и м е р .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 10 + 2\cdot 11 + 3\cdot 12 \\ 4\cdot 10 + 5\cdot 11 + 6\cdot 12 \\ 7\cdot 10 + 8\cdot 11 + 9\cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 167 \\ 266 \end{pmatrix}.$$

*Умножение матриц имеет значительно более общий смысл.* Пусть $A:V \to U$ и $B:U \to W$ – линейные отображения. Возникает *сквозное* отображение $V \to W$. Его обозначают через $BA$. Другими словами, отображение $BA:V \to W$ определяется формулой $(BA)\mathbf{x} = B(A\mathbf{x})$, справедливой для каждого вектора $\mathbf{x}$ из пространства $V$.

Заметьте, что к вектору $\mathbf{x}$ сначала применяется отображение $A$, а затем к результату – отображение $B$. *Поэтому не путайте: именно $BA$, а не $AB$. Отображение $AB$ не определено!*

Т е о р е м а 6. Если $A = (a_{sr})$ и $B = (b_{rk})$ в некоторых фиксированных базисах векторных пространств $V$, $U$ и $W$, то матрицу отображения $AB$ можно найти по правилу: *умножаем строку матрицы $A$ на столбец матрицы $B$ и помещаем результат в матрицу $AB$ на пересечении строки и столбца с теми же номерами, что и у перемножаемых строки и столбца.*

П р и м е р.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 9 + 3\cdot 11 & 1\cdot 8 + 2\cdot 10 + 3\cdot 12 \\ 4\cdot 7 + 5\cdot 9 + 6\cdot 11 & 4\cdot 8 + 5\cdot 10 + 6\cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

◄ Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ – базис в пространстве $V$. Матрица $BA$ по определению состоит из столбцов, $k$-тый из которых представляет собой разложение вектора $BA\mathbf{e}_k$ в базисе пространства $W$. Как уже выяснено, чтобы получить этот вектор, нужно умножить матрицу $B$ на матрицу-столбец $A\mathbf{e}_k$. То есть $s$-тая координата вектора $BA\mathbf{e}_k$ получается умножением $s$-той строки матрицы $B$ на вектор-столбец $A\mathbf{e}_k$. Остается заметить, что $A\mathbf{e}_k$ – $k$-тый столбец матрицы $A$.►

З а м е ч а н и е. Как вытекает из правила умножения матриц, эта операция определена только тогда, когда количество столбцов первого сомножителя равняется количеству строк второго. (Конечно, это связано с тем, что для одного из соответствующих этим матрицам преобразований промежуточное векторное пространство является областью значений, а для другого – областью определения.) Матрица, полученная в результате умножения имеет столько же строк, сколько у первого сомножителя, и столько же столбцов, как у второго. Чтобы это запомнить, посмотрите на рисунок.

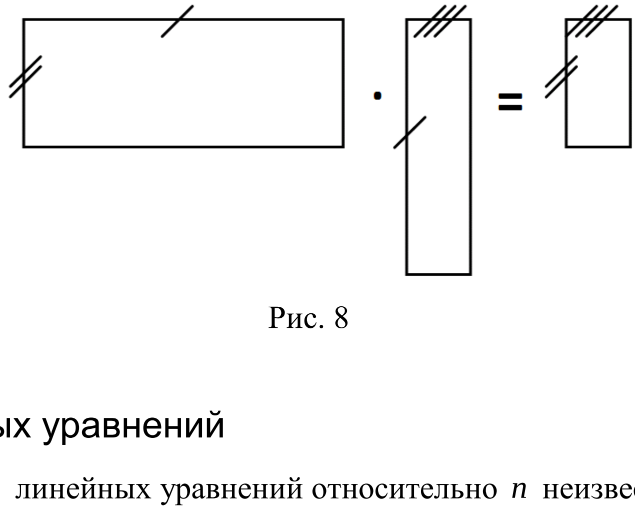


Рис. 8

## 3. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему $m$ линейных уравнений относительно $n$ неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2 \\ ------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = f_m \end{cases} \tag{10}$$

Здесь первый индекс коэффициента $a_{sk}$ означает, что этот коэффициент принадлежит $s$-тому уравнению, а второй – что он стоит при $k$-том неизвестном.

З а д а н и е . Проверьте, что, пользуясь правилом перемножения матриц, эту систему можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_m \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу-столбец неизвестных как вектор $\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{R}^n$, а матрицу-столбец правых частей – как вектор $\mathbf{f}$ пространства $\mathbb{R}^m$. Выберем в этих пространствах канонические базисы (см. задание 3 п. 2 § 1), благодаря чему в каждом из этих пространств любой вектор совпадает со своим набором координат. При таком выборе базисов матрице коэффициентов $A = (a_{sk})_{m\times n}$ отвечает линейное отображения $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, так что систему уравнений (10) можно кратко записать в *векторной форме*:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{f}.$$

В о п р о с. Будет ли полученное векторное уравнение эквивалентно системе уравнений (10), если бы были выбраны какие-то другие, не канонические, базисы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$? (Ответ: нет.)

Матрицу $A$ называют *матрицей системы уравнений* (10), а матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & f_2 \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & f_m \end{pmatrix},$$

полученную из матрицы системы добавлением столбца свободных членов, – *расширенной матрицей системы уравнений* (10).

О п р е д е л е н и е 4 . *Рангом* матрицы называется максимальное количество столбцов, образующих линейно независимую систему. .

В следующем предложении выясняется геометрический смысл ранга матрицы.

Л е м м а 4 . Ранг матрицы $A$ – это размерность $\dim \operatorname{Im} A$ образа соответствующего ей преобразования $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

◄ Линейная оболочка столбцов, рассматриваемых как векторы пространства $\mathbb{R}^m$, представляет собой $\operatorname{Im} A$ – образ преобразования $A$. Поэтому максимальная линейно независимая система, состоящая из столбцов матрицы $A$, является базисом подпространства $\operatorname{Im} A$. ►

Понятие ранга матрицы позволяет переформулировать теорему 2 об условиях существования и единственности решений системы линейных уравнений в терминах самой матрицы системы.

Т е о р е м а 7 ( К р о н е к е р а – К а п е л л и ) . Система линейных уравнений (10) имеет решение в том и только в том случае, если ранг ее матрицы совпадает с рангом ее расширенной матрицы.

◄ Перейдем к векторной форме системы (10), то есть к уравнению $A\mathbf{x}=\mathbf{f}$. Согласно первому утверждению леммы 2 подпространство $\operatorname{Im} A$ – образ отображения $A$, является линейной оболочкой столбцов матрицы системы. Поэтому, если система имеет решение, то вектор $\mathbf{f}$ принадлежит $\operatorname{Im} A$ и, следовательно, является линейной комбинацией этих столбцов. В этом случае ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы. Если же система не имеет решения, то вектор $\mathbf{f}$ не принадлежит подпространству $\operatorname{Im} A$, и любую линейно независимую систему векторов в $\operatorname{Im} A$ можно пополнить вектором $\mathbf{f}$. В этом случае ранг расширенной матрицы превосходит ранг матрицы системы. ►

З а м е ч а н и е . Нахождение рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы в общем случае является задачей, по сложности сравнимой с решением системы. Поэтому теорема Кронекера–Капелли имеет больше теоретическую ценность, нежели практическую. Наиболее эффективный способ определения рангов будет дан в § 6.

Систему уравнений (10) называют *однородной*, если ее правая часть равна нулю. Наряду с каждой системой $A\mathbf{x}=\mathbf{f}$ будем рассматривать *соответствующую ей однородную систему* $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Т е о р е м а 8 ( Ф р е д г о л ь м а ) . Система (10) имеет решение при любой правой части в том и только в том случае, если ранг ее матрицы равен $m$. Это решение единственно тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система не имеет ненулевых решений.

◄ Первое условие, состоящее в том, что ранг матрицы системы равен $m$, на языке векторного уравнения $A\mathbf{x}=\mathbf{f}$, означает , что $\operatorname{Im} A$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^m$. Второе условие об отсутствии ненулевых решений однородного уравнения – с тем, что $\operatorname{Ker} A=\{\mathbf{0}\}$. Поэтому доказываемая теорема – это просто теорема 2, переформулированная для систем линейных уравнений. ►

Следующие два утверждения представляют собой теорему 1 и следствие 2 теоремы 4, тоже сформулированные для систем линейных уравнений.

Т е о р е м а 9 (О структуре решений системы линейных уравнений).

Если $\tilde{\mathbf{x}}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$ – решение системы линейных уравнений (10), то любое другое решение $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ имеет вид $\mathbf{x}=\mathbf{x}+\bar{\mathbf{x}}$, где $\bar{\mathbf{x}}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – решение соответствующего однородного уравнения. Более того любое вектор такого вида является решением системы (10).

Решение $\mathbf{x}$ называют *частным решением*, а формулу $\mathbf{x}=\mathbf{x}+\bar{\mathbf{x}}$ – *общим решением*. Она в силу теоремы 9 дает все решения системы, если $\bar{\mathbf{x}}$ пробегает всю совокупность решение соответствующей однородной системы.

Т е о р е м а 1 0 . Пусть система уравнений относительно $n$ неизвестных (10) имеет матрицу ранга $\operatorname{rk} A$, и пусть $X$ – пространство решений соответствующего однородного уравнения. Тогда

$$\dim X + \operatorname{rk} A = n.$$

## 4. Линейные преобразования

*Линейные преобразования* отличаются от линейных отображений только тем, что они определены и принимают значения в одном и том же векторном пространстве. То есть любое линейное отображение вида $A:V \to V$ называется преобразованием. В этом случае говорят, что $A$ – *линейное преобразование пространства* $V$. Казалось бы, такое невинное дополнение мало что меняет. Однако это не так. Начнем с примеров.

П р и м е р ы 2 . Пусть $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ – базис векторного пространства $V$. Определим линейные преобразования с помощью следующих соотношений:

1. $A\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$, где $\lambda_k$ – числа;
2. $A\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ при $k \le m$, и $A\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k$ при $k > m$;
3. $A\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k+1}$ при $k \le n-1$, и $A\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1$.

При сопоставлении преобразований и матриц обычно пользуются всего одним базисом векторного пространства $V$, который рассматривается одновременно как базис пространства определения и как базис пространства значений.

З а д а н и е . Найдите матрицы, отвечающие этим преобразованиям в базисе $E$. Заметьте, что они *квадратные*, то есть число строк совпадает с числом столбцов.

П е р в о е о т л и ч и е п р е о б р а з о в а н и й о т о т о б р а ж е н и й .

В п. 2 для линейных отображений определены операции сложения и умножения на число, а также сквозное отображение, если пространство значений одного отображения совпадает с пространством определения другого. Для двух преобразований пространства $V$ последнее условие всегда выполнено. Поэтому в совокупности $H(V)$ всех преобразований векторного пространства $V$ определена операция, сопоставляющая каждой паре преобразований их сквозное преобразование. Эту операцию называют *умножением*, а результат умножения двух преобразований $A$ и $B$ – их *произведением*, и обозначают, как и ранее, через $AB$. При этом важно, что *отображение* $AB$ *получается, если сначала действует отображение* $B$*, а затем* $A$*!* Если порядок другой, то пишут $BA$.

Операция умножения линейных преобразований удовлетворяет очевидным свойствам:

1. $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность);
2. существует единичное отображение $I$, то есть такое, что $IA = AI = A$;
3. $(A+B)C = AC + BC$ (левая дистрибутивность);
4. $C(A+B) = CA + CB$ (правая дистрибутивность);
5. $(\lambda A)B = \lambda(AB)$ (ассоциативность умножения на число);
6. $A(\lambda B) = \lambda(AB)$ (ассоциативность умножения на число).

З а д а н и е . Проверьте выполнение этих свойств. (Подсказка для доказательства второго свойства: $I$ – тождественное отображение, то есть отображение, оставляющее любой вектор $\mathbf{x}$ на месте: $I\mathbf{x}=\mathbf{x}$.)

*Алгеброй* (в узком смысле этого слова) называется векторное пространство, в котором дополнительно введена операция произведения, сопоставляющая каждой паре векторов некоторый вектор, называемый их произведением. (*Не путайте со скалярным произведением, результат которого есть число, а не вектор того же пространства!*) Эта операция должна удовлетворять приведенным выше условиям, часть из которых (1 и 2) являются ее собственными свойствами, а часть согласует операцию умножения с операциями сложения (3 и 4) и умножения на скаляр (5 и 6).

Таким образом совокупность $H(V)$ – всех преобразований векторного пространства $V$, представляет собой алгебру. Согласно теореме 6 произведению двух преобразований из $H(V)$ соответствует произведение их матриц. Поэтому совокупность всех матриц размерности $n\times n$, где $n=\dim V$, тоже удовлетворяет приведенным выше условиям и представляет собой алгебру, где операцией умножения является произведение матриц. Обе эти алгебры изоморфны, и соответствующим изоморфизмом в силу теорем 5 и 6 является взаимно однозначное соответствие между преобразованиями и их матрицами в фиксированном базисе пространства $V$.

Заметим, что числа с обычными операциями сложения и умножения тоже представляют собой алгебру. Поэтому свойства 1 – 6. легко запомнить. Однако алгебра преобразований или, что тоже самое, алгебра матриц очень сильно отличается от привычной алгебры чисел. Этому есть две причины.

В о - п е р в ы х . В алгебре преобразований (матриц) отсутствует коммутативность. То есть равенство $AB=BA$ выполняется не всегда. В этом легко убедиться, перемножив, например, в разных порядках матрицы преобразований из п. 1 и п. 3 примера 2. (Для простоты положите $n=2$.) Отсутствием свойства коммутативности объясняется то, что свойства 3 и 4 , а также 5 и 6 присутствуют в определении алгебры в «левом» и «правом» вариантах.

В о - в т о р ы х . В алгебре преобразований (матриц), обратный элемент $A^{-1}$ (то есть такой, что $AA^{-1}=A^{-1}A=I$) по определению имеется только у взаимно однозначных преобразований $A$. Поэтому важным вопросом является определение условий, при которых обратный элемент существует. Этот вопрос обсуждался в п. 1, а полученные результаты были использованы при доказательстве теорем Кронекера–Капелли и Фредгольма (п. 3) для систем линейных уравнений. Обсуждение этого вопроса будет продолжено и в этом пункте.

Отсутствие обратного элемента приводит к довольно странным на первый взгляд соотношениям. Например, $PP=P$ при $P\neq I$ и $P\neq 0$. Или $P_1P_2=0$ при $P_1\neq 0$ и $P_2\neq 0$.

З а д а н и е . Проверьте, что первому соотношению удовлетворяет преобразование из п. 2 примера 2, и после этого придумайте пример отображения, удовлетворяющего второму соотношению.

В т о р о е о т л и ч и е п р е о б р а з о в а н и й о т о т о б р а ж е н и й .

Теорема 3 показывает, что для взаимной однозначности линейного отображения $A:V\to W$ нужно, чтобы одновременно выполнялись два условия: $\operatorname{Im}A=V$ и $\operatorname{Ker}A=\{\mathbf{0}\}$. Для преобразований эти условия эквивалентны, то есть, если выполнено одно из них, то выполнено и другое. Поэтому каждое из этих условий в отдельности влечет за собой взаимную однозначность преобразования $A$.

Т е о р е м а 1 1 . Для линейного преобразования $A$ пространства $V$ условия $\operatorname{Im} A = V$ и $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$ эквивалентны

◄ Это немедленно вытекает из равенства $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim V$, установленного в следствии 2 теоремы 4. Нужно только заметить, что равенство $\operatorname{Im} A = V$ эквивалентно равенству $\dim \operatorname{Im} A = \dim V$, а равенство $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$ – равенству $\dim \operatorname{Ker} A = 0$. ►

Для удобства все признаки взаимной однозначности линейного преобразования $A : V \to V$ или, что то же самое, существования обратного преобразования $A^{-1}$, соберем в одной теореме.

Т е о р е м а 1 2 . Пусть $A$ – линейное преобразование пространства $V$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Существует обратное преобразование $A^{-1}$;
2. $\operatorname{Im} A = V$;
3. $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$;
4. Образ базиса в пространстве $V$ при преобразовании $A$ тоже является базисом этого пространства.

Линейные отображения, для которых выполнено условие п. 3 этой теоремы, часто называют *невырожденными*. Так что для линейных преобразований невырожденность и взаимная однозначность – одно и то же.

С и с т е м ы л и н е й н ы х у р а в н е н и й . П р о д о л ж е н и е .

Применим полученные знания к системам $n$ линейных уравнений с тем же количеством неизвестных. В этом случае отображение $A$ из уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, являющегося векторной формой системы, очевидно, представляет собой преобразование пространства $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 1 3 ( А л ь т е р н а т и в а Ф р е д г о л ь м а ) . При $m = n$ для системы линейных уравнений (10) имеются всего две возможности:

1. либо система (10) имеет решение при любой правой части,
2. либо соответствующая однородная система уравнений имеет ненулевые решения.

◄ Это просто другая формулировка теоремы 10. ►

Методы решения систем линейных уравнений будут рассмотрены в § 6.

# § 4. Объем и ориентация

Из школьного курса математики известно, чему равен объем шара, параллелепипеда, конуса и других геометрических тел. Однако не известно, что такое сам объем. То же относится к площади и даже длине. В этом пункте определяется объем тел в $n$-мерном евклидовом пространстве. При $n=1$ это – длина, при $n=2$ – площадь, и при $n=3$ – собственно объем. Для пространств большей размерности специальных названий нет. Потому пользуются тем же термином «объем», указывая, если могут возникнуть недоразумения, его размерность.

## 1. Определение объема.

Определим наиболее простое $n$-мерное геометрическое тело.

Пусть $G_n=\{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n\}$ – какой-либо базис евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Множество точек вида $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{g}_1+\alpha_2\mathbf{g}_2+...+\alpha_n\mathbf{g}_n$, где коэффициенты удовлетворяют неравенствам $0\le\alpha_k\le 1$ называют *$n$-мерным параллелепипедом, построенным на векторах* $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n$ (*как на ребрах*) и обозначают тем же символом $G_n$.

Задание. Проверьте, что одномерный параллелепипед – это отрезок $[\mathbf{0},\mathbf{g}_1]$, соединяющий точки $\mathbf{0}$ и $\mathbf{g}_1$, двухмерный – параллелограмм со сторонами $[\mathbf{0},\mathbf{g}_1]$ и $[\mathbf{0},\mathbf{g}_2]$, а трехмерный – параллелепипед с ребрами $[\mathbf{0},\mathbf{g}_1],[\mathbf{0},\mathbf{g}_2]$ и $[\mathbf{0},\mathbf{g}_3]$. На рис. 1 для примера изображен двухмерный параллелепипед.

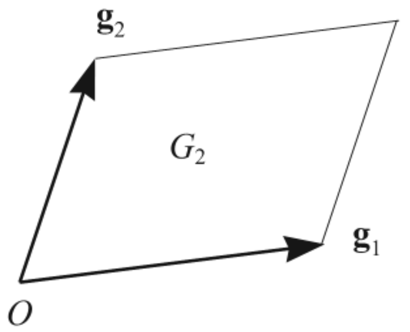



Рис. 1

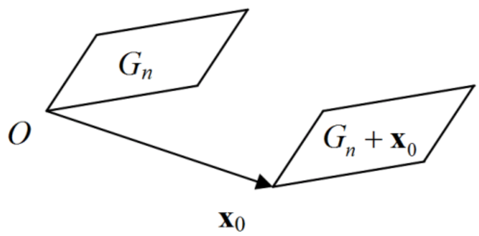



Рис. 2

Заметим, что пока определены только параллелепипеды, имеющие точку $\mathbf{0}$ одной из своих вершин. Чтобы получить параллелепипед общего вида, будем рассматривать также параллелепипеды, *смещенные* на произвольный вектор $\mathbf{x}_0$ (см. рис. 2). Это означает, что такой параллелепипед получается добавлением вектора $\mathbf{x}_0$ к каждому вектору исходного параллелепипеда или (см. определение 8 §1) представляет собой векторную сумму множеств $G_n$ и $\{\mathbf{x}_0\}$.

Если параллелепипед построен с помощью ортогонального базиса, то его естественно назвать *прямоугольным*. Если длины всех векторов этого базиса раны одному и тому же числу $a$, то это – $n$-мерный *куб с ребром* длины $a$. И, наконец, при $a=1$, то есть если базис ортонормирован,– это *единичный* $n$-мерный куб.

З а д а н и е . Проверьте, что одномерный единичный куб – это отрезок длины 1, двухмерный – квадрат со стороной длины 1, трехмерный – куб с ребром длины 1.

*Будем исходить из следующих свойств объема, принимаемых в качестве аксиом*:

1. Объем – неотрицательное число.
2. Объем единичного куба равен 1 вне зависимости от выбора ортонормированного базиса, с помощью которого построен куб.
3. При смещении некоторого тела на вектор $\mathbf{x}_0$ его объем не меняется.
4. Если тело разбито на несколько частей, то его объем равен сумме объемов каждой из этих частей.

З а м е ч а н и е. Эти аксиомы настолько привычны, что в дальнейшем мы не будем каждый раз ссылаться на них. Но очень полезно самостоятельно найти в дальнейших рассуждениях те места, где эти аксиомы используются.

З а д а н и е . Найдите объем $n$-мерного куба с ребром $1/2$. (Подсказка: разбейте единичный куб на такие кубы. Ответ: $1/2^n$.)

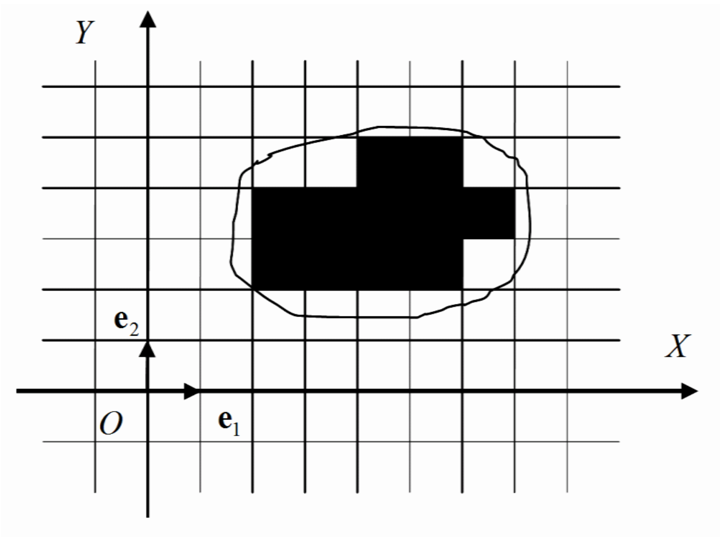



Рис. 3

Найдем теперь объем любого $n$-мерного тела. (*Отнеситесь внимательно к проводимому рассуждению, так как в нем заключается основная идея интегрального исчисления.*) Поставленную задачу можно разделить на две части: наиболее важная – нахождение объема в простых одно-, двух- или трехмерном случаях, и вторая часть, носящая технический характер, – переход к $n$-мерному случаю.

Начнем с первой части, выбрав для простоты иллюстраций двухмерный случай. Пусть в плоскости $XY$ (см. рис. 3) задана фигура (двумерное тело) $B$. Разобьем всю плоскость на квадраты со стороной, равной 1. Для этого проведем два семейства прямых: первое ортогонально единичному вектору $\mathbf{e}_1$, направленному по оси $X$, а второе – ортогонально единичному вектору $\mathbf{e}_2$, направленному вдоль оси $Y$. Расстояние между прямыми равно 1. Иначе говоря, ось $X$, являющуюся подпространством, ортогональным вектору $\mathbf{e}_2$, «размножим», сместив ее на векторы $k\mathbf{e}_2$, где $k = 0, \pm 1, \ldots$. Аналогично, ось $Y$, являющуюся подпространством, ортогональным вектору $\mathbf{e}_1$, «размножим» с помощью вектора $\mathbf{e}_1$.

Подсчитаем теперь количество $k_1$ квадратов, целиком поместившихся в фигуре $B$, и найдем их общую площадь: $S_1 = k_1 \cdot 1$. Это приближенная оценка для площади тела $B$.

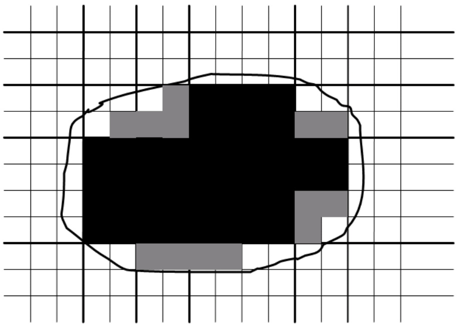


Рис. 4

Разобьем плоскость с помощью аналогичной процедуры на квадраты со стороной $1/2$. Получим, как это видно из рис. 4, более точную оценку для площади, которая составляет $S_2 = k_2 \cdot 1/4$. Здесь $k_2$ – число полностью попавших в фигуру $B$ квадратов, и $1/4$ – площадь каждого из них.

Далее, используя квадраты со стороной $1/4$, $1/8$ и так далее, получим последовательность все более точных оценок площади фигуры: $S_1, S_2, \ldots$. У этой последовательности есть два важных свойства, сформулированных в следующем утверждении.

Л е м м а 1 . Последовательность оценок $S_1, S_2, \ldots$ является *монотонно растущей,* то есть каждый ее член не меньше предыдущего: $S_{k+1} \geq S_k$, и кроме того эта последовательность является *ограниченной* в том смысле, что все ее члены не превосходят некоторое число: $S_k \leq M$.

◄ Первое утверждение очевидно, так как при измельчении квадратов вошедшие на предыдущих шагах не исчезают, а могут появляться только новые. Например, на рис. 4 черным цветом показаны квадраты, учтенные при вычислении оценки $S_1$, а серым – новые квадраты, вошедшие в оценку $S_2$.

Второе утверждение также становится очевидным, если представить себе большой квадрат, охватывающий всю фигуру $B$. ►

Естественно приписать фигуре $B$ в качестве ее площади такое число $S$, что разность $S - S_k$ между этим числом и оценкой площади $S_k$ становится с ростом $k$, то есть с повышением точности оценки, сколь угодно малой. Такое число называется *пределом* последовательности $S_1, S_2, \ldots$. Его существование вовсе не является очевидным, а представляет собой одно из тонких свойств действительных чисел.

Т е о р е м а 1 . Ограниченная монотонно растущая последовательность имеет предел.

◄ Запишем все числа последовательности $S_1, S_2, \ldots$ в десятичной форме и будем наблюдать, как меняется какой-либо десятичный знак при росте индекса $k = 1, 2, \ldots$. Так как последовательность ограничена, то с некоторого момента этот знак перестанет меняться. Назовем такой знак *стабилизировавшимся*. Десятичное число, составленное из всех стабилизировавшихся знаков, и есть нужный предел $S$.

Действительно, разность $S - S_k$ при достаточно большом значении индекса $k$ становится сколь угодно малой. Например, если задана точность $10^{-m}$, то достаточно выбрать то значение индекса, после которого стабилизировались все первые знаки вплоть до $m$-того после запятой. ►

П р е й д е м т е п е р ь к о в т о р о й ч а с т и з а д а ч и – перенесению полученных результатов на $n$-мерный случай. Собственно нужно научиться разбивать пространство $\mathbb{R}^n$ на $n$-мерные кубы. Далее все то же самое, что и в двумерном случае: построение последовательности оценок объема тела с помощью измельчающихся кубов и определение объема как предела этой последовательности.

З а д а н и е . Разбейте трехмерное пространство на единичные кубы.

*Гиперплоскостью* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется любое $n-1$-мерное подпространство $U$, а также его смещения $\Gamma = U + \mathbf{u_0}$ на произвольный вектор $\mathbf{u}_0$. (Последнее означает векторную сумму подпространства $U$ и вектора $\mathbf{u}_0$, то есть множество, состоящее из всех векторов вида $\mathbf{u} + \mathbf{u}_0$, где $\mathbf{u}$ – любой вектор из подпространства $U$.) В $n$-мерном пространстве гиперплоскость играет ту же роль, что и плоскость в трехмерном пространстве или прямая на плоскости. А именно, разбивает пространство на две части – *полупространства*. Поясним это.

Пусть $\mathbf{h}$ – единичный вектор, ортогональный подпространству $U$ (см. теорему 6 § 2). Тогда любой вектор $\mathbf{x}$ можно представить в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{h}$, где $\mathbf{x}_0$ – ортогональная проекция вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $U$ (см. теорему 7 § 2). Поэтому подпространство $U$ разбивает пространство на две области. Первая состоит из тех векторов, для которых $\alpha > 0$, а вторая – из тех, для которых $\alpha < 0$. Эти области называются *полупространствами*, так как если вектор $\mathbf{x}$ принадлежит одной из них, то противоположный вектор $-\mathbf{x}$ принадлежит другой. В случае гиперплоскости $\Gamma = U + \mathbf{u}_0$ два полупространства получаются из указанных смещением на $\mathbf{u}_0$.

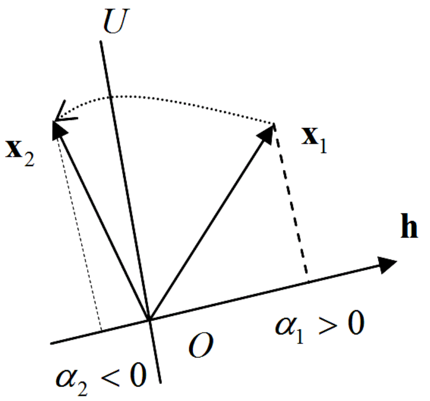



Рис. 5.

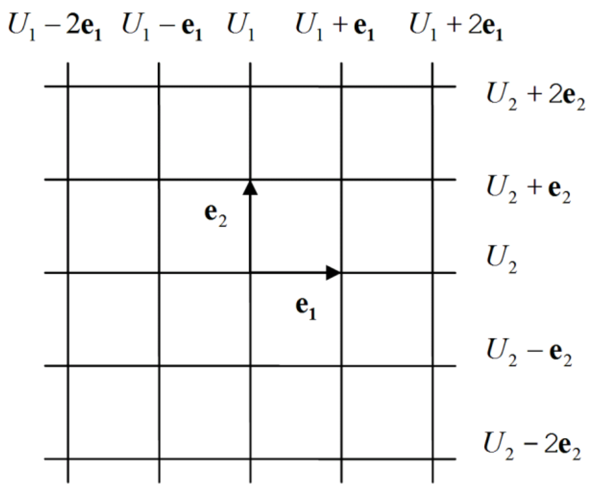



Рис. 6

Отметим, что подпространство $U$ является границей полупространств, так как состоит из векторов, для которых $\alpha = 0$. Поэтому, если перемещать вектор $\mathbf{x}$ из одного полупространства в другое (на рис. 5 показано перемещение вектора из положения $\mathbf{x}_1$ в положение $\mathbf{x}_2$), то нельзя не пресечь гиперплоскость $U$. То же, очевидно, верно и для любой гиперплоскости, полученной с помощью смещения.

Пусть $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ – ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$ (см. задание 3 п. 2 § 1).

Рассмотрим подпространство $U_1$, ортогональное вектору $\mathbf{e}_1$ (см. рис. 6). Это – $n-1$-мерное подпространство, так как оно является линейной оболочкой остальных векторов из $E$.

«Размножим» это подпространство, смещая его на векторы $k\mathbf{e_1}$, $k=0,\pm1,\dots$. Получим семейство гиперплоскостей вида $U_1+k\mathbf{e}_1$.

Повторим теперь это построение для вектора $\mathbf{e}_2$. Получим семейство гиперплоскостей вида $U_2+k\mathbf{e}_2$, где $U_2$ – подпространство ортогональное вектору $\mathbf{e}_2$, и $k=0,\pm1,\dots$. То же самое сделаем для всех остальных векторов базиса $E$. На рис. 6 показаны эти семейства в случае двумерного пространства.

Для разбиения пространства на кубы со стороной $\frac{1}{2^m}$ нужно в предыдущем построении заменить каждый базисный вектор $\mathbf{e}_s$ на вектор $\frac{1}{2^m}\mathbf{e}_s$.

З а д а н и е . Проведите эту конструкцию в одномерном случае.

Остается проверить, что полученная в результате система гиперплоскостей разбивает пространство $\mathbb{R}^n$ на единичные $n$-мерные кубы. Иначе говоря, проверить, что

1. построенная система гиперплоскостей разбивает все пространство на области в том смысле, что нельзя переместить вектор из одной области в другую, не пересекая какую-нибудь из гиперплоскостей, и
2. каждая такая область, если присоединить к ней ее границы, является единичным $n$-мерным кубом.

◀ Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x}$. Если он лежит на одной из построенных гиперплоскостей $U_s+k\mathbf{e}_s$, то его $s$-тая координата целое число. Поэтому векторы которые не лежат ни на одной из гиперплоскостей, будем называть их *внутренними*, можно представить в виде

$$\mathbf{x}=\mathbf{k}+\mathbf{a}, \tag{11}$$

где $\mathbf{k}=(k_1,k_2,..,k_n)$ – вектор с целочисленными координатами, а вектор $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ такой, что для всех $s=1,2,...,n$ выполнены неравенства $0<\alpha_s<1$.

Внутренний вектор $\mathbf{x}_1$ можно перевести, не пресекая ни одну гиперплоскость, в другой внутренний вектор $\mathbf{x}_2$ только в случае, если в их представлениях вида (11) целочисленный вектор $\mathbf{k}$ один и тот же. Таким образом области, на которые система гиперплоскостей разбивают пространство, представляют собой совокупности внутренних точек с одним и тем же целочисленным вектором $\mathbf{k}$. Область, соответствующую целочисленному вектору $\mathbf{k}$, будем обозначать через $E_\mathbf{k}$.

Границу области $E_\mathbf{k}$, естественно, составляют векторы, для которых какая-либо координата $\alpha_s$ или несколько таких координат равны 0 или 1. Поэтому область $E_\mathbf{k}$, включая ее границы, состоит из точек вида

$$\mathbf{x}=\mathbf{k}+\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\dots+\alpha_n\mathbf{e}_n,$$

где координаты удовлетворяют неравенствам $0\le\alpha_s\le1$.

По определению это – смещенный на вектор $\mathbf{k}$ единичный $n$-мерный куб. ▶

З а м е ч а н и я .

1. Для измерения объема не обязательно пользоваться кубами. Годятся любые фигуры, которыми можно заполнить пространство, которые можно измельчать, и объем которых известен.
2. Выше понятие объема определено для $n$-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Однако благодаря изоморфности всех евклидовых пространств одной и той же размерности понятие объема переносится на любое конечномерное евклидово пространство. Это замечание относится и к дальнейшим результатам.

## 2. Объем параллелепипеда

Как известно из школьного курса математики, площадь параллелограмма равна произведению длины основания на высоту, а объем параллелепипеда – произведению площади основания на высоту. То же правило действует и в многомерном пространстве.

*Объем $n$-мерного параллелепипеда равен произведению $n-1$-мерного объема основания на высоту.*

Чтобы придать смысл этой легко запоминающейся формуле, нужно определить, что такое $n-1$-мерное основание и что такое в этом случае высота.

Пусть параллелепипед построен на векторах базиса $G_n = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n\}$, и $G_{n-1}$ – любая совокупность $n-1$ векторов из $G_n$. Тогда $n-1$-мерный параллелепипед, построенный на векторах из $G_{n-1}$, называется *гранью параллелепипеда*. Не входящий в $G_{n-1}$ вектор $\mathbf{g}$ из базиса $G_n$ будем называть *противолежащим* к этой грани ребром. Любую грань можно выбрать в качестве *основания* параллелепипеда.

З а д а н и е . Проверьте, что при $n=2$ грани – это стороны параллелограмма, а при $n=3$ – грани параллелепипеда в обычном смысле.

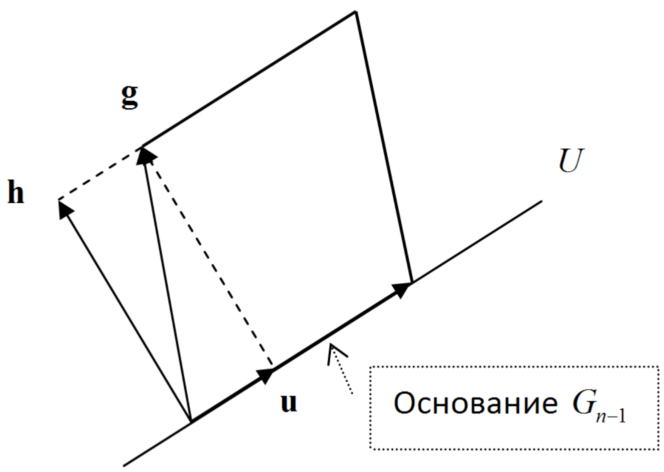



Рис. 7.

Рассмотрим гиперплоскость $U$, являющуюся линейной оболочкой векторов из $G_{n-1}$. Это – гиперплоскость, в которой лежит основание. Противолежащее основанию $G_{n-1}$ ребро $\mathbf{g}$ можно представить в виде: $\mathbf{g} = \mathbf{u} + \mathbf{h}$, где $\mathbf{u}$ – его ортогональная проекция на гиперплоскость $U$, а $\mathbf{h}$ – его ортогональная к $U$ составляющая. Вектор $\mathbf{h}$ будем называть *вектором высоты* (или просто *высотой*) *параллелепипеда* $G_n$ *при основании* $G_{n-1}$ (см. рис. 7).

Т е о р е м а 2 . Объем $n$-мерного параллелепипеда равен произведению $n-1$-мерного объема его основания на длину вектора высоты.

◄ Выберем ортонормированный базис $E_n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ так, чтобы вектор $\mathbf{e}_1$ был ортогонален гиперплоскости основания параллелепипеда. Остальные векторы $E_{n-1} = \{\mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ тогда будут лежать в этой гиперплоскости. С помощью базиса $E_n$ разобьем пространство $\mathbb{R}^n$ на $n$-мерные единичные кубы, как это было описано в предыдущем пункте.

Рассмотрим теперь гиперплоскость основания как пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ с базисом $E_{n-1}$. Тогда указанное разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на $n$-мерные кубы одновременно дает разбиение гиперплоскости основания на $n-1$-мерные единичные кубы, соответствующие базису $E_{n-1}$. Аналогично, в одномерном подпространстве, в котором лежит высота $\mathbf{h}$, возникает разбиение на одномерные единичные кубы (то есть на единичные отрезки), соответствующие базису, состоящему из одного вектора $\mathbf{e}_1$.

В процессе измельчения $n$-мерных кубов получим последовательность оценок $V_1, V_2, ...$ для $n$-мерного объема $V$ параллелепипеда, а также последовательности оценок $S_1, S_2, ...$ для $n-1$-мерного объема $S$ основания и $L_1, L_2, ...$ для длины высоты $L$.

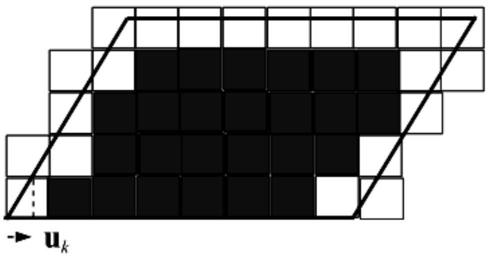



Рис. 8

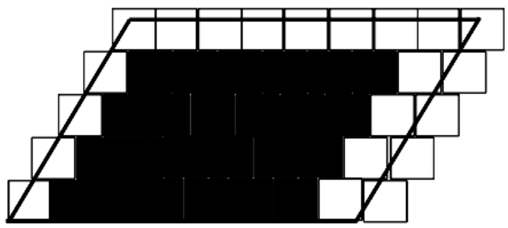


Рис. 9

Подсчитаем оценку $V_k$, положив, что $l_k = 2^{-k}$ – длина ребра куба, участвующего в $k$-том разбиении пространства, и соответственно $s_k = 2^{k-1}$ – $n-1$-мерный объем грани этого куба, и $v_k = 2^{-k}$ – его объем. Тогда в слое кубов, прилегающих к основанию параллелепипеда, содержится $\sigma_k = S_k / s_k$ кубов. По высоте имеется $\lambda_k = L_k / l_k$ слоев. Если в каждом слое одинаковое число кубов, то всего в параллелепипед помещается $\omega_k = \lambda_k \sigma_k = (L_k S_k)/(l_k s_k) = L_k S_k / v_k$ кубов. Поэтому их общий объем $V_k = \omega_k v_k = S_k L_k$. Переходя к пределу, получим требуемый результат: $V = SL$.

Однако количество кубов в слоях может различаться. Например, в случае, изображенном на рис. 8, третий слой на один куб (в данном случае квадрат) больше остальных. Этот эффект сродни тому, что на экране монитора наклонные линии изображаются «ступеньками».

Положение легко исправить: достаточно сместить слои так, чтобы они занимали одинаковое положение относительно граней параллелепипеда (см. рис. 9). Для этого второй слой нужно сместить на вектор $\mathbf{u}_k = l_k \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{g}|}$, где $\mathbf{u}$ ортогональная проекция ребра $\mathbf{g}$ на основание параллелепипеда (см. рис. 7). На рис. 8 вектор $\mathbf{u}_k$ изображен внизу слева. Он получился маленьким, так как по длине меньше ребра куба.

Третий слой нужно сместить на вектор $2\mathbf{u}_k$, четвертый слой – на $3\mathbf{u}_k$, и так далее.►

Если система из $n$ векторов пространства $\mathbb{R}^n$, с помощью которой строится параллелепипед, является линейно зависимой, то такой параллелепипед называется *вырожденным*.

С л е д с т в и е 1. Параллелепипед является вырожденным тогда и только тогда, когда его $n$-мерный объем равен нулю.

◄ Если параллелепипед является вырожденным, то все его ребра лежат $n-1$-мерном подпространстве. Поэтому для любой его $n-1$-мерной грани, взятой в качестве основания, высота равна нулю.

Наоборот, если объем параллелепипеда равен нулю, то для любого его основания соответствующая высота равна нулю. Поэтому все ребра такого параллелепипеда лежат в $n-1$-мерном подпространстве и, значит, образуют линейно зависимую систему. ►

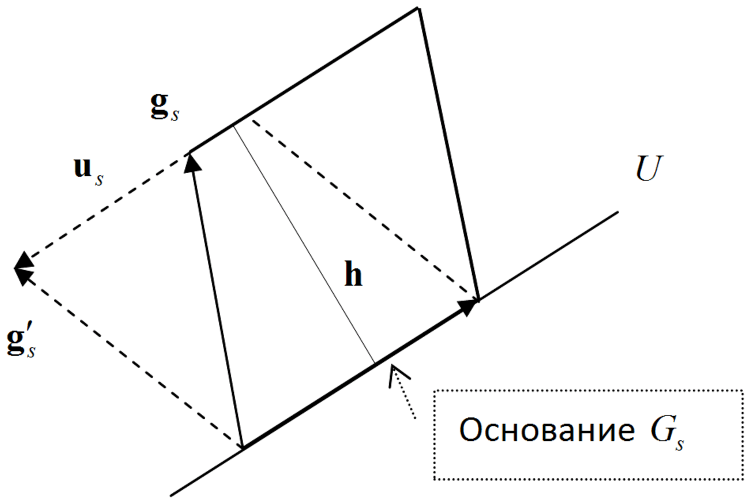



Рис. 10

С л е д с т в и е 2. Объем параллелепипеда не изменится, если какое-то его ребро $\mathbf{g}_s$ заменить вектором $\mathbf{g}'_s = \mathbf{g}_s + \mathbf{u}_s$, где $\mathbf{u}_s$ – любой вектор из подпространства, в котором лежит противолежащее ребру $\mathbf{g}_s$ основание $G_s$. Другими словами, при перемещении вершины параллелепипеда параллельно противолежащему основанию объем не меняется.

◄ Это сразу же следует из теоремы 2, если заметить, что вектор высоты $\mathbf{h}$ в случае замены $\mathbf{g}_s$ на $\mathbf{g}'_s$ остается одним и тем же (см. рис. 10, на котором исходный параллелепипед изображен сплошными линиями, а получившийся в результате смещения вершины – пунктирными). ►

З а д а н и е 1. Проверьте, что объем многомерного прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его ребер. (Подсказка: примените теорему 2 не только для нахождения $n$-мерного объема параллелепипеда, но и для нахождения $n-1$-мерного объема его основания, и так далее.)

## 3.Оиентация базиса и ориентированный объем

В кристаллографии, электродинамике, квантовой механике и других естественных науках, в которых широко применяется векторная алгебра, используется фундаментальное понятие *ориентации пространства* или, что то же самое, *ориентации его базиса*. Например, из школьного курса физики известны законы, которые нельзя сформулировать без понятия ориентации. Это – закон Био-Савара, который для определения направления магнитных силовых линий, вызванных током, использует «правило буравчика» или «правило правой руки». Это – закон Лоренца о силе, действующей на проводник с током в магнитном поле. Направление силы Лоренца определяется с помощью «правила левой руки». Это – вычисление момента силы в механике.

Посмотрим, что означает ориентация базиса в одно- двух- и трехмерном случаях, а затем определим это понятие в многомерном случае.

П р и м е р ы .

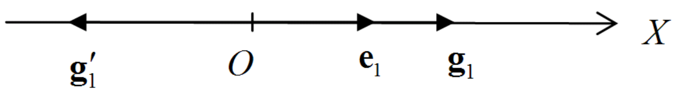



Рис. 11.

В о д н о м е р н о м с л у ч а е пространство $\mathbb{R}$ можно рассматривать как прямую, совпадающую с осью $X$ декартовых координат (см. рис 11). Ориентация пространства состоит в задании направления на ней. В качестве положительного направления принято выбирать направление роста координаты, то есть вправо, если ось $X$ нарисована так, как это показано на рисунке. Любой базис, в одномерном случае состоящий из единственного вектора, считается положительно ориентированным, если этот вектор направлен вправо, и отрицательно ориентированным, если – влево. Так на рис. 11 базис, состоящий из вектора $\mathbf{g}_1$, ориентирован положительно, а базис, состоящий из вектора $\mathbf{g}_1'$, – отрицательно. Отметим, что канонический базис пространства $\mathbb{R}$, состоящий из одного вектора $\mathbf{e}_1$, ориентирован положительно, так как этот вектор по определению направлен в сторону возрастания координаты.

В д в у м е р н о м п р о с т р а н с т в е $\mathbb{R}^2$, рассматриваемом как плоскость с двумя осями координат, положительно ориентированным базисом $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ считают такой, что если смотреть со стороны вектора $\mathbf{g}_1$ на ось, по которой направлен вектор $\mathbf{g}_2$, то последний направлен вправо. На рис. 12 показаны положительно ориентированный базис $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ и отрицательно ориентированный базис $\{\mathbf{g}_1', \mathbf{g}_2'\}$.

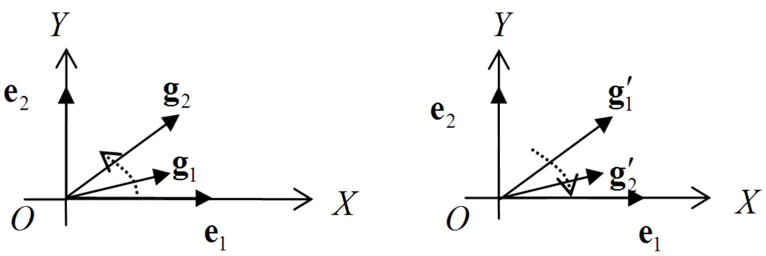



Рис. 12.

Вместо этого правила более удобно пользоваться другим, эквивалентным ему: *базис* $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ *ориентирован положительно, если направление вращения от вектора* $\mathbf{g}_1$ *к вектору* $\mathbf{g}_2$ *по кратчайшему пути происходит в против часовой стрелки.*

Оси координат принято рисовать так, чтобы канонический базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ был ориентирован положительно, как это показано на рис. 12.

Канонический базис, впрочем как и любой другой базис, задает ориентацию пространства. Это нужно понимать в следующем смысле. Представим себе, что приведенные рисунки выполнены на стекле, тогда ориентация базиса позволяет различать «внешнюю» и «внутреннюю» стороны стекла – с внешней стороны, с той, которой мы смотрим на рисунок, канонический базис положительно ориентирован, а если смотреть с противоположной, внутренней, стороны – отрицательно ориентирован. Это приводит, например, к тому, что в механике при вычислении момента силы получатся результаты разного знака в зависимости от того, откуда мы смотрим на плоскость.

В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ действует аналогичное правило: *базис* $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ *ориентирован положительно, если со стороны вектора* $\mathbf{g}_1$ *плоскость, в которой лежат вектора* $\mathbf{g}_2$ *и* $\mathbf{g}_3$, *ориентирована ими положительно, то есть вращение от* $\mathbf{g}_2$ *к* $\mathbf{g}_3$ *по кратчайшему пути происходит против часовой стрелки*. На рис. 13 показан канонический базис, который в соответствии с этим правилом ориентирован положительно.

Оси координат принято рисовать так, чтобы канонический базис был положительно ориентированным (см. рис. 13).

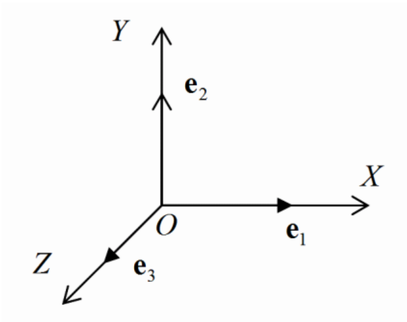



Рис. 13.

Отметим, что ориентация базиса и в трехмерном случае задает ориентацию всего пространства. Если изготовить из спичек и пластилина модель репера $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и посмотреть на его отражение в зеркале, то легко убедиться, что отражение ориентировано отрицательно. Это означает, что трехмерное пространство «зазеркалья» имеет противоположную ориентацию. Многие законы физики будут выглядеть в нем несколько иначе. Например, вместо «правила правой руки» нужно пользоваться «правилом левой руки» и наоборот.

Из всего сказанного можно сделать два вывода. Во-первых, всевозможные базисы одного и того же пространства разделяются на два класса: положительно и отрицательно ориентированные. Во-вторых, результаты, полученные с использованием базиса одной ориентации, нужно иногда корректировать (как правило менять знак ответа), если они применяются к пространству другой ориентации. Это пригодится в дальнейшем, например, при изучении интегралов по контуру, интегралов по поверхности, в теории поля.

Но нужно понимать, что обе ориентации в математическом смысле равноправны. Здесь та же ситуация, что и в правилах дорожного движения. Правостороннее движение ничем не лучше и не хуже левостороннего. Но во избежание неприятностей (в нашем случае ошибок) нужно договориться, каким из них пользоваться. Обычно считают, что канонический базис ориентирован положительно. Ниже мы будем также придерживаться этого соглашения.

*Ориентированным объемом* параллелепипеда в трехмерном пространстве называется его объем, взятый со знаком ориентации базиса, на котором он построен. Аналогично определяются *ориентированная площадь* и *ориентированная длина*. Так (см. рис. 12) параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, имеет положительную площадь, а параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{g}_1'$ и $\mathbf{g}_2'$, – отрицательную. Ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах канонического базиса, благодаря соглашению о положительной ориентации канонического базиса равен $+1$.

Понятие ориентированного объема очень удобно, так как несмотря на то, что содержит в себе больше информации, чем обычный объем, является более простой функцией. Ситуация здесь точно такая же, как в случае двух функций $y = x$ и $y = |x|$. Первая из них несет больше информации, чем вторая, поскольку кроме абсолютного значения переменной $x$ дает также и ее знак. При этом первая функция является более простой, хотя бы потому, что ее график может нарисовать большее число студентов, чем график второй. Если это соображение не убеждает, то можно сказать, что первая функция линейна и дифференцируема на всей числовой оси, а вторая не обладает ни одним из этих свойств.

З а д а н и е . Проверьте, что приведенный выше пример с функциями $y = |x|$ и $y = x$ реализуется в одномерном случае. Первая функция – это длина вектора $\mathbf{g}_1$, имеющего координату $x$, а вторая – его ориентированная длина.

П е р е й д е м т е п е р ь к о п р е д е л е н и ю о р и е н т а ц и и в м н о г о м е р н ы х п р о с т р а н с т в а х . Здесь сложно оперировать такими геометрическими понятиями, как «вправо», «по часовой стрелке» и «со стороны». Значительно легче перенести в многомерные пространства понятие ориентированного объема, а затем определить ориентацию базиса как знак ориентированного объема параллелепипеда, построенного на этом базисе. Такой путь не только позволит определить ориентацию в многомерных пространствах, но и предоставит простой алгоритм вычисления объема параллелепипеда в пространствах любой размерности.

Предварительно выясним свойства ориентированного объема (площади, длины) и для этого дадим несколько необходимых определений.

Пусть $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n\}$ – набор из $n$ векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Функции $\omega(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n)$, сопоставляющие каждому такому набору некоторое число, называют *функционалами*. Например, функционалом является объем $V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n)$ параллелепипеда, построенного на векторах из $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n\}$ как на ребрах. Аналогично функционалами являются ориентированный объем $V_{or}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$, ориентированная площадь $S_{or}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ или ориентированная длина $L_{or}(\mathbf{g}_1)$.

Говорят, что функционал $\omega(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n)$ *линеен по каждому своему аргументу*, если он представляет собой линейную функцию любого своего аргумента при фиксированных остальных аргументах. Для краткости такие функционалы называют *полилинейными*, а в случае двух переменных – *билинейными функционалами*. Простейшим примером полилинейного функционала может служить произведение первых координат всех векторов из набора $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n\}$.

Функционал $\omega(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n)$ называется *кососимметрическим*, если он меняет знак при перестановке любых двух векторов $\mathbf{g}_s$ и $\mathbf{g}_k$ в списке своих аргументов. То есть

$$\omega(\ldots,\mathbf{g}_s,\ldots,\mathbf{g}_k,\ldots)=-\omega(\ldots,\mathbf{g}_k,\ldots,\mathbf{g}_s,\ldots).$$

Л е м м а 2 . Ориентированные объем, площадь, длина являются кососимметрическими билинейными функционалами, принимающим на каноническом базисе значение $+1$.

З а м е ч а н и е . Последнее свойство связано с тем, что канонический базис считается положительно ориентированным.

◀ Для ориентированной длины это утверждение очевидно. Проверим его для ориентированной площади. Для ориентированного объема рассуждения полностью аналогичны.

Пусть параллелограмм построен на векторах $\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}$, и $S_{or}(\mathbf{g},\mathbf{f})$ – его ориентированная площадь. По определению знак ориентированной площади определяется знаком ориентации пары векторов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}$, из которых первым считается вектор $\mathbf{g}$, а вторым – вектор $\mathbf{f}$, так как именно в таком порядке они перечислены в списке аргументов ориентированной площади. Если вращение от вектора $\mathbf{g}$ к вектору $\mathbf{f}$ по кратчайшему пути происходит по часовой стрелке, то по определению ориентация положительна и, следовательно, ориентированная площадь положительна. В противном случае ориентированная площадь отрицательна. Поменяем теперь местами аргументы ориентированной площади, то есть рассмотрим ориентированную площадь $S_{or}(\mathbf{f},\mathbf{g})$. Теперь вектор $\mathbf{f}$ является первым, а вектор $\mathbf{g}$ – вторым. Параллелограмм, построенный на этих векторах, останется прежним, но его ориентированная площадь поменяет знак, так как теперь нужно проверять, как происходит вращение от вектора $\mathbf{f}$ к вектору $\mathbf{g}$, а это вращение всегда противоположно вращению от $\mathbf{g}$ к $\mathbf{f}$. Таким образом $S_{or}(\mathbf{f},\mathbf{g})=-S_{or}(\mathbf{g},\mathbf{f})$, что и означает кососимметричность ориентированной площади.

Пусть $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ – канонический базис. Тогда $S_{or}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=+1$, так как площадь квадрата со стороной 1 равна 1, и канонический базис, как условились, ориентирован положительно.

Остается установить линейность ориентированного объема по каждой переменной. Сделаем это, например, для второй переменной, так как никакого различия между ними нет. Нужно проверить два свойства:

$$S_{or}(\mathbf{f},\lambda\mathbf{g})=\lambda S_{or}(\mathbf{f},\mathbf{g}) \tag{12}$$

и

$$S_{or}(\mathbf{f},\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2)=S_{or}(\mathbf{f},\mathbf{g}_1)+S_{or}(\mathbf{f},\mathbf{g}_2) \tag{13}$$

для любых векторов $\mathbf{g}$ $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, и любого числа $\lambda$.

П р о в е р и м п е р в о е с в о й с т в о . Если $\lambda>0$, то вектор $\lambda\mathbf{g}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{g}$ (см. рис 14 слева). При этом ориентация сторон параллелограмма не меняется, а площадь возрастает в $\lambda$ раз. Так что в этом случае соотношение (12) верно. Если $\lambda<0$, то площадь возрастает в $|\lambda|$ раз, но меняется на противоположное направление вектора $\lambda\mathbf{g}$ и вместе с ним ориентация сторон параллелограмма(см. рис 14 справа). Поэтому равенство снова сохраняется. При $\lambda=0$ обе части равенства (12) равны нулю.

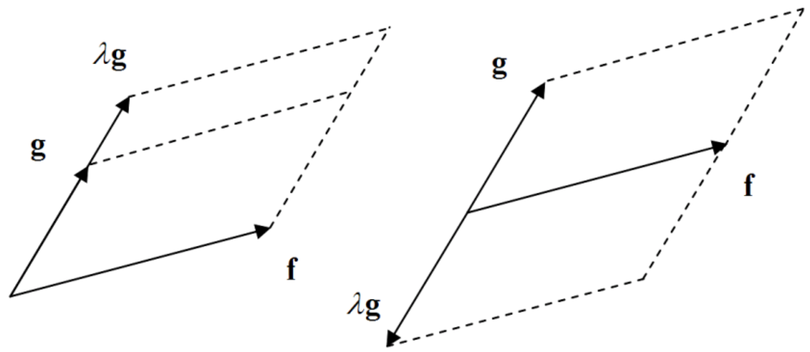



Рис. 14.

П р о в е р и м  в т о р о е  с в о й с т в о . Здесь также нужно различать два случая: слагаемые $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ находятся по одну сторону от вектора $\mathbf{f}$, рассматриваемого как основание параллелограмма, или по разные (см. рис. 15). В первом случае (рис. 15 слева) длина высота $\mathbf{h}$ параллелограмма $G$ со сторонами $\{\mathbf{g},\mathbf{f}\}$, является суммой длин высот $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ параллелограммов $G_1$ и $G_2$ со сторонами $\{\mathbf{g}_1,\mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{g}_2,\mathbf{f}\}$ соответственно. Поэтому $S(G)=S(G_1)+S(G_2)$ – площадь параллелограмма $G$ равна сумме площадей параллелограммов $G_1$ и $G_2$. Кроме того ориентация сторон у всех трех параллелограммов одинакова. Следовательно равенство (13) выполняется.

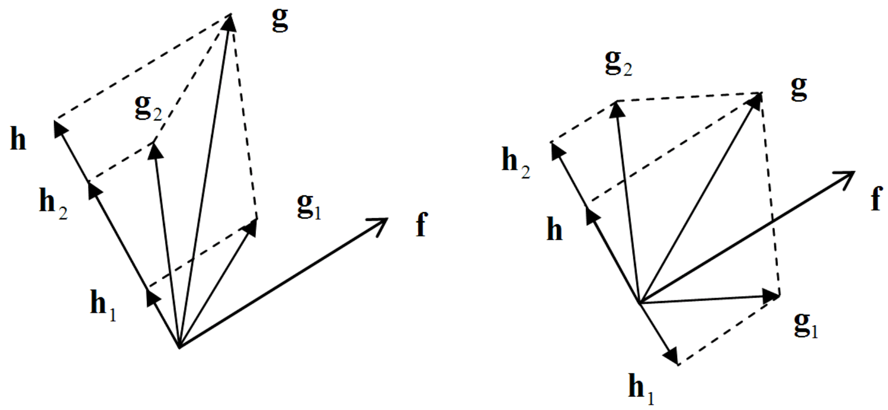



Рис. 15.

Во втором случае (см. рис 15 справа) слагаемые $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ находятся по разные стороны от вектора $\mathbf{f}$. Соответственно длина высоты $\mathbf{h}$ является разностью длин высот $\mathbf{h}_2$ и $\mathbf{h}_1$. Поэтому площадь параллелограмма $G$ является разностью площадей параллелограммов $G_2$ и $G_1$, то есть $S(G)=S(G_2)-S(G_1)$. Но теперь поменялась ориентация сторон у параллелограмма $G_1$. Поэтому для ориентированной площади и в этом случае выполнено равенство (13). ►

О п р е д е л е н и е 1 . О*риентированным объемом* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется линейный кососимметрический функционал, принимающий на каноническом базисе значение $+1$. *Ориентация базиса* определяется как знак ориентированного объема параллелепипеда, построенного на этом базисе.

З а м е ч а н и е . Это определение ориентации базиса пока является некорректным, так как не ясно, существует ли полилинейный функционал с указанными свойствами, и является ли он единственным. Кроме того не ясно, будет ли его значение на произвольном базисе совпадать по абсолютной величине с объемом параллелепипеда, построенного на этом базисе. Найти ответы на эти вопросы представляет собой основную трудность определения ориентации в многомерных пространствах.

Предварительно выясним некоторые свойства кососимметрических и линейных функционалов.

Л е м м а 3. Если какие-либо два аргумента кососимметрического функционала совпадают, то он равен нулю.

◀ Действительно, если совпадающие векторы поменять местами, то кососимметрический функционал должен поменять знак. С другой стороны, его аргументы останутся теми же, и поэтому функционал не изменится. Это возможно только в том случае, если он равен нулю. ▶

Л е м м а 4. Любой полилинейный функционал $\omega(\mathbf{g_1},\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n)$ взаимно однозначно задается своими значениями на всевозможных упорядоченных наборах из $n$ векторов, составленных из векторов канонического базиса $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$.

◀ Чтобы понять о чем идет речь, рассмотрим сначала двумерный случай. Пусть $\omega(\mathbf{g_1},\mathbf{g}_2)$ – линейный функционал, и его векторные аргументы имеют координаты: $\mathbf{g}_1=(a_{11},a_{21})$ и $\mathbf{g}_2=(a_{12},a_{22})$. (Здесь и далее используется удобное обозначение: $a_{ks}$ – $k$-тая координата $s$-того векторного аргумента.) Тогда, пользуясь сначала линейностью по первому аргументу, а затем по второму, получим:

$$\begin{aligned}&\omega(\mathbf{g_1},\mathbf{g}_2)=\omega(a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2,a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2)=a_{11}\omega(\mathbf{e}_1,a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2)+a_{21}\omega(\mathbf{e}_2,a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2)=\\&=a_{11}a_{12}\omega(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)+a_{11}a_{22}\omega(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)+a_{21}a_{12}\omega(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)+a_{21}a_{22}\omega(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2).\end{aligned}\tag{14}$$

Поэтому чтобы найти $\omega(\mathbf{g_1},\mathbf{g}_2)$, достаточно знать величины $\omega(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)$, $\omega(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)$, $\omega(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)$ и $\omega(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)$.

С другой стороны, если этим величинам придать произвольные значения, то формула (14) задает некоторый полилинейный функционал. Действительно, для любого векторного аргумента каждое слагаемое в сумме (14) содержит одну и только одну его координату, то есть является линейным по этому аргументу. Сумма линейных функций, очевидно, линейна.

Формулу (14) можно записать короче с помощью знака суммы:

$$\omega(\mathbf{g_1},\mathbf{g}_2)=\sum a_{j_1 1}a_{j_2 2}\omega(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2}),\tag{15}$$

где суммирование производится по всем возможным упорядоченным наборам $\{j_1,j_2\}$, в которых числа $j_1$ и $j_2$ равны либо $1$, либо $2$.

Совершенно те же рассуждения справедливы и в многомерном случае. Пусть, как и ранее, $a_{ks}$ – $k$-тая координата $s$-того вектора–аргумента. То есть $\mathbf{g}_s=a_{1s}\mathbf{e}_1+a_{2s}\mathbf{e}_2+...+a_{ns}\mathbf{e}_n$. Тогда полилинейный функционал можно представить в виде

$$\omega(\mathbf{g_1},\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n)=\sum a_{j_1 1}a_{j_2 2}...a_{j_n n}\omega(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},...,\mathbf{e}_{j_n}),\tag{16}$$

где суммирование производится по всевозможным упорядоченным наборам целых чисел $\{j_1,j_2,...,j_n\}$, принимающих значения $1,2,...,n$.

Далее нужно повторить те же рассуждения, что и в двумерном случае. ►

В о п р о с . Сколько слагаемых в сумме (16)? (Ответ: $n^n$.)

В случае кососимметрического функционала сумма (16) содержит несколько меньше слагаемых. Имеется в виду, что в этой сумме отсутствуют слагаемые, в которых какой-либо из базисных векторов встречается более, чем один раз, поскольку в силу леммы 3 эти слагаемые равны нулю. Поэтому остаются только слагаемые, которым соответствуют наборы индексов $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ с неповторяющимися числами. Такие наборы, в которых элементы не повторяются, называются *перестановками*, так как получаются из исходного набора, в рассматриваемом случае из набора чисел $\{1, 2, ..., n\}$, перестановкой его членов.

Таким образом для линейного кососимметрического функционала справедлива формула (16) с тем изменением, что суммирование производится только по всевозможным перестановкам чисел $\{1, 2, ..., n\}$.

В о п р о с . Сколько существует всевозможных перестановок чисел $\{1, 2, ..., n\}$, а значит, слагаемых в сумме (16)? (Ответ: $n!$.)

Любую перестановку можно свести к исходной за некоторое число шагов, каждый раз меняя местами какие-либо два ее элемента. Например,

$$\{2,3,1\} = \{3,2,1\} = \{1,2,3\}.$$

При каждой такой *парной* перестановке значение кососимметрического функционала $\omega\left(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, ..., \mathbf{e}_{j_n}\right)$ меняет знак. Поэтому, если перестановку $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$ можно привести к исходной перестановке $\{1, 2, ..., n\}$ за четное число парных перестановок, то значение функционала совпадает с его значением на каноническом базисе, то есть равно $\omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)$. Если для этого требуется нечетное число парных перестановок, то значение функционала равно $-\omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)$. Для краткости обозначим через $t(j_1, j_2, ..., j_n)$ *четность* перестановки $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$, то есть $t = 0$, если эту перестановку можно привести к исходной за четное число парных перестановок, и $t = 1$, если – за нечетное. Тогда формула (16) для полилинейного кососимметрического функционала приобретает вид:

$$\omega(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n) = \omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n) \sum (-1)^{t(j_1, j_2, ..., j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} ... a_{j_n n}.$$

где суммирование производится по всем перестановкам чисел $\{1, 2, ..., n\}$.

Из последней формулы можно сделать важный вывод. *Все полилинейные кососимметрические функционалы отличаются друг от друга только постоянным множителем, в качестве которого удобно рассматривать значение функционала на каноническом базисе.* В случае, когда это значение равно $+1$, представление еще упрощается.

Л е м м а 5 . Для полилинейного кососимметрического функционала, принимающего на каноническом базисе значение $+1$, имеет место представление

$$\omega(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n) = \sum (-1)^{t(j_1, j_2, ..., j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} ... a_{j_n n}, \qquad (17)$$

где $a_{ks}$ – $k$-тая координата $s$-того вектора–аргумента, и суммирование производится по всем перестановкам чисел $\{1,2,...,n\}$.

Все остальные полилинейные кососимметрические функционалы отличаются от этого функционала лишь постоянным множителем – своим значением на каноническом базисе.

З а м е ч а н и е . При определении четности $t(j_1, j_2,..., j_n)$ перестановки молчаливо предполагалось, что перестановку $\{j_1, j_2,..., j_n\}$ нельзя получить из исходного набора $\{1,2,...,n\}$ двумя способами: за четное число парных перестановок и за нечетное.

З а д а н и е . Докажите, что это действительно так и определение четности перестановки является корректным. (Подсказка: Рассмотрите для каждой перестановки $\{j_1, j_2,..., j_n\}$ число «беспорядков», то есть число пар, в которых большее число стоит левее меньшего. Например, в перестановке $(2,3,1)$ два «беспорядка», так как имеются две таких пары – $(2,1)$ и $(3,1)$. Проверьте, что каждая парная перестановка меняет четность числа «беспорядков».)

Т е о р е м а 3 . В пространстве $\mathbb{R}^n$ существует единственный полилинейный кососимметрический функционал, принимающий на каноническом базисе значение $+1$.

◄ Если такой функционал существует, то только один, так как по лемме 5 он должен быть полилинейным функционалом, задаваемым формулой (17).

Для доказательства существования функционала нужно проверить, что единственный кандидат на эту роль – полилинейный функционал (17), удовлетворяет нужным свойствам: на каноническом базисе принимает значение $+1$ и является кососимметрическим.

Первое легко проверяется подстановкой. Действительно, для канонического базиса отличны от нуля только координаты: $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = 1$. Поэтому из всей суммы ненулевым является всего лишь одно слагаемое $(-1)^{t(1,2,...,n)}\, a_{11}a_{22}...a_{nn} = +1$.

Остается проверить кососимметричность. Это тоже несложно. Каждое слагаемое в сумме (17) имеет вид $(-1)^{t(...j_s,...,j_k,...)} ...a_{j_s s}...a_{j_k k}...$. Поэтому, если поменять местами какие-либо два аргумента $\mathbf{g}_s$ и $\mathbf{g}_k$, то поменяются местами лишь индексы $s$ и $k$. При этом изменится только четность перестановки и, следовательно, знак слагаемого. ►

Итак, существование и единственность линейного кососимметрического функционала, принимающего на каноническом базисе значение $+1$, доказаны. Определение 1 оказалось корректным, и с этого момента в многомерных пространствах можно пользоваться терминами «ориентация» и «ориентированный объем».

О п р е д е л е н и е 2. Будем называть *ориентированным объемом параллелепипеда,* построенного на векторах базиса $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2,..., \mathbf{g}_n\}$, значение ориентированного объема на этом базисе.

Следующая теорема является основной в теории ориентированного объема и к тому же оправдывает введенный термин.

Т е о р е м а 4 . Абсолютное значение ориентированного объема любого параллелепипеда совпадает с его объемом.

Доказательству предпошлем ряд простых и полезных для дальнейшего утверждений, устанавливающих свойства ориентированного объема. Отметьте сходство этих свойств со свойствами объема.

Л е м м а 6 . Ориентированный объем равен нулю на каждом линейно зависимом наборе векторов. Другими словами, ориентированный объем вырожденного параллелепипеда равен нулю.

◀ Пусть $\{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n\}$ – линейно зависимая система векторов. Например, $\mathbf{g}_1 = \alpha_2\mathbf{g}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{g}_n$. Тогда

$$\omega(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n) = \omega(\alpha_2\mathbf{g}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{g}_n,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n) = \alpha_2\omega(\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n) + ... + \alpha_n\omega(\mathbf{g}_n,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n).$$

Согласно лемме 3 каждое слагаемое в правой части равно нулю, так как имеет пару совпадающих аргументов. ▶

Л е м м а 7 . Ориентированный объем не изменится, если к одному из его векторных аргументов прибавить линейную комбинацию остальных аргументов. Иначе говоря, ориентированный объем параллелепипеда не меняется при перемещении вершины параллелепипеда параллельно противолежащему основанию (см рис. 10).

◀ Заменим какой-либо векторный аргумент $\mathbf{g}_s$ вектором $\mathbf{g}'_s = \mathbf{g}_s + \mathbf{u}_s$, где $\mathbf{u}_s$ – линейная комбинация остальных аргументов. Тогда

$$\omega(...,\mathbf{g}'_s,...) = \omega(...,\mathbf{g}_s + \mathbf{u}_s,...) = \omega(...,\mathbf{g}_s,...) + \omega(...,\mathbf{u}_s,...) = \omega(...,\mathbf{g}_s,...),$$

так как второе слагаемое по предыдущей лемме равно нулю. ▶

◀ Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4

Пусть $G_n$ – параллелепипед, построенный на базисе $\{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,...,\mathbf{g}_n\}$. Обозначим через $X_k$ ( $k = 1,2,...,n$) одномерные линейные подпространства, натянутые на векторы $\mathbf{e}_k$ из канонического базиса. Для выяснения объема параллелепипеда $G_n$ приведем его к равновеликому прямоугольному параллелепипеду $G'_n$ с ребрами, лежащими в подпространствах $X_1, X_2,,..., X_n$.

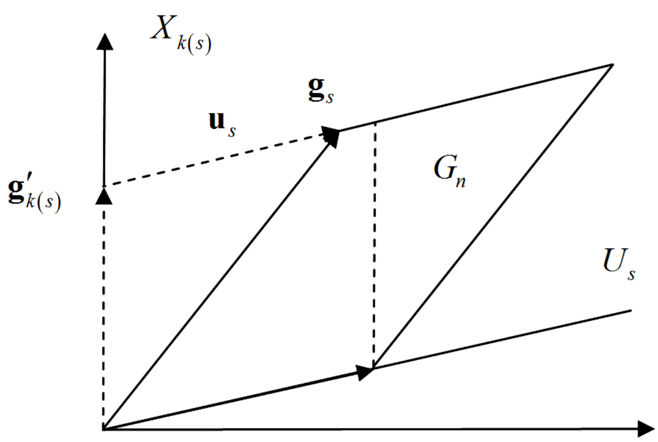



Рис. 16.

Пусть $U_1$ – подпространство, в котором лежит грань параллелепипеда, противолежащая ребру $\mathbf{g}_1$. Выберем такое подпространство $X_{k(1)}$, которое не лежит в подпространстве $U_1$. Это всегда можно сделать, так как размерность основания на единицу меньше размерности пространства.

Рассмотрим соответствующее прямой сумме $U_1 \oplus X_{k(1)}$ разложение вектора $\mathbf{g}_1$ в сумму проекций: $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}'_{k(1)} + \mathbf{u}_1$, где $\mathbf{g}'_{k(1)}$ – вектор из подпространства $X_{k(1)}$, а вектор $\mathbf{u}_1$ лежит в подпространстве $U_1$. При замене ребра $\mathbf{g}_1$ вектором $\mathbf{g}'_{k(1)}$ не меняется ни объем параллелепипеда (следствие 2 теоремы 2), ни его ориентированный объем (лемма 7). (См. рис. 16, на котором исходный параллелепипед $G_n$ показан сплошными линиями, а преобразованный – пунктирными).

Совершая подобную операцию со всеми остальными ребрами, придем к прямоугольному параллелепипеду $G_n'$, построенному на векторах $\left\{\mathbf{g}'_{k(1)},\mathbf{g}'_{k(2)},...,\mathbf{g}'_{k(n)}\right\}$, у которого и объем, и ориентированный объем те же, что и у исходного параллелепипеда $G_n$.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его ребер (см задние 1). Поэтому, если $a_s$ такое число, что $\mathbf{g}'_{k(s)}=\alpha_s\mathbf{e}_{k(s)}$, то

$$V\left(G_n'\right)=V\left(\mathbf{g}'_{k(1)},\mathbf{g}'_{k(2)},...,\mathbf{g}'_{k(n)}\right)=|\alpha_1||\alpha_2|...|\alpha_n|.$$

С другой стороны, ориентированный объем параллелепипеда равен:

$$V_{or}\left(G_n'\right)=V_{or}\left(\mathbf{g}'_{k(1)},\mathbf{g}'_{k(2)},...,\mathbf{g}'_{k(n)}\right)=V_{or}\left(\alpha_1\mathbf{e}_{k(1)},\alpha_2\mathbf{e}_{k(2)},...,\alpha_n\mathbf{e}_{k(n)}\right)=V_{or}\left(\mathbf{e}_{k(1)},\mathbf{e}_{k(2)},...,\mathbf{e}_{k(n)}\right)\alpha_1\alpha_2...\alpha_n=$$
$$=\left(-1\right)^{t(k(1),k(2),...,k(n))}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n.$$

Отсюда следует, что $\left|V_{or}\left(G_n'\right)\right|=V\left(G_n'\right)$, то есть абсолютная величина ориентированного объема параллелепипеда совпадает с его объемом. ►

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема дает следующий способ вычисления объема параллелепипеда в евклидовых пространствах любой размерности. Нужно подсчитать ориентированный объем параллелепипеда по формуле (17) и взять его абсолютное значение.

П р и м е р. Найдем площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{g}_1=\left(a_{11},a_{21}\right)$ и $\mathbf{g}_2=\left(a_{12},a_{22}\right)$.

Р е ш е н и е. Имеется всего две перестановки чисел $\{1,2\}$, это – $\{1,2\}$ и $\{2,1\}$. Поэтому по формуле (17) ориентированный объем равен:

$$V_{or}\left(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2\right)=\sum\left(-1\right)^{t(j_1,j_2)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}=\left(-1\right)^{t(1,2)}a_{11}a_{22}+\left(-1\right)^{t(2,1)}a_{21}a_{12}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

так что $V\left(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2\right)=\left|a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\right|$.

Сравните трудоемкость этого решения с решением той же самой задачи 4 § 2.

З а д а н и е. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{g}_1=\left(a_{11},a_{21},a_{31}\right)$, $\mathbf{g}_2=\left(a_{12},a_{22},a_{23}\right)$ и $\mathbf{g}_3=\left(a_{13},a_{23},a_{23}\right)$. (Подсказка: имеется 6 перестановок чисел $\{1,2,3\}$.)

В следующем параграфе будут даны несложные мнемонические правила, позволяющие легко перебирать все слагаемые в сумме (17) и определять стоящие перед ними знаки для двумерных и трехмерных параллелепипедов. А также будет выведена рекуррентная формула для вычисления ориентированных объемов любой размерности. Например, будет несложно подсчитать объем четырехмерного параллелепипеда, хотя в этом случае сумма (17) состоит из 24 слагаемых.

# § 5. Линейные преобразования и определители

Линейные преобразования изменяют форму геометрических тел и соответственно их объемы. Но, как выясняется в этом параграфе, объем изменяется самым простым образом: независимо от формы тела и его расположения в пространстве объем изменяется в одно и то же число раз. Так что коэффициент изменения объема тела при линейном преобразовании является характеристикой только самого преобразования. Определитель позволяет вычислить этот коэффициент, если преобразование задано своей матрицей.

## 1. Линейные преобразования геометрических тел

Будем полагать на протяжении этого пункта, что $A$ – взаимно-однозначное линейное преобразование евклидового пространства $\mathbb{R}^n$.

Л е м м а 1. Образ $AG$ параллелепипеда $G$, построенного на векторах $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_n\}$, также является параллелепипедом, причем построенным на векторах $\{A\mathbf{g}_1, A\mathbf{g}_2, ..., A\mathbf{g}_n\}$. Образ параллелепипеда, смещенного на вектор $\mathbf{x}_0$, является параллелепипедом, смещенным на вектор $A\mathbf{x}_0$.

З а д а н и е. Самостоятельно докажите это утверждение.

Т е о р е м а 1. Пусть $U$ – некоторое геометрическое тело в $n$-мерном пространстве, и $AU$ – его образ при линейном преобразовании $A$. Тогда отношение

$$k = \frac{\text{объем } AU}{\text{объем } U} \tag{18}$$

не зависит от выбора тела $U$. Число $k$ называется *коэффициентом изменения объема под действием преобразования* $A$.

◄ Разобьем пространство $\mathbb{R}^n$ на единичные кубы с тем, чтобы найти объем тела $U$. Пусть $n_1$ – количество кубов, попавших внутрь тела $U$, и $V_1$ – их общий объем. Тогда в образ $AU$ (см. рис. 1) попадет ровно $n_1$ одинаковых параллелепипедов, являющихся образами этих единичных кубов. Поэтому, если $k$ – отношение объема такого параллелепипеда к объему единичного куба, то общий объем $V_1'$ параллелепипедов, попавших в $AU$, равен $kV_1$.

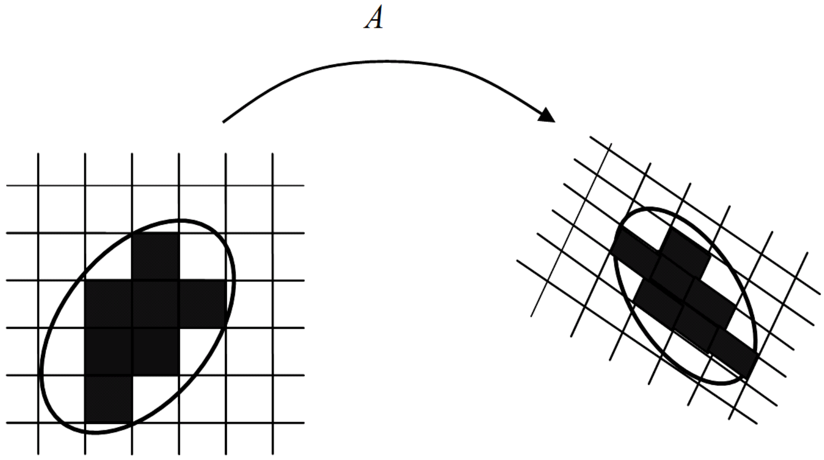



Рис. 1.

Заметим, что отношение $k$ сохраняется, если единичный куб заменить кубом с ребром $1/2, 1/4, \ldots$.

Будем теперь измельчать разбиение пространства на кубы. Получим последовательность оценок $V_1, V_2, \ldots$, определяющую объем тела $U$, и последовательность оценок $V_1' = kV_1,\ V_2' = kV_2, \ldots$, для определения объема тела $AU$. Переходя к пределу, получим:

$$\text{объем}\, AU = k \cdot \text{объем}\, U\ .$$

Так как число $k$ не зависит от выбора тела $U$, то утверждение теоремы доказано. ►

Теорема 1 показывает, как изменяется объем параллелепипеда под действием линейного преобразования. Интересным и важным вопросом является, как при этом изменяется ориентация параллелепипеда. Другими словами, может ли линейное преобразование поменять ориентацию какого-либо базиса, и зависит ли это от выбора того или иного базиса?

Ответ на первый вопрос очевиден. Например, в одномерном пространстве умножение каждого вектора на число $a$ представляет собой линейное преобразование, которое не меняет ориентацию любого базиса, если $a > 0$, и меняет, если $a < 0$. Ответ на второй вопрос дает теорема 2.

Т е о р е м а 2 . Пусть $A$ – линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, и $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n\}$ – базис этого пространства. Тогда отношение ориентированных объемов

$$\kappa = \frac{V_{or}\left(A\mathbf{g}_1, A\mathbf{g}_2, \ldots, A\mathbf{g}_n\right)}{V_{or}\left(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n\right)}$$

не зависит от выбора базиса $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n\}$ и численно равно ориентированному объему образа единичного куба при преобразовании $A$:

$$\kappa = V_{or}\left(A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{e}_n\right). \tag{19}$$

Число $\kappa$, по абсолютной величине совпадающее с коэффициентом $k$ изменения объема, называется *коэффициентом изменения ориентированного объема под действием преобразования* $A$.

◄ Рассмотрим функционал $\omega(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n) = V_{or}\left(A\mathbf{g}_1, A\mathbf{g}_2, \ldots, A\mathbf{g}_n\right)$. Благодаря линейности преобразования $A$ – это полилинейный функционал, очевидно, являющийся кососимметрическим. Поскольку все полилинейные кососимметрические функционалы отличаются друг от друга лишь постоянным множителем (лемма 5 § 4), то отношение $\kappa$ не зависит выбора базиса $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n\}$. Найти отношение $\kappa$ удобней всего, выбрав канонический базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, так как на нем ориентированный объем равен $+1$. ►

З а м е ч а н и е . Доказав теорему 2, можно говорить, что линейное преобразование $A$ *сохраняет ориентацию пространства*, если $\kappa$ положительное число, и *меняет ориентацию пространства*, если – отрицательное. В первом случае образы положительно ориентированных базисов при преобразовании $A$ ориентированы положительно, а во втором случае – отрицательно.

## 2. Определители

Теперь возникает задача, как подсчитать коэффициент изменения объема и ориентированного объема под действием данного линейного преобразования. Это понадобится уже в следующем параграфе при решении систем линейных уравнений, а также в дальнейшем курсе высшей математики при интегрировании в многомерных пространствах и решении дифференциальных уравнений.

Пусть преобразование $A$ пространства $\mathbb{R}^n$ задано своей матрицей $A=\left(a_{ks}\right)$ размерности $n\times n$. Напомним, это означает, что $s$-тый столбец матрицы $A$ состоит из координат вектора $A\mathbf{e}_s$ в каноническом базисе $\left\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\right\}$. Так что $a_{ks}$ – $k$-тая координата $s$-того вектора-столбца.

О п р е д е л е н и е 1. *Определителем* матрицы $A$ называется ориентированный объем параллелепипеда, построенного на ее столбцах. В частности, если эта матрица рассматривается как матрица линейного преобразования $A$, то определитель – это коэффициент $\kappa=V_{or}\left(A\mathbf{e}_1,A\mathbf{e}_2,...,A\mathbf{e}_n\right)$ изменения ориентированного объема под действием преобразования $A$.

Обозначают определитель матрицы $A$ через $\det A$, или $\left|A\right|$. Последний способ используют, как правило, если матрица задана не с помощью обозначающего ее символа, а непосредственно перечислением всех ее элементов. Например, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$. Размерность матрицы $A$, то есть число $n$, называют *порядком определителя*.

З а д а н и е .

1. Чему равен определитель матрицы первого порядка? (Ответ: ее единственному элементу.)
2. Найдите определители

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & .. & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & .. & 1\end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix}d_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & d_2 & .. & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & .. & d_n\end{vmatrix}.$$

Такие матрицы, у которых все элементы кроме, стоящих на диагонали, равны нулю, называются *диагональными*. (Подсказка: первый из этих определителей – это ориентированный объем куба, построенного на каноническом базисе. Или по другому, это – коэффициент изменения ориентированного объема при тождественном преобразовании $I\mathbf{x}=\mathbf{x}$. Ответ: 1, $d_1d_2...d_n$.)

3. Чему равен определитель произведения двух матриц? Напомним, что произведение $AB$ двух матриц $A$ и $B$ является матрицей преобразования, которое состоит в том, что сначала действует преобразование $B$, а потом преобразование $A$. (Ответ: $\det AB=\det A\det B$.)

Следующие свойства определителя как ориентированного объема уже доказаны в предыдущем параграфе. Однако следует их запомнить и в матричных терминах, так как это помогает при практических вычислениях.

Теорема 3. (Свойства определителя). Пусть $A=(\mathbf{a}_1;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n)$ – квадратная матрица со столбцами $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_n)$, рассматриваемыми как векторы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда,

1. если какой-либо столбец $\mathbf{a}_s$ представлен в виде суммы двух векторов-столбцов $\mathbf{a}_s=\mathbf{a}'_s+\mathbf{a}''_s$, то
$$\det(...;\mathbf{a}'_s+\mathbf{a}''_s;...)=\det(...;\mathbf{a}'_s;..._n)+\det(...;\mathbf{a}'';...);$$
2. если какой-либо столбец $\mathbf{a}_s$ умножить на число $\lambda$, то
$$\det(...;\lambda\mathbf{a}_s;...)=\lambda\det(...;\mathbf{a}_s;...);$$

Предупреждение. Равенство $\det(\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2)=\lambda_1\det A_1+\lambda_2\det A_2$ для двух матриц $A_1$, $A_2$ и любых чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$, как следует из свойств 1 и 2, *абсолютно неверно*. Взятие определителя не является линейной операцией над матрицей – определитель линеен по каждому столбцу в отдельности. Это легко запомнить – если увеличить каждую сторону куба в два раза, то объем возрастет в восемь раз.

3. определитель изменит знак, но сохранит абсолютную величину, если какие-либо два столбца $\mathbf{a}_s$ и $\mathbf{a}_k$ поменять местами, то
$$\det(....;\mathbf{a}_s;....;\mathbf{a}_k;...)=-\det(....;\mathbf{a}_k;....;\mathbf{a}_s;...);$$
4. если из какого либо столбца $\mathbf{a}_s$ вычесть линейную комбинацию $\mathbf{u}_s$ других столбцов, то определитель матрицы не изменится:
$$\det(...;\mathbf{a}_s+\mathbf{u}_s;...)=\det(...;\mathbf{a}_s;...);$$
5. определитель можно вычислить по формуле
$$\det A=\sum(-1)^{t(j_1,j_2,...,j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}...a_{j_n n}, \qquad (20)$$
где $a_{ks}$ – элементы матрицы $A$, и суммирование производится по всем перестановкам чисел $\{1,2,...,n\}$;
6. определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда столбцы матрицы линейно зависимы.

◄ Первые три свойства вытекают из определения, так как это – полилинейность и кососимметричность определителя, рассматриваемого как функционал своих столбцов. Свойство 4 – это другая формулировка леммы 7 предыдущего параграфа. Формула (17) получена в лемме 5. Заметим, что в доказываемой теореме и лемме 5 используется одно и то же обозначение: $a_{ks}$ – $k$-тая координата $s$- того столбца.

И, наконец, свойство 6 вытекает из следствия 1 предыдущего параграфа. ►

Вопросы.

1. Чему равен определитель, один столбец, которого состоит только из нулей?
2. Что можно сказать об определителе, у которого совпадают два столбца?
3. Тот же вопрос в случае, если один столбец пропорционален другому?
4. Чему равен определитель, если какая-либо его строка равна нулю?

Замечание. Как это ни странно, но последнее геометрически совершенно ясное свойство 6 определителя является наиболее часто используемым. Хотя оно непосредственно не связано со свойствами ориентированного объема и попросту следует из определения объема параллелепипеда. Чтобы подчеркнуть это, сформулируем в виде отдельной теоремы наиболее эффективный признак существования обратного преобразования Справедливость этой теоремы вытекает из утверждения о том, что обратное преобразование $A^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда образ базиса при преобразовании $A$ тоже является базисом (теорема 12 § 3).

Т е о р е м а 4. Преобразование $A$ взаимно однозначно (и как следствие имеет обратное преобразование $A^{-1}$) в том и только в том случае, если определитель его матрицы не равен нулю.

Это и есть то главное, что определяет определитель. Эффективность сформулированного признака объясняется тем, что кроме формулы (17) существует более простой способ вычисления определителя любой матрицы. Он основан на рекуррентной формуле, выражающей определитель порядка $n$ через определители порядка $n-1$. Последовательно применяя эту формулу, можно добраться до определителей первого порядка и тем самым вычислить исходный определитель.

В ы ч и с л е н и е о п р е д е л и т е л я.

Пусть $A=\left(a_{sk}\right)$ – квадратная матрица порядка $n$. Представим ее первый столбец $\mathbf{a}_1$ в виде его разложения: $\mathbf{g}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + ... + a_{n1}\mathbf{e}_n$ по каноническому базису, то есть в виде

$$\mathbf{a}_1 = a_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix} + ... + a_{n1}\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}$$

Тогда по свойствам 1 и 2

$$\det A = a_{11}\det B_1 + a_{21}\det B_2 + ... + a_{n1}\det B_n, \tag{21}$$

где матрицы $B_s$ получается из матрицы $A$ заменой столбца $\mathbf{a}_1$ столбцом $\mathbf{e}_s$.

Рассмотрим одну из матриц в правой части этого равенства:

$$B_s = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & a_{s2} & a_{s3} & ... & a_{sn} \\ - & - & - & - & - \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По свойству 3 определитель не изменится, если из второго столбца вычесть первый, умноженный на $a_{s2}$, и так далее до $n$-ного столбца, из которого нужно вычесть первый, умноженный на $a_{sn}$. Получим матрицу

$$B_s' = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

определитель которой совпадает с определителем матрицы $B_s$. В этой матрице все элементы, стоящие в $s$-той строке равны нулю кроме единицы в первом столбце. Иначе говоря, все столбцы этой матрицы ортогональны первому столбцу. Чтобы вычислить определитель получившейся матрицы, воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Л е м м а 2. Пусть в матрице $(\mathbf{a}_1;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n)$ первый столбец $\mathbf{a}_1$ совпадает с одним из векторов $\mathbf{e}_s$ канонического базиса $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$, а все остальные векторы-столбцы ему ортогональны. Тогда

$$\det(\mathbf{e}_s;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n) = (-1)^{s-1}\det(\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n).$$

◀ Воспользуемся формулой (17) для вычисления определителя, стоящего в правой части:

$$\det(\mathbf{e}_s;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n) = \sum(-1)^{t(j_1,j_2,...,j_n)} a_{j_1 1}a_{j_2 2}...a_{j_n n},$$

где суммирование производится по всем перестановкам чисел $\{1,2,...,n\}$.

Однако из-за специального вида матрицы эта формула упрощается. Все координаты $a_{j_1 1}$ равны нулю, кроме координаты $a_{s1}=1$. Поэтому под знаком суммы остаются только слагаемые, для которых $j_1 = s$, то есть слагаемые вида $(-1)^{t(s,j_2,...,j_n)} a_{j_2 2}...a_{j_n n}$.

Перестановку $(s,j_2,...,j_n)$ можно привести к исходной перестановке $(1,2,...,n)$ в два этапа. На первом этапе упорядочить все индексы $j_k$, то есть привести ее к виду $(s,2,...,s-1,s+1,...,n)$, а на втором переместить индекс $s$ на свое место, совершив $s-1$ парную перестановку. Таким образом четность перестановки $(s,j_2,...,j_n)$ равна четности перестановки $(j_2,...,j_n)$, умноженной на $(-1)^{s-1}$. То есть $t(s,j_2,...,j_n)=(-1)^{s-1}t(j_2,...,j_n)$. Поэтому

$$\det(\mathbf{e}_s;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n) = (-1)^{s-1}\sum(-1)^{t(j_2,...,j_n)} a_{j_2 2}...a_{j_n n}.$$

Сумма в правой части берется по всем перестановкам индексов $(j_2,...,j_n)$ и является ни что иным, как определителем $\det(\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n)$.

Если такое «жонглирование» индексами Вам не понравилось, то вот другое, более изящное доказательство.

Рассмотрим в подпространстве $U_s$, ортогональном вектору $\mathbf{e}_s$, полилинейный кососимметрический функционал $\omega(\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_n)=\det(\mathbf{e}_s;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n)$, зависящий от $n-1$ вектора-столбца. Поскольку все полилинейные кососимметрические функционалы отличаются друг от друга только постоянным множителем, то функционалы $\det(\mathbf{e}_s;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n)$ и $\det(\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_n)$ связаны соотношением

$$\det(\mathbf{e}_s;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n) = \lambda\det(\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n).$$

Множитель $\lambda$ можно найти из условия, что на каноническом базисе $\{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_{s-1,}\mathbf{e}_{s+1},...,\mathbf{e}_n\}$ пространства $U_s$ определитель $\det(\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n)$ равен $+1$ То есть

$$\lambda = \det(\mathbf{e}_s;\mathbf{e}_1;...;\mathbf{e}_{s-1};\mathbf{e}_{s+1};...;\mathbf{e}_n).$$

Перестановка столбцов $\left(\mathbf{e}_s,\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{s-1,}\mathbf{e}_{s+1},\dots,\mathbf{e}_n\right)$ приводится к перестановке $\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\right)$, на которой определитель равен $+1$, с помощью $s-1$ парной перестановки. Поэтому $\lambda=\left(-1\right)^{s-1}$ ►

Продолжим вычисление определителя. По доказанной лемме

$$\det B_s=\det B_s'=\left(-1\right)^{s+1}\det B_s'',$$

где

$$B_s''=\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{(s+1)2} & \dots & a_{(s+1)n} \\ - & - & - \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица, получающаяся из исходной матрицы $A$, вычеркиванием $s$-той строки и первого столбца. Ее определитель называется минором $M_{s1}$ элемента $a_{s1}$.

Вообще, *минором* $M_{sk}$ *любого элемента* $a_{sk}$ *матрицы* $A$ называется определитель матрицы $n-1$-го порядка, получающейся вычеркиванием $s$-той строки и $k$-того столбца, то есть той строки и того столбца, на пересечении которых расположен элемент $a_{sk}$.

Итак, $\det B_s=\left(-1\right)^{s+1}M_{s1}$. Поэтому из равенства ( 2 1 ) окончательно получаем:

$$\det A=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\dots+\left(-1\right)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

Эта формула называется разложением определителя по первому столбцу. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

*Раскладывать определитель можно по любому столбцу*. Чтобы получить соответствующую формулу, можно провести для $k$-того столбца те же рассуждения, что и для первого. Но лучше поступить иначе. Переместим $k$-тый столбец на место первого, последовательно поменяв его местами со столбцами под номерами $k-1$, $k-2$ и так далее, пока он не окажется на первом месте. При этом знак определителя изменится на $\left(-1\right)^{k+1}$. Используя теперь формулу разложения определителя по первому столбцу, получим

$$\det A=\left(-1\right)^{1+k}\left(a_{1k}M_{1k}-a_{2k}M_{2k}+\dots+\left(-1\right)^{n-1}a_{nk}M_{nk}\right),$$

или

$$\det A=\left(-1\right)^{1+k}a_{1k}M_{1k}+\left(-1\right)^{2+k}a_{2k}M_{2k}+\dots+\left(-1\right)^{n+k}a_{nk}M_{nk} \qquad (3)$$

Эту формулу легко запомнить, поскольку знаки в сумме чередуются, и нужно только определить знак первого слагаемого. Он является плюсом для столбца с нечетным номером и минусом для столбца с четным номером.

Очень часто вводят обозначение $A_{sk}=\left(-1\right)^{s+k}M_{sk}$, уже учитывающее чередование знаков. Величина $A_{sk}$ называется *алгебраическим дополнением элемента* $a_{sk}$. Она совпадает с соответствующим минором, если сумма его индексов четная, и противоположна по знаку в противном случае. С помощью алгебраических дополнений формула разложения по $k$-тому столбцу записывается наиболее просто:

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}. \tag{4}$$

Может показаться, что ни одна из выведенных формул не пригодна для подсчета определителя, так как выражает его снова через другие определители. Однако, раскладывая определитель по какому-либо столбцу, мы приходим к определителям меньшего порядка. Поэтому можно снова применить формулу разложения и поступать так, пока не придем к определителям первого порядка, которые, как уже выяснено, равны своим единственным элементам. Этот процесс демонстрирует следующий пример, являющийся продолжением предыдущего.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(5\cdot|9| - 8\cdot|6|) - 4\cdot\left(2\cdot|9| - 8\cdot|3|\right) + 7\left(2\cdot|6| - 5\cdot|3|\right) =$$

$$= 1\cdot(5\cdot 9 - 8\cdot 6) - 4\cdot\left(2\cdot 9 - 8\cdot 3\right) + 7\left(2\cdot 6 - 5\cdot 3\right) = \ldots$$

З а м е ч а н и е. Определители матриц первого порядка, вроде $|9|$, в этой выкладке приведены для наглядности. Обычно их опускают для сокращения письма и сразу же пишут их значение, в данном случае 9.

Для наиболее простых определителей порядка 2 и 3 имеются несложные мнемонические правила их подсчета.

П р а в и л о д и а г о н а л е й. Раскладывая определитель второго порядка по первому столбцу, получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}.$$

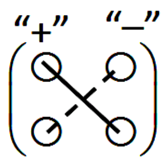



Рис. 2.

Эту формулу легко запомнить: определитель представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых представляет собой произведение двух элементов, стоящих на *главной диагонали* (сплошная черта на рис. 2), взятое со знаком плюс, а второе – произведение двух элементов, на *вспомогательной диагонали* (прерывистая линия), взятое со знаком минус.

П р а в и л о т р е у г о л ь н и к о в. Подсчитаем теперь определитель третьего порядка, снова используя формулу разложения по первому столбцу, а также правило диагоналей при вычислении определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

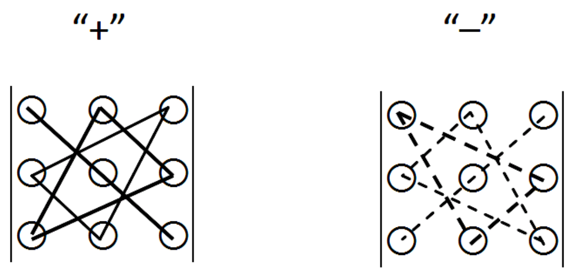


Рис. 3.

Чтобы запомнить эту довольно сложную формулу, посмотрите на рис. 3. Слева показаны главная диагональ и два равнобедренных треугольника с параллельными ей основаниями. Сомножители, стоящие на этой диагонали и в вершинах треугольников дают три слагаемых со знаком плюс. Справа показана дополнительная диагональ и два аналогичных треугольника, дающих три слагаемых со знаком минус.

Использование этого правила заметно облегчает вычисление. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 7\cdot2\cdot6 + 3\cdot4\cdot8 - 7\cdot5\cdot3 - 9\cdot2\cdot4 - 1\cdot6\cdot8 = \ldots$$

Для определителей четвертого порядка аналогичное правило слишком сложное – проще определитель разложить по какому-либо столбцу на миноры третьего порядка, а затем воспользоваться правилом треугольников.

З а д а н и е 1. Ответьте на следующие вопросы, используя только формулу разложения определителя по какому-либо столбцу.

1. Чему равен определитель, если какой-то его столбец состоит из нулей? Попытайтесь найти ответ на этот вопрос двумя способами: исходя из геометрического смысла определителя как ориентированного объема и с помощью формулы разложения.
2. Чему равен определитель, если из нулей состоит какая-либо его строка? (Подсказка: простой путь воспользоваться свойством 6, более сложный – формулой разложения.)
3. *Треугольной* матрицей (*верхне-* или *нижне-*) называется такая квадратная матрица, у которой все элементы ниже или выше главной диагонали равны нулю. Чему равен определитель такой матрицы? (Ответ: произведению элементов, стоящих на диагонали.)
4. Если матрицу порядка $n$ умножить на число $\lambda$, то как изменится ее определитель? (Ответ: в $\lambda^n$ раз.)

## 3. Определитель транспонированной матрицы

Неожиданным фактом является то, что в свойствах определителя, сформулированных в теореме 3, слово «столбец» можно всюду заменить словом «строка». Обычно это формулируется так: *в определителе столбцы и строки равноправны.* Ниже приводится доказательство этого геометрически неочевидного утверждения.

Начнем с получения еще одной формулы для вычисления определителя. Пусть $A = (a_{sk})$ – квадратная матрица порядка $n$. Представим каждый ее столбец $\mathbf{a}_k$ в виде суммы $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}'_k + \mathbf{a}''_k$, где

$$\mathbf{a}'_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{a}''_k = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Разбивая первый столбец на два указанных слагаемых, согласно свойству 1 получим:

$$\det A = \det\left(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\right) + \det\left(\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\right).$$

Первый из этих определителей легко вычислить разложением по первому столбцу, так как в этом столбце все элементы кроме, быть может, $a_{11}$ равны нулю. Поэтому

$$\det A = a_{11}A_{11} + \det\left(\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\right)$$

Чтобы подсчитать второй определитель, поступим аналогичным образом – разобьем на два слагаемых второй столбец и представим этот определитель в виде суммы двух определителей. Тот из них, в котором вторым столбцом является вектор $\mathbf{a}''_2$, легко вычисляется разложением по этому столбцу:

$$\det A = a_{11}A_{11} + \det\left(\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}_n\right) + \det\left(\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2, \dots, \mathbf{a}_n\right) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \det\left(\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2, \dots, \mathbf{a}_n\right).$$

Совершив подобную процедуру со всеми столбцами, получим равенство

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} + \det\left(\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2, \dots, \mathbf{a}''_n\right).$$

Последний определитель равен нулю, так как его первая строка состоит из одних нулей (см. задание 1п. 2). Поэтому

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Это формула, аналогичная формуле разложения определителя по первому столбцу, называется *разложением определителя по первой строке*.

Таким же образом можно найти формулу разложения определителя по любой строке, но лучше поступить по другому, так как наша цель – показать полное равноправие строк и столбцов. Введем очень полезное определение.

Определение 2. Пусть $A = \left(a_{sk}\right)$ –матрица размерности $m \times n$. *Транспонированной матрицей* $A$ называется матрица $A^T = \left(b_{sk}\right)$ размерности $n \times m$, для которой $b_{sk} = a_{ks}$. Проще говоря, матрица $A^T$ получается из матрицы $A$, если столбцы $A$ записать как строки.

Для квадратных матриц *операция транспонирования*, то есть переход от $A$ к $A^T$, оставляет на месте диагональные элементы матрицы и меняет местами элементы, симметричные относительно диагонали. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Теорема 5. Пусть $A$ – квадратная матрица. Тогда определители матриц $A$ и $A^T$ равны.

◄ Воспользуемся *методом полной математической индукции*. Это означает, что нужно доказать два утверждения, из которых очевидным образом следует утверждение теоремы.

1. Теорема верна для матриц порядка $n = 1$.
2. Если теорема верна для матриц порядка $n - 1$, то она верна и для матриц порядка $n$.

Первое утверждение вытекает из того простого соображения, что матрицы, состоящие из одного элемента, при транспонировании не меняются. Для доказательства второго утверждения применим к исходной матрице формулу разложения по первому столбцу, а к транспонированной матрице – формулу разложения по первой строке:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}, \ \det A^T = b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + \ldots + b_{1n}B_{1n}.$$

Теперь остается заметить, что для транспонированной матрицы $A^T$ любой элемент $b_{1k}$ равен $a_{k1}$, и соответствующее алгебраическое дополнение $B_{1k}$ вычисляется по матрице, транспонированной к матрице, по которой вычисляется алгебраическое дополнение $A_{k1}$. Так как по предположению определители порядка $n-1$ не меняются при транспонировании, то алгебраические дополнения $B_{1k}$ и $A_{k1}$ совпадают. Следовательно, равны и определители матриц $A$ и $A^T$. ►

С л е д с т в и е . В определителе столбцы и строки равноправны. В частности, определитель можно раскладывать не только по любому столбцу, но и по любой строке.

◄ При транспонировании матрицы строки становятся столбцами. Поэтому для них выполнены все свойства, сформулированные в теореме 3, если $\det A$ заменить на $\det A^T$. Но по предыдущей теореме эти величины совпадают. ►

Р е к о м е н д а ц и и по практическому вычислению определителей.

1. Если какой-либо столбец (или строка) имеет общий множитель, вынесите его за знак определителя. Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 27 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 27 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 27 \end{vmatrix} = 12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \ldots .$$

   Подсчет определителя после сделанных преобразований упрощается, поскольку входящие в него числа стали меньше. Трехзначное число, представляющее собой ответ, получится только после умножения на 12.
2. Иногда удобно, вычитая друг из друга столбцы (или строки), добиться того, чтобы как можно больше элементов матрицы стало нулями. Продолжая предыдущий пример, вычтем из второй и третьей строк первую строку, затем из второй утроенную третью:

$$\ldots = 12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -22 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \ldots` .$$

   Теперь при применении, например, правила треугольника получится всего одно ненулевое слагаемое.
3. При вычислении определителей второго и третьего порядка пользуйтесь правилами диагоналей и треугольника, а при вычислении определителей более высокого порядка – разложением по столбцу (или строке). Вычисления упрощаются, если раскладывать по столбцу (или строке), содержащей большое число нулей. Если таких нет, то часто имеет смысл применить прием, описанный в предыдущем пункте.

Еще один метод вычисления определителей высокого порядка, удобный для составления компьютерного алгоритма, будет дан в следующем параграфе.

## 4. Векторное произведение

Зададимся $n-1$-им вектором $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1}$ из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и для произвольного вектора $\mathbf{x}$ из этого же пространства рассмотрим определитель $\Delta(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{x}; \mathbf{g}_1; \mathbf{g}_2 ...; \mathbf{g}_{n-1})$ с векторами-столбцами $\mathbf{x}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1}$. В разложении этого определителя по первому столбцу

$$\Delta(\mathbf{x}) = x_1 A_{11} + x_2 A_{21} + ... + x_n A_{n1},$$

правую часть можно рассматривать как скалярное произведение вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на вектор $\mathbf{A} = (A_{11}, A_{21},, ..., A_{n1})$, составленный из алгебраических дополнений к элементам первого столбца. Таким образом вектор $\mathbf{A}$, зависящий только от векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1},$. позволяет записать определитель $\Delta(\mathbf{x})$ в виде

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{xA}. \qquad (22)$$

Определение 3. Вектор $\mathbf{A}$ называется *векторным произведением* векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1}$.

Векторное произведение обладает очень полезными свойствами.

Во-первых, векторное произведение ортогонально каждому своему сомножителю $\mathbf{g}_s$:

$$\mathbf{g}_s \mathbf{A} = \Delta(\mathbf{g}_s) = \det(\mathbf{g}_s; \mathbf{g}_1; \mathbf{g}_2 ...; \mathbf{g}_{n-1}) = 0,$$

так как в полученном определителе совпадают два столбца – первый и $s$-тый.

Во-вторых, система векторов $\{\mathbf{A}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1}\}$ ориентирована положительно:

$$\det(\mathbf{A}; \mathbf{g}_1; \mathbf{g}_2 ...; \mathbf{g}_{n-1}) = \Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{AA} \geq 0.$$

И, наконец, длина вектора $\mathbf{A}$ равна $n-1$-мерному объему $V_{n-1}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1})$ параллелепипеда, построенного, на векторах $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1}$.

Действительно, определитель $\Delta(\mathbf{A})$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1}$. Выберем вектор $\mathbf{A}$ в качестве высоты параллелепипеда, благо он ортогонален всем остальным его ребрам, и тогда $\Delta(\mathbf{A})$ есть произведение длины высоты, то есть длины вектора $\mathbf{A}$, на $n-1$-мерный объем основания, то есть на $V_{n-1}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1})$:

$$\mathbf{AA} = \Delta(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| V_{n-1}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1}).$$

Отсюда и следует третье свойство: $|\mathbf{A}| = V_{n-1}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_{n-1})$.

Эти три свойства полностью характеризуют векторное произведение $\mathbf{A}$. Первые два однозначно задают его направление, а третье – длину. Поэтому определение векторного произведения, данное в координатной форме, то есть зависящее от выбора ортонормированного базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$, на самом деле от выбора базиса не зависит и таким образом является вполне корректным. Кроме того можно дать другое, эквивалентное первому определение векторного произведения, никак не связанное с определителями, просто указав приведенные три его геометрические свойства.

Соотношение $\mathbf{A} = \left(A_{11}, A_{21}, ,..., A_{n1}\right)$ для вычисления векторного произведения не очень удобно как для запоминания, так и для практического вычисления. Поэтому стоит запомнить мнемоническую формулу:

$$\mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \mathbf{e}_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ \mathbf{e}_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где как и ранее $a_{ks}$ – $k$ -тая координата вектора $\mathbf{g}_s$.

Конечно, это никакой не определитель, поскольку в первом столбце стоят не числа, а вектора из какого-либо ортонормированного базиса, например, из канонического базиса. Но, если использовать формулу разложения по первому столбцу получится правильный ответ. Более того при разложении этого вроде бы определителя по любому столбцу или строке результат остается верным. В частности, в двухмерном и трехмерном случаях можно пользоваться правилами диагоналей и треугольников.

З а д а н и е . Выясните, почему это так.

П р и м е р . В трехмерном пространстве найти векторное произведение векторов $\mathbf{g}_1 = \left(1, 2, 3\right)$ и $\mathbf{g}_2 = \left(4, 5, 6\right)$.

Р е ш е н и е .

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 & 4 \\ \mathbf{e}_2 & 2 & 5 \\ \mathbf{e}_3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3,$$

или $\mathbf{A} = \left(-3, 6, -3\right)$.

Векторное произведение, дает простое алгебраическое решение двух часто встречающихся геометрических задач: нахождение вектора, перпендикулярного заданной гиперплоскости, и вычисление $n-1$-мерного объема $n-1$-мерного параллелепипеда, расположенного в $n$-мерном пространстве.

П р и м е р . Вектор $\mathbf{A} = \left(-3, 6, -3\right)$ (см. предыдущий пример) является ортогональным плоскости, в которой лежат вектора. $\mathbf{g}_1 = \left(1, 2, 3\right)$ и $\mathbf{g}_2 = \left(4, 5, 6\right)$, а площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна $S\left(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\right) = \left|\mathbf{A}\right| = \sqrt{\left(-3\right)^2 + 6^2 + \left(-3\right)^2} = \sqrt{54}$.

Термин «произведение» употребляется по отношению к векторному произведению необычным образом. В этом произведении должно участвовать не больше и не меньше, чем $n-1$ сомножитель. И только в трехмерном пространстве этот термин употребляется привычным образом – векторное произведение имеет два сомножителя. Для трехмерного пространства имеется специальное обозначение векторного произведения: $\mathbf{A} = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2$. Не нужно путать его со скалярным произведением. Векторное произведение – это *вектор*, а скалярное произведение – *число*.

Приведем свойства векторного произведения в трехмерном пространстве, поскольку оно будет часто встречаться в дальнейшем при изучении многих естественных наук. С помощью векторного произведения формулируются наиболее фундаментальные законы физики.

Например, векторное произведение фигурирует в уравнениях Максвелла, описывающих электромагнитные поля. С помощью векторного произведения вычисляется сила Лоренца, действующая на электрические заряды со стороны электромагнитного поля. Еще один пример дает момент силы в механике, определяемый как векторное произведение вектора силы на вектор, указывающего точку приложения этой силы.

Свойства векторного произведения.

1. Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ортогонально векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направлено так, что тройка векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ориентирована положительно.
2. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то есть $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.
3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ (антикоммутативность)
4. Векторное произведение линейно по каждому своему сомножителю:
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c};$$
$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$
5. Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарные (лежат на одной прямой).
6. Выражение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$, которое называют *смешанным* или *векторно-скалярным произведением* трех векторов, дает ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Причем $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{b}$.

◀ Доказательство. Первые два свойства уже установлены для векторного произведения в пространствах любой размерности и могут служить определением векторного произведения. Свойства 3 – 5 легко вытекают из свойств определителя, если воспользоваться формулой (23) при $n=3$. Если вам не нравится пользоваться подозрительной мнемонической формулой, то исходите из определения 3 векторного произведения: $\mathbf{A}=(A_{11},A_{21},A_{31})$, фактически рассматривая тот же самый определитель. Свойство 6 – это соотношение (22), с которого мы начали все рассмотрения. Неизменность смешанного произведения $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ при циклической перестановке сомножителей объясняется тем, что их совместная ориентация при этом сохраняется. ▶

Задание. Сформулируйте и докажите аналогичные свойства для векторного произведения в пространстве любой конечной размерности.

# § 6. Решение систем линейных уравнений.

В этом параграфе приводятся наиболее эффективные методы решения систем линейных уравнений. Два из них относятся к системам с одинаковым количеством уравнений и неизвестных. Кроме того предполагается, что определитель системы отличен от нуля. Третий пригоден для любых систем линейных уравнений без всяких ограничений.

## 1. Формулы Крамера

Пусть дана система $n$ линейных уравнений относительно того же числа неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2 \\ ---------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}. \qquad (24)$$

Как и ранее, для краткости будем записывать ее в векторной форме

$$A\mathbf{x} = f,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – векторы из пространства $\mathbb{R}^n$, и $A$ – линейное преобразование этого пространства с матрицей $A = (a_{ks})$. Напомним, что эта матрица называется *матрицей системы*, вектор $\mathbf{x}$ – *вектором неизвестных*, а вектор $\mathbf{f}$ – *вектором правых частей*.

Будем предполагать, что определитель матрицы системы не равен нулю: $\det A \neq 0$. В этом случае, как это следует из теоремы 4 § 5, рассматриваемая система имеет решение при любой правой части $\mathbf{f}$, причем только одно. Это же можно сформулировать по другому (см. теорему 11 § 3). Совокупность $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ столбцов матрицы $A$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Систему уравнений (10) можно тогда рассматривать как разложение вектора $\mathbf{f}$ в этом базисе с неизвестными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{f}. \qquad (25)$$

Обозначим через $\Delta$ определитель системы (10), то есть определитель матрицы $A$, и рассмотрим определитель $\Delta_s$, получающейся из определителя $\Delta$ заменой $s$-того столбца вектором $\mathbf{f}$:

$$\Delta_s = \det(\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_{s-1}; \mathbf{f}; \mathbf{a}_{s+1}; \ldots; \mathbf{a}_n).$$

Подставим в этот определитель вместо вектора $\mathbf{f}$ его разложение (25). При этом все слагаемые кроме $x_s\mathbf{a}_s$ можно сразу же отбросить, так как их сумма представляют собой линейную комбинацию остальных столбцов определителя (см. свойство 4 в теореме 3 § 5). В результате получим соотношение

$$\Delta_s = \det(\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_{s-1}; x_s\mathbf{a}_s; \mathbf{a}_{s+1}; \ldots; \mathbf{a}_n).$$

Вынося за знак определителя число $x_s$ (см. свойство 2 в теореме 3 § 5), получим соотношение $\Delta_s = x_s\Delta$. Отсюда

$$x_s = \frac{\Delta_s}{\Delta}. \qquad (26)$$

Это и есть формула Крамера для нахождения $x_s$.

Т е о р е м а 1 ( Ф о р м у л ы К р а м е р а ) . Если определитель $\Delta$ системы линейных уравнений (10) не равен нулю, то решения $x_s \left( s = 1, 2, \dots, n \right)$ этой системы можно найти по формулам (26), где $\Delta_s$ – определитель, полученный из определителя системы заменой $s$-того столбца столбцом правых частей.

П р и м е р . Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}.$$

Р е ш е н и е . Найдем прежде всего определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3 \neq 0 .$$

Так как определитель системы не равен нулю, можно использовать формулы Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = -6 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Решив систему уравнений, полезно сделать проверку, то есть попросту подставить решения в исходные уравнения и убедиться, что все правильно:

$$\begin{cases} -1 + 2 \cdot 2 = 3 \\ 4(-1) + 5 \cdot 2 = 6 \end{cases}.$$

З а м е ч а н и е . Метод решения уравнений по формулам Крамера обладает той особенностью, что каждое неизвестное находится в отдельности, независимо от других. Отсюда его следующие преимущества. Во-первых, он оптимален, когда требуется найти не все неизвестные, а только часть из них. Во-вторых, вероятность неизбежных ошибок при вычислениях в этом методе меньше, чем в остальных. Поэтому этот метод можно рекомендовать при решении систем небольшого, до четырех-пяти, числа уравнений. Для решений систем большего числа уравнений формулы Крамера становятся громоздкими из-за необходимости вычисления определителей высокого порядка.

## 2. Метод обратной матрицы.

Пусть по-прежнему определитель $\Delta$ системы линейных уравнений (10), или в векторной форме уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, отличен от нуля. Это условие гарантирует, что существует обратное отображение $A^{-1}$. Применим его к обеим частям уравнения: $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{f}$. По определению обратного отображения $A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, и поэтому $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{f}$. Решение системы найдено.

Таким образом решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы распадается на два этапа. Первый, найти матрицу $A^{-1}$, обратную матрице системы. Второй этап, умножить эту матрицу на вектор-столбец правых частей.

Если второй этап никаких трудностей не вызывает, то первый этап – нахождение для заданной матрицы матрицу, обратную ей, – не такое простое дело. Этим сейчас и займемся.

Н а х о ж д е н и е о б р а т н о й м а т р и ц ы .

Наиболее просто было бы исходить из определения обратной матрицы, то есть из соотношения $A^{-1}A = I$, где $I$ – матрица тождественного преобразования, то есть матрица, все элементы которой равны нулю, кроме единиц на главной диагонали. Это соотношение можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $n^2$ неизвестных элементов обратной матрицы. Однако решить такую систему сложнее, чем исходную, из-за большего числа уравнений. Поэтому воспользуемся значительно более остроумным подходом.

А л г о р и т м н а х о ж д е н и я о б р а т н о й м а т р и ц ы .

Пусть дана матрица $A$, и $\det A \neq 0$.

1. Для каждого элемента $a_{ks}$ матрицы находим его алгебраическое дополнение $A_{ks}$.
2. Составляем матрицу $(A_{ks})$ из алгебраических дополнений. (Заметьте, что в этой матрице каждое алгебраическое дополнение стоит на том же месте, что и соответствующий элемент в исходной матрице.)
3. Транспонируем полученную матрицу, то есть находим матрицу $(A_{ks})^T = (A_{sk})$.
4. Делим транспонированную матрицу на определитель $\det A$ исходной матрицы. Полученный результат и есть искомая обратная матрица:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ks})^T.$$

П р и м е р . Решим уравнение из предыдущего примера на этот раз методом обратной матрицы. Матрица системы –
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$
и, как уже вычислено, ее определитель – $\det A = -3$. На первом этапе найдем обратную матрицу.

1. Согласно первому пункту алгоритма находим алгебраические дополнения:
$$\begin{aligned} A_{11} &= 5, \; A_{12} = -4 \\ A_{21} &= -2, \; A_{22} = 1. \end{aligned},$$
2. составляем из них матрицу:
$$(A_{ks}) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$
3. и транспонируем ее:
$$(A_{ks})^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. И, наконец, в соответствии с последним пунктом алгоритма получаем обратную матрицу:
$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е . Не нужно вносить множитель под знак матрицы. Наоборот, любые вычисления с матрицами, как правило, удобней проводить, вынося за знак матрицы общий множитель всех ее элементов.

Выполним второй этап решения уравнений:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{f} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5\cdot 1+(-2)2 \\ (-4)1+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда следует ответ: $x_1 = -1$, и $x_2 = 2$.

З а м е ч а н и е. Приведенная выкладка с учебными целями записана очень подробно. При практических вычислениях, например, первое и третье числовые преобразования на письме можно пропустить.

Следующая теорема дает обоснование алгоритма нахождения обратной матрицы.

Т е о р е м а 2. Матрица $A^{-1}$, найденная при выполнении приведенного выше алгоритма, является матрицей, обратной матрице $A$.

◄ Просто проверим, что $A^{-1}A = I$.

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ - & - & - & - \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{nk} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элемент $i_{ks}$ произведения этих двух матриц равен:

$$i_{ks} = a_{1s}A_{1k} + a_{2s}A_{2k} + \dots + a_{ns}A_{nk}.$$

Сравнивая это соотношение с формулой (4) предыдущего параграфа, найдем, что при $k = s$ – это разложение определителя матрицы $A$ по $s$-тому столбцу. Поэтому $i_{ks} = \det A$, и диагональные элементы произведения $A^{-1}A$ равны единице. При $k \neq s$ – это разложение по $k$-тому столбцу определителя, у которого $k$-тый столбец совпадает с $s$-тым. В случае такого совпадения столбцы определителя образуют линейно зависимую систему, и определитель равен нулю. Значит, все недиагональные элементы произведения $A^{-1}A$ равны нулю. ►

З а м е ч а н и е. Метод обратной матрицы достаточно трудоемок, особенно при повышении числа $n$ уравнений в системе. Это связано с быстро растущим количеством ($n^2$) алгебраических дополнений, которые необходимо найти. Однако, этот метод вне конкуренции, если нужно решить большое число систем, которые отличаются друг от друга только правыми частями. В этом случае самую трудоемкую часть работы по нахождению обратной матрицы достаточно выполнить всего один раз.

## 3. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Этот метод наиболее универсален, так как позволяет решать системы линейных уравнений, у которых число неизвестных и число уравнений могут не совпадать. Кроме того этот метод дает наиболее простой способ вычисления ранга любой матрицы, а также определителя квадратной матрицы. В частности, можно узнать без теорем Кроникера-Капелли и Фредгольма, имеет ли система решение и является ли оно единственным. Метод Гаусса требует меньшее число арифметических операций, чем другие методы решений систем линейных уравнений, и поэтому применяется в компьютерных программах.

Вы наверное будете удивлены, если узнаете, что уже хорошо знакомы с таким замечательным методом. Это – метод исключения неизвестных, который изучают в школе.

Решим методом исключений уже рассмотренную в предыдущих пунктах систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}.$$

На первом шаге найдем из первого уравнения какое-нибудь неизвестное, например, $x_1$:

$$x_1 = 3 - 2x_2,$$

и *исключим* его из второго уравнения:

$$4(3 - 2x_2) + 5x_2 = 6.$$

Теперь, приводя подобные члены, получим:

$$[5 - 2\cdot 4]x_2 = [6 - 3\cdot 4] \Leftrightarrow -3x_2 = -6$$

Откуда после деления на $-3$ найдем: $x_2 = 2$. Возвращаясь к первому уравнению, вычислим и второе неизвестное: $x_1 = 3 - 2x_2 = 3 - 2\cdot 2 = -1$.

Теперь слегка усовершенствуем этот метод, чтобы было меньше письма. Любую систему уравнений можно задать ее расширенной матрицей. Поэтому на первом шаге, вместо того, чтобы записывать решаемую систему выпишем только ее расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычтем из второй строки первую строку, умноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & [5 - 2\cdot 4] & [6 - 3\cdot 4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix},$$

и поделим вторую строку на $-3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Это можно делать, так как любое уравнение можно умножить на число и можно из одного уравнения вычесть другое. При этих действиях система перейдет в эквивалентную в том смысле, что новая система будет иметь те же самые решения.

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases},$$

в которой неизвестное $x_2$ уже найдено, а неизвестное $x_1$, как и ранее, нужно непосредственно найти из первого уравнения.

Заметьте, что в обоих случаях проделано одно и тоже. Даже арифметические вычисления, они специально выделены квадратными скобками, в обоих решениях одни и те же, включая деление на $-3$. Вычитание из второй строки учетверенной первой соответствует исключению неизвестного $x_1$ из второго уравнение. Множитель 4 подобран именно с целью, чтобы после вычитания во второй строке на первом месте стоял нуль.

Особого сокращения письма пока не получилось, разве что не пришлось писать обозначения для искомых величин (12 раз). Их роль играет номер столбца в расширенной матрице системы. Однако при увеличении числа неизвестных сокращение письма становится значительным, а главное, все вычисления скомпонованы в таблице, причем так, что при решении вся информация содержится в последней обрабатываемой таблице, а предыдущие уже не нужны. Это понижает вероятность ошибки.

Пусть теперь дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2 \\ -------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = f_m \end{cases}, \qquad (27)$$

$m$ линейных уравнений относительно $n$ неизвестных.

Выпишем все разрешенные операции, которые можно делать с ее расширенной матрицей.

Лемма 1. Система линейных уравнений переходит в эквивалентную, если в ее расширенной матрице

1. какую-либо строку разделить на произвольное число;
2. поменять местами любые две строки;
3. поменять местами любые два столбца, не трогая столбец свободных членов;
4. из какой-либо строки вычесть линейную комбинацию других строк.

Замечание. Утверждение 3 справедливо только в том случае, если одновременно изменить нумерацию соответствующих этим столбцам неизвестных. Поэтому будьте внимательны, чтобы не забыть это сделать.

Утверждения 2 и 3 можно очевидным образом усилить – разрешается переставлять строки и столбцы в любом порядке. Последние, конечно, с учетом того, что столбец свободных членов трогать нельзя.

Алгоритм метода Гаусса состоит из двух этапов. На первом из них расширенная матрица приводится к *треугольному* (лучше сказать *трапецеидальному*) виду, когда ниже главной диагонали, исходящей из верхнего левого угла, находятся только нули. На втором этапе, который называется *обратным ходом*, по матрице, приведенной к треугольному виду, восстанавливается система уравнений, эквивалентная исходной, и решается снизу вверх. Смысл приведения системы уравнений к треугольному виду заключается в том, что при последовательном, снизу вверх, решении такой системы в каждом следующем уравнении имеется всего одно неизвестное, так что его легко решить.

Алгоритм метода Гаусса. Первый этап.

Пусть дана расширенная матрица системы $m$ линейных уравнений относительно $n$ неизвестных:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & f_2 \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & f_m \end{pmatrix}.$$

1. Делим первую строку на $a_{11}$. Если этот элемент равен нулю, то заранее первую строку поменяем местами с какой-либо другой строкой, у которой элемент в первом столбце отличен от нуля. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & f'_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & f_2 \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & f_m \end{pmatrix}.$$

2. Вычтем теперь из второй строки первую строку, умноженную на $a_{21}$, так чтобы на месте этого элемента получился нуль. Затем из третьей строки вычтем первую, умноженную на $a_{31}$, и так далее, пока не получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & f'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & f'_2 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & f'_m \end{pmatrix}.$$

Если в полученной матрице найдется строка, состоящая только из нулей, то отбросим (вычеркнем) ее, поскольку уравнение, которое ей соответствует, является следствием первого уравнения и не несет никакой дополнительной информации. Поэтому число строк в этой матрице на самом деле – $m' \le m$.

Если же какая-нибудь строка имеет нули во всех столбцах кроме последнего, то соответствующее этой строке уравнение не удовлетворяется ни при каких значениях неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Это означает, что исходная система уравнений несовместна, то есть не имеет ни одного решения. На этом, конечно, решение данной системы завершается.

Заметим, что выделенный пунктирной линией блок представляет собой расширенную матрицу системы, из которой исключена неизвестная величина $x_1$.

3. Аналогичным образом, то есть следуя инструкциям п.п. 1 и 2, примененным к выделенной пунктирной линией матрице, исключим неизвестную $x_2$. Единственным отличием на этом шаге может быть только случай, когда весь ее первый столбец состоит из нулей. Тогда придется изменить порядок столбцов, выбрав такой, в котором присутствуют отличные от нуля элементы. При этом, конечно, нужно отметить в стороне, каким неизвестным соответствуют переставленные столбцы.

В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & f'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & \dots & a''_{2n} & f''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & f''_3 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & a''_{m''3} & \dots & a''_{m''n} & f''_{m''} \end{pmatrix},$$

имеющую $m'' \le m'$ строк.

4. Последовательно исключим описанным выше способом остальные неизвестные, пока не закончатся строки обрабатываемой матрицы. Если при этом не обнаружится несовместность системы, то придем к матрице треугольного вида с $m^{(p)}$ строками:

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1m^{(p)}} & \dots & a'_{1n} & f'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & \dots & a''_{2m^{(p)}} & \dots & a''_{2n} & f''_2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a^{(p)}_{m^{(p)}n} & f^{(p)}_{m^{(p)}} \end{pmatrix}.$$

В этой довольно сложной индексации элементов матрицы на самом деле важно только то, что на ее диагонали стоят единицы, а под диагональю – нули. Кроме того существенно, что число $m^{(p)}$ получившихся строк не больше, чем число $n$ неизвестных.

З а д а н и е . Проверьте. что это так, даже если в исходной системе число уравнений превосходило число неизвестных. (Указание: найдите в алгоритме ту часть, которая может уменьшить количество строк обрабатываемой матрицы.)

На в т о р о м э т а п е а л г о р и т м а Г а у с с а восстанавливаем систему линейных уравнений по треугольной матрице, полученной на первом этапе, и решаем ее снизу вверх. Как это делается , лучше показать на примере.

П р и м е р 1 . Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

П е р в ы й э т а п . Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разделим элементы первой строки на 2, а затем из второй и четвертой строк вычтем первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Разделим элементы второй строки на $-\frac{7}{2}$, а затем из третьей и четвертой строк вычтем вторую, умноженную соответственно на 2 и $\frac{7}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & -\frac{15}{7} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разделим элементы третьей строки на $\frac{3}{7}$, а затем прибавим к четвертой строке третью строку, умноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, разделим элементы последней строки на $-9$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В т о р о й  э т а п . Восстанавливаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 4 \\ x_2 - \frac{5}{7}x_3 + \frac{13}{7}x_4 = -\frac{10}{7} \\ x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_4 = 1 \end{cases},$$

и последовательно снизу вверх решаем ее:

$$x_4 = 1;$$

$$x_3 = 4x_4 - 5 = 4 - 5 = -1;$$

$$x_2 = \frac{5}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 - \frac{10}{7} = -\frac{5}{7} - \frac{13}{7} - \frac{10}{7} = -4;$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 4 = 2 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 4 = 3.$$

П р и м е р  2 . Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10 \end{cases}.$$

П е р в ы й э т а п . Составим расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разделим первую строку на 2, после чего вычтем ее из второй, третьей и четвертой строки, предварительно умножив на 4, 6 и 2 соответственно:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последние две строки, состоящие из одних нулей, отбрасываем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

В втором столбце на диагонали оказался нуль. Поэтому меняем местами второй и третий столбцы, заметив, что второй столбец после этого относится к неизвестной $x_3$, а третий – к $x_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

На этом первый этап заканчивается, так как матрица приведена к треугольному виду.

В т о р о й э т а п . Восстановим по матрице систему уравнений, эквивалентную исходной, учитывая, что второй столбец относится к неизвестной $x_3$, а третий – к $x_2$:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

Отсюда, как и ранее, снизу вверх найдем те неизвестные, которым соответствуют единицы на диагонали матрицы:

$$x_3 = 5x_4 + 3;$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(5x_4 + 3) + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2.$$

Найденные соотношения показывают, что неизвестные $x_2$ и $x_4$ можно задать любыми числами – все равно найдутся такие $x_1$ и $x_3$, что вся четверка неизвестных будет решением системы. Поэтому неизвестные $x_2$ и $x_4$ называют *свободными*, а неизвестные $x_1$ и $x_3$ – *главными*. Полученные выше формулы

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2, \ x_3 = 5x_4 + 3,$$

описывают все решения рассматриваемой системы уравнений и являются ее *общим решением*.

З а д а н и е . Исходя из полученного общего решения системы линейных неоднородных уравнений, найдите общее решение соответствующей однородной системы линейных уравнений. (Указание: освежите в памяти сведения из п. 3 § 3.)

## 4. Нахождение ранга матрицы и вычисление определителя методом Гаусса

В ы ч и с л е н и е р а н г а м а т р и ц ы .

Процедура, применяемая в методе Гаусса, точнее ее первый этап, позволяет находить ранг любой матрицы. Это утверждение основывается на двух фактах. Первый заключается в том, что элементарные операции над матрицей, перечисленные в лемме 1, не меняют ее ранга. И второй, – что ранг матрицы, приведенной к треугольному виду, попросту равен количеству ее строк. Единственное, что нужно изменить в лемме 1 и описанном выше алгоритме первого этапа метода Гаусса – это особую роль последнего правого столбца, который ранее представлял правые части системы уравнений. При вычислении ранга матрицы все столбцы равноправны.

Напомним, что рангом матрицы называется максимальное количество ее столбцов, образующих линейно независимую систему.

Л е м м а 2 . Ранг матрицы не изменится, если

1. какую-либо ее строку разделить на произвольное число;
2. поменять местами любые две строки;
3. поменять местами любые два столбца;
4. из какой-либо строки вычесть линейную комбинацию других строк.

◄ Пусть $A$ – матрица, ранг которой нужно определить. Рассмотрим линейное однородное уравнение $\mathcal{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$, где $\mathcal{A}$ – линейное отображение, отвечающее матрице $A$. Перечисленные в доказываемой лемме действия не меняют решений этого уравнения кроме действия, указанного в п. 3, которое сводится просто к переобозначению двух искомых переменных. Поэтому, хотя само отображение $\mathcal{A}$ меняется, его ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и, значит, размерность ядра $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ сохраняются.

По следствию 2 § 3 сумма размерностей ядра и образа преобразования $\mathcal{A}$ есть величина постоянная: $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}+\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}=n$. (Здесь $n$ – размерность пространства, в котором определено отображение $\mathcal{A}$, иначе говоря, число столбцов ее матрицы.) Из этого соотношения следует, что рассматриваемые действия не меняют и $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – размерность образа отображения $\mathcal{A}$. Но эта размерность и есть число линейно независимых столбцов матрицы $A$, то есть ее ранг. ►

З а м е ч а н и е . В процедуре Гаусса используется еще одна операция – отбрасывание нулевых строк. Ясно, что эта операция не меняет количество линейно независимых столбцов матрицы и, следовательно, ранг матрицы.

З а д а н и е . Самостоятельно докажите следующее утверждение.

Л е м м а 3 . Ранг матрицы, приведенный к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

совпадает с количеством $m$ ее строк.

(Подсказка: составьте определитель из первых $m$ столбцов этой матрицы и убедитесь, что он не равен нулю.)

Примеры. Рассмотрим матрицы из примеров 1 и 2 предыдущего пункта, фигурирующие там как расширенные матрицы систем линейных уравнений. Отвлекаясь от этого несущественного сейчас факта, воспользуемся тем, что эти матрицы уже приведены к треугольному виду. Проведенные вычисления показывают, что ранг первой из них равен 4, а второй – 2.

Вычисление определителей.

Метод Гаусса дает лучший способ вычисления определителей в том смысле, что требует наименьшее число алгебраических операций по сравнению с другими способами из рассмотренных ранее. Это преимущество сказывается тем больше, чем выше размерность определителя. Поэтому метод Гаусса является основой для алгоритмов, применяемых в компьютерных технологиях. Для вычисления вручную определителей третьего-четвертого порядка можно выбрать любой из способов, какой нравится.

Пусть дана квадратная матрица размерности $n$. Как и раннее, с помощью преобразований, перечисленных в лемме 2, приводим эту матрицу к треугольному виду. При этом только четвертое преобразование не меняет определитель. Но изменения, которые вносят остальные преобразования, легко учесть. По свойству определителей преобразование п. 1, то есть деление строки на какое-либо число, делит значение определителя на то же число, а преобразования п.п. 2 и 3 меняют его знак. Поэтому, выполняя каждое преобразование, нужно фиксировать, что произошло с определителем.

Если во время приведения матрицы к треугольному виду появится строка, состоящая из нулей, то вычисления можно прекратить, так как ранг матрицы в этом случае меньше $n$ и определитель равен нулю. Если нулевая строка не появилась, то придем к треугольной матрице размерности $n \times n$, определитель которой равен 1. Определитель исходной матрицы теперь легко восстановить по записям о том, как изменялся определитель на каждом шаге приведения его матрицы к треугольному виду.

Пример. Найти определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Выполняя процедуру Гаусса приведения матрицы к треугольному виду, вычитаем из второй строки первую, умноженную на $4$, а из третьей – на 7. Определитель полученной матрицы при этом не изменится.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -20 \end{vmatrix}$$

Делим теперь вторую строку на $-3$, *то есть выносим это число за знак определителя*:

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -20 \end{vmatrix}.$$

После этого прибавляем вторую строку к третьей, предварительно умножив на $6$:

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Чтобы прийти к треугольному виду и найти окончательный ответ, остается разделить третью строку на $-8$ или, что то же самое, *вынести число* $-8$ *за знак определителя*:

$$\Delta = (-3)(-8)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-8)1 = 24\,.$$

# § 7. Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия – это способ решения геометрических задач аналитическими, то есть алгебраическими методами. Это означает, что вместо рисования чертежа и изучения составляющих его геометрических объектов пишутся формулы. Впрочем от чертежа тоже лучше не отказываться, если только такой чертеж не очень сложен. Аналитическая геометрия легко справляется с задачами в пространствах любой размерности, в то время как геометрические методы решения в этом случае или очень сложны, или просто невозможны. Это легко понять тем, кто помнит свои чувства при переходе от изучения планиметрии к стереометрии.

## 1. Геометрические объекты и уравнения

Основой идеей аналитической геометрии является введение в двух- или трехмерное пространство декартовой (иногда и другой) системы координат. Пространство с декартовыми координатами называется *декартовым*. Положение любой точки в нем можно описать числами – ее координатами. Так как все геометрические объекты: прямые, окружности, плоскости и так далее, состоят из точек, то координатный метод позволяет дать и их аналитическое описание. Объясним это на примере.

Пример. Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат $XY$. Требуется найти геометрическое место точек, удаленных на расстояние $R$ от заданной точки $M_0(x_0, y_0)$. Очевидно, что это – окружность радиуса $R$ с центром в точке $M_0$. Геометрически поставленная задача решается с помощью циркуля. Аналитически она решается так.

Обозначим через $M(x, y)$ произвольную точку плоскости с координатами $x$ и $y$. Запишем теперь условие ее принадлежности искомому геометрическому месту точек:

$$\left|\overrightarrow{M_0M}\right|^2 = R^2, \tag{28}$$

где $\left|\overrightarrow{M_0M}\right|$ – длина вектора $\overrightarrow{M_0M}$, начинающегося в точке $M_0$ и заканчивающегося в точке $M$.

В координатной форме векторное равенство (28) имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Это и есть ответ. Полученное уравнение называется уравнением окружности радиуса $R$ с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Оно однозначным образом определяет окружность в том смысле, что каждая точка, чьи координаты удовлетворяют этому уравнению, принадлежит окружности. И, наоборот, любая точка, чьи координаты не удовлетворяют уравнению, окружности не принадлежит. *Это – основной принцип, по которому сопоставляются друг другу геометрические объекты и уравнения.*

Возникает вопрос: а что собственно делать с этим уравнением? Как оно помогает решать геометрические задачи? Частичный ответ дает следующий пример. Более полный – содержание этого и следующих двух параграфов.

П р и м е р . Найти точки пересечения найденной окружности с осью $X$.

Очевидно, что все точки $M(x,y)$, лежащие на оси $X$, характеризуются свойством $y=0$. Таким образом это соотношение является уравнением оси $X$. Точки пересечения окружности с осью $X$ должны удовлетворять и уравнению окружности, и уравнению оси $X$. Поэтому их всех можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\\ y=0\end{cases}.$$

Ясно, что этой системе удовлетворяют точки с координатами $x=\pm\sqrt{R^2-y_0^2}+x_0$ и $y=0$. Из полученных формул можно сделать несложные выводы: если $R^2>y_0^2$, то имеется две точки пересечения, при $R^2=y_0^2$ – одна, и при $R^2<y_0^2$ – ни одной.

Возможно, геометрическое решение этой задачи при помощи чертежа Вам покажется более естественным. Это действительно так, но геометрическое решение теряет часть своей привлекательности, если окружность заменить какой-либо другой кривой, например, параболой $y=a_0x^2+a_1x+a_2$, которую циркулем не проведешь. Далее, если перейти в трехмерное пространство, например, поставив себе задачу нахождения общих точек произвольной сферы и оси $X$, то геометрические построения заметно усложняться. И, наконец, в многомерных пространствах применение чисто геометрических методов является весьма затруднительным. Во всяком случае аналитические методы намного проще.

Таким образом введение координат позволяет сопоставлять друг другу уравнения и геометрические объекты. Это оказалось очень плодотворной идеей, поскольку геометрические свойства объектов после этого можно изучать с помощью аналитических свойств их уравнений. И, наоборот, выводить аналитические свойства уравнений, исходя из геометрических свойств выражаемых ими геометрических объектов. Например, наличие хотя бы одного решения уравнения $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ легко вытекает из вида графика функции $y=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, который, хотя мы не знаем где именно, из нижней полуплоскости (относительно оси $X$) переходит в верхнюю и, значит, обязательно пересекает ось $X$.

Геометрические объекты, а это в зависимости от размерности пространства – линии, поверхности и гиперповерхности, классифицируют по виду их уравнений. Чтобы не говорить о двух функциях, стоящих в левой и правой частях этих уравнений, принято, перенося все в левую часть, записывать уравнение в виде $F(x,y,...)=0$. Количество аргументов здесь определяется размерностью пространства, в котором рассматривается геометрический объект. Например, для уже рассмотренной окружности на плоскости $F(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2$, а для сферы в пространстве – $F(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2$. Если $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ – точка евклидового пространстве $\mathbb{R}^n$, то уравнение гиперсферы с центром в точке $\mathbf{x}_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ и радиусом $R$ в $n$-мерном пространстве записывается с помощью функции

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 - R^2.$$

Отметим, что способ составления этих уравнений, выражающих окружность, сферу и гиперсферу, один и тот же при любой размерности пространства. В векторном виде все уравнения записываются одинаково – это уравнение вида (28). Различия появляются только при переходе к координатной форме уравнения и состоят в количестве координат.

*Алгебраическим уравнением* называется уравнение в котором функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является многочленом от координат. Каждый такой многочлен по определению является суммой одночленов вида $ax_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$ с постоянным коэффициентом $a$ и натуральными показателями $m_1, m_2, ..., m_n$. Сумму показателей называют *степенью одночлена,* а максимальную степень входящих в многочлен одночленов – *степенью многочлена*. Линии, поверхности и гиперповерхности, выражаемые алгебраическими уравнениями, называют *алгебраическими*. *Порядком* алгебраической линии, поверхности или гиперповерхности называют степень многочлена, стоящего в левой части уравнения.

Традиционно аналитическая геометрия занимается геометрическими объектами с алгебраическими уравнениями первого и второго порядков. Алгебраические уравнения более высокого порядка, а также те, которые не являются алгебраическими, изучаются в курсе математического анализа.

## 2. Алгебраические линии, поверхности и гиперповерхности первого порядка

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение первого порядка:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n + b = 0, \tag{29}$$

содержащее $n$ неизвестных, и выясним, какой геометрический объект это уравнение выражает. Иначе говоря, что представляет собой совокупность всех векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, чьи координаты удовлетворяют этому уравнению.

Напомним, что гиперповерхностью $\Gamma$ в $n$-мерном векторном пространстве называется любое $n-1$-мерное векторное подпространство $U$, смещенное на какой-либо вектор $\mathbf{q}$. То есть векторная сумма $\Gamma = U + \mathbf{q}$.

Т е о р е м а 1. Совокупность всех векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих уравнению (29), представляет собой гиперплоскость. Более того, каждая гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается уравнением такого вида.

◄ Если ввести в рассмотрение вектор коэффициентов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, то уравнение (29) с помощью скалярного произведения можно записать в векторном виде: $\mathbf{ax} + b = 0$.

Для придания этому уравнению геометрического смысла перенесем свободный член в правую часть и разделим обе его части на длину $|\mathbf{a}|$ вектора коэффициентов:

$$\mathbf{nx} = p, \tag{30}$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ – вектор единичной длины, и $p = \frac{-b}{|\mathbf{a}|}$.

Теперь исходное уравнение (29) приобрело следующий геометрический смысл. Ему удовлетворяют те и только те векторы $\mathbf{x}$, длина проекции которых на направление, задаваемое вектором $\mathbf{n}$, равна $p$ (см. рис. 1).

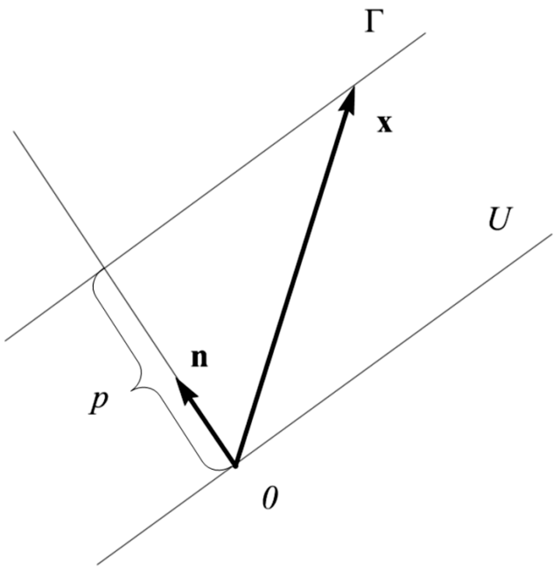


Рис. 1.

Вектор $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$, очевидно, удовлетворяет уравнению (30). Поэтому уравнение (30) эквивалентно уравнению

$$\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0. \qquad (31)$$

Иначе говоря, вектор $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ ортогонален вектору $\mathbf{n}$ и, следовательно (см. следствие 2 теоремы 7), лежит в $n-1$-мерном векторном подпространстве $U$, ортогональном вектору $\mathbf{n}$. В этом случае сам вектор $\mathbf{x}$ лежит в гиперплоскости $\Gamma = U + \mathbf{p}$.

Итак, совокупность всех векторов $\mathbf{x}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению (29), представляет собой гиперплоскость.

Докажем теперь второе утверждение теоремы, заключающееся в том, что каждая гиперплоскость описывается уравнением вида (29).

Пусть задана произвольная гиперплоскость $\Gamma = U + \mathbf{q}$. Согласно теореме 6 § 2 существует вектор $\mathbf{n}$ единичной длины, ортогональный подпространству $U$. По определению гиперплоскости принадлежащие ей векторы $\mathbf{x}$ характеризуются свойством: вектор $\mathbf{x} - \mathbf{q}$ лежит в подпространстве $U$. Поэтому вектор $\mathbf{x} - \mathbf{q}$, ортогонален вектору $\mathbf{n}$ и, следовательно, $\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{q}) = 0$. Раскрывая скобки, получим уравнение $\mathbf{nx} - p = 0$, где $p = \mathbf{nq}$. Это и есть искомое уравнение вида (29). Если обозначить через $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ координаты вектора $\mathbf{n}$, то в координатной форме это уравнение записывается так:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n - p = 0, \qquad (32)$$

причем $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$. ►

При доказательстве теоремы 1 установлен очень полезный факт. А именно, *по виду уравнения* (29) *легко определить положение отвечающей ему гиперплоскости*.

Вообще положение $n-1$-мерного подпространства $U$ определяется *нормалью* – вектором ортогональным этому подпространству. Для задания гиперплоскости $\Gamma = U + \mathbf{p}$ требуется еще указать вектор смещения $\mathbf{p}$. Однако можно обойтись всего одним вектором – *главной нормалью* гиперплоскости.

*По определению это такой вектор* $\mathbf{p}$, *что* $\Gamma = U + \mathbf{p}$, *и* $\mathbf{p}$ *ортогонален подпространству* $U$. Вектор главной нормали одновременно задает подпространство $U$ как ортогональное ему подпространство и определяет смещение, которое переводит подпространство $U$ в гиперплоскость $\Gamma$ (см. рис. 2). Главная нормаль удобна еще тем,

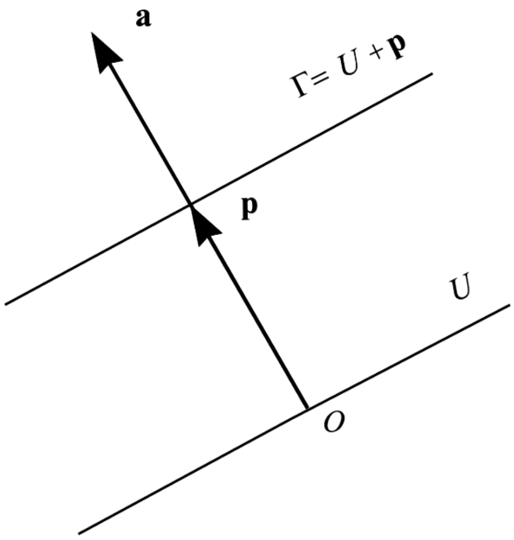



Рис. 2.

что $|\mathbf{p}|$ – расстояние от гиперплоскости до нуля векторного пространства.

Т е о р е м а 2 . Если гиперповерхность Γ описывается уравнением (29), то $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ – вектор коэффициентов уравнения (29), является ее нормалью, а главной нормалью является вектор $\mathbf{p}=\frac{-b}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$, где $b$ – свободный член. В частности, расстояние от гиперплоскости до нуля векторного пространства равно

$$|\mathbf{p}|=\frac{|b|}{|\mathbf{a}|}. \tag{33}$$

◄ Действительно, в первой части доказательства теоремы 1 построен вектор $\mathbf{p}$, являющийся главной нормалью. ►

В а ж н о е з а м е ч а н и е . А теперь возникает естественный вопрос, что дают многомерные теоремы 1 и 2 для обычной геометрии на плоскости или в пространстве. Например, какой геометрический объект задает уравнение

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+b=0 \tag{34}$$

в трехмерном пространстве?

Ответ получается следующим стандартным приемом, который заключается в привлечении пространства геометрических векторов, исходящих из начала координат $O$. Так как все евклидовы пространства одной размерности изоморфны, то все, что утверждается в многомерной теореме для пространства $\mathbb{R}^3$, справедливо и для пространства геометрических векторов. В частности, для теоремы 1 это означает, что совокупность геометрических векторов, координаты которых (в каком-то любом ортонормированном базисе) удовлетворяют уравнению (34), представляет собой гиперплоскость.

Но для решения поставленной задачи этого мало, так как мы ищем геометрическое место точек, чьи координаты удовлетворяют уравнению (34), а не совокупность геометрических векторов с этим же свойством. К счастью, точки и векторы можно согласовать друг с другом, выбрав специальный ортонормированный базис пространства геометрических векторов. Этим базисом является декартов базис. Напомним (см. п.4 § 2), это – ортонормированный базис, векторы которого направлены вдоль координатных осей. В этом базисе (см теорему 9 § 2) геометрический вектор $\overrightarrow{OM}$, указывающий на точку $M$, имеет те же координаты, что и декартовы координаты точки $M$.

Теперь все очень просто: нужно посмотреть, какая совокупность геометрических векторов представляет собой гиперплоскость, и определить геометрическое место точек, на которые указывают векторы из этой совокупности.

В пространстве геометрических векторов двумерным подпространством являются множество векторов, которые лежат в какой-либо плоскости $U$, содержащей точку $O$. Поэтому, если вектор $\mathbf{q}$ указывает на точку $Q$, то гиперплоскость $\Gamma = U + \mathbf{q}$ представляет собой совокупность векторов, указывающих на точки плоскости, которая параллельна $U$ и проходит через точку $Q$. Итак, уравнение (34) задает плоскость.

Отметим важный факт. Так как изоморфизм евклидовых пространств (см замечание к теореме 9 § 2) по определению сохраняет скалярное произведение, то он сохраняет длины векторов и углы между ними. Поэтому все утверждения теоремы 2, относящиеся к пространству $\mathbb{R}^3$, остаются в силе и для пространства геометрических векторов. В частности, вектор коэффициентов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, рассматриваемый как геометрический вектор, ортогонален плоскости, отвечающей уравнению (34), а ее расстояние до начала координат выражается формулой (33).

*Итак, чтобы получить из какой-либо теоремы, относящейся к евклидовому пространству $\mathbb{R}^n$, геометрическую теорему, например, в трехмерном пространстве с декартовыми координатами, нужно просто положить $n = 3$, и понимать под каждым элементом $(x_1, x_2, x_3)$ пространства $\mathbb{R}^3$ или точку $M(x_1, x_2, x_3)$ трехмерного пространства, или геометрический вектор $\overrightarrow{OM}$, указывающий на эту точку. Когда что удобнее.* (*При этом надо иметь в виду тот простой геометрический факт, что вектор $\overrightarrow{OM}$ в декартовом базисе тоже имеет координаты $(x_1, x_2, x_3)$*).

Аналогичным образом при $n = 2$ получается геометрическая теорема для плоскости, а при $n = 1$ – для прямой. (Последние обычно мало интересны, так как представляют собой простые арифметические утверждения.)

Как мы видим, точки пространства $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$, или $\mathbb{R}$) имеют двойную природу. Их можно рассматривать как векторы, когда нужно производить алгебраические действия, и как координаты геометрических точек, когда векторная алгебра применяется к геометрии. Поэтому элементы пространства $\mathbb{R}^3$ понимают и как векторы, и как точки в зависимости от того, формулируется ли алгебраическое или геометрическое утверждение. Более того, геометрическая терминология переносится и на многомерные пространства $\mathbb{R}^n$ для придания наглядности понятиям и утверждениям векторной алгебры. Например, в п. 1 мы определили гиперсферу как совокупность всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, равноудаленных от некоторой точки, которую назвали центром. Но при этом под расстоянием между точками мы понимаем длину их разности, то есть одновременно используем и то, что они являются векторами.

Задания.

1. Выясните с помощью теоремы 1, какой геометрический объект задает уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0 \tag{35}$$

на плоскости. (Ответ: прямую.) Какие геометрические характеристики этого объекта дает теорема 2?

2. Чему соответствует уравнение (35) в трехмерном пространстве? (Ответ: некоторой плоскости, параллельной оси $X_3$.)
3. В двумерном пространстве найдите главную нормаль прямой, задаваемой уравнением $x_1 + x_2 - 4 = 0$, и с ее помощью определите, как расположена эта прямая.
4. В трехмерном пространстве найдите главную нормаль плоскости, задаваемой уравнением $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$, и с ее помощью определите, как расположена эта плоскость.
5. На каком расстоянии от оси $X_3$ находится плоскость, которой соответствует уравнение из примера 1.
6. Найдите угол между двумя гиперплоскостями $a_1x_1' + a_2x_2' + ... + a_nx_n' + b' = 0$ и $a_1x_1'' + a_2x_2'' + ... + a_nx_n'' + b'' = 0$. (Указание. Под углом между гиперплоскостями естественно понимать угол между их нормалями. В качестве последних удобно выбрать векторы коэффициентов $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}''$, задающих эти гиперплоскости уравнений.)
7. При каком условии гиперплоскости, рассмотренные в предыдущем примере, параллельны, перпендикулярны?

Алгебраическое уравнение первого порядка (29) называется *общим уравнением гиперплоскости* в пространстве $\mathbb{R}^n$. Соответственно уравнение (34) – *общее уравнение плоскости* в трехмерном пространстве, а уравнение (35) – *общее уравнение прямой* плоскости.

Рассмотрим теперь уравнение (32), которое отличается от общего уравнения гиперплоскости только тем, что сумма квадратов его коэффициентов (без свободного члена) равна 1. Хотя это уравнение получается из общего уравнения просто делением на $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$ – длину вектора коэффициентов, оно имеет собственное имя – *уравнение гиперплоскости (плоскости, прямой) в нормальной форме*. Дело в том, что уравнение в нормальной форме позволяет очень просто решить следующую задачу.

Геометрическая задача 1. Найти расстояние $d$ от точки $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ до гиперплоскости, заданной уравнением (32) в нормальной форме.

Решение. Ответ такой: нужно подставить координаты точки $\mathbf{x}_0$ в левую часть уравнения гиперплоскости в нормальной форме и найти абсолютное значение полученного результата. То есть

$$d = \left|\alpha_1x_1^0 + \alpha_2x_2^0 + ... + \alpha_nx_n^0 - p\right|. \tag{36}$$

◀ Выясним почему это так. Поскольку длина вектора коэффициентов для уравнения в нормальной форме равна 1, то по формуле (33) расстояние от гиперплоскости до начала координат равно абсолютной величине свободного члена. Совершим замену переменных $\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{x}_0$. Геометрически такая замена означает, что началом декартовых координат для переменных $\mathbf{y}$ выбрана точка $\mathbf{x}_0$ (см. рис. 3). Уравнение рассматриваемой плоскости теперь принимает вид

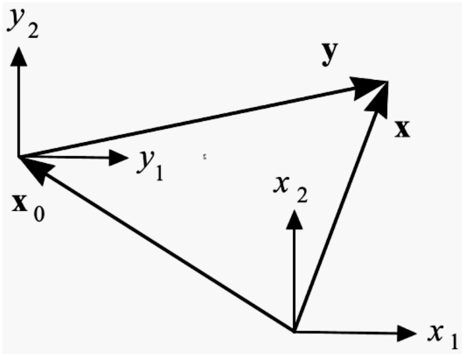


Рис. 3.

$$\alpha_1\left(y_1+x_1^0\right)+\alpha_2\left(y_2+x_2^0\right)+\ldots+\alpha_n\left(y_n+x_n^0\right)-p=0.$$

Раскрывая скобки, получим

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n+\alpha_1 x_1^0+\alpha_2 x_2^0+\ldots+\alpha_n x_n^0-p=0.$$

Это снова уравнение в нормальной форме. Поэтому расстояние от гиперплоскости до начала новых координат, то есть до точки $\mathbf{x}_0$, равно абсолютной величине его свободного члена. Это и есть формула (36). ▶

З а д а н и я .

1. На плоскости найти расстояние от точки $M\left(1,2\right)$ до прямой $x_1+x_2-4=0$.
2. В пространстве найти расстояние от точки $M\left(1,2,3\right)$ до плоскости $x_1+x_2+x_3-4=0$.

## 3. Пересечение гиперплоскостей общего положения

*Пересечением* двух или более гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется совокупность их общих точек.

Если $m$ гиперплоскостей заданы своими общими уравнениями

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+b_1=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+b_2=0, \\ ------------- \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+b_m=0, \end{array}$$

то их пересечение состоит из векторов, которые удовлетворяют всем этим уравнениям, то есть являются решениями системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+b_1=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+b_2=0 \\ ------------- \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+b_m=0 \end{cases}. \tag{37}$$

Вопрос состоит в том, какой геометрический объект представляет собой пересечение гиперплоскостей?

П р и м е р ы .

1. В двумерном пространстве гиперплоскостями являются прямые. Пересечение двух непараллельных прямых представляет собой точку. Когда прямые параллельны, возможны два варианта: либо они не пересекаются, либо совпадают. Три прямые имеют уже достаточно много вариантов взаимного расположения, от которых зависит их пересечение. Некоторые из них изображены далее на рис 4.

2. В трехмерном пространстве гиперплоскостями являются плоскости. Пара непараллельных плоскостей пересекаются по прямой. Две параллельные плоскости либо не имеют пересечения, либо совпадают. Три плоскости могут иметь своим пересечением точку. Могут быть и другие варианты. Например, все три плоскости параллельны друг другу, или прямая, получающаяся пересечением двух плоскостей, оказывается параллельна третьей плоскости, или все плоскости пересекаются по одной прямой, и так далее. Попробуйте перечислить все варианты.

Приведенные примеры показывают, что количество вариантов пересечения гиперплоскостей резко возрастает с ростом числа гиперплоскостей и размерности пространства. Указать, чем является, например, пересечение трех гиперплоскостей, скажем, в четырехмерном пространстве уже довольно затруднительно. Тем более, что геометрическая интуиция в четырехмерном пространстве перестает помогать. Поэтому обратимся к алгебре, а именно, к теории систем линейных уравнений, которую мы уже изучили достаточно хорошо.

Начнем с уравнения одной гиперплоскости

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b=0 \tag{29}$$

и воспользуемся теоремой «о структуре решений линейных уравнений» (теорема 9 §3), которая утверждает следующее.

Если существует частное решение $\tilde{\mathbf{x}}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ уравнения (29), то все его решения $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ имеют вид $\mathbf{x}=\mathbf{x}+\bar{\mathbf{x}}$, где $\bar{\mathbf{x}}=(x_1,x_2,...,x_n)$ – некоторое решение соответствующего однородного уравнения.

Существование частного решения уравнения (29) не вызывает сомнений. Далее, решения соответствующего однородного уравнения образуют линейное подпространство, обозначим его $\bar{X}$. Поэтому совокупность всех решений уравнения (29) – это векторная сумма $X=\tilde{\mathbf{x}}+\bar{X}$. Сравнивая это утверждение с теоремой 1, получим геометрическую интерпретацию теоремы «о структуре решений линейного уравнения»:

Совокупность решений уравнения (29) является гиперплоскостью $\Gamma=\tilde{\mathbf{x}}+\bar{X}$, для которой $n-1$-мерное подпространство $\bar{X}$ является подпространством решений соответствующего однородного уравнения, а смещение $\tilde{\mathbf{x}}$ – частным решением.

Теорема 2 дополнительно показывает, как определить положение этой гиперплоскости с помощью ее главной нормали, которая представляет собой наименьшее по длине частное решение уравнения (29).

Все это конечно можно установить и без сравнения этих теорем. Но теорема «о структуре решений линейных уравнений» справедлива в той же самой формулировке и для систем любого числа линейных уравнений. Поэтому естественно привлечь ее к исследованию пересечения гиперплоскостей, задаваемого системой (37). Учитывая, что частное решение системы (37) дает координаты некоторой точки из пересечения плоскостей, сразу же получаем следующий результат.

Т е о р е м а 3 . Либо $m$ гиперплоскостей не имеют пересечения, либо их пересечение представляет собой $s$*-мерную плоскость*, то есть векторную сумму $\Pi=\tilde{\mathbf{x}}+\bar{X}$, где $\tilde{\mathbf{x}}$ – частное решение системы (37), и $\bar{X}$ – $s$-мерное подпространство решений соответствующей однородной системы уравнений.

З а д а н и е . Каждую систему линейных уравнений можно интерпретировать как пересечение гиперплоскостей, задаваемых каждым ее уравнением. Например, систему двух уравнений относительно трех неизвестных можно рассматривать как пересечение двух плоскостей в трехмерном пространстве. Используя это, скажите, может ли эта система иметь единственное решение? Сколько вообще может быть решений у такой системы?

После того, как выяснено, что пересечением гиперплоскостей может быть только $s$-мерная плоскость, главные вопросы теперь таковы. Пересекаются ли гиперплоскости хотя бы в одной общей точке и, если пересекаются, то какова размерность $s$ их пересечения? Последнее важно, так как, например, при $s=0$ пересечение является точкой, при $s=1$ – прямой, при $s=n-1$ – гиперплоскостью.

Начнем со второго вопроса как более простого. По сути он заключается в том, какова размерность пространства решений однородной системы уравнений, соответствующей системе уравнений (37). Поэтому ответ сразу же дает теорема 10 § 3, которая устанавливает соотношение

$$s+\operatorname{rk} A=n, \tag{38}$$

где $\operatorname{rk} A$ – ранг матрицы системы (37), а $n$ – размерность пространства, в котором рассматриваются пересекающиеся гиперплоскости. Если вычислить ранг матрицы $A$, например, методом Гаусса, который мы изучили в предыдущем параграфе, то легко найти размерность плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся теоремой Кронекера-Капелли (теорема 7 § 3). Она утверждает, что система линейных уравнений имеет решение в том и только в том случае, если ранг ее матрицы совпадает с рангом ее расширенной матрицы.

Таким образом, если вычислить ранги матрицы системы (37) и ее расширенной матрицы, то всегда можно сказать, чем является пересечение данных гиперплоскостей. Однако исследование всех возможных случаев пересечения большого числа гиперпространств в многомерном пространстве является сложной задачей. Очень часто во многих физических и математических задачах можно ограничиться более узким классом случаев, которые характеризуются неизменностью характеристик пересечения при небольших изменениях положения пересекающихся гиперплоскостей. То есть при изменениях, вызванных малыми изменениями коэффициентов их уравнений. На геометрическом языке это можно сформулировать еще так. Малые изменения положения гиперплоскостей – это те, при которых их главные нормали, меняются мало.

О п р е д е л е н и е 1 . Положение гиперплоскостей называют *общим*, если достаточно малые изменения их положения сохраняют размерность пересечения и не приводят к его исчезновению или появлению. Остальные случаи положения гиперплоскостей называют *вырожденными*. Иначе говоря, в вырожденном случае при сколь угодно малых изменениях положения гиперплоскостей пересечение может появиться, исчезнуть или поменять свою размерность.

П р и м е р . Две параллельные прямые на плоскости – это вырожденный случай. Пересекающиеся прямые – случай общего положения. То же верно и для двух плоскостей в пространстве.

З а м е ч а н и е . Вообще вырожденным случаем в любой задаче, не обязательно даже математической, называется ситуация, когда ответ может существенно измениться при сколь угодно малых изменениях параметров задачи. Случаями общего положения соответственно называется такие, что любое достаточно малое изменение параметров задачи не приводит к существенному изменению ответа.

П р и м е р . При исследовании корней квадратного уравнения случай, когда имеется один корень, является вырожденным. При сколь угодно малом изменении коэффициентов уравнения дискриминант, равный в этом случае нулю, может стать или положительным, или отрицательным. В первом варианте у уравнения появляется еще один корень, а во втором – корень исчезает. Случаи, когда имеются два корня либо нет ни одного – это случаи общего положения. Достаточно малые изменения коэффициентов не могут изменить знак дискриминанта, и количество корней сохраняется.

В рассматриваемой здесь задаче пересечения гиперплоскостей ситуация очень похожа.

Т е о р е м а 4 . При пересечении $m$ гиперплоскостей в $n$-мерном пространстве есть всего два случая общего положения.

Первый, когда число гиперплоскостей не превосходит размерности пространства, и их нормали образуют линейно независимую систему векторов. В этом случае пересечение представляет собой $n-m$-мерную плоскость.

Второй, когда число гиперплоскостей превосходит размерность пространства, совокупность нормалей к гиперплоскостям образует полную систему векторов, и пересечение отсутствует.

Эту теорему, сформулированную в геометрических терминах, для аналитических рассмотрений удобно переформулировать в терминах системы линейных уравнений (37), описывающей пересечение гиперплоскостей.

Т е о р е м а 4 а . При пересечении $m$ гиперплоскостей в $n$-мерном пространстве есть всего два случая общего положения.

Первый, когда число уравнений $m$ системы (37), описывающей пересечение гиперплоскостей, не превосходит числа $n$ неизвестных, и ранг ее матрицы равен $m$. В этом случае пересечение представляет собой $n-m$-мерную плоскость.

Второй, когда число уравнений превосходит число неизвестных, и ранг расширенной матрицы равен $n+1$. В этом случае пересечение отсутствует.

Эквивалентность этих теорем вытекает из того, что каждая строка у матрицы системы, рассматриваемая как вектор, являются нормалью соответствующей гиперплоскости (теорема 2). А также (для вторых утверждений) – из теоремы Кронекера-Капелли. Доказательство теоремы 4 приведено в дополнении 1 к этому параграфу.

С л е д с т в и е . Если в $n$-мерном пространстве многомерная плоскость задана как пересечение $m$ гиперплоскостей общего положения, то ее размерность равна $n-m$.

Эту формулу очень легко запомнить: *каждое уравнение, входящее в систему, «забирает» у пересечения одну размерность*. Например, общее уравнение прямой в четырехмерном пространстве представляет собой систему трех уравнений.

З а д а н и я .

1. С помощью геометрических соображений решите, какие случаи пересечения прямых на плоскости из приведенных на рис. 4 являются вырожденными, а какие – общего положения. После чего проверьте, как это согласуется с теоремой 4.
2. Опишите все случаи общего положения двух и трех плоскостей в пространстве. Какова размерность пересечения в каждом случае?
3. Сделайте то же самое для четырех плоскостей в пространстве.
4. Какова размерность пересечение двух гиперплоскостей общего положения в четырехмерном пространстве? (Ответ: 2.)

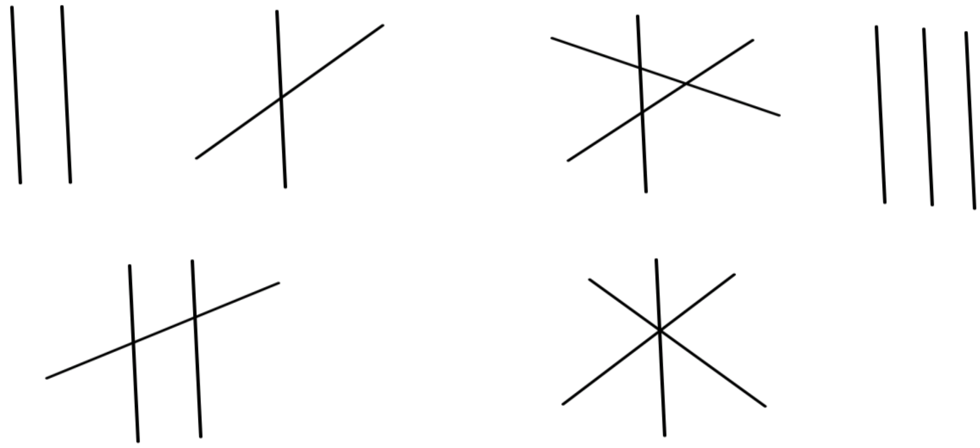


Рис. 4.

Пересечение гиперплоскостей интересует нас не так само по себе, как способ задания многомерных плоскостей. Например, прямую в пространстве можно задать как пересечение двух плоскостей. Задавать многомерные плоскости имеет смысл лишь гиперплоскостями общего положения, по крайней мере, по двум соображениям.

Первое, если плоскость задана как пересечение гиперплоскостей в вырожденном случае, то такое описание избыточно – это же можно сделать меньшим числом гиперплоскостей общего положения. Например, точку на плоскости лучше задать как пересечение двух прямых, а не трех (см. рис. 4).

Второе, в вырожденном случае малейшая неточность в задании гиперплоскостей может привести к тому, что пересечение не будет иметь ничего общего с многомерной плоскостью, которую требуется определить. Так, если хоть немного ошибиться при задании точки с помощью трех прямых, например, вычерчивания их на листе бумаги, то вместо точки получится треугольник.

О п р е д е л е н и е 2 . В дальнейшем мы будем задавать многомерные плоскости только как пересечение гиперплоскостей общего положения. Система уравнений (37) в этом случае называется *общим уравнением* $s$*-мерной плоскости в пространстве* $\mathbb{R}^n$. Согласно следствию теоремы 4 общее уравнение $s$-мерной плоскости состоит из $m = n - s$ уравнений.

В следующем пункте будет доказано, что каждая многомерная плоскость может быть задана общим уравнением. Поэтому возникает возможность пойти дальше и найти, чем является пересечение нескольких *многомерных плоскостей общего положения*.

Прежде, чем дать определение этого термина нужно условиться, что понимается под малым изменением положения многомерной плоскости. Естественно считать малым изменением такое, которое вызвано малым изменением коэффициентов общего уравнения плоскости. Здесь ключевое слово – «общего уравнения». Если бы мы задали многомерную плоскость как вырожденное пересечение гиперповерхностей, то при сколь угодно малых изменениях коэффициентов эта плоскость могла бы, например, просто исчезнуть.

Определение 3. Положение многомерных плоскостей называется *общим*, если достаточно малые изменения их положения не приводят к исчезновению или появлению пересечения и сохраняют его размерность.

Чтобы найти пересечение нескольких многомерных плоскостей, нужно решить систему линейных уравнений, составленную из уравнений, входящих в общие уравнения всех рассматриваемых многомерных плоскостей. Малые изменения коэффициентов получившейся объединенной системы приводят к малым изменениям положения многомерных плоскостей. В случае общего положения малые изменения положения многомерных плоскостей не меняют характеристики их пересечения. Поэтому объединенная система есть общее уравнение этого пересечения. Таким образом пересечение многомерных плоскостей общего положения также является многомерной плоскостью, размерность которой легко подсчитать с помощью следствия теоремы 4.

Например, в $n$-мерном пространстве найдем размерность $s$ пересечения двух плоскостей общего положения размерности $s_1$ и $s_2$. Первая плоскость согласно следствию теоремы 4 задается $n-s_1$ уравнениями, вторая – $n-s_2$ уравнениями. Поэтому объединенная система состоит из $2n-s_1-s_2$ уравнений, и по тому же следствию теоремы 4 $s=n-\left(2n-s_1-s_2\right)=s_1+s_2-n$.

Задания.

1. Проверьте эту формулу на случае пересечения плоскости и прямой в трехмерном пространстве.
2. Чем является пересечение двух двухмерных плоскостей общего положения в четырехмерном пространстве. (Ответ довольно неожиданный: точкой.)
3. Что представляет собой пересечения прямой и двумерной плоскости в четырехмерном пространстве в случае общего положения? (Подсказка: перечитайте вторую часть теоремы 4.)
4. Самостоятельно придумайте и решите еще несколько таких задач. Это поможет Вам освоится с непривычной многомерной геометрией.

## 4. Каноническое уравнение многомерной плоскости.

В предыдущем пункте было установлено, что пересечение гиперплоскостей задает многомерную плоскость. В этом пункте мы покажем, что каждая многомерная плоскость может быть может быть задана пересечением соответствующего числа гиперплоскостей общего положения. Для этого определим несколько иной способ задания многомерных плоскостей (в том числе и гиперплоскостей, и прямых).

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ $s$-мерную плоскость $\Pi=\mathbf{q}+U$, где $U$ – какое-то $s$-мерное векторное подпространство, и $\mathbf{q}$ – какой-то вектор. Пусть $\left\{\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,...,\boldsymbol{\tau}_s\right\}$ –

некоторый базис подпространства $U$. Векторы из этого базиса называются направляющими векторами $s$-мерной плоскости $\Pi$.

Вектор $\mathbf{x}$ принадлежит плоскости $\Pi$ в том и только том случае, если его можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + a_1\boldsymbol{\tau}_1 + a_2\boldsymbol{\tau}_2 + ... + a_s\boldsymbol{\tau}_s, \tag{39}$$

где $a_1, a_2, ..., a_s$ – координаты вектора $\mathbf{x} - \mathbf{q}$ в базисе направляющих векторов.

Это уравнение называется параметрическим уравнением $s$-мерной плоскости. Оно однозначно сопоставляет каждой точке $(a_1, a_2, ..., a_s)$ пространства $\mathbb{R}^s$ точку на рассматриваемой $s$-мерной плоскости. Пространство $\mathbb{R}^s$ называется в этом случае пространством параметров, а его точки – параметрами.

З а д а н и е . Напишите параметрическое уравнение прямой и перейдите к координатной форме, считая, что прямая расположена на плоскости. Сделайте то же самое для трехмерного пространства.

Положив, что $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$, и $\boldsymbol{\tau}_k = (\tau_{1k}, \tau_{2k}, ..., \tau_{nk})$ для всех $k = 1, 2, ..., s$, перейдем к координатной форме уравнения (39):

$$\begin{cases} \tau_{11}a_1 + \tau_{12}a_2 + ... + \tau_{1s}a_s = x_1 - q_1 \\ \tau_{21}a_1 + \tau_{22}a_2 + ... + \tau_{2s}a_s = x_2 - q_2 \\ -------------- \\ \tau_{n1}a_1 + \tau_{n2}a_2 + ... + \tau_{ns}a_s = x_n - q_n \end{cases}, \tag{40}$$

Полученные соотношения можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно параметров $a_1, a_2, ..., a_s$. Условием разрешимости этой системы является принадлежность вектора $\mathbf{x}$ плоскости $\Pi$. С другой стороны, по теореме Кронекера-Капелли этим условием является равенство рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы. По построению векторы столбцов $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, ..., \boldsymbol{\tau}_s$ линейно независимы, так что ранг матрицы системы равен $s$. Поэтому ранг расширенной матрицы системы тоже равен $s$, и это является условием того, что вектор $\mathbf{x}$ принадлежит $s$ мерной поверхности $\Pi$.

Вот расширенная матрица системы (40), в которой для удобства последний столбец записан первым:

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 & \tau_{11} & \tau_{12} & ... & \tau_{1s} \\ x_2 - q_2 & \tau_{21} & \tau_{22} & ... & \tau_{2s} \\ - & - & - & - & - \\ x_n - q_n & \tau_{n1} & \tau_{n2} & ... & \tau_{ns} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Так как ранг этой матрицы равен $s$, то любые ее $s+1$ строк линейно зависимы. В каждой строке ровно $s+1$ элемент. Поэтому определитель, составленный из любых $s+1$ строк расширенной матрицы равен нулю. Приравнивая нулю всевозможные определители, составленные из $s+1$ строки матрицы (41), получим уравнения, которым должен удовлетворять любой вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, принадлежащий $s$-мерной плоскости $\Pi$.

Нет необходимости выписывать и приравнивать нулю все определители, потому что среди полученных равенств одни будут следовать из других, а некоторые, возможно, будут представлять собой тождества типа $0=0$. Поэтому поступим следующим образом.

Выделим те $s$ строк матрицы системы (40), которые образуют линейно независимую систему. Такие строки найдутся, так как ранг этой матрицы равен $s$. Соответственно выделим те же $s$ строк расширенной матрицы системы. Рассмотрим теперь определители, которые состоят из $s$ выделенных строк расширенной матрицы (41) и еще одной из не выделенных строк. Число таких определителей равно $n-s$ и соответственно получается такое же количество уравнений. Для простоты записи будем считать, что выделены первые $s$ строк расширенной матрицы. (Этого можно добиться, просто изменив нумерацию координат точек в пространстве $\mathbb{R}^n$.) Тогда получается такая система уравнений:

$$\begin{vmatrix} x_1-q_1 & \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1s} \\ x_2-q_2 & \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2s} \\ - & - & - & - & - \\ x_{s1}-q_{s-1} & \tau_{s1} & \tau_{s2} & \dots & \tau_{ss} \\ x_{s+k}-q_{s+k} & \tau_{s+k1} & \tau_{s+k2} & \dots & \tau_{s+ks} \end{vmatrix} = 0,\ k=1,2,\dots,n-s. \tag{42}$$

Полученная система состоит из линейных уравнений (разложите определитель по первому столбцу) и, следовательно, описывает пересечение $n-s$ гиперплоскостей.

Л е м м а 2 . Уравнения, входящие в систему линейных уравнений ( 4 2 ) , задают $n-s$ гиперплоскостей общего положения, так что эта система является общим уравнением гиперплоскости $\Pi$. Благодаря своему специальному виду и удобству для решения геометрических задач она имеет собственное название – *каноническое уравнение* $s$*-мерной плоскости*.

Доказательство леммы приведено в дополнении 2.

С л е д с т в и е . Каждая многомерная плоскость имеет общее уравнение.

З а м е ч а н и е . Не нужно запоминать уравнения ( 4 2 ) . Нужно только помнить, как составляется расширенная матрица ( 4 1 ) , и правило, по которому выписываются приравниваемые нулю определители ( 4 2 ) .

П р и м е р 1 .

Составим каноническое уравнение прямой на плоскости. В этом случае $n=2,\ s=1$ и матрица ( 4 1 ) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1-q_1 & \tau_1 \\ x_2-q_2 & \tau_2 \end{pmatrix}.$$

(Второй индекс при координатах направляющего вектора $\boldsymbol{\tau}$ не пишем, так как этот вектор один.)

Здесь не приходится думать, какие определители второго порядка выбрать для составления канонического уравнения, поскольку есть всего один такой определитель:

$$\begin{vmatrix} x_1-q_1 & \tau_1 \\ x_2-q_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{43}$$

Раскрывая его получим уравнение

$$\tau_2\left(x_1 - q_1\right) - \tau_1\left(x_2 - q_2\right) = 0, \tag{44}$$

которое принято записывать в следующем виде:

$$\frac{x_1 - q_1}{\tau_1} = \frac{x_2 - q_2}{\tau_2} \tag{45}$$

Это – *каноническое уравнение прямой на плоскости*. Оно очень удобно для решения геометрических задач, так как из его вида сразу же следуют простые геометрические характеристики прямой, которые однозначно ее определяют. А именно, прямая проходит через точку $Q\left(q_1, q_2\right)$ и направлена вдоль вектора $\boldsymbol{\tau} = \left(\tau_1, \tau_2\right)$.

В о п р о с . Через какую точку проходит прямая $\frac{x_1 - 1}{3} = \frac{x_2 - 2}{4}$, и вдоль какого вектора она направлена?

Мы получим сейчас уравнение (45) совсем простым способом, но при внимательном анализе можно увидеть, что он полностью повторяет построения, проведенные выше для многомерных плоскостей.

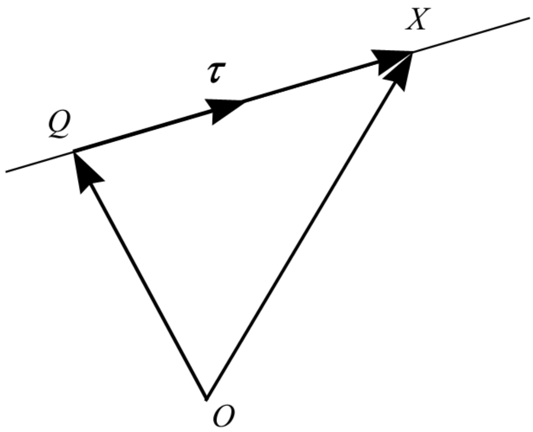



Рис. 5.

Пусть точка $Q\left(q_1, q_2\right)$ (см. рис. 5) лежит на прямой, и $\boldsymbol{\tau} = \left(\tau_1, \tau_2\right)$ – направляющий вектор, то есть вектор, указывающий направление прямой. Пусть $X\left(x_1, x_2\right)$ – произвольная точка прямой. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{QX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OQ} = \left(x_1 - q_1, x_2 - q_2\right)$. По определению направляющего вектора он параллелен вектору $\boldsymbol{\tau}$. Поэтому параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{QX}$ и $\boldsymbol{\tau}$ имеет нулевую площадь: $\det\left(\overrightarrow{QX}; \boldsymbol{\tau}\right) = 0$. Переходя к координатной форме, получим уравнение (43).

Может возникнуть закономерный вопрос. Если вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен вдоль одной из координатных осей, например, имеет координаты $\boldsymbol{\tau} = (1,0)$, то что означает уравнение

$$\frac{x_1 - q_1}{1} = \frac{x_2 - q_2}{0},$$

ведь операция деления на нуль не определена? Это правильно, но несмотря на это уравнение пишут именно так. Хотя при переходе к этому уравнению от уравнения вида (44) мы не имели права делить последнее на $q_1 q_2 = 0$. Деление на нуль здесь понимается условно и, чтобы получить правильное соотношение, нужно вернуться назад к уравнению вида (44). Проще всего это сделать с помощью простого мнемонического правила: умножим рассматриваемое равенство на нуль и «сократим» нули в правой части. Тогда получится правильное уравнение $x_2 - q_2 = 0$.

П р и м е р 2 . Найдем каноническое уравнение прямой в трехмерном пространстве. В этом случае $n = 3$ и $s = 1$. Расширенная матрица системы ( 4 1 ) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1-q_1 & \tau_1 \\ x_2-q_2 & \tau_2 \\ x_3-q_3 & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что $\tau_1 \neq 0$. Тогда выделенной строкой является первая, и по правилу составления уравнений ( 4 2 ) получаем два уравнения:

$$\begin{vmatrix} x_1-q_1 & \tau_1 \\ x_2-q_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ и } \begin{vmatrix} x_1-q_1 & \tau_1 \\ x_3-q_3 & \tau_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определители, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \tau_2(x_1-q_1)-\tau_1(x_2-q_2)=0 \\ \tau_3(x_1-q_1)-\tau_1(x_3-q_3)=0 \end{cases},$$

которая представляет собой общее уравнение прямой. Его в компактном виде записывают так:

$$\frac{x_1-q_1}{\tau_1} = \frac{x_2-q_2}{\tau_2} = \frac{x_3-q_3}{\tau_3} \tag{46}$$

Это – каноническое уравнение прямой в трехмерном пространстве.

З а д а н и е . Как вы думаете, каково каноническое уравнение прямой в четырехмерном пространстве? Найдите общий вид канонического уравнения прямой в $n$-мерном пространстве. (Ответ: $\frac{x_1-q_1}{\tau_1} = \frac{x_2-q_2}{\tau_2} = \ldots = \frac{x_n-q_n}{\tau_n}$ .)

П р и м е р 3 . Составим каноническое уравнение гиперплоскости. В этом случае $s=n-1$ и, следовательно, имеется всего один определитель и соответственно одно уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1-q_1 & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n-1} \\ x_2-q_2 & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n-1} \\ - & - & - & - & - \\ x_n-q_n & \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{47}$$

Может возникнуть вопрос, зачем такое громоздкое уравнение, если у гиперплоскости есть простое уравнение (29). Ответ дает решение следующей часто встречающаяся задача.

Г е о м е т р и ч е с к а я з а д а ч а 2 . Составить уравнение гиперплоскости $\Gamma$, проходящей через $n$ заданных точек $M_1=(x_{11},x_{21},\ldots,x_{n1})$, $M_2=(x_{12},x_{22},\ldots,x_{n2}),\ldots$, $M_n=(x_{1n},x_{2n},\ldots,x_{nn})$ пространства $\mathbb{R}^n$, и выяснить, в каком случае эти точки однозначно задают гиперплоскость.

Р е ш е н и е . По определению гиперплоскость есть векторная сумма $\Gamma=\mathbf{q}+U$, где $U$ – какое-то $n-1$-мерное подпространство, а $\mathbf{q}$ – любой вектор из этой гиперплоскости. Положим $\mathbf{q}=M_1$, и рассмотрим векторы $\boldsymbol{\tau}_1=M_2-M_1$, $\boldsymbol{\tau}_2=M_3-M_1,\ldots$, $\boldsymbol{\tau}_{n-1}=M_n-M_1$, лежащие в подпространстве $U$. Если они образуют базис этого подпространства, то это – направляющие векторы. В этом случае ответ готов – это каноническое уравнение гиперплоскости ( 4 7 ) , в которое нужно подставить координаты направляющих векторов. В окончательном виде оно выглядит так:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{11} & x_{12} - x_{11} & \dots & x_{1n} - x_{11} \\ x_2 - x_{21} & x_{22} - x_{21} & \dots & x_{2n} - x_{21} \\ - & - & - & - \\ x_n - x_{n1} & x_{n2} - x_{n1} & \dots & x_{nn} - x_{n1} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (48)$$

З а м е ч а н и е . Это уравнение стоит запомнить. Тем более, что определитель имеет очень простую структуру: каждый столбец, начиная со второго, – это координаты точек $M_2, M_3, ..., M_n$ из которых вычтены соответствующие координаты точки $M_1$. Первый столбец имеет такую же структуру за исключением того, что координаты точки $M_1$ заменены координатами неизвестных.

П р и м е р . Составим уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки $M_1(x_{11}, x_{21})$ и $M_2(x_{12}, x_{22})$. В уравнении (48) нужно положить $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{11} & x_{12} - x_{11} \\ x_2 - x_{21} & x_{22} - x_{21} \end{vmatrix} = 0 ,$$

и раскрыть определитель:

$$\frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} = \frac{x_2 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} . \qquad (49)$$

З а д а н и е . Составьте уравнение плоскости, проходящее через три заданные точки. (Ответ:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{11} & x_{12} - x_{11} & x_{13} - x_{11} \\ x_2 - x_{21} & x_{22} - x_{21} & x_{23} - x_{21} \\ x_3 - x_{31} & x_{32} - x_{31} & x_{33} - x_{31} \end{vmatrix} = 0 .) \qquad (50)$$

Вернемся к вопросу о том, когда заданные точки не определяют однозначно гиперплоскость, проходящую через них.

Как мы выяснили, это происходит тогда, когда векторы $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, ..., \boldsymbol{\tau}_{n-1}$, которые должны играть роль направляющих векторов, оказываются линейно зависимыми и лежат, таким образом, в подпространстве меньшей размерности, чем $n-1$. Геометрически это означают, что заданные точки принадлежат некоторой $n-2$-мерной плоскости. В этом случае определитель в левой части уравнения (48) тождественно равен нулю и это уравнение не накладывает никаких ограничений на точку $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Например, если в трехмерном пространстве три точки лежат на одной прямой, то существует бесконечное число плоскостей, проходящих через них.

## 5. Стандартные геометрические задачи на плоскости и в пространстве

Здесь приведены решения типичных задач геометрии в пространстве, в которых фигурируют прямые и плоскости. Их знание поможет справиться с более сложными задачами из задачника по аналитической геометрии. Приведенные ниже задачи легко можно (и в качестве упражнения нужно) переформулировать и решить для плоскости. Кроме того нужно попытаться сделать то же самое для многомерных пространств подобно тому, как это сделано выше в геометрических задачах 1 и 2.

Так как осей координат в пространстве всего три, то не имеет смысл использовать для их обозначения индексы. Будем пользоваться стандартными обозначениями координат: $x$ , $y$ и $z$ , тем более, что так принято в задачниках по аналитической геометрии.

Геометрическая задача 3. Найти угол $\varphi$ между двумя плоскостями, заданными уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

Выяснить, при каком условии плоскости, заданные этими уравнениями параллельны, перпендикулярны.

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормалями. Последние легко найти просто из вида уравнений. Это – $\mathbf{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$, и соответственно $\mathbf{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$. Угол между векторами мы уже научились находить в п. 4 § 2:

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Вторая задача сводится к нахождению условий, когда параллельны или перпендикулярны нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ плоскостей. Из последней формулы следует условие перпендикулярности: $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2=0$, что в координатной форме дает равенство $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$. Условие параллельности состоит в том, что эти векторы пропорциональны друг другу, то есть $\mathbf{n}_1=\alpha\mathbf{n}_2$, где $\alpha$ – некоторое число. Переходя к координатной форме этого равенства, найдем: $a_1=\alpha a_2,\, b_1=\alpha b_2,\, c_1=\alpha c_2$. Откуда, исключая $\alpha$ , получим требуемое условие: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

Геометрическая задача 4. Найти угол между прямыми, если они заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_{10}}{k_1}=\frac{y-y_{10}}{l_1}=\frac{z-z_{10}}{m_1},$$
$$\frac{x-x_{20}}{k_2}=\frac{y-y_{20}}{l_2}=\frac{z-z_{20}}{m_2},$$

и выяснить, когда они перпендикулярны, параллельны.

Решение. Угол между прямыми – это угол между их направляющими векторами $\boldsymbol{\tau}_1=(k_1,l_1,m_1)$ и $\boldsymbol{\tau}_2=(k_2,l_2,m_2)$. Поэтому, угол вычисляется, как и в предыдущей задаче. Таким образом, условие перпендикулярности прямых – $k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2=0$, а параллельности – $\frac{k_1}{k_2}=\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$.

Геометрическая задача 5. Найти угол между прямой и плоскостью, заданными уравнениями

$$ax+by+cz+d=0,$$
$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m},$$

а также условия их перпендикулярности, параллельности.

Р е ш е н и е . Искомый угол является дополнительным к углу между нормалью плоскости $\mathbf{n} = (a,b,c)$ и направляющим вектором прямой $\boldsymbol{\tau} = (k,l,m)$. Поэтому его легко найти, как и в предыдущих задачах. А вот условия перпендикулярности и параллельности, как бы «меняются местами»: $\frac{k}{a} = \frac{l}{b} = \frac{m}{c}$ – перпендикулярность, и $ak + bl + cm = 0$ – параллельность.

Г е о м е т р и ч е с к а я з а д а ч а 6. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Р е ш е н и е . Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можно выбрать в качестве направляющего вектора прямой. Кроме того она по условию проходит, например, через точку $M_1$. Поэтому ее каноническое уравнение –

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Г е о м е т р и ч е с к а я з а д а ч а 7. Составить уравнение плоскости, которая проходит через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Эта задача предлагалась выше в качестве самостоятельного задания. Если Вы не выполнили его, то сделайте это сейчас. Решение дает каноническое уравнение плоскости (50), которое в координатах $x$, $y$ и $z$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Г е о м е т р и ч е с к а я з а д а ч а 8 . Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно прямой $\frac{x - x_1}{k} = \frac{y - y_1}{l} = \frac{z - z_1}{m}$.

Р е ш е н и е . Благодаря параллельности прямых вектор $(k,l,m)$ может служить направляющим вектором для них обеих. Поэтому искомое уравнение –

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Г е о м е т р и ч е с к а я з а д а ч а 9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

Р е ш е н и е . В этом случае в качестве направляющего вектора можно выбрать нормаль $(a,b,c)$ плоскости, так что каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Г е о м е т р и ч е с к а я з а д а ч а 10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно прямой $\frac{x - x_1}{k} = \frac{y - y_1}{l} = \frac{z - z_1}{m}$.

Р е ш е н и е . В этом случае, наоборот, направляющий вектор прямой можно выбрать в качестве нормали к плоскости. Так что искомое уравнение –

$$k(x-x_0)+l(y-y_0)+m(z-z_0)=0\,.$$

Г е о м е т р и ч е с к а я  з а д а ч а 11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно прямым

$$\frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{k_2}=\frac{y-y_2}{l_2}=\frac{z-z_2}{m_2}\,,$$

не параллельными друг другу.

Р е ш е н и е . Векторы $\boldsymbol{\tau}_1=(k_1,l_1,m_1)$ и $\boldsymbol{\tau}_2=(k_2,l_2,m_2)$ являются направляющими для плоскости, уравнение которой мы ищем. Поэтому просто составим ее каноническое уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & k_1 & k_2 \\ y-y_0 & l_1 & l_2 \\ z-z_0 & m_1 & m_2 \end{vmatrix}=0\,.$$

З а д а н и е . Есть еще один распространенный способ решения этой задачи. Можно найти общее уравнение плоскости, учитывая, что ее нормаль $\mathbf{n}$ перпендикулярна обоим направляющим векторам $\boldsymbol{\tau}_1=(k_1,l_1,m_1)$ и $\boldsymbol{\tau}_2=(k_2,l_2,m_2)$. Наиболее просто в качестве нормали выбрать векторное произведение $\mathbf{n}=\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2$, которое, как известно (см. п 4 § 5), ортогонально обоим своим сомножителям. Выполните все вычисления и сравните ответ с уже полученным.

Г е о м е т р и ч е с к а я  з а д а ч а 12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и прямую $\dfrac{x-x_1}{k}=\dfrac{y-y_1}{l}=\dfrac{z-z_1}{m}$.

Р е ш е н и е . Одной направляющей плоскости является направляющая прямой, то есть вектор $(k,l,m)$. Второй – вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$, где $M_1(x_1,y_1,z_1)$ – точка, принадлежащая прямой. Теперь можно составить каноническое уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & k \\ y-y_0 & y_1-y_0 & l \\ z-z_0 & z_1-z_0 & m \end{vmatrix}=0\,.$$

## Дополнение 1.

Доказательству теоремы 4 предпошлем вспомогательное утверждение.

Л е м м а 1 .

Если $L=L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)$ – линейная оболочка $m$ произвольных векторов пространства $\mathbb{R}^n$, то сколь угодно малые изменения этих векторов могут привести к тому, что размерность $L$ достигнет либо $m$ при $m<n$, либо $n$ при $m\geq n$. Иначе говоря, размерность линейной оболочки $L$ станет максимально возможной.

Наоборот, любые достаточно малые изменения векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$ не могут уменьшить размерность линейной оболочки $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m)$.

◄ Для доказательства первого утверждения воспользуемся следующей процедурой.

Если $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, то положим $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}_1$, где $\mathbf{h}_1$ –произвольный не равный нулю вектор. В противном случае положим $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1$.

Если $\mathbf{x}_2$ принадлежит $L(\mathbf{x}'_1)$, то положим $\mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{h}_2$, где $\mathbf{h}_2$ – произвольный вектор, не принадлежащий $L(\mathbf{x}'_1)$. В противном случае положим $\mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2$.

Если $\mathbf{x}_3$ принадлежит $L(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)$, то положим $\mathbf{x}'_3 = \mathbf{x}_3 + \mathbf{h}_3$, где $\mathbf{h}_3$ – произвольный вектор, не принадлежащий $L(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)$. В противном случае положим $\mathbf{x}'_3 = \mathbf{x}_3$.

… И так далее, пока либо не будут исчерпаны все векторы (при $m < n$) и размерность линейной оболочки $L$ достигнет $m$, либо размерность линейной оболочки $L$ не станет равной $n$ (при $m \geq n$). Это доказывает первую часть лемму, так как векторы $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_n$ могут быть сколь угодно малыми.

Для доказательства второй части выберем из совокупности векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$ максимальную линейно независимую систему и рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах из этой системы как на ребрах. Этот параллелепипед имеет отличный от нуля $k$-мерный объем, где $k$ – размерность линейной оболочки $L$. Из способа вычисления этого объема (с помощью определителя) вытекает, что достаточно малые изменения его ребер не сделают объем равным нулю. Иначе говоря, оставят его ребра линейно независимыми. Следовательно, размерность линейной оболочки $L$ не уменьшится.►

Доказательство теоремы 4.

◄ Удобнее доказывать эту теорему в варианте 4а.

Рассмотрим случай, когда число гиперплоскостей не превосходит размерности пространства, то есть $m \leq n$. Будем подсчитывать ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы как количество линейно независимых столбцов. Из первой части леммы 1, примененной к столбцам матрицы системы следует, что каков бы ни был ранг матрицы системы, он сколь угодно малым изменением коэффициентов может быть сделан равными $m$ – максимуму для матрицы из $m$ строк. Это показывает, что единственным случаем, который может оказаться случаем общего положения является тот, при котором ранг матрицы системы и, значит, ранг расширенной матрицы системы равны $m$. В этом случае согласно теореме Фредгольма система имеет решение и, таким образом, пересечение является плоскостью размерности $n-m$, как это следует из соотношения (38). Вторая часть леммы 1, если ее применить к столбцам матрицы системы, показывает, что рассмотренный случай действительно является общим, так как никаким достаточно малым изменением коэффициентов матрицы нельзя уменьшить ее ранг.

Рассмотрим теперь случай, когда число уравнений превосходит размерность пространства, то есть $m > n$. Применение леммы 1 к столбцам расширенной матрицы системы (37) показывает, что вырожденными являются все случаи за исключением того, в котором ранг расширенной матрицы системы равен $n+1$ – максимуму для матрицы с $n+1$

столбцом. В этом случае ранг матрицы системы равен $n$, и по теореме Кронекера-Капелли система уравнений в этом случае не имеет решений. То есть гиперповерхности не имеют ни одной общей точки. Второе утверждение леммы 1, примененное к столбцам расширенной матрицы, показывает, что этот случай действительно является случаем общего положения. ►

## Дополнение 2.

Доказательство леммы 2.

◄ Система уравнений (42) была получена из соображений, что любая точка $s$-мерной плоскости $\Pi$ ей удовлетворяет. Поэтому, если показать, что уравнения, входящие в систему (42), задают $n-s$ гиперплоскостей общего положения, то по следствию теоремы 4 их пересечение является $s$-мерной плоскостью. Эта плоскость содержит плоскость $\Pi$, но так как они обе одинаковой размерности, то они совпадают.

Итак, осталось проверить, что система уравнений (42) описывает пресечение гиперплоскостей общего положения. Так как количество $n-s$ уравнений в системе не превосходит размерности $n$ пространства, то по теореме 4а достаточно проверить, что ранг матрицы системы равен количеству уравнений, то есть равен $n-s$. Для этого приглядимся к структуре уравнений.

Рассмотрим определитель, составленный из отмеченных строк матрицы системы (40). Мы договорились, что это ее первые $s$ строк. По построению он отличен от нуля и в $k$-том уравнении системы (42), $k=1,2,\dots,n-s$, является коэффициентом при $x_{s+k}$ .(Чтобы в этом убедиться нужно просто раскрыть по первому столбцу определитель, фигурирующий в $k$-том уравнении.) Все остальные неизвестные с индексами, большими $s$, в $k$-том уравнении отсутствуют. Таким образом последние $n-s$ столбцов матрицы системы (42) ортогональны друг другу и, следовательно, образуют линейно независимую систему. Это означает, что ранг матрицы системы (42) равен $n-s$. ►

# § 8. Линии второго порядка, квадратичные формы и симметрические преобразования

Линиями второго порядка на плоскости называются линии, которые задаются в прямоугольных декартовых координатах алгебраическими уравнениями вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \qquad (51)$$

где множитель 2 у некоторых коэффициентов введен для удобства.

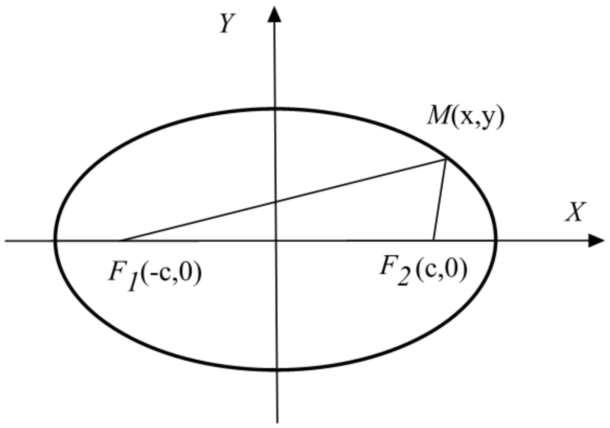
Такими линиями являются, например, эллипс и гипербола. Линии второго порядка были очень хорошо изучены астрономами XV – XVII веков. Дело в том, что орбиты планет вокруг Солнца или спутников Земли, а также регулярно посещающих Солнечную систему комет и астероидов представляют собой эллипсы. А орбиты астероидов, однократно посещающих Солнечную систему, представляют собой гиперболы. Пристальный интерес к небесной механике в то время подарил человечеству три закона Ньютона, заложил основу теории дифференциальных уравнений, дифференциального и интегрального исчислений, классической механики, астрономии и многих других современных наук.

Начнем с примеров.

## 1. Эллипс и гипербола

Эллипс. Геометрическое определение эллипса состоит в следующем. *Это – совокупность всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная*.

Выведем уравнение эллипса, выбрав специальным образом прямоугольную декартову систему координат. Ось $X$ направим так, чтобы она проходила через фокусы, а начало координат поместим посередине между ними (см. рис 1).



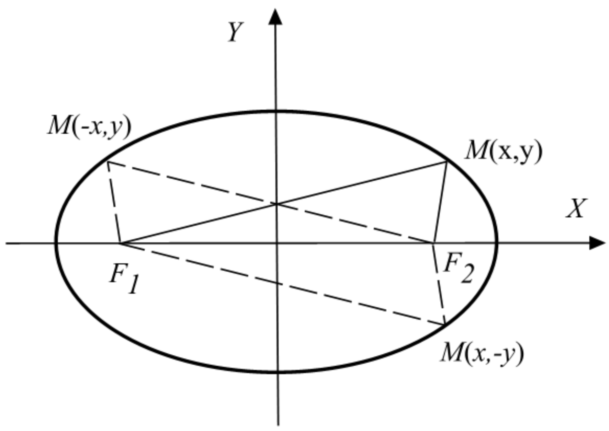




Рис. 1 и 2.

Такой выбор основан на том, что оси координат направлены по осям симметрии эллипса, или иначе – ее *главным осям*. Действительно, как видно из рис 2, вместе с точкой $M(x,y)$ эллипсу должны принадлежать симметричная относительно оси $Y$ точка $M(-x,y)$ и симметричная относительно оси $X$ точка $M(x,-y)$. В этих координатах уравнение эллипса получается наиболее простым.

Пусть $2c$ – расстояние между фокусами, и сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равна $2a$. Тогда геометрическое определение эллипса можно записать аналитически:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a,$$

или в координатном виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Обычными алгебраическими методами избавимся от корней:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx;$$

$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right). \tag{52}$$

Здесь важно заметить, что из треугольника $F_1MF_2$ следует неравенство $2a > 2c$. Откуда $a^2 - c^2 > 0$. Поэтому можно ввести обозначение $a^2 - c^2 = b^2$. Теперь уравнение принимает красивый симметричный вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{53}$$

Это – *каноническое уравнение эллипса*. Каноническим оно называется потому, что в отличие от общего уравнения (51) не содержит ни перекрестного члена вида $2a_{12}xy$, ни линейных членов $2b_1x + 2b_2y$. Все это благодаря удачному расположению системы координат относительно эллипса.

Составив каноническое уравнение эллипса, можно найти его основные геометрические свойства. Из уравнения (53) следует, что $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$. Поэтому координата $x$ точек эллипса находится между $-a$ и $a$, причем эти значения принимает только при $y = 0$. Аналогично, координата $y$ находится между $-b$ и $b$ и принимает эти значения при $x = 0$. Таким образом эллипс является ограниченной фигурой – он вписан в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ (см. рис. 3). Параметры $a$ и $b$ называют *длинами полуосей эллипса*

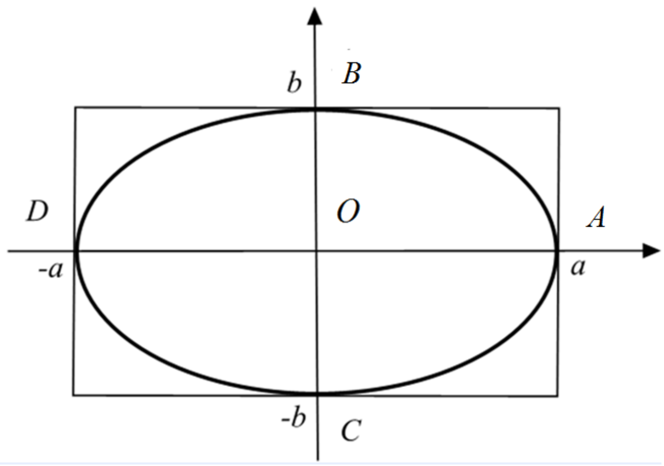



Рис. 3.

$OA$ и $OB$ соответственно. Причем $a$ – длина *большей* полуоси, а $b$ – *меньшей*. (Вспомните, что $b^2 = a^2 - c^2$, то есть $b \le a$.) Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ пересечения эллипса с осями симметрий называют его *вершинами*.

Отношение $\mu = \dfrac{b}{a}$ показывает насколько «сплющен» эллипс. При $\mu = 1$ он представляет собой окружность радиуса $a$. (Действительно, в этом случае $a = b$, и уравнение (53) можно записать в виде $x^2 + y^2 = a^2$.) При $\mu = 0$ эллипс вырождается в отрезок $-a \le x \le -a$. Исторически сложилось так, что степень «сплющенности» эллипса (например, эллиптической орбиты спутника) характеризуют величиной $\varepsilon = \sqrt{1-\mu^2}$, называемой *эксцентриситетом эллипса*.

Если совершить замену переменных $x = a\xi$ и $y = b\eta$, то получится уравнение окружности единичного радиуса: $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Наверное это основной результат проведенных рассмотрений, который геометрически можно сформулировать так. Любой эллипс получается из окружности единичного радиуса растяжением (сжатием) ее вдоль осей симметрии в $a$ и $b$ раз соответственно.

Гипербола. Геометрическое определение гиперболы таково. *Это – совокупность всех точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.*

Как видим, отличие определения гиперболы от определения эллипса всего в одном слове: «сумма» заменена на «разность». В зависимости от того, что от чего вычитать, получается два векторных уравнения гиперболы:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a, \text{ и } -\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a.$$

Первое уравнение действительно при $\left|\overrightarrow{F_1M}\right| > \left|\overrightarrow{F_2M}\right|$, а второе – при $\left|\overrightarrow{F_1M}\right| < \left|\overrightarrow{F_2M}\right|$, так что у гиперболы две ветви, симметричные относительно оси $Y$ (см. рис. 4). Выберем прямоугольную систему координат так же, как и при выводе уравнения эллипса, то есть по ее *главным осям*, как показано на рис. 4 и 5. Тогда все выкладки, проделанные при выводе уравнения эллипса, исключая уравнение (52), отличаются от соответствующих равенств для ветвей гиперболы лишь знаком перед одним из корней. Однако благодаря двукратному возведению в квадрат уравнение (52), выведенное для эллипса, оказывается верным и для обеих ветвей гиперболы. Объяснением этого парадокса является то, что несмотря на формальное совпадение уравнений все же есть важное различие.

Из треугольника $F_1MF_2$ в случае гиперболы следует неравенство $2a < 2c$, обратное тому, что имело место для эллипса. Отсюда $a^2 - c^2 < 0$, и нужно ввести обозначение $a^2 - c^2 = -b^2$, отличающееся знаком от аналогичного обозначения, сделанного при выводе уравнения эллипса. В результате уравнение принимает принципиально иной вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{54}$$

Это – *каноническое уравнение гиперболы*. Из него вытекает, что гипербола в отличие от эллипса является неограниченной линией, то есть ее точки находятся как угодно далеко от начала координат. Опишем область, в которой расположена гипербола.

Прежде всего, как и ожидалось, гипербола симметрична относительно осей координат. (Это следует просто из того, что координаты $x$ и $y$ входят в уравнение гиперболы только во второй степени.)

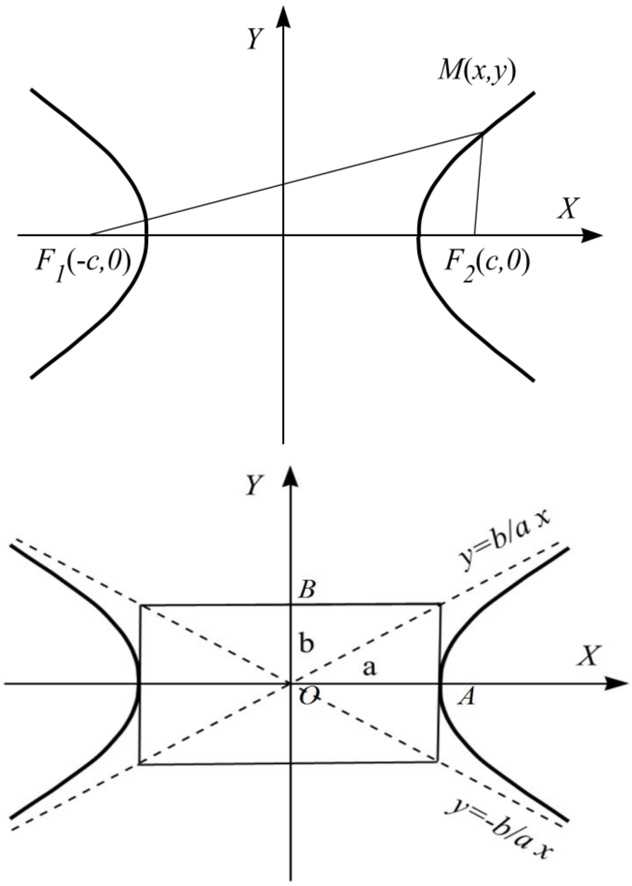



Рис. 4 и 5.

Далее, из уравнения (54) следует, что $x^2 = a^2\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$. Поэтому координата $x$ точек гиперболы по абсолютной величине не может быть меньшей параметра $a$ (см. рис. 5), который определяет длину отрезка $OA$, называемого *действительной полуосью гиперболы*. Отрезок $OB$ длины $b$ называют *мнимой полуосью гиперболы*, возможно, потому, что ось $Y$ гиперболу не пересекает.

Вся гипербола расположена между прямыми $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$. (Действительно, из уравнения (54) следует, что $y^2 = b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}-1\right) < \dfrac{b^2}{a^2}x^2$.) Эти прямые называются *асимптотами гиперболы.* Степень «сплющенности» гиперболы, как и у эллипса характеризуется параметром $\mu = \dfrac{b}{a}$ или *эксцентриситетом гиперболы* $\varepsilon = \sqrt{1-\mu^2}$. Например, при $\mu = 1$ асимптоты гиперболы образуют прямой угол, а при $\mu = 0$ – совпадают друг другом, так что гипербола вырождается в две полуоси $x \le -a$ и $x \ge a$.

Асимптоты гиперболы обладают важным свойством, описывающим поведение ветвей гиперболы на больших расстояниях от начала координат. Чтобы его получить докажем сначала следующее утверждение.

Л е м м а 1 . Произведение расстояний $d_+$ и $d_-$ от точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ гиперболы до ее асимптот не зависит от выбора этой точки.

◄ Напомним, что для определения расстояния от точки до прямой (см. геометрическую задачу 1 § 7) нужно записать уравнение прямой в нормальной форме и подставить в него координаты точки.

Нормальными уравнениями асимптот являются уравнения $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(bx \pm ay\right)=0$, где знак «$+$» соответствует одной асимптоте, знак «$-$» – другой. Произведение расстояний от точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ до асимптот теперь легко подсчитать:

$$d_+d_- = \frac{\left(bx_0+ay_0\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{\left(bx_0-ay_0\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(b^2x_0^2-a^2y_0^2\right) = \frac{b^2a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right) = \frac{b^2a^2}{a^2+b^2}\,. \text{ ►}$$

Т е о р е м а 1 . Если точка движется по гиперболе так, что ее расстояние от начала координат неограниченно возрастает, то ее расстояние до одной из асимптот неограниченно убывает до нуля.

◄ Действительно, хотя бы одно из расстояний $d_+$ и $d_-$ при этих условиях должно неограниченно возрастать. Тогда другое, чтобы сохранилось произведение, должно неограниченно убывать до нуля. ►

Если совершить замену переменных $x = a\xi$ и $y = b\eta$, то получится уравнение гиперболы с единичными полуосями: $\xi^2 - \eta^2 = 1$. Любая гипербола получается из этой стандартной гиперболы растяжением (сжатием) ее вдоль осей симметрии в $a$ и $b$ раз.

## 2. Приведение уравнения линии второго порядка к главным осям

В этом пункте мы составим краткий план того, что будем делать в дальнейшем.

Главной задачей является исследовать геометрические свойства линий второго порядка, задаваемых уравнением (51), и провести их классификацию. То есть выяснить, какие еще могут быть типы линий кроме известных уже эллипса и гиперболы.

Для начала мы сузим задачу, предположив, что рассматриваемые линии являются *симметричными относительно начала координат*. То есть будем предполагать, что вместе с каждой точкой $M\left(x, y\right)$ линия содержат точку $M\left(-x, -y\right)$. Например, симметричными относительно начала координат являются эллипс и гипербола, изображенные на рис. 4 и 5. А также эллипс, изображенный на рис. 6.

Уравнение симметричной относительно начала координат линии второго порядка не может содержать линейные члены $2b_1x + 2b_2y$ и поэтому имеет более простой, чем общее уравнение (51), вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + c = 0 \tag{55}$$

Основное утверждение, которое будет доказано, состоит в том, что линии, симметричные относительно начала координат, обязательно обладают двумя перпендикулярными друг другу осями симметрии, пересекающимися в начале координат. Поэтому, если направить оси новых координат вдоль осей симметрии, то относительно этих осей координат линия будет иметь *приведенное* уравнение, то есть уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + c = 0, \tag{56}$$

без перекрестного члена $2a_{12}xy$.

Например, эллипс, изображенный на рис. 6, относительно осей координатах $X'Y'$ имеет приведенное уравнение (56), а относительно осей координат $XY$ – уравнение общего вида (55).

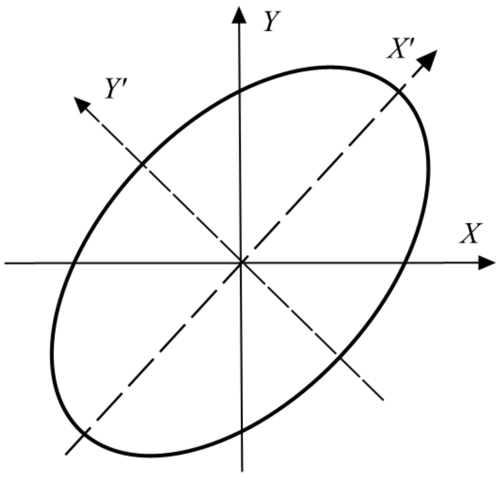


Рис. 6.

Задание. Найдите уравнение эллипса относительно осей координат $XY$, если они связаны с осями координат $X'Y'$ следующими соотношениями: $x' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, и $y' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$. (Эти соотношения означают, что координаты $X'Y'$ повернуты относительно координат $XY$ на угол $\dfrac{\pi}{4}$.)

Приведенное уравнение позволяет легко получить геометрические свойства линий и провести их классификацию. Задачу нахождения осей симметрии линии второго порядка и ее приведенного уравнения называют *приведением уравнения линии к главным осям*.

Чтобы решить эту задачу, обратим внимание на выражение

$$A(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{57}$$

фигурирующее в уравнении линии второго порядка. Это выражение называется *квадратичной формой* двух переменных. Его можно записать в виде скалярного произведения

$$A(x,y) = A\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}, \tag{58}$$

где $A$ – линейное преобразование плоскости с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, в которой $a_{12} = a_{21}$, и $\mathbf{r} = (x,y)$ – вектор. Матрица $A$ называется *матрицей квадратичной формы* $A(x,y)$.

Задание. Вычислите скалярное произведение (58) и убедитесь, что получится квадратичная форма (57).

Если матрица $A$ диагональная ($a_{12} = 0$), то квадратичная форма не имеет перекрестного члена, и уравнение (55) является приведенным.

Очень важно заметить, что матрица преобразования $A$ симметрична относительно главной диагонали ($a_{12} = a_{21}$) – такое преобразование и такую матрицу называют *симметрическими*. Это важно, потому что *при удачном выборе ортонормированного* *базиса симметрическому преобразованию отвечает диагональная матрица.* Это – главный результат, который будет получен в этом параграфе.

Если для преобразования $A$ найти такой базис и соответствующую диагональную матрицу, то задача приведения уравнения симметричной относительно начала координат линии второго порядка к главным осям будет полностью решена. А именно, прямые, направленные вдоль векторов этого базиса, оказываются осями симметрии рассматриваемой линии, и если их выбрать в качестве осей координат, то уравнение линии станет приведенным. Более того, можно сразу же написать это приведенное уравнение: коэффициентами при квадратах переменных являются элементы найденной диагональной матрицы, а свободный член тот же, что и в исходном уравнении (55).

Все сказанное выше легко переносится на многомерный случай. Напомним, что алгебраическая гиперповерхность второго порядка задается уравнением

$$\sum_{k,s=1}^{n} a_{ks}x_s x_k + 2\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0 .$$

В левой части этого уравнения стоит общего вида многочлен второго порядка от $n$ переменных. При $n = 2$ – это уравнение линии второго порядка на плоскости.

Произведение $x_s x_k$ встречается в первой сумме дважды: в слагаемых $a_{ks}x_s x_k$ и $a_{sk}x_k x_s$. Поэтому, переобозначая коэффициенты: $a'_{ks} = a'_{sk} = \dfrac{a_{ks} + a_{sk}}{2}$, можно всегда считать, что $a_{ks} = a_{sk}$.

Гиперповерхность, симметричная относительно начала координат, имеет уравнение без линейных членов:

$$\sum_{k,s=1}^{n} a_{ks}x_s x_k + c = 0 . \qquad (59)$$

Квадратичная форма $n$ переменных, связанная с уравнением (59), имеет вид

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \sum_{k,s=1}^{n} a_{ks}x_s x_k = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} , \qquad (60)$$

где $A$ линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, которому соответствует симметрическая ($a_{ks} = a_{sk}$) матрица $A = (a_{ks})_{n\times n}$, и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор пространства $\mathbb{R}^n$.

З а д а н и е . Напишите уравнение (51) для поверхности второго порядка в трехмерном пространстве и найдите матрицу $A$ его квадратичной формы.

После того, как задача приведения к главным осям будет решена для симметричных относительно начала координат линий второго порядка, мы рассмотрим общий случай, когда линия этим свойством не обладает. Все это позволит дать классификацию линий второго порядка на плоскости. Затем аналогичная задача будет решена для гиперповерхностей второго порядка в многомерных пространствах.

Предварительно придется подробнее изучить симметрические преобразования и как преобразуются уравнения линий при переходе от одной системы прямоугольных декартовых координат к другой.

## 3 . Симметрические преобразования

Это удивительный класс преобразований. Теория симметрических преобразований настолько проста, что будет изложена тут же в этом пункте. Тем не менее по изящности, числу неожиданных фактов и количеству приложений теория симметрических преобразований занимает одно из первых мест в математике.

Симметрические преобразования (в случае комплексных пространств их называют *эрмитовыми*) встречаются в естественных науках на каждом шагу. Например, в классической механике с их помощью легко вычислить собственные частоты механических систем без трения. В квантовой механике каждой физической величине соответствует эрмитово преобразование. Возможное значение этой физической величины принадлежит спектру соответствующего ей преобразования. Уравнения теплопроводности, электростатики, уравнения Максвелла и уравнение Шредингера, то есть уравнения, описывающие фундаментальные физические законы, содержат эрмитовы преобразования. Так что знание теории симметрических преобразований пригодится Вам не только для изучения линий второго порядка.

Предварительно ведем важное понятие.

Определение 1. Пусть $A$ линейное преобразование евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Преобразование $A^*$, удовлетворяющее для всех векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ условию $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot A^*\mathbf{y}$, называется *сопряженным к* $A$.

Это условие можно запомнить так: преобразование $A$ в скалярном произведении можно «перебрасывать» с одного сомножителя на другой, снабдив его «звездочкой».

Данное определение приобретет интерес, если установить, что сопряженное преобразование существует и единственно. В этом случае можно будет говорить о взаимно однозначной *операции сопряжения*, сопоставляющей каждому преобразованию евклидова пространства ему сопряженное преобразование.

Лемма 2. Каждое преобразования $A$ имеется единственное сопряженное к нему преобразование $A^*$. В любом ортонормированном базисе преобразованию $A^*$ отвечает матрица, являющаяся транспонированной матрицей преобразования $A$.

◀ Начнем с доказательства единственности, предположив, что у данного преобразования $A$ имеется ему сопряженное преобразование $A^*$.

Пусть $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$ – какой-либо ортонормированный базис. Напомним, что элемент $a_{ks}$ матрицы, отвечающей преобразованию $A$, можно найти по формуле $a_{ks}=A\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{e}_k$. Поэтому

$$a_{ks}=A\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{e}_k=\mathbf{e}_s\cdot A^*\mathbf{e}_k=A^*\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_s=b_{sk}\,,$$

где $b_{sk}$ – элемент матрицы преобразования $A^*$ в том же базисе.

Это означает, во-первых, что матрица сопряженного преобразования является транспонированной матрицей исходного преобразования, и во-вторых, что может быть только одно преобразование, сопряженное данному.

Покажем теперь, что сопряженное преобразование существует, благо имеется только один кандидат на эту роль – преобразование $A^*$, которому отвечает транспонированная матрица преобразования $A$.

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – произвольные векторы, имеющие в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ координаты $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_n)$ соответственно. Тогда

$$A\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n)\cdot(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n) = \sum_{k,s=1}^{n}(A\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{e}_k)x_s y_k = \sum_{k,s=1}^{n} a_{ks}x_s y_k \quad .(61)$$

Аналогично,

$$\mathbf{x}\cdot A^*\mathbf{y} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n)\cdot A^*(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n) = \sum_{k,s=1}^{n}(\mathbf{e}_s\cdot A^*\mathbf{e}_k)x_s y_k = \sum_{k,s=1}^{n} b_{sk}x_s y_k \ .$$

Так как по предположению $a_{ks} = b_{sk}$, то из этих равенств следует: $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot A^*\mathbf{y}$, и значит, $A^*$ – сопряженное к $A$ преобразование. ►

З а м е ч а н и е . При доказательстве леммы мы заодно, в самом общем случае, проверили соотношение (60). Действительно, если в равенстве (61) положить $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, то получим $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{k,s=1}^{n} a_{ks}x_s x_k$ .

З а д а н и е . С в о й с т в а о п е р а ц и и с о п р я ж е н и я .
Докажите следующие простые свойства операции сопряжения:

1. $I^* = I$, где $I$ – тождественное преобразование;
2. $(A^*)^* = A$;
3. $(\alpha A)^* = \alpha A^*$, где $\alpha$ – число;
4. $(A + B)^* = A^* + B^*$
5. $(AB)^* = B^* A^*$

(Подсказка: некоторые из этих свойств легко доказать, просто пользуясь тем, что матрица сопряженного преобразования является транспонированной матрицей исходного преобразования. А некоторые, например, как свойство 5, таким приемом: $AB\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = B\mathbf{x}\cdot A^*\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot B^* A^*\mathbf{y}$. Из единственности сопряженного преобразования теперь вытекает нужное равенство $(AB)^* = B^* A^*$.)

Определение симметрических преобразований, которое было дано в предыдущем пункте, страдает тем недостатком, что связано с выбором базиса. Ведь одному и тому же преобразованию в разных ортонормированных базисах соответствуют разные матрицы и, может быть, одни из них являются симметрическими, а другие – нет. Дадим новое определение симметрических преобразований и сразу же докажем его эквивалентность предыдущему.

О п р е д е л е н и е 1 . Линейное преобразование $A$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется симметрическим (или самосопряженным), если $A^* = A$.

Л е м м а 3. Линейное преобразование $A$ является симметрическим в том и только в том случае, если в ортонормированном базисе ему отвечает симметрическая матрица.

◄ Если преобразование $A$ симметрическое, то по лемме 2 ему в ортонормированном базисе отвечает матрица, совпадающая со своей транспонированной матрицей, то есть симметрическая матрица.

Обратно, если матрица преобразования $A$ симметрическая, то по лемме 2 сопряженному преобразованию $A^*$ в ортонормированном базисе отвечает та же матрица. Значит, $A = A^*$. ►

П е р е й д е м к и з у ч е н и ю с в о й с т в с и м м е т р и ч е с к и х п р е о б р а з о в а н и й .

О п р е д е л е н и е 2 . Пусть $A$ – произвольное линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$. Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, удовлетворяющий соотношению

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \tag{62}$$

называется *собственным вектором*, а число $\lambda$ – *собственным значением* преобразования $A$.

П р и м е р . Д и а г о н а л ь н а я м а т р и ц а .

Л е м м а 4 . Если линейное преобразование $A$ имеет в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ диагональную матрицу $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, то все векторы базиса собственные: $A\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$, $k = 1, 2, ..., n$. Верно и обратное. Если собственные векторы линейного преобразования $A$ образуют базис, то в этом базисе матрица $A$ диагональная.

◄ Вспомним, что по определению $k$-тый столбец матрицы $A$ – это координаты вектора $A\mathbf{e}_k$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$. ►

Приведенный пример показывает, что для нахождения базиса, в котором симметрическому преобразованию $A$ отвечает диагональная матрица, нужно искать его собственные векторы. Наиболее простой способ для этого исходить из определения, то есть искать собственный вектор как решение уравнения (62). Это уравнение можно записать в виде

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{63}$$

где $I$ – тождественное преобразование, так что в координатной форме оно представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно координат вектора $\mathbf{x}$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + ... + a_{2n} x_n = 0 \\ ------------------ \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda) x_n = 0 \end{cases}$$

Условие существования не равных нулю решений однородной системы состоит в том, что ее определитель равен нулю (теорема 4 § 5). Поэтому получаем уравнение для нахождения собственного числа $\lambda$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{64}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением матрицы* $A$. Оно представляет собой алгебраическое уравнение степени $n$, что легко установить, раскрыв определитель.

Пример. Симметрическое преобразование двумерного пространства.

Рассмотрим симметрическое преобразование $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Для нахождения собственных векторов имеем систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}, \qquad (65)$$

и соответственно характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрывая определитель и приводя подобные члены, получим характеристическое уравнение в виде квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 . \qquad (66)$$

Чтобы узнать, сколько корней имеет это квадратное уравнение, подсчитаем его дискриминант:

$$D = (a_{11}+a_{22})^2 - 4\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right) = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 .$$

Если матрица $A$ не является уже диагональной ($a_{12} \neq 0$), то $D > 0$, и характеристическое уравнение имеет два различных корня $\lambda_1$ и $\lambda_2$.

Для нахождения собственных векторов вернемся к системе (65) и вместо параметра $\lambda$ подставим по очереди найденные значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Поскольку при этих значениях $\lambda$ определитель системы равен нулю, то одно из уравнений системы можно отбросить. Руководствуясь чувством симметрии, для значения $\lambda_1$ воспользуемся первым уравнением, а для $\lambda_2$ – вторым. Получим соотношения:

$$(a_{11}-\lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \text{ и } a_{12}x_1 + (a_{22}-\lambda_2)x_2 = 0,$$

которые являются уравнениями двух прямых, проходящих через начало координат.

Полученный ответ означает, что любой вектор, лежащий на этих прямых, является собственным, причем вектор, лежащий на первой из них, имеет собственное число $\lambda_1$, а на второй – $\lambda_2$.

Важно отметить, что эти прямые перпендикулярны. Чтобы проверить это, нужно установить равенство нулю выражения

$$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = (a_{11}-\lambda_1)a_{12} + a_{12}(a_{22}-\lambda_2) = a_{12}(a_{11}+a_{22}-\lambda_1-\lambda_2),$$

представляющего собой скалярное произведение их нормалей. Но это действительно так, поскольку выражение в скобках справа равно нулю в силу теоремы Виета о сумме корней квадратного уравнения.

Таким образом можно выбрать два собственных вектора преобразования $A$, ортогональных друг другу. В базисе, состоящем из этих векторов, преобразованию $A$ отвечает матрица $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Геометрически это означает, что каждое симметрическое преобразование плоскости представляет собой растяжение вдоль двух перпендикулярных осей: вдоль одной – в $\lambda_1$ раз, а вдоль другой – в $\lambda_2$ раз.

В рассмотренном примере все удалось просчитать до конца потому, что мы умеем решать квадратные уравнения, каковыми являются характеристические уравнения для матриц размерности $2\times 2$. Для матриц размерности $n\times n$ характеристическое уравнение (64) представляет собой алгебраическое уравнение степени $n$. Так как мы не умеем решать такие уравнения и даже не можем выяснить, сколько у них корней, то для определения количества собственных векторов симметрического преобразования придется применить более хитрые приемы.

Пусть $A$ – произвольное преобразование евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Для того чтобы понять насколько преобразование $A$ может увеличить длину вектора, нужно рассмотреть отношение $\dfrac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}$ и определить, какое максимальное значение оно принимает, если перебирать всевозможные векторы $\mathbf{x}$. Ясно, что это отношение не зависит от длины вектора $\mathbf{x}$, а лишь от его направления. Поэтому будем рассматривать только векторы единичной длины. Кажется правдоподобным, что среди векторов единичной длины найдется вектор $\mathbf{x}_0$, для которого достигается максимальное значение: $|A\mathbf{x}|\le|A\mathbf{x}_0|$. Это действительно так, но строгое доказательство можно будет дать только после изучения свойств непрерывных функций в курсе математического анализа.

Вектор $\mathbf{x}_0$ называется *максимальным вектором*, а число $|A\mathbf{x}_0|$ обозначается через $\|A\|$ (две черточки, чтобы не спутать с определителем) и *называется нормой преобразования* $A$.

Основное свойство нормы вытекает из ее определения: $|A\mathbf{x}|\le\|A\||\mathbf{x}|$ для любого вектора $\mathbf{x}$.

Л е м м а 5 . Максимальный вектор $\mathbf{x}_0$ симметрического преобразования $A$ является собственным вектором преобразования $A^2$ с собственным значением $\|A\|^2$.

◄ Для краткости письма обозначим $A\mathbf{x}_0=\mathbf{y}_0$. Тогда, используя неравенство Коши-Буняковского и основное свойство нормы, найдем:

$$\|A\|^2=|A\mathbf{x}_0|^2=A\mathbf{x}_0\cdot A\mathbf{x}_0=\mathbf{y}_0\cdot A\mathbf{x}_0=\underline{A\mathbf{y}_0\cdot\mathbf{x}_0\le|A\mathbf{y}_0||\mathbf{x}_0|}=$$

$$=\underline{\underline{|A\mathbf{y}_0|}}\le\|A\||\mathbf{y}_0|=\|A\||A\mathbf{x}_0|\le\|A\|^2|\mathbf{x}_0|=\underline{\underline{\|A\|^2}}.$$

Поскольку правая и левая части этого неравенства совпадают, все промежуточные неравенства являются равенствами. В частности, в неравенстве Коши-Буняковского (подчеркнуто одной чертой) имеет место знак равенства, что возможно только тогда, когда входящие в него векторы параллельны: $A\mathbf{y}_0=\lambda\mathbf{x}_0$. Из равенства, части которого подчеркнуты двумя чертами, сразу же следует, что $\lambda=\|A\|^2$. Поэтому $A^2\mathbf{x}_0=\|A\|^2\mathbf{x}_0$, что и требовалось показать.►

Л е м м а 6. Симметрическое преобразование $A$ имеет по крайней мере один собственный вектор с собственным значением или $+\|A\|$, или $-\|A\|$.

◄ В силу предыдущей леммы максимальный вектор $\mathbf{x}_0$ преобразования $A$ является собственным вектором для преобразования $A^2$ с собственным значением $\|A\|^2$. Это можно записать так:

$$\left(A^2-\|A\|^2 I\right)\mathbf{x}_0=\mathbf{0},$$

где $I$ – тождественное преобразование.

Все преобразования, фигурирующие в скобках, коммутируют с друг другом. Поэтому (см. п. 4 § 3) можно пользоваться правилами обычной алгебры и с помощью формулы для разности квадратов придать равенству следующий вид:

$$\left(A+\|A\|I\right)\left(A-\|A\|I\right)\mathbf{x}_0=\mathbf{0}.$$

Если $\left(A-\|A\|I\right)\mathbf{x}_0=0$, то $\mathbf{x}_0$ является собственным вектором преобразования $A$ с собственным числом $\|A\|$. Если этот вектор, обозначим его через $\mathbf{y}_0$, не равен нулю, то, $\left(A+\|A\|I\right)\mathbf{y}_0=\mathbf{0}$, и $\mathbf{y}_0$ оказывается собственным вектором преобразования $A$ с собственным числом $-\|A\|$. ►

Мы сделали очень важный шаг, показав, что каждое симметрическое преобразование имеет по крайней мере один собственный вектор. (Для произвольного преобразования это, вообще говоря, не верно. Например, преобразование пространства геометрических векторов на плоскости, поворачивающее каждый вектор на один и тот же угол $\alpha$, не кратный $\pi$, не имеет ни одного собственного вектора. Это преобразование, называемое *поворотом в плоскости на угол* $\alpha$, нам еще встретится.) Но одного собственного вектора для приведения матрицы преобразования к диагональному виду не достаточно – требуется, чтобы из собственных векторов можно было составить базис. Поэтому придется сделать еще кое-что.

О п р е д е л е н и е 3. Подпространство $U$ векторного пространства называется *инвариантным относительно преобразования* $A$, если для любого вектора $\mathbf{x}$ из подпространства $U$ вектор $A\mathbf{x}$ также лежит в этом подпространстве.

Инвариантное подпространство удобно тем, что преобразование $A$ можно рассматривать как преобразование только этого подпространства.

Л е м м а 7. Пусть $U$ – подпространство евклидова пространства, инвариантное относительно симметрического преобразования $A$. Тогда ортогональное дополнение $U_\perp$ подпространства $U$ также инвариантно относительно преобразования $A$.

◄ Пусть $\mathbf{u}$ – любой вектор из подпространства $U$, а $\mathbf{v}$ – любой вектор из его ортогонального дополнения $U_\perp$. По условию вектор $A\mathbf{u}$ лежит в $U$ и, следовательно, ортогонален вектору $\mathbf{v}: A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$. Так как $A$ – симметрическое преобразование, то $\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v}=0$. Последнее равенство означает, что вектор $A\mathbf{v}$ ортогонален любому вектору подпространства $U$ и, значит, принадлежит ортогональному дополнению $U_\perp$. ►

Теорема 2 о собственных векторах симметрического преобразования.

Симметрическое преобразование $A$ $n$-мерного евклидова пространства имеет $n$ взаимно ортогональных собственных векторов.

◀ В силу леммы 6 у преобразования $A$ существует собственный вектор $\mathbf{e}_1$. Линейная оболочка $L(\mathbf{e}_1)$ представляет собой инвариантное относительно преобразования $A$ подпространство. Тогда согласно лемме 7 подпространство $L(\mathbf{e}_1)_\perp$, являющееся ортогональным дополнением подпространства $L(\mathbf{e}_1)$, также инвариантно относительно преобразования $A$.

Рассматривая $A$ как преобразование подпространства $L(\mathbf{e}_1)_\perp$, из леммы 6 снова можно заключить, что существует собственный вектор $\mathbf{e}_2$ преобразования $A$, лежащий в $L(\mathbf{e}_1)_\perp$ и, следовательно, ортогональный вектору $\mathbf{e}_1$.

Пусть теперь $L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ – линейная оболочка двух построенных векторов. По лемме 7 ортогональное дополнение $L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)_\perp$ инвариантно относительно преобразования $A$, и в нем можно снова найти вектор $\mathbf{e}_3$, ортогональный двум предыдущим.

… и так далее. Процесс завершится тогда, когда будет построено $n$ попарно ортогональных векторов, линейная оболочка которых совпадет со всем пространством. ▶

Следствие. Для любого симметрического преобразования $A$ можно указать ортонормированный базис, в котором ему будет отвечать диагональная матрица $A = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$, где $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ – собственные числа преобразования $A$.

◀ Этот базис состоит из $n$ взаимно ортогональных собственных векторов преобразования $A$, нормированных по длине на единицу. Диагональный вид матрицы преобразования в базисе из собственных векторов уже установлен леммой 4. ▶

Геометрически теорему 2 можно сформулировать так. Каждое симметрическое преобразование $n$-мерного евклидова пространства представляет собой растяжение вдоль некоторых $n$ взаимно ортогональных осей: вдоль первой – в $\lambda_1$ раз, вдоль второй – в $\lambda_2$ раз, и так далее.

## 4. Переход от одного базиса к другому.

После того, как выяснено, что матрицу симметрического преобразования можно привести к диагональному виду с помощью перехода к новому базису, нужно научиться вообще переходить от одного базиса к другому. То есть найти по каким правилам при таком переходе изменяются координаты вектора, элементы матрицы преобразования, коэффициенты линейной формы и элементы матрицы квадратичной формы. Начнем с векторов.

Преобразование векторов при замене базиса.

Пусть даны два произвольные базиса $E=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$ и $E'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,...,\mathbf{e}'_n\}$. Известны координаты $x_1,x_2,...,x_n$ вектора $\mathbf{x}$ в базисе $E$. Требуется найти его координаты $x'_1,x'_2,...,x'_n$ в базисе $E'$.

Пример. На рис. 7 в самом простом двумерном случае изображены базисы $E$ и $E'$ (последний пунктирной линией), а также вектор $\mathbf{x}$ и соответственно его координаты $(x_1,x_2)$ и $(x'_1,x'_2)$ в этих базисах. Нахождение координат со штрихом по координатам без штриха представляет собой геометрическую задачу, с которой нужно повозиться. В трехмерном, а тем более многомерном случае эта задача, если решать ее геометрическими методами, становится совсем непростой. Методы векторной алгебры позволяют ее решить

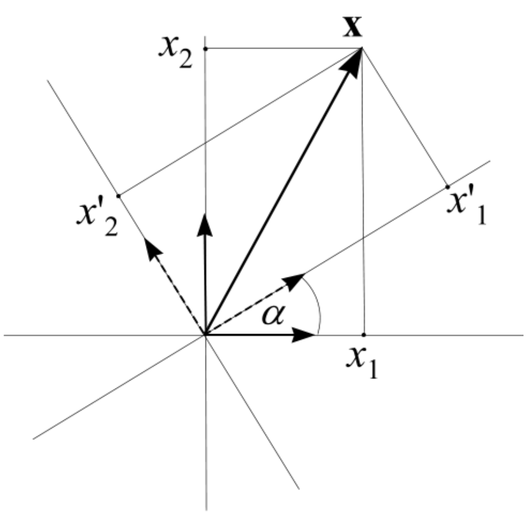



Рис. 7.

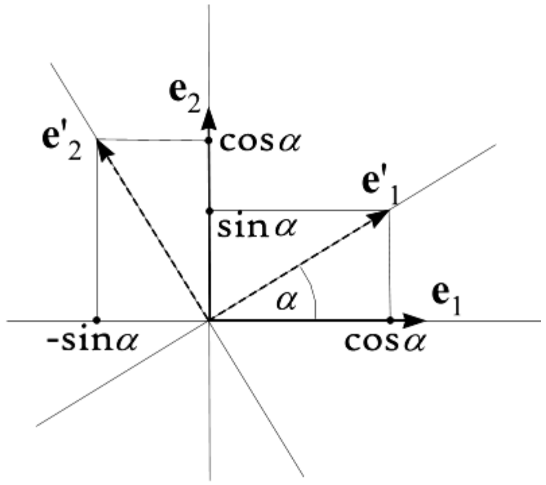



Рис. 8.

в несколько строчек.

Чтобы описать взаимное расположение базисов введем линейное преобразование $S$, связывающее эти базисы: $S\mathbf{e}_k=\mathbf{e}'_k$, $k=1,2,...,n$. Согласно теореме 12 § 3 $S$ – взаимно однозначное преобразование, поскольку образ базиса при этом преобразовании является базисом. Преобразование $S$ называется *преобразованием перехода от базиса $E$ к базису $E'$*. Матрицу этого преобразования (в исходном базисе $E$) также называют *матрицей перехода от базиса $E$ к базису $E'$*.

Вектор $\mathbf{x}$ по условию можно представить в виде $\mathbf{x}=x'_1\mathbf{e}'_1+x'_2\mathbf{e}'_2+...+x'_n\mathbf{e}'_n$. Подействуем на это равенство преобразованием $S^{-1}$:

$$S^{-1}\mathbf{x}=x'_1S^{-1}\mathbf{e}'_1+x'_2S^{-1}\mathbf{e}'_2+...+x'_nS^{-1}\mathbf{e}'_n=x'_1\mathbf{e}_1+x'_2\mathbf{e}_2+...+x'_n\mathbf{e}_n.$$

Полученное равенство показывает, что вектор $\mathbf{x}'=S^{-1}\mathbf{x}$ имеет в исходном базисе $E$ искомые координаты $x'_1,x'_2,...,x'_n$. Этот простой факт понадобится и в дальнейшем. Поэтому сформулируем его в виде леммы.

Лемма 8. Пусть $S$ – преобразование перехода от базиса $E$ к базису $E'$. Тогда для любого вектора $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{x}'=S^{-1}\mathbf{x}$ имеет в базисе $E$ те же координаты, что и вектор $\mathbf{x}$ в базисе $E'$.

Из леммы вытекает простое правило.

*При переходе от базиса* $E$ *к базису* $E'$ *координаты вектора* $\mathbf{x}$ *преобразуются по формуле*

$$x' = S^{-1}x\,,$$

*где* $x'$ *– матрица-столбец, состоящая из координат вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $E'$, $x$ *– то же самое, но в базисе* $E$, *и* $S$ *– матрица перехода от базиса* $E$ *к базису* $E'$.

Продолжение предыдущего примера.

Вычислим координаты $(x_1', x_2')$ вектора $\mathbf{x}$ в базисе $E$ по его известным координатам $(x_1, x_2)$ в базисе $E$ (см. рис. 7).

Как мы выяснили, главное – найти матрицу $S$ перехода от базиса $E$ к базису $E'$ и обратную ей матрицу $S^{-1}$. Будем считать (см. рис. 8), что базисы $E$ и $E'$ ортонормированные, и второй получен из первого поворотом на угол $\alpha$ (против часовой стрелки, что считается положительным направлением). В этом случае преобразование $S$ называется *поворотом в плоскости на угол* $\alpha$, поскольку, как легко проверить, поворачивает любой вектор на угол $\alpha$.

Напомним, что столбцами матрицы $S$ являются координаты векторов $S\mathbf{e}_1$ и $S\mathbf{e}_2$ в базисе $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Из рис. 8 находим: $S\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1' = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, и $S\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2' = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Таким образом матрицей поворота в плоскости на угол $\alpha$ является матрица

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Очевидно, что обратная ей матрица – это матрица поворота в плоскости на угол $-\alpha$. То есть $S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Ответ теперь такой:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha \\ -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} x_1' = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha \\ x_2' = -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{cases}.$$

Важное замечание. Если в какое-либо выражение входят координаты $x_1, x_2, ..., x_n$ вектора $\mathbf{x}$ в базисе $E$, то переход к другому базису $E'$ можно рассматривать как замену переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ в этом выражении на переменные $x_1', x_2', ..., x_n'$, представляющие собой координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $E'$. Если $S$ – преобразование перехода от базиса $E$ к базису $E'$, то эта замена, как выяснено, имеет вид $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$. Это – *линейная невырожденная (то есть взаимно однозначная) замена переменных*, которая в координатной форме выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 = s_{11}x_1' + s_{12}x_2' + ... + s_{1n}x_n' \\ x_2 = s_{21}x_1' + s_{22}x_2' + ... + s_{2n}x_n' \\ -------------- \\ x_n = s_{n1}x_1' + s_{n2}x_2' + ... + s_{nn}x_n' \end{cases}. \tag{68}$$

Здесь $s_{kl}$ – элементы матрицы $S$ перехода от базиса $E$ к базису $E'$.

Наоборот, каждую невырожденную линейную замену переменных $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$, то есть замену переменных вида (68) с матрицей коэффициентов $S = \left(s_{kl}\right)_{n\times n}$, можно рассматривать как переход от какого-то базиса $E = \left\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n, ..., \mathbf{e}_n\right\}$ к базису $E' = \left\{S\mathbf{e}_1, S\mathbf{e}_n, ..., S\mathbf{e}_n\right\}$.

*Далее мы очень часто будем пользоваться тождественностью понятий «переход к другому базису» и «невырожденная линейная замена переменных».* Отметим еще, что первое понятие, а значит, и второе геометрически можно толковать как переход от одних декартовых координат к другим декартовым координатам (см. § 2 п. 4).

П р е о б р а з о в а н и е   м а т р и ц   п р и   з а м е н е   б а з и с а . Пусть теперь дана матрица преобразования $A$ в базисе $E$. Требуется найти матрицу $A'$ этого преобразования в базисе $E'$. Приведенное ниже рассуждение очень похоже на то, с помощью которого мы выяснили, как изменяются координаты вектора при переходе от одного базиса к другому.

Рассмотрим $k$-тый столбец матрицы $A'$. По определению – это координаты вектора $A\mathbf{e}'_k$ в базисе $E'$. Пусть $S$, как и ранее, – преобразование перехода от базиса $E$ к базису $E'$. По лемме 8 вектор $S^{-1}A\mathbf{e}'_k$ в базисе $E$ имеет те же координаты, что и вектор $A\mathbf{e}'_k$ в базисе $E'$. Поскольку вектор $S^{-1}A\mathbf{e}'_k$ можно представить в виде $S^{-1}AS\mathbf{e}_k$, то это означает, что $k$-тый столбец матрицы $A'$ совпадает $k$-тым столбцом матрицы преобразования $S^{-1}AS$ в исходном базисе $E$. Иначе говоря, матрица $A'$ преобразования $A$ в базисе $E'$ и матрица преобразования $S^{-1}AS$ в базисе $E$ совпадают. Полученное соотношение дает следующее правило.

*При переходе от базиса $E$ к базису $E'$ матрица линейного преобразования находится по формуле*

$$A' = S^{-1}AS,$$

*где $A'$ – матрица преобразования в базисе $E'$, $A$ – то же в базисе $E$, и $S$ – матрица перехода от базиса $E$ к базису $E'$.*

В а ж н о е   з а м е ч а н и е . Если $S$ – какое-либо невырожденное преобразование, то преобразования $A$ и $A' = S^{-1}AS$ также, как и их матрицы, называют *подобными*. Этот термин объясняется тем, что преобразования $A$ и $A'$ имеют одни и те же свойства, в частности, одни и те же собственные числа.

Действительно, пусть $\mathbf{x}$ – какой-либо вектор, и $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Рассмотрим линейную однородную замену переменных с матрицей $S$, так что $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$, и $\mathbf{y} = S\mathbf{y}'$. Тогда

$$A'\mathbf{x}' = S^{-1}AS\left(S^{-1}\mathbf{x}\right) = S^{-1}A\mathbf{x} = S^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}'.$$

То есть с точностью до линейной однородной замены переменных преобразования $A$ и $A'$ действуют совершенно одинаково. Отсюда и вытекает, что все возможные их свойства одинаковы.

Можно рассуждать и по другому. По правилу преобразования матриц при замене базиса преобразования $A$ и $A' = S^{-1}AS$ имеют одну и ту же матрицу хотя и в разных базисах – преобразование $A$ в базисе $E$, а преобразование $A'$ в базисе $E'$, являющемся образом базиса $E$ при преобразовании $S$. Имея одну и ту же матрицу, они обладают одним и тем же характеристическим уравнением и, значит, собственными числами.

Так или иначе мы доказали следующее утверждение.

Лемма 9. Подобные преобразования (или матрицы) $A$ и $A' = S^{-1}AS$ обладают одним и тем же характеристическим уравнением и, как следствие, одними и теми же собственными числами.

Задание. Докажите это утверждение непосредственно, составив уравнение вида (63) для преобразования $S^{-1}AS$. (Подсказка: тождественное преобразование $I$ можно представить в виде $S^{-1}IS$.)

Преобразование линейной формы при замене базиса. Линейной формой называется выражение вида

$$B(\mathbf{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,$$

где $\mathbf{x}$ – вектор пространства $\mathbb{R}^n$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – его координаты.

Линейные формы мы рассматривали в предыдущем параграфе при изучении гиперплоскостей. Общее уравнение гиперплоскости, например, может быть записано в виде $B(\mathbf{x}) + b = 0$.

При переходе от одного базиса к другому меняются координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора $\mathbf{x}$ и соответственно меняются коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_n$ линейной формы. Требуется выяснить правило, по которому происходит изменение коэффициентов линейной формы.

Как и ранее положим, что $S$ – преобразование перехода от базиса $E$ к базису $E'$, и согласно лемме 8 $\mathbf{x}' = S^{-1}\mathbf{x}$ – вектор, имеющий в исходном базисе $E$ те же координаты $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, что и вектор $\mathbf{x}$ в базисе $E'$. Линейную форму можно записать в виде скалярного произведения $B(\mathbf{x}) = \mathbf{bx}$, где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – вектор коэффициентов этой формы. Совершая замену $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$, получим

$$B(\mathbf{x}) = \mathbf{bx} = \mathbf{b} \cdot S\mathbf{x}' = S^*\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}' = b_1'x_1' + b_2'x_2' + \ldots + b_n'x_n',$$

где $b_1', b_2', \ldots, b_n'$ – координаты вектора $S^*\mathbf{b}$.

Отсюда сразу же вытекает правило.

*При переходе от базиса $E$ к базису $E'$ коэффициенты линейной формы преобразуются по формуле*

$$b' = S^T b,$$

*где $b'$ – вектор-столбец коэффициентов формы в базисе $E'$, $b$ – то же самое, но в базисе $E$, и $S^T$ – транспонированная матрица перехода от базиса $E$ к базису $E'$.*

Теперь мы можем восполнить то, что не сделали в предыдущем параграфе при изучении гиперплоскостей.

Следствие. Уравнение гиперплоскости при любом выборе базиса является алгебраическим уравнением первого порядка. Для прямых на плоскости и плоскостей в пространстве это означает, что их уравнение остается уравнением первого порядка при любом выборе декартовой системы координат.

Преобразование квадратичной формы при замене базиса. Пусть $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\sum\limits_{k,s=1}^{n}a_{ks}x_s x_k$ – квадратичная форма, выраженная через координаты $x_1, x_2, ..., x_n$ вектора $\mathbf{x}$ в базисе $E$. Если перейти к координатам $x_1', x_2', ..., x_n'$ вектора $\mathbf{x}$ в другом базисе $E'$, то квадратичная форма будет иметь иные коэффициенты: $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\sum\limits_{k,s=1}^{n}a_{ks}'x_s' x_k'$. Требуется по известной матрице $A=\left(a_{ks}\right)_{n\times n}$ найти матрицу $A'=\left(a_{ks}'\right)_{n\times n}$.

Пусть, как и ранее, $S$ – преобразование перехода от базиса $E$ к базису $E'$, так что по лемме 7 вектор $\mathbf{x}'=S^{-1}\mathbf{x}$ имеет координаты $x_1', x_2', ..., x_n'$. Тогда с помощью замены $\mathbf{x}=S\mathbf{x}'$ найдем:

$$A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=AS\mathbf{x}'\cdot S\mathbf{x}'=S^*AS\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'=\sum_{k,s=1}^{n}a_{ks}'x_s'x_k',$$

где $a_{ks}'$ – элементы матрицы преобразования $S^*AS$.

Отсюда вытекает правило.

*При переходе от базиса $E$ к базису $E'$ матрица квадратичной формы преобразуется по формуле*

$$A'=S^TAS,$$

*где $A'$ – матрица квадратичной формы в базисе $E'$, $A$ – то же в базисе $E$, и $S$ – матрица перехода от базиса $E$ к базису $E'$.*

Замечание. Может показаться удивительным, что вектор коэффициентов линейной формы и матрица квадратичной формы преобразуются не по тем же правилам, что обычные вектор и матрица. Попробуем это объяснить на примере матрицы квадратичной формы $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$.

Пусть $S$, как и ранее, преобразование перехода от базиса от базиса $E$ к базису $E'$. Рассмотрим новое скалярное произведение

$$\mathbf{xy}=S\mathbf{x}\cdot S\mathbf{y}.$$

Задание. Проверьте, что введенная операция удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения.

Как мы уже писали, $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=AS\mathbf{x}'\cdot S\mathbf{x}'=S^*AS\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'$. Эту цепочку равенств можно продолжить:

$$...=S^*SS^{-1}AS\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'=SS^{-1}AS\mathbf{x}'\cdot S\mathbf{x}'=S\left(S^{-1}AS\right)\mathbf{x}'\cdot S\mathbf{x}'=S^{-1}AS\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'.$$

Отсюда следует, что матрица квадратичной формы преобразуется при замене базиса точно так же, как и матрица линейного преобразования, если квадратичную форму в новом базисе записывать с помощью нового скалярного произведения с «волной».

Обратите внимание, в евклидовом пространстве существует множество различных скалярных произведений. Например, каждый базис $E$ можно «объявить» ортонормированным в том смысле, что существует скалярное произведение, при котором он ортонормирован. Действительно, если $S$ – преобразование перехода от какого-либо ортонормированного базиса к базису $E$, то этим скалярным произведением является произведение с «волной».

Матрица квадратичной формы зависит от выбора скалярного произведения, а матрица линейного преобразования – нет. Этим и объясняется различие в их поведении при переходе к другому базису.

В следующем пункте будет рассмотрен специальный класс преобразований перехода от одного базиса к другому, при которых скалярное произведение с «волной» совпадает с исходным и, как следствие, матрицы линейных преобразований и матрицы квадратичных форм преобразуются одинаково.

З а д а н и е . Проверьте, что вектор линейной формы также преобразуется как обычный вектор, если линейную форму в новом базисе записывать с помощью скалярного произведения с «волной».

П р е о б р а з о в а н и е у р а в н е н и я в т о р о г о п о р я д к а п р и л и н е й н о й з а м е н е п е р е м е н н ы х .

Пусть линия второго порядка имеет уравнение общего вида

$$\sum_{k,s=1}^{n} a_{ks} x_s x_k + 2\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0 . \tag{69}$$

Требуется совершить в этом уравнении невырожденную линейную замену переменных $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$. Будем рассматривать переменные $x_1, x_2, ..., x_k$ в качестве координат вектора $\mathbf{x}$, а замену $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$ как переход к базису, для которого преобразование $S$ является преобразованием перехода. Так как правила преобразования квадратичной и линейной форм известны, то получаем следующее правило.

*В результате невырожденной линейной замены переменных* $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$ *общее уравнение второго порядка* (69) *преобразуется в уравнение того же вида:*

$$\sum_{k,s=1}^{n} a'_{ks} x'_s x'_k + 2\sum_{k=1}^{n} b'_k x'_k + c = 0 , \tag{70}$$

*причем матрица квадратичной формы* $A = \left(a'_{ks}\right)_{n\times n}$ *и матрица-столбец коэффициентов линейной формы* $b' = \left(b_1', b_2', ..., b_n'\right)$ *могут быть найдены с помощью матрицы преобразования* $S$ *по формулам:*

$$A' = S^T A S \text{ , } b' = S^T b \tag{71}$$

С л е д с т в и е . Уравнение гиперповерхности второго порядка при любом выборе базиса остается алгебраическим уравнением второго порядка. Для линий второго порядка на плоскости и поверхностей второго порядка в пространстве это означает, что при любом выборе декартовой системы координат их порядок не меняется.

## 5. Ортогональные преобразования.

Итак, получены все нужные нам формулы для перехода от одного произвольного базиса к другому тоже произвольному. Но для приведения матрицы симметрического преобразования к диагональному виду требуется от исходного базиса перейти к ортонормированному. Причем исходный базис (в нашем случае это – канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$) также является ортонормированным. Поэтому нужно рассмотреть специальные преобразования $S$, являющиеся преобразованиями перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному. Такие преобразования называются ортогональными. Дадим другое, более удобное, определение ортогональных преобразований и чуть позже докажем их эквивалентность.

Определение 4. Невырожденное линейное преобразование $S$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если $S^* = S^{-1}$.

Непосредственно из этого определения вытекает следующее важное утверждение, объясняющее, почему интересны ортогональные преобразования.

Лемма 10. Если преобразование перехода от одного базиса к другому является ортогональным, то вектор коэффициентов линейной формы преобразуются как обычный вектор, а матрица квадратичной формы – как матрица линейного преобразования. В частности, если ортогональное преобразование $S$ приводит матрицу некоторого преобразования $A$ к диагональному виду $A' = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, то квадратичная форма $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum\limits_{k,s=1}^{n} a_{ks} x_s x_k$ с матрицей $A$ заменой переменных $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$ приводится к главным осям: $A'\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k'^2$.

◄ Согласно лемме 2 матрица сопряженного преобразования $S^*$ является транспонированной матрицей $S^T$ исходного преобразования $S$. Для ортогонального преобразования $S$ это означает, что $S^T = S^{-1}$. В этом случае правила перехода к новому базису одинаковы для вектора коэффициентов линейной формы и обычного вектора. То же верно и для матрицы квадратичной формы и матрицы линейного преобразования.

В частности, если матрица $A$ линейного преобразования в некотором новом ортонормированном базисе оказывается диагональной, то квадратичная форма с матрицей $A$ в этом новом базисе имеет ту же диагональную матрицу и, следовательно, оказывается приведенной к главным осям. Переход к новому базису осуществляется заменой переменных $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$. ►

Теорема 3. Уравнение гиперповерхности второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданной общим уравнением

$$\sum_{k,s=1}^{n} a_{ks} x_s x_k + 2\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0,$$

с помощью ортогональной замены переменных может быть приведено к виду:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k'^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b_k' x_k' + c = 0, \tag{72}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – собственные числа симметрической матрицы $A = (a_{ks})_{n\times n}$.

◄ Пусть $A$ – линейное преобразование пространства, которому отвечает матрица квадратичной формы $A$. Согласно следствию теоремы 2 для симметрического преобразования $A$ можно указать ортонормированный базис $E'$, в котором ему будет отвечать диагональная матрица $A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ с собственными числами на диагонали. Пусть $S$ – преобразование перехода к базису $E'$. Так как этот базис ортонормированный, то преобразование $S$ ортогонально, и тогда по лемме 9 замена $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$ приводит общее уравнение к виду (72) ►

Вернемся к ортогональным преобразованиям и установим основные их свойства.

Т е о р е м а 4. Следующие утверждения эквивалентны, и каждое из них может служить определением ортогональных преобразований:

1. преобразование $S$ ортогональное, то есть $S^* = S^{-1}$;
2. образ ортонормированного базиса при преобразовании $S$ является ортонормированным базисом;
3. преобразование $S$ сохраняет скалярное произведение (является изоморфизмом евклидовых пространств): для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выполнено: $S\mathbf{x} \cdot S\mathbf{y} = \mathbf{xy}$;

◄ Для экономии труда мы не будем доказывать попарную эквивалентность перечисленных утверждений, а докажем, что из первого вытекает второе, из второго – третье и, наконец, из третьего – первое. Так как круг на этом замкнется, то все утверждения окажутся эквивалентными.

Далее при доказательстве этой леммы $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ – произвольный ортонормированный базис.

$1 \Rightarrow 2$. По определению столбцами матрицы преобразования $S$ в базисе $E$ являются векторы $S\mathbf{e}_k$. У матрицы сопряженного преобразования $S^*$, являющейся транспонированной матрицей $S$, векторы $S\mathbf{e}_k$ образуют строки. Рассмотрим произведение этих матриц: $S^*S = S^{-1}S = I$, где $I = \operatorname{diag}(1,1,...,1)$ – единичная матрица. По правилу вычисления произведения матриц («умножаем строку на столбец») из этого равенства получаем $S\mathbf{e}_k \cdot S\mathbf{e}_l = \begin{cases} 1, \text{при } k = l \\ 0, \text{при } k \neq l \end{cases}$. Это и означает, что векторы $\{S\mathbf{e}_1, S\mathbf{e}_2, ..., S\mathbf{e}_n\}$ образуют ортонормированный базис.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n$ – два произвольных вектора. Тогда, учитывая что система векторов $\{S\mathbf{e}_1, S\mathbf{e}_2, ..., S\mathbf{e}_n\}$ образует ортонормированный базис, найдем:

$$S\mathbf{x} \cdot S\mathbf{y} = S\left(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n\right)S\left(\beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n\right) = \sum_{r,l=1}^{n} \alpha_k\beta_l S\mathbf{e}_k S\mathbf{e}_l = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k = \mathbf{xy}.$$

$3 \Rightarrow 1$. Прежде всего из равенства $|S\mathbf{x}|^2 = (S\mathbf{x} \cdot S\mathbf{x}) = (\mathbf{xx}) = |\mathbf{x}|^2$ следует, что преобразование $S$, сохраняющее скалярное произведение, не может быть вырожденным и, следовательно, имеет обратное преобразование $S^{-1}$. Далее, снова используя свойство сохранения скалярного произведения, получим: $S\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = S\mathbf{x} \cdot SS^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot S^{-1}\mathbf{y}$. Поскольку векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ произвольные, то $S^* = S^{-1}$. ►

З а м е ч а н и я .

1. Отметим, что свойство 3, сформулированное в теореме 4, имеет простое геометрическое толкование. Поскольку длина вектора и угол между векторами

выражаются через скалярное произведение (см. п. 1 § 2), то ортогональное преобразование сохраняет расстояние между точками и углы между прямыми. Это означает, что образ любой геометрической фигуры при ортогональном преобразовании геометрически эквивалентен самой фигуре – при наложении друг на друга они полностью совпадут.

2. Матрицу симметрического преобразования, записанную в ортонормированном базисе, можно узнать по тому, что все ее элементы симметричны относительно главной диагонали. Матрицу ортогонального преобразования в ортонормированном базисе можно узнать по тому, что ее столбцы, рассматриваемые как векторы, ортогональны друг другу и по длине равны 1. Это вытекает из свойства 2, сформулированного в тереме 4.

   Действительно, образ ортонормированного базиса при ортогональном преобразовании является ортонормированным базисом, который по определению матрицы линейного преобразования образуют ее столбцы.

Если $S=\left(s_{ij}\right)_{n\times n}$ – матрица ортогонального преобразования $S$, то в координатной форме свойство 2 из теоремы 4 можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ki}s_{kj}=\begin{cases}1 \text{ при } i=j\\ 0 \text{ при } i\neq j\end{cases}. \qquad (73)$$

Матрицы, элементы которых удовлетворяют этим соотношениям, называют *ортогональными*.

Если $S$ какая-либо ортогональная матрица, то соотношения (73) можно трактовать как вычисление матрицы произведения преобразований $S^*S$. Поскольку получается единичная матрица, то $S$ – ортогональное преобразование.

Мы доказали следующее полезное утверждение.

Л е м м а 11. Линейное преобразование является ортогональным тогда и только тогда, когда в ортонормированном базисе его матрица ортогональная.

П р и м е р. О р т о г о н а л ь н ы е п р е о б р а з о в а н и я в п л о с к о с т и.

Л е м м а 1 2 . В двумерном евклидовом пространстве (плоскости) есть всего два типа ортогональных преобразований. Это – поворот на какой-либо угол или *зеркальное отражение* относительно какой-либо оси, проходящей через начало координат.

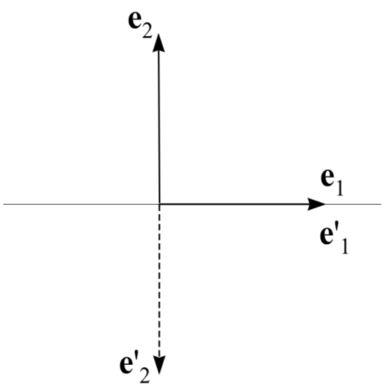



Рис. 9

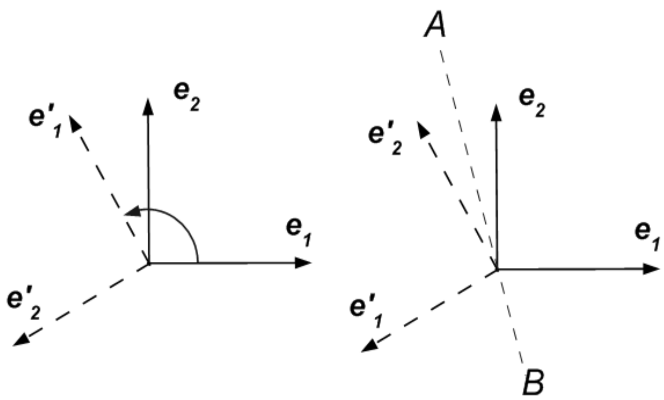



Рис. 10 a) и b).

С преобразованием поворот в плоскости на какой-либо угол мы уже знакомы, а преобразование зеркальное отражение сопоставляет каждому вектору симметричный ему вектор относительно какой-либо оси, проходящей через начало координат. Легко проверить, что зеркальное отражение является линейным преобразованием.

Например, зеркальное отражение относительно оси, направленной вдоль первого базисного вектора $\mathbf{e}_1$, (см. рис. 9) имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

◄ Пусть $S$ – ортонормированное преобразование плоскости, и $E$ – какой-нибудь ортонормированный базис на плоскости. По свойству 2 (теорема 4) ортогональное преобразование переводит ортонормированный базис $E$ в ортонормированный базис $E'$. Если эти базисы ориентированы одинаково, то совместить первый базис со вторым можно с помощью поворота первого из них (см. рис. 10 a). Таким образом, ортогональное преобразование $S$ в этом случае совпадает с поворотом в плоскости, поскольку эти два линейных преобразования одинаково преобразуют векторы базиса $E$.

Если базисы имеют разную ориентацию, то они симметричны относительно оси *AB* (см. рис. 10 b), являющейся биссектрисой угла образованного первыми (а тогда и вторыми) векторами базисов $E$ и $E'$. Поэтому совместить первый базис со вторым можно зеркальным отражением относительно оси *AB*. В этом случае ортогональное преобразование $S$ совпадает с зеркальным отражением, так как эти два линейных преобразования одинаково преобразуют векторы базиса $E$. ►

З а д а н и я .

1. Проверьте, что ортогональные преобразования первого типа, поворот в плоскости, сохраняют ориентацию плоскости (определитель равен 1), а второго типа, зеркальное отражение, – меняют ее (определитель равен $-1$).
2. Докажите, что для матрицы $S$ любого ортогонального преобразования $n$-мерного пространства выполнено $\det S = \pm 1$. (Подсказка: вспомните, что такое определитель (п. 2 § 5) и воспользуйтесь свойством 2 из теоремы 4).

Из леммы 12 следует, что все ортогональные преобразования, сохраняющие ориентацию плоскости, являются преобразованиями поворота. Обратное тоже верно: каждое преобразование поворота в плоскости является ортогональным преобразованием (например, по свойству 2 из теоремы 4).

Преобразование поворот в трехмерном пространстве представляет собой вращение вокруг какой-либо оси, проходящей через начало координат. Можно показать, хотя это более сложная геометрическая задача, что каждое ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию, представляет собой преобразование поворот в пространстве. Обратное утверждение, как и в двумерном случае, очевидно: любой поворот в трехмерном пространстве является ортогональным.

В четырехмерном пространстве трудно определить понятие поворота с помощью геометрических терминов. Например, можно так: поворот – это одновременное вращение вокруг двух взаимно ортогональных двумерных плоскостей, имеющих только одну общую точку – начало координат.

Это не совсем вразумительно, сложно представить себе геометрически и тем более нарисовать. Поэтому *для обобщения понятия поворота в многомерных пространствах* *используют понятие ортогонального преобразования, сохраняющего ориентацию пространства*.

Пример. Приведение линии второго порядка на плоскости. Для того чтобы общее уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \qquad (74)$$

привести к уравнению вида

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c = 0$$

можно действовать так. Найти собственные векторы матрицы $A$ квадратичной формы, построить ортогональное преобразование $S$ перехода к базису, состоящему из этих векторов, а затем воспользоваться общими формулами (71), которые дадут коэффициенты приведенного уравнения $a_{11}' = \lambda_1$, $a_{22}' = \lambda_2$, $b_1'$ и $b_2'$.

Однако на практике поступают иначе. Поскольку собственные векторы матрицы $A$ можно перенумеровать так, что базис, составленный из них, окажется положительно ориентированным, то преобразование $S$ перехода к этому базису можно считать сохраняющим ориентацию пространства. Тогда согласно лемме 11 $S$ – это поворот в плоскости на некоторый угол $\alpha$. Поэтому для приведения уравнения (74) делают замену переменных $\mathbf{r} = S\mathbf{r}'$, которая в координатной форме имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y' \\ y &= \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y' \end{aligned},$$

и подбирают угол $\alpha$ так, чтобы исчез «перекрестный» член с произведением координат $x'y'$.

В связи с этим для решения практических задач рекомендуется запомнить матрицу преобразования поворот на угол $\alpha$.

Мы изучили два класса линейных преобразований – симметрические и ортогональные преобразования. Это потребовало определенных усилий. Поэтому у Вас может возникнуть вопрос, сколько же еще существует важных классов преобразований и как долго придется их изучать. Ответ, приносящий некоторое облегчение, дает приведенная ниже теорема. Для того чтобы ее сформулировать понадобится следующее понятие.

Определение 5. Симметрическое преобразование $A$ называется *положительно определенным*, если квадратичная форма $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ для всех векторов $\mathbf{x}$ удовлетворяет неравенству $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geq 0$.

Это свойство можно сформулировать и по другому.

Лемма 13. Симметрическое преобразование положительно определено тогда и только тогда, когда положительны все его собственные числа.

◄ Пусть $\mathbf{x}$ – собственный вектор положительно определенного симметрического преобразования $A$, и $\lambda$ – отвечающее этому вектору собственное число. Тогда

$$\lambda|\mathbf{x}|^2 = \lambda(\mathbf{x}\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geq 0.$$

Отсюда сразу же следует, что $\lambda \geq 0$.

Докажем обратное утверждение. Квадратичную форму $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ согласно лемме 9 можно привести к главным осям. Поэтому, если все собственные числа $\lambda_k$ симметрического преобразования $A$ положительны, то

$$A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^2\ge 0\,. \blacktriangleright$$

Л е м м а 1 4 . У каждого положительно определенного симметрического преобразования $A$ имеется арифметический корень, то есть такое положительно определенное симметрическое преобразование $R$, что $R^2=A$.

◀ Перейдем к ортонормированному базису, состоящему из собственных векторов преобразования $A$. Такой базис существует в силу следствия теоремы 2. В этом базисе преобразованию $A$ отвечает диагональная матрица $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ с собственными числами на главной диагонали. По лемме 13 все эти числа положительны.

Легко проверяется, что любое симметрическое преобразование $B$, имеющее в этом же базисе матрицу $R=\operatorname{diag}\left(\pm\sqrt{\lambda_1},\pm\sqrt{\lambda_2},\ldots,\pm\sqrt{\lambda_n}\right)$, удовлетворяет требуемому соотношению $R^2=A$. Если все корни выбрать арифметическими, то согласно предыдущей лемме 13, преобразование $B$ положительно определено. ▶

Т е о р е м а 5 . Каждое линейное преобразование $A$ евклидова $n$-мерного пространства можно представить в виде произведения $A=RU$ ортогонального преобразования $U$ и положительно определенного симметрического преобразования $R$.

◀ Рассмотрим линейное преобразование $AA^*$. Из соотношений $\left(AA^*\right)^*=\left(A^*\right)^*A^*=AA^*$ (см. свойство 2 операции сопряжения) и $AA^*\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=A^*\mathbf{x}\cdot A^*\mathbf{x}\ge 0$ следует, что преобразование $AA^*$ является симметрическим и положительно определенным. Пусть $R$ – арифметический корень из преобразования $AA*$. Рассмотрим преобразование $U=R^{-1}A$ и покажем, что оно ортогонально:

$$UU^*=R^{-1}A\left(R^{-1}A\right)^*=R^{-1}AA^*R^{-1}=R^{-1}R^2R^{-1}=I\,,$$

где $I$ – тождественное преобразование.

Таким образом, $U$ – ортогональное преобразование, $R$ – положительно определенное симметрическое преобразование, и $A=RU$. ▶

Это изящное и простое доказательство, к сожалению, содержит дефект. Если преобразование $A$ вырожденное, то есть $\det A=0$, то $\det\left(AA^*\right)=\left(\det A\right)^2=0$. В этом случае среди собственных чисел преобразования $AA^*$, а значит, и его арифметического корня $R$ есть нули. Поэтому $R$ – необратимое преобразование, и мы не имеем права рассматривать обратное ему преобразование $R^{-1}$.

З а д а н и е . Попробуйте исправить положение и дать доказательство теоремы 4, пригодное даже в случае вырожденного преобразования $A$.

(Подсказка: Пусть $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\}$ совокупность всех не равных нулю собственных чисел матрицы $AA*$, так что в некотором базисе ей отвечает диагональная матрица $AA*=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,0,\ldots,0)$. Тогда ее арифметический корень $R$ в этом базисе имеет матрицу $R=\operatorname{diag}\left(\lambda_1^{\frac{1}{2}},\lambda_2^{\frac{1}{2}},\ldots,\lambda_m^{\frac{1}{2}},0,\ldots,0\right)$. Рассмотрим преобразование $R_{-1}$, которому в этом же базисе отвечает матрица $R_{-1} = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \lambda_2^{-\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_m^{-\frac{1}{2}}, 0, \ldots, 0\right)$. Пусть далее $V_0 = \operatorname{Ker}\left(AA^*\right)$ – ядро преобразования $AA^*$, и $V_\perp$ – его ортогональное дополнение. Положим $Ux_0 = x_0$ для всех векторов $x_0$ из $V_0$, и $U\mathbf{x}_\perp = R_{-1}A\mathbf{x}_\perp$ для любо вектора $x_\perp$ из $V_\perp$. Покажите, что так определенное линейное преобразование $U$ сохраняет скалярное произведение, то есть является ортогональным, и выполнено равенство $A = RU$.)

# § 9. Классификация линий второго порядка

В этом параграфе проводится аффинная классификация линий второго порядка на плоскости, а также гиперповерхностей второго порядка в многомерных пространствах.

## 1. Классификация линий второго порядка, симметричных относительно начала координат

Речь идет о линиях, задаваемых уравнениями вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + c = 0,$$

где члены, линейные по координатам $x$ и $y$, отсутствуют.

Согласно теореме 3 предыдущего параграфа уравнение такой линии можно ортогональным преобразованием привести к виду

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0, \qquad (75)$$

после чего легко выяснить геометрические свойства линии. (Штрихи над переменными мы опускаем, так как сейчас важен только вид уравнения (75).)

Рассмотрим невырожденный случай, когда все коэффициенты уравнения (75) отличны от нуля, то есть $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $c \neq 0$. Тогда приведенное уравнение (75) можно записать в канонической форме

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (76)$$

где $a = \sqrt{|c\lambda_1^{-1}|}$ и $b = \sqrt{|c\lambda_2^{-1}|}$, а знаки – какие получатся.

Таким образом, в невырожденном случае возможны только следующие линии:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс (см. рис. 1 a), уже рассмотренный в предыдущем параграфе;
2. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – так называемый *мнимый эллипс*, название которого объясняется тем, что ни одна точка на плоскости не удовлетворяет этому уравнению;
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболы. Первая из них (см. рис. 1 b) уже изучена в предыдущем параграфе, а у второй (см. рис. 1 c) в отличие от первой действительная полуось расположена не горизонтально, а вертикально. Это не новый геометрический тип линии – он получается из первого типа, если поменять местами координатные оси $X$ и $Y$.

Замечание. Далее пары линий, получающиеся друг из друга с помощью перестановки осей координат, считаются принадлежащими одному и тому же геометрическому типу и приводятся под одним и тем же номером.

Пусть теперь $c = 0$, но остальные коэффициенты, то есть $\lambda_1$ и $\lambda_2$ отличны от нуля. Тогда уравнение (75) в канонической форме имеет такой вид:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $a=\sqrt{\left|\lambda_1^{-1}\right|}$ и $b=\sqrt{\left|\lambda_2^{-1}\right|}$.

Будем считать, что первый знак – это плюс, в противном случае у всех членов уравнения можно поменять знаки. Таким образом возможны только следующие варианты:

4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – уравнению удовлетворяет только одна точка $(0,0)$, находящаяся в начале координат;
5. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – *пара пересекающихся прямых*, поскольку это уравнение можно переписать в виде $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=0$, и ему удовлетворяют те и только те точки плоскости, которые лежат на прямых $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ или $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$ (см. рис. 1 e).

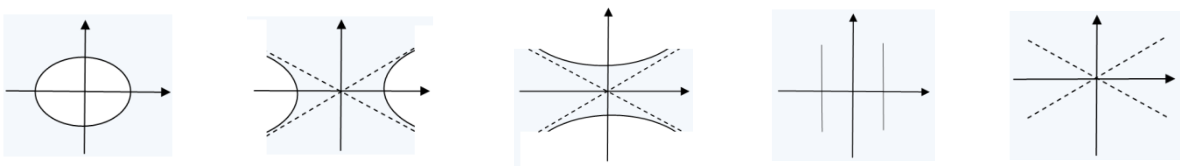
Задание. Проверьте, что пара пересекающихся прямых из п. 5 совпадает с асимптотами гипербол из п. 3.

Пусть теперь одно из собственных чисел $\lambda_1$ или $\lambda_2$ равно нулю, но $c\neq 0$. (Заметим, что оба собственных числа не могут одновременно равняться нулю, так как в этом случае уравнение (75) теряет смысл.) Возможны следующие варианты:

6. $\dfrac{x^2}{a^2}=1$ или $\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *пары параллельных несовпадающих прямых*: $x=a$ и $x=-a$ (см. рис. 1 d), или соответственно $y=b$ и $y=-b$;
7. $-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ или $-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *пары мнимых параллельных прямых*. Ни первому, ни второму из этих уравнений не удовлетворяет ни одна точка.

И, наконец, последний случай, когда $c=0$ и отличен от нуля только один коэффициент из $\lambda_1$ или $\lambda_2$.

8. $\dfrac{x^2}{a^2}=0$ или $\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – *пары совпадающих прямых* $x=0$ или $y=0$ соответственно.



a) b) c) d) e)

Рис. 1

Подведем итог проведенных рассмотрений

Теорема 1. Любая симметричная относительно начала координат линия второго порядка может оказаться в невырожденном случае ($\lambda_1\lambda_2 c\neq 0$) либо эллипсом, либо гиперболой, либо мнимой линией, не имеющей ни одной точки.

В вырожденных случаях ($\lambda_1\lambda_2 c = 0$) симметричная относительно начала координат линия второго порядка может быть одной из следующих: парой пересекающихся прямых, парой параллельных несовпадающих прямых, парой совпадающих прямых, точкой или мнимой линией.

## 2. Классификация линий второго порядка, задаваемых уравнением общего вида

Рассмотрим линию второго порядка, задаваемую уравнением общего вида:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Примером такой линии может быть эллипс, изображенный на рис. 2. Он не симметричен относительно начала координат $O$. Однако, если выбрать новые координаты $X'Y'$, как это показано на рис. 2, то эллипс окажется симметричным относительно нового начала координат $O'$. Любая линия, обладающая таким свойством, называются *центральной*, а точка $O'$ – *центром* этой линии.

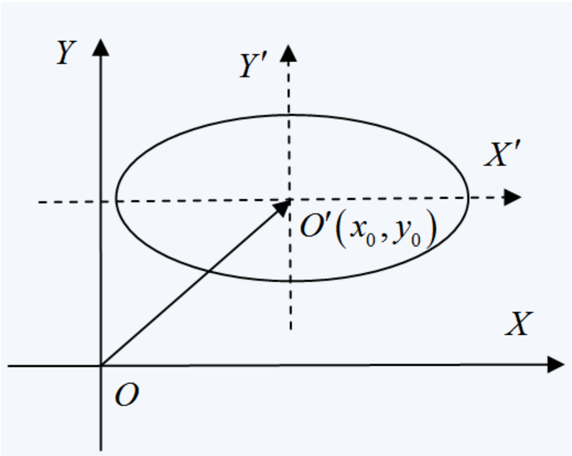



Рис. 2.

Ясно, что классификация, проведенная выше для симметричных относительно начала координат линий, справедлива для всех центральных линий второго порядка. Поэтому, рассматривая линию с общим уравнением, прежде всего следует выяснить, не является ли она центральной. То есть попробовать подобрать такие новые координаты $X'Y'$, относительно начала которых линия является симметричной. Для этого следует просто совершить замену переменных $x = x' + x_0$ и $y = y' + y_0$, геометрически означающую смещение плоскости на вектор $\overrightarrow{OO'}$ с координатами $(x_0, y_0)$, и попробовать подобрать координаты $x_0$ и $y_0$ так, чтобы в полученном уравнении исчезли линейные члены. Это удобней сделать, когда квадратичная форма уже приведена к главным осям:

$$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \qquad (77)$$

(Напомним, что в силу теоремы 3 предыдущего параграфа к такому уравнению можно перейти ортогональной заменой переменных. Штрихи над коэффициентами и переменными мы опускаем.)

После замены координат $x = x' + x_0$ и $y = y' + y_0$ и группирования подобных членов получим:

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + 2(\lambda_1x_0 + b_1)x' + 2(\lambda_2y_0 + b_1)y' + c' = 0,$$

где $c' = \lambda_1x_0^2 + \lambda_2y_0^2 + 2b_1x_0 + 2b_2y_0 + c$ – свободный член.

Если система уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1x_0 + b_1 = 0 \\ \lambda_2y_0 + b_2 = 0 \end{cases}$$

имеет решение, то рассматриваемая линия является центральной с точкой $O'(x_0, y_0)$ в качестве центра. Ясно, что система имеет решение, если оба собственных числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ не равны нулю. Рассмотрим случай, когда одно из собственных чисел, например, $\lambda_2$ равно нулю. (Отметим, что оба собственных числа не могут быть нулями, так как в этом случае уравнение (77) является уравнением первого порядка.) Очевидно, что при $\lambda_2 = 0$ рассматриваемая система имеет решения только при $b_2 = 0$.

Нас интересует случай, когда линия не является центральной, поскольку все центральные линии уже классифицированы в предыдущей теореме 1. Поэтому положим $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, и $b_2 \neq 0$. Выберем координату $x_0$ как решение первого уравнения системы, а координату $y_0$ так, чтобы у уравнения (77) отсутствовал свободный член:

$$c' = \lambda_1 x_0^2 + 2b_1 x_0 + 2b_2 y_0 + c = 0.$$

Последнее возможно сделать благодаря тому, что $b_2 \neq 0$.

Приведенное уравнение (77) принимает теперь совсем простой вид:

$$\lambda_1 x'^2 + 2b_2 y' = 0 .$$

Если отвлечься от штрихов над координатами, то это – хорошо знакомая Вам из школьного курса алгебры парабола $y = kx^2$, где $k = -\dfrac{\lambda_1}{2b_2}$.

Аналогично, в случае $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ получается уравнение: $x = ky^2$, где $k = -\dfrac{\lambda_2}{2b_1'}$. Это тоже парабола, отличающаяся от предыдущей только тем, что поменяны местами оси координат $X$ и $Y$. Таким образом, линии второго порядка, не являющиеся центральными, имеют следующие канонические уравнения:

9. $y = kx^2$ или $x = ky^2$ – параболы.

Итак, теорему 1 дополняет следующие утверждение.

Т е о р е м а 2 . Каждая центральная линия второго порядка, то есть линия, симметричная относительно начала какой-либо системы декартовых координат, является одной из линий, описанных в теореме 1. Любая нецентральная линия второго порядка является параболой. Таким образом, имеется всего девять геометрических типов линий второго порядка, перечисленных в пунктах 1 – 9.

В а ж н о е з а м е ч а н и е . Для приведения к каноническому виду уравнения линии второго порядка в общем случае мы использовали ортогональное преобразование (по сути вращение плоскости) и параллельный перенос. Оба эти преобразования сохраняют расстояние между точками плоскости. Поэтому линии, построенные по общему уравнению и каноническому уравнению, геометрически тождественны, то есть при наложении друг на друга полностью совпадают.

Проведенная классификация линий второго порядка называется *аффинной классификацией*. Каждая классификация, тем более математическая, должна удовлетворять двум естественным требованиям:

1. каждый элемент из классифицируемого множества должен принадлежать одному из классов;
2. ни один элемент не может принадлежать одновременно двум различным классам.

Аффинная классификация линий второго порядка удовлетворяет обоим этим требованиям. Первое из них устанавливается теоремой 2, а второе следует из приведенного выше соображения о том, что каждая линия второго порядка геометрически тождественна или некоторому эллипсу, или гиперболе, или параболе и так далее. Ясно, что одна и та же линия не может быть одновременно, скажем, эллипсом и гиперболой, или гиперболой и параболой.

Преобразования, являющиеся комбинацией ортогонального преобразования и последующего параллельного переноса, называются *ортогональными неоднородными преобразованиями.* Именно с помощью таких преобразований общее уравнение кривой второго порядка приводится к каноническому виду. Каждое ортогональное неоднородное преобразование в общем случае $n$ переменных можно записать в виде $\mathbf{x} = S\mathbf{x}' + \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ – вектор старых переменных, $\mathbf{x}' = \left(x_1', x_2', ..., x_n'\right)$ – новых переменных, $S = \left(s_{ij}\right)_{n\times n}$ – ортогональное преобразование, и $\mathbf{x}_0 = \left(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}\right)$ – постоянный вектор. В координатной форме *ортогональное неоднородное преобразование* записывается следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = s_{11}x_1' + s_{12}x_2' + \ldots + s_{1n}x_n' + x_{10} \\ x_2 = s_{21}x_1' + s_{22}x_2' + \ldots + s_{2n}x_n' + x_{20} \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ x_n = s_{n1}x_1' + s_{n2}x_2' + \ldots + s_{nn}x_n' + x_{n0} \end{cases}.$$

З а д а н и е . Покажите, что последовательное применение двух неоднородных ортогональных преобразований снова является неоднородным ортогональным преобразованием (Подсказка: из теоремы 4 п. 3 § 8 вытекает, что произведение ортогональных преобразований является ортогональным).

В частности, применение любой последовательности ортогональных преобразований и параллельных переносов можно представить как одно ортогональное преобразование с одним последующим параллельным переносом.

## 3. Аффинная классификация гиперповерхностей второго порядка.

Классификация гиперплоскостей второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$, полностью аналогична классификации линий второго порядка на плоскости. Затруднение вызывает лишь количество возможных классов, быстро возрастающее с размерностью пространства.

Рассмотрим гиперповерхность второго порядка, заданную уравнением общего вида

$$\sum_{k,s=1}^{n} a_{ks}x_s x_k + 2\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0\,. \tag{78}$$

По теореме 2 предыдущего параграфа симметрическая матрица $A = \left(a_{ks}\right)_{n\times n}$ имеет $n$ собственных значений. Предположим, что число отличных от нуля из них равно $m$ (

$m = 1, 2, ..., n$). Можно считать, так как это зависит только от способа нумерации собственных чисел, что из них отличными от нуля являются первые $m$ чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Тогда по теореме 3 § 8 уравнение (78) с помощью ортогональной замены переменных приводится к виду

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0, \tag{79}$$

где штрихи над коэффициентами и переменными опущены.

Выясним, когда эта гиперповерхность является центральной. Для этого совершим замену

$$x_k' = x_k + x_k^0, \; k = 1, 2, ..., n,$$

дающую уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k' x_k^2 + \sum_{k=1}^{m} 2\lambda_k x_k^{0\prime} x_k + 2\sum_{k=1}^{n} b_k' x_k + c' = 0,$$

где $c' = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(x_k^0\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b_k x_k^0 + c$ – свободный член.

Собирая члены этого уравнения, линейные по первым $m$ переменным $x_k'$, найдем

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k' x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{m} \left(\lambda_k x_k^0 + b_k\right)' x_k + 2\sum_{k=m+1}^{n} b_k x_k' + c' = 0.$$

От линейных членов можно избавиться, выбрав первые $m$ координат $x_k^0$ так, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\lambda_k x_k^0 + b_k = 0, \; k = 1, 2, ..., m. \tag{80}$$

От остальных линейных членов уравнения избавиться нельзя, если только они сами по себе не равны нулю. Поэтому гиперповерхность является центральной только в двух случаях. Первый, если $m = n$, то есть все собственные числа $\lambda_k$ отличны от нуля. И второй, при $m < n$, когда линейные по координатам $x_k$ члены исходного уравнения (79), начиная с $m+1$-го, отсутствуют, то есть $b_k = 0$ при $m < k \le n$.

В этих двух случаях гиперповерхность второго порядка является центральной и ее приведенное уравнение имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k'^2 + c' = 0, \tag{81}$$

В третьем и последнем из возможных случаев, когда $m < n$, и не равен нулю хотя бы один из коэффициентов $b_k$ ($m < k \le n$), гиперповерхность не является центральной. В этом случае можно только, решив систему (80), избавиться от линейных членов относительно первых $m$ координат $x_k'$. Кроме того можно избавиться и от свободного члена, подобрав еще не использованные координаты $x_k^0$ ($m < k \le n$) так, чтобы выполнялось равенство

$$c' = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(x_k^0\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b_k x_k^0 + c = 0.$$

Это можно сделать, поскольку хотя бы один из коэффициентов $b_k$ $(m < k \le n)$ не равен нулю.

Уравнение гиперповерхности после этого приобретет такой вид:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k'^2 + 2 \sum_{k=m+1}^{n} b_k x_k' = 0, \tag{82}$$

Это уравнение можно упростить, если совершить ортогональную замену переменных, соответствующую переходу к специально выбранному новому ортонормированному базису, который строится следующим образом.

Сохраним первые $m$ векторов старого базиса, а в качестве $m+1$-го возьмем вектор $\mathbf{n} = |\mathbf{b}|^{-1}\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} = (0, 0, ..., 0, b_{m+1}, b_{m+2}, ..., b_n)$ – вектор линейной формы уравнения (82). Вектор $\mathbf{n}$ по длине равен единице и, так как первые $m$ его координат равны нулю, ортогонален всем первым $m$ базисным векторам. Далее дополним получившуюся систему ортонормированных векторов до ортонормированного базиса произвольным образом. Для любой точки $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', ..., x_n')$ новую координату $x_{m+1}''$ можно вычислить как ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x}'$ на направление, задаваемое единичным вектором $\mathbf{n}$. Таким образом

$$x_{m+1}'' = \mathbf{n}\mathbf{x}' = |\mathbf{b}|^{-1}\mathbf{b}\mathbf{x}' = \left(\sum_{k=m+1}^{n} b_k^2\right)^{-1/2} \sum_{k=m+1}^{n} b_k x_k'.$$

Теперь уравнение (82) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k''^2 + 2b_{m+1}' x_{m+1}'' = 0, \tag{83}$$

где $b_{m+1}' = \left(\sum_{k=m+1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения

Т е о р е м а 3. Уравнением гиперповерхности второго порядка в пространстве размерности $n$ приводится неоднородным ортогональным преобразованием к одному из следующих видов:

$A_m$: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2 + c = 0$, $m = 1, 2, ..., n$ – центральные гиперповерхности;

$B_m$: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_m x_m^2 + b x_{m+1} = 0$, $m = 1, 2, ..., n-1$ – нецентральные гиперповерхности.

П р и м е р. Для линий второго порядка на плоскости имеется всего три вида: $A_1$, $A_2$ и $B_1$.

С помощью этой теоремы для каждой конкретной размерности пространства можно выписать все возможные варианты уравнений и привести их к каноническому виду подобно тому, как это было сделано для линий второго порядка на плоскости. Например, вариант $A_n$. разбивается на два случая: $c \ne 0$ и $c = 0$. В первом из них канонической формой уравнения является

$$\pm\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{x_2^2}{a_2^2} ... \pm \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1,$$

а во втором –

$$\pm\frac{x_1^2}{a_1^2}\pm\frac{x_2^2}{a_2^2}\dots\pm\frac{x_n^2}{a_n^2}=0.$$

Многообразие гиперповерхностей второго порядка, принадлежащих типу $A_n$, определяется теперь выбором знаков. Нужно только учесть, что если из одного уравнения перестановкой индексов можно получить другое уравнение, то оба эти уравнения определяют один и тот же геометрический объект. Например, уравнения

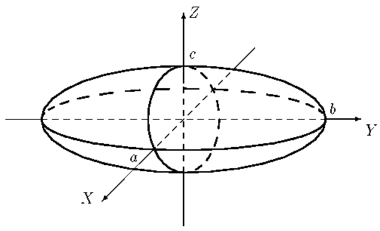
$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_n^2}{a_n^2}=1,\ \frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_n^2}{a_n^2}=1 \text{ и } -\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_n^2}{a_n^2}=1$$

задают в пространстве одну и ту же поверхность, называемую *гиперболоидом*. Отличия в уравнениях вызваны только разными способами нумерации осей декартовых координат. *Поэтому существенным, определяющим геометрические свойства гиперплоскостей, является только число положительных и отрицательных знаков в левой части ее канонического уравнения*.

З а д а н и е . Проведите с помощью теоремы 3 ортогональную аффинную классификацию поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве. После чего сравните результат с приведенною ниже таблицей.

А ф ф и н н а я к л а с с и ф и к а ц и я п о в е р х н о с т е й в т о р о г о п о р я д к а в п р о с т р а н с т в е .

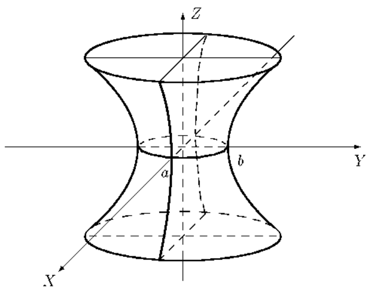
1. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

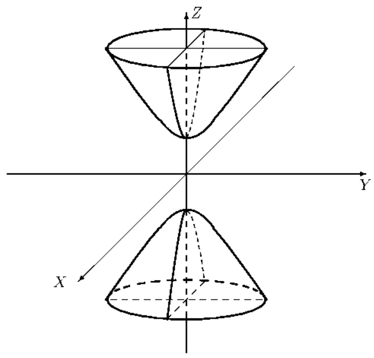
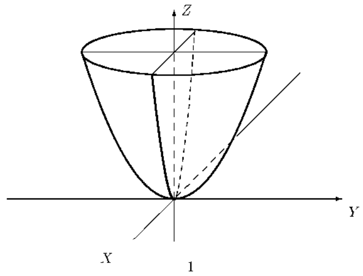
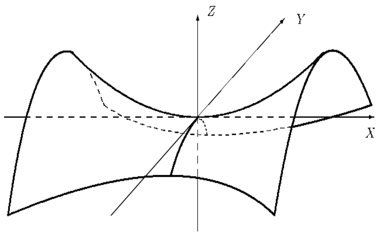
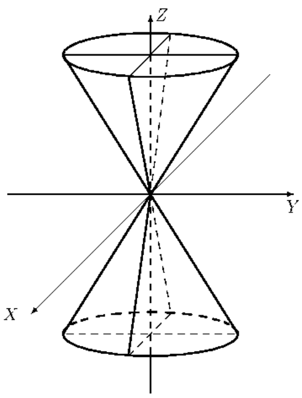
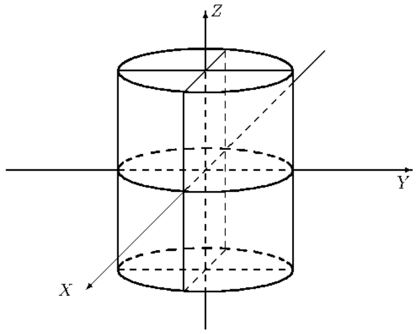


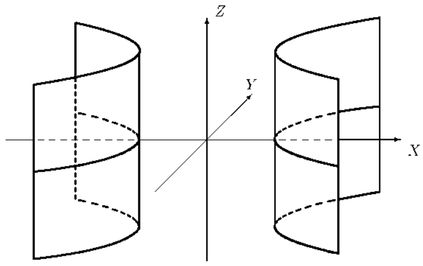
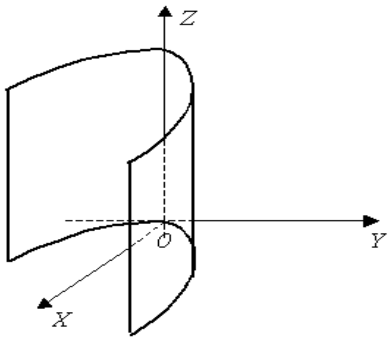
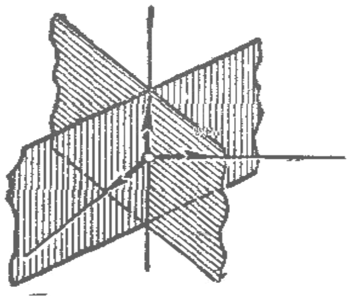
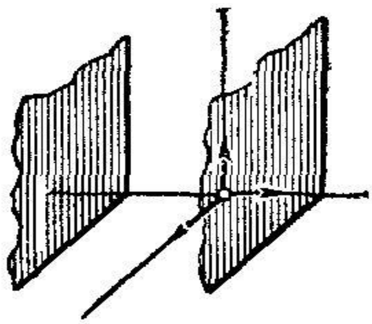

2. Мнимый эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

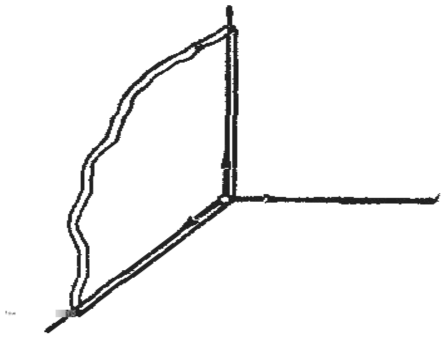
Уравнению не удовлетворяет ни одна точка

3. Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



| | | | |
|---|---|---|---|
| 4. | Двуполостный гиперболоид | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ |  |
| 5. | Эллиптический параболоид | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ |  |
| 6. | Гиперболический параболоид | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ |  |
| 7. | Конус второго порядка | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ |  |
| 8. | Мнимый конус второго порядка | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ | Уравнению удовлетворяет только одна точка – начало координат |
| 9. | Эллиптический цилиндр | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10. | Мнимый эллиптический цилиндр | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ | Уравнению не удовлетворяет ни одна точка |
| 11. | Гиперболический цилиндр | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ |   |
| 12. | Параболический цилиндр | $x^2 = py$ |   |
| 13. | Пара пересекающихся плоскостей | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ |  |
| 14. | Пара мнимых пересекающихся плоскостей | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ | Уравнению удовлетворяет только одна точка – начало координат |
| 15. | Пара параллельных плоскостей | $x^2-a^2=0$ |  |
| 16. | Пара мнимых параллельных плоскостей | $x^2+a^2=0$ | Уравнению не удовлетворяет ни одна точка |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17. | Пара совпадающих плоскостей | $x^2=0$ |  |

## 4. Определение типа линии второго порядка без нахождения ее канонического уравнения

Очень часто нужно выяснить геометрический тип линии второго порядка, заданной уравнением общего вида. Первый, трудоемкий, способ – найти ее каноническое уравнение. Второй, более простой, основан на *инвариантах* ее уравнения при неоднородных ортогональных преобразованиях. Именно с помощью этих преобразований общее уравнение линии второго порядка приводится к каноническому виду.

О п р е д е л е н и е 1 . Инвариантом уравнения

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0\,. \tag{84}$$

при каких-либо преобразованиях, сохраняющих вид этого уравнения, называется функция $F\left(a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c\right)$ его коэффициентов, которая не меняет своего численного значения при этих преобразованиях. Иначе говоря, если после преобразования получается снова уравнение (84) с коэффициентами $a'_{11}$, $a'_{12}$, $a'_{22}$, $b'_1$, $b'_2$ и $c'$, то

$$F\left(a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c\right)=F\left(a'_{11},a'_{12},a'_{22},b'_1,b'_2,c'\right).$$

П р и м е р ы . Вы, наверное, уже заметили, что:

1. при линейных преобразованиях в уравнении (84) не меняется свободный член $c$. Он является инвариантом этого уравнения при линейных преобразованиях;
2. при параллельных переносах не меняются коэффициенты $a_{11}$, $a_{12}$ и $a_{22}$ при старших степенях. Они представляют собой инварианты уравнения (84) при параллельных переносах.

Так как общее уравнение кривой второго порядка приводится к каноническому виду неоднородными ортогональными преобразованиями, то нам нужны инварианты уравнения (84) при этих преобразованиях.

Л е м м а 1 . Пусть $A$ – симметрическая матрица квадратичной формы, определенной в $n$-мерном евклидовом пространстве. Тогда все коэффициенты ее характеристического уравнения $\det\left(A-\lambda I\right)=0$ являются инвариантами (то есть не меняют свои значения) при (однородных) ортогональных преобразованиях. (Взятое в скобки слово «однородных» употреблено для того, чтобы Вы не спутали ортогональные преобразования с неоднородными ортогональными преобразованиями.)

◄ Матрица $A$ при ортогональном преобразовании $S$ в силу леммы 9 § 8 преобразуется как матрица линейного преобразования, то есть $A'=S^{-1}AS$. Напомним, что матрицы $A$ и

$A'$ в этом случае называются *подобными* и согласно лемме 9 § 8 имеют одно и то же характеристическое уравнение. ►

П р и м е р ы .

1. Рассмотрим матрицу квадратичной формы двух переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda\left(a_{11} + a_{22}\right) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Поэтому инвариантами при ортогональных преобразованиях являются:

- сумма диагональных элементов $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$, называемая *следом матрицы* $A$;
- определитель матрицы $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

2. Рассмотрим матрицу квадратичной формы трех переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ей отвечает характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda^2 + \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda - \det A = 0,$$

З а д а н и е. Убедитесь, что определитель в характеристическом уравнении раскрыт правильно.

Инвариантами при ортогональных преобразованиях, таким образом, являются

- след матрицы $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$;
- ее определитель $\det A$;
- коэффициент при линейном члене, представляющий собой сумму трех специальных определителей.

Т е о р е м а 1. Для уравнения линии второго порядка (84) инвариантами при неоднородных ортогональных преобразованиях являются $I_1 = \operatorname{tr} A$ и $I_2 = \det A$, где $A$ – матрица квадратичной формы этого уравнения.

◄ Неоднородное ортогональное преобразование состоит из ортогонального преобразования и последующего преобразования параллельным переносом. Как показано в предыдущем примере, величины $I_1$ и $I_2$ не меняются при ортогональных преобразованиях. При параллельном переносе они тоже не меняются, так как при этом преобразовании сохраняются все коэффициенты квадратичной формы. ►

З а д а н и е . Докажите, что для квадратичной формы любого числа переменных след и определитель ее матрицы $A$ являются инвариантами при неоднородных ортогональных преобразованиях. Так что в пространстве любого числа измерений $I_1 = \operatorname{tr} A$ и $I_2 = \det A$ суть инварианты уравнения гиперповерхности второго порядка при неоднородных ортогональных преобразованиях.

Для определителя справедливо еще более общее утверждение.

Л е м м а 2. Определитель матрицы квадратичной формы является инвариантом при всех линейных преобразованиях $S$, таких что $\det S = \pm 1$.

◄ Матрица $A$ квадратичной формы по правилу преобразования таких матриц преобразуется к матрице $A' = S^* AS$. Поэтому

$$\det A' = \det\left(S^* AS\right) = \det S^* \det A \det S = \det A \left(\det S\right)^2 = \det A . \blacktriangleright$$

Т е о р е м а 2. Определитель

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов уравнения (84), является инвариантом этого уравнения при неоднородных ортогональных преобразованиях.

◄ Требуется проверить, что определитель $I_3$ сохраняет свое значение после замены переменных вида:

$$\begin{matrix} x = s_{11}x' + s_{12}y' + x_0 \\ y = s_{21}x' + s_{22}y' + y_0 \end{matrix}, \tag{85}$$

где матрица $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ – ортогональная, и $x_0$, $y_0$ – постоянные числа.

Для этого применим следующий искусственный прием. Введя новую переменную $z$, дополним левую часть уравнения (84) до квадратичной формы трех переменных

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1xz + 2b_2yz + cz^2 = 0 . \tag{86}$$

Другими словами, «выйдем» из плоскости в трехмерное пространство так, что получившаяся поверхность второго порядка при пересечении с плоскостью $z = 1$ дает исходную линию второго порядка с уравнением (84). Замену переменных (85) мы также расширим до однородной замены переменных в трехмерном пространстве, положив

$$\begin{matrix} x = s_{11}x' + s_{12}y' + x_0z' \\ y = s_{21}x' + s_{22}y' + y_0z' \\ z = z' \end{matrix} . \tag{87}$$

Эта замена подобрана так, что плоскость $z = 1$ преобразуется сама в себя, причем на ней расширенная замена совпадает с исходной. Кроме того непосредственно проверяется, что определитель расширенной замены по абсолютной величине равен единице:

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & x_0 \\ s_{21} & s_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = \pm 1 .$$

В силу леммы 2 определитель $I_3$ инвариантен при расширенном преобразовании (87) дополненного уравнения (86). На плоскости $z=1$ расширенное преобразование совпадает с исходным преобразованием, а дополненное уравнение – с исходным уравнением. Поэтому определитель $I_3$ инвариантен при исходном неоднородном ортогональном преобразовании (85), совершаемом над исходным уравнением линии второго порядка (84). ►

Этот же прием с дополнением левой части уравнения (84) до уравнения поверхности второго порядка (86) мы используем при доказательстве еще одного важного утверждения.

Л е м м а 3. Величина

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}$$

является инвариантом уравнения линии второго порядка при (однородных) ортогональных преобразованиях.

◄ Нужно убедиться, что значение величины $K_1$ не меняется при замене переменных вида

$$\begin{aligned} x &= s_{11}x' + s_{12}y_0' \\ y &= s_{21}x' + s_{22}y_0' \end{aligned}, \tag{88}$$

где $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица.

Рассмотрим в дополненном уравнении (86) расширенную замену переменных :

$$\begin{aligned} x &= s_{11}x' + s_{12}y' \\ y &= s_{21}x' + s_{22}y_0' \, . \\ z &= z' \end{aligned} \tag{89}$$

Эта замена преобразует плоскость $z=1$ в себя и, как легко проверить, имеет ортогональную матрицу. Для ортогональных преобразований одним из инвариантов квадратичной формы трех переменных (см. пример п. 2) является коэффициент при линейном члене ее характеристического уравнения. Поэтому сумма трех определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} .$$

представляет собой инвариант дополненного уравнения (86) при расширенном ортогональном преобразовании (89). Положив $z=1$, получим, что эта сумма инвариант исходного уравнения (84) при исходном ортогональном преобразовании (88).

Первый определитель в сумме – это (см. пример 1) инвариант $I_2$ уравнения (84) при ортогональных преобразованиях. Поэтому $K_1$ – сумма двух последних определителей – тоже инвариант уравнения (84) при ортогональных преобразованиях. ►

Итак мы имеем три инварианта уравнения линии второго порядка относительно неоднородных ортогональных преобразований:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}\,,\ I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}.$$

Их принято называть *рациональными инвариантами* или просто *инвариантами*.

Кроме того имеется еще один инвариант уравнения линии второго порядка

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix},$$

но, вообще говоря, только при (однородных) ортогональных преобразованиях. Его называют *семиинвариантом*, в переводе *полуинвариантом*, и вот почему.

Теорема 3. Если уравнение линии второго порядка неоднородным ортогональным преобразованием приводится к уравнению вида

$$\lambda_1 x^2 + c = 0 \tag{90}$$

(к виду $A_1$ по классификации, проведенной в теореме 3), то величина $K_1$ является для него инвариантом при неоднородных ортогональных преобразованиях.

◄ Если уравнение приводится к виду (90) с помощью неоднородного ортогонального преобразования, то его можно получить из уравнения (90) обратным преобразованием. То есть преобразованием, состоящим из параллельного переноса и последующего однородного ортогонального преобразования. При однородном ортогональном преобразовании семиинвариант $K_1$ согласно лемме 3 сохраняется. Остается проверить, что он сохраняется при параллельном переносе, то есть при замене переменных вида

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}.$$

Совершая эту замену, получим:

$$\lambda_1 x^2 + c = \lambda_1 \left( x' + x_0 \right)^2 + c = \lambda_1 x'^2 + 2\lambda_1 x_0 x' + \lambda_1 x_0^2 + c\,.$$

Теперь подсчитаем семиинвариант $K_1$ для обоих уравнений, учитывая, что $a_{11} = a'_{11} = \lambda_1$, $a_{22} = a'_{22} = 0$, $b_1 = 0$, $b'_1 = \lambda_1 x_0$, $b_2 = b'_2 = 0$ и $c' = \lambda_1 x_0 + c$:

$$K_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = \lambda_1 c\,,\ K'_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 x_0 \\ \lambda_1 x_0 & \lambda_1 x_0^2 + c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 x_0^2 + c \end{vmatrix} = \lambda_1 c\,.$$

Это завершает доказательство. ►

Чтобы понять, как найденные инварианты позволяют определить тип линии второго порядка, построим таблицу, в которой для каждого из девяти возможных типов канонических уравнений вычислены знаки инвариантов:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Эллипс | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | $I_2>0, I_1I_3<0$ |
| 2. | Мнимый эллипс | $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | $I_2>0, I_1I_3>0$ |
| 3. | Точка | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ | $I_2>0, I_3=0$ |
| 4. | Гипербола | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | $I_2<0, I_3\neq 0$ |
| 5. | Пара пересекающихся прямых | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ | $I_2<0, I_3=0$ |
| 6. | Парабола | $y=kx^2$ | $I_2=0, I_3\neq 0$ |
| 7. | Пара параллельных прямых | $\frac{x^2}{a^2}=1$ | $I_2=0, I_3=0, K_1<0$ |
| 8. | Пара мнимых параллельных прямых | $-\frac{x^2}{a^2}=1$ | $I_2=0, I_3=0, K_1>0$ |
| 9. | Пара совпадающих прямых | $\frac{x^2}{a^2}=0$ | $I_2=0, I_3=0, K_1=0$ |

З а м е ч а н и е. Если у всех коэффициентов уравнения поменять знак, то инвариант $I_2$ и семиинвариант $K_1$ не изменятся, а инварианты $I_1$ и $I_3$ поменяют знак. Поэтому два последних инварианта, если они не равны нулю, рассматриваются только в виде их произведения.

Из этой таблицы видно, что каждому каноническому уравнению соответствует уникальный набор знаков у инвариантов. Поэтому для заданного уравнения линии второго порядка можно вычислить значения инвариантов и по таблице определить, к какому из канонических уравнений оно может быть приведено. Другими словами, можно выяснить, какой геометрический тип имеет линия, заданная этим уравнением.

П р и м е р. Определить геометрический тип линии, заданной уравнением

$$x^2+2xy+3y^2+4x+6y+7=0.$$

Р е ш е н и е . Вычислим инварианты $I_1$, $I_2$ и $I_3$. Семиинвариант $K_1$ пока вычислять не будем – он понадобится только в случае когда $I_2=0, I_3=0$. Для удобства запишем расширенную матрицу уравнения (нужно помнить, что в уравнении общего вида (84) коэффициенты $a_{12}$, $b_1$ и $b_2$ имеют множитель 2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем инварианты

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 1 + 3 = 4, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 .$$

Сверяясь с таблицей, находим, что линия, заданная уравнением, является мнимым эллипсом.

В а ж н о е з а м е ч а н и е. Нет ничего удивительного в том, что при наугад выбранных коэффициентах уравнения получился мнимый эллипс. Могли получиться еще эллипс или гипербола. Для того чтобы получить уравнения остальных линий второго порядка, коэффициенты нужно специально подбирать. Дело в том, что перечисленные три геометрических вида линий являются линиями *устойчивого типа* – достаточно малые изменения коэффициентов в их уравнениях не приводят к качественному изменению их геометрии. Остальные линии – *вырожденные*. Они обладают тем свойством, что при сколь угодно малом изменении коэффициентов их уравнений геометрический тип линии может полностью измениться. Пара пересекающихся прямых может, например, стать гиперболой, а точка – эллипсом или мнимым эллипсом.

Это сразу же вытекает из составленной нами таблицы. Для линии устойчивого типа инварианты $I_2$ и $I_3$ отличны от нуля, и достаточно малые изменения коэффициентов уравнения не сделают их равными нулю, ни тем более не изменят их знаки. Следовательно, геометрический тип линии останется прежним. Напротив, для остальных видов линий один или оба из этих инвариантов равны нулю. Поэтому сколь угодно малое изменение коэффициентов уравнения может нарушить равенство нулю этих инвариантов. Согласно таблице это приведет к изменению геометрического типа линии.

Другими словами это можно выразить так. Будем рассматривать уравнение линии второго порядка как точку в шестимерном пространстве, координаты которой составляют шесть коэффициентов этого уравнения. Тогда линиям устойчивого типа соответствуют области этого пространства. А вырожденным линиям – границы этих областей, заданные уравнениями $I_2 = 0$ или $I_3 = 0$. Отсюда становиться ясным, что при случайном выборе точки – набора коэффициентов общего уравнения – получится линия устойчивого типа, а вероятность получить вырожденную линию, то есть попасть на границу, исчезающе мала.

В заключение отметим, что для поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве тоже существуют инварианты и семиинварианты, и с их помощью точно так же, как и для линий второго порядка, можно определить геометрический тип поверхности по заданному уравнению. Инвариантов имеется четыре, а семиинвариантов – два.

Вообще, этот метод без особых теоретических сложностей переносится на гиперповерхности в пространствах любого числа измерений $n$. Однако трудоемкость метода вместе с числом возможных геометрических типов гиперповерхностей быстро возрастает с ростом размерности пространства $n$. Многообразие типов гиперповерхностей в $n$-мерном пространстве определяется знаками имеющихся $n+1$ инвариантов и $n-1$ семиинвариантов.

# Предметный указатель

## Н



## О



## П



## Р



## С

## Т



## У



## Ф



## Э



## Я