Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира.

Ф. Энгельс

А.А. Гусак
Г.М. Гусак
Е.А. Гусак

В мире чисел

КНИГА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Минск
«Народная асвета»
1987

ББК 22.13
Г96
УДК 087.1:511

Рецензенты:
М. П. Лельчук, Л. Б. Шнеперман — кандидаты
физико-математических наук

Гусак А. А. и др.
Г 96 В мире чисел: Кн. для учащихся/ А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Гусак.— Мн.: Нар. асвета, 1987.— 191 с.: ил.

В популярной форме авторы рассказывают о натуральных и целых числах, делимости натуральных чисел, о числах рациональных, действительных, комплексных и гиперкомплексных. Дают краткие исторические сведения о возникновении и развитии теории чисел, жизни и деятельности выдающихся ученых — создателей этой теории.

$$\text{Г}\,\frac{4802020000-070}{\text{М}303(03)-87}\,152-86$$

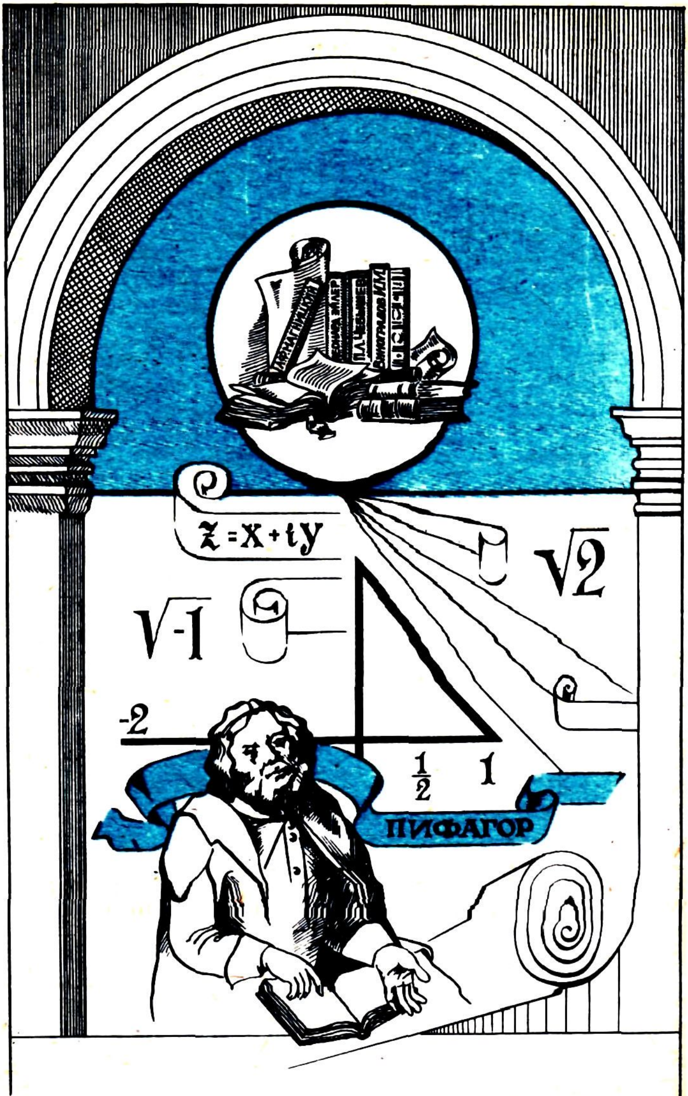
ББК 22.13

От авторов

Книга адресована юному любителю математики. Она поможет читателю расширить и углубить свои знания о числах. Из книги можно узнать много нового о числах, изучаемых в школе, и интересные факты истории развития понятия числа: как называют и обозначают достаточно большие числа; когда появились некоторые из этих названий; откуда произошли названия «нуль» и «цифра»; кто впервые применил название «натуральное число»; где и когда возникла десятичная система счисления, которой мы пользуемся в настоящее время; какие другие системы счисления существовали ранее; что такое совершенное число и дружественная пара чисел; что это за алгебраические и трансцендентные числа; как возникло понятие иррационального числа; где и когда появились отрицательные числа.

Читатель познакомится с недесятичными позиционными системами счисления, научится выполнять действия над числами в этих системах, а также переводить записи чисел из одной системы в другую. Знакомство с различными системами счисления очень важно, поскольку в современных электронных вычислительных машинах используются не десятичная, а двоичная, восьмеричная и шестнадцатиричная системы счисления.

Юный любитель математики встретится здесь с новыми для него числами — комплексными и гиперкомплексными, их практическим применением. С помощью комплексных чисел он сможет решить любое квадратное уравнение. Узнает, кто впервые и в связи с чем рассматривал комплексные числа.


z = x + ty
√-1
√2
-2
1/2
1
ПИФАГОР

Знание людей заслуживает имени Науки в зависимости от того, какую роль играет в нем число.

Э. Борель

Введение

Число является одним из основных понятий математики. Ф. Энгельс определил математику как науку о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Для описания и исследования количественных отношений служат числа. Они позволяют выразить результаты счета или измерения. Понятие числа служит исходным для многих математических теорий. Числа находят широкое применение в физике, механике, астрономии, химии и многих других науках. Числами постоянно пользуются в повседневной жизни.

В школьном курсе математики несколько раз происходит обогащение запаса чисел. Сначала, в процессе счета, возникает множество натуральных чисел. Результаты сложения и умножения натуральных чисел также выражаются натуральными числами. Действие вычитания вызывает необходимость рассмотрения целых отрицательных чисел. Другими словами, при решении уравнений вида $x+a=b$, появляются отрицательные числа; на этом этапе получено множество целых чисел. Действие деления или решение уравнения $ax=b$, где a и b — целые числа, причем $a \neq 0$, приводит к необходимости введения рациональных чисел. Дальнейшее расширение понятия числа происходит в связи с введением иррациональных чисел; к их рассмотрению приводит, например, извлечение квадратного корня из положительного числа или решение уравнения $x^2=a$ при $a>0$.

В школе изучают различные числа, в основном, в той же последовательности, в какой исторически развивалось понятие числа. Это понятие возникло впервые еще в доисторические времена в связи с практической деятельностью человека. Понятие числа развивалось на протяжении многовековой истории человечества. Оно изменялось и расширялось с развитием науки и совершенствованием практики. Каждый новый этап развития понятия числа окончательно закреплялся после длительного испытания.

Понятие натурального числа возникло в связи с потребностями счета предметов. На первых этапах развития счета при сравнении двух множеств предметов их элементы располагались друг против друга. Но потом оказалось, что удобнее сравнивать все множества с одним и тем же множеством — множеством пальцев на руках. Так люди стали считать по пальцам (если пальцев рук не хватало, то к ним присоединялись и пальцы ног). Позже появились особые названия для чисел — сначала для небольших, а потом все для больших и больших. С течением времени человек научился не только называть числа, но и обозначать их. Откуда нам известно, как называли и обозначали числа в глубокой древности, примерно 4000 лет тому назад? Об этом ученые узнали из дошедших до нас письменных памятников культуры — математических текстов Древнего Египта и Древнего Вавилона. В этих государствах в те далекие времена возникли математические задачи, к которым привела необходимость производить расчеты при строительстве складов для зерна, дворцов, храмов, при торговых операциях, мореплавании.

В Египте математические тексты чаще писались на хрупком папирусе, поэтому сохранились только те из них, которые были положены в пирамиды-усыпальницы высокопоставленных египтян. Из текстов этих папирусов видно, что древние египтяне знали натуральные числа и дроби, умели производить над ними основные действия. Для записи чисел египтяне пользовались особыми знаками — иероглифами. У них были иероглифы только для единицы, десяти, ста, тысячи, десяти тысяч, ста тысяч, миллиона и десяти миллионов. Натуральные числа изображались соответствующими знаками, повторенными надлежащее число раз. Единица обозначалась знаком | (назывался мерной палкой); числа от 2 до 9 обозначались соответствующим количеством этих знаков, например, |||| — 4. Для обозначения числа 10 служил знак ∩, повторением этого знака обозначались числа 20, 30, ..., 90, например, ∩∩ — 20. С помощью указанных двух знаков изображались числа от 11 до 99: ∩| — 11, ∩∩||| — 23 и т. п. Число 100 обозначалось знаком 𓍢 (назывался мерительной веревкой для обмера полей). Для обозначения чисел 200, 300, ..., 900 использовали соответствующее количество таких знаков. Назовем знаки для обозначения других чисел: для 1000 — цветок лотоса, для 10 000 — указательный палец, для 100 000 — лягушка, для 1 000 000 — удивленный человек с поднятыми вверх руками, для 10 000 000 — солнце. Разряды записывались в порядке, обратном нашему, так как египтяне писали справа налево.

До нас дошло большое количество вавилонских математических клинописных текстов. Они были написаны клинописью на сырой глине, которая затем обжигалась. Эти тексты свидетельствуют о том, что древние вавилоняне знали натуральные числа, дроби, умели находить обратные числа и извлекать квадратные корни из чисел. Вавилонская система обозначения чисел была позиционной — один и тот же знак, в зависимости от расположения, мог обозначать разные числа. Эта система была основана на использовании двух клинописных знаков: Y, ≺. Первый из них напоминал треугольник с ручкой, он обозначал числа 1 и 60; второй — прописную букву А, расположенную горизонтально, обозначал числа 10 и 600. При записи чисел от 1 до 59 знаки единицы и десяти повторялись соответственно столько раз, сколько в данном числе единиц и десятков. Разряды располагались в том же порядке, что и в нашей десятичной системе счисления. Впоследствии первым знаком (клином) стали обозначать не только 1 и 60, но 3600 и любые числа вида 60^n, а также $1/60$ и любые другие числа вида $1/60^n$. Вторым знаком начали обозначать не только 10 и 600, но и числа вида $10 \cdot 60^n$ и $10/60^n$. Таким образом, древние вавилоняне пользовались шестидесятиричной системой счисления и шестидесятиричными дробями. Вавилоняне имели специальные знаки для дробей $1/2$, $1/3$, $2/3$. В более позднее время они начали пользоваться особым знаком для нуля.

Математики Древней Греции рассматривали только натуральные числа и их отношения. Долгое время они считали, что результат любого измерения величины всегда можно выразить или натуральным числом, или отношением двух таких чисел, т. е. дробью. Сильнейший удар по этому взгляду нанес один из учеников Пифагора, который доказал, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Отсюда следовало, что натуральных чисел и дробей недостаточно для того, чтобы выразить длину диагонали квадрата, сторона которого равна единице. Другими словами, оказалось, что существуют отрезки, длины которых невозможно выразить известными тогда числами.

В это время возникли две науки, которые развивались параллельно, но имели различные объекты изучения: арифметика — наука о числах и геометрия — наука о длинах, площадях, объемах. Четыре действия над числами: сложение, вычитание, умножение и деление — назвали арифметическими. Позднее Пифагором были заложены основы науки о целых числах — теории чисел. Эту теорию в дальнейшем развивали ученые Китая и Индии. Расцвет теории чисел в Европе связан с работами французского ученого П. Ферма (1601—1665). Исключительно важный вклад в теорию чисел внесли русские и советские ученые: петербургские академики Л. Эйлер (1707—1783), П. Л. Чебышев (1821—1894), академик И. М. Виноградов (1891—1983) и др.

Понятие отрицательного числа возникло в самой математике при разработке методов решения систем линейных алгебраических уравнений, т. е. уравнений, содержащих переменные только в первой степени и не содержащих их произведений. В процессе преобразования уравнений в некоторых случаях была необходимость вычитать большее число из меньшего или вычитать число из «ничего» (нуля). Так пришли к рассмотрению отрицательных чисел, а затем и правилам действий над ними.

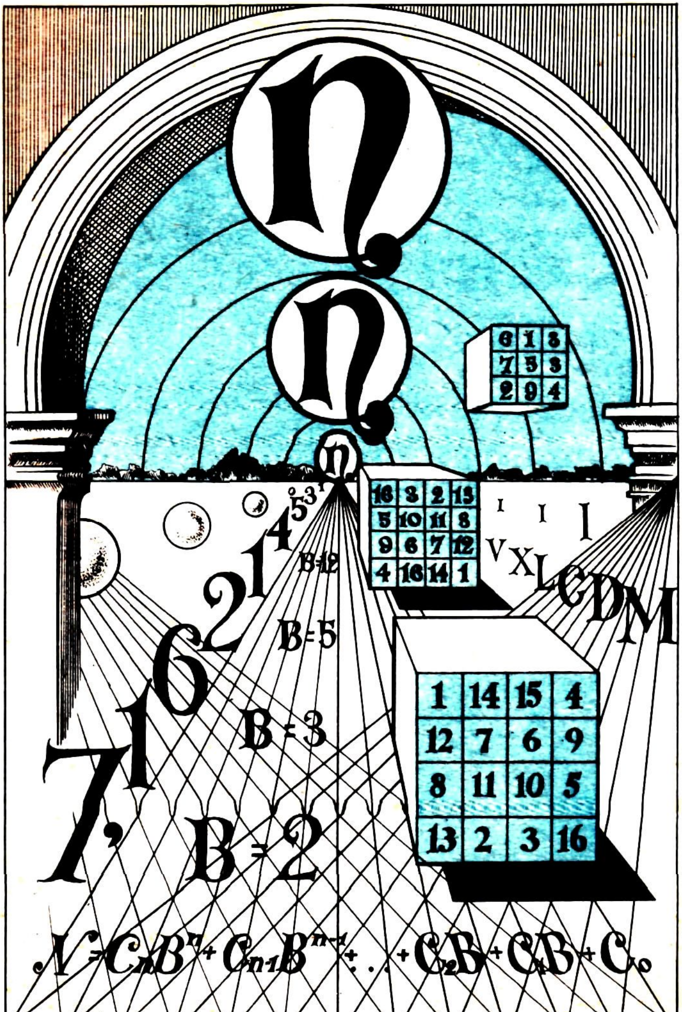
Изучение чисел шло не только путем обобщения, но и путем выделения из общего понятия числа важных частных случаев. Например, во множестве действительных чисел были выделены алгебраические числа, т. е. числа, являющиеся корнями уравнений вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа. Примерами алгебраических чисел могут служить $1 + \sqrt{5}$ (корень уравнения $x^2 - 2x - 4 = 0$), $\sqrt[3]{7}$ (корень уравнения $x^3 - 7 = 0$). Каждое рациональное число $\frac{a}{b}$ является алгебраическим, так как оно служит корнем уравнения $bx - a = 0$. Все числа, не являющиеся алгебраическими, называют трансцендентными. Очевидно, все трансцендентные числа иррациональны. Числа $\pi = 3{,}1416\ldots$, $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = 2{,}71828\ldots$, играющие важную роль в математике, являются трансцендентными. Советский математик А. О. Гельфо́нд (1906—1968) доказал, что любое число вида α^β, где α — алгебраическое число, отличное от 0 и 1, β — иррациональное алгебраическое число, является трансцендентным. Однако весьма сложно проверить, что некоторое конкретное число трансцендентно. Существуют числа, для которых вопрос об их трансцендентности не выяснен до сих пор.

Важным этапом в развитии понятия числа явилось введение комплексных чисел. Идея комплексного числа возникла у итальянских алгебраистов XVI в. в связи с открытием ими способов решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней. Впоследствии комплексное число было истолковано геометрически (как точка плоскости). С XVIII в. развивается особая область математики — теория функций комплексной переменной, имеющая не только теоретическое, но и прикладное значение. Русские и советские ученые успешно применили ее к решению важных практических задач.

Советские математики и механики С. А. Чаплыгин (1869—1942), В. В. Голубев (1884—1954), М. В. Келдыш (1911—1978) успешно применяли комплексные функции к теории крыла самолета. Русский математик Г. В. Колосов (1867—1936) в начале нынешнего века впервые стал применять комплексные функции к расчетам различных конструкций на прочность. К решению многих задач теории упругости функции комплексной переменной применял также советский математик Н. И. Мусхелишвили (1891—1976).

В XIX в. были предприняты попытки найти обобщение комплексных чисел. Исторически первым примером такого обобщения явились кватернионы. Понятие кватерниона ввел в 1843 г. ирландский математик Гамильтон (1805—1865).

Более подробный рассказ о различных множествах чисел и их происхождении читатель найдет в следующих разделах книги.



6 1 8
7 5 3
2 9 4
16 3 2 13
5 10 11 8
9 6 7 12
4 15 14 1
1 14 15 4
12 7 6 9
8 11 10 5
13 2 3 16
I V X L C D M
B=12
B=5
B=3
B=2
N = C_nB^n + C_{n-1}B^{n-1} + . . . + C_2B + C_1B + C_0

Число есть множество единиц.

Евклид

ЧИСЛА НАТУРАЛЬНЫЕ

С незапамятных времен числа используются в повседневной жизни. В более позднее время они стали применяться в торговле, на производстве, в науке и технике. Большие числа появляются, когда считаем мы, и тогда, когда считают нас. В нашу жизнь прочно вошли: номера домов, квартир, телефонов, почтовые индексы. Численные результаты выдают вычислительные машины, которые анализируют состояние производства, исследуют атомные ядра, следят за траекториями спутников и космических кораблей.

Множество натуральных чисел

Натуральными числами называют числа, употребляемые при счете предметов. Наименьшим натуральным числом является число 1. Наибольшего натурального числа не существует. Чтобы доказать это, предположим противное: пусть n — наибольшее натуральное число. Прибавив единицу к этому числу, получим натуральное число $n+1$, которое больше n. Это противоречит предположению о том, что n — наибольшее натуральное число. Значит, наибольшего натурального числа нет. Множество натуральных чисел является бесконечным. Этот факт был известен древним грекам. О нем говорится в книге Евклида «Начала» (III в. до н. э.).

Бесконечный ряд натуральных чисел записывают так: 1, 2, 3, ...; три точки означают, что ряд продолжается неограниченно. Множество натуральных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{N}=\{1, 2, 3, ...\}$.

Любое натуральное число можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называют четными, цифры 1, 3, 5, 7, 9 — нечетными. Значение цифры в записи числа зависит от занимаемого ею места, или, как говорят, от ее позиции.

Чтобы прочитать число, записанное в десятичной системе, его обозначение разбивают на группы справа налево, по три цифры в группе. Первые три цифры справа составляют класс единиц, три следующие — класс тысяч и т. д.

В пределах первой тысячи название имеет единица каждого разряда: единица, десяток, сотня, тысяча. Следующие единицы, имеющие собственное название, идут через каждые три разряда. Каждая очередная именованная единица содержит тысячу предыдущих именованных единиц: 1 000 000 — **миллион,** 1 000 000 000 — **миллиард,** или **биллион,** 1 000 000 000 000 — **триллион,** 1 000 000 000 000 000 — **квадриллион.** Далее идут **квинтиллион, секстиллион, септиллион, оптиллион, нониллион, дециллион, ундециллион** и т. д.

Принцип построения этих названий является простым. Слова «би, трес, квадра, квинта» и т. д. по-латыни означают два, три, четыре, пять и т. д. Сопоставляя запись числа с его названием, мы замечаем, что число троек нулей в записи числа на единицу больше, чем латинское число в его названии.

Слово «миллион» имеет сравнительно недавнее происхождение. В итальянском языке *millione* есть увеличительное от слова *mille*, которое означает «тысяча». В русском языке слову «миллион» могло бы соответствовать несуществующее слово «тысячища». Слово «миллион» придумал венецианский путешественник Марко Поло (1254—1324). Ему не хватало известных в то время чисел, чтобы рассказать о необычайном множестве людей и богатств далекой Небесной Империи (так в старину называли Китай). В 1271 г. вместе со своим отцом и дядей — венецианскими купцами — он отправился на Восток. Путешествовал по странам Ближнего Востока, Центральной и Южной Азии. С 1275 по 1292 г. находился в Китае. Вернулся на родину в 1295 г. Записи Марко Поло о путешествиях были помещены в так называемой «Книге» (1298), из которой европейцы получили сведения о технических и научных достижениях народов Азии.

Слово «миллиард» — одно из сáмых молодых названий чисел. Это название вошло в употребление со времени окончания франко-прусской войны (1871), когда французам пришлось платить Германии контрибуцию в 5 000 000 000 франков. Слово «миллиард» также представляет собой увеличительное от итальянского слова *mille*. Чтобы представить себе огромность миллиарда, подумайте о том, что миллиард минут составляет более 19 столетий: человечество лишь 80 с лишним лет назад начало считать второй миллиард минут от первого дня нашей эры. Знаменитый французский ученый Анри Пуанкаре (1854—1912) сказал: «Человек, каким бы он ни был болтуном, никогда в своей жизни не произнесет более миллиарда слов». (Квант.—1970.— № 9.— С. 3.)

Следует отметить, что названия больших чисел редко используются на практике. Астрономы, физики и другие специалисты, имеющие дело с большими числами, обычно записывают их посредством степеней числа 10. Так, число 380 000 000 физик запишет либо как $38 \cdot 10^7$, либо $3{,}8 \cdot 10^8$. Последнее число читается так: «три и восемь десятых на десять в восьмой степени».

Представляет интерес вопрос о том, с каким самым большим числом приходилось иметь дело на практике. Физики считают, что во всей Вселенной количество элементарных частиц, из которых состоят атомы находящегося в ней вещества, не больше, чем 10^{88}. В связи с этим полагают, что нет практической необходимости пользоваться числами, большими, чем 10^{100}. Для этого числа придумано специальное название — **гугол.**

Выше было указано, что наименьшим натуральным числом является единица. В системе чисел единица играет особую роль. На это обращал внимание Ф. Энгельс. В своем сочинении «Диалектика природы» он писал: «Ничто не выглядит проще, чем количественная единица, и ничто не оказывается многообразнее, чем эта единица, коль скоро мы начнем изучать ее в связи с соответствующей множественностью, с точки зрения различных способов происхождения ее из этой множественности». (Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— 2-е изд.— Т. 20.— С. 574.) Энгельс отмечал далее, что единица является основным числом всей системы положительных и отрицательных чисел, благодаря последовательному прибавлению которого к самому себе возникают все другие числа. Единицей выражаются все положительные, отрицательные и дробные степени единицы. Единице равна любая дробь, у которой числитель и знаменатель одинаковы. Всякое число в нулевой степени равно единице, поэтому единица — единственное число, логарифм которого во всех системах равен нулю. Вследствие этого единица является границей, делящей на две части все возможные системы логарифмов: если основание больше единицы, то логарифмы всех чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы всех чисел, меньших единицы, отрицательны; если основание меньше единицы, то имеет место обратное. Энгельс писал далее: «Таким образом, если всякое число содержит в себе единицу, поскольку оно составляется из одних лишь сложенных друг с другом единиц, то единица, в свою очередь, содержит в себе все другие числа. Не только в возможности, поскольку мы любое число можем построить из одних только единиц, но и в действительности, поскольку единица является определенной степенью любого другого числа. ... единица и множественность являются нераздельными, проникающими друг друга понятиями и что множественность так же содержится в единице, как единица в множественности. А в какой мере дело обстоит именно так, это мы видим, лишь только мы покидаем область чистых чисел. Уже при измерении линий, площадей и объемов обнаруживается, что мы можем принять за единицу любую величину соответствующего порядка, и то же самое относится к измерению времени, веса, движения и т. д. Для измерения клеток миллиметры и миллиграммы еще слишком велики, для измерения звездных расстояний или скорости света километр уже неудобен из-за малой величины, как мал килограмм для измерения масс планет, а тем более Солнца. Здесь с очевидностью обнаруживается, какое многообразие и какая множественность содержатся в столь простом на первый взгляд понятии единицы.» (Там же.— С. 575.)

Системы счисления

Системой счисления, или **нумерацией**, называют совокупность названий и знаков, позволяющих записать и назвать любое число. Если бы каждое натуральное число называлось особым именем и обозначалось в письме особым знаком, то запомнить все эти слова и знаки никто не смог бы. Целью всякой нумерации является изображение любого натурального числа с помощью небольшой группы знаков.

Нашу систему счисления называют **десятичной позиционной.** В основе ее лежит число 10: десять единиц составляют один десяток, десять десятков составляют одну сотню и т. д. Для записи любого натурального числа используют десять цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; первые девять служат для записи первых девяти натуральных чисел, последняя цифра — для обозначения отсутствующего разряда. Не только сама цифра, но и ее место (позиция) имеет значение при записи чисел. Например, в записи 777 первая семерка означает семь сотен, вторая — семь десятков, третья — семь единиц. Если цифру в записи числа переставить на одно место (позицию) влево, то ее значение увеличится в 10 раз; если же переставить на одно место вправо, ее значение уменьшится в 10 раз.

Позиционная десятичная система является продуктом длительного исторического развития, в ее создании принимали участие различные народы. Индусам, например, она была известна полторы тысячи лет тому назад. В Европу ее занесли арабы, вторгшиеся в Испанию в VIII в. Эта нумерация распространилась по всем странам Европы и, будучи проще и удобнее всех остальных систем счисления, быстро вытеснила их.

Известный французский ученый Лаплас (1749—1827) писал: «Мысль выражать все числа 9 знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой». (Энциклопедия элементарной математики.—М.: Гостехиздат, 1951.—Т. 1.— С. 12.)

В истории математики известны различные системы счисления; некоторые из них ушли в прошлое, другие применяются и в настоящее время. Системы счисления подразделяются на позиционные и непозиционные.

В позиционных системах нумерации число изображается посредством набора символов, каждый из которых принимает значение в зависимости от места, занимаемого в записи. Так, в используемой нами десятичной позиционной системе счисления каждое натуральное число может быть записано в виде:

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где коэффициенты, или цифры, a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ могут принимать следующие значения: $a_i = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Число $b = 10$ называют основанием этой системы. Например, $76 = 7 \cdot 10 + 6$, $1054 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$, $1980 = 1 \cdot 10^3 + 9 \times 10^2 + 8 \cdot 10 + 0$.

Однако с таким же успехом можно было бы представить любое число в виде комбинации степеней не числа 10, а какого-нибудь другого натурального числа b ($b \neq 1$). В такой системе счисления (с основанием b) мы вели бы счет от 0 до $b-1$ обычным образом, а число b приняли бы за единицу следующего разряда. При основании b натуральное число N можно записать так:

$$N = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \dots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0,$$

где коэффициенты c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) могут принимать следующие значения $c_i = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$. Известны системы, в которых соответственно $b = 2$, $b = 3$, $b = 5$, $b = 12$ и др.

Десятичная позиционная система счисления не сразу заняла то господствующее положение, которое она занимает теперь. В разное время многие народы пользовались системами счисления, отличными от десятичной. Довольно широкое распространение имела двенадцатеричная система счисления. Происхождение этой системы, как и десятичной, связано со счетом на пальцах. Четыре пальца одной руки (кроме большого) имеют в совокупности 12 фаланг; по этим фалангам вели счет от 1 до 12, затем 12 принимали за единицу следующего разряда и т. д. Влияние двенадцатеричной системы счисления в устной речи сохранилось и до наших дней: вместо слова «двенадцать» употребляют слово «дюжина». Многие предметы (ножи, вилки, тарелки, носовые платки и т. п.) иногда считают дюжинами, а не десятками; сервиз, как правило, бывает на 12 (или на 6) человек. Остатки этой системы счисления наблюдаются у других народов в системе мер (1 фут = = 12 дюймам), в денежной системе (1 шиллинг = = 12 пенсам).

Отметим, что с математической точки зрения двенадцатеричная система счисления имеет определенные преимущества перед десятичной, так как число 12 делится на 2, 3, 4 и 6, а число 10 — только на 2 и 5: больший запас делителей у числа, служащего основанием системы счисления, создает определенные удобства в ее использовании.

Наиболее ранним примером позиционной системы счисления является древневавилонская шестидесятеричная нумерация, которой пользовались еще за 2000 лет до н. э. Правда, в настоящее время ее достоинства уменьшились, но мы все же придерживаемся этой системы при отсчете времени и углов в минутах и секундах. Нам неизвестно, почему вавилоняне ввели столь большое основание в свою систему. Можно предположить, что эта система возникла как комбинация двух систем с различными основаниями 10 и 12, у которых наименьшее общее кратное равно 60.

Десятичная позиционная система при вычислениях безраздельно господствовала всюду до появления электронных вычислительных машин (ЭВМ). Вскоре возникла задача сделать устройство ЭВМ как можно более компактным и эффективным. Это привело к тщательному исследованию систем счисления с целью нахождения более подходящей из них. По ряду причин двоичная система счисления была признана предпочтительной. Основанием этой системы является число 2, для записи чисел в такой системе используется только две цифры: 0 и 1. В двоичной системе счисления значение каждой цифры «по месту» при переходе от младшего разряда к следующему старшему увеличивается вдвое. К двоичной форме записи числа приводит пересчитывание предметов, предварительно группируемых в пары. Двоичную систему счисления открыл знаменитый немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). В 1703 г. он опубликовал статью, в которой были рассмотрены правила выполнения всех арифметических действий над двоичными числами. Лейбниц не рекомендовал двоичную систему счисления для практического употребления, он считал ее полезной лишь для теоретических вопросов. До начала тридцатых годов XX века двоичная система счисления оставалась вне поля зрения прикладной математики.

В непозиционных системах счисления значения символов, применяемых для изображения чисел, не зависят от их места в записи числа. Числа натурального ряда как бы разбиваются на отдельные промежутки. Для обозначения первых чисел каждого промежутка вводятся специальные знаки. Любое число может быть записано в виде комбинации этих знаков. Примером непозиционной системы счисления является римская нумерация. Вместе с десятичной позиционной этой нумерацией мы пользуемся и сейчас (для обозначения съездов, сессий, глав книги и т. д.). В римской нумерации имеется семь цифр:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000,

обозначающих указанные числа. Знаки эти, собственно, не цифры, а заглавные латинские буквы: «и», «вэ», «икс», «эль», «це», «де» и «эм». Эти буквы играют роль цифр, с их помощью римляне могли записать любое число до миллиона. Это делалось следующим образом. Два и три соответственно записывались так: II, III (т. е. две единицы, три единицы). Четыре записывалось двумя знаками IV: единица, поставленная слева, «отнималась» от пяти. Наоборот, единицы, поставленные справа, прибавлялись; шесть, семь и восемь записывались так: VI, VII, VIII. Далее использовали знак X, которым обозначалось число 10. Числа 11, 12, 13, 14 записывались соответственно: XI, XII, XIII, XIV. Число 15 получалось комбинированием знаков для 10 и 5: XV; числа 20, 30 записывали с помощью десяток: XX, XXX. Для чисел $N \geqslant 40$ использовали знак L, обозначавший 50, и другие знаки. Например, число 42 записывалось так: XLII (десять отнимается, а две единицы прибавляются к пятидесяти). Число 90 представлялось двумя знаками: XC. Отметим, что числа 49 и 99 обозначали соответственно: IL, IC (а не XLIX, XCIX). Приведем примеры других обозначений: 102—CII, 375—CCCLXXV, 1758—MDCCLVIII. Сравнительно небольшие числа в римской нумерации записываются очень длинно. Она оказалась неудобной для вычислений.

Непозиционные системы счисления были широко распространены у различных народов древности. Так, древние египтяне пользовались системой, в которой единица, десять, сто, тысяча изображались особыми символами — иероглифами.

К непозиционным системам счисления относятся многочисленные алфавитные системы. Знаками, обозначающими числа от единицы до девяти, а также десятки и сотни, в этих системах служили буквы того или иного алфавита. Известны греческая, древнеславянская, арабская, армянская, грузинская и другие системы счисления. Алфавитные системы неудобны для выполнения арифметических операций с большими числами. В этом особенно проявляется недостаток непозиционных систем счисления по сравнению с позиционными.

После введения десятичных дробей позиционная десятичная система счисления стала общепризнанной для записи не только натуральных, но и действительных чисел.

Магические квадраты

Интерес к изучению свойств натуральных чисел появился в глубокой древности вместе с возникновением понятия числа, затем науки о числах — теории чисел. Среди различных занимательных вопросов этой науки были удивительные свойства чисел в магических (волшебных) квадратах.

Числовым квадратом порядка n, где n — натуральное число, будем называть квадрат, разбитый на n^2 клеток, в которых размещены натуральные числа от 1 до n^2. Числовой квадрат называют магическим, если суммы чисел каждого горизонтального ряда, каждого вертикального ряда и обеих диагоналей одинаковы. Эта сумма называется магическим числом. Поскольку квадрат порядка n содержит n горизонтальных рядов и сумма S чисел каждого ряда одинакова, то сумма всех чисел, размещенных в магическом квадрате, равна nS.

С другой стороны, эта сумма равна $1+2+$ $+3+\ldots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$. Итак, $nS=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$, откуда $S=\frac{n(n^2+1)}{2}$.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Рис. 1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

а

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

б

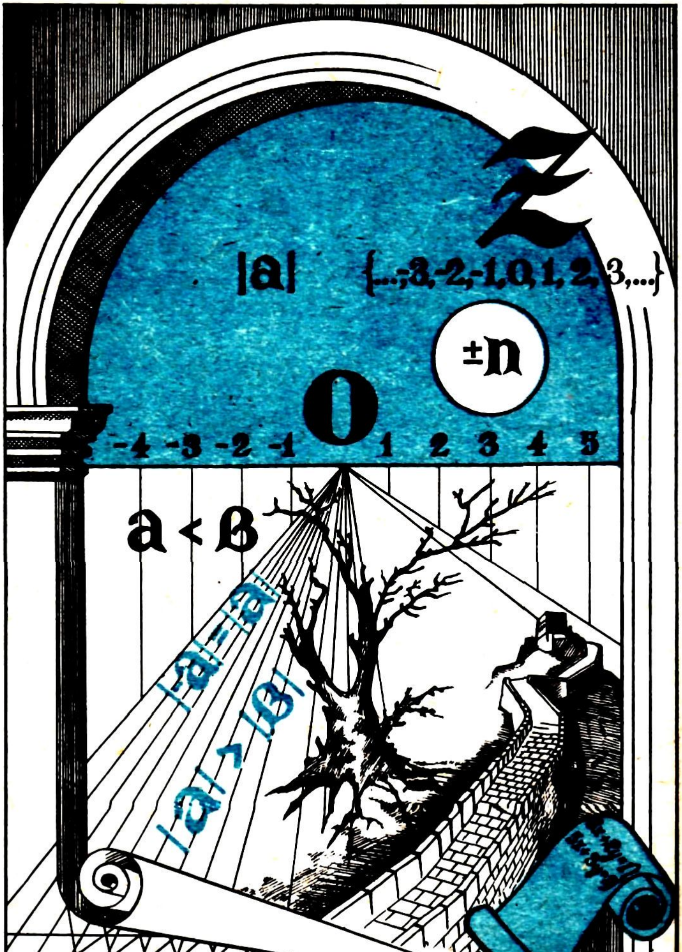
Рис. 2

Можно проверить, что не существует магических квадратов для $n=2$. При $n=3$ и $n=4$ магическими квадратами будут, например, квадраты, изображенные на рисунке 1 и на рисунке 2. У них магические числа равны соответственно 15 и 34 $(15=3(9+1)/2;\ 34=4(16+1)/2)$.

Магические квадраты, изображенные на рисунке 2, обладают интересными дополнительными свойствами: 1) сумма чисел, расположенных по углам квадрата, равна магическому числу 34; 2) сумма чисел в каждом из четырех маленьких квадратов (в 4 клетки), примыкающих к вершинам большого квадрата, также равна 34 $(16+3+5+10=34$, $7+12+14+1=34$ и т. д.); 3) сумма чисел в центральном маленьком квадрате также равна 34 $(10+11+6+7)$; 4) в каждой строке имеется пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна 15, и еще пара чисел с суммой 19.

Магические квадраты были известны в Китае и Индии еще до нашей эры. В Европе о них узнали в XVI в. Магические квадраты были предметом пристального изучения многих видных ученых. О них писали немецкий математик Михаил Штифель (1486—1567), французские математики Блез Паскаль (1623—1662), Пьер Ферма (1601—1665) и другие ученые. Расчетами числа вариантов магических квадратов занимался, например, член-корреспондент Петербургской академии наук Василий Петрович Ермаков (род. в 1845 г. в селе Терюха, близ Гомеля; умер в 1922 г.).

Теория магических квадратов ни в коей мере не может считаться завершенной. Достаточно сказать, что до сих пор неизвестен никакой общий метод построения всех магических квадратов данного порядка и даже неизвестно их число (при $n\geqslant5$).


Z
|a|
{...;-3,-2,-1,0,1,2,3,...}
±n
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
a < b
|a|=|a|
|a| > |b|

> Отрицательные величины алгебры реальны лишь постольку, поскольку они соотносятся с положительными величинами, реальны лишь в рамках своего отношения к последним; взятые вне этого отношения, сами по себе, они носят чисто воображаемый характер.
>
> Ф. Энгельс

ЧИСЛА ЦЕЛЫЕ

При сложении и умножении натуральных чисел получают натуральные числа. Другими словами, операции сложения и умножения натуральных чисел приводят к результатам из множества этих чисел (в таких случаях говорят, что операция замкнута на данном множестве). Операция вычитания натуральных чисел не выполнима, когда уменьшаемое меньше вычитаемого, например при решении уравнения вида $x+a=b (a>b)$. Появляется необходимость рассмотрения целых отрицательных чисел -1, -2, -3, ..., $-n$, ... С отрицательными числами постоянно встречаются не только в науке, но и в повседневной жизни. Нам хорошо известно, что означают сообщения: о погоде (температура воздуха равна $-10°$), о высоте над уровнем моря (-200 м), об отрицательном балансе при подсчете доходов и расходов (-300 руб.) и т. п. Целые числа — это числа вида $\pm n$, где n — натуральное число или нуль.

Отрицательные числа

Натуральные числа можно изображать точками на прямой линии. Зафиксируем некоторую точку 0 прямой и назовем ее началом отсчета. Для определения положения точки на прямой относительно точки 0 недостаточно знать ее расстояние до начала отсчета. Необходимо еще указать, по какую сторону от точки 0 находится данная точка. Прямая, на которой фиксировано начало отсчета — точка 0, чаще всего изображается горизонтальной (реже под некоторым углом к горизонту), направление вправо от точки 0 будем считать положительным, а влево — отрицательным (можно поступить наоборот). Положительное направление на прямой обозначают стрелкой. Обычно вместо того, чтобы писать слова «влево» и «вправо», пишут по одну сторону от точки 0 числа 1, 2, 3, ..., а по другую сторону — числа со знаком минус: —1, —2, —3, ... (рис. 3). Числа 1, 2, 3, ... называют положительными, а числа —1, —2, —3, ...— отрицательными. Число 0 отделяет на прямой положительные числа от отрицательных. Само число 0 не является ни положительным, ни отрицательным числом. Оно изображается буквой *O* — началом отсчета.

Число, показывающее положение точки на прямой, называют координатой этой точки. Прямую линию, на которой указаны начало отсчета (начало координат), единичный отрезок и положительное направление, называют координатной прямой. Название «начало (координат)» — *origine* — впервые предложил французский ученый Лагир в 1679 году. Первая буква слова *origine* позже стала применяться для обозначения начала координат.

Точки с координатами 7 и —7 (рис. 3) одинаково удалены от точки *O* и находятся по разные

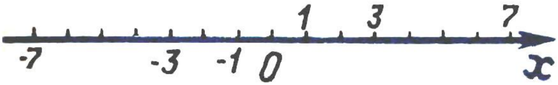


Рис. 3

стороны от нее; эти точки симметричны относительно начала отсчета. Чтобы попасть из точки O в эти точки, надо отложить от нее отрезки длиной 7 единиц в противоположных направлениях. Вследствие этого два таких числа называют противоположными числами: 7 противоположно -7, а -7 противоположно 7. Для каждого числа, отличного от нуля, существует одно противоположное ему число. Итак, два противоположных числа изображаются на координатной прямой точками, симметричными относительно начала отсчета. Число 0 противоположно самому себе.

Число, противоположное числу a, обозначают через $-a$: если $a=8$, то $-a=-8$; если $a=-4$, то $-a=4$; если $a=0$, то $-a=0$. Запись $-(-a)$ означает число, противоположное числу $-a$; поскольку число, противоположное $-a$, равно a, то $-(-a)=a$.

Отметим, что сумма двух противоположных чисел равна нулю: $(-a)+a=0$.

Введение отрицательных чисел делает выполнимым действие вычитания во всех случаях, поскольку разность $a-b$ имеет смысл и при $a<b$.

Множество целых чисел

Натуральные числа, противоположные им числа и нуль называют целыми числами. Множество всех целых чисел обозначают символом $\boldsymbol{Z}$: $\boldsymbol{Z}=\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Это множество является объединением трех множеств:

множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и множества, состоящего из одного числа нуль.

Из двух чисел меньшим считается то, изображение которого на координатной прямой расположено левее, и большим то, изображение которого расположено правее. Всякое положительное число больше нуля, а всякое отрицательное число меньше нуля, поэтому любое отрицательное число меньше любого положительного числа.

Для сравнения отрицательных чисел используют понятие модуля. Модулем целого числа a называют неотрицательное число (обозначается так: $|a|$), определяемое следующим образом:

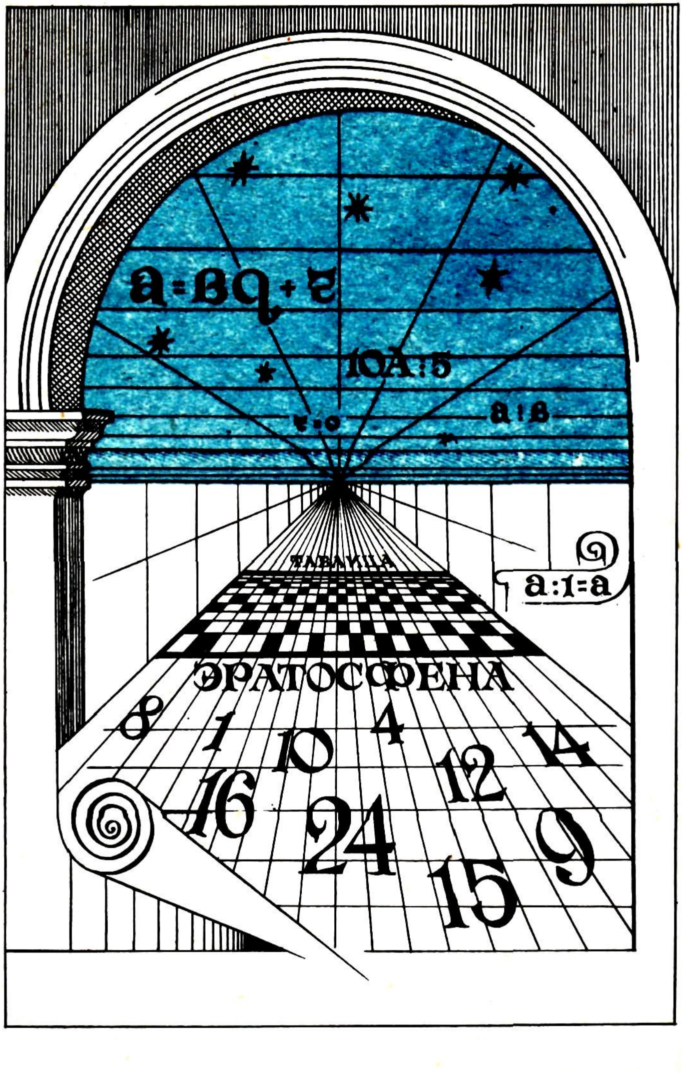
$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a \text{ положительно или равно нулю;} \\ -a, \text{ если } a \text{ отрицательно.} \end{cases}$$

Для положительного числа и нуля модуль равен самому числу, для отрицательного числа — противоположному числу. Например, $|12|=12$, $|0|=0$, $|-23|=23$. Очевидно, $|-a|=|a|$, т. е. противоположные числа имеют равные модули. Модуль числа равен расстоянию от начала отсчета до точки, которой соответствует данное число.

Если на координатной прямой указать два отрицательных числа, то левее окажется то число, у которого больше модуль. Следовательно, из двух отрицательных чисел меньше то, у которого больше модуль, и больше то, у которого меньше модуль: $-a<-b$, если $|-a|>|-b|$. Например, $-9<-4$, поскольку $|-9|>|-4|$.

Множество целых чисел содержит число нуль. В системе чисел нуль имеет важное значение. Об этом Ф. Энгельс в своем труде «Диалектика природы» говорил:

«Оттого, что нуль есть отрицание всякого определенного количества, он не лишен содержания. Наоборот, нуль имеет весьма определенное содержание. Как граница между всеми положительными и отрицательными величинами, как единственное действительно нейтральное число, не могущее быть ни положительным, ни отрицательным, он не только представляет собой весьма определенное число, но и по своей природе важнее всех других, ограничиваемых им чисел. Действительно, нуль богаче содержанием, чем всякое иное число. Прибавленный к любому числу справа, он в нашей системе счисления удесятеряет данное число... Нуль уничтожает всякое другое число, на которое его умножают...» (Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— 2-е изд.— Т. 20.— С. 576.)



10A:5
ТАБЛИЦА
a:1=a
ЭРАТОСФЕНА
8
1
10
4
12
14
16
24
15
9

> Первые[1] между собой числа суть измеряемые только единицей как общей мерой. Составные... числа суть измеряемые некоторым числом как общей мерой.
>
> Евклид

ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Натуральное число b называют делителем натурального числа a, если a представимо в виде произведения

$$a = bc, \tag{1}$$

где c — натуральное число. В этом случае говорят, что число a делится без остатка на число b, или короче число a делится на число b. Из (1) следует, что число a делится также и на число c, т. е. c — делитель числа a. Например, $35 = 5 \cdot 7$, 5 и 7 — делители числа 35. Если a делится на b, то пишут $a \vdots b$. В этом случае употребляется и такая запись: $b \mid a$ (b делит a).

Число 1 является делителем любого натурального числа, поскольку любое натуральное число делится на 1 ($a:1 = a$).

Число, делящееся на 2, называется четным; число, не делящееся на 2, называют нечетным.

---

[1] В настоящее время вместо названия «первые числа» употребляют «простые числа».

Кратным числа b называют число a, которое делится на b. Множество чисел, кратных данному числу b, бесконечно.

Свойства делимости

Рассмотрим основные свойства делимости натуральных чисел.

Свойство 1. Если каждое слагаемое делится на данное число, то их сумма делится на это число.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа, каждое из которых делится на b, т. е. $a_1 = bc_1$, $a_2 = bc_2$, ..., $a_n = bc_n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — натуральные числа. Так как

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = bc_1 + bc_2 + \ldots + bc_n = b(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = bc,$$

где $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = c$ — натуральное число, т. е. $S = bc$,то сумма $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ делится на c.

Свойство 2. Если сумма двух слагаемых и одно из них делятся на некоторое число, то и другое слагаемое делится на это число.

Действительно, если $a + d = cb$ и $a = c_1 b$, причем $c > c_1$, то $d = cb - a = cb - c_1 b = b(c - c_1) = bc_2$, где $c - c_1 = c_2$ — натуральное число. Так как $d = bc_2$, то d также делится на b.

Отсюда вытекает, что если уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то и разность разделится на это число.

Пусть $a \vdots c$ и $b \vdots c$ (знак $\vdots$ заменяет слово «делится», т. е. $a = cn_1$, $b = cn_2$. Если $a > b$, то $r = a - b = cn_1 - cn_2 = c(n_1 - n_2) = cn$, где $n_1 - n_2 = n$ — натуральное число $(n_1 > n_2)$. Поскольку $r = cn$, то $r \vdots c$, т. е. разность $a - b$ делится на число c.

Замечание 1. Не следует думать, что если каждое слагаемое суммы не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма $31+11$ делится на 7, хотя ни одно из слагаемых не является кратным числа 7.

Свойство 3. Если каждое слагаемое суммы, кроме одного, делится на некоторое число, а это одно не делится, то и сумма на него не разделится.

Пусть в сумме $S=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$ слагаемые $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ делятся на c, но a_n не делится на c; отметим, что сумма $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$ делится на c (по свойству 1). Предположим противное — S делится на c, тогда, поскольку $a_n=S-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})$ и $S \vdots c$, $(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}) \vdots c$, то должно быть $a_n \vdots c$, что противоречит условию (a_n не делится на c). Следовательно, S не делится на c.

Свойство 4. Если хотя бы один из множителей делится на данное число, то их произведение также делится на это число.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа, одно из которых, например a_1, делится на c, т. е. $a_1=cb_1$, тогда $a_1a_2\ldots a_n=(cb_1)a_2\ldots a_n=c(b_1a_2\ldots a_n)=cb$, где $b_1a_2\ldots a_n=b$ — натуральное число (как произведение натуральных чисел). Равенство $a_1a_2\ldots a_n=cb$ означает, что произведение $a_1a_2\ldots a_n \vdots c$.

Замечание 2. Не следует думать, что если ни один множитель не делится на данное число, то и произведение не разделится на это число. Например, $6 \cdot 35$ делится на 14, хотя ни 6 ни 35 на 14 не делятся.

Свойство 5. Если число делится на произведение двух чисел, то оно разделится на каждое из этих чисел в отдельности.

Пусть a делится на произведение чисел m и n, тогда $a=(mn)c$, где c — натуральное число. Следовательно, $a=mnc=m(nc)=n(mc)$, или $a=mc_1$, $a=nc_2$. Последние равенства означают, что $a \vdots m$, $a \vdots n$.

Приведем без доказательства еще одно свойство.

Свойство 6. Если число a делится в отдельности на два числа b и c, причем b и c не имеют общих делителей, кроме единицы, то a делится на произведение bc.

Признаки делимости

Рассмотрим признаки делимости натуральных чисел на 2, 5, 10, 4, 8, 3, 9, 6. Для обоснования этих признаков будем пользоваться свойствами делимости чисел.

Признак делимости на 2. На 2 делятся все те и только те числа, запись которых оканчивается четной цифрой.

Пользуясь распределительным свойством, запись натурального числа $N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ представим в виде $N = 10(a_0 \times 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + a_n$, или

$$N = 10A + B, \tag{2}$$

где $A = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$, $B = a_n$. Так как 10 делится на 2, то по свойству 4 и число $10A$ делится на 2. Если число N делится на 2, то по свойству 2 число B делится на 2. Если число B делится на 2, то по свойству 1 этого достаточно, чтобы и N делилось на 2. Но однозначное число делится на 2 лишь в случае, когда оно равно 0,2,4, 6, 8, т. е. когда запись числа N оканчивается четной цифрой.

Признак делимости на 5. На 5 делятся все те и только те числа, запись которых оканчивается нулем или цифрой 5.

Чтобы доказать это, обратимся к формуле (2). Поскольку $10 \vdots 5$, то $10A \vdots 5$. Если $N \vdots 5$, то по свойству 2 $B \vdots 5$. Если же $B \vdots 5$, то по свойству 1 этого достаточно, чтобы $N \vdots 5$. Но однозначное число B делится на 5 тогда и только тогда, когда оно равно 0 или 5, т. е. число N делится на 5, когда оно оканчивается цифрой 0 или 5.

Признак делимости на 10. На 10 делятся те и только те числа, запись которых оканчивается нулем.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 5. При этом нужно иметь в виду, что однозначное число делится на 10 только в случае, когда $B = 0$.

Признак делимости на 4. На 4 делятся те и только те числа, две последние цифры которых образуют число, делящееся на 4.

Чтобы доказать это, запись натурального числа $N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ представим в виде $N = 100(a_0 \cdot 10^{n-2} + a_1 \cdot 10^{n-3} + ... + a_{n-2}) + 10 \cdot a_{n-1} + a_n$, или $N = 100A + B$, где $A = a_0 \cdot 10^{n-2} + a_1 \cdot 10^{n-3} + ... + a_{n-2}$, $B = 10a_{n-1} + a_n$. Число 100 делится на 4, поэтому $100A$ также делится на 4. Если число N делится на 4, то по свойству 2 число B делится на 4. Если число B делится на 4, то по свойству 1 этого достаточно, чтобы и число N делилось на 4. Остается лишь указать на то, что число $B = 10 \cdot a_{n-1} + a_n$ образовано двумя цифрами, которыми оканчивается запись числа N.

На основании этого признака можно утверждать, например, что числа 3000, 4708, 5312, 7816, 18 224 делятся на 4, а число 16 815 на 4 не делится.

Признак делимости на 8. На 8 делятся все те и только те числа, три последние цифры которых образуют число, делящееся на 8.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 4. При этом необходимо запись натурального числа N представить в виде $N = 1000A + B$, где $A = a_0 \cdot 10^{n-3} + a_1 \times$

$\times 10^{n-4}+\ldots+a_{n-3}$ и $B=100a_{n-2}+10a_{n-1}+a_n$ и заметить, что 1000 делится на 8.

С помощью данного признака можно, например, установить, что числа 7000, 13 008, 19 064, 23 112 делятся на 8, а числа 37 202, 58 314, 79 148 на 8 не делятся.

Признак делимости на 3. На 3 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 3.

Чтобы доказать этот признак, сделаем сначала предварительные замечания.

Любое число, записанное посредством только цифры 9, делится на $9: 9:9=1$, $99:9=11$, $999:9=$ $=111$ и т. д. Любая степень десяти с натуральным показателем (другими словами, любое натуральное число, записанное посредством одной единицы с последующими нулями) при делении на девять дает в остатке единицу: $10^1=10=9+1$, $10^2=100=$ $=99+1$, $10^3=1000=999+1$ и т. д. Учитывая это, запись $N=a_0\cdot 10^n+a_1\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot 10+a_n$ можно представить так:

$$N=a_0(\underbrace{99\ldots 9}_{n}+1)+a_1\cdot(\underbrace{99\ldots 9}_{n-1}+1)+\ldots+a_{n-1}\times$$

$$\times(9+1)+a_n=\underbrace{99\ldots 9}_{n}a_0+\underbrace{99\ldots 9}_{n-1}a_1+\ldots+9a_{n-1}+$$

$+(a_0+a_1+\ldots+a_n)$, или $N=9A+B$, где $A=$ $=(\underbrace{11\ldots 1}_{n}a_0+\underbrace{11\ldots 1}_{n-1}a_1+\ldots+a_{n-1})$, $B=a_0+a_1+\ldots+$ $+a_n$ — сумма цифр числа N.

Так как число 9 делится на 3, то $9A$ также делится на 3. Если число N делится на 3, то по свойству 2 делится на 3 и B — сумма цифр числа N. Если же B делится на 3, то по свойству 1 этого достаточно, чтобы N делилось на 3.

Признак делимости на 9. На 9 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 9.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 3. С помощью данного признака можно, например, установить, что число 385 461 делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9: $3+8+5+4+6+1=27$, $27 : 9$.

Замечание. Если сумма цифр числа при делении на 3 (на 9) дает остаток, то само число при делении на 3 (на 9) дает тот же остаток.

Признак делимости на 6. На 6 делятся все те и только те числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3.

Если число делится на 6, то оно на основании свойства 5 разделится на 2 и на 3, поскольку его множитель 6 делится на 2 и на 3. Обратно, пусть число делится на 2 и на 3. Так как числа 2 и 3 не имеют общих делителей, кроме единицы, то этого достаточно для делимости числа на 6 (по свойству 6).

С помощью этого признака можно установить, например, что число 721 314 делится на 6, поскольку оно делится на 2 (в его записи последняя цифра является четной) и на 3 (сумма его цифр делится на 3: $7+2+1+3+1+4=18$, $18 : 3$).

Деление с остатком

Как известно, деление одного натурального числа на другое не всегда выполнимо во множестве целых чисел. Вследствие этого рассматривают более общее действие — деление с остатком.

Разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком, значит представить число a в виде $a=bq+r$, где q и r — целые числа, причем

$0 \leqslant r < b$. Число q при этом называют неполным частным, а число r — остатком от деления a на b. Очевидно, $r = 0$ тогда и только тогда, когда b является делителем a; в этом случае q равно частному от деления a на b. Деление с остатком всегда выполнимо, о чем свидетельствует следующая теорема (называемая теоремой о делении с остатком).

Теорема. Для произвольных натуральных чисел a и b существуют и единственны такие неотрицательные целые числа r и q, что

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leqslant r < b. \tag{3}$$

Выпишем одно за другим числа

$$a,\ a - b,\ a - 2b,\ \dots \tag{4}$$

до тех пор, пока не появится отрицательное число. Пусть последним из неотрицательных членов этой последовательности, т. е. самым маленьким из них, окажется число $a - bq$. Обозначая это число через r, т. е. $a - bq = r$, получаем $a = bq + r$. Очевидно, $r < b$; в противном случае число $r - b = a - bq - b = a - (q + 1)b$ было бы неотрицательным, а это противоречит предположению о том, что r — наименьшее из неотрицательных чисел последовательности (4). Итак, $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

Докажем, что числа q и r в формуле (3) определяются однозначно.

Пусть существует другое представление:

$$a = bq_1 + r_1, \text{ где } 0 \leqslant r_1 < b.$$

Из этого равенства и равенства (3) следует, что $bq_1 + r_1 = bq + r$, или $b(q_1 - q) = r - r_1$. Последнее равенство означает, что $r - r_1$ делится на b; поскольку $|r - r_1| < b$, то отсюда следует $r - r_1 = 0$, т. е. $r_1 = r$. В этом случае $b(q_1 - q) = 0$; так как $b \neq 0$, то $q_1 - q = 0$, или $q_1 = q$. Однозначность деления с остатком доказана.

Простые и составные числа

Натуральное число p, не равное единице, называется простым, если оно делится только на себя и на единицу, т. е. имеет только два делителя. Натуральное число, отличное от единицы и не являющееся простым, называется составным. Другими словами, натуральное число называется составным, если оно имеет более двух делителей. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам, поскольку оно имеет лишь один делитель. Наименьшим простым числом является число 2. Это единственное четное простое число. Остальные простые числа являются нечетными. Запишем несколько первых простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и др.; приведем примеры составных чисел: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18 и т. п.

Таким образом, множество натуральных чисел разбивается на три части, или как принято говорить, на три подмножества. Первое из них содержит только одно число — число 1, второе образует простые числа, а третье — составные числа. Отметим, что каждое натуральное число попадает в одно и только в одно из этих подмножеств; эти подмножества попарно не пересекаются (не имеют общих элементов).

Нетрудно догадаться, что множество составных чисел является бесконечным. Действительно, уже чисел вида 2^n, где n принимает значения 2, 3, 4, ..., бесконечно много, а ведь кроме этих чисел существуют многие другие составные числа.

Что же можно сказать о множестве простых чисел — конечно или бесконечно это множество? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. Множество простых чисел является бесконечным.

Предположим противное, т. е. множество простых чисел конечно и выпишем их все: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Произведение всех простых чисел обозначим буквой P и рассмотрим число $P+1$:

$$P = p_1 p_2 \ldots p_n,\quad P+1 = p_1 p_2 \ldots p_n + 1.$$

Число $P+1$ больше каждого из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$; оно не может быть простым (в силу предположения). Следовательно, число $P+1$ делится хотя бы на одно простое число p_k(k — одно из чисел $1, 2, \ldots, n$). Число P также делится на простое число p_k (на основании свойства 4). В силу свойства 2 число 1 также должно делиться на p_k, что возможно лишь в случае $p_k = 1$, а это противоречит предположению (p_k — простое число, поэтому $p_k \neq 1$).

Доказательство бесконечности множества простых чисел впервые встречается у древнегреческого ученого Евклида (IV—III вв. до н. э.).

Всякое число, на которое делятся одновременно числа a и b, называется общим делителем этих чисел. Наибольший из общих делителей чисел a и b называется их наибольшим делителем.

Всякое натуральное число, которое делится одновременно на натуральные числа a и b, называется общим кратным этих чисел. Наименьшее из таких чисел называют наименьшим общим кратным чисел a и b.

Теорема 2. Если M — общее кратное чисел a и b, m — их наименьшее общее кратное, то M делится на m.

Чтобы доказать это, разделим M на m; пусть $M = mq + r$, где $0 \leqslant r < m$. Так как M и m делятся на a и на b, то на основании свойства 2 число r также должно делиться и на a, и на b, т. е. r должно быть кратным этих чисел. Поскольку $r < m$, а m — наименьшее общее кратное чисел a и b, то r может делиться на a и на b лишь в случае $r=0$. Итак, $M=mq$, т. е. $M \vdots m$.

Теорема 3. Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению.

Пусть a и b — взаимно простые числа, m — их наименьшее общее кратное. Поскольку ab делится и на a, и на b, то по теореме 2 ab делится на m, т. е. $ab=mk$, где k — натуральное число. Так как m делится на a, то $m=ac$, где c — натуральное число. Подставив выражение $m=ac$ в равенстве $ab=mk$, получим $ab=ack$, откуда $b=ck$, т. е. $b \vdots k$. Аналогично можно установить, что $a \vdots k$. Согласно условию числа a и b взаимно просты, поэтому $k=1$. Равенство $ab=mk$ принимает вид $ab=m$, что доказывает теорему.

Теорема 4. Если числа b и c взаимно просты и $ab \vdots c$, то $a \vdots c$.

Обозначим через m наименьшее общее кратное чисел b и c, тогда $m=bc$ (по теореме 3). Так как $ab \vdots b$ и $ab \vdots c$ (по условию), то $ab \vdots bc$ (по теоремам 2 и 3), т. е. $ab=bck$, откуда $a=ck$. Полученное равенство означает, что $a \vdots c$.

Теорема 5. Если произведение нескольких множителей делится на простое число p, то хотя бы один из множителей делится на p.

Докажем теорему методом математической индукции. Если множитель один, то теорема верна. Предположим, что теорема верна для произведения n множителей; докажем, что она верна и для $n+1$ множителей. Пусть $(a_1a_2...a_na_{n+1}) \vdots p$. Обозначим произведение первых n множителей буквой A: $a_1a_2...a_n=A$, тогда $Aa_{n+1} \vdots p$. Если $a_{n+1} \vdots p$, то теорема доказана. Если a_{n+1} не делится на p, то числа a_{n+1} и p взаимно просты; в этом случае $A \vdots p$. Так как A есть произведение n множителей, то по индуктивному предположению один из них должен делиться на p. Итак, для всех n верно следующее утверждение: если $(a_1 a_2 ... a_n) \vdots p$, то $a_k \vdots p$, где k — одно из чисел 1, 2, ..., n.

Упражнения

Докажите следующие утверждения:

1. При любом натуральном $n > 1$ число $n^4 + 4$ является составным.

2. Из 11 подряд расположенных натуральных чисел можно выбрать два таких, разность которых кратна 10.

3. Произведение трех последовательных натуральных чисел кратно 3.

4. Одно из двух последовательных натуральных четных чисел делится на 4.

5. Число $n(n+1)(2n+1)$ при любом натуральном n кратно 6.

6. Разность квадратов двух нечетных чисел кратна 8.

7. Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел кратна 9.

8. Квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке единицу.

9. Полусумма квадратов двух нечетных чисел есть нечетное число.

10. Если число имеет вид $2m^2 + n^2$, то его квадрат может быть представлен в таком же виде.

11. Число $(10^n + 10^{n-1} + ... + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$ есть полный квадрат некоторого числа.

12. Сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть полным квадратом некоторого числа.

13. Число $n^3 + 11n$ делится на 6 при любом натуральном n.

14. Если разность двух чисел a и b делится на число c, то остатки от деления чисел a и b на c равны между собой. Обратное также верно.

15. Если $a - b$ кратно c, то $a^n - b^n$ также кратно c.

Решето Эратосфена

Выше уже речь шла о том, что множество простых чисел бесконечно. Очевидно, множество простых чисел, не превосходящих некоторого числа n, будет конечным (как подмножество конечного множества). Как же найти эти простые числа? Проще всего это сделать методом, который впервые был предложен древнегреческим ученым Эратосфеном Киренским (ок. 276—194 гг. до н. э.), другом Архимеда.

Эратосфен родился в Кирене, учился в Александрии и Афинах. Заведовал Александрийской библиотекой. Занимался математикой, астрономией, хронологией, философией, филологией и музыкой. Он заложил основы математической географии; первый измерил длину дуги земного меридиана. Эратосфен построил прибор для решения задачи об удвоении куба (мезолябий), изучал средние величины. Дал метод нахождения простых чисел (решето Эратосфена).

Познакомимся с этим методом. Пусть требуется найти все простые числа, не превосходящие числа n. Выпишем подряд все числа от 1 до n: 1, 2, 3, 4, 5, ..., n. Первым здесь стоит число 1. Как известно, оно не является простым. Вычеркнем это число. Следующее число 2. Это простое число. Оставляем его и вычеркнем все числа, кратные 2. Для этого достаточно вычеркнуть каждое второе число, начиная счет с 3. Первым невычеркнутым числом будет 3. Это простое число. Оставляем его и вычеркиваем все числа, кратные трем, т. е. каждое третье число, начиная счет с 4. (При счете необходимо учитывать и ранее вычеркнутые числа, поэтому некоторые числа вычеркиваются второй раз: такими числами будут 6, 12, 18,... .) После этой операции первым невычеркнутым, а значит и простым, будет число 5. Оставляем это число и вычеркиваем все числа, кратные 5, т. е. каждое пятое число, начиная счет с 6. Затем переходим к следующему невычеркнутому числу (таким будет 7), производим аналогичные действия (вычеркивая все числа, кратные 7, т. е. каждое седьмое число, начиная счет с 8) и так далее. Таким способом мы вычеркнем все составные числа, останутся лишь простые числа. В таблице 1 приведены результаты указанных действий для случая $n = 70$; вычеркнутые числа отмечены черточкой над ними.

По этой таблице находим все простые числа от 1 до 70. Их всего 19: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67.

Таблица 1

$\overline{1}$	2	3	$\overline{4}$	5	$\overline{6}$	7	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{11}$	$\overline{12}$	13	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	17	$\overline{18}$	19	$\overline{20}$
$\overline{21}$	$\overline{22}$	23	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	29	$\overline{30}$
31	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{34}$	$\overline{35}$	$\overline{36}$	37	$\overline{38}$	$\overline{39}$	$\overline{40}$
41	$\overline{42}$	43	$\overline{44}$	$\overline{45}$	$\overline{46}$	47	$\overline{48}$	$\overline{49}$	$\overline{50}$
$\overline{51}$	$\overline{52}$	53	$\overline{54}$	$\overline{55}$	$\overline{56}$	$\overline{57}$	$\overline{58}$	59	$\overline{60}$
61	$\overline{62}$	$\overline{63}$	$\overline{64}$	$\overline{65}$	$\overline{66}$	67	$\overline{68}$	$\overline{69}$	$\overline{70}$

Метод Эратосфена получил название решета по следующим причинам. Древние греки рабочие записи вели заостренной палочкой на восковых дощечках. Такой палочкой Эратосфен прокалывал те места, где были написаны составные числа. После этого восковая дощечка становилась похожей на решето. Применяя метод Эратосфена как бы отсеивают, пропускают через решето все составные числа и оставляют только простые.

Разложение натуральных чисел на простые множители. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Всякое составное число можно представить в виде произведения простых множителей. Об этом свидетельствует следующая теорема.

Теорема 6. Всякое натуральное число, кроме единицы, может быть единственным способом представлено в виде произведения простых чисел.

Докажем сначала возможность такого представления. Предположим, что все числа, меньше N, допускают такое представление. Если N — простое число, то оно разлагается в произведение простых чисел (произведение это состоит из одного простого множителя — самого числа N и единицы) и теорема доказана. Пусть N — составное число, N_1 — некоторый делитель N, отличный от N и от единицы, N_2 — частное от деления N на N_1, тогда $N=N_1N_2$. Поскольку N_1 и N_2 меньше N, то по предположению они разлагаются в произведение простых множителей. Если $N_1=p_1p_2...p_m$, $N_2=q_1q_2...q_r$, то $N=$ $=p_1p_2...p_mq_1q_2...q_r$ — разложение числа N на простые множители.

Убедимся в единственности представления любого натурального числа в виде произведения простых чисел. Предположим, что для числа N существуют два представления: $N=p_1p_2...p_k$ и $N=q_1q_2...q_l$. Отсюда следует равенство

$$p_1p_2...p_k=q_1q_2...q_l. \qquad (5)$$

Поскольку $N \vdots p_1$, то по теореме (5) хотя бы один из множителей $q_1q_2,..., q_l$ делится на p_1. Пусть $q_1 \vdots p_1$; так как q_1 — простое число, то это возможно лишь при $q_1=p_1$. Сокращая равенство (5) на p_1, получаем

$$p_2p_3...p_k=q_2q_3...q_l. \qquad (6)$$

Аналогичным способом убеждаемся, что некоторое из чисел q_2, q_3, ..., q_l делится на p_2. Если это число q_2, то $p_2=q_2$. Сократив равенство (6) на p_2, уменьшим число множителей в каждой его части. Этот процесс сокращения, очевидно, можно продолжать до тех пор, пока одно из произведений будет сокращено полностью. Пусть первым сократится произведение в левой части равенства (6). Произведение в правой части при этом также должно сократиться нацело, ибо в противном случае получилось бы равенство вида $1=q_{k+1}...q_l$; это равенство невозможно, так как единица не делится ни на какое простое число. Следовательно, доказано, что $q_1=p_1$, $q_2=p_2,...,q_k=p_k$, т. е. представление числа N в виде произведения простых чисел является однозначным. Доказанная теорема называется основной теоремой арифметики.

Пусть число a разложено в произведение $p_1p_2...p_k$ простых чисел, среди которых могут быть и равные. Объединяя равные множители, получаем формулу вида

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}, \qquad (7)$$

где p_1, p_2,..., p_m — различные простые числа, а α_1, α_2,..., α_m — некоторые целые положительные числа.

Произведение в правой части равенства (7) называют каноническим разложением натурального числа a.

При разложении натуральных чисел на простые множители используют признаки делимости и применяют соответствующие записи. Например,

180	$= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$,	420	$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
90		210	
45		105	
9		35	
3		7	
1		1	

Следовательно, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Отметим, что обычно записывают множители в порядке возрастания.

Теорема 7. Для того чтобы натуральные числа a и b были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы ни один из простых множителей, входящих в каноническое разложение числа a, не входил в каноническое разложение числа b.

Пусть $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_l^{\beta_l}$, d — общий делитель этих чисел. Если $d \neq 1$, то d делится на некоторое простое число p. В этом случае $a \vdots p$ и $b \vdots p$, поэтому p находится как среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, так и среди чисел $q_1, q_2, \ldots, q_l$. Следовательно, среди простых чисел, входящих в каноническое разложение a, существует хотя бы одно, входящее в каноническое разложение b. Если a и b взаимно просты и p входит в каноническое разложение a, то b не делится на p, т. е. p не может входить в каноническое разложение числа b.

Теорема 8. Число $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ делится на число b тогда и только тогда, когда $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$, $\ldots$, $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$.

4 Зак. 2564

Необходимость. Пусть $a \vdots b$, тогда каждый простой множитель b является простым делителем a (это следует из теоремы 5). Таким образом, получаем $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_1$, $0 \leqslant \beta_2$, ..., $0 \leqslant \beta_k$. Предположим, что $\beta_1 > \alpha_1$. Поскольку частное

$$\frac{a}{b} = \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}}{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}} = \frac{p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}}{p_1^{\beta_1 - \alpha_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}}$$

является целым числом, то числитель последней дроби должен делиться на знаменатель и тем более на число $p_1^{\beta_1 - \alpha_1}$. По теореме 5 на p_1 должно делиться хотя бы одно из чисел p_2, p_3, ..., p_k, чего не может быть (p_1 взаимно просто с любым из этих чисел). Значит, $\beta_1 \leqslant \alpha_1$. Аналогично доказываем, что $\beta_2 \leqslant \leqslant \alpha_2$, ..., $\beta_k \leqslant \alpha_k$. Итак, если a делится на b, то число b имеет каноническое разложение $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$, ..., $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$.

Достаточность. Если канонические разложения натуральных чисел a и b имеют вид $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i (i = 1, 2, \dots, k)$, то $a = bb^{-1}a = bp_1^{\alpha_1 - \beta_1} \dots p_k^{\alpha_k - \beta_k}$. Это равенство означает, что $a \vdots b$. Теорема доказана.

Укажем способы нахождения наименьшего общего кратного (НОК) и наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел по каноническим разложениям этих чисел

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_l^{\beta_l}.$$

Пусть p_1, p_2, ..., p_m — все различные простые числа, входящие хотя бы в одно из канонических разложений a и b. Положим

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m}.$$

(Если a не делится на p_i, то $\alpha_i = 0$; если b не делится на p_i, то $\beta_i = 0$.) Обозначим через γ_i наибольшее из чисел α_i, β_i, для $i = 1, 2, \dots, m$, через δ_i —

наименьшее из них. На основании теоремы 8 наибольший общий делитель чисел a и b есть число $p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2} \dots p_m^{\delta_m}$, а их наименьшее общее кратное — число $p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2} \dots p_m^{\gamma_m}$, т. е.

$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}\dots p_m^{\delta_m}; \text{НОК}(a, b) = p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\dots p_m^{\gamma_m}.$$

Следовательно, если известны канонические разложения натуральных чисел a и b, то их наименьшее общее кратное равно произведению всех простых множителей одного из них на те простые множители другого, которых нет в первом разложении; наибольший общий делитель равен произведению всех общих простых множителей, входящих в каждое из разложений.

Пример. Найти НОД(a, b) и НОК(a, b), если $a = 60$, $b = 24$.

Разложим эти числа на простые множители: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Воспользуемся соответствующими правилами: НОД $(60, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, НОК $(60, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 120$.

Упражнения

1. Разложите на простые множители числа 84, 118, 585, 2924, 10 744, 12 285, 67 095, 71 145, 79 750, 88 730.

2. Найдите НОК и НОД чисел 12 285, 14 595.

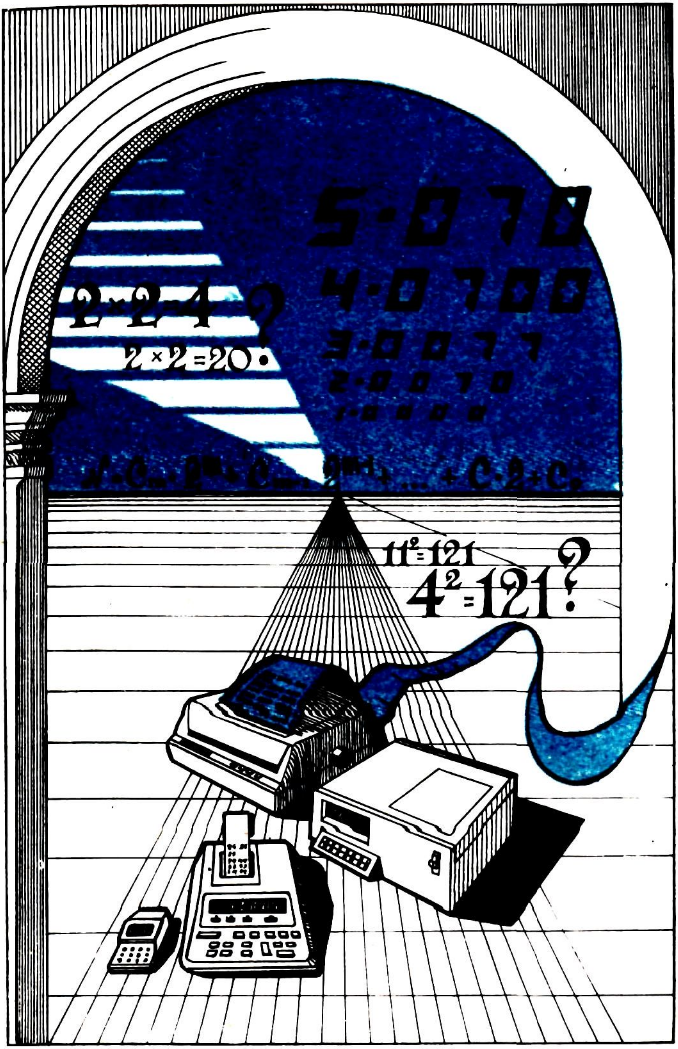
3. Найдите сумму всех делителей каждого числа 220, 284.

4. Разложите на простые множители число $2^{18} + 3^{18}$.

5. Найдите НОД (69 615, 87 633).

6. Докажите, что НОК $(a, b) = \dfrac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$.

7. Найдите числа a и b, если известно, что НОД $(a, b) = 24$, НОК$(a, b) = 2496$.


2×2=4?
2×2=20?
11²=121
4²=121?

Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмеричной системой.

Н. Н. Лузин

ДЕЙСТВИЯ НАД ЧИСЛАМИ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

В последнее время, наряду с десятичной системой, широко используются и другие системы счисления, например, двоичная, троичная, восьмеричная. В этой главе будет рассказано о том, как переводить числа из десятичной в другие системы счисления, как производить арифметические действия над полученными числами.

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Рассмотрим число N, записанное в десятичной системе счисления $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \times \times 10^{n+1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где a_k — одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9 при любом $k = 0, 1, \ldots, n$. Это число можно записать в любой другой системе счисления с основанием b:

$$N = c_m \cdot b^m + c_{m-1} \cdot b^{m-1} + \ldots + c_1 \cdot b + c_0, \quad (1)$$

где $c_k (k=0, 1, 2, ..., m)$ — одно из чисел от 1 до $b-1$. Полагая $b=2$, число N представим в виде

$$N=c_m \cdot 2^m + c_{m-1} \cdot 2^{m-1} + ... + c_1 \cdot 2 + c_0. \quad (2)$$

Чтобы получить двоичное представление числа N, надо найти коэффициенты $c_0, c_1, ..., c_m$, каждый из которых может быть цифрой 0 и 1. При делении числа N на 2 в остатке получим c_0, так как в правой части формулы (2) все слагаемые, кроме последнего, делятся на 2: $N=2q+r$, где $q=c_m \cdot 2^{m-1} + c_{m-1} \times \times 2^{m-2} + ... + c_2 \cdot 2 + c_1$, $r=c_0$. Частное q, получившееся при делении числа N на 2, снова будем делить на 2: $q=2q_1+r_1$, где $q_1=c_m \cdot 2^{m-2} + c_{m-1} \cdot 2^{m-3} + + ... + c_3 \cdot 2 + c_2$, $r_1=c_1$. Продолжая этот процесс, находим все цифры $c_0, c_1, ..., c_m$, входящие в двоичное представление (2) числа N, в виде последовательности остатков, получающихся при повторном делении его на 2 и частного последнего деления. Запишем, например, число 63 в двоичной системе счисления. В результате деления 63 на 2 получаем $63=2 \cdot 31 + 1$. Следовательно, 1 — последняя цифра данного числа в двоичной системе счисления. Частное 31 делим на 2: $31=2 \cdot 15+1$, т. е. 1 — предпоследняя цифра 63 в двоичной системе. Продолжаем этот процесс: $15=2 \cdot 7+1$, $7=2 \cdot 3+1$, $3=2 \cdot 1+1$. Итак, $63=(111111)_2$ (индекс 2 означает запись в двоичной системе). Действительно, $(111111)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 32+16+8+4+2+ + 1 = 63$. Аналогично можно получить двоичное представление числа 100 $(100=(1100100)_2)$. Для этого нужно делить 100 на 2, найти соответствующие остатки и частное последнего деления, затем записать их в обратном порядке: сначала частное, потом остатки. Действия, с помощью которых получены двоичные представления чисел 63 и 100, можно кратко записать так:

```
63 |2
 1 31 |2
    1 15 |2
       1 7 |2
         1 3 |2
           1 1

100 |2
  0 50 |2
     0 25 |2
        1 12 |2
           0 6 |2
             0 3 |2
               1 1
```

Здесь соответствующие остатки и частное последнего деления подчеркнуты.

Очевидно, все сказанное применимо не только к двоичной, но и к любой другой позиционной системе счисления. Общее правило для получения записи числа N в системе счисления с основанием b (т. е. в виде (1)) можно сформулировать так: разделим число N на b, полученный при этом остаток дает цифру, стоящую в первом разряде b-ичной записи числа N. Разделив полученное первое частное снова на b, возьмем второй остаток; это будет цифра, стоящая во втором разряде, и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока не получим частное, меньшее основания счисления. Это частное представляет собой цифру, стоящую в старшем разряде. Для представления чисел в различных позиционных системах счисления пользуются записями, аналогичными приведенным выше. Запишем, например, число 1146 в троичной системе и число 75 643 в восьмеричной системе счисления. Поскольку

```
1146 |3
   0 382 |3
       1 127 |3
           1 42 |3
              0 14 |3
                 2 4 |3
                   1 1

75643 |8
    3 9455 |8
         7 1181 |8
              5 147 |8
                  3 18 |8
                     2 2,
```

то $1146 = (1120110)_3$, $75\,643 = (223573)_8$. Действительно, $(1120110)_3 = 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \times 3^2 + 1 \cdot 3 + 0 = 729 + 243 + 162 + 9 + 3 = 1146$; $(223573)_8 = 2 \cdot 8^5 + 2 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 3 = 65\,536 + 8192 + 1536 + 320 + 56 + 3 = 75\,643$.

Упражнения

1. Запишите в двоичной системе счисления числа 3, 5, 7, 21, 42, 105, 134, 243, 1001, 2135, 10 736, 115 782.

2. Эти же числа запишите в троичной системе счисления.

3. Запишите указанные числа в системе с основанием $b = 4$.

4. Запишите в пятеричной системе счисления числа 8, 9, 37, 100, 215, 1146, 3246, 21 847, 226 893.

5. Числа, указанные в упражнении 4, запишите в шестеричной, семеричной и восьмеричной системах счисления.

Арифметические действия над числами в недесятичных позиционных системах счисления

Для чисел, записанных в десятичной системе счисления, мы пользуемся правилами сложения и умножения чисел «столбиком», деления — «углом». Эти же правила полностью применимы и для чисел, записанных в любой другой позиционной системе счисления. При сложении чисел в любой системе, как и в десятичной, складывают сначала единицы, затем переходят к следующему разряду и т. д. до тех пор, пока не придут к самому старшему из имеющихся разрядов. При этом необходимо помнить, что всякий раз, когда при сложении в предыдущем разряде получается сумма, большая основания той системы, в которой ведется запись, или равная ему, надо сделать перенос в следующий разряд. Основой для перемножения любых чисел служит таблица умножения, определяющая произведения чисел, меньших основания системы счисления. Для двоичной системы счисления таблицы сложения и умножения принимают вид:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Эти таблицы составлены по тому же принципу, что и таблица Пифагора (она помещена на обложке школьной тетради): знаком «+» обозначена таблица сложения, знаком «×» — таблица умножения. В первом столбце и первой строке записаны слагаемые (множители), на пересечении соответствующих строки и столбца — их сумма (произведение). Из таблиц видно, что $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=(10)_2$; $0\cdot0=0\cdot1=1\cdot0=0$, $1\cdot1=1$.

Приведем примеры арифметических действий над числами в двоичной системе счисления:

1) $$\begin{array}{r} + \begin{array}{r}(111111)_2\\(10101)_2\end{array}\\ \hline (1010100)_2\end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r}(111111)_2\\(10101)_2\end{array}\\ \hline (101010)_2\end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r}(10101)_2\\(101)_2\end{array}\\ \hline (10101)_2\\ (10101)_2\\ \hline (1101001)_2\end{array}$$

4) $$\begin{array}{rl} -\,(111111)_2 & \big|\,\underline{(10101)_2} \\ \underline{(10101)_2} & \quad (11)_2 \\ -\,(10101)_2 & \\ \underline{(10101)_2} & \\ 0 & \end{array}$$

5) $$\begin{array}{rl} -\,(101111)_2 & \big|\,\underline{(1001)_2} \\ \underline{(1001)_2} & \quad (101)_2 \\ -\,(1011)_2 & \\ \underline{(1001)_2} & \\ (10)_2 & \end{array}$$

Запишем таблицы сложения и умножения в троичной системе счисления:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Из таблиц видно, что $0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=2$, $1+2=2+1=(10)_3$, $2+2=(11)_3$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 1=1$, $1\cdot 2=2$, $2\cdot 2=(11)_3$.

Приведем примеры арифметических действий над числами в троичной системе счисления:

1) $$\begin{array}{r} (102101)_3 \\ +\;\underline{(11021)_3} \\ (120122)_3 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} (2101)_3 \\ \times\;\underline{(12)_3} \\ (11202)_3 \\ +\;\underline{(2101)_3} \\ (102212)_3 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} (12120)_3 \\ \times\;\underline{(121)_3} \\ (12120)_3 \\ +\;(102010)_3 \\ \underline{(12120)_3} \\ (10021220)_3 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{rl} -\,(10021220)_3 & \big|\,\underline{(12120)_3} \\ \underline{(12120)_3} & \quad (121)_3 \\ -\,(110222)_3 & \\ \underline{(102010)_3} & \\ -\,(12120)_3 & \\ \underline{(12120)_3} & \\ 0 & \end{array}$$

Упражнения

1. Над какими числами, записанными в десятичной системе, производились действия в примерах 1) — 5)?

2. Запишите в десятичной системе счисления результаты указанных в примерах 1) — 5) действий, проверьте их.

3. Составьте таблицы сложения и умножения в троичной системе счисления.

4. Составьте таблицу умножения в пятеричной системе счисления.

5. Составьте таблицу умножения в шестеричной системе счисления.

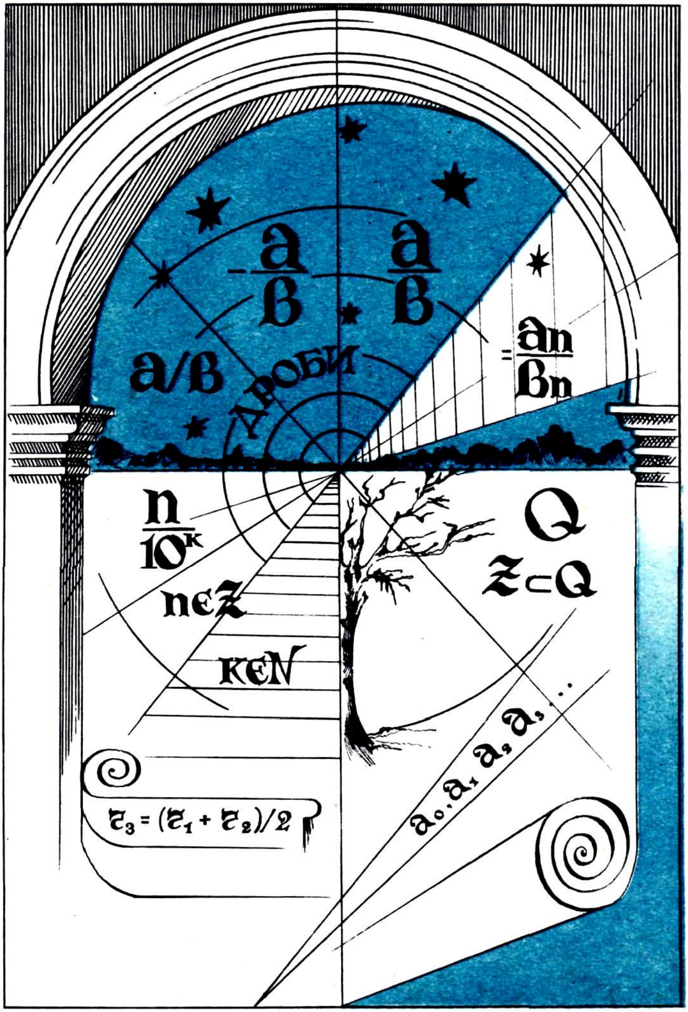
6. Выполните указанные действия:

1) $(1234)_5 + (2143)_5$; 2) $(2143)_5 - (1234)_5$;
3) $(1032)_6 + (2105)_6$; 4) $(3124)_7 + (1243)_7$;
5) $(54\,321)_7 - (32\,143)_7$; 6) $(16\,453)_8 + (27\,146)_8$.

Проверьте результаты, записав числа в десятичной системе счисления.

7. Выполните указанные действия:

1) $(1\,100\,100)_2 \cdot (101)_2$; 2) $(10\,110\,100)_2 : (1111)_2$; 3) $(1\,120\,110)_3 \cdot (102)_3$; 4) $(20\,200)_3 : (120)_3$; 5) $(10\,010)_3 : (121)_3$.



ДРОБИ
a/в
-a/в a/в
=an/вn
n/10к
n∈Z
k∈N
Q
Z⊂Q
r3 = (r1 + r2)/2
a0, a1, a2, a3, ...

Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное... Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей.

Ньютон

ЧИСЛА РАЦИОНАЛЬНЫЕ

Как мы знаем, результаты сложения и умножения натуральных чисел выражаются натуральными числами (эти операции замкнуты на множестве натуральных чисел). Операция вычитания натуральных чисел привела к рассмотрению целых отрицательных чисел. Операция деления натуральных чисел также не всегда выполнима во множестве натуральных чисел. Она приводит к новому расширению понятия числа: появлению дробей и рациональных чисел.

Дроби

Дробью называют число, состоящее из одной или нескольких равных частей (долей) единицы. Дробь изображается символом $\frac{a}{b}$ (или a/b), где a и b — натуральные числа; число a называют числителем, число b — знаменателем дроби. Числитель показывает число взятых долей единицы, разделенной на столько долей, какова величина знаменателя. Дробь можно рассматривать также, как частное от деления a на b.

Дробь, в которой числитель меньше знаменателя ($a < b$), называется правильной дробью. Дробь, в которой числитель больше знаменателя или равен ему ($a \geqslant b$), называется неправильной дробью. Правильная дробь меньше единицы, а неправильная — больше или равна единице. Значит, любая правильная дробь меньше любой неправильной дроби.

С помощью дробей можно записать результат деления двух любых натуральных чисел a и b: $a : b = \frac{a}{b}$.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь. Это свойство называют основным свойством дроби:

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}. \qquad (1)$$

Две равные дроби являются различными записями одного и того же числа.

Равенство (1) означает, что каждую дробь $\frac{a}{b}$ можно привести к новому знаменателю (bn), число n в этом случае называют дополнительным множителем.

Деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель (отличный от единицы) называется сокращением дроби. Наибольшее число, на которое можно сократить дробь, есть наибольший общий делитель ее числителя и знаменателя. Дробь называют несократимой, если ее числитель и знаменатель — взаимно простые числа.

Из двух дробей с равными знаменателями больше та, у которой числитель больше; меньше та, у которой меньше числитель:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Leftrightarrow a > b; \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Leftrightarrow a < b.$$

Множество рациональных чисел

Наряду с дробями вида $\frac{a}{b}$(a и b — натуральные числа) будем рассматривать и противоположные им числа, т. е. $-\frac{a}{b}$ (отрицательные дроби).

Множеством рациональных чисел называют множество всех целых и дробных чисел, как положительных, так и отрицательных, и числа нуль. Множество рациональных чисел обозначают через $\boldsymbol{Q}$. Всякое рациональное число r можно представить в виде

$$r = \frac{p}{q}, \ p \in \boldsymbol{Z}, \ q \in \boldsymbol{Z}, \ q \neq 0,$$

где целые числа p и q не имеют других общих множителей, кроме 1 и -1. Название «рациональное число» происходит от латинского слова *ratio*, которое означает отношение. Этим подчеркивается, что рациональное число понимается как отношение целых чисел.

В соответствии с определением множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел составляет подмножество множества $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, т. е. $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Из общей формулы $r = \frac{p}{q}$ для рациональных чисел при $q = 1$ получаем целое число: $r = p$.

Во множестве рациональных чисел между любыми двумя различными рациональными числами r_1 и r_2 всегда найдется хотя бы одно рациональное число, например, число $r_3=(r_1+r_2)/2$. Отсюда следует, что между любыми двумя различными рациональными числами существует бесконечное множество других рациональных чисел.

Десятичные дроби

Десятичной дробью называют дробь, знаменатель которой число, выраженное единицей с последующими нулями, т. е. дробь вида

$$\frac{n}{10^k},\ n\in \boldsymbol{N},\ k\in \boldsymbol{N}.$$

Десятичные дроби условились записывать без знаменателей: сначала пишут целую часть, а затем числитель дробной части. Целую часть отделяют запятой от числителя дробной части. При этом числитель дробной части записывают так, чтобы в нем было столько цифр, сколько нулей в знаменателе. Если в числителе меньше цифр, чем нулей в знаменателе, то перед числителем добавляют соответствующее количество нулей. Например,

$$\frac{9}{10}=0{,}9;\ 4\frac{17}{100}=4{,}17;\ \frac{3}{100}=0{,}03;$$

$$6\frac{17}{1000}=6{,}017;\ 9\frac{3}{1000}=9{,}003.$$

Если к десятичной дроби приписать справа нули, то получится равная ей дробь. Например, $0{,}25=$ $=0{,}250=0{,}2500$; $14=14{,}0=14{,}00$.

Из двух десятичных дробей с разными целыми частями меньше та, у которой целая часть меньше: $7{,}34<9{,}12$. Чтобы сравнить две дроби с одинаковыми целыми частями, надо уравнять, приписывая справа нули, число десятичных знаков после запятой в обеих дробях и сравнить их дробные части: $9{,}7>9{,}485$; $9{,}700>9{,}485$.

Как и в целой части, значение цифр после запятой в десятичной дроби зависит от их места (позиции). Например, дробь 0,333 можно представить так:

$$0{,}333=\frac{333}{1000}=\frac{300}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{3}{1000}=$$
$$=0{,}300+0{,}030+0{,}003.$$

Таким образом, первая цифра 3 показывает число десятых, вторая — число сотых, а третья — число тысячных. В соответствии с этим первый разряд после запятой называют разрядом десятых, второй — разрядом сотых, третий — разрядом тысячных и т. д. В числе 2568,513 высшим (старшим) разрядом являются тысячи, а низшим (младшим) — тысячные. Запись $546{,}063=500+40+6+0{,}06+0{,}003$ называется разложением числа по разрядам.

Поскольку $0{,}1=0{,}10$ или $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$, то в одной десятой содержится 10 сотых; точно так же в одной сотой содержится 10 тысячных и т. д. При перемещении цифры на один разряд влево ее значение увеличивается в 10 раз, а при перемещении на один разряд вправо — уменьшается в 10 раз. Например, 0,07 в 10 раз меньше, чем 0,7.

Бесконечные десятичные дроби

Посредством деления числителя на знаменатель любое дробное неотрицательное число $\frac{m}{n}$ (m, n — целые числа, $m>0$, $n>0$) можно обратить в конечную или бесконечную десятичную дробь. Например,

$$\frac{3}{8}=0{,}375;\ \frac{11}{3}=3{,}666...;\ \frac{4}{9}=0{,}444\ldots.$$

Для единообразия конечные десятичные дроби и целые числа можно дополнять справа бесконечной последовательностью нулей, например, $\frac{1}{8} = 0{,}125000\ldots$, $14 = 14{,}000\ldots$. Следовательно, любое неотрицательное рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби $r = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots$, где a_0 — целая часть числа r; $a_1a_2a_3\ldots$ — его дробная часть. Такое представление возможно и для отрицательных рациональных чисел. Целую часть отрицательного числа будем обозначать чертой (минусом), как в следующих примерах:

$$-\frac{7}{2} = -4 + \frac{1}{2} = \bar{4}{,}500\ldots;$$

$$-0{,}483 = -1 + 0{,}517 = \bar{1}{,}51700\ldots;$$

$$-58\frac{2}{3} = -58{,}666\ldots = -59 + \frac{1}{3} = \overline{59}{,}333\ldots.$$

Итак, любое рациональное число r представляется бесконечной десятичной дробью: $r = a_0, a_1a_2a_3\ldots$, где a_0— целая часть, а каждое a_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) принимает одно из значений 0, 1, 2, ..., 9, т. е. a_k— одна из десяти цифр.

Правило сравнения бесконечных десятичных дробей:

$$a_0,\ a_1a_2a_3\ldots < b_0,\ b_1b_2b_3\ldots,$$

если $a_k < b_k$ и $a_i = b_i$ при всех $i < k$, т. е. число $r = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots$ меньше числа $\rho = b_0{,}b_1b_2b_3\ldots$, когда несколько первых знаков совпадают и первый из неравных десятичных знаков числа r меньше соответствующего знака числа ρ.

Если совпадающих цифр не окажется, то сравнение десятичных дробей осуществляется проще (по первым цифрам чисел). Например,

$3{,}4782 < 4{,}1265$; $5{,}13872 < 5{,}13941$; $8{,}43216 < 8{,}43271$.

Периодические десятичные дроби

В приведенных ранее примерах встречались десятичные дроби, у которых, начиная с некоторого десятичного знака, цифры повторяются: это так называемые периодические десятичные дроби.

Бесконечная десятичная дробь $a_0, a_1a_2a_3...$ называется периодической, если у нее, начиная с некоторого десятичного знака, одна цифра или группа цифр повторяются, непосредственно следуя одна за другой. Повторяющуюся цифру или группу цифр называют периодом и записывают в скобках. Так, вместо 7,666... пишут 7,(6) и читают: семь целых и шесть в периоде; вместо $\bar{3}$,47323232... пишут $\bar{3}$,47(32) (три с минусом, сорок семь сотых, тридцать два в периоде).

Представление рационального числа в виде десятичной дроби получают с помощью деления. Запишем, например, число $\frac{7}{12}$ в виде десятичной дроби. Будем делить 7 на 12:

$$\begin{array}{r|l} -70 & 12 \\ \underline{60} & 0{,}58\dot{3} \\ -100 & \\ \underline{96} & \\ -40 & \\ \underline{36} & \\ 40 & \end{array}$$

В остатке снова получилось 40, дальнейшие вычисления можно не выполнять: как остатки, так и цифры в частном будут повторяться. Итак, $\frac{7}{12} =$ $= 0{,}58(3)$.

Рассмотрим теоремы, указывающие условия, при которых несократимая дробь a/b обращается соответственно в конечную десятичную дробь или в бесконечную периодическую дробь.

Теорема 1. Несократимую дробь a/b можно обратить в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда в разложении ее знаменателя на простые множители содержатся только двойки и пятерки или $b = 1$.

Необходимость. Пусть несократимая дробь a/b (a и b — взаимно простые числа) обращается в конечную десятичную дробь, т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{10^k} \ (n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{N}),\ n = \frac{a \cdot 10^k}{b}.$$

Так как a и b — взаимно простые числа (не имеющие общих делителей, кроме 1), а n — целое число, то последнее равенство возможно только тогда, когда $10^k \vdots b$. Но $10^k = 2^k \cdot 5^k$, поэтому число b в своем разложении на простые множители не может иметь других множителей кроме 2 и 5, т. е. необходимо, чтобы

$$b = 2^m \cdot 5^p, \tag{2}$$

где m и p — целые неотрицательные числа.

Достаточность. Пусть выполнено равенство (10), т. е. число b имеет в своем разложении только 2 и 5. Предположим, что $m \geqslant p$, тогда

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^p} = \frac{a \cdot 5^{m-p}}{2^m \cdot 5^p \cdot 5^{m-p}} = \frac{a \cdot 5^{m-p}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{k}{10^m},$$

где $k = a \cdot 5^{m-p}$ — целое число.

Теорема 2. Если $b \neq 2^m \cdot 5^p$, где m и p — целые неотрицательные числа, то, обращая несократимую дробь a/b в десятичную, получают бесконечную периодическую десятичную дробь.

Так как дробь a/b несократима (a и b — взаимно простые числа), то деление a на b не может закончиться остатком, равным нулю, а также не может привести к конечной десятичной дроби (поскольку $b \neq 2^m \cdot 5^p$, т. е. не выполнено условие (2)). В результате деления получим бесконечную десятичную дробь. Выполняя деление a на b, будем получать остатки, меньшие делителя b, причем различных остатков будет не больше $b - 1$ и остатками могут быть числа 1, 2, 3, ..., $b - 1$. Остатков конечное число, а процесс деления бесконечен. Следовательно, начиная с некоторого, остатки начнут повторяться. Если повторится какой-то остаток, то повторится и соответствующая цифра в частном, и после этого остатка будут повторяться в той же последовательности остатки и соответствующие им цифры частного. В результате получится бесконечная десятичная периодическая дробь.

Следствие. Каждое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью.

Это утверждение следует из доказанных теорем и соглашения о том, чтобы считать конечные десятичные дроби и целые числа (дополняя их бесконечной последовательностью нулей) бесконечными десятичными дробями.

Замечание 1. Бесконечные десятичные дроби с нулем в периоде получаются в случае, когда некоторый остаток в алгоритме деления оказывается равным нулю.

Какие же периодические десятичные дроби являются представлениями рациональных чисел? Ответ на этот вопрос дает теорема, которая приводится здесь без доказательства.

Теорема 3. Любая периодическая десятичная дробь, не имеющая девятку периодом, является представлением какого-либо рационального числа, получается из этого числа в результате деления.

Приведем примеры обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь.

Пример 1. Обратить бесконечную периодическую дробь 2,(18) в обыкновенную дробь.

Обозначим данную дробь через x, тогда $x = 2,(18)$. Умножив это равенство на 100, получим $100\,x = 218,(18)$. Вычитая из полученного равенства предыдущее, находим: $100x - x = 218,(18) - 2,(18)$, $99x = 216$, $11x = 24$, $x = 2\frac{2}{11}$

Пример 2. Записать периодическую дробь 3,25(7) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через x, тогда $x = 3,25(7)$. Умножим это равенство на 100 и 1000 соответственно: $100x = 325,(7)$, $1000x = 3257,(7)$. Вычитая из последнего равенства предыдущее равенство, находим: $1000x - 100x = 3257,(7) - 325,(7)$; $900x = 2932$, $x = 2932/900$, $x = 733/225$.

Пример 3. Записать периодическую дробь 3,254(9) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим данную дробь через x: $x = 3,254(9)$. Умножим это равенство на 1000: $1000x = 3254,(9)$; введем обозначение $y = 1000x$, тогда $y = 3254,(9)$. Умножив последнее равенство на 10, получим $10y = 32549,(9)$. Из этих равенств находим: $10y - y = 32549,(9) - 3254,(9)$; $9y = 29295$, $y = 3255$. Следовательно, $1000x = 3255$, $x = 3\frac{51}{200}$.

Отметим, что $3255/1000 = 3,255 = 3,255(0)$, т. е. получена конечная десятичная дробь, или бесконечная дробь с нулем в периоде, значит, $3,254(9) = 3,255(0)$.

Замечание 2. Периодическую дробь с периодом 9 всегда можно заменить конечной десятичной дробью. Например, $0,3(9)=0,4$; $6,4(9)=$ $=6,5$; $27,2(9)=27,3$.

Упражнения

1. Убедитесь в том, что

$$\frac{1}{3}=0,(3);\ \frac{7}{3}=2,(3);\ \frac{3}{14}=0,2(142857).$$

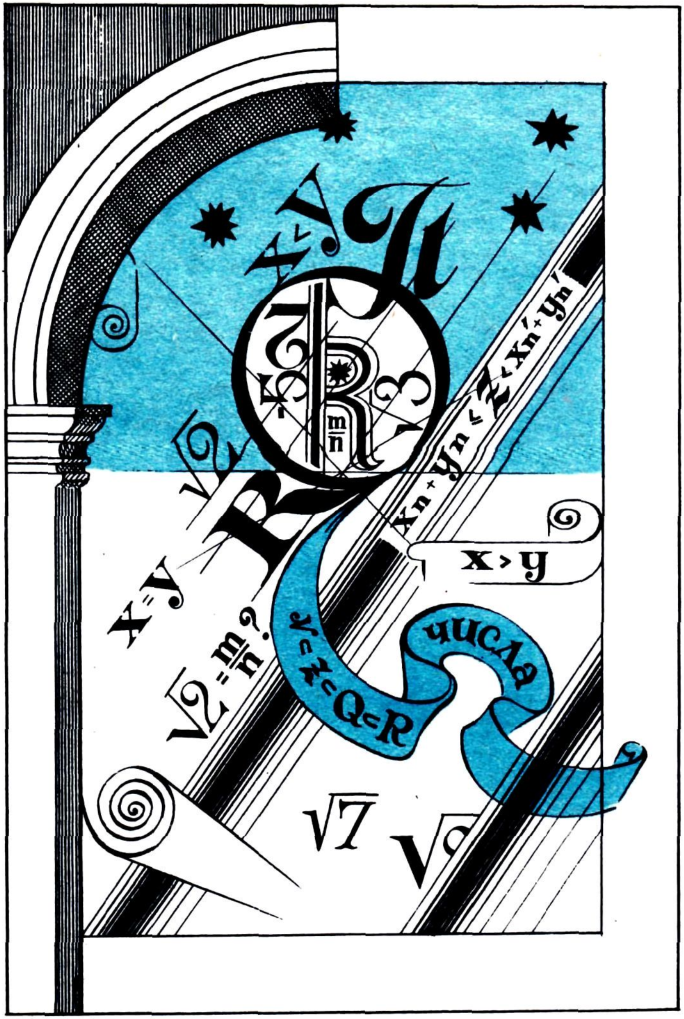
2. Запишите в виде периодической десятичной дроби следующие обыкновенные дроби:

$$\frac{2}{9};\ \frac{1}{6};\ \frac{5}{11};\ \frac{2}{7};\ \frac{209}{700};\ \frac{3097}{9900}.$$

3. Запишите в виде обыкновенной дроби каждую из следующих периодических десятичных дробей: $0,(13)$; $0,(85)$; $0,(271)$; $0,(354)$; $2,5(36)$; $3,71(8)$; $5,12(34)$; $7,23(156)$; $6,17(0124)$; $1,321(7)$; $2,216(83)$; $3,14(567)$.

4. Представьте обыкновенные дроби в виде десятичных:

$$\frac{11}{3},\ \frac{12}{5},\ \frac{8}{7},\ \frac{41}{24},\ \frac{63}{25},\ \frac{87}{75},\ \frac{19}{125},\ \frac{43}{375},\ \frac{3}{625}.$$


x > y
x = y
√2 = m/n ?
N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R
числа
√7

Как из несовершенного или даже невозможного вычитания появляются отрицательные числа (1—2, 2—3 и т. д.), а из несовершенного или даже невозможного деления — дробные числа (2/3, ..., 4/3 и т. д.), так из несовершенного или невозможного извлечения корней появляются глухие числа ($\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д.).

Д. Валлис

ЧИСЛА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ

Действительные числа появились в процессе дальнейшего расширения понятия числа. Необходимость такого расширения была обусловлена как практическими применениями математики при выражении значения любой величины с помощью вполне определенного числа, так и внутренними потребностями развития самой математики. Эти потребности были связаны со стремлением расширять область применимости ряда операций над числами (извлечение корня, вычисление логарифмов, решение уравнений и т. п.). К общему понятию действительного числа подошли еще древнегреческие математики в своей теории несоизмеримых отрезков. Понятие действительного числа впервые было сформулировано в XVII в. Строгие теории действительного числа построены в конце XIX в. К. Вейерштрассом (1815—1897), Р. Дедекиндом (1831—1916), Г. Кантором (1845—1918).

Иррациональные числа

Арифметическим квадратным корнем из положительного числа a называют положительное число, квадрат которого равен a. Для арифметического квадратного корня из числа a принято обозначение $\sqrt{a}$. В соответствии с определением $(\sqrt{a})^2 = a$. Отметим, что $\sqrt{0} = 0$.

Докажем, что среди рациональных чисел нет такого, которое явилось бы значением $\sqrt{2}$. Допустим противное: существует такое рациональное число, квадрат которого равен 2. Это число можно представить в виде несократимой дроби m/n, где m, n — натуральные числа:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \; 2 = \frac{m^2}{n^2}, \; m^2 = 2n^2.$$

Так как $2n^2$ — четное число, то и равное ему число m^2 тоже будет четным. Отсюда следует, что и число m является четным (ибо квадрат нечетного числа есть нечетное число), т. е. $m = 2k$. Подставив это выражение в равенство $m^2 = 2n^2$, получим $(2k)^2 = 2n^2$, $4k^2 = 2n^2$, $2k^2 = n^2$. Поскольку $2k^2$ — четное число, то n^2 также четное и, следовательно, n — четное число. Итак, m и n — четные числа, а это противоречит предположению о том, что дробь m/n несократима. Значит, не существует дроби, квадрат которой равен 2. Следовательно, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Это число называют иррациональным. Иррациональными числами являются $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$ и т. п. Отметим, что к иррациональным числам относится число π, выражающее отношение длины окружности к ее диаметру.

Ранее было доказано, что каждое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью. Было отмечено также, что любая периодическая десятичная дробь, не имеющая девятку в периоде, является представлением некоторого рационального числа.

Кроме периодических бесконечных десятичных дробей существуют непериодические дроби; такова, например, дробь

$$0{,}323223222322223222223222222322222223\ldots$$

(после первой тройки — одна двойка, после второй — две двойки и т. д.).

Итак, существуют бесконечные десятичные дроби, которые не являются рациональными числами. Такие числа $x = a_0, a_1a_2a_3\ldots$, где a_0 — целая часть, $a_1a_2a_3\ldots$ — дробная часть числа x, называют иррациональными.

Множество действительных чисел

Множеством действительных (или вещественных) чисел называют множество всех рациональных и всех иррациональных чисел. Таким образом, оказывается, что любое действительное число представляется бесконечной десятичной дробью — периодической или непериодической. В случае бесконечной периодической десятичной дроби получаем рациональное число, в случае непериодической — иррациональное. Множество всех действительных чисел обозначается символом $\boldsymbol{R}$. Очевидно, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел).

Действительные числа упорядочены по величине, т. е. для любых двух действительных чисел x и y справедливо одно и только одно из соотношений: $x < y$,

$x = y$, $x > y$. Смысл неравенства между действительными числами определяется правилом сравнения бесконечных десятичных дробей.

Для действительного числа $x = a_0, a_1a_2a_3...$ приближения с точностью до 10^{-n} по недостатку (x_n) и по избытку (x'_n) определяются так:

$$x_n = a_0, a_1a_2...a_n,\ x'_n = a_0, a_1a_2...a_n + 10^{-n}.$$

Очевидно,

$$x'_n = x_n + 10^{-n},\ x_n \leqslant x < x'_n. \qquad (11)$$

Прибавление к десятичной дроби числа 10^{-n} равносильно увеличению последней цифры дроби на единицу. Отметим, что каждое из десятичных приближений x_n и x'_n действительного числа x является рациональным числом.

Пример. Выпишем первые пять приближений (по недостатку и избытку) для числа 5,4312: $5 \leqslant x < 5 + 1 = 6$; $5{,}4 \leqslant x < 5{,}4 + 0{,}1 = 5{,}5$; $5{,}43 \leqslant x < 5{,}43 + 0{,}01 = 5{,}44$; $5{,}431 \leqslant x < 5{,}431 + 0{,}001 = 5{,}432$; $5{,}4312 \leqslant x < 5{,}4312 + 0{,}0001 = 5{,}4313$.

Для действительных чисел можно определить арифметические операции сложения и умножения. Вычитание определяется как действие, обратное сложению, а деление — как действие, обратное умножению. Основные свойства арифметических действий над целыми числами остаются справедливыми и для действительных чисел.

Определим сумму и произведение двух действительных чисел x и y. Для их приближений по недостатку и избытку с точностью до 10^{-n} верны неравенства $x_n \leqslant x < x'_n$, $y_n \leqslant y < y'_n$ (см. (11)).

Суммой двух действительных чисел x и y называется такое действительное число z, которое при любом целом неотрицательном n удовлетворяет не-

Рис. 4

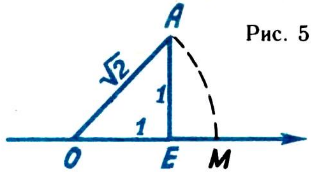


Рис. 5

равенствам $x_n + y_n \leqslant z < x'_n + y'_n$. Можно доказать, что такое число существует и является единственным.

Произведением двух неотрицательных действительных чисел x и y называется такое действительное число z, которое при любом целом неотрицательном n удовлетворяет неравенствам $x_n y_n \leqslant \leqslant z < x'_n y'_n$. Можно доказать, что такое число существует и является единственным.

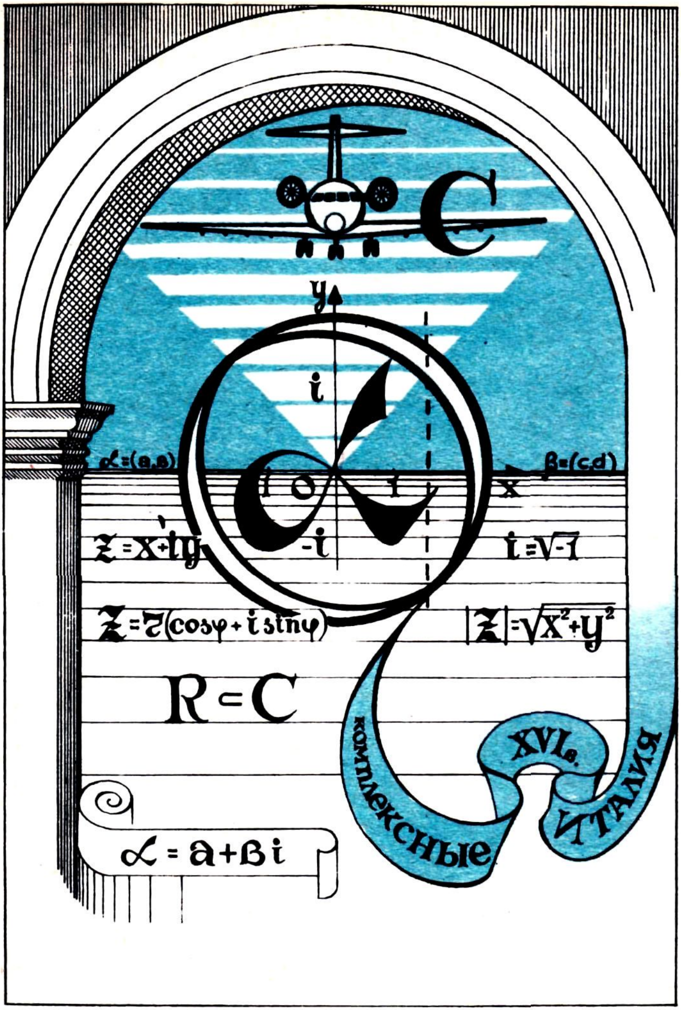
Действительные числа можно изображать точками координатной прямой. Пусть O и E — точки прямой, расстояние между ними равно единице: $|OE| = 1$ (рис. 4). Точка O делит прямую на два луча: положительный луч OE и отрицательный луч. Каждой точке M луча OE поставим в соответствие неотрицательное число x:

$$x = |OM|, \tag{12}$$

где $|OM|$ — расстояние между точками O и M (длина отрезка OM). Это число x называют координатой точки M и записывают $M(x)$. Если точка M принадлежит отрицательному лучу, то ее координатой служит число

$$x = -|OM|. \tag{13}$$

Например, если дано действительное число $\sqrt{2}$, то можно построить точку $M(\sqrt{2})$; это построение показано на рисунке 5.



C
y
i
-i
x
$\alpha = (a, b)$
$\beta = (c, d)$
$z = x + iy$
$i = \sqrt{-1}$
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$R \subset C$
$\alpha = a + bi$
КОМПЛЕКСНЫЕ
XVI в.
ИТАЛИЯ

Подобно тому, как всю область действительных величин можно представить с помощью бесконечной прямой, можно себе представить область всех величин, действительных и мнимых, с помощью бесконечной плоскости, где каждая точка, определенная своей абсциссой a и своей ординатой b, представляет в то же время величину $a+ib$.

Гаусс

ЧИСЛА КОМПЛЕКСНЫЕ

Дальнейшее расширение понятия числа связано с введением комплексных чисел. Эти числа появились в алгебре. Необходимость введения таких чисел обусловлена развитием теории алгебраических уравнений. При нахождении решений квадратного уравнения в некоторых случаях приходилось рассматривать корень квадратный из отрицательного числа. При решении кубических уравнений встречались случаи, когда действительные корни уравнения представлялись выражениями, в которые входили квадратные корни из отрицательных чисел. Это привело к необходимости рассмотрения и изучения выражений вида $a+\sqrt{-b}$, где $b>0$. Такие выражения назвали впоследствии комплексными числами. Комплексные числа начали изображать геометрически с помощью точек плоскости, на которой введена прямоугольная декартова система координат. Оказалось, что каждое комплексное число можно задать упорядоченной парой действительных чисел — координатами точки, изображающей данное комплексное число. Над этими упорядоченными парами действительных чисел по определенным правилам можно производить арифметические действия. С введением комплексных чисел стало возможным решить любое квадратное уравнение, любое алгебраическое уравнение n-ой степени. Выяснилось, что каждое алгебраическое уравнение n-ой степени имеет ровно n корней.

Понятие комплексного числа. Основные определения

Рассмотрим множество чисел, каждое из которых определяется упорядоченной парой действительных чисел. Действительные числа будем обозначать буквами a, b, c, ..., а упорядоченные пары действительных чисел — буквами α, β, γ, ... и соответственно записывать $\alpha=(a, b)$, $\beta=(c, d)$ и т. д. Такую упорядоченную пару действительных чисел (a, b) назовем **комплексным** числом.

Определим действия над упорядоченными парами действительных чисел. Суммой двух упорядоченных пар $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$ назовем упорядоченную пару $\gamma=(a+c, b+d)$:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d), \qquad (1)$$

а произведением указанных пар — упорядоченную пару $\delta=(ac-bd, ad+bc)$:

$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc). \qquad (2)$$

Действия сложения и умножения упорядоченных пар действительных чисел определены аксиоматически.

Для этих действий существуют обратные действия — вычитание и деление (кроме деления на нуль). Разностью $\alpha-\beta$ двух упорядоченных пар $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$ назовем такую упорядоченную пару (x, y), для которой $(c, d)+(x, y)=(a, b)$. Принимая во внимание равенство (1), получаем $c+x=a$, $d+y=b$, откуда $x=a-c$, $y=b-d$. Разностью $\alpha-\beta$ упорядоченных пар $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$ является упорядоченная пара $(a-c, b-d)$:

$$(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d). \qquad (3)$$

Нулем служит пара $0=(0, 0)$. Упорядоченной парой, противоположной для упорядоченной пары $\alpha=(a, b)$ будет пара $-\alpha=(-a, -b)$, так как $\alpha+(-\alpha)=(a, b)+(-a, -b)=(0, 0)=0$.

Частным от деления упорядоченной пары $\alpha=(a, b)$ на упорядоченную пару $\beta=(c, d)$, где $\beta\neq 0$, или $c^2+d^2\neq 0$ (т. е. хотя бы одно из чисел c, d отлично от нуля) должна быть упорядоченная пара (x, y) такая, что $(c, d)\,(x, y)=(a, b)$. Отсюда на основании равенства (2) получаем $cx-dy=a$, $cy+dx=b$. Из этой системы уравнений находим x и y:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Итак, если $\beta\neq 0$, то частное α/β двух упорядоченных пар $\alpha=(a, b)$, $\beta=(c, d)$ существует и определяется формулой:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right). \qquad (4)$$

Положив в этой формуле $\beta=\alpha$ (т. е. $c=a$, $d=b$), найдем, что единицей при умножении упорядоченных пар служит упорядоченная пара $(1, 0)$. Полагая $\alpha=1=(1, 0)$, из формулы (4) получаем, что при $\beta \neq 0$ упорядоченной парой, обратной для β, будет упорядоченная пара

$$\frac{1}{\beta} = \beta^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2}\right).$$

Таким образом, построено множество чисел, действия над которыми определяются по формулам (1) — (4). Это множество чисел называют множеством комплексных чисел.

Докажем, что множество комплексных чисел в качестве своего подмножества содержит все действительные числа. Рассмотрим упорядоченные пары вида $(a, 0)$. Каждой паре $(a, 0)$ поставим в соответствие действительное число a, в результате получим взаимно однозначное соответствие между множеством рассматриваемых упорядоченных пар и множеством всех действительных чисел. Применяя к указанным упорядоченным парам формулы (1) и (2), находим:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0); \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

Эти равенства означают, что упорядоченные пары вида $(a, 0)$ складываются и умножаются так же, как действительные числа. Следовательно, множество указанных упорядоченных пар действительных чисел, рассматриваемое как подмножество множества комплексных чисел, по своим алгебраическим свойствам не отличается от множества действительных чисел. Это позволяет положить

$$(a, 0) = a, \tag{5}$$

т. е. не различать упорядоченную пару $(a, 0)$ действительных чисел и действительное число a. В частности, нуль $(0, 0)$ и единица $(1, 0)$ множества комплексных чисел оказываются обычными действительными числами 0 и 1.

Покажем, что среди комплексных чисел содержится корень уравнения $x^2+1=0$. Корнем уравнения $x^2+1=0$ является такое число, квадрат которого равен действительному числу -1. Это число определяется упорядоченной парой $(0, 1)$. В самом деле, применив формулу (2), получим

$$(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)=-1.$$

Обозначим эту упорядоченную пару через i, т. е. $i=(0, 1)$, тогда

$$i^2=-1, \ i=\sqrt{-1}, \tag{6}$$

число i называют мнимой единицей.

Найдем произведение действительного числа b на упорядоченную пару $(0,1)=i$ — мнимую единицу:

$$bi=(b, 0)(0, 1)=(0, b), \ ib=(0, 1)(b, 0)=(0, b). \tag{7}$$

Если (a, b) — произвольная упорядоченная пара, то из очевидного равенства $(a, b)=(a, 0)+(0, b)$ и формул (5), (7) получаем

$$(a, b)=a+bi. \tag{8}$$

Следовательно, комплексное число $\alpha=(a, b)$ может быть записано в виде $a+bi=a+ib$, где a и b — действительные числа, i — мнимая единица, определяемая соотношением (6). Выражение $a+bi$ называют алгебраической формой комплексного числа. Число a называют действительной, число b — мнимой частью комплексного числа $a+bi$. Обозначая комплексное число $a+bi$ одной буквой α, пишут:

$$a=\mathrm{Re}\alpha, \ b=\mathrm{Im}\alpha,$$

где Re — начальные буквы латинского слова *realis* (действительный), Im — начальные буквы латинского слова *imaginarius* (воображаемый). Кроме указанных обозначений, употребляются также и такие: $a = R(\alpha)$, $b = I(\alpha)$, где $\alpha = a + bi$. Числа вида bi называют чисто мнимыми числами или просто мнимыми.

Комплексное число $\alpha = a + bi$ считают равным нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 0$:

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow (a = 0,\ b = 0). \qquad (9)$$

Два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ считают равными тогда и только тогда, когда равны между собой соответственно их действительные и мнимые части, т. е. $a = c$, $b = d$:

$$(a + bi = c + di) \Leftrightarrow (a = c,\ b = d). \qquad (10)$$

Комплексное число $a - bi$ называют сопряженным комплексному числу $a + bi$. Обозначим число $a - bi$ той же буквой, что и число $\alpha = a + bi$, только с черточкой сверху: $\bar{\alpha} = a - bi$. Числу $\bar{\alpha}$ будет сопряжено число $a - (-bi) = a + bi = \alpha$. Вследствие этого числа $\alpha = a + bi$ и $\bar{\alpha} = a - bi$ называют комплексно сопряженными числами. Действительные числа и только они сопряжены сами себе. В самом деле, если $\alpha = a$, где a — действительное число, то из формул (5) и (8) имеем: $\alpha = a + 0 \cdot i = a$, $\bar{\alpha} = a - 0 \cdot i = a$, т. е. $\alpha = \bar{\alpha}$.

Упражнения

1. Найдите числа, сопряженные соответственно каждому комплексному числу: $3 + 5i$; $4 - 7i$; $-5 + 8i$; $-6 - 2i$; -3.

2. Найдите числа, противоположные соответственно каждому комплексному числу: $2 + 4i$; $3 - 5i$; $-4 + 3i$; $-8 - 9i$; 7.

Геометрическое изображение комплексного числа

Как известно, действительные числа можно изображать точками на координатной прямой. Если на прямой фиксировано начало координат и выбрана единица для измерения длин отрезков, то каждой точке этой прямой можно поставить в соответствие действительное число и наоборот: каждому действительному числу — определенную точку. В этом случае не делают различия между действительным числом и изображающей его точкой.

Комплексные числа можно изображать точками плоскости. На плоскости выберем прямоугольную декартову систему координат. Каждому комплексному числу $\alpha = a + bi$ поставим в соответствие точку плоскости с координатами (a, b) и обратно. Действительные числа $\alpha = a + 0 \cdot i = a$, определяемые упорядоченными парами $(a, 0) = a$, изображаются точками, расположенными на оси Ox (рис. 6). Вследствие этого ось Ox называют действительной осью. Чисто мнимые числа $\alpha = 0 + bi = bi$, каждое из которых определяется упорядоченной парой $(0, b)$, изображаются точками оси Oy. Эту ось называют мнимой осью. Мнимая единица i $(i = 0 + 1 \cdot i)$, определяемая упорядоченной парой $(0, 1)$, изображается точкой оси Oy, расположенной на расстоянии, равном единице, вверх от начала координат. Любое комплексное число $\alpha = a +$

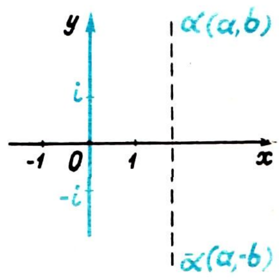


Рис. 6

$+bi$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) изображается точкой комплексной плоскости, не лежащей на осях координат. Сопряженные комплексные числа α и $\bar{\alpha}$ изображаются точками, симметричными относительно действительной оси.

Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, называют комплексной плоскостью. Комплексные числа и соответствующие им точки комплексной плоскости обозначают буквой z и пишут $z = x + iy$, где x — действительная часть ($x = \mathrm{Re} z$), y — мнимая часть ($y = \mathrm{Im} z$).

Замечание. Если x и y — действительные переменные, то $z = x + iy$ — комплексная переменная. Комплексную плоскость называют также плоскостью комплексной переменной z.

Упражнения

1. На комплексной плоскости постройте точки, изображающие следующие комплексные числа: $3 + 4i$; $2 - 3i$; $-5 + 2i$; $-8 - 7i$; $2i$; $-3i$; 1; 5; -4; 0.

2. Выясните геометрический смысл следующих величин:

$$|\mathrm{Re} z| \text{ и } |\mathrm{Im} z| \text{ при } z = x + iy.$$

3. Дайте геометрическое описание множества всех точек комплексной плоскости, изображающих комплексные числа $z = x + iy$ и удовлетворяющих каждому из неравенств: 1) $\mathrm{Re} z > 0$; 2) $\mathrm{Im} z < 0$; 3) $\mathrm{Im} z > 2$; 4) $4 < \mathrm{Im} z < 7$; 5) $0 < \mathrm{Re} z < 3$; 6) $\mathrm{Re} z > 5$; 7) $0 \leqslant \mathrm{Im} z \leqslant 4$; 8) $\mathrm{Re} z \geqslant 8$; 9) $|\mathrm{Im} z| < 6$; 10) $|\mathrm{Re} z| > 2$; 11) $|\mathrm{Re} z| \leqslant 9$.
Изобразите эти множества на чертеже.

4. Где расположены точки, изображающие комплексные числа $z = x + iy$, для которых: 1) $\mathrm{Re} z < 1$; 2) $\mathrm{Re} z \geqslant -2$; 3) $\mathrm{Im} z \leqslant 5$; 4) $\mathrm{Im} z \geqslant 6$; 5) $|\mathrm{Re} z| \leqslant 2$; 6) $|\mathrm{Im} z| > 2$?

5. Где расположены точки, изображающие комплексные числа $z=x+iy$, для которых удовлетворяется соответственно пара неравенств: 1) $0 \leqslant \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 4$, $0 \leqslant \mathrm{Im}z \leqslant 4$; 2) $-2 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 3$, $-2 \leqslant \leqslant \mathrm{Im}z \leqslant 3$; 3) $|\mathrm{Re}z| \leqslant 1$, $|\mathrm{Im}z| \leqslant 1$; 4) $|\mathrm{Re}z| > 3$, $|\mathrm{Im}z < 3$; 5) $|\mathrm{Re}z| < 2$; 6) $|\mathrm{Im}z| < 2$; 7) $|\mathrm{Re}z| \geqslant 5$, $|\mathrm{Im}z| \geqslant 5$; 8) $|\mathrm{Re}z| < 4$, $|\mathrm{Im}z| > 6$.
Сделайте соответствующие рисунки.

6. Запишите с помощью неравенств следующие множества точек комплексной плоскости: 1) полуплоскость, расположенная ниже действительной оси; 2) полуплоскость, расположенная справа от мнимой оси; 3) полоса, включающая точки, отстоящие от действительной оси на расстоянии $d \leqslant 5$; 4) квадрат с вершинами в точках $0, 1, 1-i, -i$; 5) полоса, включающая точки, отстоящие от мнимой оси на расстоянии $2 < d < 7$.

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Рассмотрим правила, по которым производятся арифметические действия над комплексными числами.

Если даны два комплексных числа $\alpha = a + bi$ и $\beta = c + di$, то

$$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (11)$$
$$\alpha - \beta = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Это следует из определения действий сложения и вычитания двух упорядоченных пар действительных чисел (см. формулы (1) и (3)). Мы получили правила сложения и вычитания комплексных чисел: чтобы сложить два комплексных числа, надо отдельно сложить их действительные части и соответственно мнимые части; чтобы из одного комплексного числа вычесть другое, необходимо вычесть соответственно их действительные и мнимые части.

Число $-\alpha = -a - bi$ называют противоположным числу $\alpha = a + bi$. Сумма двух этих чисел равна нулю: $-\alpha + \alpha = (-a - bi) + (a + bi) = (-a + a) + (-b + b)i = 0$.

Для получения правила умножения комплексных чисел воспользуемся формулой (6), т. е. тем, что $i^2 = -1$. Учитывая это соотношение, находим $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad + b\epsilon)i - bd$, т. е.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \qquad (12)$$

Эта формула соответствует формуле (2), которой определялось умножение упорядоченных пар действительных чисел.

Отметим, что сумма и произведение двух комплексно сопряженных чисел являются действительными числами. В самом деле, если $\alpha = a + bi$, $\bar{\alpha} = a - bi$, то $\alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$, $\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a$, т. е.

$$\alpha + \alpha = 2a, \ \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2. \qquad (13)$$

При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме следует ожидать, что частное выражается также числом того же вида, т. е. $\alpha/\beta = u + vi$, где u, $v \in R$. Выведем правило деления комплексных чисел. Пусть даны числа $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, причем $\beta \neq 0$, т. е. $c^2 + d^2 \neq 0$. Последнее неравенство означает, что c и d одновременно в нуль не обращаются (исключается случай, когда $c = 0$, $d = 0$). Применяя формулу (12) и второе из равенств (13), находим:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Следовательно, частное двух комплексных чисел определяется формулой:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \qquad (14)$$

соответствующей формуле (4).

С помощью полученной формулы для числа $\beta=c+di$ можно найти обратное ему число $\beta^{-1}=1/\beta$. Полагая в формуле (14) $a=1$, $b=0$, получаем

$$\frac{1}{c+id}=\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}i=\frac{c-id}{c^2+d^2}.$$

Эта формула определяет число, обратное данному комплексному числу, отличному от нуля; это число также является комплексным.

Упражнения

1. Выполните указанные действия над комплексными числами:

1) $(3+7i)+(4+2i)$; 2) $(3-5i)+(8+9i)$; 3) $(-2+5i)+(7-3i)$; 4) $(-6-2i)+(-3-6i)$; 5) $(6+5i)-(3+8i)$; 6) $(1-2i)-(4-6i)$; 7) $(-3+2i)-(-5+7i)$; 8) $(-4-3i)-(-9-8i)$; 9) $(2+3i)\cdot(4+7i)$; 10) $(5-4i)\cdot(8-9i)$; 11) $(-3+2i)\cdot(-2+i)$; 12) $(-4-7i)\cdot(-3-2i)$;
13) $\frac{4+6i}{1-i}$; 14) $\frac{5+i}{1+2i}$; 15) $\frac{3-2i}{1+i}$; 16) $\frac{7-3i}{1-2i}$.

2. Найдите число, обратное данному комплексному числу: $1+i$; $1-i$; $-2+3i$; $-3-2i$; $2+i$; $2-i$; $-3+4i$; $-4-3i$.

Свойства действий над комплексными числами

Для любых комплексных чисел $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\gamma = e + fi$ выполняются следующие свойства действий сложения и умножения: 1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ — переместительное (коммутативное) свойство сложения; 2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ — сочетательное (ассоциативное) свойство сложения; 3) $\alpha\beta = \beta\alpha$ — переместительное (коммутативное) свойство умножения; 4) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ — сочетательное (ассоциативное) свойство умножения; 5) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ — распределительное (дистрибутивное) свойство умножения относительно сложения.

Докажем, например, первое и третье из этих свойств. По определению сложения получаем

$$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$\beta + \alpha = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i = (a + c) + (b + d)i = \alpha + \beta,$$

так как $c + a = a + c$, $d + b = b + d$, т. е. для любых действительных чисел выполняется переместительное (коммутативное) свойство сложения. Далее, $\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$, $\beta\alpha = (c + di)(a + bi) = ca + cbi + dai + dbi^2 = (ca - db) + (cb + da)i = (ac - bd) + (ad + bc)i$, поскольку для любых действительных чисел $ac = ca$, $bd = db$, т. е. выполняется переместительное (коммутативное) свойство умножения.

Остальные свойства доказываются аналогично, с учетом соответствующих свойств операций над действительными числами.

Таким образом, операции над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и операции над действительными числами.

Возведение в степень комплексного числа. Извлечение корня из комплексного числа

При возведении в степень комплексного числа пользуются формулой бинома Ньютона:

$$(c+d)^n = c^n + nc^{n-1}d + \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}d^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}c^{n-3}d^3 + \ldots + d^n.$$

С помощью формулы бинома Ньютона получаем

$$(a+bi)^n = a^n + na^{n-1}(bi) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(bi)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}a^{n-3}(bi)^3 + \ldots + (bi)^n.$$

В правой части этого равенства заменяют степени мнимой единицы i их значениями и приводят подобные члены. Рассмотрим, как выражаются эти степени. Учитывая формулу $i^2 = -1$, получаем $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$, $i^7 = i^6 \cdot i = -i$, $i^8 = i^7 \cdot i = -i^2 = 1$ и т. д. В общем виде полученный результат можно записать так:

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i\ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Приведем примеры возведения в степень комплексных чисел:

$$(3+4i)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 4i + (4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i,$$

$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i,$$

$$(1-i)^4 = 1 + 4(-i) + 6(-i)^2 + 4(-i)^3 + (-i)^4 = 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4.$$

Переходим к извлечению квадратного корня из комплексного числа $a+bi$. Квадратным корнем из комплексного числа называют такое комплексное число, квадрат которого равен данному комплексному числу. Обозначим это комплексное число через $u+vi$, т. е.

$$\sqrt{a+bi}=u+vi,\ (u+vi)^2=a+bi.$$

Последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$u^2+2uvi+v^2i^2=a+bi, \qquad u^2-v^2+2uvi=a+bi.$$

Учитывая определение равенства комплексных чисел (см. (10)), получаем

$$u^2-v^2=a, \qquad 2uv=b. \qquad (15)$$

Возведем в квадрат обе части каждого из этих равенств, сложим их, преобразуем полученную левую часть и извлечем квадратный корень:

$$(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=a^2+b^2,\ (u^2+v^2)^2=a^2+b^2,$$
$$u^2+v^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Это уравнение и первое из уравнений (15) дают возможность определить u^2 и v^2:

$$u^2=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2}),\ v^2=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2}). \qquad (16)$$

Из первого уравнения находим два значения u, отличающиеся друг от друга только знаком, второе уравнение дает два значения v. Все эти значения будут действительными, поскольку при любых a и b

$$a+\sqrt{a^2+b^2}>0,\ -a+\sqrt{a^2+b^2}>0\ (\sqrt{a^2+b^2}>|a|).$$

Знаки u и v следует выбирать так, чтобы выполнялось второе из равенств (15). Это дает две возможные комбинации значений u и v, т. е. два числа u_1+v_1i, u_2+v_2i, отличающиеся знаком.

Следовательно, извлечение квадратного корня из комплексного числа всегда возможно и дает два значения, отличающиеся друг от друга только знаком.

Приведем пример. Пусть требуется извлечь квадратный корень из комплексного числа $3-4i$, т. е. найти комплексное число $u+vi$ такое, что $(u+vi)^2=3-4i$. В данном случае $a=3$, $b=-4$, поэтому уравнения (16) принимают вид

$$u^2=\frac{1}{2}(3+\sqrt{9+16})=4,\quad v^2=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{9+16})=1.$$

Второе из равенств (15) запишется так: $2uv=-4$, $uv=-2$; это означает, что соответствующие значения u и v имеют разные знаки. Так как $u^2=4$, $v^2=1$, то с учетом равенства $uv=-2$ находим, что $u_1=2$, $v_1=-1$, $u_2=-2$, $v_2=1$, т. е. $2-i$ и $-2+i$ — значения квадратного корня из комплексного числа $3-4i$.

Упражнения

1. Возведите в указанные степени данные комплексные числа:

$$(1-2i)^2;\qquad (2+3i)^2;\qquad (1-i)^3;\qquad (2+i)^3.$$

2. Найдите действительную и мнимую части комплексного числа:

$$(2+3i)^2;\qquad (5-4i)^2;\qquad (1+i)^3;\qquad (1-2i)^3.$$

3. Найдите значения квадратного корня из комплексного числа:

$$5+12i;\qquad 3+4i;\qquad 9-40i;\qquad 11-60i.$$

4. Найдите значения данных выражений при указанных значениях z:

1) z^3-3z^2+2z при $z=1-i$; 2) z^3+2z^2-7z+5 при $z=1+i$.

5. Докажите, что указанные комплексные числа z являются корнями следующих уравнений:

1) $z^3+2z^2-6z+8=0$, $z=1-i$; 2) $z^4+2z^3-3z^2+2z+6=0$, $z=1+i$.

6. Решите квадратные уравнения:

1) $z^2-8z+25=0$; 2) $z^2+2z+5=0$;
3) $z^2-4iz-5=0$; 4) $z^2+3iz-10i=0$.

Модуль и аргумент комплексного числа

Комплексное число $z=x+iy$ изобразим точкой z комплексной плоскости; точка z имеет координаты (x, y). Рассмотрим радиус-вектор $\bar{r}=\overline{Oz}$ этой точки (рис. 7). **Модулем комплексного числа** z называют длину r радиус-вектора $\bar{r}$ данной точки. Модуль комплексного числа z обозначают через $|z|$. Следовательно, по определению

$$r=|z|,\ |z|\geqslant 0. \quad (17)$$

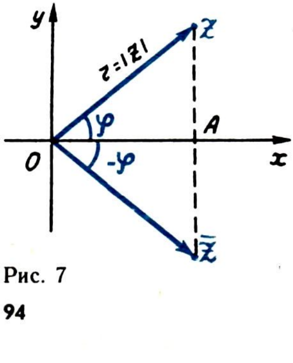


Рис. 7

Поскольку $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (получено из формулы для расстояния между двумя точками на плоскости: $O(0, 0)$ и $z(x, y)$), то

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \quad (18)$$

Эта формула выражает модуль комплексного числа

$z = x + iy$ через его действительную и мнимую часть. Формула (18) имеет простой геометрический смысл: она выражает длину гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами $|x|$ и $|y|$ (см. рис. 7).

Отметим, что модуль комплексного числа является неотрицательным действительным числом.

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называют величину угла φ наклона радиус-вектора $\bar{r} = \overline{Oz}$ к положительной полуоси Ox. Аргумент комплексного числа z обозначают так: $\mathrm{Arg}z$. При изменении z этот угол может принимать любые действительные значения (как положительные, так и отрицательные; последние отсчитываются по часовой стрелке). Если модули двух комплексных чисел равны, а значения угла φ отличаются друг от друга на 2π, или на число, кратное 2π, то точки, соответствующие этим комплексным числам, совпадают; комплексные числа в этом случае равны между собой. Следовательно, аргумент комплексного числа z имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Аргумент не определен лишь для числа 0, модуль которого равен нулю: $|0| = 0$. Среди значений аргумента комплексного числа $z \neq 0$ существует одно и только одно значение, заключенное между $-\pi$, $+\pi$, включая последнее значение. Его называют главным значением аргумента и обозначают $\arg z$. Итак, модуль и аргумент комплексного числа z удовлетворяют следующим соотношениям:

$$|z| \geqslant 0, \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi, \quad \mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Замечание 1. Главное значение аргумента положительного действительного числа равно 0, главное значение аргумента действительного отрицательного числа равно π, главное значение аргумента мнимого числа bi ($b>0$ равно $\pi/2$, главное значение аргумента мнимого числа $-bi$ ($b>0$) равно $-\pi/2$.

Замечание 2. Аргумент комплексного числа является естественным обобщением знака действительного числа. В самом деле, аргумент положительного действительного числа равен нулю, а отрицательного равен π. Из начала координат на действительной оси выходят только два направления, которые можно различать знаками «плюс» и «минус». На комплексной плоскости таких направлений бесконечное множество, они различаются углом их наклона к положительному направлению действительной оси.

Выразим действительную и мнимую части комплексного числа $z=x+iy$ через его модуль и аргумент. Пусть точка z изображает число $z=x+iy$ (рис. 7). Из прямоугольного треугольника OAz получаем

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi, \tag{19}$$

где $r=|z|$. Отсюда и из формул (17), (18) следует:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим комплексное число

$$z=x+iy. \tag{20}$$

Подставляя сюда выражения для x и y через модуль и аргумент комплексного числа (см. формулы (19)), получаем $z=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$, или

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\ (r\geqslant 0). \tag{21}$$

Запись комплексного числа z в виде (21) называют тригонометрической формой этого числа.

Замечание. Не всякая запись комплексного числа через тригонометрические функции является тригонометрической формой этого числа. Например, запись числа i в виде

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{9\pi}{2}, \text{ или } i=(-1)\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

не является тригонометрической формой числа i: в первом случае у косинуса и синуса разные аргументы, во втором — имеется отрицательный множитель. Поскольку аргументами комплексного числа i являются числа $\pi/2+2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и только они, и $|i|=1$, то тригонометрическая форма числа i имеет вид

$$i=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \text{ (}k\text{ — любое целое число).}$$

Очевидно, что

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r(\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)).$$

Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π. Следовательно, если

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2), \quad (22)$$

то

$$r_1=r_2,\ \varphi_2=\varphi_1+2k\pi\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (23)$$

Если комплексное число $z=x+iy$ задано в тригонометрической форме (21), то комплексное число $\bar{z}=x-iy$ записывается в форме

$$\bar{z}=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)),$$

поэтому

$$|z|=|\bar{z}|,\ \arg z=-\arg\bar{z},$$

т. е. при переходе от числа z к комплексно сопряженному числу $\bar{z}$ модуль $\bar{z}$ не меняется, а аргумент изменяет лишь знак (см. рис. 9).

Покажем, как умножать и делить комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Пусть даны два комплексных числа

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ z_2 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \quad (24)$$

где $r = |z_1|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z_1$, $\rho = |z_2|$, $\psi = \operatorname{Arg} z_2$.

Пользуясь правилами действий над комплексными числами в алгебраической форме, находим

$$z_1 z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ = r\rho(\cos\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi + \\ i^2\sin\varphi\sin\psi) = r\rho((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \\ + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)),$$

или

$$z_1 z_2 = r\rho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)). \quad (25)$$

Из полученной тригонометрической формы произведения двух комплексных чисел следует, что

$$|z_1 z_2| = r\rho \text{ или } |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,\ (\varphi + \psi) = \\ = \operatorname{Arg}(z_1 z_2),$$

т. е. модуль произведения равен произведению модулей множителей, а сумма аргументов множителей является аргументом произведения.

Предположив, что $z_2 \neq 0$, т. е. $\rho \neq 0$, найдем частное двух комплексных чисел z_1 и z_2, заданных формулами (24):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\psi - i\sin\psi)} = \\ = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi)}{\rho(\cos^2\psi + \sin^2\psi)} = \frac{r}{\rho}((\cos\varphi\cos\psi + \\ + \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi)),$$

или

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r}{\rho}(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)). \qquad (26)$$

Из формулы (26) следует, что

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r}{\rho}, \quad \text{или} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}; \qquad (27)$$

$$\varphi-\psi=\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right). \qquad (28)$$

Формула (27) означает, что модуль частного равен модулю делимого, деленному на модуль делителя. Формула (28) показывает, что разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного двух комплексных чисел.

Формула (26) позволяет найти модуль и аргумент комплексного числа, обратного данному числу. Полагая в этой формуле $z_1=1=1(\cos 0+i\sin 0)$, $z_2=z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, получаем

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos(0-\varphi)+i\sin(0-\varphi)),$$

$$z^{-1}=r^{-1}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)), \qquad (29)$$

откуда $|z^{-1}|=r^{-1}$, $\arg z^{-1}=-\varphi$, т. е.

$$|z^{-1}|=|z|^{-1},\ \arg z^{-1}=-\arg z.$$

Таким образом, модуль комплексного числа z^{-1}, обратного числу z, равен обратной величине модуля числа z, а его главное значение аргумента отличается от главного значения аргумента z лишь знаком.

Рассмотрим вопрос о возведении в степень комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, заданного в тригонометрической форме. Если n — целое положительное число, то с помощью формулы (25) получаем следующую формулу

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \qquad (30)$$

откуда $|z^n|=r^n$, $\operatorname{Arg} z^n=n\varphi$.

Итак, при возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Формула (30) справедлива и для целых отрицательных показателей. В самом деле, так как $z^{-n}=(z^{-1})^n$, то достаточно применить формулу (30) к числу z^{-1}, тригонометрическая форма которого определяется формулой (29).

Формулу (30) называют формулой Муавра. В частном случае, при $r=1$, из этой формулы получаем

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа

Извлечь корень n-й степени из комплексного числа z — это значит найти такое комплексное число α, что $\alpha^n=z$. Представим числа z и α в тригонометрической форме: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\alpha=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$, где $r=|z|$, $\varphi=\mathrm{Arg}\,z$; $\rho=|\alpha|$, $\psi=\mathrm{Arg}\,\alpha$. Обозначим корень n-й степени из комплексного числа z через $\sqrt[n]{z}$, тогда по определению

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi).$$

$$(\rho(\cos\psi+i\sin\psi))^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Применяя формулу (30), получаем

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

На основании формул (22) и (23) из этого равенства следует, что

$$\rho^n=r,\ n\psi=\varphi+2k\pi\,(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

откуда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (31)$$

Полученные формулы определяют модуль ρ и аргумент числа α — корня степени n из комплексного числа z. Обратно, если дано комплексное число $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, то при любом целом k, положительном или отрицательном, n-я степень этого числа равна числу $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Итак,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (32)$$

где $\sqrt[n]{r}$ — арифметическое значение корня из действительного неотрицательного числа, k — любое целое число. Так как k может принимать любые значения (положительные и отрицательные), то может показаться, что корень n-й степени из комплексного числа z имеет бесконечное множество различных значений. На самом деле различных значений будет только n. Полагая

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \qquad \textbf{(33)}$$

получаем следующие n значений корня:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),\\
\alpha_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),\\
\alpha_2 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-1} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Докажем, что среди значений α_i ($i=0, 1, \ldots, n-1$) нет равных между собой. Пусть p и q — любые различные числа из чисел $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, тогда

$$\frac{\varphi+2p\pi}{n}-\frac{\varphi+2q\pi}{n}=\frac{p-q}{n}2\pi.$$

Поскольку $\frac{p-q}{n}$ не является целым числом ($p<n$, $q<n$), то число $\frac{p-q}{n}2\pi$ не будет кратным 2π. Таким образом, комплексные числа

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2p\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2p\pi}{n}\right),$$

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2q\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2q\pi}{n}\right)$$

не равны между собой, потому что разность их аргументов не будет кратной 2π (см. (22) и (23)).

Предположим, что k — любое натуральное число, большее $n-1$. Пусть $k=nq+r$, где $0\leqslant r\leqslant n-1$, тогда

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2\pi r}{n}+2q\pi,$$

т. е. значение аргумента при этом значении k отличается от значения аргумента при $k=r$ на число, кратное 2π. Следовательно, при этом значении k получаем такое же значение корня, как и при $k=r$, т. е. при значении $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Таким образом, извлечение корня n-й степени из комплексного числа z всегда возможно и дает n различных значений, определяемых формулами (34). Из этих формул видно, что все n значений корня n-й степени из комплексного числа z расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке нуль и делят эту окружность на n равных частей.

Отметим, что корень n-й степени из действительного числа a также имеет n различных значений. Среди этих значений действительных будет два, одно или ни одного, в зависимости от знака a и четности n. Корень n-й степени из нуля имеет только одно значение, равное нулю, т. е. $\sqrt[n]{0}=0$.

Рассмотрим важный частный случай извлечения корня, а именно извлечения корня n-й степени из числа 1. Представляя это число в тригонометрической форме $1=\cos 0+i\sin 0$ и применяя формулу (34), получаем n значений корня из единицы:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (35)$$

На комплексной плоскости корни n-й степени из единицы изображаются точками, расположенными на окружности радиуса $R=1$ и делящими ее на n равных дуг. Одной из таких точек будет точка, изображающая число 1.

В качестве примера найдем все значения корня шестой степени из единицы. По формуле (35), которая в данном случае принимает вид

$$\sqrt[6]{1}=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6},\ k=0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

получаем шесть следующих значений:

$$\alpha_0=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$\alpha_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\alpha_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\alpha_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$\alpha_4=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\alpha_5=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

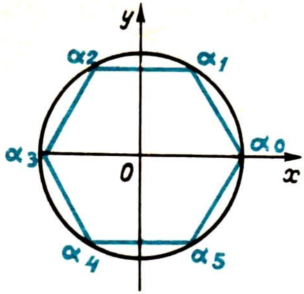


Рис. 8

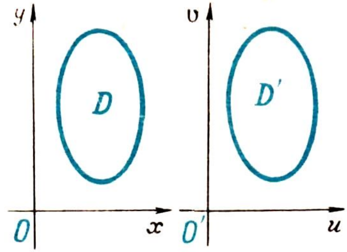


Рис. 9

Эти значения изображаются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в единичную окружность (рис. 8).

Где применяются комплексные числа?

В течение последних двухсот лет комплексные числа находят многочисленные, а иногда и совершенно неожиданные применения. Так, например, с помощью комплексных чисел Гаусс нашел ответ на чисто геометрический вопрос: при каких натуральных n циркулем и линейкой можно построить правильный n-угольник? Из школьного курса геометрии известно, как циркулем и линейкой построить некоторые правильные многоугольники: правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник (его сторона равна радиусу описанной около него окружности). Более сложным является построение правильных пятиугольника и пятнадцатиугольника. Научившись строить эти правильные многоугольники, легко перейти к построению соответствующих многоугольников с удвоенным числом сторон: восьмиугольника, десятиугольника и т. п. Все эти задачи на построение были решены еще в Древней Греции. Однако, несмотря на огромные усилия многих замечательных древнегреческих геометров и других ученых, никому не удалось построить ни правильный семиугольник, ни правильный девятиугольник. Не удалось также осуществить построение правильного p-угольника ни при каком простом числе p, кроме $p=3$ и $p=5$. Более двух тысяч лет никто не мог продвинуться в решении этой проблемы. В 1796 г. Карл Фридрих Гаусс, 19-летний студент-математик Геттингенского университета, впервые доказал возможность построения правильного семнадцатиугольника с помощью циркуля и линейки. Это было одно из самых удивительных открытий в истории математики. В течение нескольких последующих лет Гаусс полностью решил проблему построения правильных n-угольников.

Гаусс доказал, что правильный N-угольник с нечетным числом сторон (вершин) может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число N является простым числом Ферма или произведением нескольких различных простых чисел Ферма. (Числами Ферма называют числа вида $F_n = 2^{2^n}+1$. При $n=0, 1, 2, 3, 4$ эти числа являются простыми, при $n=5$ число F_5 будет составным. О числах Ферма будет рассказано в следующем разделе в части, касающейся простых чисел и их распределения.) Из этого результата следовало, что построение правильного многоугольника невозможно при $N=7, 9, 11, 13$.

Легко заметить, что задача о построении правильного n-угольника равносильна задаче о делении окружности радиуса $R=1$ на n равных частей. Выше было показано, что корень n-й степени из единицы имеет точно n значений; почти все эти значения (за исключением одного, двух) являются комплексными. Точки, изображающие корни n-й степени из единицы, располагаются на окружности радиуса $R = 1$ и делят ее на n равных дуг, т. е. являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в эту окружность (см. рис. 8). При доказательстве возможности построения правильного 17-угольника Гаусс пользовался свойствами корней 17-й степени из единицы.

В XVIII в. возникла новая область математики — теория функций комплексной переменной. Введем понятие такой функции. Рассмотрим две комплексные переменные $z = x + iy$ и $w = u + iv$, где x, y, u, v — действительные переменные, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Зафиксируем две комплексные плоскости Oxy (плоскость z), $O'uv$ (плоскость w) с выбранными на них системами прямоугольных координат и два множества на этих плоскостях: D и D' соответственно (рис. 9).

Если каждой точке $z \in D$ по некоторому закону f ставится в соответствие единственная точка $w \in D'$, то говорят, что w есть функция от z и пишут: $w = f(z)$. Множество D в этом случае называют областью определения функции $w = f(z)$, значения которой принадлежат области D'. Если множество значений $f(z)$ исчерпывает все множество D', то D' называют множеством значений (областью изменения) функции $f(z)$. В таком случае пишут: $D' = f(D)$. Множества D и D' можно изображать на одной комплексной плоскости. Это мы будем иметь в виду в дальнейшем. Отметим еще, что каждое из множеств D и D' может совпадать со всей плоскостью.

Таким образом, каждая комплексная функция реализует однозначное в одну сторону отображение одного множества на другое. Благодаря этому комплексные функции находят важные применения в таких науках, как гидродинамика и аэродинамика, поскольку с их помощью удобно описывать движение объема жидкости (или газа).

С помощью теории функций комплексной переменной доказана следующая важная теорема, которую долгое время называли основной теоремой алгебры.

Теорема. Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

Рассмотрим многочлен степени $n (n \geqslant 1)$:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n. \qquad (36)$$

Корнем многочлена называют такое число c (в общем случае комплексное: $c = a + bi$), которое обращает данный многочлен в нуль:

$$a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \ldots + a_{n-2} c + a_n \equiv 0.$$

Другими словами, теорема утверждает, что алгебраическое уравнение n-й степени $(n \geqslant 1)$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (37)$$

имеет хотя бы один корень.

Отсюда следует, что любое алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней. Действительно, если многочлен $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ имеет корень α_1, то его можно представить в виде $f(x) = (x - \alpha_1)\varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x)$ — многочлен степени $n - 1$. Этот многочлен по данной теореме имеет хотя бы один корень. Обозначим корень многочлена $\varphi_1(x)$ через α_2, тогда $\varphi_1(x) = (x - \alpha_2)\varphi_2(x)$, где $\varphi_2(x)$ — многочлен степени $n - 2$. Продолжая аналогичные рассуждения, находим, что $f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$. Отсюда видно, что $f(\alpha_i) = 0$ при i — $1, 2, \ldots, n$, т. е. α_i — корни многочлена (36) или уравнения (37). Таким образом, уравнение (37) имеет n корней.

Отметим, что комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами всегда сопряжены: если $c = a + bi$ — корень уравнения, то $\bar{c} = a - bi$ — также корень данного уравнения. Иными словами, комплексные корни такого многочлена входят парами во множество его корней. Отсюда следует, что любое алгебраическое уравнение нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Замечание. Не всякое уравнение имеет корни, действительные или комплексные. Например, трансцендентное (неалгебраическое) уравнение $a^x = 0$ ($a > 0$) не имеет никаких корней (ни действительных, ни комплексных).

Простейшим примером функции комплексной переменной является линейная функция $w = z + c$, где c — постоянная (комплексное число). Эта функция осуществляет преобразование плоскости z на плоскость w. Каждой точке z она ставит в соответствие точку $w = z + c$. Очевидно, от точки z можно перейти к точке w путем сдвига (параллельного переноса) на вектор $\boldsymbol{c}$, т. е. посредством перемещения точки z по направлению вектора $\boldsymbol{c}$ на расстояние, равное длине этого вектора (рис. 10). Путем подходящего выбора числа c можно получить любой сдвиг. Например, если точку z нужно сдвинуть в положительном направлении оси Ox на две единицы, то надо взять $c = 2$; точка $w = z + 2$ будет искомой (рис. 11). Если же точку z нужно сдвинуть в отрицательном направлении оси Oy на три единицы, то берем $c = -3i$; точка $w' = z + (-3i) = z - 3i$ будет искомой (рис. 11). Итак, функция $w = z + c$ осуществляет преобразование (отображение) плоскости, которое называют сдвигом на вектор $\boldsymbol{c}$.

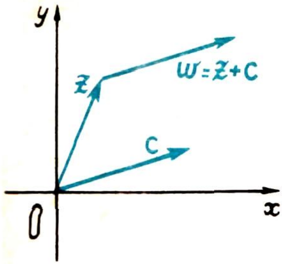


Рис. 10

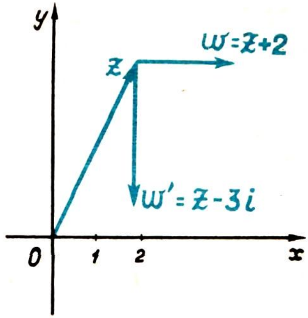


Рис. 11

Геометрическое преобразование, при котором величины углов между любыми двумя линиями, содержащимися в преобразуемой фигуре, не изменяются, называют конформным преобразованием или конформным отображением. (Под углом между двумя линиями, пересекающимися в некоторой точке, понимают угол между касательными к этим линиям, проведенными в этой точке.) Примерами конформных отображений могут служить сдвиг (параллельный перенос), гомотетия и поворот. Таким образом, можно сказать, что функция $w = z + c$ осуществляет конформное отображение; это одна из таких функций.

Теория функций комплексной переменной находит широкое применение при решении важных практических задач картографии, электротехники, теплопроводности и др. Во многих вопросах, где речь идет, например, об электрическом потенциале в точках пространства, окружающего заряженный конденсатор, или о температуре внутри нагретого тела, о скоростях частиц жидкости или газа в потоке, движущемся в некотором канале и обтекающем при этом некоторые препятствия, и т. п., нужно уметь находить потенциал, температуру, скорости и т. п. Задачи такого рода могут быть решены без особых затруднений в случае, когда встречающиеся в них тела имеют простую форму (например, в виде плоских пластин или круговых цилиндров). Однако расчеты необходимо уметь производить и во многих других случаях. Например, чтобы сконструировать самолет, надо уметь вычислять скорости частиц в потоке, обтекающем крыло самолета. Разумеется, при полете самолета движутся и частицы воздуха, и само крыло. Однако, опираясь на законы механики, исследование можно свести к случаю, когда крыло неподвижно, а на него набегает и обтекает его поток воздуха. Крыло самолета в поперечном разрезе (профиль крыла) имеет вид, показанный на рисунке 12. Расчет скоростей производится достаточно просто, когда поперечный разрез обтекаемого тела есть круг (т. е. само тело является круглым цилиндром). Чтобы свести задачу о скоростях частиц потока воздуха, обтекающего крыло самолета, к более простой задаче обтекания круглого цилиндра, достаточно конформно отобразить часть плоскости, заштрихованную на рисунке 12, *а* (вне крыла), на другую фигуру, заштрихованную на рисунке 12, *б* (вне круга). Такое отображение осуществляется с помощью некоторой функции комплексной переменной. Знание этой функции позволяет перейти от скоростей в потоке, обтекающем круглый цилиндр, к скоростям в потоке, обтекающем крыло самолета, и тем самым полностью

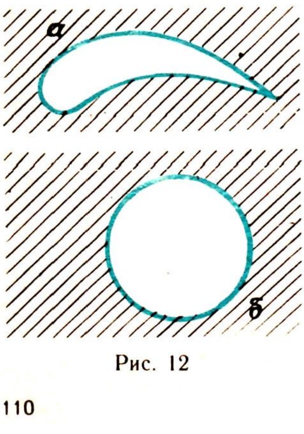
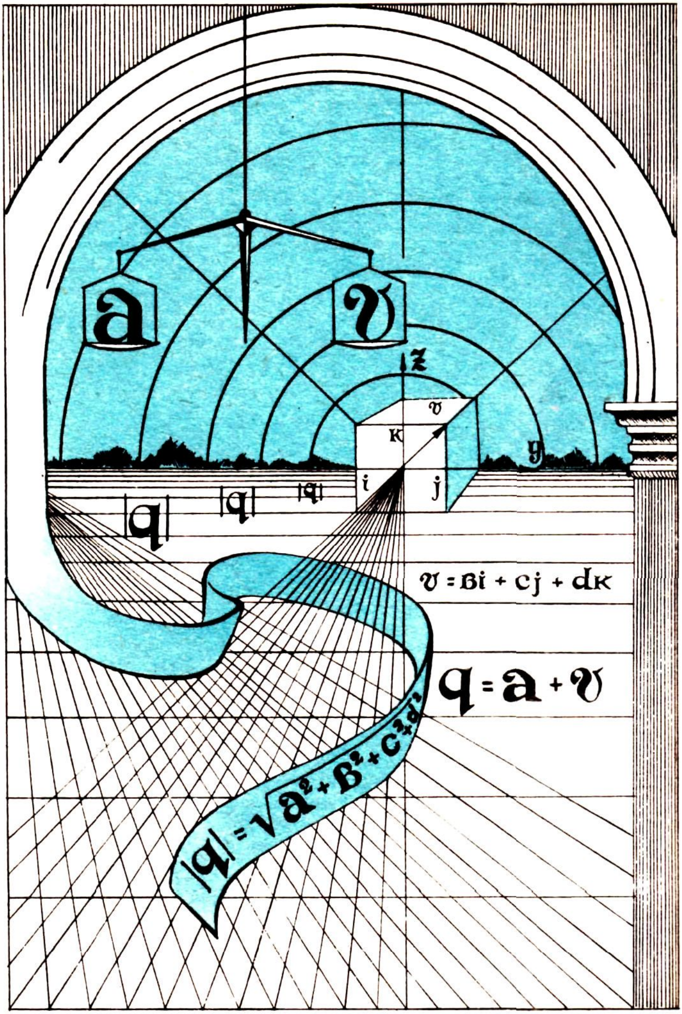


Рис. 12

решить поставленную задачу.

Конформное отображение, заданное соответствующей функцией комплексной переменной, аналогичным образом позволяет сводить решение задач о расчете электрического потенциала и температур от случая тел произвольной формы (любого профиля сечения) к простейшим случаям, для которых задача решается легко.

Русский и советский ученый Н. Е. Жуковский (1847—1921) успешно применял теорию функций комплексной переменной к решению важных прикладных задач. Так, методами этой теории он доказал основную теорему о подъемной силе крыла самолета. В. И. Ленин назвал Н. Е. Жуковского «отцом русской авиации». В одном из своих выступлений Н. Е. Жуковский говорил: «...человек не имеет крыльев и по отношению веса своего тела к весу мускулов он в 72 раза слабее птицы; ...он почти в 800 раз тяжелее воздуха, тогда как птица тяжелее воздуха в 200 раз. Но, я думаю, что он полетит, опираясь не на силу своих мускулов, а на силу своего разума». (Жуковский Н. Е. Собрание сочинений.— М.— Л.: Гостехиздат, 1950.— Т. 7.— С. 16.) С помощью теории функций комплексной переменной Н. Е. Жуковский решал задачи, относящиеся к вопросам просачивания воды через плотины.



a
v
z
v
K
y
i
j
|q|
|q|
|q|
v = Bi + cj + dK
q = a + v
|q| = √a² + B² + c² + d²

Я оказался не в состоянии удержаться от желания высечь ножом на мягком камне Брогемского моста фундаментальную формулу о символах i, j, k

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

содержащую решение проблемы...

У. Гамильтон

ЧИСЛА ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ

Множество комплексных чисел, содержащее в качестве своего подмножества все действительные числа, было построено как множество упорядоченных пар действительных чисел. Действительные числа изображаются точками прямой, комплексные числа — точками плоскости. Уже в первые десятилетия XIX в. ученые начали задумываться над вопросами о дальнейших обобщениях понятия числа. Предпринимаются попытки ввести высшие комплексные (или гиперкомплексные) числа, определяемые упорядоченными тройками (a, b, c) действительных чисел a, b, c и изображаемые точками пространства; новые числа, определяемые упорядоченными четверками действительных чисел (a, b, c, d); в общем случае — новые числа, определяемые упорядоченными совокупностями $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Отметим, что упорядоченную совокупность n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют точкой,

8 Зак. 2564

а множество всех таких точек — арифметическим, или координатным, n-мерным пространством. Было исследовано много различных частных систем таких высших комплексных, или гиперкомплексных чисел. Впоследствии выяснилось, что получить новую числовую систему, в которой все арифметические действия над новыми числами удовлетворяли бы всем обычным свойствам, не представляется возможным. Пришлось отказаться от некоторых из этих свойств. При отказе от переместительного (коммутативного) свойства умножения и сохранении всех остальных свойств сложения и умножения была получена первая гиперкомплексная система, которую называют системой кватернионов.

Кватернионы

Будем рассматривать упорядоченные четверки (x_1, x_2, x_3, x_4) действительных чисел и обозначать их одной буквой. Пусть даны две такие четверки

$x=(x_1, x_2, x_3, x_4), y=(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Суммой их назовем упорядоченную четверку

$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)$, т. е.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)+(y_1, y_2, y_3, y_4)=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4). \qquad (1)$$

Произведением упорядоченной четверки $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ на действительное число c назовем упорядоченную четверку $xc=cx=(cx_1, cx_2, cx_3, cx_4)$, т. е.

$$c(x_1, x_2, x_3, x_4)=(cx_1, cx_2, cx_3, cx_4). \qquad (2)$$

Рассмотрим четыре особые упорядоченные четверки, в каждой из которых одна единица и три нуля, причем в первой четверке единица на первом месте, во второй — на втором и т. д. Обозначим эти четверки через 1, i, j, k соответственно:

$$1=(1, 0, 0, 0),\ i=(0, 1, 0, 0),\ j=(0, 0, 1, 0),$$
$$k=(0, 0, 0, 1). \tag{3}$$

Очевидно, любую упорядоченную четверку (a, b, c, d) действительных чисел a, b, c, d можно выразить через эти четверки. В самом деле, учитывая формулы (1) и (2), получаем

$$(a, b, c, d)=(a, 0, 0, 0)+(0, b, 0, 0)+(0, 0, c, 0)+(0, 0, 0, d)=a\cdot(1, 0, 0, 0)+b\cdot(0, 1, 0, 0)+c\times(0, 0, 1, 0)+d\cdot(0, 0, 0, 1)=a\cdot 1+b\cdot i+c\cdot j+d\times k=a+bi+cj+dk.$$

Таким образом, любая упорядоченная четверка действительных чисел (a, b, c, d) представляется в виде

$$(a, b, c, d)=a+bi+cj+dk, \tag{4}$$

где i, j, k определяются формулами (3).

Кватернионом называют упорядоченную четверку (a, b, c, d) действительных чисел a, b, c, d или выражение вида $a+bi+cj+dk$.

Обозначим кватернион одной буквой q, тогда по определению

$$q=a+bi+cj+dk, \tag{5}$$

где 1, i, j, k — некоторые символы, называемые **базисными единицами.** Потребуем, чтобы базисные единицы удовлетворяли следующим соотношениям:

$$\left.\begin{array}{c} 1\cdot i=i\cdot 1=i,\ 1\cdot j=j\cdot 1=j,\ 1\cdot k=k\cdot 1=k; \\ i^2=-1,\ j^2=-1,\ k^2=-1; \\ ij=k,\ jk=i,\ ki=j,\ ji=-k,\ kj=-i,\ ik=-j. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Здесь приведены правила умножения символов i, j, k. Чтобы запомнить эти правила, воспользуем-

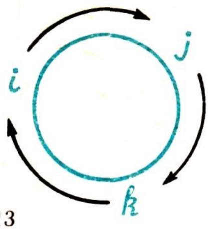


Рис. 13

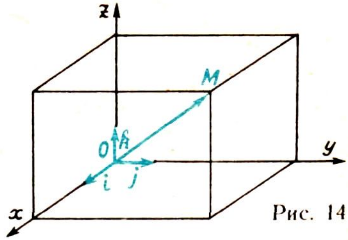


Рис. 14

ся рисунком 13. На этом рисунке кватернионы i, j, k изображены тремя точками окружности, расположенными по направлению движения часовой стрелки. Произведение любых двух из тройки i, j, k равно третьему, если переход первого множителя ко второму происходит по часовой стрелке, и равно третьему со знаком минус, если указанный переход осуществляется против часовой стрелки. Отсюда видно, что произведение зависит от порядка множителей; переместительное свойство при этом умножении не выполняется. Указанные правила умножения можно представить в виде следующей таблицы:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Название «кватернион» происходит от латинского слова *quaterni* — по четыре. Кватернионы возникли при попытке найти обобщение комплексных чисел $x+iy$, где x, y — действительные числа, $1=(1,0)$, $i=(0,1)$ — базисные единицы, причем $i^2=-1$.

Всякий кватернион можно представить в виде:

$$q=a+v,\ v=bi+cj+dk. \quad (7)$$

Число a называют скалярной (или действительной) частью кватерниона, а выражение $v = bi + cj + dk$ — векторной (или мнимой) частью кватерниона q. Последнее название объясняется тем, что если $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, направленные вдоль координатных осей в пространстве (рис. 14), то любая сумма $\boldsymbol{bi} + \boldsymbol{cj} + \boldsymbol{dk}$ представляет собой радиус-вектор точки $M(b, c, d)$: $\bar{r} = \overline{OM} = \boldsymbol{bi} + \boldsymbol{cj} + \boldsymbol{dk}$, числа b, c, d называют координатами вектора $\boldsymbol{r}$ и пишут $\boldsymbol{r} = (b, c, d)$.

Сложение и умножение кватернионов

Рассмотрим два кватерниона

$$q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k,$$
$$q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k. \qquad (8)$$

Сумма этих двух кватернионов определяется формулой

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \qquad (9)$$

Чтобы получить правило умножения кватернионов, будем умножать их как многочлены, учитывая формулы (6), т. е. необходимо иметь в виду, что $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, а произведение двух базисных единиц зависит от порядка множителей. Умножая q_1 на q_2, получаем:

$$\begin{gathered}
q_1 q_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = \\
= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 + \\
+ b_1 c_2 ij + b_1 d_2 ik + c_1 a_2 j + c_1 b_2 ji + c_1 c_2 j^2 + c_1 d_2 jk + \\
+ d_1 a_2 k + d_1 b_2 ki + d_1 c_2 kj + d_1 d_2 k^2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + \\
+ a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + a_2 b_1 i - b_1 b_2 + b_1 c_2 k - b_1 d_2 j + \\
+ a_2 c_1 j - c_1 b_2 k - c_1 c_2 + c_1 d_2 i + d_1 a_2 k + d_1 b_2 j - \\
- d_1 c_2 i - d_1 d_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + \\
+ a_2 b_1 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_2 d_1 - b_1 d_2) j + \\
+ (a_1 d_2 + b_1 c_2 + a_2 d_1 - b_2 c_1) k.
\end{gathered}$$

Таким образом, получено следующее правило умножения кватернионов:

$$\left.\begin{aligned}(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)=\\ =(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+\\ +(a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2-d_1c_2)i+\\ +(a_1c_2+a_2c_1+d_1b_2-b_1d_2)j+\\ +(a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)k.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Можно показать, что умножение кватернионов подчиняется сочетательному (ассоциативному) закону:

$$(q_1q_2)q_3=q_1(q_2q_3). \qquad (11)$$

Рассмотрим правило умножения кватерниона на действительное число. Если дан кватернион $q_1 = a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ и действительное число a, то a можно представить в виде кватерниона $q_2=a+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$. Применяя формулу (10), получаем:

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)a = (a_1+b_1i+c_1j+d_1k)(a+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k)=a_1a+b_1ai+c_1aj+d_1ak;$$

$$a(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)=(a+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k)\times(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)=aa_1+ab_1i+ac_1j+ad_1k.$$

Поскольку умножение действительных чисел обладает переместительным свойством, то из двух последних равенств следует, что

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)a=a(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)=a_1a+b_1ai+c_1aj+d_1ak.$$

Таким образом, чтобы умножить кватернион $q_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ на действительное число a (или действительное число a на кватернион), необходимо умножить на это число все коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 данного кватерниона. Из полученной формулы видно, что результат такого умножения (кватерниона на действительное число) не зависит от порядка множителей.

В частном случае ($a = 1$) из этой формулы следует, что для любого кватерниона q выполняются равенства:

$$1 \cdot q = q, \; q \cdot 1 = q.$$

Сопряженные кватернионы. Модуль кватерниона

Пусть дан кватернион $q = a + bi + cj + dk$. Сопряженным ему называют кватернион

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk, \tag{12}$$

т. е. кватернион, имеющий ту же скалярную часть, а векторные части отличаются лишь знаком.

Как отмечалось выше, сумма и произведение двух комплексных сопряженных чисел являются действительными числами. Оказывается, сумма и произведение двух сопряженных кватернионов также действительные числа. В самом деле, применяя формулу (9), получаем

$$q + \bar{q} = (a + bi + cj + dk) + (a - bi - cj - dk) =$$
$$= (a + a) + (b - b)i + (c - c)j + (d - d)k = 2a,$$
$$q + \bar{q} = 2a. \tag{13}$$

Воспользуемся далее правилом умножения кватернионов. Полагая в формуле (10) $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $d_1 = d$, $b_2 = -b$, $c_2 = -c$, $d_2 = -d$, находим $q\bar{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $\bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, т. е.

$$q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{14}$$

Модулем (или **нормой**) кватерниона $q = a + bi + cj + dk$ называют квадратный корень из суммы квадратов чисел a, b, c, d. Обозначим модуль кватерниона $q=a+bi+cj+dk$ через $|q|$, тогда по определению

$$|q|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}. \qquad \textbf{(15)}$$

Из равенств (14) и (15) следует, что

$$q\bar{q}=|q|^2. \qquad (16)$$

Эта формула соответствует формуле $\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2$ для комплексно сопряженных чисел $\alpha=a+bi$, $\bar{\alpha}=a-bi$.

С помощью непосредственной проверки можно убедиться в том, что операция сопряжения кватернионов обладает следующими свойствами: 1) сопряженное суммы равно сумме сопряженных кватернионов; 2) сопряженное произведения равно произведению сопряженных кватернионов, взятых в обратном порядке, т. е.

$$\overline{q_1+q_2}=\bar{q}_1+\bar{q}_2,\ \ \overline{q_1q_2}=\bar{q}_2\bar{q}_1. \qquad (17)$$

Второе из этих равенств применяется для доказательства следующего важного свойства кватернионов:

$$|q_1q_2|^2=|q_1|^2\,|q_2|^2, \qquad (18)$$

т. е. квадрат модуля произведения кватернионов равен произведению квадратов модулей множителей.

Действительно, применяя равенство (16), второе из равенств (17) и свойство ассоциативности умножения кватернионов, получаем

$$\begin{aligned}|q_1q_2|^2&=(q_1q_2)\,(\overline{q_1q_2})=(q_1q_2)\,(\bar{q}_2\bar{q}_1)=\\&=q_1(q_2\bar{q}_2)\bar{q}_1=|q_1|^2\,|q_2|^2.\end{aligned}$$

Формула (18) дает возможность получить интересное числовое тождество. Пусть кватернионы q_1 и q_2 заданы формулами (8), тогда их произведением будет кватернион, стоящий в правой части равенства (10). В соответствии с формулой (15) находим квадраты модулей этих кватернионов:

$$|q_1|^2=(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2),\quad |q_2|^2=(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2),$$

$$\begin{aligned}|q_1q_2|^2 &= (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+\\ &+(a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2-d_1c_2)^2+\\ &+(a_1c_2+a_2c_1+d_1b_2-b_1d_2)^2+\\ &+(a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)^2.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (18), получаем искомое тождество

$$\begin{aligned}&(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)=\\ &=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+\\ &+(a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2-d_1c_2)^2+\\ &+(a_1c_2+a_2c_1+d_1b_2-b_1d_2)^2+\\ &+(a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)^2.\end{aligned}$$

Отметим, что если q — чисто мнимый кватернион, т. е. $a=0$, $q=v$, где $v=bi+cj+dk$ (см. формулу (7)), то его квадрат (произведение кватерниона на себя) неположителен. Действительно, полагая в формуле (10) $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=b$, $c_1=c_2=c$, $d_1=d_2=d$, находим $v^2=-(b^2+c^2+d^2)\leqslant 0$.

Обратное также верно: если квадрат некоторого кватерниона есть действительное число, меньшее или равное нулю, то этот кватернион является чисто мнимым. В самом деле, для кватерниона $q=a+bi+cj+dk$, или $q=a+v$, где $v=bi+cj+dk$, имеем $q^2=(a+v)(a+v)=a^2+v^2+2av=a^2-b^2-c^2-d^2+2av$. Если это выражение есть действительное число и $a\neq 0$, то $v=0$. Если же $v=0$, то $q=a$ и, следовательно, q^2 не может быть меньше или равно нулю (квадрат любого действительного числа a неотрицателен, т. е. $a^2\geqslant 0$). Итак, $a=0$, поэтому $q=v=bi+cj+dk$, т. е. q — чисто мнимый кватернион.

Таким образом, кватернионы $v = bi + cj + dk$ и только они могут быть охарактеризованы условием, что их квадраты представляют собой действительные неположительные числа.

Замечание. Учитывая последнее утверждение, можно дать другое определение операции сопряжения кватернионов: для любого кватерниона q берется его единственное представление в виде $q = a + v$, где v — кватернион, квадрат которого есть действительное неположительное число, тогда $\bar{q} = a - v$.

Деление кватернионов

Вопрос о делении кватернионов существенно отличается от вопроса о делении действительных или комплексных чисел. Как известно, произведение двух действительных или двух комплексных чисел не зависит от порядка множителей: $ab = ba$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Умножение кватернионов не подчиняется переместительному (коммутативному) закону, поэтому в общем случае $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$. Если для действительных и комплексных чисел не различают уравнений $ax = b$ и $xa = b$, то для кватернионов вместо одного уравнения такого вида нужно рассматривать два:

$$q_1 x = q_2, \tag{19}$$

$$x q_1 = q_2. \tag{20}$$

Соответственно этому решение первого уравнения называют левым частным от деления q_2 на q_1, а решение второго — правым частным. Обозначим левое частное через $x_л$, а правое — через $x_п$. Найдем эти частные из уравнений (19), (20).

Введем сначала понятие кватерниона, обратного данному. Кватернионом, обратным данному кватерниону, называют такой кватернион, произведение которого на данный кватернион равно единице. Пусть дан кватернион $q \neq 0$, $q = a + bi + cj + dk$, обратный ему кватернион обозначим через q^{-1}; по определению имеем: $qq^{-1} = 1$. Покажем, что обратный кватернион q^{-1} выражается формулой

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a - bi - cj - dk),$$

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\bar{q}. \qquad (21)$$

Действительно,

$$qq^{-1} = (a + bi + cj + dk)\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a - bi - cj - dk) = \frac{(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk)}{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} = 1.$$

Легко заметить, что $q^{-1}q = 1$. Следовательно, если q^{-1} — кватернион, обратный кватерниону $q (q \neq 0)$, то

$$qq^{-1} = 1, \ q^{-1}q = 1. \qquad (22)$$

С помощью обратного кватерниона q^{-1} можно найти решения уравнений (19) и (20). Умножая слева обе части уравнения (19) на обратный кватернион q_1^{-1} и учитывая второе из равенств (22), находим левое частное от деления q_2 на q_1:

$$q_1^{-1}q_1x = q_1^{-1}q_2, \ x = q_1^{-1}q_2, \ x_л = q^{-1}q_2.$$

Умножая справа обе части уравнения (20) на обратный кватернион q_1^{-1} и учитывая первое из равенств (22), находим правое частное от деления q_2 на q_1:

$$xq_1q_1^{-1} = q_2q_1^{-1}, \ x = q_2q_1^{-1}, \ x_п = q_2q_1^{-1}.$$

Таким образом, решения уравнений (19) и (20) определяются соответственно формулами $x_л = q_1^{-1}q_2$, $x_п = q_2q_1^{-1}$. С учетом выражения для обратного кватерниона (см. (21)) эти формулы принимают вид

$$x_л = \frac{1}{|q_1|^2}\bar{q}_1q_2, \quad x_п = \frac{1}{|q_1|^2}q_2\bar{q}_1.$$

Кватернионы и векторная алгебра

Будем пользоваться понятиями скалярного и векторного произведения векторов, известными из курса математики средней школы. Напомним основные определения и формулы. Пусть даны два вектора

$$\boldsymbol{r}_1 = b_1\boldsymbol{i} + c_1\boldsymbol{j} + d_1\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_2 = b_2\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + d_2\boldsymbol{k}, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, b_1, c_1, d_1 — действительные числа, координаты первого вектора; b_2, c_2, d_2 — действительные числа, координаты второго вектора. В этом случае употребляются такие краткие записи: $\boldsymbol{r}_1 = (b_1, c_1, d_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (b_2, c_2, d_2)$.

Скалярным произведением двух векторов называют число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = |\boldsymbol{r}_1|\,|\boldsymbol{r}_2| \cos \varphi.$$

Скалярное произведение векторов (23) в координатах определяется формулой

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2. \tag{24}$$

Векторным произведением вектора $\boldsymbol{r}_1$ на вектор $\boldsymbol{r}_2$ называют вектор, обозначаемый символом $[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]| = |\boldsymbol{r}_1|\,|\boldsymbol{r}_2| \sin \varphi$;

2) $[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2] \perp \boldsymbol{r}_1$, $[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2] \perp \boldsymbol{r}_2$;

3) $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2])$ и $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ являются тройками одной ориентации (обе правые или обе левые).

Отметим, что

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j};\ [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] = -\boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}] = -\boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j},$$

т. е. таблица векторного умножения единичных векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ аналогична таблице умножения различных символов i, j, k (см. последние шесть равенств в формулах (6)). В случае совпадения двух векторов нет аналогии: $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] = 0$, но $i^2 = -1$.

Векторное произведение векторов (23) в координатах выражается следующей формулой

$$[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2] = (c_1d_2 - c_2d_1)\boldsymbol{i} + (b_2d_1 - b_1d_2)\boldsymbol{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{k}. \tag{25}$$

Рассмотрим два кватерниона

$$v_1 = b_1i + c_1j + d_1k,\quad v_2 = b_2i + c_2j + d_2k. \tag{26}$$

Перемножим их по правилу умножения кватернионов. Поскольку в данном случае $a_1 = a_2 = 0$, то по формуле (10)

$$v_1v_2 = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)\boldsymbol{i} + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)\boldsymbol{k}.$$

Учитывая соотношения (23)—(26), последнюю формулу можно записать так:

$$v_1v_2 = -(v_1, v_2) + [v_1, v_2], \tag{27}$$

где (v_1, v_2) — скалярное произведение, $[v_1, v_2]$ — векторное произведение векторов v_1 и v_2. Из формулы (27) видно, что скалярное и векторное произведения являются как бы составными частями произведения кватернионов.

Открытие кватернионов в середине XIX в. дало толчок разнообразным исследованиям в области математики и физики. Благодаря кватернионам возникла чрезвычайно важная и богатая приложениями область математики — векторная алгебра. Наряду с линейными операциями над векторами (сложение векторов, умножение векторов на число) в основе векторной алгебры лежат операции скалярного и векторного умножения векторов. Основные положения векторной алгебры были сформулированы в конце XIX в.

Геометрический смысл умножения произвольного кватерниона на чисто векторный кватернион

Рассмотрим произвольный кватернион $q = a + bi + cj + dk$, модуль которого равен единице, т. е. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Как уже отмечалось (см. формулу (7)), любой кватернион можно представить в виде $q = a + v$, где $v = bi + cj + dk$. Равенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ в этом случае можно представить так: $|a|^2 + |v|^2 = 1$ (поскольку $|v|^2 = b^2 + c^2 + d^2$). Так как $|a|^2 + |v|^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $|a| = \cos\varphi$, $|v| = \sin\varphi$. Очевидно, $v = |v|\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p}$ — единичный вектор. Следовательно, кватернион с модулем, равным единице, может быть представлен в таком виде:

$$q = \cos\varphi + p\sin\varphi. \qquad (28)$$

Умножим теперь кватернион q на какой-нибудь векторный кватернион u, ограничившись случаем, когда вектор $\boldsymbol{u}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{p}$. Получаем:

$$qu = (\cos\varphi + p\sin\varphi)u = u\cos\varphi + pu\sin\varphi. \qquad (29)$$

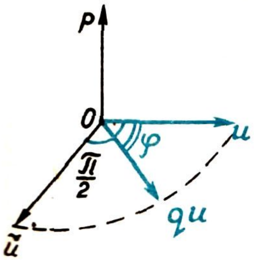
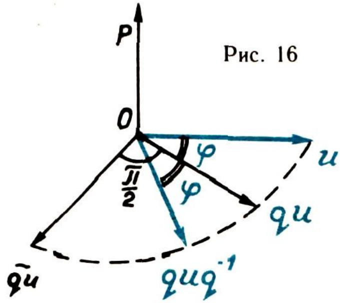


Рис. 15

Рис. 16



Поскольку $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{u}$ перпендикулярны, то в произведении $\boldsymbol{pu}$ скалярная часть обратится в нуль, а векторная часть будет равна векторному произведению $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}]$, т. е. вектору, длина которого определяется произведением $|\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{u}|\sin 90° = |\boldsymbol{u}|$, перпендикулярному векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{u}$ и ориентированному относительно $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{u}$ так, как вектор $\boldsymbol{k}$ относительно $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$.

Обозначим этот вектор через $\tilde{\boldsymbol{u}}$. Можно сказать, что вектор $\tilde{\boldsymbol{u}}$ получен поворотом вектора $\boldsymbol{u}$ вокруг вектора $\boldsymbol{p}$ на угол в 90°. Здесь имеется в виду поворот в том же направлении, в каком совершается кратчайший поворот от $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$ (вокруг $\boldsymbol{k}$). Следовательно, формула (29) принимает вид

$$qu = u\cos\varphi + \tilde{u}\sin\varphi. \qquad (30)$$

Вектор qu получается из вектора $\boldsymbol{u}$ поворотом его на угол φ вокруг вектора $\boldsymbol{p}$ (рис. 15).

Формула (30) выражает геометрический смысл указанного умножения: если $\boldsymbol{p}$ — какой-либо единичный вектор, а $\boldsymbol{u}$ — произвольный вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{p}$, то умножение слева на кватернион (28), т. е. $q = \cos\varphi + p\sin\varphi$, осуществляет поворот вектора $\boldsymbol{u}$ вокруг оси $\boldsymbol{p}$ на угол φ.

Где применяются кватернионы?

Уже с самого начала возникновения кватернионов были найдены приложения их в механике и электродинамике.

Рассмотрим некоторые из этих приложений в механике. С помощью кватернионов можно представить поворот любого вектора $\boldsymbol{u}$ вокруг некоторой оси $\boldsymbol{p}$. Выше уже была получена формула (30) для случая, когда векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{p}$ перпендикулярны. В общем случае вместо умножения u на q слева потребуется взять более сложное выражение quq^{-1}, где q^{-1} — кватернион, обратный кватерниону q, т. е. такой, что $qq^{-1}=1$. Если $q=\cos\varphi+p\sin\varphi$, то $q^{-1}=\cos\varphi-p\sin\varphi$, поскольку $(\cos\varphi+p\sin\varphi)(\cos\varphi-p\sin\varphi)=\cos^2\varphi-p^2\sin^2\varphi=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$.

Убедимся в том, что вектор quq^{-1} получается из вектора $\boldsymbol{u}$ поворотом вокруг оси p на угол 2φ. Рассмотрим сначала случай, когда вектор $\boldsymbol{u}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{p}$. В этом случае

$$quq^{-1}=qu(\cos\varphi-p\sin\varphi)=qu\cos\varphi-(qu)p\sin\varphi.$$

Как было показано выше, вектор qu есть снова вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{p}$, поэтому $(qu)p=-p(qu)$. Кватернион $p(qu)$ есть вектор, полученный из вектора qu путем его поворота на угол 90° вокруг оси $\boldsymbol{p}$ (рис. 16). Сохраним для него ранее введенное обозначение $\widetilde{qu}$. Таким образом,

$$quq^{-1}=qu\cos\varphi+\widetilde{qu}\sin\varphi. \qquad (31)$$

Правая часть этого равенства представляет собой вектор, полученный из qu поворотом его на угол φ вокруг $\boldsymbol{p}$. Поскольку сам вектор qu получен из вектора $\boldsymbol{u}$ также путем поворота на угол φ вокруг $\boldsymbol{p}$, то отсюда и следует наше утверждение.

Чтобы рассмотреть общий случай, заметим следующее: если вектор $\boldsymbol{u}$ пропорционален $\boldsymbol{p}$ (т. е. $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{p}$, где α — действительное число), то $qu=uq$ и $quq^{-1}=uqq^{-1}=u$.

Если дан произвольный вектор $\boldsymbol{u}$, то сначала разложим его на две составляющие $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$, где $\boldsymbol{u}_1$ — вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{p}$, а $\boldsymbol{u}_2$ — вектор, пропорциональный $\boldsymbol{p}$. Учитывая свойства $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$, преобразуем выражение quq^{-1}:

$$quq^{-1}=q(u_1+u_2)q^{-1}=qu_1q^{-1}+qu_2q^{-1}=$$
$$=qu_1q^{-1}+u_2.$$

Отсюда видно, что составляющая u_1 поворачивается на угол 2φ, а составляющая u_2 остается неизменной. Следовательно, вектор $\boldsymbol{u}$ поворачивается вокруг оси $\boldsymbol{p}$ на угол 2φ.

Итак, мы убедились в том, что при повороте вокруг оси $\boldsymbol{p}$ на угол 2φ произвольный вектор $\boldsymbol{u}$ переходит в quq^{-1}, где $q=\cos\varphi+p\sin\varphi$. Принимая это во внимание, можно сказать, что указанный поворот соответствует кватерниону q.

Поставим теперь задачу о сложении двух поворотов в пространстве. Производится сначала поворот на угол $2\varphi_1$ вокруг некоторой оси, характеризуемой единичным вектором $\boldsymbol{p}_1$, затем — второй поворот на угол $2\varphi_2$ вокруг оси единичного вектора $\boldsymbol{p}_2$. В результате последовательного выполнения этих двух поворотов получен новый поворот. Требуется найти ось и угол результирующего поворота.

Как известно из предыдущего, при первом повороте произвольный вектор $\boldsymbol{u}$ переходит в вектор $\boldsymbol{u}_1=q_1uq_1^{-1}$, где $q_1=\cos\varphi_1+p_1\sin\varphi_1$. При втором повороте u_1 переходит в вектор

$$u_2=q_2u_1q_2^{-1}=q_2(q_1uq_1^{-1})q_2^{-1}=(q_2q_1)u(q_1^{-1}q_2^{-1})=$$
$$=(q_2q_1)u(q_2q_1)^{-1}.$$

Здесь мы воспользовались сочетательным (ассоциативным) свойством умножения кватернионов и тем, что $(q_2q_1)^{-1} = q_1^{-1}q_2^{-1}$, т. е. кватернион, обратный произведению двух данных кватернионов, равен произведению обратных кватернионов, взятому в обратном порядке. Действительно, $(q_2q_1)^{-1} = q_1^{-1}q_2^{-1}$, так как $(q_2q_1)(q_1^{-1}q_2^{-1}) = q_2(q_1q_1^{-1})q_2^{-1} = 1$. Следовательно, в результате двух указанных поворотов вектор $\boldsymbol{u}$ перейдет в вектор $\boldsymbol{u}_2 = (q_2q_1)u(q_2q_1)^{-1}$. Учитывая формулу (31), из последнего равенства получаем решение поставленной задачи: в итоге последовательного выполнения двух поворотов, соответствующих кватернионам q_1 и q_2, получается результирующий поворот, соответствующий кватерниону q_2q_1.

Кватернион q_2q_1 можно вычислить без затруднений, так как правило умножения кватернионов известно (оно определено формулой (10)). Вычислив кватернион q_2q_1, представим его в виде

$$q_2q_1 = \cos\psi + p\sin\psi, \tag{32}$$

где $\boldsymbol{p}$ — единичный вектор (см. (28)). Из формулы (32) следует, что результирующий поворот есть поворот на угол 2ψ вокруг $\boldsymbol{p}$.

Приведем конкретный пример такой задачи. Пусть первый поворот совершается вокруг оси Ox на угол 90°, а второй — вокруг оси Oz на такой же угол. Этим поворотам отвечают соответственно кватернионы:

$$q_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\boldsymbol{k}).$$

Найдем произведение q_2q_1 этих кватернионов. Учитывая формулы (6), получаем:

$$q_2q_1=\frac{1}{2}(1+k)(1+i)=\frac{1}{2}(1+i+k+ki)=$$
$$=\frac{1}{2}(1+i+k+j)=\frac{1}{2}(1+i+j+k).$$

Чтобы представить этот кватернион в виде (32), заметим, что скалярная (действительная) часть его есть $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$. Приняв это во внимание, получим:

$$q_2q_1=\cos\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)\right)\sin\frac{\pi}{3},$$
$$q_2q_1=\cos\frac{\pi}{3}+\boldsymbol{p}\sin\frac{\pi}{3},$$

где $\psi=\frac{\pi}{3}$, $\boldsymbol{p}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ — единичный вектор.

Следовательно, результирующий поворот происходит вокруг вектора $\boldsymbol{p}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ на угол $2\psi=$ $=\frac{2\pi}{3}$.

Кватернионы возникли при попытках найти обобщение комплексных чисел $x+iy$, где x, y — действительные числа, а i — базисная единица, для которой $i^2=-1$. Гамильтон и его последователи возлагали большие надежды на кватернионы. От кватернионов ожидали более широких применений, чем от комплексных чисел. С их помощью был описан ряд важных физических явлений. Однако возлагаемые на них надежды оправдались не полностью. В начале XX в. векторное исчисление в его современной форме вытеснило кватернионы из электродинамики и механики. В последнее время кватернионы снова получили признание, когда была осознана их роль в построении различных геометрических преобразований пространства, используемых в квантовой физике. Эти применения, в частности, касаются математического описания некоторых эффектов, связанных с так называемым спином элементарных частиц. Кватернионы нашли важные применения в теории чисел и в других областях математики и ее приложений.

Гиперкомплексные числа

Рассмотрим выражение вида

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n, \qquad (33)$$

где a_0, a_1, $a_2, \ldots$, a_n — действительные числа, i_1, $i_2, \ldots$, i_n — символы, которые называют базисными единицами (или мнимыми единицами). В частном случае при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ получаем действительное число a_0; если $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, то получаем комплексное число $a_0 + a_1 i$ $(i = i_1)$; если $n = 3$, то получаем кватернион $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ $(i = i_1,\ j = i_2,\ k = i_3)$.

Прежде всего, будем считать, что равенство двух выражений вида (33)

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n$$

означает, по определению, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

Определим арифметические действия над выражениями вида (33). Сложение и вычитание таких выражений определяются формулами:

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n) + (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + \ldots + (a_n + b_n) i_n;$$

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n) - (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) i_1 + (a_2 - b_2) i_2 + \ldots + (a_n - b_n) i_n.$$

Операция умножения вводится следующим образом. Сначала задается таблица умножения базисных единиц, т. е. указывается, чему равны всевозможные произведения $i_\alpha i_\beta$, где α, β — любые номера от 1 до n; всего таких произведений будет, очевидно, $n \cdot n = n^2$. Каждое произведение $i_\alpha i_\beta$ должно представлять собой выражение вида (33), т. е.

$$i_\alpha i_\beta = p_0 + p_1 i_1 + p_2 i_2 + \ldots + p_n i_n, \tag{34}$$

где p_0, p_1, p_2, ..., p_n — некоторые действительные числа. Эти числа будут различными для различных α и β: любой комбинации номеров α и β соответствует свой набор коэффициентов p_0, p_1, ..., p_n. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, пишут $p_{\alpha\beta,k}$ вместо p_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$); формула (34) поэтому принимает вид

$$i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta,0} + p_{\alpha\beta,1} i_1 + p_{\alpha\beta,2} i_2 + \ldots + p_{\alpha\beta,n} i_n. \tag{35}$$

Набор чисел $p_{\alpha\beta,k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) задает таблицу умножения базисных единиц. Например, в случае комплексных чисел такая таблица умножения состоит из единственного равенства $i \cdot i = -1 + 0 \cdot i$. В случае кватернионов такая таблица, соответствующая формулам (6), была приведена выше. Каждая клетка этой таблицы заменяет одно из равенств вида (35), например, $ij = k = 0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 1 \cdot k$.

Когда таблица умножения базисных единиц задана, то произведение

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n)\ (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n)$$

определяют по обычному правилу умножения суммы на сумму. Каждое слагаемое первой суммы умножают на каждое слагаемое второй суммы и суммируют результаты, причем произведения $(a_\alpha i_\alpha)\ (b_\beta i_\beta)$

переписывают как $a_\alpha b_\beta(i_\alpha i_\beta)$ и заменяют $i_\alpha i_\beta$ по формуле (35), затем приводят подобные члены. В итоге получается снова некоторое выражение вида (33).

Множество всех выражений вида (33), для которых определены указанным выше способом операции сложения и умножения, называют гиперкомплексной системой размерности $n+1$, а сами выражения (33) называют гиперкомплексными числами. Очевидно, гиперкомплексная система данной размерности полностью определяется таблицей умножения базисных единиц.

Отметим свойства операции умножения, справедливые в любой гиперкомплексной системе.

1. Умножение действительного числа a, рассматриваемого как гиперкомплексное число $a+0\cdot i_1+\ldots+0\cdot i_n$, на любое гиперкомплексное число $b_0+b_1i_1+b_2i_2+\ldots+b_ni_n$ сводится к умножению всех коэффициентов b_0, b_1, b_2, ..., b_n на это число a:

$$(a+0\cdot i_1+0\cdot i_2+\ldots+0\cdot i_n)\ (b_0+b_1i_1+b_2i_2+ \\ +\ldots+b_ni_n)=ab_0+ab_1i_1+\ldots+ab_ni_n,$$

причем результат такого умножения не зависит от порядка множителей:

$$(b_0+b_1i_1+b_2i_2+\ldots+b_ni_n)\ (a+0\cdot i_1+0\cdot i_2+\ldots+ \\ +0\cdot i_n)=ab_0+ab_1i_1+\ldots+ab_ni_n.$$

В частности, для любого гиперкомплексного числа u

$$1\cdot u=u,\ \ u\cdot 1=u.$$

2. Если u и v — любые гиперкомплексные числа, a и b — произвольные действительные числа, то

$$(au)(bv)=(ab)(uv).$$

3. Для любых гиперкомплексных чисел u, v, w выполняются оба варианта (левый и правый) распределительного свойства умножения:

$$u(v+w)=uv+uw, \quad (v+w)u=vu+wu.$$

Все эти свойства операции умножения справедливы в любой гиперкомплексной системе. Другие свойства умножения выполняются далеко не в каждой такой системе.

Если для любых трех чисел u, v, w, принадлежащих данной гиперкомплексной системе, выполняется равенство

$$(uv)w=u(vw),$$

то систему называют ассоциативной.

Замечание. Определяя гиперкомплексную систему, иногда требуют выполнения этого условия.

В случае, когда для любых двух чисел u и v данной гиперкомплексной системы справедливо равенство

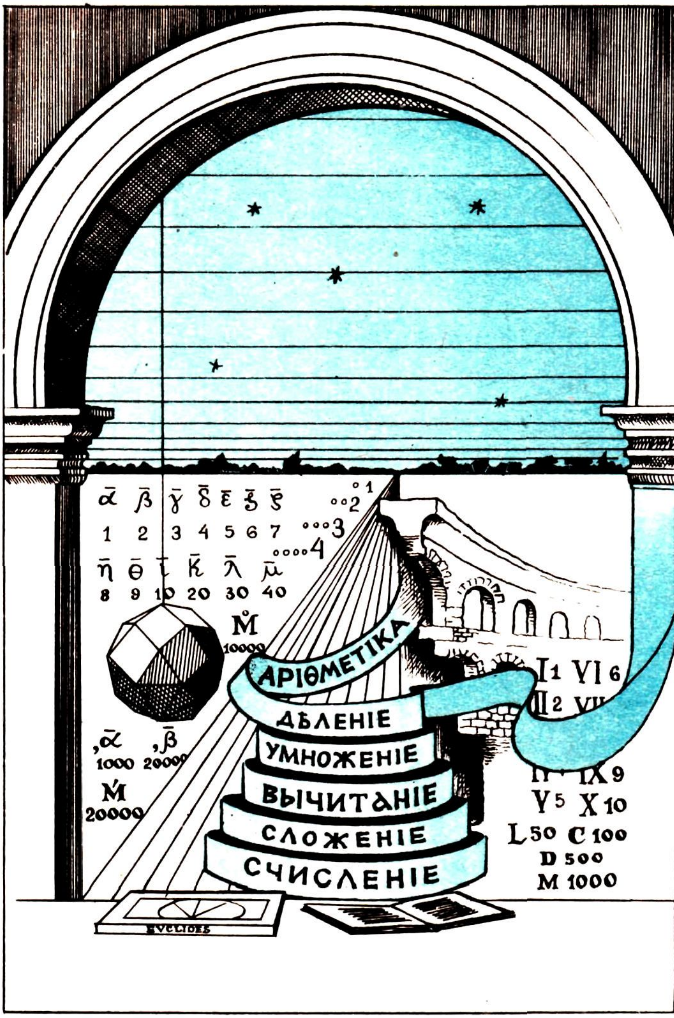
$$uv=vu,$$

систему называют коммутативной.

Если при любых числах u и v ($v \neq 0$) данной гиперкомплексной системы каждое из уравнений

$$vx=u, \quad xv=u$$

имеет решение, то ее называют системой с делением (или говорят, что в ней возможно деление). Решение первого уравнения называют левым частным от деления u на v, а решение второго — правым частным.



АРІѲМЕТІКА
ДѢЛЕНІЕ
УМНОЖЕНІЕ
ВЫЧИТАНІЕ
СЛОЖЕНІЕ
СЧИСЛЕНІЕ
EVCLIDES
1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 20 30 40
10000
1000 20000
20000
I 1 VI 6
II 2
IX 9
V 5 X 10
L 50 C 100
D 500
M 1000

Во всяком деле нужно знать историю его развития.

М. Горький

ИЗ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Понятие числа прошло длинный и сложный путь исторического развития. Натуральные числа как средство счета предметов стали известны человеку на самых ранних ступенях его развития. Дробные числа появились также в глубокой древности. Их возникновение связано с задачами измерения. В случае, когда единица не укладывалась целое число раз в измеряемой величине, естественно возникло понятие о дроби. Положительные и отрицательные числа (толкуемые как «имущество» и «долг») впервые стали употреблять в древнекитайской и древнеиндийской математике. Полное признание отрицательные числа получили в работах европейских математиков лишь в XVII в.

В древнегреческой математике стало известно существование несоизмеримых отрезков. Стремление получить для их отношения точное числовое значение привело к понятию иррационального числа.

Такие числа древнегреческие ученые изображали с помощью отрезков. Стремясь к строгому обоснованию математических утверждений, они придавали им геометрическую форму. В «Началах» Евклида изложена эта своеобразная геометрическая алгебра. В средние века индусы также пользовались иррациональными выражениями. С развитием анализа бесконечно малых в XVII—XVIII вв. действительные числа становятся основным объектом исследования. При этом с ними оперировали на основе наглядных представлений, изображая числа точками прямой линии с указанным началом отсчета.

Еще в древности при решении задач, приводящих к квадратным уравнениям, встречались случаи, когда необходимо было рассматривать квадратный корень из отрицательного числа. В таких случаях считали задачу неразрешимой. Однако решение кубического уравнения, найденное итальянскими математиками в первой половине XVI в., приводило к выражению действительных корней через квадратные корни из отрицательных чисел. Это заставило математиков того времени оперировать новыми числами, которые называли «мнимыми», «невозможными», «воображаемыми» и т. д. Для таких чисел применяли правила действий, которым подчинялись действительные числа. Однако смысл новых чисел долгое время оставался неясным. В начале XIX в. было дано наглядное геометрическое изображение этих чисел (как точек плоскости) и действий над ними (напоминающих действия над векторами). После этого изучение комплексных чисел пошло очень успешно, интенсивнее начала развиваться теория функций комплексной переменной, основы которой были заложены в XVIII в. Эта теория находит широкое применение в самых разнообразных областях науки и техники.

О сложности исторического пути развития понятия числа свидетельствуют и некоторые названия чисел: «ложные», «глухие», «мнимые», «софистические». Эти слова указывают на то сопротивление, которое встречало введение новых чисел на каждой стадии развития понятия числа. Некоторые из этих названий применяются и в настоящее время.

Каждое новое расширение понятия числа открывало возможности решения таких задач, которые до того представлялись неразрешимыми или даже бессмысленными. Например, введение отрицательных чисел позволило производить вычитание во всех случаях, включая и вычитание большего числа из меньшего, решать уравнения вида $x+a=b$, без ограничения $b>a$. Введение дробей дало возможность производить деление двух чисел во всех случаях, когда делитель отличен от нуля, например, делить 3 на 7 или 4 на 9, а также решать любое уравнение $ax=b$ $(a\neq 0)$. Введение иррациональных чисел позволило выразить числом длину любого отрезка, несоизмеримого с единичным отрезком, например, длину диагонали квадрата, сторона которого равна единице. Эти числа позволили также решать любое уравнение вида $x^2=a$ $(a>0)$. Ограничиваясь только действительными числами, мы не могли извлекать квадратный корень из отрицательного числа и решать уравнения вида $x^2+a=0$ $(a>0)$, в частности, уравнение $x^2+1=0$. Введение комплексных чисел сделало разрешимыми и эти задачи. Комплексные числа позволили найти все корни кубического уравнения, уравнения четвертой степени. Стало также возможным доказать, что любое алгебраическое уравнение n-й степени имеет точно n корней. Было доказано также, что алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами может иметь только четное число комплексных корней.

Числа в математических текстах Древнего Египта и Древнего Вавилона

Наиболее древние математические тексты, известные в настоящее время, написаны примерно в начале второго тысячелетия до н. э. К этому времени относится расцвет двух великих цивилизаций древнего Востока — Египта и Вавилона.

Самым большим древнеегипетским математическим текстом, сохранившимся до наших дней, является папирус Райнда. Назван он по имени владельца, который приобрел папирус в 1858 г. Папирус Райнда хранится частично в Лондоне, частично в Нью-Йорке. Другой папирус принадлежит московскому Музею изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Оба папируса переведены на европейские языки и подробно прокомментированы. В свое время они были составлены для учебных целей. В папирусе Райнда содержится 84 задачи с решениями, в Московском папирусе — 25 задач. Основное внимание в египетских текстах уделяется вычислениям. Из текстов этих папирусов видно, что древние египтяне знали натуральные числа и некоторые дроби, умели производить над ними соответствующие действия.

Счет у египтян состоял из умения складывать, удваивать, дополнять дроби до единицы. На этих основных действиях базировалась египетская арифметика. В египетской системе счисления сложение возможно без знания таблицы сложения, здесь достаточно было присчитывать единицы и уметь переводить из разряда в разряд, т. е. укрупнять или раздроблять единицы разрядов чисел.

Умножение на целое число и деление без остатка производилось с помощью удвоения, т. е. сложения числа с самим собой. Для этого множитель представляли как сумму тех или иных членов последовательности 1, 2, 4, 8, 16, ..., что всегда возможно. Умножение 25 на 18 получается сложением результатов умножения на 2 и на 16, как это показано на следующем примере:

1	25
/2	50
4	100
8	200
/16	400
Сумма	450

Дальше удваивать не нужно, поскольку среди степеней двойки есть уже необходимые слагаемые множителя, они отмечались косой чертой.

Деление производилось как действие, обратное умножению.

Разумеется, деление нацело не всегда выполнялось, поэтому египтяне рассматривали и дроби. Вторым источником появления дробей явился процесс измерения величин (в таком процессе единица измерения иногда не укладывалась целое число раз в измеряемой величине, приходилось пользоваться той или иной ее долей, частью). Египтяне оперировали долями единицы вида $1/n$, которые называются аликвотными дробями. Эти дроби мы будем записывать в виде $\overline{n}$ (черточка символизирует египетский знак). Кроме аликвотных дробей, египтяне использовали дробь 2/3, для которой имелся свой знак ; мы будем обозначать ее так: $\overline{\overline{3}}$. Деление $m:n$ египтяне иногда рассматривали как умножение $m \cdot \frac{1}{n}$.

В вычислительной технике древнего Египта появилась теоретико-числовая задача о разложении дробей на сумму аликвотных. Решение этой задачи не является однозначным. Оно сводилось к составлению таблицы простейших разложений для дробей $2/n$, так как при делении основной операцией было удвоение. Папирус Райнда начинается с такой таблицы.

В задаче 33 папируса Райнда требуется разделить число 37 на $1 + \bar{\bar{3}} + \bar{2} + \bar{7}$. В результате деления получается число $16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$. Мы не будем приводить соответствующие вычисления. Отметим только, что древнеегипетский вычислитель с большим искусством владел соответствующей техникой операций.

При решении вычислительных задач развивалось понятие числа. Например, приведение дробей к общему знаменателю требовало перевода одних долей в другие и тем самым раздвигало границы понятия о числе. Дробь понималась как мера, как именованное число, «сколько-то таких-то». Специально решались задачи на перевод одних мер в другие. Однако это не привело еще к обобщению понятия дроби.

Вавилонские математические клинописные тексты относятся к двум четко ограниченным и далеко отстоящим друг от друга периодам. Большая часть математических текстов относится ко времени династии Хаммурапи, т. е. к периоду примерно от 1800 до 1600 гг. до н. э. Вторая часть относится к эпохе Селевкидов и датируется последними тремя столетиями до н. э. Более тысячи лет, разделяющих эти периоды, оказали заметное влияние на форму знаков и язык. Что касается содержания, то изменения от одной группы до другой очень незначительны. Существенным является только использование знака «нуль» в текстах периода Селевкидов.

Тексты готовили писцы. Они руководили общественными работами, занимались учетом хозяйства, составляли торговые документы, вели деловую переписку. Писцы были тесно связаны с храмами, в которых и хранились глиняные таблички с клинописными текстами. Специальность писца была весьма почетной, о чем свидетельствует такое высказывание: «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать подобно солнцу» (История математики с древнейших времен до начала нового времени / Под ред. А. Н. Юшкевича.— М.: Наука, 1970.— Т. 1.— С. 36). Школу, в которой обучались писцы, называли «Домом табличек». В послании одного ученика к другому было сказано, что писец должен был уметь писать понятно, хорошо знать математику, уметь межевать земли, примирять спорящих.

Математические клинописные тексты носят учебный характер, они содержат в основном расчетные задачи. Из этих текстов следует, что математические знания древних вавилонян находились на более высоком уровне по сравнению с математическими знаниями древних египтян.

Древние вавилоняне знали натуральные числа, дроби, умели находить обратные числа и извлекать квадратные корни из чисел.

Сложение и вычитание чисел производилось так же, как в десятичной позиционной системе.

При умножении чисел встречались затруднения, связанные с большим основанием вавилонской системы нумерации. Эти затруднения преодолевались с помощью специальных таблиц. Отметим, что вавилоняне не пользовались одной таблицей умножения чисел от $1 \cdot 1$ до $59 \cdot 59$. Такую таблицу трудно запомнить, поскольку она содержит 1770 элементов (в десятичной системе их только 45). Для проведения своих вычислений вавилоняне составили большой набор таблиц.

Деление a на b вавилоняне свели к умножению

a на число $\overline{b}$ — обратное числу b; самого термина «деление» у них не существовало.

Самые ранние и наиболее употребительные таблицы обратных величин содержали обратные значения тех чисел от 2 до 81, которые имеют вид $2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$. Эти числа представимы шестидесятеричной дробью с конечным числом разрядов; назовем такие числа правильными. В пределах первого десятка встречается только одно «неправильное» число 7, во втором десятке их четыре: 11, 13, 17, 19, а всего до 60— их двадцать два. В таблицах против «неправильных» чисел стоит запись «обратного нет». В более поздних текстах даются приближенные значения обратных значений некоторых «неправильных чисел». Иногда эти приближенные значения оценивались снизу и сверху.

Вавилоняне располагали таблицами степеней некоторых чисел до десятой включительно; эти таблицы можно было применять для отыскания соответствующих корней. Таблицы чисел вида $n^2 + n^3$ применялись при решении задач, которые приводились к кубическому уравнению.

В вавилонских клинописных текстах встречаются различные арифметические задачи. Методы их решения опирались в основном на пропорциональную зависимость и среднее арифметическое. Вавилоняне знали правило суммирования n членов арифметической прогрессии с данным первым и последним членами. Они умели находить сумму n членов геометрической прогрессии, например, 1, 2, 2^2, ..., 2^9. Им было известно правило суммирования ряда натуральных квадратов, высказанное применительно к сумме $1^2 + 2^2 + ... + 10^2$.

В клинописных текстах встречаются задачи, приводящие к системам линейных уравнений, к квадратным уравнениям и уравнениям высших степеней. Методы вычислений, применяемые для решения задач, позволяют судить о том, что их авторы знали законы простейших алгебраических преобразований.

Клинописные тексты свидетельствуют о том, что древним вавилонянам было известно соотношение между сторонами прямоугольного треугольника (теорема Пифагора). Они знали большое множество троек целых «пифагоровых чисел», т. е. таких троек, a, b, c, для которых $a^2+b^2=c^2$: 60, 45, 75; 72, 65, 97; 3456, 3367, 4825 и т. д. Сохранилась таблица, содержащая 15 строк таких чисел. Трудно предположить, что таблица была составлена простым подбором без некоторого общего приема.

При решении некоторых геометрических задач вавилоняне встретились с необходимостью извлечения квадратных корней из неквадратных чисел, т. е. чисел, не равных квадрату натурального числа. Приближенное значение квадратного корня из числа $N=a^2+r$, где a^2 — наибольший целый квадрат, меньший N, находилось по правилу

$$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a}.$$

Разумеется, у вавилонян не было знака для обозначения квадратного корня. У них шла речь о нахождении стороны квадрата, площадь которого известна. Это правило позже неоднократно встречалось у других народов с объяснением, основанным на том, что

$$\left(a+\frac{r}{2a}\right)^2=a^2+r+\left(\frac{r}{2a}\right)^2,$$

а $(r/2a)^2$ — малое число, которым можно пренебречь.

Возникновение понятия натурального числа

О возникновении понятия числа Энгельс говорил следующее: «Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума». (Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— 2-е изд.— Т. 20.— С. 37.) Другими словами, мысль не выдумывает числа, а извлекает их из окружающего нас реального мира. Как она это делает? Энгельс отвечает: «Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех прочих их свойств, кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт, исторического развития. Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления». (Там же.— С. 37.) Количественные отношения действительных вещей, выражаемые числами,— это весьма реальный материал. «Как и все другие науки, математика возникла из практических потребностей людей...» (Там же.— С. 37.)

Понятие натурального числа вырабатывалось очень медленно. Об этом можно судить по тому, как считали племена, еще совсем недавно стоявшие на разных ступенях первобытнообщинного строя. У некоторых из них нет даже названий для чисел, больших двух или трех. У других счет распространялся дальше, но он сравнительно быстро кончался. О большем числе говорили просто «много».

Процесс формирования понятия натурального числа протекал в общих чертах следующим образом. На ранней ступени первобытного общества еще не было отвлеченного понятия числа. Это не означает, что первобытный человек не имел представления о количестве предметов конкретно данной совокупности, например, о количестве людей, участвующих в охоте, о количестве озер, в которых можно ловить рыбу, и т. д. На первой ступени число указывается уже как свойство совокупности предметов, но еще не отделяется от нее как «отвлеченное число», как число, не связанное с конкретными предметами. Здесь числа являются как бы «именованными», относящимися только к определенному роду предметов. У некоторых племен и теперь вообще нет отдельных названий для чисел, например, нет слова «три», хотя они могут сказать «три человека», «три лодки» и т. п.

На второй ступени развития этого понятия кто-то первым (имени его мы не знаем) сказал просто «два». Слово «два» означает количественную характеристику, которая может быть применена к любым предметам. Понятие числа получило самостоятельную жизнь. Теперь для нас это привычно, а между тем это великое чудо. Оно не уступает тому великому чуду, которое описано в знаменитой сказке английского писателя Льюиса Кэрролла «Приключения Алисы в Стране Чудес». Чеширский кот — один из персонажей этой сказки — мог появляться и исчезать по своему желанию. Алиса попросила его не исчезать и не появляться все время так внезапно, а то у нее прямо голова кружится.

«Договорились,— сказал Кот и на этот раз действительно стал исчезать по частям, не спеша: сначала пропал кончик хвоста, а потом постепенно все остальное; наконец осталась только одна улыбка,—

сам Кот исчез, а она еще держалась в воздухе. «Вот это да! — подумала Алиса.— Кот с улыбкой — и то редкость, но уж улыбка без кота — это я прямо не знаю, что такое!» (Кэрролл Льюис. Приключения Алисы в Стране Чудес.— Мн.: Маст. літ., 1980.— С. 106.)

Число без наименования, число без реальных предметов — это все равно, что улыбка без кота. Нас это не удивляет, все привыкли к этому, без этого не было бы и математики. Кстати, Льюис Кэрролл — псевдоним, настоящее имя и фамилия автора — Чарлз Латуидж Доджсон (1832—1898). В 1855—1881 гг. он был профессором Оксфордского университета, который сам окончил в 1854 г. Ему, в частности, принадлежит первое опубликованное доказательство теоремы о совместности системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. (Об этой теореме можно узнать, например, из книги [2] (см. список литературы в конце книги).) Доджсон писал сказки в свободное время, вторая его книга для детей «Зазеркалье» издана в 1871 г.

Возникновение понятия натурального числа вызвано потребностью счета предметов. Сведения о результатах счета первоначально хранили при помощи зарубок на дереве или на костях либо узелков на веревках. Старейшей известной в настоящее время записью числа является запись на кости в виде 55 зарубок, расположенных по 5. Эта кость найдена в Чехословакии в 1937 г. Запись на ней сделана в XXX в. до н. э. Предполагают, что кость служила для записи трофеев доисторических охотников. В Западной Европе даже в прошлом веке пользовались зарубками, обозначающими долги на бирках, раскалывающихся на две половины, одна из которых хранится у должника, а другая — у кредитора. О распространении записей при помощи зарубок свидетельствует выражение «заруби себе на носу». С течением времени для обозначения чисел начали применять различные символы. Сначала числа обозначали черточками на материале, служащем для записей (папирус, глиняные таблички и т. д.). Затем были введены знаки для чисел. Параллельно с развитием письменности понятие натурального числа приобретает все более отвлеченную форму. Все более закрепляется отвлеченное от всякой конкретности понятие числа, воспроизводимое в форме слов в устной речи и в форме обозначения специальными знаками в письменной.

Весьма существенным шагом в развитии понятия натурального числа явилось осознание бесконечности ряда натуральных чисел, т. е. потенциальной возможности его неограниченного продолжения. Четкое представление о бесконечности натурального ряда отражено в трудах античных ученых (III в. до н. э.). В «Началах» Евклида установлена даже бесконечная продолжаемость ряда простых чисел. В сочинении Архимеда «Псаммит» указаны принципы построения названий и обозначений сколь угодно больших чисел, в частности больших, чем «число песчинок в мире».

Одновременно с развитием понятия натурального числа в обиход включаются операции над числами. Операции сложения и вычитания возникают сначала как действия над самими множествами предметов в форме их объединения и отделения части. Можно предположить, что умножение возникло в результате счета равными частями (по два, по три и т. д.), деление — как распределение множества предметов на равные части. В результате многовекового опыта сложилось представление об отвлеченном характере этих действий, о независимости количественного результата действия от природы элементов, составляющих множества. Так, например, складывалось убеждение в том, что три предмета и четыре предмета составляют семь предметов независимо от их природы. После этого начали разрабатывать правила действий, изучать их свойства, создавать методы для решения задач. С этого времени начинается развитие арифметики — науки о числах и действиях над ними. Предметом этой науки оказалась система чисел с их взаимосвязями. Арифметика развивалась как система знаний, имеющая непосредственно прикладное значение. В самом процессе развития арифметики появляется потребность изучения свойств чисел как таковых, исследования сложных закономерностей в их взаимосвязях, обусловленных наличием действий. Намечается детализация понятия натурального числа, выделяются и изучаются классы различных чисел (четных и нечетных, простых и составных и т. д.). Изучение глубоких закономерностей ряда натуральных чисел продолжается до настоящего времени и относится к разделу математики, называемому теорией чисел. Теория чисел изучает свойства целых чисел, рациональных и алгебраических, т. е. чисел, являющихся корнями алгебраических многочленов. Эта теория изучает также свойства произвольных чисел, возникающие из возможности приближения этих чисел числами рациональными.

Несколько слов о терминах «натуральное число», «натуральный ряд». Греческий математик Никомах, живший в I в. н. э., говорил о натуральном, т. е. естественном, ряде чисел. Термин «натуральное число» впервые употребил римский ученый Боэций (ок. 475—525). Аниций Манлий Северин Боэций родился в Риме, учился в Афинах. В книге «Основания арифметики» он изложил на латинском языке арифметику Никомаха, в сочинении по геометрии дал перевод первых трех книг «Начал» Евклида вместе со сведениями по практической геометрии и описанием действий на абаке. (Абак — счетная доска для арифметических вычислений, использовалась в Древней Греции, Риме, затем в Западной Европе до XVIII в. В России аналогом абака явились счеты.) Он переработал и перевел на латинский язык труды Архимеда и Птоломея. Эти работы Боэция имели большое значение для распространения математических знаний в Европе. Он написал трактат в пяти книгах «О музыке». Боэций — один из основоположников средневековой философии, автор ряда философских сочинений. Сочинение «Утешение в философии», пользовавшееся большой популярностью в средние века, он написал в тюрьме. Боэций был государственным деятелем при дворе остготского короля Теодориха Великого. Он был обвинен в государственной измене и казнен. Термин «натуральное число» встречается в рукописях XI в. и более позднего времени. В современном смысле понятие «натуральное число» и последовательное его применение связано с именем французского ученого Даламбера (1717—1783). Это понятие отражено в «Энциклопедии», изданной французскими учеными и писателями в 1751—1780 гг., математический отдел которой до 1757 г. редактировал Даламбер. С этого времени понятие «натуральное число» вошло во всеобщее употребление.

Из истории нуля и единицы

Множество целых чисел содержит число нуль. Следует отметить, что нуль признан числом лишь в XVII в. Для древних греков нуль не был числом. Например, Диофант (III—IV вв.) не признавал нуль за корень уравнения, т. е. за число. Аналогичным образом поступали как арабские, так и первые европейские математики Николай Шюке (ум. ок. 1500), Лука Пачоли (ок. 1445—1517). Первым признал нуль корнем уравнения голландский математик Альбер Жирар (1595—1633). Он дал геометрическое истолкование корней уравнения и установил, что число корней алгебраического уравнения равно его степени. Жирар первым указал на геометрическое значение отрицательных чисел.

Однако до признания нуля числом различные авторы рассматривали операции с нулем. Эти операции предполагали в понятии нуль лишь то, что оно есть «ничто». Например, математик и философ эпохи эллинизма Никомах говорил, что «ничто», сложенное с «ничто», дает «ничто». Индийские математики Брахмагупта (ок. 598—660), Магавира (IX в.), Бхаскара (1114—1178) допускали и рассматривали употребление нуля во всех арифметических действиях. Магавира отмечал, что деление на 0 не есть деление. Бхаскара утверждал, что частное от деления на нуль не изменится, сколько бы мы к нему ни прибавили или сколько бы от него ни отнимали (бесконечно большое).

Итальянский математик Леонардо Пизанский (1180—1240), известный также под именем Фибоначчи, рассматривая корень квадратного уравнения $x=2\pm\sqrt{4-4}$, разъяснял, что если от 4 отнять 4 получится 0; прибавляя и вычитая это значение, он приходил к корню уравнения $x=2$.

Введение координат (в XVII в.) и числовой оси решило окончательно вопрос о признании нуля числом. Оно убедило в том, что положительные, отрицательные числа и нуль имеют равные права называться числами, так как каждое из них определяет точку на числовой оси.

Несколько слов о происхождении слов «нуль» и «цифра». Математики Индии называли знак, обозначающий отсутствие какого-либо разряда в числе, словом «сунья», что значит «пустой» (разряд, место). В переводе на арабский язык получили слово «сифр». Для передачи арабского термина «сифр» Леонардо Пизанский употребил слово *zephirum* (латинское слово *sephyrus* — зефир означало «западный ветер»); другие авторы, сторонники индийской нумерации в Европе, употребляли арабскую форму *cifra*. Из этого слова во Франции произошло слово «шифр» (*chiffre*), а из *zephirum* в Италии — слово *zero*. Поскольку словом *chiffre* позднее во Франции стали обозначать знаки 1, 2, ..., 9, то для обозначения нуля была принята форма *zero*. Наименование «цифра» в смысле нуля употреблялось долго и даже после того, как слово «цифра» получило более широкое значение (таким наименованием пользовались Эйлер в XVIII в. и Гаусс в конце XVIII в.).

Индийцы вначале обозначали нуль точкой. В латинских переводах арабских трактатов XII в. нуль называли и обозначали «кружком» (*circulus*).

Термины *nihil* (ничто), *figura nihili* (знак ничего) появляются в рукописных латинских переводах и обработках арабских трудов в XIII в. Возможно, что уже тогда появляется термин *nullus*, т. е. никакой, откуда происходит наше слово «нуль». Термин *nulla* имеется в рукописи Шюке 1484 г. С начала XVI в. в немецких руководствах слово «цифра» получает современное значение, слово «нуль» входит повсеместно в Германии и в других странах.

Древнегреческие математики и философы называли числом только натуральное число, т. е. целое положительное число, и рассматривали его как множество единиц. Единица для них не была числом. Так, пифагорейцы и философы школы Платона учили, что единица является только зародышем, эмбрионом числа, поскольку она лишена свойства множественности. Последователи Платона также утверждали, что единица не есть число, а только источник чисел. Взгляд на число у Аристотеля был несколько иным. Он определял число как множество, измеренное единицей, а про единицу говорил, что она также есть множество, только очень небольшое. Что же представляет собой единица, древнегреческие ученые определить не могли по той причине, что понятие единицы есть первичное, неопределяемое понятие. Взгляды греческих математиков на единицу существовали долгое время. Римский философ и математик Боэций называл единицу матерью всех остальных чисел. Он утверждал, что единица не есть число, а источник и производитель всех чисел. Этих взглядов придерживались и арабские, и первые европейские математики.

Единицу признали числом впервые лишь в XIV в. Новую точку зрения высказывали последовательно следующие ученые Европы: Николай Орем (ок. 1323—1382), Петр Рамус (1515—1572), Симон Стевин (1548—1620), Джон Валлис (1616—1703). Утверждая, что единица есть число, С. Стевин приводил следующую аргументацию: 1) части имеют ту же природу, что и целое; поэтому если целое есть число, то его часть — единица — также есть число; 2) если из данного числа вычитается то, что не является числом, то число должно оставаться прежним, но если из числа вычесть единицу, число не останется прежним. Значит, нельзя утверждать, что единица не есть число. Д. Валлис считал единицу наименьшим числом.

Утверждение о том, что единица есть число, признавалось не всеми математиками. Новая точка зрения для некоторых ученых не представлялась бесспорной даже в начале XVII в. Однако в XVII в. споры о природе единицы прекратились. Это произошло не в силу ясности решения вопроса, а потому, что интересы математиков переключились на практическое использование чисел. К этому времени в европейской математике появились десятичные дроби и логарифмы, которые открыли новые возможности применения чисел на практике.

Современный взгляд на действительное число и на единицу установил И. Ньютон (1643—1727).

Понятие числа в математике Древней Греции

Математические теории имеют истоки в научных и философских школах Древней Греции. Вклад этих школ в развитие науки настолько существен, что даже в наше время «...теоретическое естествознание, если оно хочет проследить историю возникновения и развития своих теперешних общих положений, вынуждено обращаться к грекам». (Энгельс Ф. Анти-Дюринг.— М.: Политиздат, 1970.— С. 340—341.) Ведущее место среди греческих естественнонаучных школ последовательно занимали: ионийская (VII—VI вв. до н. э.), пифагорейская (VI—V вв. до н. э.), афинская (со второй половины V в. до н. э.). В этих школах разрабатывались также и вопросы математики.

В пифагорейской школе уделялось особое внимание учению о числе, поэтому подробнее расскажем об этой школе.

В школе Пифагора произошло первое построение геометрии как науки. Пифагор Самосский (ок. 580 — ок. 500 гг. до н. э.) — дневнегреческий математик и философ. Он родился на богатом торговом острове Самос, получил хорошее образование. По преданиям, в течение многих лет находился в других странах (Египет, Вавилон, Индия), где ознакомился с научными знаниями, в том числе и математическими. Возвратившись на родину, он в скором времени переехал в Кротон (греческая колония на севере Италии), где организовал свою школу, которая действовала почти тридцать лет. Школа Пифагора, или, как ее еще называют, пифагорейский союз, имела не только научные, но и религиозно-этические и политические цели. Устав пифагорейского союза был достаточно суровым. Каждый, вступающий в него, отказывался от личной собственности (в пользу союза), обязывался не проливать кровь, не употреблять мясной пищи, беречь тайну учения своего учителя. Членам союза запрещалось обучать других за вознаграждение.

О деятельности Пифагора можно судить лишь по упоминаниям других авторов. Его деятельность была крайне многообразной: математика, философия, политика, путешествия, пророчества, спорт (по преданию, Пифагор был чемпионом Олимпийских игр по кулачному бою). До нас дошли и фантастические истории, касающиеся Пифагора (вроде того, что однажды его видели одновременно в двух разных местах, или история о том, что когда однажды он переходил речку, то речка вышла из берегов, восклицая: «Да здравствует Пифагор»).

Согласно учению Пифагора, числа являются мистической сущностью вещей, математические абстракции таинственно руководят миром, устанавливая в нем определенный порядок. Пифагорейцы высказали предположение о том, что все закономерности мира можно выразить с помощью чисел. Числа признавались не просто выражениями закономерного порядка, но и основой материального мира.

Пифагор и его ученики занимались астрономией, гармонией (теорией музыки), геометрией и арифметикой (теорией чисел). В их школе возникло представление о *шарообразности Земли и существовании множества миров*. Пифагор одним из первых считал, что Земля является центром Вселенной, что Солнце, Луна и планеты имеют собственное движение, отличное от суточного движения неподвижных звезд. Учение пифагорейцев о движении Земли можно рассматривать как предысторию гелиоцентрического учения Н. Коперника (1473—1543). В свое время церковь объявила систему Коперника «ложным пифагорейским учением».

Сами пифагорейцы высоко ценили результаты, полученные ими в теории гармонии, ибо они подтверждали их идею, что числа определяют все. Число для пифагорейцев — это собрание единиц (только целое положительное число). Единицы, составляющие число, считались неделимыми и изображались точками, которые располагались в виде правильных геометрических тел. При этом получали ряды «треугольных», «квадратных», «пятиугольных» и других «фигурных» чисел.

«Треугольные» числа изображены на рисунке 17; это числа $1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=$ $=10$, общее выражение для них: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

«Квадратные» числа показаны на рисунке 18: 1, $1+3=4$; $1+3+5=9$, ... , $1+3+5+\ldots(2n-$ $-1)=n^2$. Пифагорейцы определили также «кубические» числа 1, 8, 27, ... Отметим, что наши выражения «квадрат» для числа n^2 и «куб» для числа n^3 являются пережитком пифагорейской терминологии.

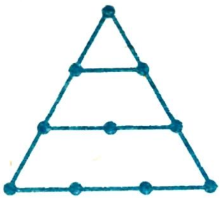


Рис. 17

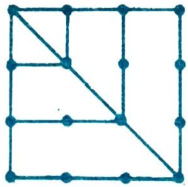


Рис. 18

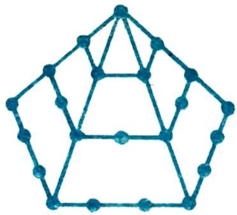


Рис. 19

Пифагорейцы рассматривали «пятиугольные» числа (рис. 19): $1, 1+4=5, 1+4+7=12, 1+4+$ $+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$.

Они определили также «пирамидальные» числа— суммы «треугольных» чисел:

$$1,\quad 1+3=4,\quad 1+3+6=10,\quad \ldots,\quad 1+3+6+\ldots+$$
$$+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}.$$

Пифагорейцы первые обратили внимание на законы делимости чисел. Все числа были разделены на простые и составные. Составные числа, представимые в виде произведения двух сомножителей, называли «плоскими числами» и изображали их прямоугольниками. Составные числа, представимые в виде произведения трех сомножителей, называли «телесными числами», изображали их параллелепипедами. Простые числа, которые нельзя представить в виде произведений, называли «линейными числами». В школе Пифагора было создано учение о четных и нечетных числах, которое с современной точки зрения является теорией делимости на 2. Основной результат учения о четных и нечетных числах состоял в следующем: произведение двух чисел делится на 2 (т. е. четно) тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на 2. Отсюда следует, что любое целое число N можно однозначно представить в виде $N = 2^k N_1$, где N_1 — нечетное число, k — натуральное число или нуль.

Пифагорейцы занимались и некоторыми теоретико-числовыми задачами. К числу их относится задача о нахождении совершенных чисел, т. е. таких, которые равны сумме всех своих делителей, отличных от самого числа. Несколько подробнее о совершенных числах (и дружественных парах чисел) будет рассказано ниже.

В школе Пифагора исследовали неопределенное уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ и нашли бесконечное множество целых троек, удовлетворяющих такому уравнению. Целые решения этого уравнения называют «пифагоровыми тройками», они имеют вид:

$$x = \frac{1}{2}(m^2 - 1),\ y = m,\ z = \frac{1}{2}(m^2 + 1).$$

Ранние пифагорейцы считали, что многие из целых чисел обладали мистическими свойствами. Особенно удивительным представлялось им число 10 — декада, поскольку $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, где 1 — основа всех чисел; 2 выражает линию, 3 — треугольник, 4 — пирамиду. Это рассуждение древних замечательно тем, что числа 2, 3, 4 связываются с размерностью геометрических образов. Две точки определяют прямую линию — одномерный образ; три точки (не лежащие на одной прямой) — треугольник или плоскость — двухмерный образ; четыре точки (не лежащие в одной плоскости) — пирамиду — трехмерный образ. Кроме того, среди чисел, меньших 10, столько же простых, сколько и составных.

Число «семь» в Древней Греции (и Риме) считали «святым» числом. Это число почитали в древности на всем Ближнем Востоке. Древние народы приписывали ему магическое и символическое значение. Так, вавилонская башня имела семь этажей, Рим был построен на семи холмах. По индийскому учению, Будда сидел под смоковницей с семью плодами. В Древней Греции знали о семи чудесах света, о семи мудрецах. Не случайно в неделе семь дней, в радуге — семь цветов, а в музыке — семь нот. Число семь почиталось в Китае и Японии.

Как уже отмечалось, в математических текстах Древнего Вавилона и Древнего Египта нет общего понятия дроби (там рассматривались дроби некоторых специальных видов). Математики Древней Греции начали оперировать с дробями вида m/n, причем умели производить с ними все арифметические действия. В случае вычитания вводилось ограничение — вычитать можно только из большего меньшее. Сложение и вычитание производилось с помощью приведения дробей к общему знаменателю. Дроби умели сокращать, умножать и делить. В «Началах» Евклида дан алгоритм нахождения наименьшего общего кратного, что необходимо для операций над дробями.

Самой большой заслугой пифагорейской школы было открытие существования несоизмеримых отрезков. Первоначально пифагорейцы считали, что все отрезки соизмеримы, т. е. отношение любых двух отрезков можно выразить отношением целых чисел, или рациональным числом. Впоследствии ими было обнаружено, что потребности геометрии не обеспечиваются простыми дробями (рациональными числами). Пифагорейцы были удивлены и обескуражены тем, что длина диагонали квадрата, стороны которого имеют единичную длину, не может быть выражена никаким числом (других чисел, кроме рациональных, они не знали). С современной точки зрения это означает, что корень квадратный из двух (который выражает длину диагонали указанного квадрата, в соответствии с теоремой Пифагора) есть число иррациональное. Данное утверждение имеет следующий геометрический смысл: сторона и диагональ квадрата не имеют общей меры, т. е. никакой отрезок, как бы мал он ни был, не укладывается на стороне и на диагонали по целому числу раз. Другими словами, ни для какой единицы длины, как бы мала она ни была, сторона и диагональ квадрата не являются целыми кратными. Для греков это открытие повлекло за собой значительные трудности.

Открытие несоизмеримости вызвало первый кризис в истории математики. Пифагорейское учение о целочисленной основе всего существующего в мире больше нельзя было признавать истинным. В связи с этим пифагорейцы пытались сохранить свое открытие в тайне и создали легенду о гибели члена их союза Гиппаса Метапонтского, осмелившегося разгласить тайну. Согласно легенде он погиб во время кораблекрушения, будучи наказан богами за выдачу секрета.

Чтобы выйти из кризиса, пифагорейцы начали строить алгебру на основе геометрии — так называемую геометрическую алгебру.

Простые числа и их распределение в натуральном ряду

Уже отмечалось, что в школе Пифагора уделяли большое внимание изучению свойств чисел; здесь положено начало учению о простых числах.

11 Зак. 2564

Пифагорейцы считали, что «все есть число», что числа управляют миром. От идеалистического звучания эту пифагорейскую мудрость избавил немецкий поэт и мыслитель Иоганн Вольфганг Гёте (1749—1832), который говорил: «Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир». (Левитин К. Геометрическая рапсодия.— М.: Знание, 1976.— С. 94.)

В дальнейшем простые числа изучали Эратосфен и Евклид. Эратосфен предложил способ получения простых чисел (решето Эратосфена); Евклид доказал, что множество простых чисел является бесконечным. Он, в частности, интересовался простыми числами специального вида:

$$M_p = 2^p - 1, \tag{1}$$

где p — простое число. Если начать вычислять по этой формуле, то увидим, что не все числа оказываются простыми. Например, при $p = 2, 3, 5, 7$ получаем соответственно простые числа: $M_2 = 2^2 - 1 = 3$, $M_3 = 2^3 - 1 = 7$, $M_5 = 2^5 - 1 = 31$, $M_7 = 2^7 - 1 = 127$, а при $p = 11$ — составное число $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Общий способ нахождения больших простых чисел вида (1) состоит в проверке всех чисел M_p при различных простых числах p. Эти числа весьма быстро увеличиваются, и столь же стремительно возрастают затраты труда на их нахождение.

В средние века интерес к числам был велик, так как с ними вообще, и с простыми числами в частности, было связано много суеверий. Однако в это время существенных достижений в теории простых чисел не было. В течение нескольких столетий шла погоня за простыми числами: Многие математики считали честью для себя открытие самого большого из известных простых чисел.

Простые числа вида (1) называют числами Мерсенна. Свое название они получили в честь французского ученого Марена Мерсенна (1588—1648). Мерсенн родился в Уазе (теперь департамент Мен). В 1604—1609 годах учился в иезуитском коллеже в Ла Флеш, где подружился с Рене Декартом (1596—1650), будущим знаменитым ученым. Преподавал философию и теологию в монастырях ордена миноритов. Он интересовался физико-математическими науками, философией, музыкой. Обосновал метод экспериментального исследования в точном естествознании. Его физические исследования посвящены акустике, изучению движения жидкостей и законов колебания маятника. В 1636 г. он определил скорость звука в воздухе, предложил схему зеркального телескопа. Изучал колебания струн, установил зависимость высоты тона звука от частоты колебаний. Мерсенн сыграл важную роль в распространении новых научных знаний. Он организовал кружок ученых в Париже, участники которого регулярно проводили свои заседания. Из этого кружка ученых организовалась Парижская академия наук (1666). Мерсенн вел обширную переписку с известными учеными того времени — Р. Декартом, Х. Гюйгенсом, Б. Паскалем, Э. Торричелли, П. Ферма и др. В своих письмах он информировал о новых научных результатах других ученых, пересказывая и комментируя их работы. Так, в 1645 г. Мерсенн познакомил французских ученых с опытом Торричелли, доказывающим наличие атмосферного давления. Он пропагандировал учение Галилея во Франции. Мерсенн использовал подстановки из n символов. В одной из его рукописей выписаны все 40 320 перестановок из 8 различных символов, а также 720 перестановок из 6 нот. Мерсенн изучал простые и совершенные числа. Результаты его исследований в области этих чисел изложены в сочинении «Физико-математические размышления» (Париж, 1644).

К середине XVIII в. было известно семь простых чисел Мерсенна, соответствующих значениям $p=2$, $p=3$, $p=5$, $p=7$, $p=13$, $p=17$, $p=19$. Леонард Эйлер (1707—1783) доказал, что числа $2^{17}-1$ и $2^{19}-1$ являются простыми. В 1750 г. Эйлер нашел восьмое простое число Мерсенна, соответствующее значению $p=31$. Это число оставалось самым большим среди известных простых чисел более ста лет. В 1883 г. русский математик-самоучка Иван Михеевич Первушин (1827—1900) вычислил новое простое число вида (1) при $p=61$. Вот это число: $M_{61}=2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$. И. М. Первушин был сельским священником в Пермской губернии. У себя на квартире в селе он открыл бесплатную школу для крестьянских детей. Издавал рукописный журнал, в котором призывал интеллигенцию к широкой общественной деятельности, к обучению крестьян, к борьбе за просвещение. Его научные исследования относятся к теории чисел. В 1877—1878 гг. представил в Петербургскую академию наук две работы, в которых им доказано, что: число $2^{2^{12}}+1$ делится на простое число $7\cdot2^{14}+1=114\,689$, число $2^{2^{23}}+1$ делится на число $5\cdot2^{25}+1=$ $=167\,772\,161$. Он составил таблицы простых чисел до $10\,000\,000$, их разностей и сумм. На Математический конгресс в Чикаго (1893) представил работу «О наилучшей проверке арифметических действий над огромными числами при посредстве делителей: $10^3-2=998$, $10^4-2=9998$». Это было единственное русское сообщение на конгрессе. Оно опубликовано в трудах I Международного математического конгресса (1897).

Все указанные 9 простых чисел Мерсенна были вычислены с помощью только карандаша и бумаги. Для вычисления следующих простых чисел вида (1) уже использовались механические настольные счетные машины. Следующие простые числа Мерсенна получены по формуле (1) при $p=89$, $p=107$, $p=127$. Отметим, что число M_{127} имеет 39 цифр. Появление вычислительных машин с электрическим приводом позволило продолжать поиски новых простых чисел по формуле (1) (вычисления выполнены до $p=257$). Результаты этих поисков были неутешительными, среди них не оказалось новых простых чисел Мерсенна.

Затем задача нахождения новых простых чисел Мерсенна была переложена на ЭВМ. С помощью ЭВМ было установлено, что число вида (1) является простым при $p=521$, $p=607$, $p=1279$, $p=2203$, $p=2281$, $p=3217$, $p=4253$, $p=4423$, $p=9689$, $p=9941$.

В 1963 г. было найдено 23-е простое число Мерсенна — $2^{11213}-1$. Это число содержит 3376 цифр и полностью приведено в книге М. Гарднера «Математические новеллы» (1974 г., с. 349). В 1971 г. найдено 24-е число $2^{19937}-1$, в 1978 г.— 25-е число $2^{21701}-1$, в 1979 г.— 26-е число $2^{23209}-1$ и 27-е число $2^{44497}-1$. 27-е простое число Мерсенна содержит 13 395 цифр. В 1978—1983 гг. найдено четыре новых простых числа Мерсенна. Последнее из них $2^{132049}-1$ имеет 39 571 цифру.

Простые числа можно было получить и по формуле:

$$F_n=2^{2^n}+1. \tag{2}$$

Эти числа называют числами Ферма. Они названы в честь французского юриста Пьера Ферма, прославившегося выдающимися математическими работами. Ферма был уверен в том, что все числа вида (2) являются простыми. Он рассматривал следующие пять чисел: $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$, $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$, $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$, $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$, $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537$. Эти числа действительно являются простыми, но уже следующее число Ферма $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$ оказывается составным. На это впервые обратил внимание Эйлер.

Интерес к числам вида (2) возрос в связи с решением Гауссом задачи о построении правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки. Предпринимались усиленные попытки найти новые простые числа Ферма (вручную и с помощью ЭВМ). Однако эти попытки оказались безуспешными — ни одного нового простого числа Ферма не было найдено. Некоторые математики склонны считать, что других таких простых чисел нет.

При рассмотрении все больших и больших натуральных чисел простые числа встречаются все реже. Для иллюстрации этого утверждения отметим, что всего имеется 168 простых чисел между 1 и 1000, 135 — между 1000 и 2000, 127 — между 2000 и 3000, 120 — между 3000 и 4000, 119 — между 4000 и 5000. Тем не менее простых чисел бесконечное множество.

В течение двух с лишним тысячелетий оставалось, однако, неизвестным, насколько часто встречаются простые числа среди натуральных. Только в конце XVIII в. была серьезно поставлена проблема определения функции $\pi(x)$, выражающей число простых чисел от 2 до x. Французский математик Адриен Мари Лежандр (1752—1833) для указанной функции получил первую приближенную формулу

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x},$$

где $\ln x$ — натуральный логарифм x, т. е. $\ln x = \log_e x$ ($e = 2{,}718...$). Независимо от Лежандра эмпирическую приближенную формулу для $\pi(x)$ вывел и Гаусс. Но доказательств этих формул они не предложили.

Первые теоретические результаты, устанавливающие связь функции $\pi(x)$ с отношением $x/\ln x$, принадлежат великому русскому математику Пафнутию Львовичу Чебышеву. Чебышев доказал, что функция $\pi(x)$ незначительно уклоняется от $\int\limits_2^x \frac{dt}{t}$. Из результатов Чебышева следовало, что для $n > 3$ между n и $2n-2$ всегда имеется простое число. Эти результаты Чебышева произвели громадное впечатление на его современников. Так, выдающийся английский математик Д. Сильвестр (1814—1897) назвал Чебышева «победителем простых чисел». Знаменитый немецкий математик Э. Ландау (1877—1938) писал: «Первый после Евклида, кто пошел правильным путем для решения проблемы о простых числах и достиг важных результатов, был Чебышев». (Михелович Ш. Х. Из истории теории чисел.— М.: Знание, 1970.— С. 11.) Замечательными работами Чебышева по теории чисел начинается Петербургская школа теории чисел. Выдающимися представителями этой школы были А. Н. Коркин (1837—1908), Е. И. Золотарев (1847—1878), А. А. Марков (1856—1922), Г. Ф. Вороной (1868—1908). Эти ученые нашли новые методы и направления в теории чисел. Коркин и Золотарев выполнили ряд исследований, касающихся квадратичных форм. Труды Маркова имеют важное значение для решения задачи о приближении действительного числа рациональной дробью. Вороной своими работами стимулировал развитие аналитической теории чисел.

Совершенные числа. Дружественные пары чисел

Совершенным числом называют натуральное число, равное сумме всех его собственных делителей, т. е. делителей, отличных от самого числа. Так, совершенными числами являются числа 6 и 28, ибо

$$6 = 1 + 2 + 3, \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Знаменитый греческий философ и математик Никомах Герасский, живший в I в., отмечал, что совершенные числа красивы, а красивые вещи редки и немногочисленны. Он не знал, сколько имеется совершенных чисел. Не знаем этого и мы. До настоящего времени нет ответов на два важных вопроса: существует ли наибольшее четное совершенное число, существует ли нечетное совершенное число? До сегодняшнего дня не обнаружено ни одного нечетного совершенного числа, хотя и не доказано, что такого числа не существует.

Пара натуральных чисел называется **дружественной,** если каждое из них равно сумме всех собственных делителей другого. Например, дружественную пару образуют числа 220 и 284, так как число 220 имеет делители 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110, а число 284 — делители 1, 2, 4, 71, 142 и выполняются следующие равенства:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + \\ + 110 = 284$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Все известные дружественные пары состоят либо из двух четных чисел, либо из двух нечетных. До сих пор не обнаружено дружественной смешанной пары, но вместе с тем и не доказано, что такой пары не существует. Неизвестно также, конечно или бесконечно число дружественных пар.

Приведем краткие сведения из интересной истории совершенных чисел и дружественных пар чисел.

Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число 6. Этому числу уделяли много внимания математики, философы, богословы. В библейских преданиях утверждается, что мир был создан в шесть дней; ведь более совершенного числа среди совершенных чисел, чем 6, нет, так как оно первое из них. Следующим совершенным числом, известным древним грекам до Евклида, было число 28. Евклид сделал первый важный шаг в построении теории совершенных чисел. Он доказал, что всякое число, которое может быть представлено в виде произведения множителей 2^{p-1} и 2^p-1, где 2^p-1 простое число, является совершенным числом. Отметим, что для этого необходимо, чтобы p было простым, хотя далеко не для всякого простого числа p число 2^p-1 также является простым.

Доказательство Евклида состоит в следующем. Пусть у числа $2^{p-1}(2^p-1)$ множитель в скобках — простое число, тогда собственными делителями этого числа будут $1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2^{p-1},\ (2^p-1),\ 2(2^p-1),\ 4(2^p-1),\ \ldots,\ 2^{p-2}(2^p-1)$.

Заметим, что $(1+2+4+8+\ldots+2^{p-1})=2^p-1$. Действительно, сумма в левой части представляет собой сумму членов геометрической прогрессии $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}$, для которой $a=1$, $q=2$, $n=p$. По известной формуле $S_n=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ имеем $S_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^p-1$.

Составим сумму всех делителей числа $2^{p-1}(2^p-1)$ и вычислим ее:

$$(1+2+4+8+\ldots+2^{p-1})+(1+2+4+8+\ldots+ \\ +2^{p-2})(2^p-1)=(2^p-1)+(2^{p-1}-1)(2^p-1)= \\ =(2^p-1)2^{p-1}.$$

Поскольку сумма всех собственных делителей числа равна самому числу, то $2^{p-1}(2^p-1)$ является совершенным числом.

Из формулы $2^{p-1}(2^p-1)$ при $p=2$ и $p=3$ соответственно получаем: $2^{2-1}(2^2-1)=2\cdot3=6$, $2^{3-1}(2^3-1)=4\cdot7=28$. С помощью этой формулы Евклид нашел еще два совершенных числа: третье — при $p=5$ и четвертое — при $p=7$. Вот эти числа: $2^{5-1}(2^5-1)=16\cdot31=496$, $2^{7-1}(2^7-1)=64\cdot127=$ $=8128$.

В течение почти двух тысяч лет люди знали только четыре совершенных числа. Неизвестно было, существуют ли другие совершенные числа, которые можно представить в виде $2^{p-1}(2^p-1)$, и возможны ли совершенные числа, не удовлетворяющие этой формуле. Неразрешимая загадка совершенных чисел, бессилие разума перед их тайной привели к признанию божественности этих удивительных чисел. Церковь учила, что для спасения души достаточно изучать совершенные числа; тому, кто найдет новое божественное совершенное число, уготовано вечное блаженство. Но даже надежда на такую награду не смогла помочь математикам средневековья. Лишь в XV в. было обнаружено пятое совершенное число. Им оказалось число 33 550 336, его можно получить по формуле Евклида при $p=13$.

Через двести лет усиленными поисками новых совершенных чисел занялся французский физик, математик и богослов Марен Мерсенн. Он утверждал, что следующие шесть совершенных чисел должны иметь евклидовскую форму со значениями p, равными 17, 19, 31, 67, 127, 257. Долгое время оставалось неизвестным, прав был Мерсенн или нет. Оказалось, что не все утверждения Мерсенна были верны. Он правильно предсказал значения $p=17$, $p=19$, $p=31$, $p=127$. Числа, полученные по формуле Евклида $2^{p-1}(2^p-1)$ при $p=67$ и $p=257$, вопреки Мерсенну, не являются совершенными. Мерсенн «пропустил» совершенные числа со значениями $p=61$, $p=89$, $p=107$. Все это было обнаружено позже.

Л. Эйлер сумел найти новую теорему о таинственных и загадочных совершенных числах: все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Вопрос о том, существуют ли нечетные совершенные числа и каков их вид, остается открытым до нашего времени. И. М. Первушин нашел девятое совершенное число — $2\,305\,843\,009\,213\,693\,951 \cdot 2^{60}$, которое содержит тридцать семь цифр. Он совершил при этом настоящий вычислительный подвиг, так как считал без всяких вычислительных средств. Мерсенн в свое время заметил, что вечности не хватит для проверки простоты числа, имеющего 15—20 знаков (простое число Первушина имеет 19 знаков). Последующие совершенные числа находили с помощью вычислительных устройств, включая ЭВМ. В настоящее время известно 23 совершенных числа; последние пять чисел получаются по формуле Евклида соответственно при $p=4253$, $p=4423$, $p=9689$, $p=9941$ и $p=11\,213$. Число $2^{4252}(2^{4253}-1)$ имеет 2561 знак, а число $2^{11212}(2^{11213}-1)$ — 6751 знак.

Совершенные числа обладают рядом таинственных и вместе с тем замечательных свойств. Все эти числа являются «треугольными» (о таких числах говорилось выше). Каждое совершенное число есть сумма вида $1+2+3+\ldots+n$ (см. рис. 17). Далее, любое совершенное число, кроме 6, есть частичная сумма ряда из кубов нечетных чисел, т. е. равно $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3$. Сумма обратных значений всех делителей совершенного числа, включая и само число, всегда равна 2. Например, для числа 28 имеем:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2.$$

Дружественные пары чисел являются обобщением совершенных чисел. Наименьшая дружественная пара чисел 220 и 284 была известна древним грекам. В 1636 г. Пьер Ферма указал новую дружественную пару чисел: 17 296 и 18 146. Рене Декарт нашел третью дружественную пару чисел: 9 363 584 и 9 437 056. Ферма и Декарт независимо друг от друга установили правило образования дружественных пар чисел. Леонард Эйлер опубликовал список 64 дружественных пар. Позже было обнаружено, что в двух случаях он ошибся. В 1830 г. Лежандр нашел еще одну дружественную пару чисел. В 1867 г. шестнадцатилетний итальянец Б. И. Паганини удивил математический мир своим сообщением о том, что числа 1184 и 1210 образуют дружественную пару. Это вторая по величине дружественная пара, однако ее не заметили ученые, интересовавшиеся данным вопросом.

В настоящее время известно более 600 дружественных пар чисел, большинство из них найдено с помощью ЭВМ. Многие числа дружественных пар состоят более чем из 30 цифр.

Приведем некоторые примеры дружественных пар чисел: 2620 и 2924, 5020 и 5564, 6232 и 6363, 10 744 и 10 856, 12 285 и 14 595, 63 020 и 76 084, 66 928 и 66 992, 67 095 и 71 145, 69 615 и 87 633.

Первое появление отрицательных чисел

Отрицательные числа впервые появились в математике Древнего Китая во II в. до н. э. Они встречаются в сочинении «Математика в девяти книгах». В одной из этих книг речь идет о системах линейных алгебраических уравнений. Здесь рассматриваются конкретные системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных.

Отрицательные числа применял в III в. н. э. древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действий над ними. В VII в. н. э. эти числа изучали индийские математики, которые сравнивали их с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VIII в. н. э. было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения — положительное и отрицательное.

Приведем пример решения системы линейных алгебраических уравнений, при преобразовании которой появляются отрицательные коэффициенты. В те времена предлагалась следующая задача: «2 снопам высокого урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам низкого урожая не хватает до 1 доу (единица измерения зерна) соответственно по 1 снопу среднего урожая, низкого урожая, высокого урожая. Спрашивается: сколько зерна получили из каждого снопа высокого, среднего и низкого урожая?» При соответствующих обозначениях из условия задачи получаем систему трех линейных уравнений с тремя переменными:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=1,\\ 3y+z&=1,\\ x+4z&=1,\end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} 2x+y+0\cdot z&=1,\\ 0\cdot x+3y+z&=1,\\ x+0\cdot y+4z&=1.\end{aligned}\right\}$$

Составим таблицу из коэффициентов и свободных членов уравнений этой системы. Коэффициенты и свободный член первого уравнения запишем в правом столбце, второго уравнения — в среднем, третьего — в первом столбце; в результате получим таблицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эту таблицу теперь называют матрицей системы уравнений. Древнекитайский математик матрицу не записывал: он располагал коэффициенты и свободные члены (соответствующее число палочек) на счетной доске (в том же порядке, в котором расположены числа в матрице). Над коэффициентами и свободными членами уравнений производились следующие действия: 1) числа первого (левого) столбца умножались на 2; 2) из чисел полученного первого столбца вычитались числа третьего столбца; 3) числа нового первого столбца умножались на 3; 4) к полученным произведениям прибавлялись числа второго столбца.

Указанные действия соответствуют следующим преобразованиям данной матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 24 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 25 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, здесь производились следующие операции над отрицательными числами: $0-1=-1$, $(-1)\cdot 3=-3$, $-3+3=0$.

Последняя матрица соответствует системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l}2x+y=1,\\ 3y+z=1,\\ 25z=4.\end{array}\right\}$$

Из этой простейшей системы находили значения неизвестных:

$$z=\frac{4}{25},\ y=\frac{1-z}{3}=\frac{1-4/25}{3}=$$
$$=\frac{1}{25}\cdot\frac{25\cdot 1-4\cdot 1}{3}=\frac{7}{25},$$
$$x=\frac{1-y}{2}=\frac{1-7/25}{2}=\frac{1}{25}\cdot\frac{25\cdot 1-7\cdot 1}{2}=\frac{9}{25}.$$

С необходимостью вычитания меньшего числа из большего или вычитания некоторого числа из «ничего» (т. е. нуля) встречались при решении многих других задач, приводящих к системам линейных уравнений. Вследствие этого для новых количеств — отрицательных чисел — были определены правила действий. Правило действий над отрицательными числами называли правилом «чжен-фу». В современных обозначениях первая часть правила, описывающая вычитание, определялась следующими соотношениями:

$$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b),\ (\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b),$$
$$0-(+b)=-b,\ 0-(-b)=b.$$

Отметим, что знака 0 для нуля у древних китайцев не было. В этих случаях на счетной доске оставляли пустое место. Вторая часть правила дана для сложения:

$$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b),\ (\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b),$$
$$0+(+b)=b,\ 0+(-b)=-b.$$

Само правило формулировалось следующим образом. «Правило «чжен-фу»: если одинакового названия, то вычитается, если разного названия, то прибавляется; если положительное без пары, то [становится] отрицательным, если отрицательное без пары, то [становится] положительным. Если разного названия, то вычитается, если одинакового названия, то прибавляется, если положительное без пары, то [становится] положительным, если отрицательное без пары, то [становится] отрицательным». (Березкина Э. И. Математика Древнего Китая.—М.: Наука, 1980.— С. 194.) Название правила «чжен-фу» объясняется так: положительные коэффициенты обозначались иероглифом чжен, который означает «правильный», «справедливый», а отрицательные — иероглифом фу, т. е. «долг», «налог». Указанные иероглифы дали название правилу действий над отрицательными числами.

Некоторые задачи приводили к системам с отрицательными коэффициентами, например, к таким системам:

$$\left.\begin{array}{l}5x-11=7y,\\7x-25=5y\end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l}6x-18=10y;\\15y-5=5x\end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{l}3x+6=10y,\\5y+1=\ \ 2x\end{array}\right\}.$$

Этим системам соответствуют матрицы:

$$\begin{bmatrix}7&5\\-5&-7\\25&11\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-5&6\\15&-10\\5&18\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-2&3\\5&-10\\-1&-6\end{bmatrix}.$$

Древнекитайские математики располагали коэффициенты и свободные члены уравнений в соответствующем порядке на счетной доске. Положительное число изображалось надлежащим числом красных палочек, а отрицательное — определенным числом черных палочек. Над отрицательными числами производились следующие действия: вычитание, сложение и умножение, а в некоторых случаях и деление.

Отрицательные числа были хорошо освоены древнекитайскими математиками, они постепенно вводились в обращение. Эти числа получили толкование долга, недостачи, нехватки в отличие от положительных, свидетельствующих о доходе, избытке, достатке и т. п. Хотя с отрицательными числами довольно часто и свободно оперировали, отрицательных корней уравнений в Древнем Китае не рассматривали.

Аналогичным образом отрицательные числа были введены математиками Индии. Индийцы пришли к отрицательным числам, стремясь единообразно выразить алгоритм решения квадратного уравнения. Они называли положительные числа «дхана» или «сва» (имущество), а отрицательные — «рина» или «кшайа» (долг). В том же значении эти термины встречаются позже в странах ислама и в Европе (например, *debitum* у Леонардо Пизанского). Индийские математики, начиная с Брахмагупты (VII в. н. э.), систематически использовали отрицательные числа.

В математику Европы отрицательные числа вошли в XVI в. Сначала их рассматривали как «придуманные» числа, меньшие нуля, которые столь же удобны, как и иррациональные. Понятие отрицательного числа было узаконено Декартом в XVII в.

Возникновение и развитие понятия комплексного числа

Комплексные числа появились в процессе развития алгебры. Их возникновение обусловлено одной вполне конкретной математической задачей — решением алгебраических уравнений. Уже при решении квадратных уравнений математики встретились с квадратным корнем из отрицательных чисел. Решая квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, где p и q — действительные числа, по общеизвестной формуле, иногда приходили к выражениям вида $a+\sqrt{-b}$ где $b>0$. Но никто не знал, что такое корень квадратный из отрицательного числа; не было известно, какой смысл придать такому выражению. Из этого затруднения нашли простой выход — объявили, что выражение $\sqrt{-b}$, где $b>0$, не имеет смысла. Каждый раз удавалось доказать, что квадратное уравнение при отрицательном дискриминанте не имеет корней.

Когда занялись решением алгебраических уравнений третьей степени (кубических уравнений), то оказалось уже невозможным просто отмахнуться от квадратных корней из отрицательных чисел.

Как же обстояло дело с введением понятия комплексного числа? Обстоятельства здесь сложились следующим образом. В первой половине XVI в. несколько итальянских математиков научились решать кубические уравнения. Словесная формулировка правила для нахождения корня уравнения $x^3=ax+b$ соответствовала нашей формуле:

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+$$
$$+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Эта формула приводила к отсутствию корней в случае, когда $\left(\frac{b}{2}\right)^2<\left(\frac{a}{3}\right)^3$; подкоренное выражение для квадратного корня оказывалось отрицательным. Например, уравнение $x^3=15x+4$ имеет корень

$x=4$, но по указанной формуле получаем $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Каким же образом из этой формулы извлечь число 4? Как объяснить это удивительное обстоятельство?

Чтобы ответить на подобные вопросы, математикам XVI — XVII вв. необходимо было научиться обращаться с выражениями вида $a+\sqrt{-b}$, где $b > 0$. В частности, необходимо было изучить вопрос, как извлечь корни кубические из таких выражений.

Сначала математики очень неохотно приступали к изучению этих выражений. Они называли выражения $a+\sqrt{-b}$, где $b>0$, «мнимыми» числами, «потайными решениями» уравнений. Считалось очевидным, что такие выражения не имеют реального содержания. Положение осложнялось тем, что к тому времени еще не успели как следует освоить и отрицательные числа. Как правило, отрицательных чисел старались избегать. Об этом свидетельствует, например, тот факт, что кубические уравнения, не содержащие члена с квадратом переменной, рассматривали в следующих трех видах:

$$x^3+ax=b, \qquad x^3+b=ax, \qquad x^3=ax+b,$$

где a и b — действительные положительные числа (а не в виде $x^3+px+q=0$, где p и q — действительные числа, как положительные, так и отрицательные). Поскольку коэффициенты уравнения считались положительными, то необходимо было исследовать отдельно три указанных вида кубических уравнений. Даже в более позднее время отрицательные числа называли «ложными» (так как они меньше, чем ничто; т. е. меньше нуля). При рассмотрении выражения $a+\sqrt{-b}$, $(b>0)$ прибавилась новая трудность — нужно извлекать квадратный корень из «ложного» числа. Получить что-нибудь реальное при такой операции не рассчитывали. Результаты этих операций считали бесполезными и старались их не применять.

Позже некоторые математики заинтересовались изучением мнимых чисел. Первым из них был итальянский ученый Р. Бомбелли. Один из величайших ученых мира Г. В. Лейбниц с восхищением относился к мнимым числам, но и он называл эти числа «выродком мира идей», «почти двойственным существом, находящимся между бытием и небытием». Говорят, что он завещал на своей могиле изобразить знак $\sqrt{-1}$ как символ перехода от «мира реального» в «мир потусторонний».

И вот эти «мнимые», «воображаемые», «невозможные» числа все настойчивее стучались в дверь математической науки. В XVII—XVIII вв. их применяли для разного рода вычислений. Правда, недоверие к мнимым числам было столь велико, что иногда результаты, полученные с их помощью, проверялись другими способами.

На выражения вида $a+\sqrt{-b}$, где $b>0$, впервые обратил внимание итальянский ученый Джироламо Кардано (1501—1576). Он был одним из тех математиков, которые открыли способы решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней. В 1545 г. вышла его книга «Великое искусство или о правилах алгебры», посвященная решению указанных уравнений. В книге уделяется внимание и квадратным уравнениям. Он обращает внимание на то, что при нахождении корней квадратного уравнения в некоторых случаях приходят к квадратному корню из отрицательного числа. Кардано писал: «Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она дает 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем 40,— как я объяснял это тебе в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется *m*: 15, если взять от этого *R* и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут: 5*p* : *Rm* : 15 и 5*m* : *Rm* : 15". (Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Просвещение, 1976.— С. 65—66.) Поясним использованные здесь обозначения: *m* — минус, *p* — плюс, *R* — корень квадратный из числа, двоеточием отделялся знак действия от числа. В этом отрывке из книги Кардано идет речь о задаче, которая приводит, например, к уравнению $(10-x)x=40$, или $x^2-10x+40=0$. Решая это уравнение по известному правилу, находим $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_2=5-\sqrt{-15}$ (или $x_1=5+i\sqrt{15}$, $x_2=5-i\sqrt{15}$, где $i=\sqrt{-1}$). Очевидно, $x_1+x_2=10$, т. е. x_1, x_2 — две части числа 10. Кардано утверждает, что $x_1x_2=40$, т. е. $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$. Чтобы получить этот результат, необходимо принять $-\sqrt{-15}\sqrt{-15}=15$ (впоследствии был введен символ $i=\sqrt{-1}$, откуда $i^2=-1$, $-\sqrt{-15}\sqrt{-15}=-\sqrt{15}\sqrt{-1}\sqrt{15}\sqrt{-1}=-15i^2=15$). Решения вида $a\pm\sqrt{-b}$ $(b>0)$ Кардано называл «чисто отрицательными», или «софистически отрицательными». Он рассматривал эти решения как курьез и не использовал их в дальнейшем.

Пользу мнимых величин первым оценил итальянский математик и инженер-гидравлик Бомбелли (ок. 1526—1573). Рафаэль Бомбелли родился в Болонье. Изучал математику в Болонском университете. Его научные исследования относились к алгебре и геометрии. Он построил полную теорию алгебраических уравнений третьей степени, выяснил взаимозависимости решений кубического уравнения и знаменитых задач древности об удвоении куба и трисекции угла. Бомбелли усовершенствовал правила действий над относительными числами, начал применять скобки, внес некоторые усовершенствования в алгебраическую символику. Для обозначения неизвестной величины он надписывал над ее числовым коэффициентом показатель степени, стоящий над небольшой дугой. Например, уравнение $8 = 4x^2 + 4x$ он записывал в виде 8 *eguale a* $\overset{\overset{2}{\smile}}{4} \cdot p \cdot \overset{\overset{1}{\smile}}{4}$. В данной записи итальянское слово *eguale* означает «равно», а p — первая буква слова più (плюс). Эти обозначения оказали влияние на алгебраическую символику нидерландского ученого С. Стевина, который ввел десятичные дроби. Сочинение Бомбелли «Геометрия» было опубликовано только в 1929 г. В нем квадратные и кубические уравнения систематически применялись к задачам планиметрии. Бомбелли одним из первых в Европе перевел «Арифметику» Диофанта. Следуя его традициям, Бомбелли аксиоматически ввел комплексные числа. Он является предшественником французского ученого Декарта в «исчислении» отрезков. Алгебраические идеи Бомбелли оказали влияние на знаменитого немецкого ученого В. Г. Лейбница. Бомбелли значительно опередил современную ему математику.

В 1560 г. Бомбелли написал сочинение «Алгебра», которое было опубликовано в 1572 г. С помощью мнимых величин он объяснил, как получить действительные решения кубического уравнения в неприводимом случае. Рассматривая кубическое уравнение $x^3 = ax + b$ в случае, когда $(b/2)^2 < (a/3)^3$, Бомбелли отмечал, что разность $(b/2)^2-(a/3)^3$ по извлечении квадратного корня «не может быть названа ни положительной, ни отрицательной». Он писал: «Я нашел другой род связанных кубических корней, значительно отличающийся от других, возникающий при решении уравнений вида куб равен корням и числу, когда куб трети корней больше квадрата половины числа..., этого рода квадратные корни, в своём алгоритме, подчиняются правилам, отличным от тех, которым подчиняются другие корни, и носят особые названия; ...разность квадрата половины числа и куба трети корней [по извлечении квадратного корня] не может быть названа ни положительной, ни отрицательной, поэтому я буду называть ее плюс от минуса, ... , когда она должна прибавляться, а в тех случаях, когда она должна отниматься, я буду называть ее минус от минуса...; корни этого рода покажутся многим скорее софистическими, чем имеющими действительное значение; такого мнения держался я до тех пор, пока не нашел доказательства на линиях». (Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Просвещение, 1976.— С. 66.)

Приведем пояснения к этому тексту. Бомбелли отмечает, что он нашел новые корни кубического уравнения (т. е. корни кубические из выражений $a\pm\sqrt{-b}$, где $b>0$), отличные от других корней, известных (т. е. корней кубических из выражений $a\pm\sqrt{b}$, $b>0$). Эти корни найдены при решении уравнений вида $x^3=ax+b$, при условии $(a/3)^3>$ $>(b/2)^2$. В этом случае разность $(b/2)^2-(a/3)^3$ является отрицательной, поэтому корень квадратный из нее не может быть ни положительным, ни отрицательным. Бомбелли предлагает названия для такой величины: плюс от минуса (più di meno), когда ее прибавляют, и минус от минуса (meno di meno), когда ее вычитают. Присоединение к числу названий «минус от минуса» равносильно умножению на $-i$, а названия «плюс от минуса» — умножению на $+i$. Таким образом, у Бомбелли più di meno R. q. 3 означает $\sqrt{-3}=i\sqrt{3}$, a meno di meno R. q. 5 означает $-\sqrt{-5}=-i\sqrt{5}$.

Далее в книге Бомбелли приводятся правила умножения мнимых и действительных чисел. Эти правила даны в словесной формулировке, в современных обозначениях они записываются так:

$$(+1)(+i)=+i,\quad (-1)(+i)=-i,\quad (+1)(-i)=-i,$$
$$(-1)(-i)=+i,\ (+i)(+i)=-1,\ (+i)(-i)=1,$$
$$(-i)(-i)=-1.\ (-i)(+i)=1.$$

Например, последнее правило имело такую формулировку: «Минус от минуса на плюс от минуса дает плюс». Указанными правилами Бомбелли заложил первые камни фундамента теории комплексных чисел. Он привел ряд примеров на действия над комплексными числами: $8i+(-5i)=3i$, $\sqrt[3]{3+i\sqrt{10}}\times\sqrt[3]{3-i\sqrt{10}}=\sqrt[3]{19}$ и т. п.

Бомбелли обнаружил, что кубические корни из двух комплексно сопряженных чисел являются комплексно сопряженными числами. Этим он воспользовался для исследования неприводимого случая $(b/2)^2<(a/3)^3$ при решении кубического уравнения $x^3=ax+b$. В этом случае кубическое уравнение имеет действительные решения, но выражаются они через квадратные корни из отрицательных чисел.

Уже вскоре после появления комплексных чисел в работах Бомбелли некоторые ученые предприняли попытку дать реальное истолкование понятию комплексного числа. Первым из них был английский ученый Джон Валлис, профессор геометрии Оксфордского университета. Вопрос о геометрическом истолковании комплексного числа рассматривался в его сочинении по алгебре (1685). Рассуждения Валлиса сводились к следующему: некоторые утверждают, что мнимая величина не является реальной. Это представляется естественным, так как нет ни одной величины положительной или отрицательной, квадрат которой был бы величиной отрицательной. Но если это верно, то верно и то, что никакая величина не может быть отрицательной, поскольку невозможно, чтобы какая-либо величина могла быть меньше, чем ничто, или какое-нибудь число меньше нуля. Вместе с тем правильно понимаемое понятие отрицательной величины не является ни обычным, ни абсурдным. Хотя в алгебре отрицательное число означает количество, меньшее, чем ничто, в физике оно выражает противоположность действия. Нельзя отрицать реальность величины $\sqrt{-a}$ только потому, что ее свойства отличны от свойств величин реальных. Если мы признаем отрицательные величины, считаем их реальными, то надо признать реальными и величины мнимые. Валлис утверждает, что мнимые величины допускают как геометрическое, так и алгебраическое истолкование. Он приводит эти истолкования. С алгебраической точки зрения $\sqrt{-bc}$, по Валлису, представляет среднее геометрическое между величинами $-b$ и $+c$, или $+b$ и $-c$. Он рассматривает мнимую величину как отрезок, перпендикулярный отрезкам b и c, отложенным на одной прямой по разные стороны от перпендикуляра. Наиболее важный результат его исследований состоял в следующем: комплексные корни квадратных уравнений не могут быть представлены отрезками прямой, но допускают истолкование с помощью отрезков, расположенных в плоскости выше или ниже прямой.

Задача о геометрическом истолковании действий над комплексными числами была впервые решена датским математиком и землемером Каспаром Весселем (1745—1818). В 1797 г. Вессель представил Датской академии наук мемуар «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников». Эта работа была опубликована в 1799 г., переиздана на французском языке в 1897 г. В ней изложено разработанное Весселем векторное исчисление на плоскости, представляющее собой геометрическую модель алгебры комплексных чисел. Вессель поставил задачу обоснования действия над комплексными числами как задачу расширения понятия числа. Он отмечал, что определения действий над комплексными числами не только не должны противоречить одноименным определениям действий над действительными числами, но должны их и обобщать. Каждое комплексное число $z = x + iy$ Вессель изображал вектором $\bar{z}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец имеет координаты x, y. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 он называл комплексное число z, соответствующее диагонали $\bar{z}$ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$. Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 Вессель называет комплексное число z, которое соответствует вектору $\bar{z}$, получающемуся из вектора $\bar{z}_2$, так же, как вектор $\bar{z}_1$ получается из вектора $+1$. Он ввел тригонометрическую форму комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Пользуясь тригонометрическим представлением комплексного числа, Вессель установил следующие соотношения:

$$(+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon, (+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon, (-1)(+\varepsilon) = -\varepsilon,$$
$$(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon, (-\varepsilon)(-\varepsilon) = -1, (+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1,$$
$$(+\varepsilon)(-\varepsilon) = +1,$$

где через ε обозначена мнимая единица $\varepsilon=\sqrt{-1}$. Отметим, что Вессель изображал «воображаемые» числа ε и $-\varepsilon$ точками оси Oy прямоугольной декартовой системы координат. Установив указанные соотношения, он не только вскрыл реальный смысл «мистического» соотношения $\varepsilon^2=-1$, но и показал, что определение умножения комплексных чисел не противоречит обычному определению умножения, справедливому для действительных чисел. Вессель установил, что $(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)=(ac-bd)+\varepsilon(ad+bc)$, т. е. что $a+b\varepsilon$ и $c+d\varepsilon$ можно перемножать как многочлены, заменяя в полученном произведении ε^2 на -1.

Обосновав действия над комплексными числами, Вессель рассмотрел ряд их приложений. В частности, он доказал некоторые формулы тригонометрии, например, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

Название «комплексные числа» ввел в 1831 г. знаменитый немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855). Гаусс применял комплексные числа в исследованиях по теории чисел, алгебре, теории функций, основаниям геометрии, теории поверхностей (конформное отображение). Действия над комплексными числами, в частности, использовались им при решении задач планиметрии и сферической тригонометрии. Гаусс, как и Эйлер, представлял точки плоскости или сферы комплексными числами и с помощью соотношений между ними характеризовал свойства рассматриваемых геометрических фигур. Аналогичным образом поступал при соответствующих исследованиях и французский ученый Огюстен Луи Коши (1789—1857). Коши является основоположником теории функций комплексной переменной. Отметим, что Коши впервые ввел название «сопряженные комплексные числа».

Гаусс еще в конце XVIII в. достаточно отчетливо представлял себе геометрическую сущность арифметики комплексных чисел. Понятие комплексного числа использовалось им уже в его первой математической работе, о которой говорилось выше. Значение комплексных чисел для науки подчеркивается в следующих словах Гаусса: «Наука может только потерять в порядке и законченности от оттеснения на задний план фиктивных чисел и принуждена будет в таком случае на каждом шагу придавать к общим истинам ненужные ограничения». (Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века.— М.: Учпедгиз, 1963.— С. 163.)

Использованная литература

1. Депман И. Я. История арифметики.— М.: Учпедгиз, 1959.—424 с.

2. Гусак Г. М. Системы алгебраических уравнений.— Мн.: Выш. шк., 1983.— 222 с.

3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1970.— Т. 1.—352 с.; 1970.— Т. 2.—300 с.; 1972.— Т. 3.—496 с.

4. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа.— М.: Наука, 1973.— 144 с.

5. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения.— М.: Наука, 1979.— 56 с.

6. Матвиевская Г. П. Развитие учения о числе в Европе до XVII века.— Ташкент: Фан., 1971.—230 с.

7. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века.— М.: Учпедгиз, 1963.— 263 с.

8. Ожигова Е. П. Что такое теория чисел? — М.: Знание, 1970.— 94 с.

9. Рыбников К. А. История математики.— 2-е изд.— М.: Изд-во МГУ, 1974.— 456 с.

10. Столяр А. А., Лельчук М. П. Математика.— Мн.: Выш. шк., 1975.— 272 с.

11. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Просвещение, 1976.— 320 с.

12. Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел.— Мн.: Выш. шк., 1982.— 224 с.

Содержание

Алексей Адамович Гусак
Галина Максимовна Гусак
Елена Алексеевна Гусак

В МИРЕ ЧИСЕЛ

Книга для учащихся

Заведующий редакцией *Б. А. Кимбар*
Редактор *В. В. Амбражевич*
Художник *Т. С. Жаркевич*
Художественный редактор *Г. И. Красинский*
Технический редактор *М. Р. Калиберова*
Корректоры *З. Н. Гришели, С. А. Янович*

ИБ № 2122

Сдано в набор 03.06.86. Подписано в печать 02.06.87. Формат $70 \times 100^1/_{32}$. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 7,9. Усл. кр.-отт. 15,93. Уч.-изд. л. 7,32. Тираж 40 000 экз. Заказ 2564. Цена 30 к.

Издательство «Народная асвета» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220600 Минск, проспект Машерова, 11.
Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО имени Я. Коласа. 220005 Минск, Красная, 23.

Мера и число должны лежать в основе всякого дела.

А. Н. Крылов