

A decorative border surrounds the text, featuring a repeating pattern of stylized knot motifs. The motifs consist of two overlapping circles that form a central lens-like shape, with rectangular extensions on the sides and top/bottom that curve inward to meet the circles.

А. Б. СОСИНСКИЙ

УЗЛЫ
ХРОНОЛОГИЯ ОДНОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ

Москва
Издательство МЦНМО
2005

УДК 515.16
ББК 22.15
С66

Сосинский А.Б.

С66 Узлы. Хронология одной математической теории: — М.: МЦНМО, 2005. — 112 с.

ISBN 5-94057-220-0

Современная теория узлов — бурно развивающаяся область математики, имеющая приложения в физике, биологии и химии. В книге популярно рассказывается об основных этапах развития этой теории начиная со времени ее возникновения около 150 лет назад. Занимательное изложение сопровождается большим количеством иллюстраций.

Книга доступна школьникам старших классов. Она будет интересна широкому кругу читателей.

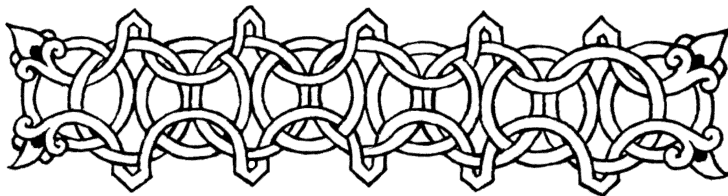
ББК 22.15

ISBN 5-94057-220-0

© Сосинский А. Б., 2005
© МЦНМО, 2005

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Атомы и узлы	15
Глава 2. Узлы, сплетенные из кос	25
Глава 3. Плоские диаграммы узлов	41
Глава 4. Арифметика узлов	51
Глава 5. Хирургия и инварианты	61
Глава 6. Полином Джонса и спиновые модели	73
Глава 7. Инварианты конечного порядка	87
Глава 8. Узлы и физика	99
Литература	110



Введение

Узел галстука, узлы корабелов и альпинистов, гордиев узел, клубок змей, петля палача... Узлы — это и обиходные предметы, и символы сложности, а порой — метафоры зла. Не знаю почему, но математики их долго игнорировали. Робкая попытка Вандермонда *) в конце XVIII в., наброски узлов юного Гаусса в начале XIX в. не в счёт. Только в XX в. математики всерьез взялись за дело. Но вплоть до середины 80-х гг. теория узлов оставалась всего-навсего одной из ветвей топологии: достаточно разработанная, конечно, но интересующая лишь узкий круг специалистов (в основном немецких и американских).

Сегодня это изменилось. Узлы — точнее, математическая теория узлов — интересует многих биологов, химиков, физиков. Узлы вошли в моду. На западных телеканалах о них вещают постмодернисты, со свойственными им самоуверенностью и некомпетентностью. Выражения «квантовая группа» или «полином узла» употребляются, порой невпопад, в околонучных радио- и телепередачах. Что это? Временная мода или яркое начало новой теории, сравнимой по значимости с квантовой физикой или геной инженерией?

Эта книга в какой-то мере — попытка ответить на последний вопрос. Однако в ней не будет ни однозначных оценок, ни общих выводов, а только описание конкретных фактов из красивого и загадочного мира теории узлов.



Книга адресована трем категориям читателей: людям с серьезной естественнонаучной подготовкой, молодежи, начинающей интересоваться математикой, и тем, кого школа сумела убедить в их полной неспособности к математике, но чью любознательность так и не смогла до конца

*) Для тех, кто знает определители: это тот самый Вандермонд.

уничтожить. Последняя группа читателей, самая многочисленная, наверное, с содроганием вспоминает чудовищные тригонометрические вычисления, приведение выражений «к виду, удобному для логарифмирования», выхолащенные определения геометрических фигур — и потому поначалу будет страшиться читать о какой-то там «математической теории».

В данном случае, однако, этот страх не оправдан: чтобы понять наше изложение математической теории узлов, не обязательно быть выпускником мехмата МГУ или МФТИ. Единственные математические инструменты в этой книге — это элементарные действия с многочленами и преобразования простых диаграмм вида

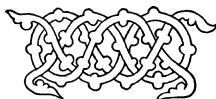
$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} = 2 \cdot \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array}.$$

При чтении книги понадобится также пространственное воображение, а если его не хватает, можно запастись шнуром и, глядя на картинки, завязывать и развязывать узлы.

Выбранный здесь путь — исключение слишком абстрактной или технически сложной математики — привел к тому, что вне рамок книги остался классический (и самый эффективный на начальной стадии) инструмент теории узлов — фундаментальная группа. Первые успехи теории, принадлежащие математикам немецкой школы Ван Кампену, Зейферту, Дену, датчанину Нильсену и американцу Александеру, были достигнуты благодаря разумному использованию этого инструмента.

У меня не было намерения сделать эту книгу систематическим учебником по теории узлов, и поэтому разнообразные темы, затронутые в ней, мало зависят друг от друга. Каждая глава начинается с какой-нибудь простой, но фундаментальной идеи, и далее, не вдаваясь в технические детали, я стараюсь показать дальнейшее развитие и значение этой идеи для современного состояния теории. Таким образом, главы расположены в некотором смысле в хронологическом порядке. Однако я старался свести к минимуму ссылки на предыдущий материал (иногда за счет некоторых повторений), чтобы читатель мог сам выбирать порядок чтения глав.

Перед обзором тем, затронутых в каждой главе, отметим, что узлы, прежде чем стать предметом математической теории, широко использовались в практической и художественной деятельности. Разумеется, это — не тема нашей книги, но небольшой разговор по этому поводу поможет проникнуться красотой реальных истоков теории.



Узлы повсеместно использовались уже со времен античности. Это объясняется их важной технологической ролью, особенно в мореходстве и строительстве. Но появление веревок и узлов произошло раньше, в доисторические времена, и предшествовало изобретению топора, лука, колеса.

Сегодня мы применяем узлы, не задумываясь даже, что их возраст исчисляется тысячелетиями. Нам и в голову не приходит, что такие узлы, как вы́бленочный, прямой и беседочный (см. рис. 0.1), служили жителям Древнего Египта еще пять тысячелетий назад. (Например, выбленочный узел был обнаружен на двери третьего помещения гробницы фараона Тутанхамона.)

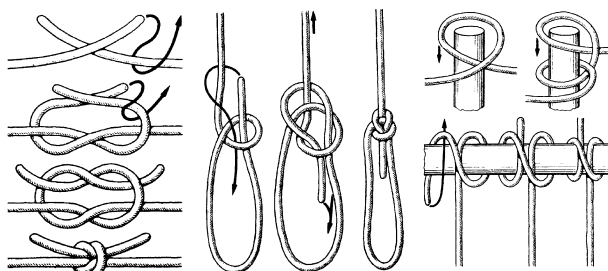


Рис. 0.1. Прямой, беседочный и выбленочный узлы

Прямой (или квадратный) узел, хорошо известный в Древнем Египте, был широко распространен в быту древних греков и римлян. Он украшал жезл древнеримского бога Меркурия — покровителя торговли — и назывался *nodus Hercules* — геркулесовым узлом, так как этот древний герой носил шкуру убитого льва, передние лапы которого связывал на груди именно так.

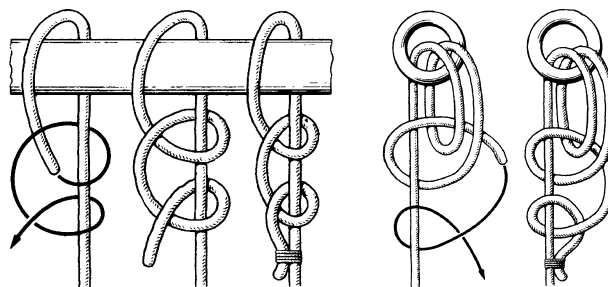


Рис. 0.2. Простой штык и рыбацкий штык

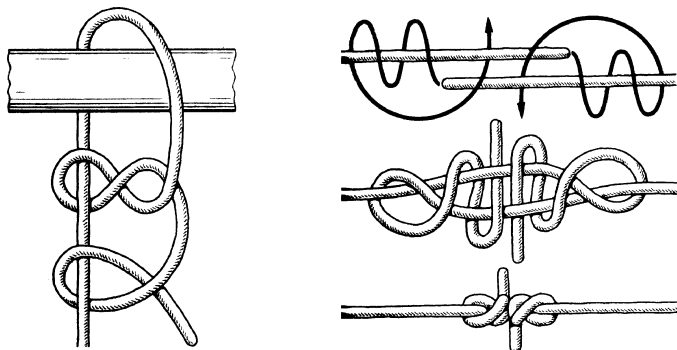


Рис. 0.3. Кочный штык и змеиный узел

Изобретателями самых хитроумных и надежных узлов оказались моряки. Ведь именно им, чаще, чем постоянным обитателям суши, приходилось иметь дело с веревками и канатами.

Лучшие из узлов пережили века, переходя от поколения к поколению (см. Adams, 1994, где приведены изображения более 700 различных узлов).

Здесь мы рассмотрим лишь несколько примеров узлов. Так, простой штык применяется для подъема грузов; рыбацкий штык (или якорный узел) признан моряками всех стран как самый надежный для прикрепления каната к якорю (рис. 0.2). Кочный штык применяется для крепления подвесных коек на судах; змеиным узлом можно накрепко связать две рыболовные снасти (рис. 0.3). На рис. 0.4 изображены два из многочисленных рыболовных узлов: акулий и лососевый.

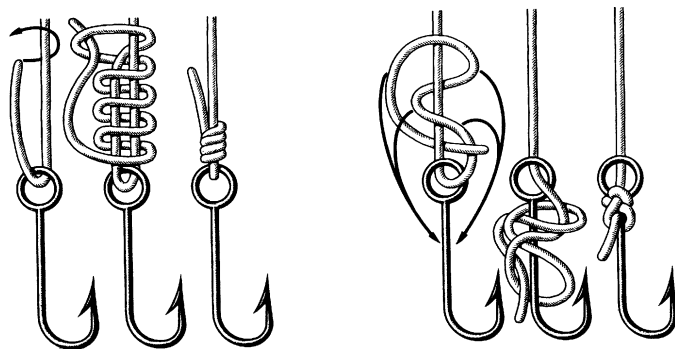


Рис. 0.4. Акулий и лососевый узлы

Одним из первых авторов сочинений про узлы был англичанин Джон Смит (John Smith), известный каждому американскому школьнику своими романтическими приключениями с прекрасной индейской принцессой Покахонтас, столь трагически для нее окончившимися. В 1627 г. он издал морской словарь, где описал некоторые узлы. Столетием позже узлы становятся объектом детальной статьи в «Энциклопедии» Дидро и Даламбера.

Много специальных узлов связано с одним из главных технологических изобретений древности — блоком. На рис. 0.5 изображен полиспаст, своего рода канатный рычаг Архимеда. Это устройство соединяет в себе два великих изобретения — колесо и канат — и применяется для подъема грузов.

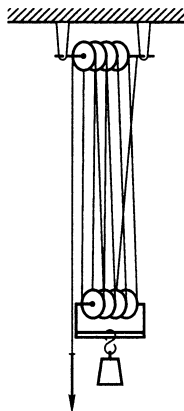


Рис. 0.5.
Полиспаст

Наряду с технологическими и практическими применениями, несомненно, нужно упомянуть также эстетический и магический аспекты. Скандинавские народы (возможно, в силу своей неразрывной связи с морем) особенно любили украшения в виде узлов (рис. 0.6). Их часто помещали на оружие, форштевни кораблей (рис. 0.7), применяли для создания узоров.



Рис. 0.6. Серебряная брошь



Рис. 0.7. Часть оснастки корабля 850 г. н. э.

Одно из наиболее ярких применений узлов можно увидеть в орнаментах болгарских, новгородских и московских летописей XII—XIV вв. (рис. 0.8).



Рис. 0.8. Инициалы из новгородских летописей

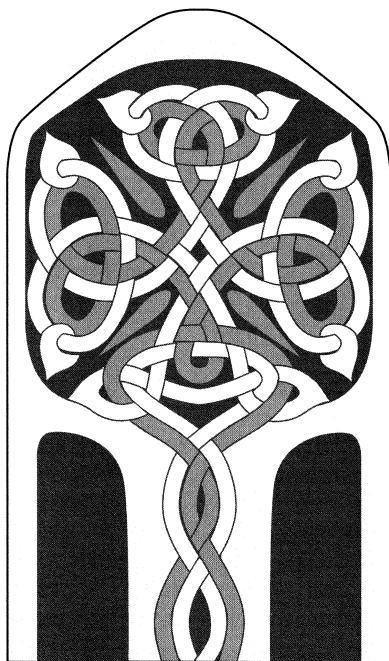


Рис. 0.9. Зацепленные ленты на менгире

Но еще раньше, в эпоху неолита, узлами украшали погребальные камни. Так, кельты изображали на своих знаменитых, дошедших до наших дней, менгирах (огромных вертикально стоящих камнях) цепочки переплетенных между собой узлов (см. рис. 0.9). Нам неизвестен культовый смысл этих узоров, однако их можно классифицировать в математическом смысле (см. Mercat, 1996).

Закончим этот беглый обзор на легкой ноте, отметив существенную роль узлов в арсенале фокусника: узлы, которые таковыми не являются, веревки, которые мгновенно развязываются на только что тщательно связанной хорошенькой ассистентке фокусника и т. д. С математической точки зрения некоторые из таких фокусов (доступные начинающему волшебнику) описаны в монографии Прасолова и Сосинского (1997) или статье Уокера (Walker, 1985).



Перейдем теперь к обзору содержания книги. Глава 1 относится к началам математической теории узлов. Увы, первые результаты теории являются заслугой не математиков, — какой позор для них! — а физиков, более точно, Уильяма Томсона (лорда Кельвина). Точкой отсчета (1860) была его идея сделать узел моделью атома, моделью, которую окрестили «атомом-вихрем» (vortex atom). Для построения теории материи с этой точки зрения необходимо было начинать с изучения узлов. К счастью для самолюбивых математиков, теория Кельвина не развилась и скоро была забыта, оставив, правда, в наследство ряд проблем («гипотезы Тейта»), которые физики тогда не смогли разрешить, но с которыми математики сумели разобраться спустя столетие. Итак, в этой главе обсуждается рождение и сокрушительный провал красивой физической теории и ее связь с различными аспектами теории узлов: таблица альтернирующих узлов Тейта; замечательные узлы, названные «дикими», и ожерелье Антуана. Это последнее служит отправной точкой отступления о геометрической интуиции слепых. Глава заканчивается кратким описанием причин неудачи теории Кельвина.

В главе 2 речь идет о фундаментальной связи между узлами и косами, открытой американцем Дж. Александером спустя полвека после неудачного старта Кельвина. Алгебраическая теория кос, разработанная в свое время совсем еще юным немецким математиком Эмилем Артином (Emil Artin), более алгебраична (и, следовательно, более проста и эффективна), чем геометрическая теория узлов. Эта связь (геометрическая суть которой по-детски проста: «замыкание косы») позволила получить — это результат Александра — все узлы, отталкиваясь от кос. И поскольку классификация кос была быстро получена Артином, была сделана, конечно же, попытка вывести из нее классификацию узлов. Усилия в этом направлении не привели к цели, но породили ряд красивых результатов.

В главе 3 мы представляем хитроумную и одновременно очень простую геометрическую конструкцию, принадлежащую немецкому математику Курту Рейдемейстеру (Kurt Reidemeister). Эта идея позволяет свести изучение узлов в пространстве к изучению их проекций (называемых «диаграммами узлов») на плоскости. Здесь уместно немного поговорить о теории катастроф, кодировании узлов и обработке узлов с помощью компьютера. Мы увидим, что существует алгоритм, изобретенный соотечественником Рейдемейстера Вольфгангом Хакеном (Wolfgang Haken), который позволяет определить, можно или нельзя развязать данный узел, но этот алгоритм очень сложный. Дело в том, что иногда, чтобы распутать узел, нужно сначала его еще больше запутать (увы, так, в переносном смысле, бывает и в реальной жизни). В заключение будет объяснено действие одного

достаточно простого развязывающего алгоритма (который, однако, не может отличить развязываемый узел от неразвязываемого); здесь современный компьютер справляется с задачей развязывания лучше, чем бедный homo sapiens.

Глава 4 имеет дело с арифметикой узлов, основная теорема которой (существование и единственность разложения узла на простые множители) была доказана в 1949 г. немцем Хорстом Шубертом (Horst Schubert). Подозрительное сходство между множеством узлов, наделенным операцией композиции (которая состоит просто-напросто в завязывании узлов последовательно один за другим), и множеством натуральных чисел с операцией умножения породила различные надежды. Например, не являются ли узлы не чем иным, как геометрическим кодированием чисел, не сведется ли классификация узлов к банальному пересчитыванию? Эти надежды были разбиты, и мы узнаем почему.

Глава 5 приводит нас к одному изобретению, на первый взгляд тривиальному, англо-американца Джона Конвея (John Conway), одного из наиболее оригинальных математиков прошлого века. Речь идет о новых (по сравнению с теми, о которых идет речь в главе 3) небольших геометрических операциях над диаграммами узлов. В отличие от операций Рейдемейстера, они позволяют изменять не только вид диаграммы узла, но также и тип узла, а иногда преобразовывают его в зацепление. С их помощью можно определять и вычислять вполне элементарным образом полином Александра—Конвея *) узла (или зацепления). Эти операции дают очень удобный и достаточно эффективный метод доказательства того, что два узла имеют разный тип и, в частности, что некоторые узлы не могут быть развязаны. Однако мне кажется, что больше всего читателя главы 5 заинтересует не этот метод, а биологическое отступление, в котором объясняется, что операции Конвея описывают действие топоизомераз (недавно открытых особых ферментов) на молекулярном уровне.

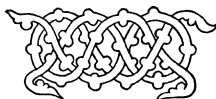
В главе 6 возникает самый знаменитый инвариант узлов — полином Воана Джонса (Vaughan Jones), который двадцать лет назад привел к тому бурному развитию теории, о котором говорилось выше. Кроме всего прочего, он позволил многим исследователям установить первые серьезные связи теории узлов с физикой. Удивительно, что физическая интерпретация (в статистической физике) полинома Джонса дает вполне элементарное описание инварианта Джонса, первоначальное чисто математическое определение которого было достаточно сложно. Это описание использует

*) Первоначальное определение этого полинома, восходящее к Александру, базировалось на математических понятиях, весьма утонченных для того времени, таких как теория гомологий и фундаментальная группа.

очень простой инструмент, который, тем не менее, играет важнейшую роль в современной теоретической физике, — скобку Кауффмана. И эта глава содержит многочисленные отступления.

Глава 7 посвящена одному из последних великих изобретений теории узлов — инвариантам Васильева. Как и в других случаях, исходное определение было весьма сложным. Оно использовало технику теории катастроф и аппарат спектральных последовательностей. Теперь имеется и элементарное описание этих инвариантов. Вместо сложных математических формул читатель встретит простенькие вычисления с маленькими диаграммами, а также отступление про «социологический» подход к математике.

В заключительной главе 8 речь идет о связи между теорией узлов и физикой. В отличие от предыдущих глав, я не мог здесь дать элементарного объяснения того, что происходит в этой области исследований, далекой от завершения. Мне пришлось использовать без должного объяснения новейшую физико-математическую терминологию и написать несколько серьезных математических формул. Тем не менее, я уверен, что читатель, более близкий к искусству и литературе, чем к естественным наукам, с успехом прочтет и эту главу. Не понимая, возможно, точного значения терминологии и формул, он сможет сконцентрировать свое внимание на общем ходе дискуссии, на роли совпадений, почувствовать драматическую сторону современных научных исследований.

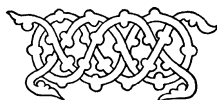


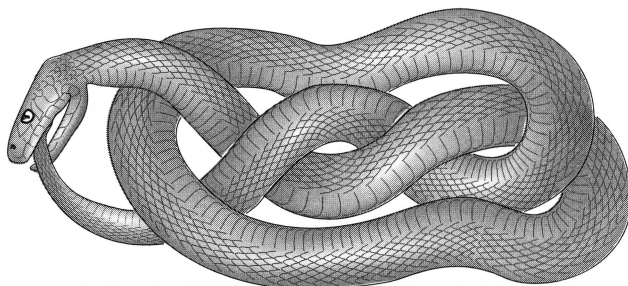
Таким образом, теория узлов, блестящий дебют которой состоялся почти сто пятьдесят лет тому назад, развивалась затем благодаря настойчивым усилиям математиков, которыми управляло чисто интеллектуальное любопытство. Чтобы продвигаться, нужны были новые конкретные идеи. И они возникали в воображении лучших исследователей, порождая каждый раз надежды, часто, увы, чрезмерные. Но каждая неудача позволяла лучше сконцентрироваться на нерешенных проблемах, заманчиво высветивая все еще не достигнутую цель.

Сегодня мы находимся в положении, близком к сложившемуся в 1860 г.: многие исследователи полагают, как полагал в свое время Уильям Томсон, что узлы играют ключевую роль в фундаментальной физической теории, описывающей структуру материи. Однако это не возвращение к начальной точке — спираль познания совершила полный виток, и мы обнаруживаем себя в том же положении, но на более высоком уровне.

Теория узлов остается живой и загадочной. Главные проблемы по-прежнему открыты: узлы продолжают ускользать от попыток их ясно классифицировать, и по-прежнему неизвестно, обладают ли они легко вычислимой полной системой инвариантов. И наконец, та фундаментальная роль, которую, как полагают, они играют в физике, еще до конца не определена.

Автор благодарен Николаю Витковскому (Nickolas Witkowski) за изящное редактирование первоначальной (французской) версии книги и Борису Комракову за материальную и моральную поддержку.





Глава 1. Атомы и узлы

(Лорд Кельвин, 1860)

В 1860 г. английский физик Уильям Томсон, которого мы знаем под именем лорда Кельвина, в то время еще не облеченный дворянским титулом, размышлял о фундаментальных проблемах, связанных со структурой материи. Его коллеги разделялись на два враждующих лагеря: одни поддерживали так называемую корпускулярную теорию, согласно которой материя состоит из атомов, мельчайших твердых *корпускул*, занимающих определенное положение в пространстве; другие представляли себе материю как наложение *волн*, пульсирующих в пространстве-времени. Каждая из этих теорий давала убедительные объяснения некоторых явлений, но была неприменима к другим. Томсон искал синтез этих теорий.

И нашел его. По его мнению, материя, безусловно, состоит из атомов. Но эти атомы-вихри являются не точечными объектами, а... мельчайшими узлами (см. Thomson, 1867). Атом, таким образом, рассматривается как волна, — не расходящаяся по всем направлениям, а свернутая в узкий луч, сильно закрученный и возвращающийся к своему началу, подобно змее, кусающей себя за хвост. Эта змея может перекручиваться очень сложным образом, прежде чем себя укусить, образуя тем самым *узел*. И именно тип этого узла определяет физико-химические свойства атома.

Томсон предположил, что молекулы построены из многих атомов-вихрей, сплетенных между собой. Математическая модель такого объекта называется *зацеплением* и представляет собой конечный набор пространственных кривых, которые могут быть завязаны отдельно и/или переплетаясь друг с другом.

Эта теория покажется, без сомнения, довольно-таки фантастической читателю, изучавшему в школе планетарную модель атома (восходящую

к Нильсу Бору). Но мы находимся в 1860 г., будущий нобелевский лауреат родится лишь двадцать пять лет спустя, а пока научное сообщество всерьез рассматривает революционную идею Томсона. Величайший физик того времени Джеймс Кларк Максвелл (чьи знаменитые уравнения являются фундаментом волновой теории) после некоторых сомнений все же поддержал эту идею. Он заявил, что теория Томсона согласуется с экспериментальными данными лучше, чем любая другая.

Для дальнейшего развития теории было необходимо классифицировать узлы. Это дало бы возможность получить классификацию атомов, отождествив каждый тип узла с каким-то конкретным атомом. Три узла, представленных на рис. 1.1, — *трилистник*, *восьмерка* и *тривиальный узел* — могли бы быть моделями, скажем, атомов кислорода, углерода и водорода.

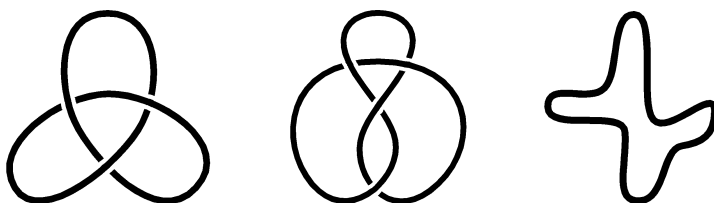


Рис. 1.1. Трилистник, восьмерка и тривиальный узел

Итак, на первый план выступила уже не физико-химическая, а математическая проблема — проблема *классификации узлов*. И шотландский физик и математик, соратник Томсона, Питер Тейт (Peter Tait) вызвался разрешить ее.

Тейт, Киркман и первые таблицы узлов

Согласно Тейту, всякий узел, будучи замкнутой кривой в пространстве, может быть представлен плоской кривой — его ортогональной проекцией на горизонтальную плоскость. Эта проекция может иметь самопересечения (рис. 1.2) в тех точках, где одна часть узла располагается над другой. В плоском изображении, чтобы ясно представить себе вид узла вблизи точки самопересечения, линию, которая изображает нижнюю ветвь узла, разрывают (см. рис. 1.1), так что получается *перекресток*. Мы и далее будем пользоваться таким естественным способом изображения узлов.

Чтобы корректно поставить проблему классификации узлов, нужно прежде всего уточнить, какие узлы принадлежат одному и тому же классу, и, следовательно, *дать точное определение эквивалентности узлов*. Однако мы отложим на время это определение (изотопии узлов), а пока ограничимся интуитивным описанием.

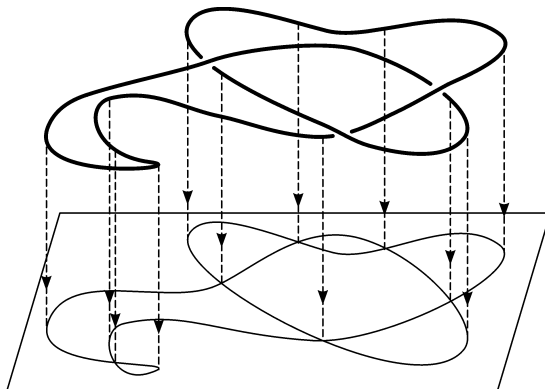


Рис. 1.2. Проекция узла на плоскость

Узел можно представлять как тонкую запутанную веревку в пространстве, концы которой соединены. Эту веревку можно как угодно изгибать, сжимать или растягивать, но нельзя разрывать и склеивать. Всевозможные положения, которые может принимать при этом веревка, изображают один и тот же узел.

Итак, изменяя непрерывным образом положение замкнутой кривой (веревки) в пространстве (не разрывая и не склеивая ее), мы получаем всегда *один и тот же узел*, но его плоское изображение может при этом измениться до неузнаваемости. Например, может измениться количество перекрестков (см. рис. 1.3).

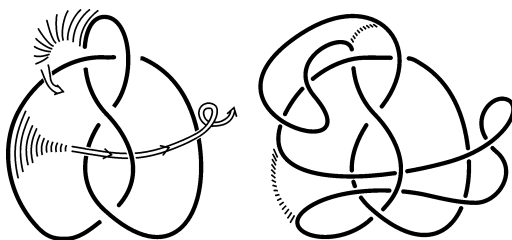


Рис. 1.3. Два представления одного узла

Тем не менее, естественный подход к классификации пространственных узлов состоит в том, чтобы составить сначала список всех плоских кривых с $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ перекрестками, а затем исключить *дубликаты*, т. е. кривые, которые изображают один и тот же узел в пространстве.

Для того чтобы эта задача была разрешима за время человеческой жизни, следует ограничить максимальное исследуемое число перекрестков. Питер Тейт остановился на десяти.

Вначале Тейту повезло: он обнаружил, что математик-любитель и проповедник Томас Киркман (Thomas Kirkman) уже классифицировал плоские кривые с небольшим числом перекрестков и остается только последовательно удалить дубликаты. Но эта задача была непростой. Действительно, для каждого перекрестка плоской кривой имеется две возможности для выбора одной ветви, проходящей над другой. Для кривой с 10 перекрестками, например, имеется априори 2^{10} , т. е. 1024, возможностей построить узел. Поэтому Тейт решил классифицировать только *альтернированные узлы*, т. е. узлы, у которых верхние и нижние ветви чередуются, если двигаться вдоль проекции (см. рис. 1.4).

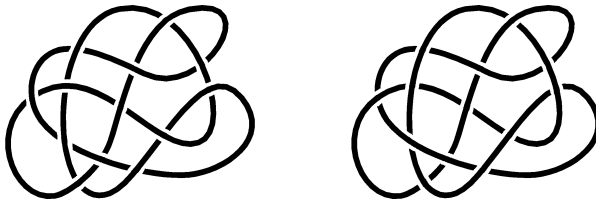


Рис. 1.4. Альтернированный (слева) и неальтернированный (справа) узел

Таким образом, каждой плоской кривой соответствует в точности два альтернированных узла. Казалось бы, задача Тейта существенно упростилась. Тем не менее, она осталась весьма нелегкой — Тейт посвятил ей почти всю свою жизнь.

Неальтернированные узлы (с десятью и менее перекрестками) были классифицированы в 1899 г., после шести лет работы, американцем Литтлом, которому удалось избежать последовательного перебора 2^{10} вариантов пересечений, упомянутых выше.

К несчастью для Томсона, Киркмана, Литтла и Тейта, в то время когда Литтл и Тейт завершили свою работу, таблица узлов уже мало кого интересовала...

Как бы то ни было, к концу XIX в. большая часть работы по классификации узлов (с десятью и менее перекрестками) была завершена и появились таблицы узлов. Пример такой таблицы простых узлов с семью и менее перекрестками представлен на рис. 1.5.

Точное значение выражения «простой узел» (аналогично выражению «простое число», т. е. число, которое нельзя разложить на множители) будет объяснено в гл. 4, посвященной арифметике узлов.

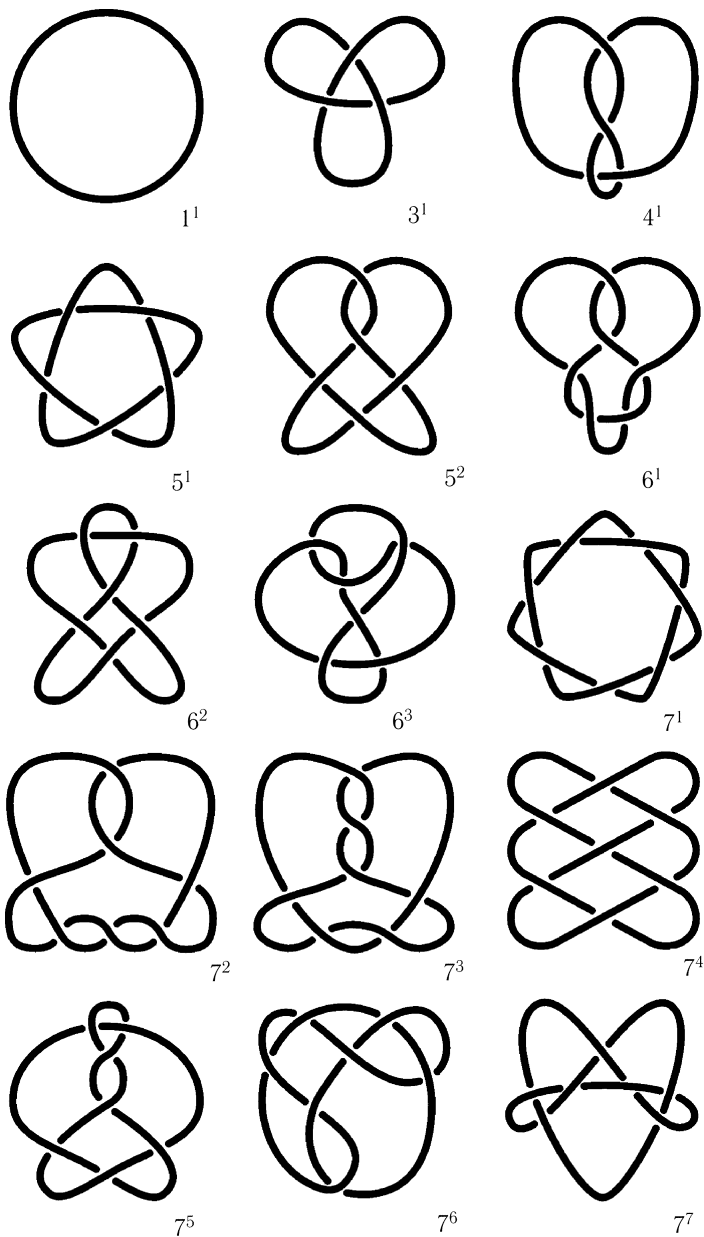


Рис. 1.5. Таблица простых узлов с семью или менее перекрестками

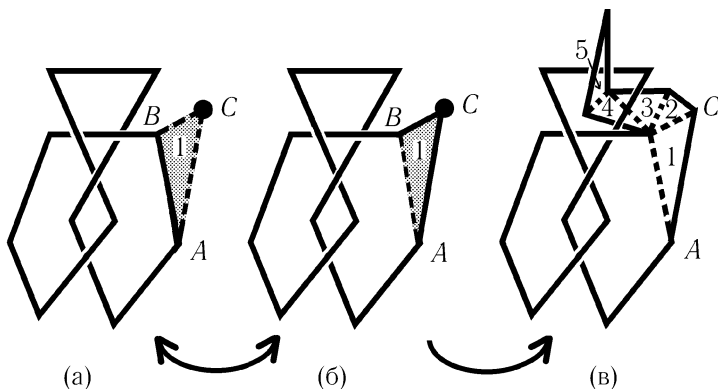


Рис. 1.6. Узел как ломаная и преобразования изотопии

Прежде чем продолжить наш рассказ о работах Кельвина и Тейта, приведем некоторые уточнения по поводу классификации узлов.

Классификация узлов с математической точки зрения

Сформулируем задачу классификации в точных терминах, достаточно строгих, чтобы удовлетворить математика (читатель, плохо переносящий научную точность, может пропустить эту часть, бросив лишь взгляд на рисунки). Прежде всего нужно дать математическое определение самого понятия узла. Мы определяем узел, или, более точно, *представление узла*, как замкнутую ломаную линию в пространстве (рис. 1.6 (а)). Собственно *узел* есть класс эквивалентности представлений узлов по отношению изотопии, которая определяется следующим образом. Осуществить *элементарную изотопию* — значит приложить треугольник (обозначенный ABC на рис. 1.6 (а)) к отрезку AB ломаной линии, заменив далее этот отрезок двумя другими сторонами ($AC \cup CB$, см. рис. 1.6 (б)), либо проделать обратную операцию; разумеется, треугольник не должен иметь общих точек с ломаной, кроме его сторон. *Изотопия* есть некоторая последовательность элементарных изотопий (рис. 1.6 (в)).

Понятно, что это определение в общем соответствует нашему интуитивному представлению об узле как о бечевке со склеенными концами, и изотопия позволяет деформировать узел в пространстве так, как мы бы это делали с реальной бечевкой (не разрывая ее). Правда, мы до сих пор рисовали узлы в виде плавных кривых, без углов, но это не противоречит данному выше формальному определению: плавные кривые можно считать ломаными с микроскопическими звеньями *).

*) В дифференциальной геометрии есть более красивое (но не такое элементарное) определение узлов как «гладких замкнутых кривых».

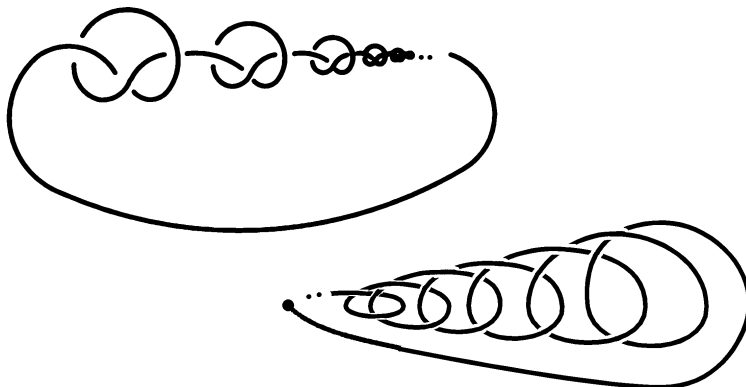


Рис. 1.7. Примеры «диких» узлов

Представление узла как ломаной линии мотивируется не только тем, что оно позволяет добавлять треугольники (это предполагает, что «линия» состоит из отрезков); фактически речь идет также об условии, необходимом, чтобы избежать «локальных патологий». Дело в том, что существуют *дикие узлы*, не являющиеся топологически эквивалентными ломаной линии (или гладкой кривой). Такие необычные узлы получаются в результате «бесконечного завязывания». Переплетения кривой при этом становятся все более и более мелкими и сходятся в итоге к предельной точке, *дикой точке* кривой (см. рис. 1.7).

Строгое определение узла (как ломаной линии или как гладкой кривой) позволяет избежать этих маленьких монстров и тем самым упростить теорию. Прежде чем продолжить наше первоначальное изучение «ручных» узлов, сделаем небольшое отступление и приведем несколько рисунков их «диких» сородичей.

Дикие узлы, пространственная интуиция и слепота

Примеры диких узлов на рис. 1.7 содержат лишь одну (изолированную) патологическую точку, к которой сходится последовательность уменьшающихся узлов. Легко построить дикий узел с несколькими точками такого типа. Но можно пойти еще дальше; на рис. 1.8 показан дикий узел, который обладает бесконечным (и даже несчетным) множеством патологических точек.

Эти дикие точки образуют знаменитое *канторово множество*: множество точек отрезка $[0, 1]$, которое остается, если удалить последовательно средний интервал $(1/3, 2/3)$; затем более мелкие средние интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ двух оставшихся отрезков; затем четыре средних интервала $(1/27, 2/27)$, $(7/27, 8/27)$, $(19/27, 20/27)$ и $(25/27, 26/27)$ из

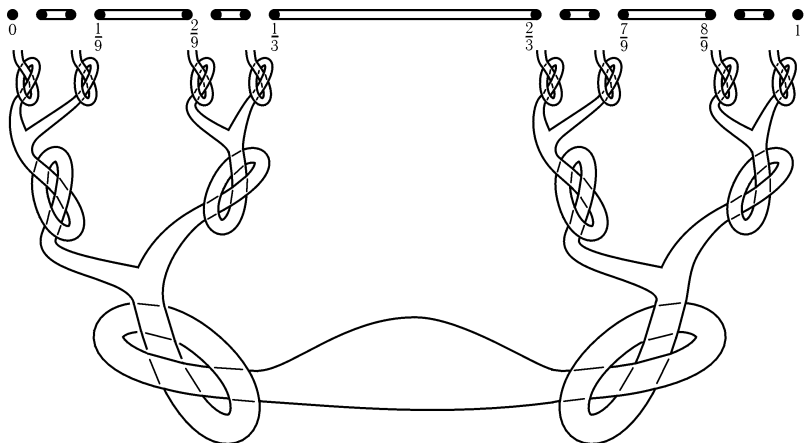


Рис. 1.8. Дикий узел, сходящийся к канторову множеству

четырёх отрезков, которые остаются после предыдущего шага; и так далее до бесконечности.

Можно получить и ещё более поразительный дикий узел, заставив кривую пройти через множество ещё более сложное, чем канторов континуум, например через ожерелье Антуана. Речь идет об одной геометрической конструкции, предложенной французским математиком Луи Антуаном (Louis Antoine). Попробуем описать эту жемчужину математического воображения, представленную на рис. 1.9.

Начинаем с тела T_1 в форме тора (самого большого на рисунке), во внутренность которого помещаем четыре полных тора поменьше, сплетенных друг с другом таким образом, что они образуют замкнутую цепь (обозначенную T_2) с четырьмя звеньями. Затем в каждое из четырех звеньев цепи T_2 помещаем маленькую цепь, подобную предыдущей; множество, образованное этими четырьмя цепочками (и, следовательно, состоящее из 16 маленьких торов), обозначаем T_3 . Во внутренность каждого маленького тора помещаем... Читатель уже понял: процедура повторяется до бесконечности. Множество, полученное пересечением бесконечного набора торов T_i , и образует *ожерелье Антуана*:

$$A = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_n \cap \dots$$

Ожерелье Антуана обладает рядом замечательных свойств, на которых мы не собираемся останавливаться: оно нам послужит лишь для конструирования дикого узла, предложенного русским математиком Г. Я. Зуевым. Этот узел выглядит так: сначала он проникает во внутренность большого

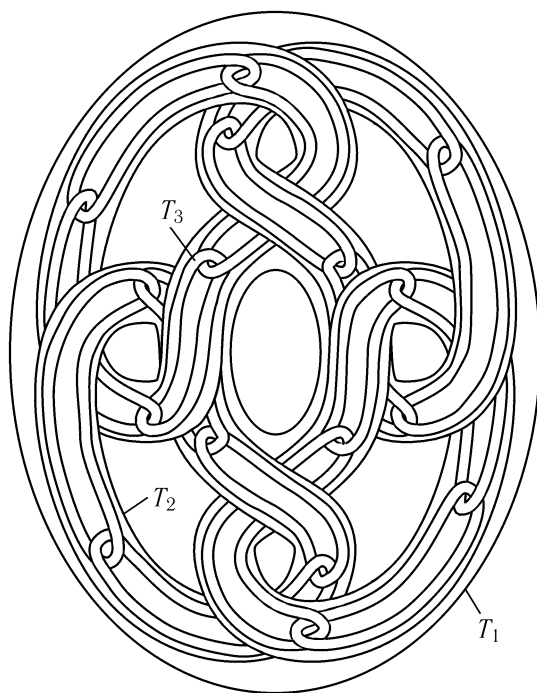


Рис. 1.9. Ожерелье Антуана

тора, затем выпускает четыре языка, которые входят в четыре следующих тора, затем каждый язык выпускает четыре языка и т. д., стремясь приблизиться к ожерелью Антуана. Можно показать (но строгое доказательство достаточно тонкое), что в пределе действительно получается простая замкнутая кривая и что множество ее диких точек есть в точности ожерелье Антуана.

Читатель может спросить себя, какую же силу пространственного воображения надо иметь для того, чтобы изобретать монстров вроде ожерелья Антуана или дикого узла Зюева. Он, наверное, будет удивлен, если узнает, что оба этих математика были слепыми. Но в сущности в этом нет ничего удивительного — как нет ничего удивительного в том, что почти все слепые математики являются (или являлись) геометрами. Интуиция пространства, которой обладаем мы, зрячие, основана на проекции мира на нашу сетчатку. Следовательно, наш мозг анализирует двумерный (а не

трехмерный) образ, т. е. сильно искаженную картину. Интуиция пространства незрячих, напротив, происходит в основном из осязательного и двигательного опыта. Она гораздо глубже.

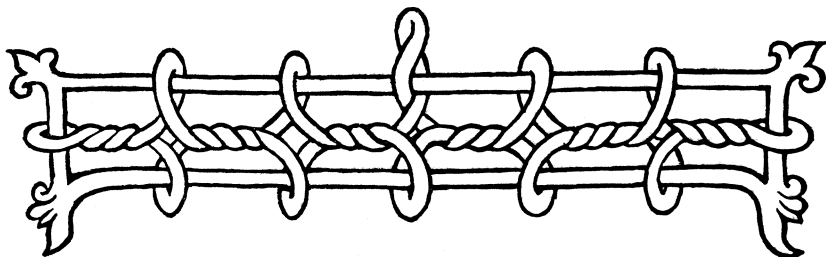
Чтобы завершить это отступление, отметим, что сравнительно недавние биолого-математические исследования (основанные на изучении детей и взрослых, родившихся слепыми и ставших затем зрячими) показали, что фундаментальные, первичные математические структуры — например топологические — являются врожденными, в то время как структуры более тонкие — такие, как линейные структуры — являются приобретенными (Зиман, 1962). Так, слепые, ставшие зрячими, не отличают вначале квадрат от окружности, они замечают только, что топологически эти фигуры эквивалентны. Напротив, они сразу же видят, что тор и сфера — не одно и то же. Наша же тенденция абсолютизировать то, что мы видим, приводит к тому, что мы постигаем мир уж очень прямолинейно, плоско и поверхностно...

Крушение теории Томсона

В то время как европейские физики обсуждали достоинства теории Томсона, а Тейт заполнял свою таблицу узлов, в одной далекой стране малоизвестный ученый тоже обдумывал вопрос о строении материи. Он тоже пытался составить таблицу атомов, но, относясь с недоверием к геометрическому подходу, в основу таблицы положил арифметические соотношения между различными параметрами химических элементов.

Замечательное открытие нашего соотечественника Д. И. Менделеева состояло в том, что существуют соотношения периодичности — простые, но тем не менее остававшиеся до тех пор незамеченными — между этими параметрами. Сегодня эту таблицу называют *периодической системой элементов*. Понадобилось определенное время, прежде чем это открытие стало известно в Западной Европе.

Тем самым с теорией Томсона было покончено. Не принеся ничего для химии, она была быстро вытеснена теорией Менделеева. Таблицы узлов оказались ненужными... Физики более чем на столетие забыли про узлы. Но математики были готовы принять у них вахту.



Глава 2. Узлы, сплетенные из кос

(Александр, 1923)

В этой главе мы обсудим замечательную связь между двумя красивыми топологическими объектами: косами и узлами. Что такое коса в математике? Грубо говоря, это формальная модель того, что понимается под словом «коса» или «сплетение» в обычной жизни (девичья коса, плетеный брелок, собачий поводок, сплетенный из кожаных полос, классический канат из переплетенных жил и т. д.), т. е. множество нитей, запутанных некоторым определенным образом. Более точно, можно представлять *косу из n нитей* как n тонких бечевков, подвешенных «вверху» (на гвозди, выстроенные в горизонтальную линию) и переплетающихся друг с другом в своем движении «вниз» (движение вверх не допускается); по прибытии вниз мы находим те же нити (также зафиксированные гвоздями), но не обязательно в том же порядке (см. рис. 2.1).

Для данной косы мы имеем право двигать ее нити, не отцепляя их вверху и внизу и, конечно, не разрезая их и не склеивая; при этом получается коса другого вида, *эквивалентная* (или *изотопная*) данной (рис. 2.2). Как и в случае узлов, мы не различаем две изотопные косы: мы рассматриваем их как двух представителей одного и того же объекта (с формальной точки зрения считается, что рассматриваемый объект — не конкретная коса, а класс эквивалентных кос).

Теория кос, основания которой были построены благодаря азарту и настойчивости немецкого алгебраиста Эмиля Артина в двадцатых годах прошлого столетия, является красивым синтезом геометрии, алгебры и алгоритмических методов. Первоначально косы были предложены Артином в качестве математической модели для текстильной промышленности, но

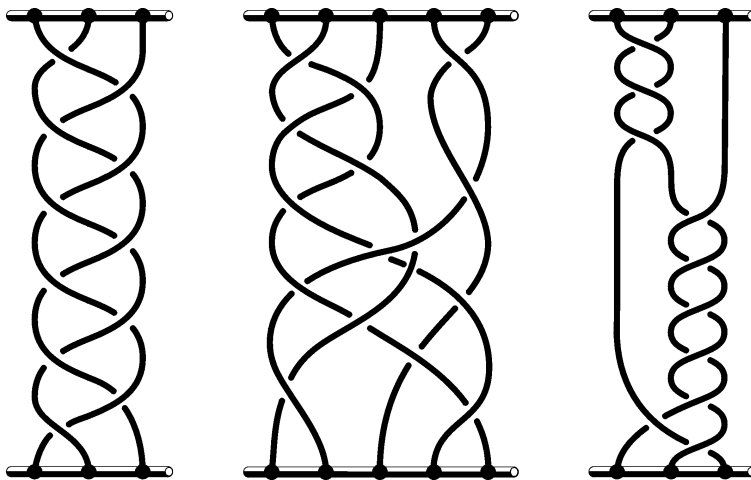


Рис. 2.1. Примеры кос

приложения этой теории оказались весьма разнообразными; теперь они занимают важное место в комплексном анализе, комбинаторике, квантовой механике и квантовой теории поля. Кроме того, теория кос помогла в решении задачи о представлении функций многих переменных функциями меньшего числа переменных.

Но мы вернемся к теории кос немного позже, так как наша непосредственная цель — увидеть связь между косами и узлами, упомянутую в начале главы.

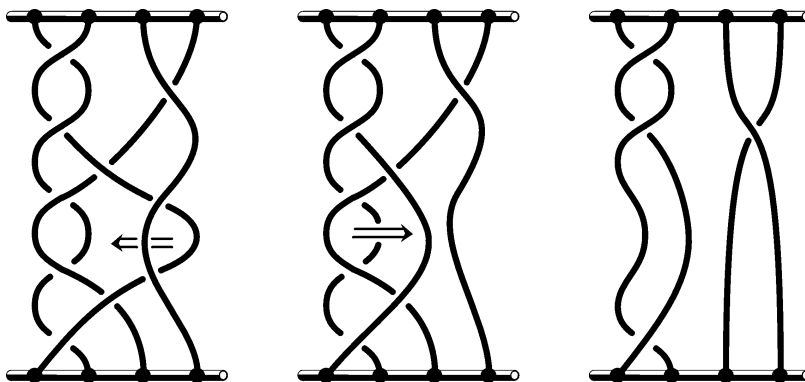


Рис. 2.2. Изотопия косы с четырьмя нитями

Замыкание косы

Можно получить узел из косы с помощью операции *замыкания*, которая состоит в том, чтобы присоединить верхние концы прядей к нижним концам (рис. 2.3 (а)).

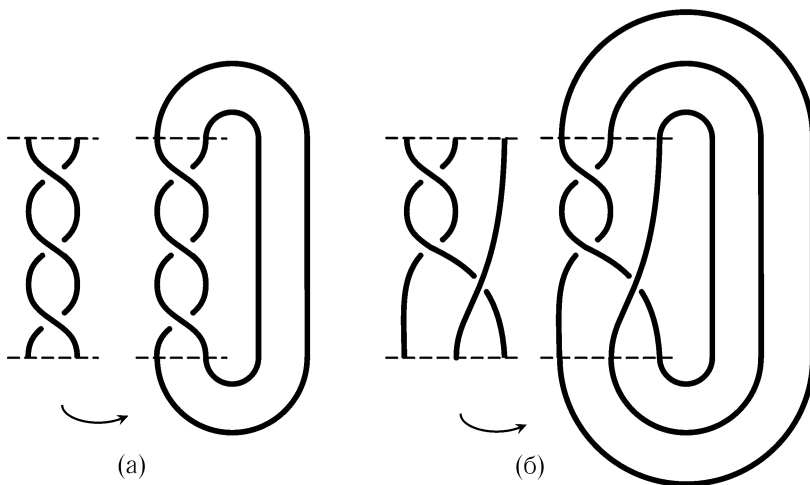


Рис. 2.3. Замыкание кос

Всегда ли таким образом получается узел? Рис. 2.3 (б) показывает, что не всегда: замыкание косы может также оказаться *зацеплением*, т. е. состоять из нескольких кусков (из нескольких кривых, в отличие от узла, по определению состоящего лишь из одной). Внимательный читатель предыдущей главы узнает — но, может быть, не сразу — узел-трилистник на рис. 2.3 (а).

Сразу же встает вопрос: какие узлы можно получить таким образом? Ответ, полученный американским математиком Александером в 1923 г., объясняет важность кос в теории узлов: можно получить любой узел! Итак, теорема Александера формулируется следующим образом: *каждый узел может быть получен как замыкание некоторой косы*. (Фактически Александер показал, что это утверждение верно для зацеплений, частным случаем которых являются узлы.)

Вероятно, Александер надеялся, что его теорема послужит решающим шагом к классификации узлов. Действительно, как мы увидим ниже, косы являются значительно более простыми объектами, чем узлы; множество кос обладает весьма прозрачной алгебраической структурой, позволяющей их классифицировать. Следовательно, резонно попытаться получить

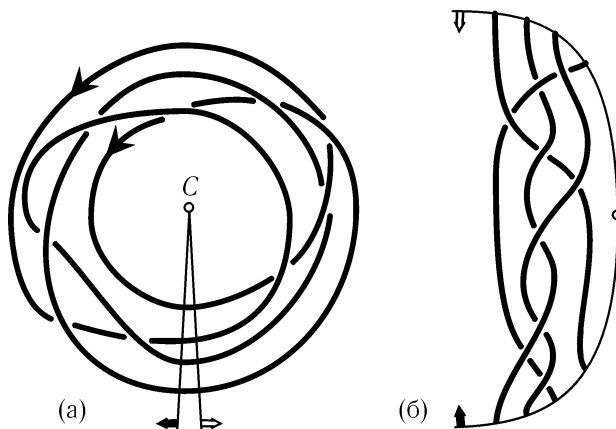


Рис. 2.4. Замыкание косы для узла-обмотки

классификацию узлов, основываясь на классификации кос. Что вышло из этой идеи? Мы узнаем это в конце главы.

Вернемся на минуту к теореме Александера: как ее доказать, как для данного узла найти косу, замыкание которой дает этот узел? Заметим вначале, что искомая коса моментально находится, если узел является *обмоткой*, т. е. если он закручивается в одном и том же направлении вокруг некоторой точки (как узел на рис. 2.4 (а) вокруг центра C). Действительно, для этого достаточно разрезать узел вдоль полупрямой, исходящей из центра, и затем развернуть его в косу (см. рис. 2.4 (б)).

Но что делать, если узел не является обмоткой, как, например, узел, представленный на рис. 2.5 (а)? (Этот узел, как известно читателям главы 1, называется *восьмеркой*.) В этом частном случае достаточно заставить его «толстую» часть (показанную на рисунке более жирной линией), которая закручивается относительно точки C в «неправильном» направлении, пройти под точкой C с другой стороны кривой; тогда мы получим узел-обмотку (рис. 2.5 (б)), который можно развернуть далее в косу, как в предыдущем примере (рис. 2.5 (в)).

Фактически этот красивый прием (преобразование произвольного узла в узел-обмотку) является основным, и именно благодаря ему Александер сумел доказать свою теорему. К недостаткам этого метода можно отнести отсутствие эффективности с практической точки зрения; в частности, его трудно реализовать на компьютере. Поэтому мы описываем здесь другой метод расплетения узлов в косы, более эффективный и более легкий для программирования, принадлежащий французскому математику

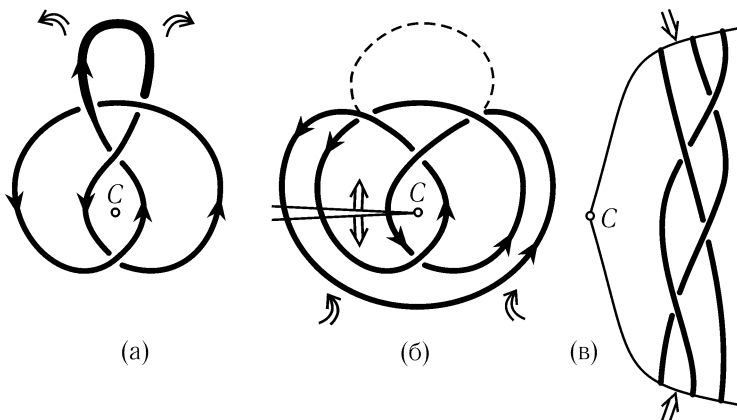


Рис. 2.5. Развертка и замыкание косы для узла «восьмерка»

Пьеру Вожелю (Pierre Vogel). Читатель, плохо переносящий алгоритмические рассуждения, может быстро перескочить через это описание и перейти к изучению (значительно более простому и более важному) группы кос.

Алгоритм Вожеля

Чтобы описать этот алгоритм, преобразующий произвольный узел в узел-обмотку, нам понадобится несколько определений, относящихся к плоским изображениям (*диаграммам*) узлов. Узел называют *ориентированным*, если выбрано некоторое *направление* его обхода (обозначенное стрелками). Диаграмма узла задает что-то вроде карты на плоскости. *Страны* на ней — это области, ограниченные линией узла. На этой карте граница каждой страны состоит из многих *ребер* (ориентированных стрелками), соединяющих перекресток узла с соседним. Принимается во внимание также *бесконечная страна* — та, что расположена вне кривой.

Поскольку кривая узла ориентирована, пересечения снабжены стрелками, которые позволяют однозначно *разрешить* данный узел, т. е. заменить все перекрестки их *разрешениями* так, как показано на рис. 2.6 (а). Разрешение преобразует узел в одну или несколько замкнутых ориентированных кривых (без перекрестков), которые называются *окружностями Зейферта* диаграммы узла (рис. 2.6 (г), (д)).

Две окружности Зейферта называются *вложенными*, если одна из них лежит внутри области, ограниченной другой, и если ориентации этих окружностей совпадают. Отметим, что разрешение узла-обмотки всегда дает систему вложенных окружностей Зейферта (см. рис. 2.6 (б)).

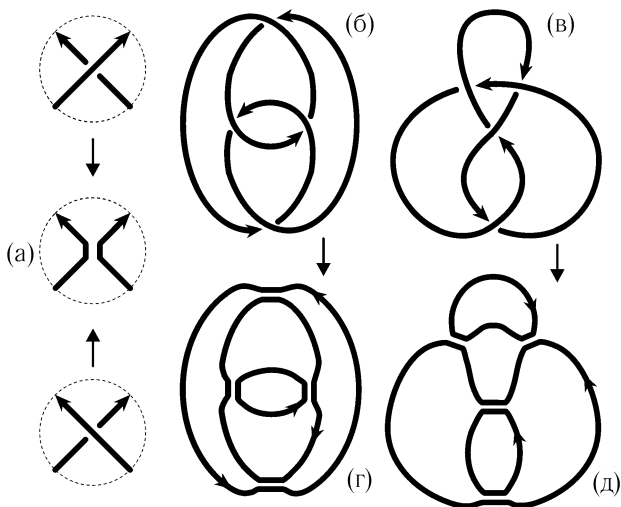


Рис. 2.6. Разрешение узлов окружностями Зейферта

С другой стороны, если у нас есть две окружности Зейферта, которые не являются вложенными (как на рис. 2.7 (б)), операция *замены бесконечности* *) делает их вложенными (рис. 2.7 (в)). Действительно, мы видим на этом рисунке, что окружности 1 и 2 вложены, а окружность 3, напротив, не вложена в них. Однако, «вывернув плоскость наизнанку»

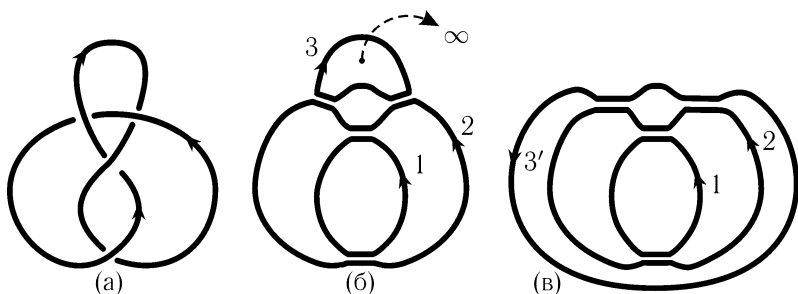


Рис. 2.7. Замена бесконечности

*) Эта терминология объясняется тем, что здесь речь идет о преобразовании, напоминающем инверсию в геометрии (симметрия относительно малой окружности, центр которой находится в одной из стран, ограниченной одной из рассматриваемых окружностей Зейферта), и эта инверсия посылает центр данной окружности «в бесконечность» (и преобразует эту страну в бесконечную).

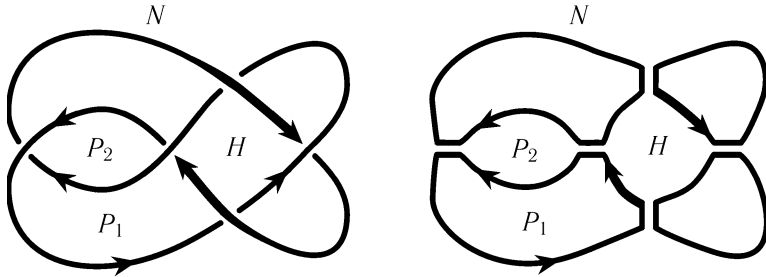


Рис. 2.8. Стабильные и нестабильные страны

относительно окружности 3 , мы получим окружность $3'$, в которую уже вложены окружности 1 и 2 . (В рассматриваемом случае замена бесконечности похожа на операцию, осуществленную на рис. 2.5 при переходе от (а) к (б), но не совпадает с ней.)

Рассмотрим теперь плоскую карту, определенную узлом N . Некоторая страна H этой карты называется *нестабильной*, если у нее есть два ребра, принадлежащие двум различным окружностям Зейферта, причем стрелки на этих ребрах задают обход вокруг страны H в одном и том же направлении. Так, в разрешении узла N на рис. 2.8 страна H нестабильна, в то время как страны P_1 и P_2 обе стабильны.

В самом деле, жирные стрелки задают обход вокруг H в одном и том же направлении и принадлежат двум различным окружностям Зейферта, поэтому страна H нестабильна; страна P_1 стабильна, так как все ее ребра принадлежат одной и той же окружности Зейферта; наконец, страна P_2 стабильна, так как ее ребра задают обходы вокруг P_2 в противоположных направлениях.

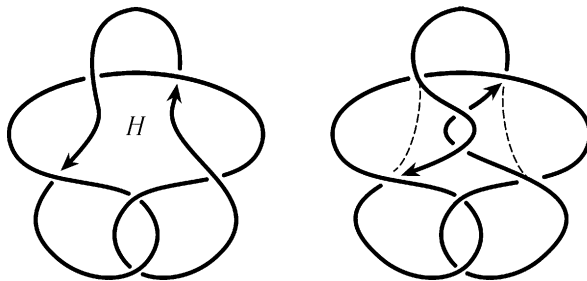


Рис. 2.9. Перестройка нестабильной страны

К каждой нестабильной стране можно применить операцию, которую мы называем *перестройкой* (см. рис. 2.9) и которая состоит в замене двух «неправильных» стрелок на два «языка», проходящих один над другим и образующих два новых пересечения.

В результате образуется центральная страна (которая не является нестабильной) и несколько новых стран: некоторые из них (две в рассматриваемом примере) могут «аннексировать» части нестабильной страны, — этим и объясняется термин «перестройка». Аналогия с недавними геополитическими событиями (распад СССР) — чисто случайная...

Алгоритм Вожеля теперь можно представить в форме «программы», записанной «псевдо-Паскалем»:

```

начало
сделать разрешение
пока: существует нестабильная страна
    сделать перестройку
    сделать разрешение
конец пока
пока: окружности Зейферта не являются вложенными
    сделать замену бесконечности
конец пока
конец

```

В этой программе условия

существует нестабильная страна,
 окружности Зейферта не являются вложенными

и «макрокоманды»

сделать перестройку,
 сделать замену бесконечности

объяснены выше. Уточним, как функционирует макрокоманда

сделать замену бесконечности.

Для ее выполнения нужно взять одну из самых маленьких окружностей Зейферта, не являющуюся вложенной относительно других, и отправить в бесконечность какую-нибудь внутреннюю точку этой окружности.

Применим вначале алгоритм Вожеля к очень простому (на самом деле тривиальному) узлу, чтобы увидеть, как происходит замена бесконечности (см. рис. 2.10). После первого разрешения видно, что нестабильных стран нет и что ни одна окружность Зейферта не является вложенной. Следовательно, можно перейти к команде «сделать замену бесконечности», которую нужно выполнить два раза (сначала рис. 2.10 (б) превращается в (в), потом (в) превращается в (г)), чтобы получить узел-обмотку (г), который разрезается в косу (д), как указано выше.

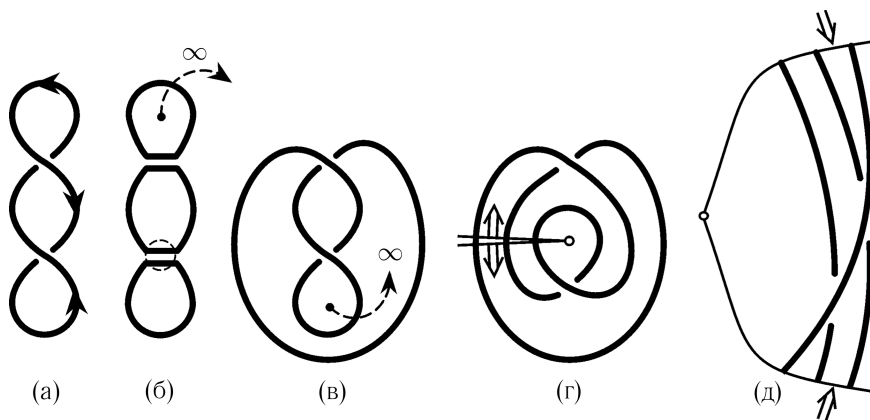


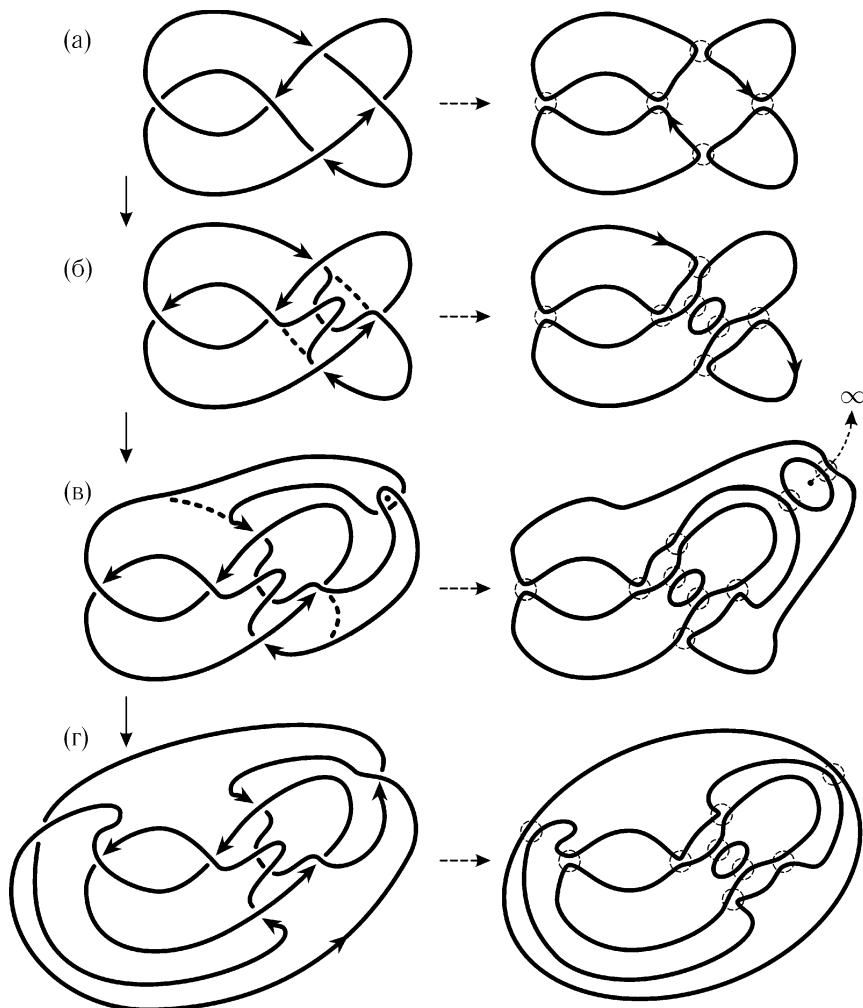
Рис. 2.10. Алгоритм Вожеля, примененный к тривиальному узлу

На рис. 2.11 показано, как алгоритм Вожеля закручивает (превращает в обмотку) узел с пятью перекрестками *). Видно, как, после начального разрешения, цикл (в программистском смысле) «пока» включает две перестройки (б) и (в); за ним следует замена бесконечности. Результатом (см. рис. 2.11 (г)) будет узел-обмотка, даже если он мало похож на обмотку. Чтобы убедиться в том, что получена обмотка, мы перерисуем узел два раза (см. рис. 2.12); читателю не составит труда узнать узел-обмотку с рис. 2.5 (а) и затем снова полюбоваться на искомую косу (рис. 2.5 (б)).

Заметим, что алгоритм Вожеля включает в себя два цикла «пока», априори опасных. В общем случае совсем не очевидно, что алгоритм завершит свою работу за конечное число шагов, однако в данном случае это так, и алгоритм работает очень быстро. Что касается второго цикла, то можно элементарно доказать, что он оканчивается всегда. Напротив, чтобы доказать это для первого цикла, Вожелю пришлось воспользоваться достаточно тонкими методами алгебраической топологии.

Чтобы из нашей «программы» сделать настоящую, надо уметь *кодировать* представления узлов в доступном для машины виде. Компьютер без труда читает слова, но ему сложно объяснить взаимное расположение на плоскости перекрестков диаграммы узла. Однако диаграмму узла он понимает, если ее описать в виде слова: двигаясь вдоль кривой, нужно последовательно указывать тип встречаемого перекрестка. Мы поговорим подробнее о кодировании узлов в гл. 3.

*) Этот узел имеет номер 5^2 в таблице узлов на рис. 1.5.

Рис. 2.11. Применение алгоритма Вожеля к узлу типа 5^2

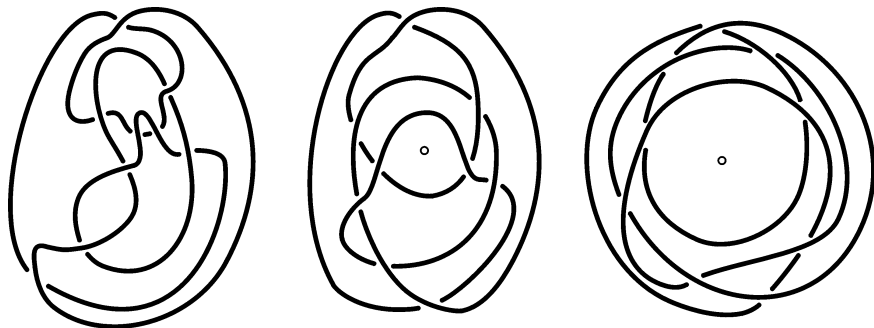


Рис. 2.12. Узел-обмотка, получившийся в результате действия алгоритма Вожеля

Группа кос

Вернемся к изучению кос. Прежде всего мы определим операцию *произведения* на множестве кос B_n с одним и тем же количеством нитей n . Эта операция заключается просто-напросто в последовательном связывании кос (соединении верхних концов нитей второй косы с нижними концами нитей первой), как на рис. 2.13.

Сейчас мы убедимся, что произведение кос обладает многими свойствами обычного произведения чисел. Прежде всего, имеется единичная коса (обозначаемая e), т. е. коса, которая, как число 1, не изменяет то, что на нее умножается. Это *тривиальная* коса, нити которой спадают вертикально, не переплетаясь. Действительно, прикрепление снизу тривиальной косы к данной косе приводит лишь к удлинению ее нитей и не изменяет тип косы.

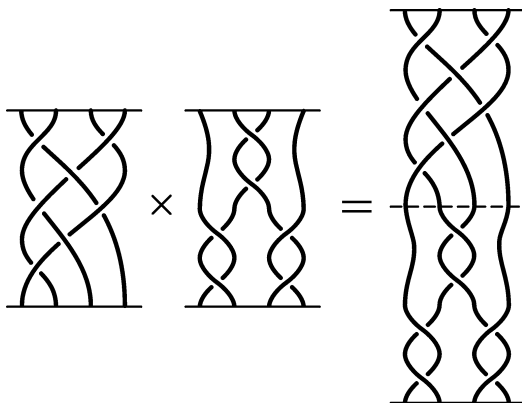


Рис. 2.13. Произведение двух кос

Во-вторых, для каждой косы b существует коса, называемая *обратной* и обозначаемая b^{-1} , такая, что ее произведение с b дает тривиальную косу, $b \cdot b^{-1} = e$ (так же как для каждого числа n его произведение с обратным числом $n^{-1} = 1/n$ равно единице, $n \cdot n^{-1} = 1$). Эта коса, как видно на рис. 2.14, получается, если взять отражение данной косы в горизонтальном зеркале; действительно, каждый перекресток уничтожается своим зеркальным изображением, таким образом, все перекрестки взаимно уничтожаются попарно шаг за шагом, начиная с середины косы-произведения.

Третье свойство, общее у кос и у чисел, — свойство ассоциативности произведения: всегда выполняется равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Всякий раз, когда некоторое множество снабжено операцией, обладающей тремя свойствами, о которых мы только что упоминали, математики говорят, что они имеют дело с *группой*. Итак, мы только что показали, что *множество кос с n нитями образует группу*. Эту группу мы будем обозначать через B_n .

Отметим сразу же, что группа кос B_n (для $n > 2$) — в отличие от чисел — не коммутативна: произведение двух кос зависит в общем случае от порядка множителей.

Существование произведения кос позволяет заменять рисунок, изображающий косу, некоторым словом — алгебраическим представлением этой косы. Действительно, двигаясь сверху вниз вдоль косы, мы видим, что наша коса — последовательное произведение кос с одним перекрестком в каждой (см. рис. 2.15); они называются *элементарными косами* и обозначаются (в случае кос с n нитями) b_1, b_2, \dots, b_{n-1} .

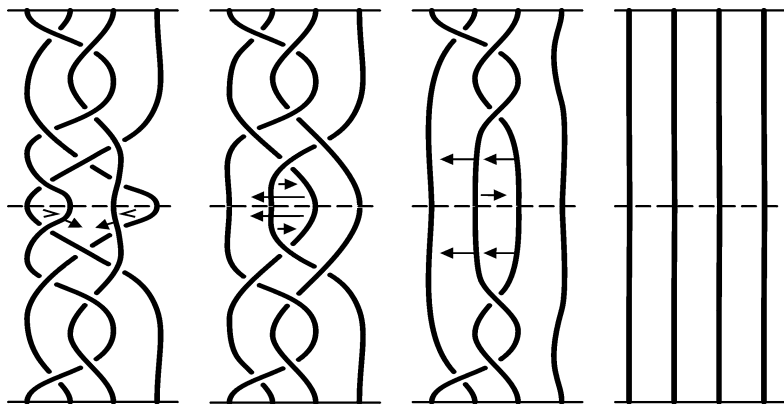


Рис. 2.14. Произведение косы и обратной к ней

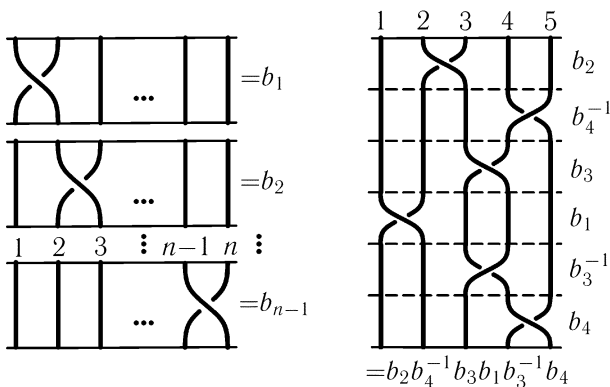


Рис. 2.15. Алгебраическое представление косы

Таким образом, мы заменили косы — геометрические объекты — словами, их алгебраическими кодами. Напомним, однако, что между геометрическими объектами — косами — существует отношение эквивалентности (изотопия). Что это означает на алгебраическом уровне? Ответ на этот вопрос был дан Артином, который обнаружил две серии алгебраических соотношений между косами-словами, достаточных, чтобы дать алгебраическое описание изотопии. Это соотношение *коммутативности для отдаленных кос*

$$b_i b_j = b_j b_i, \quad \text{если } |i - j| \geq 2, \quad i, j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

и соотношение *Артина* (или *соотношение кос*)

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

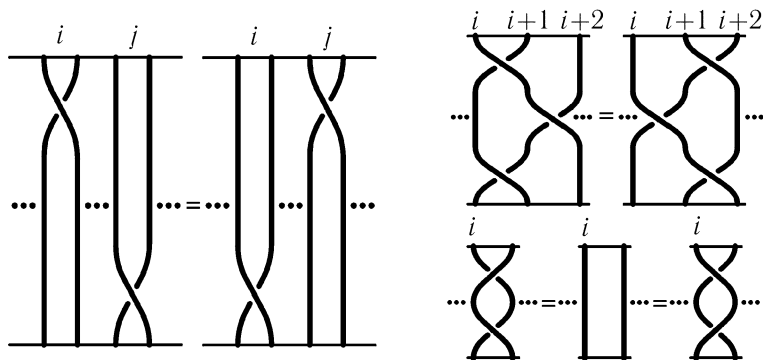


Рис. 2.16. Соотношения в группе кос

Геометрическая интерпретация этих соотношений показана на рис. 2.16. Немного пространственного воображения — и становится очевидным, что эти соотношения выполняются для кос, т. е. они отвечают изотопиям.

Менее очевидно — и это есть фундаментальный результат, принадлежащий Артину, — что этих двух соотношений, если добавить еще *тривиальные соотношения* *)

$$b_i b_i^{-1} = e = b_i^{-1} b_i,$$

также представленные на рис. 2.16, достаточно для того, чтобы заменить геометрические манипуляции, связанные с изотопией, на *допустимые алгебраические преобразования* с косами-словами. Каждое из этих допустимых преобразований состоит из замены подслова какого-нибудь слова, совпадающей с одной из частей (левой, правой) соотношений трех типов, указанных выше, другой частью (правой, левой) этого соотношения. Вот пример допустимых преобразований в группе кос с четырьмя нитями B_4 :

$$b_3^{-1}(b_2 b_3 b_2) b_3^{-1} = (b_3^{-1} b_3) b_2 (b_3 b_3^{-1}) = e b_2 e = b_2.$$

(Чтобы упростить понимание этой формулы, я взял в скобки подслова, которые последовательно заменяются в процессе преобразований.)

Более точно, теорема Артина утверждает, что *две косы изотопны тогда и только тогда, когда слово, представляющее одну из них, может быть преобразовано в слово, представляющее другую, с помощью последовательности допустимых преобразований*.

Важность этой теоремы объясняется тем, что она сводит геометрическое изучение кос к их алгебраическому изучению, заведомо более эффективному (а также доступному для компьютеров). Именно этот алгебраический подход к косам позволил Артину их классифицировать, т. е. отыскать *алгоритм сравнения*, который для каждой пары кос говорит нам «нет», если они не изотопны, и «да», если они изотопны (в последнем случае он дает к тому же последовательность допустимых преобразований, переводящую одну косу в другую).

Классификация кос

Мы не собираемся здесь описывать алгоритмы сравнения кос. Ни алгоритм Артина (который имеет красивое английское название *combing* — расчесывание), ни другой, более простой и эффективный, найденный недавно французским математиком Патриком Деорнуа (Patrick Dehornoy).

*) Они называются так, поскольку выполняются в любой группе, а не только в группе кос B_n .

Читателя, желающего ознакомиться с их элементарным изложением, я отсылаю к библиографии. Но чтобы убедить вас в эффективности алгебро-алгоритмических методов в геометрии, я выбрал (скорее наугад) один пример вычислений, выполненных моим небольшим компьютером — он содержит в одном из закоулков своей электронной памяти программу, исполняющую алгоритм Деорнуа. Эти преобразования, происходящие в группе кос B_4 и использующие обозначения (более читаемые) a, A, b, B, c, C для элементарных кос $b_1, b_1^{-1}, b_2, b_2^{-1}, b_3, b_3^{-1}$ соответственно, показывают, что некоторая коса с четырьмя прядями, имеющая априори достаточно запутанный вид, на самом деле тривиальна.

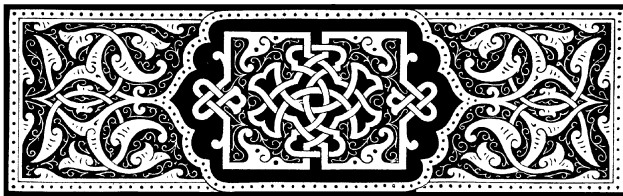
$$\begin{aligned}
& ABBA AAAA [Ab b b b b b b c b a] Acc B C a a a a a a BB = \\
& = ABBA AAAA [A b a] a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = ABBA AAA [A b a] B a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = AB B A A A [A b a] B B a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = AB B A [A b a] B B B B a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = A B B [A b a] B B B B B a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = [A B a] B B B B B B a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b [A B B B B B B a] a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A [A B a] a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b [A B a] a a a a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b [A B a] a a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b [A B a] a a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b b [A B a] a V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b b b [A B a] V c b a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b b b b A B [B c b] a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b b b b A [B c b] C a B Acc B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b b b b A c b C C [a A] c c B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b b b b A c b [C C c] B C a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b b b b A [c b B C] a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A b b b b b b [A a] a a a a a a BB = \\
& = b b A A A A A A [b b b b b b] a a a a a a BB = \\
& = b b [A A A A A A a a a a a a] B B = [b b B B] = e.
\end{aligned}$$

Для сравнения читатель может нарисовать предложенную косу и попробовать распутать ее геометрически. Это утвердит его в превосходстве компьютера, который потратил на выполнение задания менее десятой доли секунды.

Можно ли классифицировать узлы с помощью кос?

Теорема Александера утверждает, что каждый узел есть замыкание некоторой косы, а мы только что увидели, что косы можно классифицировать. Можно ли получить классификацию узлов, основываясь на этих двух фактах? Многие крупные математики *) надеялись на это (мне известно, что некоторые надеются и до сих пор). История этих попыток, которая началась в тридцатых годах и, возможно, еще не закончилась, очень поучительна и полна неожиданных озарений. Однако эта глава уже затянулась, и я заканчиваю ее, отсылая любопытного читателя к работе Dehornoy (1997).

*) Среди них, видимо, был сам Э. Артин, наш соотечественник А. А. Марков, американцы Джоан Бирман (Joan Birman) и Уильям Терстон (William Thurston).



Глава 3. Плоские диаграммы узлов

(Рейдемейстер, 1928)

В двадцатых годах прошлого столетия начинал свои обстоятельные исследования немецкий математик Курт Рейдемейстер, будущий автор знаменитой «Knottentheorie», первой монографии, посвященной узлам. Как классифицировать узлы? Проблема систематизации всевозможных положений кривой в пространстве представляется чрезвычайно трудной.

Аналитический подход (при котором узлы задаются уравнениями) ничего не дает; комбинаторный подход (при котором мы задаем узел как замкнутую ломаную линию, перечисляя последовательно координаты вершин) также безрезультатен. В этих двух случаях данные, задающие узел, не позволяют ни видеть его, ни манипулировать им. На практике, чтобы увидеть узел, его рисуют, т. е. проектируют на удобно выбранную плоскость, получая так называемую *диаграмму узла*. Когда манипулируют бечевкой, задающей положение узла в пространстве, его диаграмма претерпевает непрерывные изменения. Они позволяют отслеживать на плоскости эволюцию положений узла в пространстве. А можно ли обратить этот процесс? Можно ли осуществлять непрерывные модификации *проекции* таким образом, чтобы в результате получить все возможные положения бечевки в пространстве? Вот вопрос, который ставит Рейдемейстер.

И он на него отвечает. Для этого достаточно, говорит он, осуществлять над диаграммой конечное число операций, причем каждая из этих операций либо должна быть *тривиальным плоским преобразованием* (т. е. деформацией проекции, не меняющей перекрестки и их взаимное расположение), либо должна иметь вид одного из трех преобразований, изображенных на рис. 3.1.

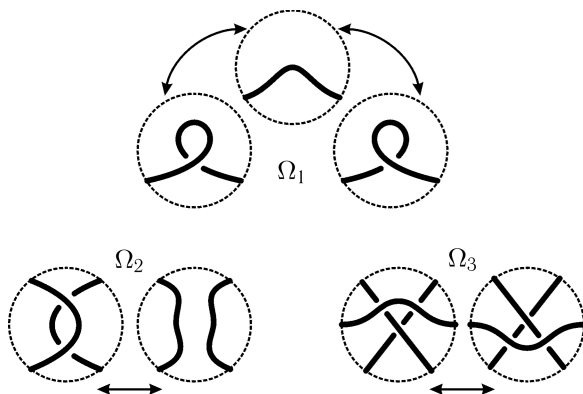


Рис. 3.1. Преобразования Рейдемейстера

Операции, изображенные на рис. 3.1, называются *преобразованиями Рейдемейстера* и обозначаются Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 . Эти преобразования соответствуют следующим ситуациям при манипуляциях с узлом:

- Ω_1 : появление (исчезновение) малой петли;
- Ω_2 : появление (исчезновение) парного перекрестка;
- Ω_3 : прохождение некоторой третьей ветви над перекрестком.

Следующий рисунок, представляющий процедуру развязывания, показывает, как преобразования Рейдемейстера могут участвовать в описании манипуляций с узлом.

Мы видим, что процедура начинается с исчезновения парного перекрестка на диаграмме (рис. 3.2 (а)), далее следует прохождение перекрестка (рис. 3.2 (б)), исчезновение парного перекрестка (рис. 3.2 (в)), исчезновение малой петли (рис. 3.2 (г)) и, наконец, исчезновение парного перекрестка (рис. 3.2 (д)). Читатель заметил, что между моментами, когда осуществлялись преобразования Рейдемейстера, диаграмма узла претерпевала вспомогательные тривиальные плоские преобразования (которые не изменяют, напомним, ни количества, ни взаимного расположения перекрестков).

Чтобы понять, откуда берутся преобразования Рейдемейстера, нужно задержаться немного на проекциях узлов.

Проекции общего вида и катастрофические проекции

Диаграмму узла мы определяли как проекцию на плоскость, выбранную «подходящим образом». Что означает это выражение? Математик ответил бы, что плоскость должна быть выбрана таким образом, чтобы проекция была *в общем положении*. Но это уточнение совершенно бесполезно

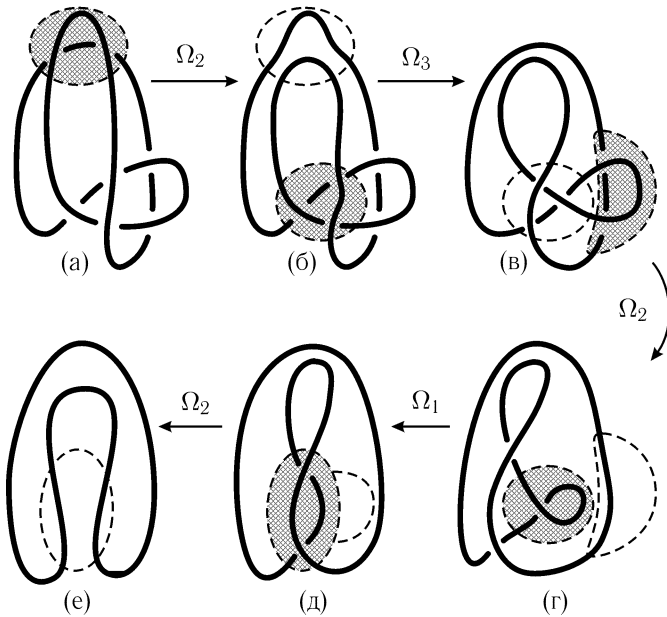


Рис. 3.2. Развязывание узла с использованием преобразований Рейдемейстера

для тех, кто не знаком с этим термином, являющимся одним из основных математических понятий*), — интуитивно ясным, но трудным для формализации.

Проекция в общем положении — это проекция без катастроф, т. е. сингулярностей или устранимых *вырождений* (от которых можно избавиться, немного изменяя проектируемый объект). Уточним, что означают все эти синонимы (катастрофа, сингулярность, вырождение) в случае узла, представленного замкнутой ломаной линией. При определении проекции в общем положении узла мы предполагаем, что

- (1) две вершины (или более) не могут проектироваться в одну точку;
- (2) вершина или несколько вершин не могут при проектировании попасть на ребро, которому они не принадлежат;
- (3) три внутренние точки (или более) не могут проектироваться в одну.

*) Особенно в так называемой теории катастроф (теории особенностей), основы которой были заложены в работах американца Хасслера Уитни (Hassler Whitney) в период между мировыми войнами и которая впоследствии была развита французом Рене Томом (René Thom), россиянином Владимиром Арнольдом и их учениками.

Существование такой проекции для любого узла очевидно и доказывается очень просто *): избавиться от каждой из «запрещенных ситуаций» (катастроф) (1), (2), (3) можно, слегка подвинув одну из вершин узла, т. е. эти катастрофы легко устранить.

Отметим, что ситуации (1), (2), (3) существенно отличаются от катастрофы *пересечения*, которая происходит, когда две *внутренние* точки двух различных ребер проектируются в одну точку: такая катастрофа неустранима (в том смысле, что любое небольшое шевеление узла немного меняет положение перекрестка на диаграмме, но не устраняет его полностью).

Заметим, кроме того, что катастрофы (2) и (3) встречаются в некотором смысле чаще чем остальные: хотя во множестве проектирований катастрофы — исключительные события, все же, если можно так сказать, они являются наиболее обычными среди исключительных событий. Случаются, разумеется, более редкие катастрофы (они также запрещены, поскольку являются частными случаями катастроф (1), (2), (3)). Например, 17 точек, из которых 5 являются вершинами, могут проектироваться в единственную точку; 7 ребер (перпендикулярных плоскости проекции) могут вырождаться в единственную точку и т.д.

Преобразования Рейдемейстера соответствуют как раз наименее редким катастрофам, что и показывает рис. 3.3.

Так, на рис. 3.3 (а) слева мы видим катастрофу типа (2). Первоначально малая петелька проектируется без особенностей, но в процессе ее разворачивания на мгновение две точки сливаются при проектировании в одну (образуя «клюв» на плоскости), а потом проектирование снова происходит без особенностей (а клюв исчезает); это отвечает преобразованию Рейдемейстера Ω_1 , показанному справа на рис. 3.3 (а). Проницательный читатель, изучая далее случаи (б) и (в) на рис. 3.3, увидит, что катастрофа типа (2) порождает преобразование Ω_2 , а катастрофа типа (3) порождает преобразование типа Ω_3 .

Достаточность преобразований Рейдемейстера

Теперь, когда мы знаем, откуда происходят преобразования Рейдемейстера, мы в состоянии обсудить его главный результат, часто называемый *леммой Рейдемейстера*.

Некоторый узел можно преобразовать в другой узел непрерывной манипуляцией в пространстве тогда и только тогда, когда диаграмму первого узла можно превратить в диаграмму второго узла за конечное число преобразований Рейдемейстера и тривиальных преобразований.

*) Заметим для продвинутого читателя, что доказательство аналогичного утверждения для узлов, заданных гладкой кривой, значительно сложнее и требует определенной техники.

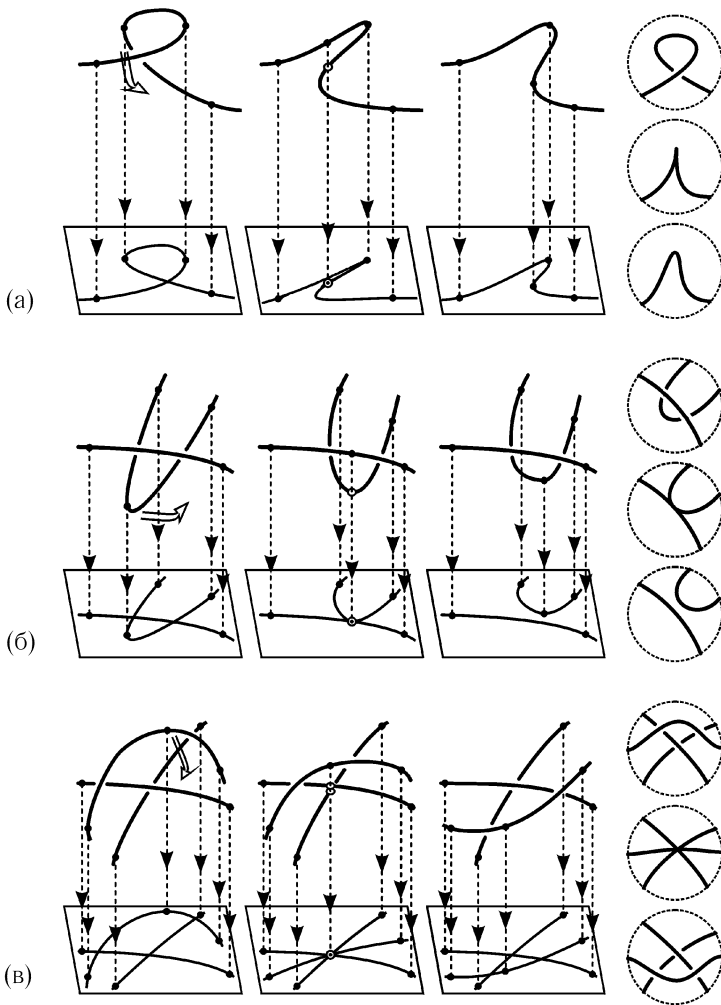


Рис. 3.3. Катастрофы и преобразования Рейдемейстера

Это утверждение означает, что можно изучить все пространственные манипуляции с узлами в пространстве, проводя тривиальные преобразования диаграмм на плоскости и применяя время от времени преобразования Рейдемейстера. Таким образом, Рейдемейстер свел задачу об эквивалентности узлов (трехмерную и достаточно абстрактную) к значительно более наглядной двумерной задаче преобразования диаграмм.

Прежде чем увидеть, что дает лемма Рейдемейстера для изучения (в частности, для классификации) узлов, скажем несколько слов о ее доказательстве. К сожалению (или к счастью — это зависит от точки зрения), известные мне доказательства не настолько просты, чтобы их можно было привести в этой книге. Для читателей, близких к математике, я бы просто сказал, что достаточно детально проанализировать одно элементарное треугольное движение (см. начало гл. 1) и чуть изменить его, чтобы оно стало движением «общего положения», т. е. чтобы при нем могли происходить только катастрофы (2) и (3) («наименее редкие»), а они — это мы уже видели — соответствуют в точности преобразованиям Рейдемейстера.

Лемма Рейдемейстера: классифицирует ли она узлы?

Поставим себя на место Рейдемейстера, только что доказавшего свою лемму и пребывающего в эйфории. Первоначальной целью его работы была классификация узлов, т. е. разработка алгоритма, определяющего, эквивалентны ли два узла (заданные диаграммами) или нет. Попробуем составить такой алгоритм, используя достижения Рейдемейстера.

Берем первый узел и сравниваем его со вторым. Если количество перекрестков и их взаимное расположение одинаковы, то узлы эквивалентны и мы достигли цели. В противном случае применяем (наугад) какое-нибудь преобразование Рейдемейстера к первому узлу — и сравниваем результат со вторым узлом. Если они совпадают, то эквивалентность узлов вновь установлена. В противном случае нужно взять из памяти первый, исходный, узел и применить к нему другое преобразование Рейдемейстера, затем опять сравнить со вторым узлом и т. д. Если все преобразования, которые можно применить к первому узлу, не дают результата, нужно вернуться к модифицированному первому узлу, применить к нему еще одно преобразование, сравнить и т. д. Если два узла эквивалентны, то рано или поздно получится последовательность преобразований Рейдемейстера, переводящая первый узел во второй.

Алгоритм, описанный выше, легко реализуем на компьютере, даже самом маломощном. Так, небольшой ноутбук, на котором я набираю этот текст, содержит, среди прочего, программу, которая может развязывать узлы (сравнивая их с тривиальным узлом так, как указано в предыдущем параграфе *).

Разрешается ли таким образом проблема классификации узлов?

*) Читатель может спросить — как же это компьютер «видит» узлы? На самом деле существует несколько методов «кодирования» узлов. Например, тот, которым я пользуюсь в своей программе распутывания узлов, использует следующую кодировку трилистника:

$$1+ -2-3+ -1-2+ -3-$$

Мой компьютер эту запись понимает. А вы?

Разумеется, нет. Дело в том, что алгоритм, описанный выше, примененный к двум неэквивалентным узлам, не останавливается никогда: он продолжает работать бесконечно не давая ответа. Пользователь встает перед дилеммой: если программа не дает ответа после, к примеру, целых суток работы — следствие ли это того, что данный узел не тривиален, или компьютеру просто требуется еще время, чтобы найти последовательность операций, развязывающих узел?

Следует ли сразу ставить крест на идее Рейдемейстера? Нет, поскольку есть одно соображение, которое может спасти ситуацию. Это соображение, я уверен, рано или поздно пришло в голову Рейдемейстеру, и оно вызвало у него, наверное, то особое чувство, которое испытывает иногда исследователь: чувство, что ты находишься на пороге открытия. (Заметим, что за этим чувством нас довольно часто ждет разочарование, возникающее, когда мы видим, что идея, захватившая нас, не приводит к цели.)

Соображение это очень простое: преобразования Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 могут либо уменьшать число перекрестков (исчезновение малой петли, исчезновение парного перекрестка), либо его увеличивать (возникновение малой петли или парного перекрестка), либо, наконец, не изменять его (Ω_3 , проход над двойной точкой). Поскольку речь идет о развязывании, т. е. об упрощении узла, преобразования Ω_1 и Ω_2 следует использовать только в тех случаях, когда они уменьшают число перекрестков. При выполнении такой процедуры число перекрестков уменьшается и алгоритм, улучшенный таким образом, всегда завершает работу: либо перекрестков не останется вовсе (тогда данный узел тривиален), либо ни одно из допустимых преобразований не применимо *) (и узел не тривиален).

Увы! Эта аргументация (с виду такая убедительная) является ошибочной. Дело в том, что в реальности не всегда можно развязать узел, упрощая его (уменьшая число перекрестков) на каждом этапе развязывания: иногда узел нужно усложнить, прежде чем упрощать его! Так часто приходится делать и в жизни: узел наших проблем следует еще больше запутать для того, чтобы он смог затем распутаться.

Пример тривиального узла, который не упрощается (его можно развязать, только увеличив сначала число перекрестков), представлен на рис. 3.4.

Надежда получить простой и эффективный метод классификации узлов с помощью леммы Рейдемейстера оказалась, таким образом, слишком оптимистичной.

*) Видимо, здесь следует заметить, что для данной проекции узла число различных применений операции Ω_3 конечно. Далее, нужно договориться, чтобы программа никогда не делала следующую глупость: после применения операции Ω_3 тут же применить эту операцию в обратную сторону. Иначе может возникнуть бессмысленный и бесполезный цикл (в компьютерном смысле) в программе. То же самое можно сказать и про операции Ω_1 и Ω_2 .

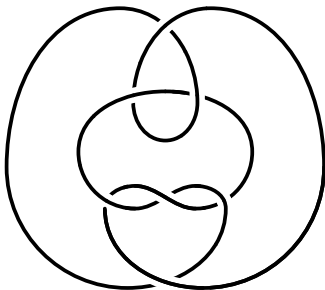


Рис. 3.4. Тривиальный неупрощаемый узел

Нужно сказать, что в дальнейшем придумывание плохо распутываемых тривиальных узлов стало важной частью исследований алгоритмов распутывания. Особенно варварский пример узла такого типа (*очень* трудно для распутывания — попробуйте!) показан на рис. 3.5. Этот пример принадлежит немецкому математику Вольфгангу Хакену. Это он, кстати, в конце концов разрешил проблему развязывания узлов (Накен, 1961), но его алгоритм (слишком сложный для реализации на компьютере) основывается на идеях совсем другого порядка.

Что осталось от леммы Рейдемейстера?

Крушение наших наивных надежд не означает, что роль леммы Рейдемейстера ограничивается составной частью неработающего алгоритма. В развиваемой далее теории эта лемма занимает существенное место, особенно в изучении инвариантов узлов, придуманных новозеландцем Воаном Джонсом, американцем Луисом Кауффманом (Louis Kauffman) и их последователями (гл. 6). Чтобы доказать, что некоторая функция диаграмм узлов, предлагаемая в качестве нового инварианта, действительно представляет собой инвариант, достаточно показать, что эта функция не меняется в течение всего процесса манипуляций с узлами; а для этого, по лемме Рейдемейстера, достаточно проверить, что она не меняется при преобразованиях Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 ; но эти преобразования очень просты, так что проверка обычно оказывается легкой.

Есть еще одно обстоятельство. Наша неудача с алгоритмом развязывания, описанным выше, относительно. С точки зрения теории, он не будет настоящим алгоритмом развязывания, если не будет доказано, что процесс полного перебора операций Рейдемейстера для развязывания обязательно приводит к цели за *ограниченное* число шагов. Именно это недавно доказали Дж. Хасс (Joel Hass) и Дж. Лагариас (Jeffrey Lagarias). Но увы,

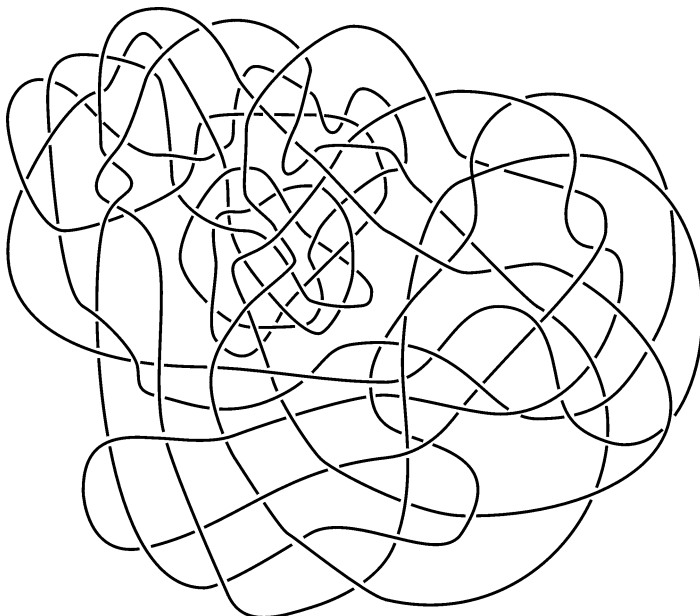
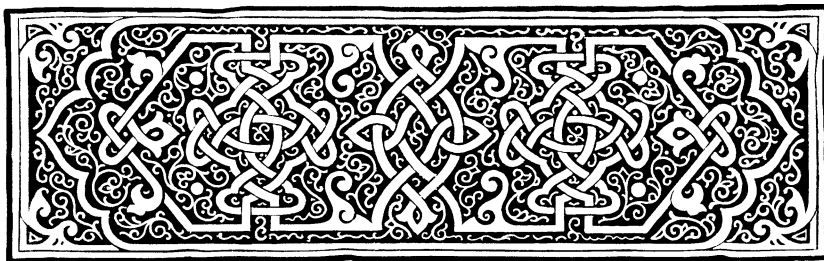


Рис. 3.5. «Гордиев узел» Вольфганга Хакена

оценка числа шагов, полученная авторами, астрономическая, и нет надежд реализовать соответствующий алгоритм на компьютере.

Есть и другие подходы к этой задаче, позволяющие компьютеру (достаточно мощному) распутывать узлы, с которыми не удастся справиться «вручную». В частности, Иван Дынников придумал красивый способ развязывания: его компьютер справляется с гордиевым узлом Хакена за несколько микросекунд.

Если же действовать вручную, нам для развязывания гордиева узла Хакена остается лишь «алгоритм» Александра Македонского — разрубить этот узел!



Глава 4. Арифметика узлов

(Шуберт, 1949)

Арифметика... *узлов*? Именно так, поскольку не только натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5,... можно перемножать и раскладывать на простые множители. То же самое можно делать и с другими математическими объектами, в частности с узлами. При этом их арифметика очень похожа на арифметику натуральных чисел: она тоже обладает коммутативным умножением (которое называется композицией) и теоремой о единственности разложения на «простые узлы». Доказательство этого фундаментального принципа, который казался интуитивно ясным многим исследователям, оказалось трудным (как, кстати, и доказательство такого же принципа, относящегося к числам) и было получено лишь в 1949 г. немецким математиком Хорстом Шубертом.

Каждое положительное целое число раскладывается на простые множители единственным (с точностью до порядка сомножителей) образом: например,

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7;$$

точно так же и каждый узел является произведением (единственным с точностью до порядка сомножителей) простых узлов (например, узел на рис. 4.1 слева равен композиции двух узлов-трилистников и одного «турецкого тюрбана»).

Читатель уже понял, что «произведение» узлов заключается, грубо говоря, в завязывании их один за другим (так же, как это делается для кос, заметит тот, кто прочел гл. 2). Чтобы уточнить эту операцию, мы поместим узлы *) в ящики: мы представляем, таким образом, каждый узел как

*) Которые, напомним, были ранее определены как замкнутые кривые без самопересечений в трехмерном пространстве.

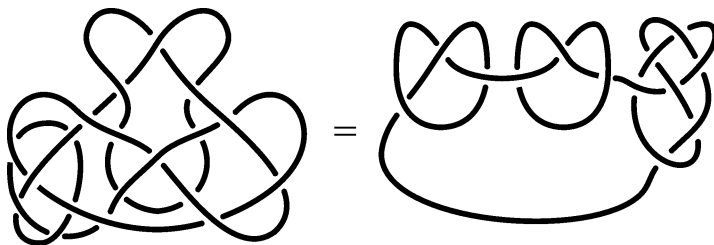


Рис. 4.1. Разложение узла на простые узлы

завязанную бечевку внутри кубического ящика, при этом ее концы приклеены к ящику с двух противоположных сторон (рис. 4.2 (а)). (Мы оставляем на долю читателя, уже испорченного математическим образованием, позаботиться о превращении этого интуитивного описания в строгое математическое определение.) Легко видеть, что нужно сделать, чтобы превратить узел в ящике в узел, являющийся замкнутой кривой: достаточно соединить два конца бечевкой вне ящика, и наоборот.

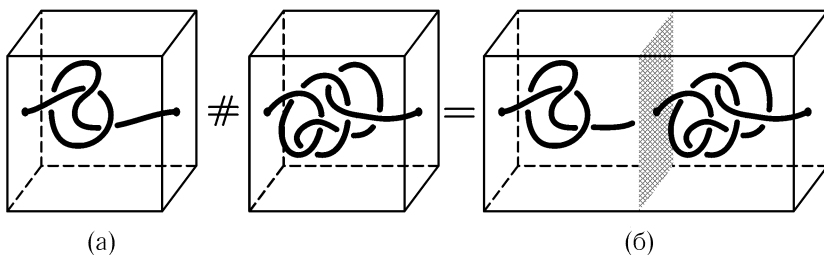


Рис. 4.2. Композиция узлов, расположенных в ящиках

Как только все узлы помещены в ящики, нет ничего более простого, чем определение их *композиции*, или *произведения*: *) достаточно приставить ящики один к другому и убрать двойную перегородку, которая их разделяет **) (рис. 4.2 (б)).

*) Операция композиции узлов часто называется (несправедливо!) «связной суммой»; мы избегаем этого неудачного термина.

**) Педантичный читатель скажет, что полученный ящик теперь не кубический, и, следовательно, узел-композиция не является узлом. Он прав. В отместку оставим за ним труд самому изменить определение так, чтобы нечего было возразить.

Наша ближайшая цель — изучить основные свойства композиции узлов. Первым свойством является *ассоциативность*:

$$(a \# b) \# c = a \# (b \# c),$$

где символ $\#$ обозначает композицию узлов. Эта формула означает, что, перемножив сначала два узла a и b , а затем умножив полученный узел на третий узел c , мы получим тот же результат, как если бы перемножили сначала два узла b и c , а затем умножили узел a на полученный узел. Это утверждение очевидно, так как оно означает, по существу, что в обоих случаях мы составляем вместе три ящика и затем убираем две перегородки (в разном порядке, конечно, но результат один и тот же).

Следующее свойство — существование тривиального узла, обозначаемого 1 , не меняющего узла, с которым он перемножается (как и число 1 не изменяет числа, с которым оно перемножается):

$$a \# 1 = a = 1 \# a.$$

Разумеется, это узел, который «не завязан» и который можно представлять как прямолинейно натянутую бечевку в кубическом ящике. Приставление такого ящика к ящику какого-то узла, очевидно, не изменяет тип этого узла.

Следующее свойство более тонкое и заслуживает отдельного подзаголовка.

Коммутативность композиции узлов

Так же как и произведение чисел, композиция узлов *коммутативна* (результат не зависит от порядка множителей):

$$a \# b = b \# a.$$

Это соотношение совсем не очевидно, но его доказательство, показанное схематически на рис. 4.3, доставит, я уверен, удовольствие читателю.

Что происходит на этом рисунке? Сначала, потянув за концы бечевки, образующей первый узел, получаем маленький затянутый узелок (рис. 4.3 (б)). Затем протаскиваем этот узелок вдоль бечевки и далее через весь второй узел (рис. 4.3 (в)). Малый узелок проходит (все время скользя вдоль бечевки) большой узел и оказывается справа от него (рис. 4.3 (г)). Наконец, переводим второй узел в первый ящик, затем расслабляем малый узелок. И — ура! Фокус удался (рис. 4.3 (д)).

Читателю, возможно, трудно представить, как узел может «скользить вдоль бечевки». Самое простое средство — взять подходящую бечевку (подойдет шнурок от ботинка) и проделать описанную процедуру. Эта

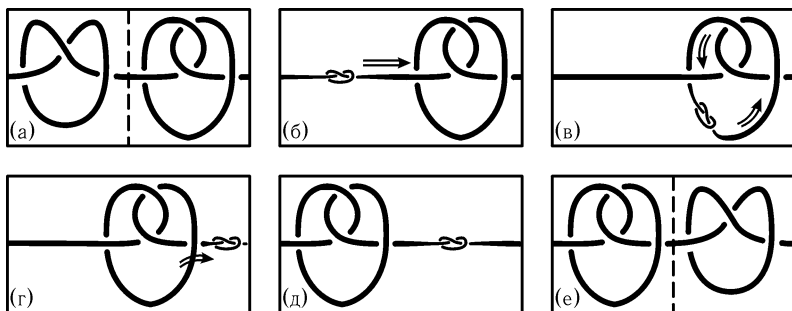


Рис. 4.3. Композиция узлов не зависит от порядка сомножителей

же процедура, осуществляемая некоторыми организмами на самих себе, дает нам повод сделать еще одно отступление, на этот раз биологическое.

Отступление: живой узел

Странное морское существо, о котором пойдет речь, называется *миксина*. Она живет в морях средних широт, на большой глубине. У нее очень гибкий позвоночник, настолько гибкий, что она легко может завязаться узлом. Кроме того, в случае опасности миксина выделяет ядовитый слизистый секрет и покрывает им свое тело. Для этого она быстрым движением завязывает свой хвост узлом; этот узел скользит вдоль всего корпуса, нанося выделяемый в это время секрет по всей длине тела (рис. 4.4 (а)).

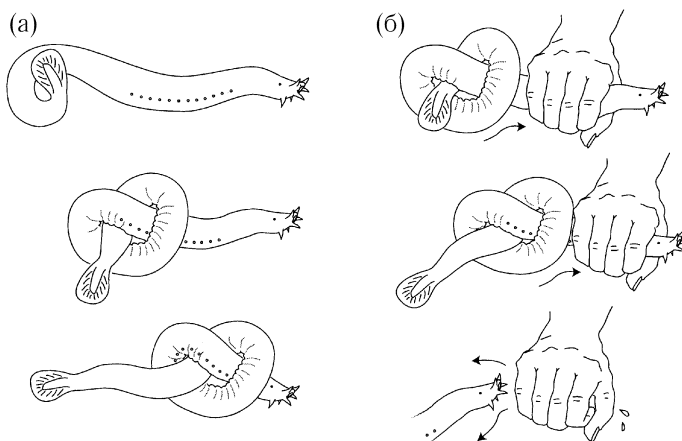


Рис. 4.4. Как миксина сдвигает свой узел

Если вы схватите миксину рукой, она ловко вывернется у вас из пальцев. И не только из-за слизи, но также благодаря узлу, который она перемещает вперед от хвоста к голове, упираясь с силой в кулак, в то время как голова вытягивается назад, — и она выскальзывает из кулака (рис. 4.4 (б)). Это вытягивание с помощью узла позволяет миксине осуществлять другие жизненные функции, например, питание, которое она осуществляет высасыванием (эти животные — падальщики и не оставляют от своих жертв ничего, кроме кожи и скелета).

И, наконец, когда опасность прошла, миксина освобождается от своего слизистого покрытия (иначе она задохнется в своем липком коконе) таким же скользящим узлом от хвоста к голове. (По поводу других подробностей об этом своеобразном существе см. Jensen, 1966.)

Можно заметить, что узел миксины является трилистником (простым узлом), чаще всего левым трилистником. Миксина, видимо, не знает, как делаются другие узлы; но можно легко представить подобное существо, только более длинное и с еще более гибким позвоночником, которое способно завязываться в более сложные узлы.

Однако оставим в стороне биологические узлы и вернемся к их математическим моделям (более симпатичным, надо признать).

Может ли один узел аннулироваться другим?

Когда определена композиция узлов, естественно возникает вопрос: существуют ли *обратные* узлы, т. е. можно ли для данного узла найти другой узел, такой, что его композиция с первым даст тривиальный узел? Более наглядно: если есть узел на одном конце бечевки, можно ли завязать на другом конце такой узел, чтобы эти два узла взаимно уничтожили друг друга, если потянуть за концы бечевки?

Ответ на аналогичный вопрос для целых чисел отрицателен: для натурального числа $n > 1$ нельзя найти такое натуральное число m , что $n \cdot m = 1$. (Конечно, можно взять $m = 1/n$, но m будет тогда дробью, а не натуральным числом.)

Мы сейчас увидим, что точно так же обстоит дело и с узлами: *никакой нетривиальный узел не обладает обратным узлом*. Это утверждение далеко не очевидно. На первый взгляд оно кажется даже неверным: почему нельзя сделать на другом конце бечевки «симметричный» узел, который аннулирует первый *)? Мы предлагаем читателю вначале поэкспериментировать с бечевкой, начиная с узла-трилистника. Последующая за этим неудача, возможно, заставит его задуматься. Мы же переходим к «доказательству» того, что никакого обратного узла не существует.

*) Эта идея, конечно, придет в голову читателю, усвоившему главу о косах, для которых эта конструкция прекрасно работает.

Рассуждаем от противного: предположим, что a и b — такие узлы (нетривиальные, т. е. $a \neq 1$, $b \neq 1$), что $a \# b = 1$. Рассмотрим бесконечную композицию

$$C = a \# b \# a \# b \# a \# b \# a \# b \# a \# b \# a \# b \# a \# b \# \dots$$

Эта композиция равна, с одной стороны, тривиальному узлу, так как можно записать

$$C = (a \# b) \# (a \# b) \# (a \# b) \# \dots = 1 \# 1 \# 1 \# \dots = 1.$$

С другой стороны, расставив скобки иначе, получаем

$$\begin{aligned} C &= a \# (b \# a) \# (b \# a) \# \dots = a \# (a \# b) \# (a \# b) \# \dots = \\ &= a \# (1 \# 1 \# \dots) = a \# 1 = a. \end{aligned}$$

Получается, следовательно, что $a = 1$, что противоречит предположению $a \neq 1$. Это противоречие «доказывает», таким образом, что обратных узлов не существует.

Кавычки в предыдущей фразе дают знать, что в приведенном доказательстве есть сомнительные места. Действительно, возвращаясь к целым числам, можно так же «доказать», что $1 = 0$: достаточно рассмотреть бесконечную сумму $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ и расставить скобки двумя различными способами, точно так же, как выше. Ошибка в этих доказательствах одна и та же: нельзя обращаться с бесконечными суммами или композициями (которые надо бы предварительно определить) так, как обращаются с конечными суммами (композициями).

Однако в случае узлов небольшая модификация рассуждения превращает его во вполне строгое. Для этого копии узлов a и b ставятся, чередуя их друг с другом, в бесконечную последовательность ящиков, которые становятся все меньше и меньше и сходятся к одной точке (так и определяется, кстати, бесконечная композиция (рис. 4.5)). После этого остается заменить сомнительные алгебраические операции корректно определенными топологическими.

Мы опускаем описание технических деталей *). Читатель должен поверить на слово, что хитроумное доказательство с помощью бесконечной композиции есть нечто большее, чем блестящий софизм (такой, как об Ахилле и черепахе), оно основано на строгом математическом построении.

*) Для читателя, близкого к математике, заметим, что для применения аргументов, представленных на рис. 4.5, нужно, в частности, использовать другое определение эквивалентности узлов, основанное на понятии гомеоморфизма.

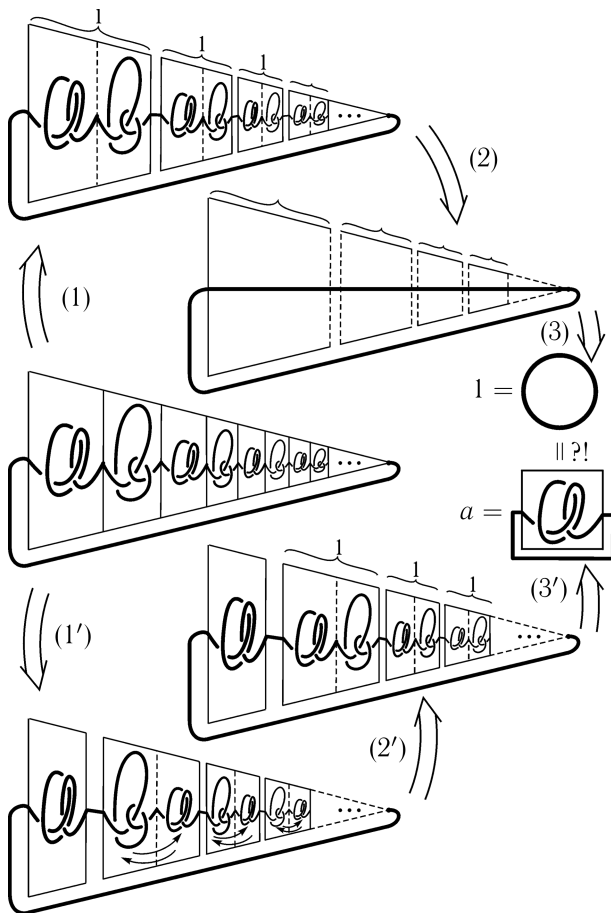


Рис. 4.5. Узел не может занулить другой узел

Отметим в заключение этого раздела, что автор идеи не именно этого, но схожего построения — не специалист в теории узлов, а философ и немецкий политический деятель, один из гениальнейших математиков своего времени, создавший независимо от Ньютона дифференциальное и интегральное исчисление, — Вильгельм Лейбниц. Он использовал это математическое построение совершенно в другом контексте (теории узлов в то время не существовало). Оно ему понадобилось для строгого доказательства одной теоремы о классическом объекте дифференциального исчисления — условно сходящихся рядах.

Простые узлы

Мы только что видели, что не существует понятия обратного узла, так же как нет обратных натуральных чисел (что означает, в другой терминологии, что у числа 1 нет других делителей, кроме него самого). Читатель, наверное, помнит со школьных лет определение простых чисел: это числа, которые не имеют других делителей, кроме самого себя и 1. Это простое определение порождает загадочный ряд чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, ... ,

находящийся в центре внимания математиков с древнейших времен. А какова ситуация для узлов? Существуют ли *простые узлы*, т. е. узлы, которые нельзя представить в виде композиции двух других нетривиальных узлов? Ответ положительный: трилистник, восьмерка и вообще все узлы из таблицы на рис. 1.5 — простые, в то время как квадратный (он же прямой) узел, который скауты называют «двойным узлом» (рис. 4.6 (г)), и узел на рис. 4.6 (д) являются *составными узлами*.

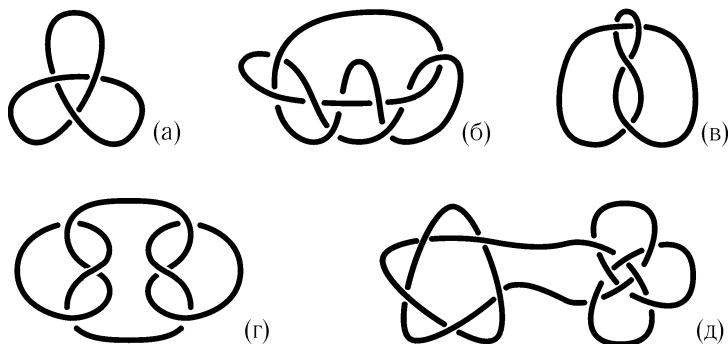


Рис. 4.6. Узлы простые (а, б, в) и составные (г, д)

Как установить, что простые узлы существуют? Как доказать, например, что трилистник — простой узел? Идея, которая сразу же приходит в голову, — использовать минимальное число перекрестков узлов: если бы трилистник (у которого три перекрестка) был составлен из двух других нетривиальных узлов, последние имели бы по меньшей мере три перекрестка каждый (так как все узлы с двумя или менее перекрестками тривиальны). Три плюс три равно шести, шесть больше трех — из полученного

противоречия следует нужное нам утверждение. К сожалению, этой аргументации недостаточно, так как мы не доказали, что *минимальное число пересечений составного узла равно сумме минимальных чисел двух узлов-сомножителей*. Есть гипотеза, что это утверждение верно, однако оно до сих пор не доказано.

Итак, каждый узел раскладывается в композицию простых узлов. Для каждого натурального числа разложение на простые множители единственное. А верно ли это для узлов?

Единственность разложения на простые узлы

Здесь также имеется полная аналогия с натуральными числами: каждый узел раскладывается на простые узлы единственным образом (с точностью до порядка). Получить доказательство этой замечательной теоремы было заветным желанием многих исследователей. Немец Хорст Шуберт решил эту проблему в 40-х годах прошлого столетия. Однако его доказательство, одновременно фундаментальное и технически сложное, остается за рамками нашей книги.

Теорема Шуберта, вместе с другими общими свойствами узлов и целых чисел, приводит нас к естественной идее занумеровать узлы так, чтобы нумерация отражала разложение на простые множители. Такая нумерация каждому простому узлу сопоставляла бы простое число, а каждому составному узлу — составное число таким образом, чтобы простые множители, на которые раскладывается число-номер, были бы номерами простых множителей узла. Увы! Хотя такая нумерация в принципе существует, нет естественного алгоритма, который бы ее строил.

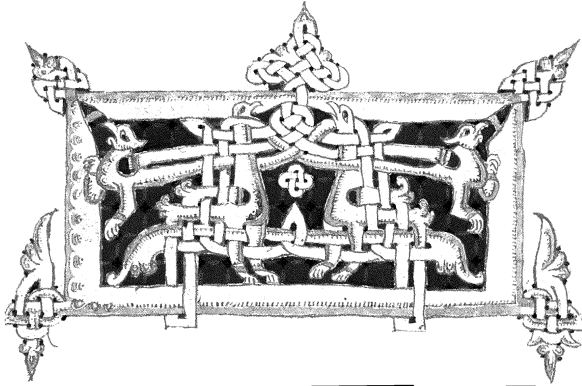
Основная причина такого положения вещей в том, что, в отличие от чисел, неизвестно, как складывать два узла; мы умеем только строить их композицию (перемножать). Каждое целое положительное число может быть получено сложением подходящего числа единиц (1 — «тривиальное» число относительно умножения), например, $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Но нельзя получить все узлы, «складывая экземпляры тривиального узла», такой операции сложения не существует *).

Другая причина, по которой не существует естественной нумерации узлов, — это отсутствие порядка во множестве узлов. Натуральные числа обладают естественным полным порядком ($1, 2, 3, 4, 5, \dots$); какого-нибудь порядка, подобного этому, не существует (или он пока еще не открыт) для узлов. Конечно, обычно упорядочивают узлы числом минимальных

*) Было бы точнее сказать, что неизвестно, существует ли подходящая операция сложения; известно только то, что те, кто ее искал, не добились успеха. Можно, по крайней мере, с уверенностью сказать, что если она существует, то геометрическое сложение узлов далеко не просто... в противном случае кто-нибудь уже нашел бы эту операцию.

перекрестков у их диаграмм, но этот порядок не является линейным: можно ли сказать, какой из двух узлов с пятью перекрестками (см. таблицу узлов на рис. 1.5) «меньше», а какой — «больше»?

Итак, арифметика узлов не привела нас к их классификации. Тем не менее, я не считаю, что здесь уместно говорить о поражении: теорема Шуберта не нуждается в следствиях — это пример высшего пилотажа в математике.



Глава 5. Хирургия и инварианты

(Конвей, 1973)

В 1973 г. английский математик Джон Конвей ввел две маленькие и очень простые «хирургические операции», два способа изменения узла в окрестности перекрестка; этим операциям было суждено сыграть фундаментальную роль в теории узлов.

Первая операция, которую мы называем *переброской*, состоит в преобразовании выбранного перекрестка (на плоской диаграмме узла) в противоположный перекресток — верхняя ветвь становится нижней и наоборот (рис. 5.1); с бечевкой переброска может быть реализована разрезанием верхней ветви и склеиванием ее под второй ветвью.

Конечно, переброска может изменить тип узла; например, применив переброску к одному из перекрестков трилистника, мы получаем тривиальный узел (трилистник развязывается — проверьте это, сделав рисунок).

Вторая малая хирургическая операция Конвея — *разрешение* — состоит в ликвидации пересечения путем взаимной замены ветвей (рис. 5.2 (а)); с бечевкой она реализуется разрезанием обеих ветвей в точке пересечения и последующим склеиванием их «наоборот» (рис. 5.2 (б)). Отметим, что, когда ветви не ориентированы, имеется два способа склеить попарно четыре конца (рис. 5.2 (б), (в)), однако ориентация узла определяет однозначный выбор концов для склейки (он диктуется стрелками, как на рис. 5.2 (а)).

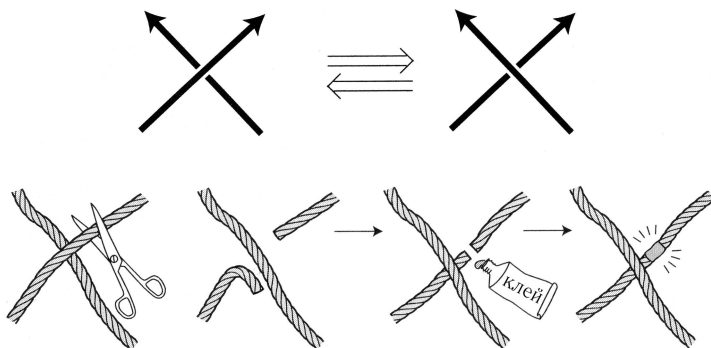


Рис. 5.1. Переброска: верхняя дуга становится нижней

Переброска и разрешение были известны и часто использовались топологами и до Конвея. В частности, американец Александр использовал их для вычисления полиномов, носящих его имя (о них речь впереди). Вклад Конвея состоял в том, что он показал, что эти две операции можно использовать в качестве базы для *определения* инварианта узлов совершенно элементарным образом (полинома Конвея, который появится немного позже в этой главе).

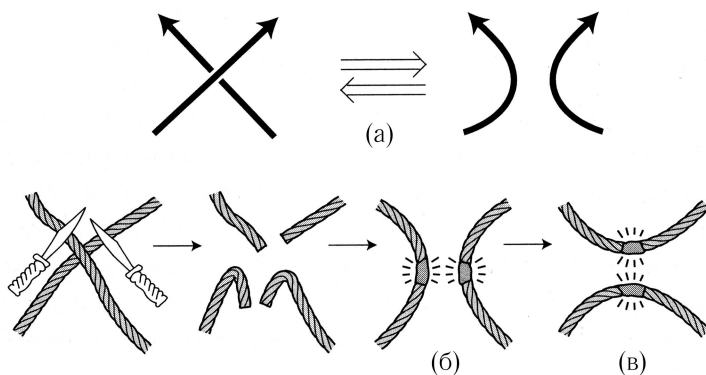


Рис. 5.2. Разрешение перекрестка: дуги разрезаются и переклеиваются «наоборот»

На самом деле важность операций Конвея выходит далеко за рамки теории узлов. Эти операции играют существенную роль в жизни как таковой и постоянно используются природой в процессе размножения биологических существ. Для описания этой роли — достаточно необычной — стоит сделать небольшое отступление.

Отступление: молекулы-узлы, ДНК и топоизомеразы

Важность молекулы ДНК, открытой Уотсоном и Криком, — молекулы, несущей генетический код, — поставила перед биохимиками целую серию топологических проблем. Эта длинная закрученная двойная спираль может, как известно, воспроизводить свою копию, затем разделяясь в две одинаковые молекулы, которые — в отличие от двух нитей исходной молекулы — не зацеплены между собой и могут разойтись. Как это возможно топологически?

Достаточно тонкие исследования показали, что существуют ферменты, выполняющие эту задачу. Они называются топоизомеразы. Точнее, топоизомеразы позволяют осуществлять три основных операции, представленные на рис. 5.3.

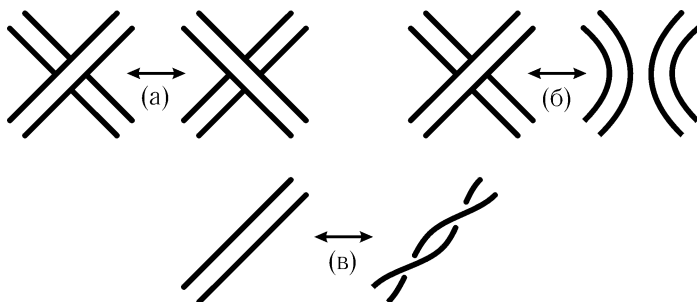


Рис. 5.3. Схемы операций, производимых топоизомеразы над ДНК

Читатель сразу же узнает операции (а) и (б): это, конечно, переброска и разрешение Конвея! Третья операция, которая называется *твист*, также известна в топологии; она имеет отношение к математической теории лент, весьма полезной в современной теоретической физике.

Рассмотрим более детально, как действуют эти необычные ферменты на длинные молекулы, в частности на молекулы ДНК. Нужно сразу же подчеркнуть, что наблюдать визуально это действие, происходящее на молекулярном уровне, невозможно: даже самые мощные электронные микроскопы позволяют получить лишь косвенные сведения.

Напомним вначале, что молекула ДНК представляет собой длинную двойную спираль, каждая нить которой состоит из оснований А, Т, Г, Ц, порядок которых на нити кодирует генетические свойства индивидуума (это похоже на то, как порядок цифр 0, 1, 2, . . . , 9 в строке текста дает десятичный код числа). На рис. 5.4 схематично представлена часть молекулы ДНК.

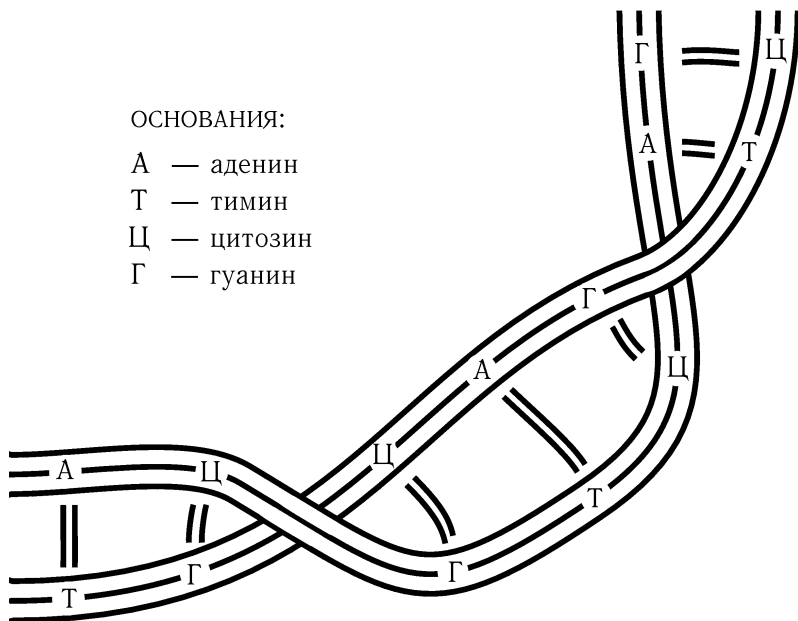


Рис. 5.4. Структура молекулы ДНК из двух нитей

Известно, что концы двух нитей ДНК обычно свободны. Существуют и молекулы из двух замкнутых нитей (две сплетенные змеи, кусающие свои хвосты), а также молекулы, состоящие из единственной нити, как замкнутой, так и со свободными концами. Эти молекулы участвуют в трех классических генетических процедурах: *репликации*, *транскрипции* и *рекомбинации*; кроме того, молекулы из двух нитей способны *свертываться* (превращаться из вытянутых в компактно упакованные объекты). Топоизомеразы играют решающую роль во всех этих процессах, осуществляя операции разрезания, перекомпоновки и склейки. Во-первых, они могут разрезать нить, переместить другую нить через полученное отверстие и затем заклеить разрез (это — *переворота Конвея*). Кроме того, осуществив два разреза и два склеивания, они соединяют две нити «наоборот» (*разрешение Конвея*).

Точный механизм операций разрезания, передвижения и склейки сегодня еще недостаточно изучен. Известно тем не менее, что существуют различные типы топоизомераз (они разные для ДНК из одной и двух нитей). В работе Джеймса Ванга (James Wang) описано, как происходит свертывание (и обратная процедура) замкнутой молекулы ДНК.

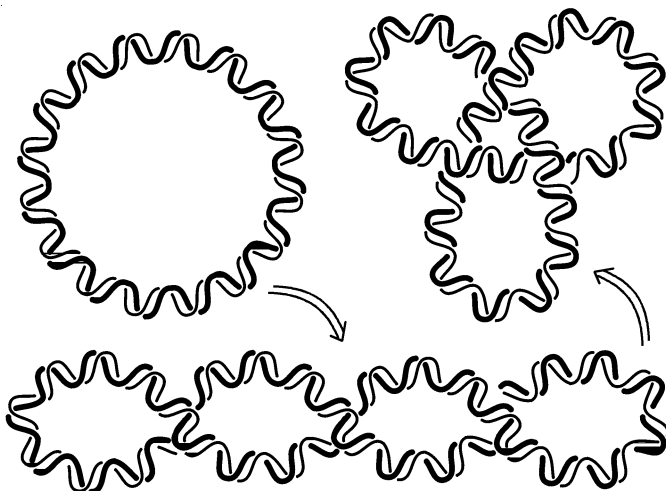


Рис. 5.5. Свертывание в клубок молекулы ДНК из двух нитей

Свертывание ДНК похоже на то, что часто происходит с телефонным шнуром в форме длинной спирали. Когда вы после разговора опускаете трубку на аппарат, подводящий шнур немного подкручивается, постепенно запутываясь все больше и больше, и становится бесформенным компактным клубком. Это, конечно, досадно, поскольку сокращается расстояние, на которое можно отойти от аппарата. Свертывание ДНК также преобразует длинную спираль в компактный клубок, но в данном случае это полезный результат: преобразование длинной молекулы (длина которой несколько сантиметров) в маленький клубок позволяет ей легко войти в ядро клетки, размеры которого измеряются в ангстремах *).

В своем нормальном состоянии (не свернутом) спираль ДНК делает полный оборот на протяжении части нити, содержащей 10,5 последовательных оснований. Осуществляя твист большое число раз (посмотрите опять на рис. 5.3 (в)), соответствующие топоизомеразы преобразуют простую замкнутую кривую ДНК так, как это показано на рис. 5.5.

Отметим, что, с топологической точки зрения, одним из результатов твиста является изменение *индекса зацеплений* двух ветвей ДНК (этот инвариант, восходящий к Гауссу, измеряет, сколько раз одна ветвь оборачивается вокруг другой). Существуют и другие топологические явления, которые играют существенную роль в биологии; однако детальное описание

*) Один ангстрем есть одна десятиллиардная доля метра.

полученных здесь результатов не входит в наши намерения. Более полную информацию читатель может найти в статье Ванга (Wang, 1994).

Инварианты в теории узлов

Возвратимся к математической теории узлов, чтобы поговорить, наконец, об *инвариантах*. Что они собой представляют и для чего нужны?

Чаще всего инварианты используются для обоснования отрицательного ответа на самый естественный вопрос, касающийся узлов. Этот вопрос мы назвали *проблемой сравнения*: как определить, глядя на две диаграммы, представляют ли они один и тот же узел или два разных узла? Так, диаграммы (а) и (д) на рис. 5.6 представляют один узел — трилистник; действительно, на этом же рисунке можно видеть, как представление (а) может быть переведено в представление (д). Напротив, все наши усилия преобразовать диаграмму (е) в какое-нибудь представление трилистника приведут к неудаче (попробуйте!) Но как это доказать? То, что мы не сумели перейти от одной схемы к другой, ни о чем не говорит: может быть, это удастся сделать кому-нибудь более находчивому или везучему.

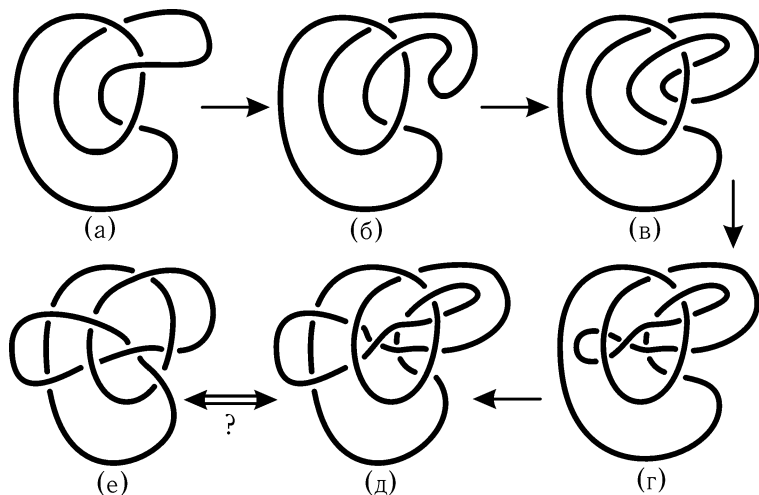


Рис. 5.6. Шесть представлений одного и того же узла?

Предположим теперь, что в нашем распоряжении есть инвариант узла, т. е. способ, позволяющий связывать с каждой диаграммой узла соответствующий алгебраический объект (число, многочлен) таким образом, что этот объект *не изменяется*, когда мы преобразуем узел, как на

рис. 5.6 (а)–(д). Возьмем две диаграммы (например, (е) и (д) на рис. 5.6), и вычислим значения инварианта. Если полученные значения различны, можно заключить, что *эти две диаграммы наверняка не могут определять один и тот же узел*.

Например, вычисление полиномов Конвея (что это такое — мы объясним далее) для диаграмм (а) и (е) на рис. 5.6 дает соответственно $x^2 + 1$ и $-x^4 + x - 1$; значит, эти две диаграммы представляют два разных узла.

Прежде чем перейти к изучению инварианта Конвея, попытаемся найти самостоятельно какой-нибудь численный инвариант узлов. Первая идея, которая приходит в голову, — это ассоциировать с каждой диаграммой количество перекрестков. Увы! Это число не инвариант: когда мы манипулируем с узлом в пространстве, на плоской проекции одни перекрестки могут появляться, а другие исчезать (см., например, рис. 5.6). (Для тех, кто прочел гл. 3, заметим, что две операции Рейдемейстера изменяют количество перекрестков: первая добавляет к нему ± 1 , вторая ± 2 перекрестка.)

Однако, отталкиваясь от этой идеи, легко определить инвариант узлов: достаточно рассмотреть *минимум* $c(N)$ числа перекрестков на *всех* проекциях узла N . Это число (которое является целым неотрицательным) — инвариант по определению, поскольку оно не зависит от данной конкретной проекции, ведь его определение опирается на множество всех проекций. К сожалению, этот инвариант бесполезен для сравнения узлов: непонятно, как его вычислять, основываясь на конкретной проекции. Поскольку сегодня не известен никакой алгоритм для его вычисления в общем случае, мы переходим к более сложному, но вычислимому инварианту — инварианту Конвея.

Полином Конвея

Для каждой диаграммы N ориентированного узла Конвей строит многочлен $\nabla(N)$ от одной переменной x . Этот многочлен должен удовлетворять трем следующим условиям.

(I) *Инвариантность*. Две диаграммы одного и того же узла имеют один и тот же полином

$$N \sim N' \Rightarrow \nabla(N) = \nabla(N').$$

(II) *Нормализация*. Полином тривиального узла равен единице, рассматриваемой как «полином нулевой степени»:

$$\nabla\left(\bigcirc\right) = 1.$$

(III) *Скейн-соотношения* *) *Конвея*. Выполняется равенство

$$\nabla(N_+) - \nabla(N_-) = x\nabla(N_0),$$

где три диаграммы N_+ , N_- , N_0 совпадают вне окрестности некоторого пересечения, а внутри этой окрестности имеет место следующая ситуация:

$$N_+ : \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \end{array}; \quad N_- : \begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \end{array}; \quad N_0 : \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \\ \text{---} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array}$$

(т.е. N_0 и N_- получаются из N_+ переброской и разрешением соответственно).

Например, когда N_+ определяет узел-трилистник, соотношения Конвея дают следующие узлы:

$$-\nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \\ \text{---} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array}\right) + \nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \end{array}\right) = x\nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \\ \text{---} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array}\right). \quad (*)$$

Внимательный читатель заметит, что в данном случае диаграмма N_0 не является диаграммой узла: она состоит из *двух* замкнутых кривых вместо одной — это диаграмма *зацепления* (набора кривых в пространстве, которые завязываются отдельно или переплетаясь друг с другом). Это нам не мешает — полином Конвея определяется как раз для зацеплений, частным случаем которых являются узлы.

В дальнейшем, мы будем записывать соотношения Конвея (и другие подобные соотношения) в следующей символической форме:

$$\nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \end{array}\right) - \nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \end{array}\right) = x\nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \\ \text{---} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array}\right).$$

Это означает, что речь идет о трех зацеплениях, совпадающих вне некоторой ограниченной пунктиром окрестности одного и того же перекрестка; при этом второе и третье зацепления получены из первого операциями переброски и разрешения, проведенными внутри этой окрестности.

Примеры вычисления полиномов

Одно из преимуществ инварианта Конвея — простота, с которой он вычисляется. Вот несколько примеров.

Рассмотрим зацепление, состоящее из двух не связанных окружностей.

Тогда $\nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) = 0$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} x\nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) &\stackrel{\text{(III)}}{=} \nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) - \nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) \stackrel{\text{(II)}}{=} \\ &\stackrel{\text{(II)}}{=} \nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) \stackrel{\text{(I)}}{=} 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

*) От англ. skein — клубок.

Рассмотрим теперь зацепление, состоящее из двух связанных окружностей, скажем, так называемое, зацепление Хопфа $H = \bigcirc \bigcirc$. Из соотношений Конвея имеем

$$\nabla \left(\bigcirc \bigcirc \right) - \nabla \left(\bigcirc \bigcirc \right) \stackrel{\text{(III)}}{=} x \nabla \left(\bigcirc \bigcirc \right)$$

и, поскольку

$$\nabla \left(\bigcirc \bigcirc \right) = 0, \quad \nabla \left(\bigcirc \right) \stackrel{\text{(I)}}{=} 1,$$

из этого следует, что $\nabla(H) = x$.

Вычислим, наконец, полином Конвея трилистника T . Для этого вернемся к соотношениям (*); второй член в левой части этой формулы в силу правила (I) равен $\nabla \left(\bigcirc \right)$ и, следовательно, в силу правила (II) равен 1; выражение в правой части по предыдущим вычислениям равно $x \cdot x = x^2$. Получаем, следовательно, $\nabla(T) = x^2 + 1$.

Итак, вычисление полинома Конвея узла (или зацепления) представляется своеобразной последовательностью геометрических операций (перевосков или разрешений) и классических алгебраических операций (суммы и произведения полиномов). Читатель, которому пришлось по вкусу вычисления такого рода, получит удовольствие, вычислив $\nabla(P)$, где P — узел, представленный на рис. 5.6 (е).

Обсуждение результатов

Что можно вывести из этих вычислений? Немало. Прежде всего, мы располагаем теперь формальным доказательством следующих фактов:

(1) нельзя разделить две кривые в зацеплении Хопфа:

$$\bigcirc \bigcirc \neq \bigcirc \bigcirc;$$

(2) нельзя развязать узел-трилистник:

$$\bigcirc \neq \bigcirc;$$

(3) узел, представленный на рис. 5.6 (е), не является трилистником:

$$\bigcirc \neq \bigcirc.$$

Конечно, читатель, еще не испорченный изучением математики, скажет, что он не видит смысла в формальном доказательстве таких вполне очевидных фактов, как (1), (2) или (3). Ему можно возразить, что мы имеем здесь *общий метод*, который работает так же хорошо и в более сложных ситуациях, когда интуиция не дает нам ответа.

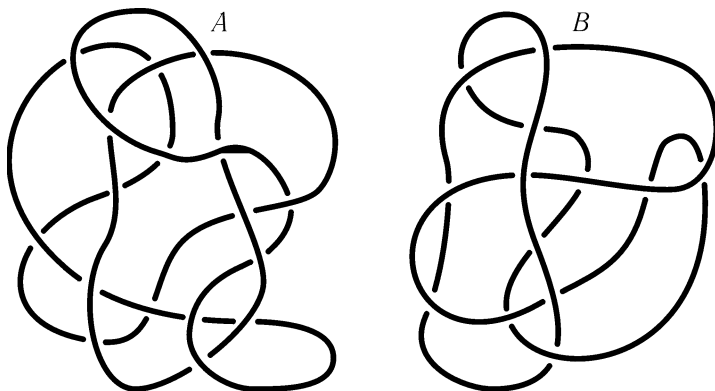


Рис. 5.7. Представляют ли эти диаграммы один и тот же узел?

Например, моя пространственная интуиция (все же достаточно развитая) не говорит мне абсолютно ничего об узлах, диаграммы которых представлены на рис. 5.7. Зато программа в моем маленьком ноутбуке вычисляет полином Конвея за несколько секунд — и сообщает мне, что

$$\nabla(A) = 1 - x^2, \quad \text{а} \quad \nabla(B) = x^2 + 1.$$

Это доказывает, что узлы, представленные диаграммами A и B , различны.

У нас есть, таким образом, мощный инвариант, который позволяет различать узлы. Делает ли он это всегда? Другими словами, если у двух диаграмм полиномы Конвея совпадают, значит ли это, что эти диаграммы представляют один и тот же узел? Всегда ли верно, что

$$\nabla(K_1) = \nabla(K_2) \implies K_1 = K_2?$$

К сожалению, ответ отрицательный: вычисления, подобные предыдущим, показывают, что полином Конвея для трилистника с рис. 1.1 совпадает с полиномом Конвея для его зеркального образа. Полином Конвея не отличает трилистник от его зеркального отражения; для этого он не является достаточно тонким инструментом.

Но — возразит скептически настроенный читатель — откуда мы знаем, что трилистник и его зеркальное отражение не являются одним и тем же узлом? Хороший вопрос. Мы не в состоянии это доказать до тех пор, пока не будем иметь в распоряжении более тонкий инвариант, чем полином Конвея. Таковым является знаменитый полином Джонса (о котором мы будем говорить в следующей главе), а также полином Хомфли, разговором о котором мы закончим настоящую главу.

Полином Хомфли

«ХОМФЛИ» («HOMFLY») — это не фамилия изобретателя этого полинома: речь идет о сокращении, соответствующем фамилиям шести (!) исследователей, которые открыли один и тот же полином и опубликовали свои результаты одновременно (в 1985 г.) в одном и том же журнале: H = Hoste, O = Ocneanu, M = Millet, F = Freyd, L = Lickorish и Y = Yetter *).

Наиболее простой способ определить полином Хомфли $P(x, y)$ от двух переменных x и y — использовать условия Конвея (I), (II), (III) с P вместо ∇ и со следующей модификацией скейн-соотношения (аксиома (III')):

$$xP\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \diagdown \diagup \\ \curvearrowleft \end{array}\right) - yP\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \diagdown \diagup \\ \curvearrowright \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array}\right). \quad (\text{III}')$$

Читатель, который понял, как проводятся несложные вычисления полинома Конвея, получит, вероятно, удовольствие от проведения тех же вычислений с новым скейн-соотношением (III') для тех же узлов и зацеплений. В частности, он увидит, что полиномы Хомфли трилистника и его зеркального отображения различны.

Таким образом, полином Хомфли более тонкий, чем полином Конвея. Но является ли он полным инвариантом, может ли он различить все неизотопные узлы? Увы! На рис. 5.8 показаны два различных узла, у которых полиномы Хомфли одинаковы.

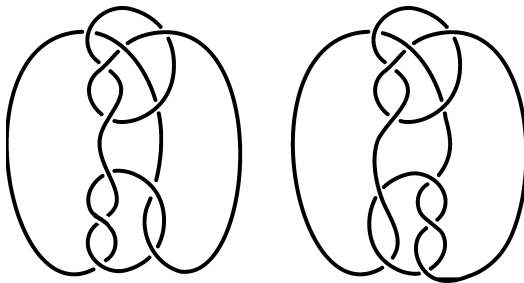
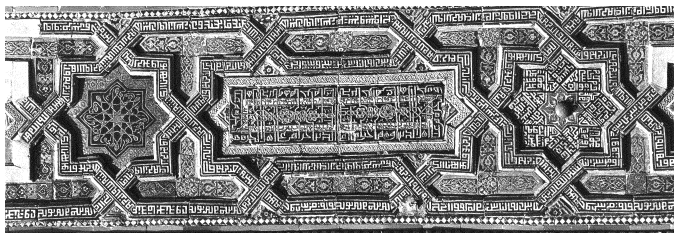


Рис. 5.8. Два узла с одинаковым полиномом Хомфли

Вот почему поиски полного инварианта продолжаются в последующих главах...

*) Это сокращение — явная несправедливость по отношению к двум польским математикам, Притыцкому (Przytycki) и Трачику (Traczyk), которые сделали то же открытие в то же время, но опубликовали позднее, не говоря уже о некоторых русских математиках, которые видели в этом полиноме лишь вариант полинома Джонса и не думали о публикации. Другое сокращение, ЛУМРНТУ, позднее было предложено израильским математиком Дроном Бар-Натаном. Оно восстанавливало справедливость по отношению к полякам и другим (U = unknown discoverers — неизвестные изобретатели), но не закрепилось.



Глава 6. Полином Джонса и спиновые модели

(Кауффман, 1987)

Нет никакого сомнения, что открытие Воаном Джонсом, новозеландским математиком, работающим в Соединенных Штатах, полинома, который носит его имя, дало новый импульс изучению инвариантов узлов. Однако значение этого открытия выходит далеко за рамки одной только теории узлов; его популярность объясняется связями с другими областями математики (операторные алгебры, косы) и особенно с физикой (статистические модели, квантовые группы).

Было бы логично, следовательно, посвятить эту главу — центральную в нашей книге — теории Джонса. К сожалению, в той форме, в которой она была изложена вначале автором, эта теория далеко не элементарна (см. Stewart, 1989) и значительно превышает математический уровень, предполагаемый у нашего читателя. Однако имеется другой подход к полиному Джонса, принадлежащий Луису Кауффману из Иллинойского университета в Чикаго, обладающий двумя преимуществами: он сравнительно простой и к тому же ясно раскрывает связь со *статистической физикой*. Именно на этой области физики основано наше изложение, и я начну, следовательно, с нескольких относящихся к ней основных понятий.

Статистические модели

В течение добрых тридцати лет (и особенно после публикации в 1982 г. книги Роджера Бакстера (R. Baxter), посвященной этой теме), *статистические модели* и, в частности, знаменитая *модель Изинга* интересуют как математиков, так и физиков. О чем идет речь? О теоретических моделях регулярных атомных структур; они могут находиться в различных состояниях, каждое из которых определяется распределением *спинов*

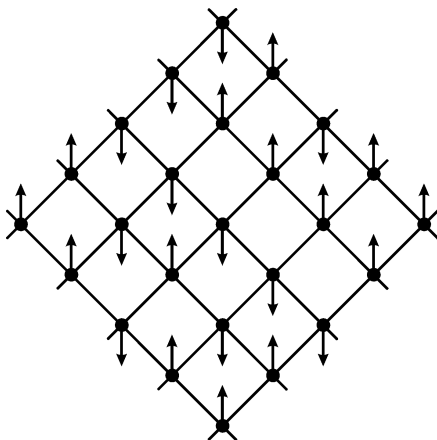


Рис. 6.1. Структура атомов со спинами

атомов (очень простой пример представлен на рис. 6.1). Каждый атом (изображенный на рисунке жирной точкой) в данный момент времени характеризуется его взаимодействием с соседними атомами (взаимодействие изображено соединением двух атомов-точек отрезком), а также его «внутренним состоянием» — тем, что физики называют его спином, параметром *), который может принимать конечное число значений (в данном случае — два). Два спина в нашей модели P называются *up* и *down*; мы изображаем их стрелочками, направленными вверх и вниз соответственно.

Для того чтобы модель была полностью определена, нужно задать *статистическую сумму* (*статсумму*) модели. Это выражение вида

$$Z(P) = \sum_{s \in S} \exp \frac{-1}{kT} \sum_{(a_i, a_j) \in A} \mathcal{E}(s(a_i), s(a_j)), \quad (6.1)$$

где внешняя сумма вычисляется по множеству S всех состояний, а внутренняя сумма — по всем стрелкам (взаимодействиям). Здесь $\mathcal{E}(s(a_i), s(a_j))$ — энергия взаимодействия между атомами a_i и a_j (которая фактически зависит лишь от их спинов), T — температурная константа и k — коэффициент (зависящий от выбора единиц), который называется *постоянной Больцмана*.

Когда модель задана, можно вычислить (используя статсумму Z) ее полную энергию, вероятность ее нахождения в данном состоянии и, кроме того, изучить ее *фазовые переходы*, например, в случае *модели Поттса*

*) Речь идет о «внутреннем угловом моменте».

замерзания воды — ее переход из жидкого состояния (вода) в твердое состояние (лед) и обратно *).

Нашей целью не является дальнейшее углубление в изучение статистических моделей. То немногое, что было о них только что сказано, будет достаточно читателю для того, чтобы понять источник вдохновения Луиса Кауффмана, когда ему в голову пришла странная идея связать с каждым узлом... некоторую статистическую модель.

Модель Кауффмана

Рассмотрим некоторый узел (неориентированный), например, тот, который показан на рис. 6.2 (б). Рассмотрим более внимательно какой-нибудь перекресток этого узла; локально, каждый перекресток делит плоскость на два дополнительных угла, один из которых мы назовем типа A (или

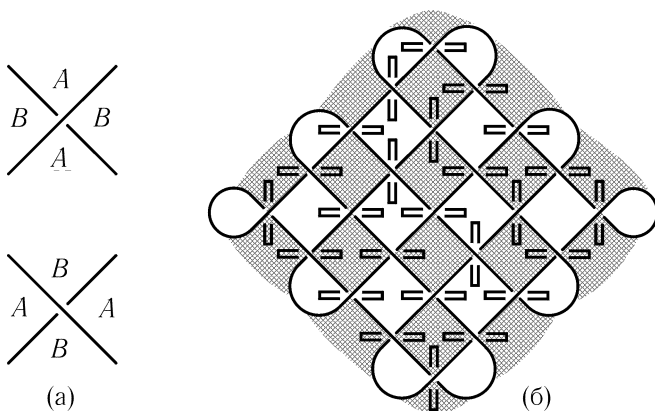


Рис. 6.2. Углы типа A и B и пример состояния узла

типа \uparrow) и другой — типа B (или типа \downarrow). *Угол типа A* — это тот, который мы сначала видим справа, когда проходим перекресток по верхней ветви; *угол типа B* — тот, который мы сначала видим справа, когда проходим перекресток по нижней ветви. Направление, выбранное для прохода перекрестка, может быть любым из двух возможных; углы, определенные выше, не зависят от этого выбора — проверьте! На рис. 6.2 (б) мы затенили углы A и оставили белыми углы B .

*) Речь идет здесь об исключительно теоретической модели — «двумерной воде». Существует, конечно, трехмерная модель, более реалистичная, но и более сложная. Мы рассматриваем «плоскую воду» не только для того, чтобы упростить изложение, но также потому, что — мы это сейчас увидим — именно она соответствует узлам.

Имея какой-нибудь узел, мы можем, следовательно, выбрать для каждого перекрестка то, что можно назвать *спином Кауффмана*, то есть ассоциировать с каждым перекрестком слово up или down (означающие, что выбран угол типа A или B , соответственно). Мы говорим, что выбор спинов для всех перекрестков определяет *состояние узла*. Узел с n перекрестками допускает, таким образом, 2^n возможных состояний. Чтобы представить узел в каком-то вполне определенном состоянии, нужно было бы написать up или down у каждого перекрестка, но мы предпочли нарисовать палочку внутри выбранного угла (посмотрите на рис. 6.2 (а) и 6.2 (б)).

Это обозначение удобно тем, что ясно указывает выбор одного из двух возможных способов разрешения перекрестка (неориентированного) узла, осуществляя замену ветвей вдоль направления, указанного палочкой (рис. 6.3 (б)). Этот выбор будет нам необходим сейчас же.

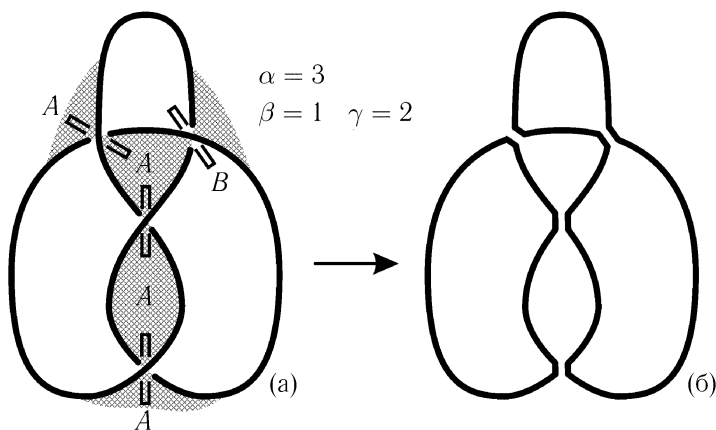


Рис. 6.3. Разрешение состояния узла восьмерка

Обозначим через $S(K)$ множество всех состояний данного узла K . Чтобы полностью определить модель Кауффмана, связанную с узлом K , достаточно определить соответствующую статсумму. Она будет обозначаться $\langle K \rangle$, называться *скобкой Кауффмана* и определяться формулой:

$$\langle K \rangle = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}; \quad (6.2)$$

здесь суммирование происходит по всем возможным состояниям $s \in S(K)$ узла K (их 2^n), $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ обозначают число выбранных (т. е. указанных палочкой) углов типа A и B соответственно, $\gamma(s)$ обозначает число замкнутых кривых, получаемых, когда разрешаются все перекрестки узла вдоль палочек состояния s .

Можно спросить себя, где Кауффман выкопал эту странную формулу, которая очень мало напоминает свой прототип (6.1). Не вдаваясь в детали, я бы сказал, что он ее получил методом проб и ошибок и рассуждений от противного, то есть отталкиваясь от того результата, который он хотел бы получить.

Применение этой формулы всегда очень просто (хотя и трудоемко, когда узел имеет много перекрестков). На рис. 6.3 видно одно из возможных состояний диаграммы восьмерки (6.3 (а)) и ее разрешение (6.3 (б)); в этом примере $\alpha(s) = 3$, $\beta(s) = 1$ и $\gamma(s) = 2$ (после разрешения всех перекрестков появляются две замкнутые кривые). Следовательно,

$$a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1} = a^{3-1}(-a^2 - a^{-2})^{2-1} = -a^4 - 1.$$

Чтобы получить значение скобки Кауффмана диаграммы восьмерки, нужно нарисовать все 16 возможных состояний диаграммы ($16 = 2^4$) и просуммировать шестнадцать членов вроде только что вычисленного. Таким образом получается полином *) от a , который даст значение скобки Кауффмана для диаграммы данного узла.

Заметим, кстати, что формула (6.2) имеет смысл не только для узлов, но и для зацеплений с числом компонент, большим 1.

Прежде чем продолжить наше изучение скобки Кауффмана, остановимся на секунду, чтобы сравнить полученную модель с какой-нибудь классической моделью, например, с моделью Поттса. Начнем сравнивать рисунки 6.1 и 6.2. Они похожи до такой степени, что их можно перепутать. Конечно, внешнее сходство — лишь следствие подходящего выбора узла, представленного на рисунке 6.2, однако можно и вообще сказать, что состояние узла и состояние плоской регулярной атомной структуры — это приблизительно одно и то же. В противоположность этому, формулы (6.1) и (6.2) для статсумм моделей совершенно разные, и формула Кауффмана (6.2) не имеет никакой физической интерпретации. Модель Кауффмана, таким образом, не «настоящая» статистическая модель, — что ничуть не мешает использовать ее для узлов. С другой стороны, мы увидим далее, что настоящие статистические модели (в частности, модель Поттса) могут служить для конструирования других инвариантов узлов.

Свойства скобки Кауффмана

Наша ближайшая цель — уточнить некоторые свойства этой скобки, чтобы увидеть, как из нее получается — в конце концов — инвариант узлов.

*) На самом деле в общем случае полином может содержать и отрицательные степени a , т. е., как говорят математики, это «полином Лорана».

Три главных свойства скобки следующие:

$$\langle \langle \otimes \rangle \rangle = a \langle \langle \cup \rangle \rangle + a^{-1} \langle \langle \circlearrowleft \circlearrowright \rangle \rangle; \quad (\text{I})$$

$$\langle K \cup \bigcirc \rangle = (-a^2 - a^{-2}) \langle K \rangle; \quad (\text{II})$$

$$\langle \bigcirc \rangle = 1. \quad (\text{III})$$

Начнем с конца. Третье свойство, самое простое, говорит нам, что скобка Кауффмана диаграммы тривиального узла \bigcirc равна 1 (полином нулевой степени, состоящий из одного члена, равного 1).

Свойство (II), в котором K есть некоторый узел или зацепление, показывает, как изменяется значение скобки K , когда к K добавляется не зацепленный с K тривиальный узел: это значение получается умножением на коэффициент, равный $(-a^2 - a^{-2})$.

Свойство (I) (несмотря на свою простоту, это — основное соотношение теории Кауффмана, а также этой главы) показывает связь между скобками трех зацеплений (или узлов), обозначенных символически тремя значками:



они отличаются между собой лишь в одном месте: именно, эти три зацепления совпадают везде, кроме внутренностей трех маленьких шаров, где они имеют вид, показанный этими значками.

Тот, кто прочитал главу, посвященную соотношениям Конвея, заметил, без сомнения, аналогию между свойством (I) построения Кауффмана и скейн-соотношением (с. 68). Напомним вид значков, которые участвуют в скейн-соотношении:



Чем отличается скейн-соотношение Конвея от свойства (I)? Прежде всего, узлы, рассматриваемые Кауффманом, неориентированы (отсутствуют стрелки). Следовательно, существует только один тип перекрестка (два у Конвея), но два способа его разрешить (стрелки у Конвея определяют единственное разрешение, одно и то же для двух различных перекрестков — прохода снизу или сверху). Это говорит о том, что основное соотношение (I) в теории Кауффмана — лишь очень простое тождество, связанное с локальными хирургическими операциями.

Свойства (I)–(III) позволяют очень просто вычислять скобку Кауффмана диаграммы узла (или зацепления): достаточно применить (I) (запомяная

промежуточные результаты) до полного исчезновения перекрестков, далее вычислить с помощью соотношений (I) и (II) скобку зацепления, состоящего из N непересекающихся окружностей (она, очевидно, равна $(-a^2 - a^{-2})^{N-1}$) и, зная это значение, получить значение всей скобки рассматриваемого узла, используя, шаг за шагом, промежуточные результаты.

Например, для тривиального узла (по свойству (III)) имеем

$$\langle \bigcirc \rangle = 1,$$

откуда с помощью (II) получаем

$$\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = -a^2 - a^{-2},$$

а теперь, из (I) и предыдущего результата, находим

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle &= a \langle \bigcirc \rangle + a^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = \\ &= a \cdot 1 + (a^{-1})(-a^2 - a^{-2}) = -a^{-3}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\langle \infty \infty \rangle = a^{-3}.$$

Таким образом, мы видим, что три диаграммы тривиального узла



имеют разные значения скобки Кауффмана, а значит, сама скобка не инвариантна.

Для зацепления Хопфа, используя предыдущие вычисления, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= a \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + a^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = \\ &= a(-a^3) + a^{-1}(-a^{-3}) = -a^4 - a^{-4}. \end{aligned}$$

Для трилистника аналогично получаем формулы:

$$\begin{aligned} \langle \text{trefoil} \rangle &= a \langle \text{trefoil} \rangle + a^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle = \\ &= a(a^6) + a^{-1}(-a^4 - a^{-4}) = a^7 - a^3 - a^{-5}; \\ \langle \text{trefoil} \rangle &= a^{-7} - a^{-3} - a^5. \end{aligned}$$



Разумеется, скобка Кауффмана может быть полезна в теории узлов, если она является инвариантом, то есть если две диаграммы одного и того же узла имеют всегда одну и ту же скобку Кауффмана. Это существенное обстоятельство обсуждается в следующем пункте, предназначенном для тех, кто прочел главу о преобразованиях Рейдемейстера. Читатель, который ее пропустил (или не любит математических доказательств), может без больших потерь перейти к следующим разделам, в которых появляется, наконец, полином Джонса.

Инвариантность скобки Кауффмана

В силу леммы Рейдемейстера, чтобы проверить инвариантность скобки, достаточно выяснить, сохраняется ли ее значение при преобразованиях Рейдемейстера. Читатель, может быть, помнит, что их три; их можно освежить в памяти, взглянув на рис. 3.1.

Начнем со второго преобразования Ω_2 . Используя свойство (I) несколько раз и свойство (II) один раз, получаем:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle = \\
 &= a [a \langle \text{Diagram 4} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle] + \\
 &\quad + a^{-1} [a \langle \text{Diagram 6} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 7} \rangle] = \\
 &= (a^2 + a^{-2} + aa^{-1}(-a^2 - a^{-2})) \langle \text{Diagram 8} \rangle + \\
 &\quad + aa^{-1} \langle \text{Diagram 9} \rangle = \langle \text{Diagram 9} \rangle.
 \end{aligned}$$

Сравнивая первый и последний член этой серии равенств, мы видим, что инвариантность скобки относительно Ω_2 установлена. Внимательный читатель должен был заметить волшебное исчезновение различных степеней a , в результате которого появился множитель 1 перед желаемым значком  и множитель 0 перед нежелательным значком . Конечно, это не является счастливой случайностью: выбор (априори странный) коэффициентов в формуле Кауффмана (II) как раз мотивируется этим вычислением.

Воодушевленные нашей маленькой победой, переходим к проверке инвариантности относительно Ω_3 , наиболее сложного из преобразований Рейдемейстера. Используя опять основное соотношение (I), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle, \\ \langle \text{Diagram 4} \rangle &= a \langle \text{Diagram 5} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle. \end{aligned} \quad (*)$$

Очевидно,

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 4} \rangle,$$

поскольку эти две диаграммы изотопны на плоскости. Применяя теперь два раза инвариантность относительно Ω_2 (мы только что ее установили), получаем:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 2} \rangle = \langle \text{Diagram 3} \rangle.$$

Сравнивая правые части двух равенств (*) и учитывая предыдущие равенства, мы видим, что эти правые части совпадают. То же самое, следовательно, имеет место для левых частей. Но это как раз то равенство, которое выражает инвариантность скобки по отношению к Ω_3 !

Маленькое личное отступление

Видит бог, я не люблю восклицательных знаков, обычно предпочитая англосаксонское understatement *) экзальтированным восклицаниям, свойственным славянской душе. Тем не менее, я должен был сдерживать себя, чтобы не поставить в конце предыдущего раздела два восклицательных знака вместо одного. Почему? Читатель, который любит математику, это поймет. Для других объясню: чувство, которое испытывает математик, встречая (или открывая) нечто подобное, близко тому, что ощущает любитель искусства, когда его взгляд останавливается на «Сотворении мира» Микеланджело в Сикстинской капелле Ватикана. Или (в случае, когда речь идет об открытии) — эйфория, которую должен ощущать дирижер, когда оркестр и хор, в едином порыве, который дирижер порождает и ведет, подхватывают «Гимн радости» в финале четвертой части Девятой симфонии Бетховена...

*) Сдержанность, недосказанность (англ.).

Инвариантность скобки (продолжение)

Чтобы доказать инвариантность скобки Кауффмана, осталось проверить ее инвариантность относительно первого преобразования Рейдемейстера Ω_1 , наиболее простого из трех. Используя (I) и (II), получаем:

$$\langle \text{diagram 1} \rangle = a \langle \text{diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{diagram 3} \rangle = \lambda \langle \text{diagram 4} \rangle,$$

где $\lambda = a(-a^2 - a^{-2}) + a^{-1} = -a^3$.

Катастрофа: этот подлый коэффициент a^3 испортил все дело (для симметричной малой петли получается коэффициент a^{-3}). Неудача!

Скобка Кауффмана не инвариантна относительно Ω_1 и, следовательно, не является инвариантом изотопии узлов. Например, имеем:

$$\langle \text{diagram 5} \rangle = -a^3 \neq \langle \text{diagram 6} \rangle = -a^{-3},$$

в то время как обе диаграммы представляют тривиальный узел и, следовательно, хотелось бы получить равенство:

$$\langle \text{diagram 7} \rangle = \langle \text{diagram 8} \rangle = \langle \text{diagram 9} \rangle = 1,$$

которое на самом деле не выполняется.

Стоит ли все бросить в отчаянии?

Еще одно маленькое личное отступление

Лет тридцать тому назад я работал над этими же вопросами. Появились полином Джонса и скейн-соотношение, и, как многие другие математики, я возился с вариациями этих соотношений в надежде найти инварианты более тонкие, чем полином Джонса. Позже, среди черновиков, я нашел формулы, очень близкие к соотношениям (I) Кауффмана и вспомнил, как, споткнувшись о то же самое преобразование Ω_1 (не сумев разобраться с упрямым коэффициентом, который категорически отказывался исчезать), я все бросил.

Кауффман же продолжал упорствовать. Пусть молодые подающие надежды исследователи сделают соответствующие выводы из этой истории. Впрочем, упорства не всегда достаточно: я вовсе не уверен, что, продолжая, я смог бы найти замечательную маленькую хитрость, позволившую Кауффману спасти положение.

Трюк Кауффмана и полином Джонса

Отправной пункт очевиден: поскольку этот коэффициент $-a^{\pm 3}$ не желает исчезать, к нашей скобке нужно добавить дополнительный множитель,

который помог бы избавиться от этого назойливого $-a^{\pm 3}$. Но каким образом?

Для этого нужно воспользоваться классическим инструментом теории узлов — индексом скрещивания; он определяется следующим образом: для каждого *ориентированного* узла K индекс скрещивания (*writhe*) $w(K)$ — целое число, равное разности между числом положительных перекрестков и числом отрицательных перекрестков (рис. 6.4).

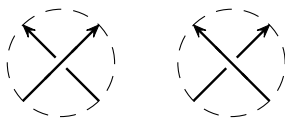


Рис. 6.4. Положительные и отрицательные перекрестки узла

Легко проверяется, что индекс скрещивания инвариантен относительно преобразований Рейдемейстера Ω_2 и Ω_3 . Напротив, преобразование Ω_1 изменяет этот индекс: оно добавляет 1 или -1 в соответствии с тем, отрицательная $\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$ или положительная $\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$ петля ликвидируется.

Следуя Кауффману, определим сейчас полином Джонса *) $X(K)$ ориентированного узла K (или зацепления), положив:

$$X(K) = (-a)^{-3w(K)} \langle |K| \rangle, \quad (6.3)$$

где неориентированная диаграмма $|K|$ получается из ориентированной диаграммы K снятием стрелок и где $\langle \cdot \rangle$ — это та самая скобка Кауффмана, которая была для нас причиной стольких радостей и огорчений.

Трюк Кауффмана — это множитель $(-a)^{-3w(K)}$, который прекрасно справляется с задачей уничтожения коэффициента $a^{\pm 3}$, мешающего при применении преобразования Ω_1 . (Я оставляю на долю читателя, знакомого с математикой, удовольствие проверить это утонченное убийство в духе Агаты Кристи.)

Теперь очевидно, что *полином Джонса есть инвариант изотопии узлов (и зацеплений)*.

Действительно, и скобка $\langle \cdot \rangle$, и множитель $(-a)^{-3w(K)}$ являются (это мы видели) инвариантными относительно преобразований Рейдемейстера Ω_2 и Ω_3 ; с Ω_1 все также проходит хорошо (ленивый читатель должен

*) По правде говоря, $X(K)$ не является полиномом Джонса как таковым; чтобы получить его, нужно изменить переменную полинома, положив $q = a^4$, но это в сущности лишь изменение обозначений.

поверить нам на слово); изотопическая инвариантность $X(\cdot)$ вытекает, следовательно, из леммы Рейдемейстера.

Новое отступление о менгирах

Никто из математиков не оспаривал у Луиса Кауффмана чести изобретения соотношения (I), маленькой формулы безобидного вида, однако, как сразу же стало очевидным, фундаментального значения. Тем не менее, не прошло и года, как Кауффман узнал, что не он ее изобрел: один специалист по древней кельтской культуре объяснил ему, что скульпторы, работавшие над менгирами много тысячелетий тому назад, использовали в точности это соотношение для преобразования структур переплетенных лент (а следовательно, узлов и зацеплений), которые украшают эти могильные камни. Читатель может найти на рис. 0.9 мотивы соотношения (I) (имею ли я теперь право называть его «соотношением Кауффмана»? в переплетениях лент, облагораживающих изображенный на этом рисунке менгир.

Свойства полинома Джонса

Мы только что доказали первое фундаментальное свойство полинома Джонса:

(i) *Две диаграммы одного и того же узла (зацепления) имеют один и тот же полином Джонса.*

Второе фундаментальное свойство (доказательство которого получается достаточно простым вычислением, основанным на «кельтском свойстве» (I) скобки Кауффмана и на определении (6.3)) — это скейн-соотношение для полинома Джонса:

$$a^{-4}X\left(\begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \end{array}\right) - a^4X\left(\begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \end{array}\right) = (a^2 - a^{-2})X\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right). \quad (\text{ii})$$

Два других свойства получаются непосредственно из свойств (I) и (II) скобки:

$$X\left(K \sqcup \bigcirc\right) = (-a^2 - a^{-2})X(K), \quad (\text{iii})$$

$$X\left(\bigcirc\right) = 1. \quad (\text{iv})$$

Этих свойств достаточно, чтобы вычислить полином Джонса конкретных узлов или зацеплений. (На самом деле, можно показать, что свойства (i)–(iv) полностью определяют полином Джонса.)

Прделаем вычисления для трилистника, сделав замену $a^4 = q$ и обозначив полученный полином через V (вместо X):

$$q^{-1}V\left(\begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \end{array}\right) - qV\left(\begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \end{array}\right) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right).$$

Значение V для тривиального узла известно; вычислим его для зацепления Хопфа:

$$q^{-1}V\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) - qV\left(\begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array}\right) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array}\right).$$

Из (iii) и (iv)

$$\begin{aligned} V\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array}\right) &= -q^{-2}(q^{1/2} + q^{-1/2}) - q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2}) = \\ &= -q^{-1/2} - q^{-5/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для трилистника

$$\begin{aligned} V\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array}\right) &= q^{-2} + q^{-1}(q^{-1/2} + q^{-5/2})(q^{1/2} - q^{-1/2}) = \\ &= q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}. \end{aligned}$$

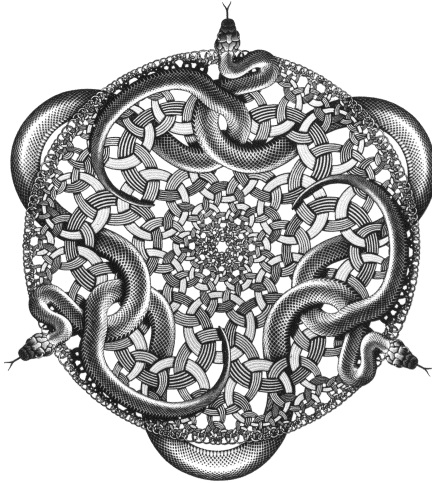
Читатель, который вошел во вкус таких вычислений, может проверить, что тот же самый результат получается, если использовать определение (6.2) и наше предыдущее вычисление скобки Кауффмана для трилистника.

Подобные вычисления показывают, что все узлы небольшой таблицы на рис. 1.5 различны. Не следует думать, что доказательство этого факта — жертва математическому педантизму. Когда полином Джонса только появился, его подсчет для узлов из более обширных таблиц дал различные значения для всех узлов, кроме двух узлов с одинадцатью пересечениями. Этот результат показался подозрительным, и более пристальное сравнение диаграмм этих узлов (совершенно другим, геометрическим, образом) показало, что эти диаграммы на самом деле изотопны (диаграммы одного и того же узла): таблица оказалась ошибочной.

Это применение (очень значимое для специалистов по теории узлов) породило у Воана Джонса надежду, что его полином является полным инвариантом, по крайней мере для простых узлов. Увы! Ничуть не бывало: существуют простые неизотопные узлы с одинаковыми полиномами Джонса, например, те, что показаны на рис. 5.8.

Тем не менее, для теории узлов роль полинома Джонса остается весьма важной: он является очень тонким инвариантом, более тонким, например, чем полином Александра—Конвея. Он отличает трилистник от его зеркального отражения, что полином Конвея не умеет делать. К тому же, сам Джонс и его последователи нашли инварианты еще более тонкие, чем его полином $V(K)$.

Однако им не удалось, подчеркнем это, найти полный инвариант. Другая попытка, основанная на совершенно иных идеях, описывается в следующей главе.






Глава 7. Инварианты конечного порядка

(Васильев, 1990)

Виктор Васильев не должен был заниматься узлами. Ученик Владимира Арнольда и, следовательно, специалист в *теории особенностей* (более известной на Западе под броским названием *теории катастроф*), он не мог априори применять технику этой теории к узлам, объектам с регулярной локальной структурой, изменяющимся непрерывно и гладко, без малейшего намека на катастрофу.

Может быть, один мудрый гуманист XVIII века шепнул ему на ухо: «Если особенности не существует, ее следует изобрести». Именно это и сделал Васильев.

Его идея обезоруживающе проста. Наряду с обычными узлами, Васильев предложил рассматривать *сингулярные узлы*; они отличаются от настоящих узлов тем, что допускают *двойные точки* (самопересечения), в которых одна часть кривой трансверсально пересекает другую: 

На диаграмме узла вид двойной точки слегка отличается от вида точки перекрестка  или . Можно сказать, что если мы меняем у узла тип перекрестка в некоторой точке, то «катастрофа» происходит, когда одна

часть узла пересекает другую; в это мгновение узел становится сингулярным, а в следующее мгновение опять превращается в обычный узел, отличающийся, вообще говоря, от первоначального. Так, на рис. 7.1 показано, как узел-трилистник превращается (проходя через катастрофу) в сингулярный узел с одной двойной точкой, становясь затем тривиальным узлом.

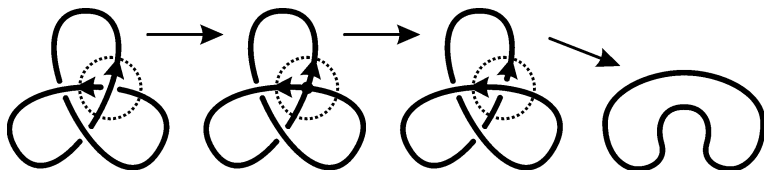


Рис. 7.1. Трилистник становится сингулярным, а потом развязывается

Таким образом, Васильев рассматривает множество \mathcal{F} всех узлов, как обычных, так и тех, что допускают особенности указанного вида. Обычные узлы образуют подмножество в \mathcal{F} , обозначаемое Σ_0 , в то время как остальные узлы образуют *дискриминант* Σ . Последний разбивается на *страты* $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$, состоящие из сингулярных узлов с 1, 2, 3, ... двойными точками соответственно. Именно к этим стратам мы обратимся в нашем изучении инвариантов узлов.

К сожалению, стратифицированное множество

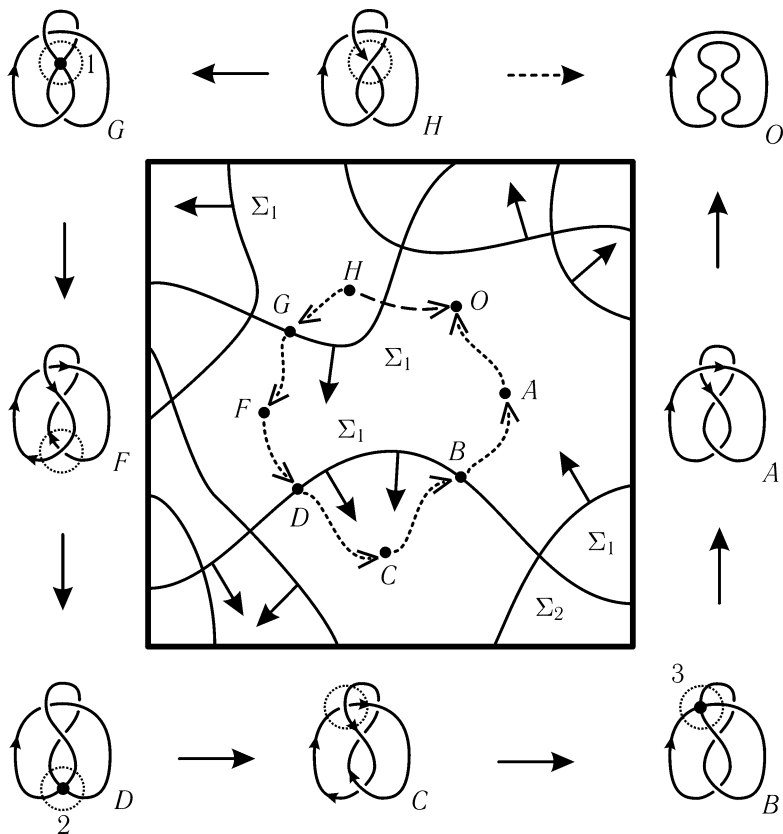
$$\mathcal{F} \supset \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$$

бесконечномерно и, следовательно, трудно представимо. Тем не менее, мы дадим его описание, весьма наглядное (но не очень строгое), смело используя наивный чертеж, где пространство (бесконечномерное!) \mathcal{F} будет представлено... в виде квадрата: он расположен в середине рис. 7.2. Точки пространства \mathcal{F} представляют собой узлы (сингулярные и обыкновенные); вокруг квадрата мы видим более «реалистичное» изображение некоторых из этих точек-узлов, а также процесс деформации одного узла (восьмерки) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Внутри квадрата мы видим путь, пройденный точкой, соответствующей этому узлу, в пространстве \mathcal{F} . Ее траектория

$$H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$$

при этом символически изображает изменения, происходящие с нашим узлом.

В момент первой катастрофы (когда у восьмерки образуется самопересечение 1) движущаяся точка «протыкает» страт Σ_1 (состоящий из сингулярных узлов ровно с одним пересечением) в точке G . Узел становится,

Рис. 7.2. Деформация узла в \mathbb{R}^3 и в \mathcal{F}

таким образом, тривиальным (F) и непрерывно изменяется до момента второй катастрофы, когда образуется вторая двойная точка 2, чтобы моментально исчезнуть; тривиальный узел преобразуется при этом в трилистник. На символическом представлении внутри квадрата этому событию соответствует новый переход ($F \rightarrow D \rightarrow C$) через страт Σ_1 , но в другом месте (D). Наконец, очередной переход ($C \rightarrow B \rightarrow A$) через тот же страт происходит в другой его части, и получается узел A , который на самом деле тривиален (O).

Каждый инвариант Васильева ставит в соответствие любому узлу (в частности, сингулярному) определенное числовое значение. Мы начнем с простого примера. Определим конкретный инвариант Васильева, кото-

рый мы обозначим v_0 . Для этого положим его равным нулю для тривиального узла ($v_0(\bigcirc) = 0$) и потребуем, чтобы каждый раз, когда движущаяся точка M , изображающая наш узел, пересекала страт Σ_1 в положительном направлении (показанном стрелками *), которыми снабжается Σ_1 , значение $v_0(M)$ увеличивалось на 1, а при переходе страта в отрицательном направлении уменьшалось на 1. Теперь легко посчитать значение выбранного инварианта Васильева для узла-восьмерки. Для этого начинаем с точки O (соответствующей тривиальному узлу), для которой полагаем $v_0(\bigcirc) = 0$, и далее следуем по кривой, показанной на рис. 7.2:

$$O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H,$$

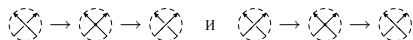
пересекая три раза страт Σ_1 , один раз в положительном направлении и два раза в отрицательном. Получаем

$$v_0(H) = 0 + 1 - 1 - 1 = -1.$$

Сразу же встает вопрос. Корректно ли определен рассматриваемый инвариант? Не зависит ли его значение от выбора пути, соединяющего O и H ? Получится ли тот же результат, если использовать, например, короткий путь OH , показанный на рисунке жирным пунктиром? К счастью, ответ положительный, как в этом частном случае, так и в общем. Однако этот фундаментальный факт совсем не очевиден, и для его доказательства потребовалась вся находчивость Васильева, а также очень тонкая техника алгебраической топологии.

Что нам должно говорить проведенное вычисление? Прежде всего то, что восьмерку нельзя развязать, поскольку ее инвариант отличен от инварианта тривиального узла ($-1 \neq 0$). С другой стороны, мы попутно увидели, что трилистник также не тривиален (поскольку $v_0(C) = 1 \neq 0$) и что восьмерка не эквивалентна трилистнику ($v_0(H) = -1 \neq 1 = v_0(C)$ **).

* Направление стрелок, которое называется *коориентацией*, выбирается так, что следующие катастрофы (при переходе через Σ_1):



считаются соответственно положительной и отрицательной.

** Нужно, тем не менее, подчеркнуть, что с математической точки зрения мы ничего не доказали. И не только потому, что не проверена корректность определения. Наша аргументация базировалась на расположении страт, показанной на рис. 7.2, но мы ничего не знаем об их реальной конфигурации. Читатель, знакомый с математикой и желающий иметь более строгое изложение предыдущих вычислений, найдет его немного ниже в этой главе. Остальные должны поверить мне на слово: строгая версия этих вычислений действительно так же проста, по крайней мере для тех, кто привык к математическим рассуждениям.

Рассматриваемый инвариант Васильева, таким образом, хорошо выполняет свою основную роль: ему удается различать некоторые узлы. Правда, он не является полным инвариантом: он не различает все узлы; например, простые вычисления показывают, что значения v_0 для правого и левого трилистников одинаковы, т. е. этот инвариант не видит разницы между трилистником и его зеркальным отображением. Однако это не единственный инвариант Васильева, их существует бесконечно много. В частности, нетрудно найти другой инвариант Васильева, который различает два трилистника; для этого нужно погрузиться более глубоко в страты, а именно, спуститься в окрестность страта Σ_2 .

Прежде чем перейти от примеров к общей теории, отдохнем немного от математических рассуждений и совершим маленькое отступление, посвященное излагаемому здесь методу.

Отступление: математическая социология

Можно сказать, что подход Васильева к узлам — это подход *социологический*. Вместо того чтобы рассматривать узлы индивидуально (как это делает, например, Воан Джонс), он рассматривает *пространство всех узлов* (сингулярных или нет), в котором они являются просто *точками* и, таким образом, теряют свои внутренние свойства. Более того, Васильев не собирается искать один-единственный инвариант — он хочет найти их все, он собирается определить целое пространство инвариантов. Так же как обычный социолог абстрагируется от личностей людей, которых он изучает, интересуясь лишь их положением в социальной, экономической, политической или какой-то другой стратификации общества, — математический социолог интересуется положением узла с точки зрения стратификации пространства \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} \supset \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$$

Этот социологический подход в математике не является изобретением Васильева. В теории особенностей он восходит к Рене Тому и остается излюбленным оружием Владимира Арнольда и его школы. Задолго до них этот подход использовался Гильбертом для создания *функционального анализа* (функции теряют свои личные свойства, становясь точками некоторых линейных пространств), а также, еще более поразительным образом, — Эйленбергом, Маклейном, Гротендиком и другими при разработке основ *теории категорий*. Математики более классического склада иронически называли ее «абстрактной чепухой» — вероятно, для того, чтобы ее приземлить: ее создатели считали, что она полностью поглотит математику. (К счастью, сегодня ясно, что ничего подобного не произошло и не произойдет.)

Однако вернемся к Васильеву и к его сингулярным узлам. В этой конкретной ситуации социологический подход раскрывается — как мы это сейчас увидим в деталях — особенно плодотворно. Вся информацию, необходимую для определения узловых инвариантов, можно найти в окрестностях стратов $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$. Следуя Васильеву, мы попытаемся найти все инварианты, продвигаясь все глубже и глубже, т. е. изучая страты Σ_n с возрастающими индексами n . Но для этого необходима привычка к математическим рассуждениям, и читатели, у которых ее нет, могут переходить непосредственно к заключению этой главы.

Краткое описание общей теории

Итак, мы называем *сингулярным узлом* K любую гладкую кривую *) в пространстве \mathbb{R}^3 , не имеющую других особых точек, кроме конечного числа точек трансверсального самопересечения (эти точки мы назвали *двойными*). Отметим, что сингулярные узлы, как и обычные, ориентированы (снабжены стрелками).

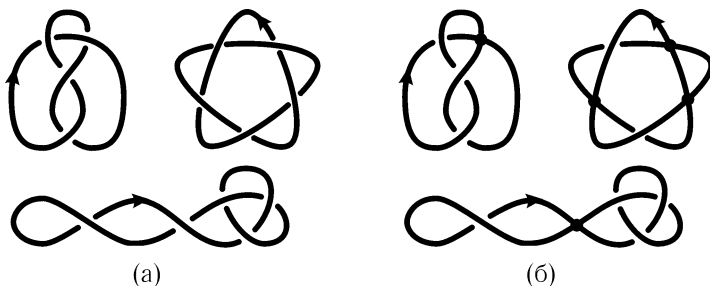


Рис. 7.3. Обычные (а) и сингулярные (б) узлы

Для сингулярных узлов, так же как для обычных, имеется естественное отношение эквивалентности (изотопия): два узла (обычные или сингулярные) K_1 и K_2 изотопны, если существует гомеоморфизм пространства \mathbb{R}^3 (сохраняющий ориентацию), который переводит K_1 в K_2 , сохраняя стрелки и циклический порядок ветвей в двойных точках. Выражения «узел» или «сингулярный узел» могут обозначать либо какой-то конкретный объект, либо класс изотопно эквивалентных объектов — из контекста читателю будет ясно, о чем идет речь. Обозначим через Σ_0 множество узлов без двойных точек, а через Σ_n — множество сингулярных узлов с n двойными точками.

*) Т. е. любое гладкое отображение K окружности S^1 в евклидово пространство \mathbb{R}^3 .

Пошевелив немного одну из ветвей сингулярного узла у двойной точки, можно разрешить особенность в два различных перекрестка:



при этом левое разрешение называется *положительным*, а правое — *отрицательным* *).

Мы говорим, что функция $v: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ является *инвариантом Васильева* (в широком смысле), если для каждой двойной точки сингулярного узла имеет место следующее равенство:

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right); \quad (7.1)$$

оно означает, что функция v применяется к трем узлам, совпадающим везде, за исключением внутренности маленького шара, где узлы имеют в точности тот вид, который показан в трех маленьких кругах, обозначенных пунктиром. Части узлов вне шара не показаны явно, но они одинаковы для всех трех узлов. Функция v должна быть определена на классах эквивалентности, следовательно, $v(K) = v(K')$, если K и K' принадлежат одному и тому же классу.

Из определения (7.1) немедленно выводятся *одночленное соотношение*

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array}\right) = 0 \quad (7.2)$$

и *четырёхчленное соотношение*

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) + v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) = 0. \quad (7.3)$$

Чтобы получить одночленное соотношение, достаточно применить один раз равенство (7.1):

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array}\right)$$

и заметить, что две маленькие петли, полученные разрешением двойной точки, изотопны, в результате чего получаются два совпадающих узла с одинаковым значением инварианта.

*) Положительное (соответственно отрицательное) разрешение корректно определено: это такое разрешение, при котором путешественник, двигающийся по верхней ветви согласно стрелке, видит стрелку нижней ветви направленной влево (соответственно вправо).

Чтобы доказать соотношение (7.3), надо разрешить четыре двойные точки из восьми (не трогая четырех центральных); это даст восемь членов (каждый с единственной двойной точкой — центральной), которые любезно попарно сокращаются.

Мы говорим, что функция $v: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть *инвариант Васильева порядка не выше n* , если она удовлетворяет соотношению (7.1) и аннулируется на всех узлах, имеющих $n + 1$ двойную точку или более *).


Множество V_n всех инвариантов Васильева порядка не выше n допускает очевидную структуру векторного пространства, и имеются включения

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \dots$$

Лемма. *Значение инварианта Васильева порядка не выше n на узле, имеющем ровно n двойных точек, не изменяется, когда какой-либо перекресток меняется на противоположный.*

Идея доказательства очень проста: когда некоторый перекресток заменяется на противоположный, значение инварианта v согласно свойству (1) меняется на величину $v(\text{diagram})$. Но $v(\text{diagram}) = 0$, поскольку по условию инвариант v равен нулю на всех узлах, имеющих более чем n двойных точек.

Очевидное следствие этой леммы: все инварианты порядка 0 являются константами (другими словами, $V_0 = \mathbb{R}$) и не представляют, следовательно, никакого интереса. Действительно, известно, что каждый узел может быть развязан, если поменять некоторое количество его перекрестков; эти операции не изменяют значения инварианта порядка 0 (в силу леммы), следовательно, значение этого инварианта для любого узла равно его значению для тривиального узла.

Почти так же просто доказывается, что нет ненулевых инвариантов порядка 1 (другими словами, $V_0 = V_1$). К счастью, теория становится нетривиальной уже для порядка 2. Чтобы это показать, выделим среди элементов множества V_2 один конкретный инвариант и подсчитаем его значение на узле-трилистнике. Мы определим этот инвариант, обозначаемый v_0 , положив его равным 0 на тривиальном узле и равным 1 на сингулярном узле с двумя пересечениями следующего вида: . Можно показать, что инвариант v_0 вполне определен и удовлетворяет условиям

*) Эти функции часто называются также *инвариантами конечного порядка* и иногда *инвариантами Гусарова—Васильева*, поскольку они были открыты независимо М. Гусаровым из Санкт-Петербурга, опубликовавшим свои результаты, впрочем, значительно позже В. Васильева.

леммы. Вычисления, в которых три раза применяется равенство (7.1) и три раза равенство $v_0(\bigcirc) = 0$, показаны на рис. 7.4.

$$\begin{aligned}
 1 &= v_0\left(\text{трилистник}\right) = v_0\left(\text{трилистник с двумя двойными точками}\right) - v_0\left(\text{трилистник с одной двойной точкой}\right) = \\
 &= v_0\left(\text{трилистник с двумя двойными точками}\right) - v_0\left(\text{трилистник с одной двойной точкой}\right) - \left[v_0\left(\text{трилистник с двумя двойными точками}\right) - v_0\left(\text{трилистник с одной двойной точкой}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Рис. 7.4. Вычисление инварианта порядка 2 для трилистника

Здесь, на самом деле, речь идет о том же инварианте v_0 , значение которого для узла-восьмерки мы уже считали (не обосновывая, однако, свои вычисления) в начале главы, но теперь наши вычисления проводятся строго. Читатель, которому нравятся подобные подсчеты, может поупражняться и сосчитать значение инварианта для восьмерки, да и для других узлов.

Диаграммы Гаусса и теорема Концевича

Сейчас мы избавимся от скрытой геометрии, лежавшей до сих пор в основе изучения инвариантов узлов, преобразовав последнее в чисто комбинаторную теорию.

Лемма из предыдущего пункта говорит нам, что значение инварианта порядка n для узла с n двойными точками не меняется при замене типов перекрестков. Это значение не зависит, следовательно, от процесса завязывания; оно зависит только от порядка (комбинаторное понятие!), в котором появляются двойные точки при движении по кривой. Мы будем кодировать этот порядок следующим образом. Рассмотрим некоторый узел $K: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с n двойными точками. Двигаясь по окружности S^1 , мы отметим все ее точки, переводящиеся в двойные точки отображением K , затем соединим отрезками кривых (хордами) все пары отмеченных точек, переводящиеся в одну и ту же двойную точку (рис. 7.5). Полученная конфигурация называется *диаграммой Гаусса*, или *хордовой диаграммой* порядка n сингулярного узла K .

Полезно переформулировать лемму из предыдущего пункта на языке диаграмм Гаусса.

Лемма. *Значение инварианта Васильева порядка n на узле с n двойными точками зависит только от диаграммы Гаусса этого узла.*

На рис. 7.6 показаны диаграммы Гаусса порядка $n = 1, 2, 3$. Отметим, что все несингулярные узлы имеют одну и ту же диаграмму с пустым множеством хорд.

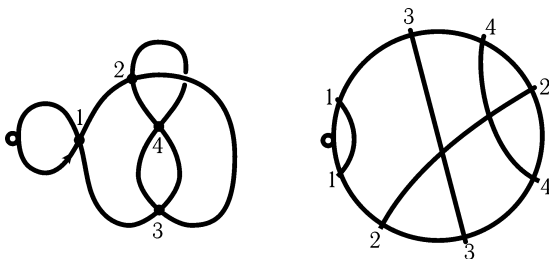


Рис. 7.5. Диаграмма Гаусса сингулярного узла

Хорошее упражнение для заинтересовавшегося читателя — для восьми диаграмм Гаусса с рис. 7.6 нарисовать восемь соответствующих сингулярных узлов (конечно, имеется много узлов, соответствующих одной и той же диаграмме).

Переведем теперь одночленное соотношение (7.1) и четырехчленное соотношение (7.2) на язык диаграмм Гаусса. Получим следующее:

$$\text{circle} = 0; \quad \text{diagram 1} - \text{diagram 2} + \text{diagram 3} - \text{diagram 4} = 0. \quad (7.4)$$

Как понимать эти формулы? Первая из них означает, что значения всех инвариантов *порядка n* на сингулярном узле с *n* двойными точками, содержащем малую петлю (с двойной точкой, см. (7.1)), равны нулю; в этой формуле мы опустили запись $v(\dots)$ и не нарисовали на диаграмме другие хорды; подразумевается, что ни одна из этих $n - 1$ хорд не имеет концов на малой дуге, стягиваемой хордой, явно показанной на диаграмме. Точно так же, во второй формуле речь идет о знакопеременной сумме значений одного и того же инварианта порядка *n* на четырех диаграммах с *n* хордами, однако на каждой диаграмме нарисованы только две хорды, остальные $n - 2$ хорды *совершенно одинаковы* для всех четырех диаграмм; подразумевается, что эти дополнительные хорды не должны иметь концов на маленькой

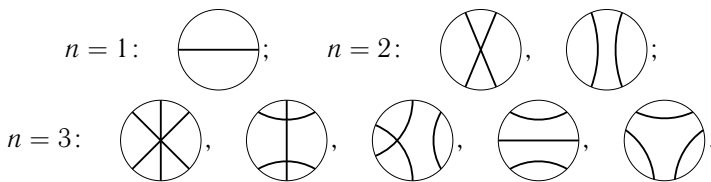


Рис. 7.6. Диаграммы Гаусса порядка $n \leq 3$

дуге (обозначенной более жирной линией на рисунке и ограниченной двумя близкими друг к другу концами двух хорд, показанных явно на диаграмме).

Например, для $n = 3$ четырехчленное соотношение, в котором третья хорда показана пунктиром, имеет вид

$$\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0.$$

В силу одночленного соотношения (см. первое равенство в (7.4)) третья диаграмма аннулируется, и мы получаем

$$\text{Diagram 5} = 2(\text{Diagram 6}). \quad (7.5)$$

Формула, которую мы только что получили, может рассматриваться как некое равенство в вещественном векторном пространстве над диаграммами Гаусса с тремя хордами. Обобщая эту ситуацию, можно рассматривать векторное пространство $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}(\Delta_n)$ всех конечных линейных комбинаций диаграмм Гаусса $D \in \Delta_n$; можно затем написать для \mathcal{D}_n множество всех уравнений, которые вытекают из одночленного и четырехчленного соотношений и рассмотреть факторпространство \mathcal{D}_n по этим уравнениям. Получается векторное пространство, которое будет обозначаться \mathcal{A}_n .

Например, для $n = 3$ мы имеем $\dim \mathcal{D}_3 = 5$ (рис. 7.6), но одночленное соотношение аннулирует три последних «базисных вектора» в \mathcal{D}_3 , показанных на рис. 7.6, а уравнение (7.5) выражает один из двух оставшихся ненулевых векторов через другой, из чего вытекает, что $\dim \mathcal{A}_3 = 1$. (Читатель может проверить, что $\dim \mathcal{A}_4 = 3$.)

Главный результат этой комбинаторной теории состоит в том, что пространство \mathcal{A}_n полностью описывает инварианты Васильева порядка n .

Теорема Концевича. *Векторное пространство V_n/V_{n-1} инвариантов Васильева порядка n изоморфно пространству \mathcal{A}_n диаграмм Гаусса с n хордами по модулю одночленного и четырехчленного соотношений.*

Доказательство этой теоремы, еще более замечательное, чем сама теорема, к сожалению, слишком длинное и трудное для того, чтобы я мог привести его здесь (см. Bar-Natan, 1995).

Мы видим, таким образом, что изучение пространств инвариантов Васильева порядка n (и определение их размерностей) сводится к чисто комбинаторным вычислениям. Правда, эти вычисления совсем не легкие. Однако с помощью суперкомпьютера Дроп Бар-Натан (Drop Bar-Natan) из Гарварда сумел вычислить размерности пространств $\mathcal{A}_n \cong V_n/V_{n-1}$ для $n = 0, 1, 2, \dots, 9$. Их значения составляют соответственно

$$1, 0, 1, 1, 3, 4, 9, 14, 27, 44.$$

Использование комбинаторной теории (более детальное изложение которой можно найти в CDL, 1994) не сводится только к вычислению размерностей пространств Васильева; ее можно использовать для нахождения значений конкретных инвариантов для конкретных узлов. Например, можно использовать инвариант $v_3 \in V_3$, определяемый соотношениями $v_3(\bigcirc) = 0$ и $v_3(\bigotimes) = 1$, чтобы доказать, что правый трилистник не эквивалентен своему зеркальному отражению — левому трилистнику. Эти вычисления мы оставляем квалифицированному читателю для самостоятельной работы.

Заключение: почему инварианты Васильева?

После полиномиальных инвариантов Джонса и его последователей есть ли, на самом деле, необходимость изобретать другие? Вне всякого сомнения: все известные к настоящему времени полиномиальные инварианты *неполные*. Это означает, что *два неэквивалентных узла могут иметь один и тот же полиномиальный инвариант*. Напротив, что касается инвариантов Васильева, то для них имеется следующее предположение.

Гипотеза. *Инварианты конечного порядка классифицируют узлы, т.е. для каждой пары неэквивалентных узлов K_1, K_2 существуют такое целое число $n \in \mathbb{N}$ и такой инвариант $v \in V_n$, что $v(K_1) \neq v(K_2)$.*

В настоящее время не существует ни доказательства, ни опровержения этой гипотезы.

Другая причина использования инвариантов Васильева — это их универсальность: *все* остальные инварианты должны из них выводиться. Так, Джоан Бирман и Сяо-Сун Линь (Xia Song Lin) из Колумбийского университета показали, что коэффициенты полиномов Джонса выражаются в терминах инвариантов Васильева. Идеей того же порядка, но на более элементарном уровне, является наше предложение читателю, знакомому с гл. 5, показать, что *коэффициент при x^2 полинома Конвея $\nabla(N)$ некоторого узла N есть инвариант Васильева порядка 2*.

Сегодня существует много других примеров, которые показывают, что метод Васильева позволяет не только получить известные ранее инварианты узлов, но и определить инварианты — классические и новые — для многих других объектов (а не только для узлов). Но этот аспект теории выходит за рамки нашей книги.

Наконец, существуют очевидные и естественные связи метода Васильева с физикой (значительно более тесные, чем у Джонса и Кауффмана). Эта часть теории кажется мне наиболее интересной, поскольку ее создание еще не закончено — оно совершается у нас на глазах. Но об этом мы поговорим в следующей, заключительной, главе.



Глава 8. Узлы и физика

(NN?, 2013?)

Эта последняя глава в корне отличается от предыдущих. Те имели своей целью рассказать историю некоторых фундаментальных идей теории узлов (простых в своей основе), описать различные подходы к центральной проблеме теории — классификации узлов, — основанные чаще всего на применении различных инвариантов. Во всех случаях речь шла об изложении уже завершённых исследований, принявших свою законченную форму. В этой последней главе, напротив, речь пойдет о еще не законченных и даже только еще намечаемых исследованиях.

Но можно ли серьезным образом прогнозировать будущие научные открытия? Разумеется, нет. Однако иногда случается так, что люди, работающие в определенной области науки, предчувствуют появление великого события. На повседневном языке эта ситуация описывается расхожей фразой: «Эта идея витала в воздухе», которая, разумеется, произносится уже после события. Классический (и, может быть, наиболее яркий) пример — это независимое открытие неевклидовой геометрии Лобачевским

и Бойаи, предчувствие этого события многими другими, и помрачение Гаусса, который мог все понять до конца, но не посмел *).

«Носится ли что-нибудь сегодня в воздухе» вокруг узлов? Мне кажется, что да. Я не собираюсь рисковать и не стану ни называть область физики, где должно произойти открытие, ни произносить имя будущего Лобачевского, ни предсказывать (по крайней мере серьезно) дату открытия: именно поэтому в названии этой главы фигурирует некто NN с вопросительным знаком и дата 2013 (конец мира, согласно некоторым источникам).

Мы вернемся коротко к возможным прогнозам в конце главы. Но сначала нужно объяснить, каковы источники уже существующего замечательного симбиоза между узлами и физикой.

Совпадения

Связи между узлами, косами, статистическими моделями и квантовой физикой основываются на странном совпадении между пятью соотношениями, происходящими из совершенно различных областей знания:

- соотношения Артина в группе кос (о которых мы говорили в гл. 2);
- одно из базовых соотношений в операторной алгебре Гекке;
- третье преобразование Рейдемейстера (рассмотренное в гл. 3);
- классическое уравнение Янга—Бакстера (один из основных законов, управляющий эволюцией так называемых статистических моделей в физике, о которых шла речь в гл. 6);
- квантовое уравнение Янга—Бакстера (которое определяет поведение элементарных частиц в определенных ситуациях).

Эти совпадения (видимые невооруженным глазом без необходимости понимать детали) частично показаны на рис. 8.1. На нем мы видим слева уравнение Янга—Бакстера

$$R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1},$$

*) Гаусс открыл основные принципы гиперболической геометрии раньше Лобачевского и Бойаи, но ему не хватило смелости опубликовать эту скандальную теорию. (Лобачевский, который посмел, сразу стал объектом насмешек для своих современников, а Бойаи не выдержал непризнания своих работ и бросил занятия геометрией.) Гаусс, к тому времени, когда узнал о публикации работ Лобачевского, уже создал дифференциальную геометрию поверхностей, на которых построение моделей гиперболической геометрии для профессионала было детской игрой. Как могло случиться, что такой гений, как Гаусс, имея на руках все козыри, прошел мимо обоснования новой геометрии, как будто на него опустилась невероятная и непонятная слепота?

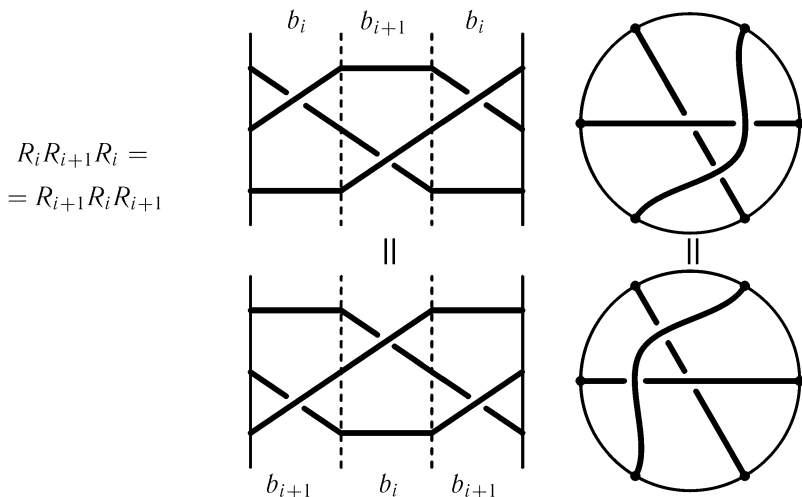


Рис. 8.1. Три аспекта одного и того же соотношения

в центре — соотношение Артина в группе кос, в алгебраической форме

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}$$

и в графической интерпретации, и справа — рисунок, представляющий третье преобразование Рейдемейстера. Два уравнения фактически одинаковы (достаточно заменить b на R или *vice versa*), так же как два рисунка (вглядитесь внимательно!).

Используя эти совпадения, новозеландец Джонс, россиянин Тураев, украинец Дринфельд, англичанин Ликориш, американец Виттен, француз Вожель и другие открыли определенные связи (фундаментальные? случайные?) между теорией узлов и многими областями физики.

Вариант статистической модели, на который обратил внимание Луис Кауффман, позволил ему описать инвариант узлов, открытый ранее Воаном Джонсом, — знаменитый полином Джонса. Первоначальное определение Джонса (которое мы не уточняли) базировалось на теории кос и на алгебре Гекке (и, следовательно, на совпадении соотношений Гекке и Артина). В подходе Кауффмана (описанном в гл. 6) ключевую роль играет третье преобразование Рейдемейстера. Джонс построил версию модели Поттса (статистической модели, сильно отличающейся от модели Кауффмана), основанную на соотношении Янга—Бакстера, и это позволило ему получить другим способом его же собственный полином. Тураев, используя некоторые решения уравнения Янга—Бакстера, открыл целую серию узловых инвариантов...

Стоит ли продолжать? Не разумнее ли было бы дать всем этим междисциплинарным связям более конкретное и убедительное объяснение, чем просто «совпадение»? К сожалению, я не знаю, возможно ли это сегодня. Тем не менее, на это можно взглянуть с более общей точки зрения, с точки зрения связи между математикой и действительностью.

Отступление: совпадения и математические структуры

Все науки, естественные и социальные, имеют свой *объект* изучения; они претендуют на описание определенной части реальности, реального мира. Что является объектом математики?

Ответ парадоксален: все и ничего. «Ничего», поскольку математика изучает не что иное, как *абстракции*: числа, дифференциальные уравнения, полиномы, геометрические фигуры и т. п. Математика не имеет конкретного объекта изучения в объективной реальности *). Но при этом она изучает «все», так как ее методы можно применить ко всему, к любому объекту, обладающему *той же структурой*, что и рассматриваемая абстракция. Мы не будем объяснять значение выражения, выделенного выше курсивом **), надеясь, что читатель понимает (например, глядя на рис. 8.1), что уравнение Янга—Бакстера обладает «той же структурой», что и первое преобразование Рейдемейстера.

Следствием (быть может, неожиданным) этого положения вещей является *важность совпадений*: если «случайно» оказывается, что структуры двух объектов «совпадают» (даже если эти объекты совершенно различной природы), то они описываются одной и той же «математикой», одной и той же теорией. Так, если след оператора из алгебры Гекке обладает теми же свойствами, которыми должен обладать инвариант узлов, то почему бы не сконструировать таковой, используя этот след (что и сделал Джонс)? Или если квантовая частица, так же как узел, удовлетворяет соотношению, которое совпадает с уравнением Янга—Бакстера, то почему бы не построить теорию квантовых частиц с помощью узловых инвариантов (как это сделал сэр Майкл Атья (Michael Atiyah), о котором мы еще поговорим)?

Мы вернулись к конкретным физическим моделям, связанным с теорией узлов, а это означает, что наше отступление окончено.

Статистические модели и полиномы узлов

В начале гл. 6 мы уже говорили о статистических моделях, в частности о моделях Изинга и Поттса. Напомним, что речь идет о регулярных

*) С точки зрения чистых платонистов, это не так, ибо изучению подлежит объективно существующий, но абстрактный мир идей, более реальный, чем материальный мир.

**) Знаменитая попытка была осуществлена в работах Бурбаки; я ее оставляю без комментариев.

атомных структурах (таких, как кристаллы), составленных из атомов (снабженных, при необходимости, *спинами*) с простыми локальными взаимодействиями (отмеченными символически на рисунках отрезками, соединяющими взаимодействующие атомы). Каждая такая структура X обладает *статистической суммой* $Z(X)$ (представляющей собой сумму по всем допустимым состояниям структуры X некоторых выражений, зависящих от энергии локальных взаимодействий). Величина $Z(X)$ позволяет вычислять основные глобальные параметры (температуру, полную энергию) и изучать *фазовые переходы* системы (например, из жидкого состояния в твердое).

В гл. 7 мы видели, как такая функция деления позволила нам определить и вычислить полином Джонса. Честно говоря, эта функция не соответствует никакой реальной статистической модели — это скорее плод богатого воображения Луиса Кауффмана. Но самое удивительное — это то, что существует настоящая статистическая модель, восходящая к самому Джонсу, с настоящей статсуммой, которая и позволила ему еще одним способом построить свой полином. Наша непосредственная цель — описать эту конструкцию, не вдаваясь в детали.

Если дана плоская диаграмма узла (или зацепления), мы начинаем с построения его *дуального графа* (или *дуальной статистической модели* узла) таким образом, как показано на рис. 8.2. Для этого раскрашиваем попеременно в белый и черный цвет части плоскости, ограниченные

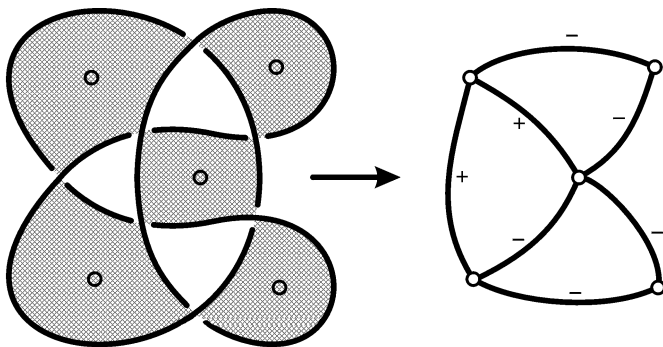


Рис. 8.2. Дуальный граф узла

проекцией узла, заботясь о том, чтобы внешняя часть была белой. Полагая далее, что черные части являются *вершинами* графа (или *атомами* модели) и что две вершины связаны *ребром* (или *находятся во взаимодействии*), если соответствующие черные области имеют непустое пересечение (одну или несколько точек); кроме того, ребра (взаимодействия)

объявляются положительными или отрицательными согласно условию, которое читатель может угадать, глядя на рис. 8.2.

Когда модель находится в некотором определенном состоянии $s \in S$ (через S обозначается множество всех допустимых состояний), *локальная энергия* $E(s(v_1), s(v_2))$ взаимодействия двух вершин-атомов, соединенных ребром $[v_1, v_2]$, предполагается равной ± 1 , если они имеют один и тот же спин, и равной $a^{\pm 1}$, если их спины противоположны; знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, положительно или отрицательно ребро (взаимодействие); a обозначает здесь переменную полинома от a и a^{-1} , который мы и собираемся получить. (Такой специальный выбор энергии взаимодействия атомов относится к модели Поттса, описывающей фазовый переход между водой и льдом.)

Задав все эти величины, определим *статсумму* модели по формуле

$$Z(K) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s \in S} \prod_{[v_i, v_j] \in A} E(s(v_i), s(v_j)),$$

где A есть множество всех ребер.

Чтобы определить полином Джонса исходя из этой статсуммы, достаточно применить к ней рассуждения, подобные «трюку Кауффмана» (детально описанному в гл. 6) *).

Мы видим, таким образом, что модель Поттса замерзания воды довольно легко приводит нас к самому знаменитому инварианту узлов. Анализируя эту конструкцию в журнальных или научно-популярных статьях, математики склонны восклицать с энтузиазмом о «применении теории узлов в статистической физике». Странный вывод! Теория узлов здесь не дает ничего для физики — наоборот, именно статистическая физика создает конструкцию, применимую в математике. (Чтобы пощадить самолюбие математиков, напомним, что первоначальная конструкция Джонса — чисто математическая — предшествовала «физической» конструкции, которую мы только что описали.)

Конечно, то, что здесь действительно важно, — это не соперничество между физиками и математиками, а неожиданное совпадение между двумя областями знания, априори весьма далекими друг от друга. Однако пора перейти к другому совпадению, где речь идет уже о применении теории узлов к физике.

*) Действительно, легко показывается, что полином $Z(K)$ инвариантен относительно второго и третьего преобразований Рейдемейстера, в то время как первое преобразование дает лишний множитель, от которого можно избавиться благодаря другому множителю, зависящему от индекса скрещивания, точно так, как это сделано в гл. 6.

Скобка Кауффмана и квантовые поля

Мы уже имели дело со скобкой Кауффмана в гл. 6, где она использовалась для определения полинома Джонса, самого знаменитого инварианта узлов. Сейчас мы увидим, что она может применяться совсем по-другому.

Напомним, что эта скобка ставит в соответствие каждой плоской диаграмме K узла некоторый полином $\langle K \rangle$ от a и a^{-1} , определенный явной формулой, причем формула эта задается некоторой статсуммой, определяемой статистической моделью, связанной с данным узлом. Мы уже отмечали, что эта формула (нет необходимости приводить ее здесь) не имеет никакой физической интерпретации, по крайней мере в рамках реальных статистических моделей. Но в другой области физики — топологической квантовой теории поля — она сыграет свою роль.

Эта теория, обычно обозначаемая английской аббревиатурой TQFT (Topological Quantum Field Theory), ищет формализацию квантовой версии теории классических полей (гравитационных, электромагнитных и т. д.) в самых широких — т. е. в топологических — рамках. При таком подходе изучаемые физические величины, *наблюдаемые*, не должны никоим образом зависеть от выбранной системы координат; они должны сохранять одни и те же значения при любом топологическом преобразовании координат; следовательно, они должны быть *топологическими инвариантами*, как и инварианты узлов.

Американец Эдвард Виттен (Edward Witten) пришел к идее использовать для создания TQFT обобщение полинома Джонса. Это обобщение (с \mathbb{R}^3 на трехмерные многообразия), часто называемое *инвариантом Джонса—Виттена* *), он использовал для создания TQFT. За эту работу Виттену была присуждена филдсовская медаль. Виттен построил модель размерности $2+1$, где 2 — размерность «пространства», а 1 — «времени», причем эти три координаты — относительность обязывает — перемешаны. Эта модель представляется, следовательно, как трехмерное многообразие, которое может содержать узлы, называемые в этом контексте физиками *линиями Вильсона*.

Далее, англичанин Майкл Атья (он также филдсовский медалист, но за предшествующие работы) пересмотрел с математической точки зрения модель Виттена, обобщил ее и создал аксиоматическую теорию TQFT. Конкретизируя эту теорию, француз Пьер Вожел и его соавторы построили целую серию примеров TQFT, в которых ключевую роль играла как раз

*) Несправедливое название: конструкции Виттена недоставало математической строгости, и только русские математики Н. Решетихин и В. Тураев сумели, используя другой подход, дать математически корректное определение этих инвариантов. Поэтому было бы правильнее называть их инвариантами Джонса—Решетихина—Тураева—Виттена, несмотря на чрезмерную длину термина.

скобка Кауффмана. Вероятно, здесь не место для рассказа об этой теории и этих примерах — используемая там математика слишком сложна для нашей книги — я ограничусь тем, что укажу, в каком контексте возникает скобка Кауффмана.

Вместо плоскости рассматривается поверхность с краем, и на ней рисуется диаграмма узла (или зацепления), которая может иметь концы на крае поверхности; типичный пример представлен на рис. 8.3.

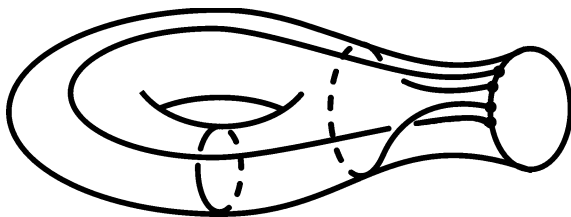


Рис. 8.3. Диаграмма зацепления на поверхности с краем

С каждой диаграммой такого вида связывается полином от a и a^{-1} , который удовлетворяет двум следующим очень простым соотношениям (уже появлявшимся в гл. 6):

$$\langle \text{crossing} \rangle = a \langle \text{smooth} \rangle + a^{-1} \langle \text{smooth} \rangle, \quad (8.1)$$

$$\langle K \sqcup \bigcirc \rangle = (-a^2 - a^{-2}) \langle K \rangle. \quad (8.2)$$

Читатель, который помнит эту главу, узнает два основных свойства скобки Кауффмана. Заметим, чтобы закончить с совпадениями, что один частный случай этой конструкции (когда поверхность является диском) дает *алгебру Темперли—Либа*, удовлетворяющую соотношениям Артина, Янга, Бакстера, Рейдемейстера, Гекке и т. д.

Я не буду здесь говорить о важности моделей TQFT с точки зрения физической реальности. Физики проявляют к ним серьезный интерес, но, может быть, не такой серьезный, как к понятию (математическому) квантовой группы, к обсуждению которых (в контексте связей с узлами) мы и приступаем.

Квантовые группы как машина для производства инвариантов

Квантовые группы появились около двадцати лет тому назад и представляются сегодня объектом, хорошо изученным как математиками, так и физиками. Их формальное определение, тем не менее, малопривлекательно: это множество абстрактных элементов, удовлетворяющих целому

списку алгебраических аксиом, плохо поддающихся наглядному объяснению.

Поэтому мы не будем пытаться детально разобраться в них, а сконцентрируем наше внимание на их физическом значении. Прежде всего отметим, что, вопреки их названию, квантовые группы совсем не группы; они являются алгебрами и даже «биалгебрами». Это означает, что на рассматриваемом множестве Q заданы две операции: *умножение* и *коумножение*. Умножение (привычное для нас понятие) ставит в соответствие каждой паре элементов из Q вполне определенный элемент из Q — их *произведение*; коумножение делает обратное: каждому элементу из Q оно ставит в соответствие пару элементов *) из этого множества — его *копроизведение*.

С физической точки зрения, эти две операции отвечают соответственно слиянию двух частиц в одну и расщеплению одной частицы на две другие. Мы попытались графически представить это соответствие на рис. 8.4.

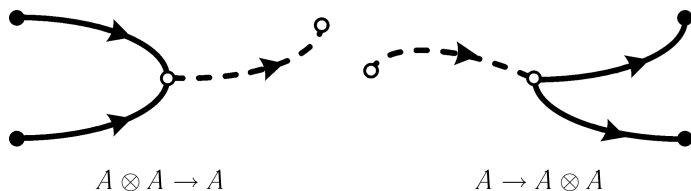


Рис. 8.4. Произведение и копроизведение двух частиц

Операции умножения и коумножения должны удовлетворять некоторым вполне естественным аксиомам (таким, как ассоциативность), что превращает Q в объект, который математики называют *биалгеброй* **). Эти аксиомы не являются слишком ограничительными, существует достаточно много различных квантовых групп, и поэтому приходится изучать более ограниченные классы групп, например, класс квантовых групп, которые, следуя украинскому математику Владимиру Дринфельду (еще один филдсовский лауреат!), называют *квазитреугольными*. Аксиома квазитреугольности влечет для этого класса выполнимость соотношения Янга—Бакстера, которое — читатель уже догадался — обеспечивает связь квазитреугольных квантовых групп с узлами. Более точно, представления этих квантовых групп позволяют строить, один за другим, бесконечный набор инвариантов, как уже известных, так и совершенно новых. Квантовые группы, так сказать, являются вполне научным способом массового производства узловых инвариантов.

*) Более точно, линейную комбинацию пар элементов.

***) А также алгеброй Хопфа.

Инварианты Васильева и физика

Инварианты Васильева — это мы видели в предыдущей главе — получаются применением к узлам весьма общей конструкции, идеологически близкой к теории катастроф. Можно ли придать какое-нибудь фундаментальное физическое значение переброске (основной катастрофе, при которой нижняя ветвь узла протыкает верхнюю ветвь и располагается над ней)? С первого взгляда нет. Для того чтобы найти физику у Васильева, нужно ее поискать в алгебраических и комбинаторных свойствах, которыми обладает множество его инвариантов.

Дело в том, что множество V инвариантов Васильева (образующее на самом деле векторное пространство) снабжено не только естественной операцией умножения, но также операцией *коумножения* $\Delta: V \rightarrow V \otimes V$. Она получается с помощью композиции $\#$ двух узлов (о которой шла речь в гл. 4) по следующей простой формуле:

$$(\Delta v)(K_1 \# K_2) = v(K_1) \cdot v(K_2).$$

Легко проверяется, что эти две операции превращают V в биалгебру. Таким образом, мы имеем здесь с самого начала «очень физическую» структуру (слияние и расщепление частиц), и нет необходимости искать где-то «на стороне» другой алгебраический объект (такой, как квазитреугольная квантовая группа для инвариантов типа Виттена—Джонса), для нахождения «физических» инвариантов. Эта структура биалгебры внутренне присуща инвариантам Васильева.

Но здесь есть и нечто большее. Во-первых, с аналитической точки зрения, узловые инварианты Васильева можно выразить с помощью замечательного интеграла Концевича. Он является, в некотором смысле, обобщением интеграла Гаусса в электромагнетизме и должен, следовательно, иметь какую-то физическую интерпретацию. Какую? Неизвестно.

Во-вторых, с комбинаторной точки зрения, интерпретация инвариантов Васильева с помощью хордовых диаграмм (о которой мы говорили в предыдущей главе), восходящая также к Максиму Концевичу *), дает многочисленные алгебры, подходящие для физических интерпретаций. В частности, алгебра китайских характеров (которая еще совсем недавно называлась «алгеброй диаграмм Фейнмана») близка к теоретической физике, как указывает ее бывшее название. Но здесь мы пока находимся лишь на уровне надежд и гипотез.

И наконец, последний важный пункт, также пока еще не понятый. Это четырехчленное соотношение, о котором мы уже говорили в гл. 7.

*) Этот молодой российский математик, в настоящее время занимающий должность постоянного профессора в престижном Институте высших научных исследований (IHES) недалеко от Парижа, тоже получил Филдсовскую медаль.

Дрор Бар-Натан воспользовался тем фактом, что это соотношение — не что иное, как другая форма классического тождества Якоби, и построил инварианты Васильева на основе представлений алгебр Ли. Не будет ли иметь физического продолжения это совпадение между фундаментальными математическими соотношениями?

Заключение: ничего не закончено

В начале этой книги мы видели, как идея сделать узел моделью атома, предложенная Уильямом Томсоном почти полтора века назад, привела к возникновению теории узлов. В совсем недавнем прошлом инварианты узлов, в частности скобка Кауффмана, стали основанием теорий, имеющих физический характер, — таких, как топологическая квантовая теория поля. Где мы находимся сейчас? Можно ли подводить итоги?

Идее Томсона была суждена недолгая жизнь. Напротив, важность, с точки зрения физической реальности, теории TQFT (по линии Виттена, Атья, Вожеля, Йеттера) не оставляет ни малейшего сомнения. Очевидно, интерес к связям между физикой и узлами будет возрастать.

Для специалистов по теории узлов также осталось много работы: например, до сих пор не существует достаточно простого и эффективного алгоритма развязывания, такого, чтобы его можно было перевести на компьютер; остаются открытыми и многие другие важные проблемы. Для специалистов в области математической физики, использующих идеи теории узлов, имеется много неисследованных областей, в частности по линии инвариантов Васильева.

Наконец, не следует забывать, что кроме классических узлов (кривые в трехмерном пространстве) существуют малоизученные «обобщенные узлы», например сферы (и другие поверхности) в пространстве размерности четыре. Согласно Эйнштейну, мы живем в четырехмерном пространстве-времени. По мнению специалистов в теории струн, распространение элементарной частицы может моделироваться с помощью поверхностей. Не прячется ли за всем этим каким-то образом квантовая теория гравитации? Не имеют ли инварианты Васильева (которые должны существовать также и в этой ситуации) реальной физической интерпретации?

Исследование всегда начинается с вопроса и с надежды. Читателю (и самому себе) я хочу в заключение пожелать испытать ту несравненную радость понимания, которая сопровождает великие открытия.

Литература

- Adams C. The Knot Book. New York: Freeman, 1994.
- Ashley C. W. The Ashley Book of Knots. New York: Doubleday, 1944.
- Bar-Natan D. On the Vassiliev Knot Invariants // Topology. 1995. Vol. 34. P. 423–472.
- CDL [Chmutov S. V., Duzhin S. V., Lando S. K.]. Vassiliev Knot Invariants, I, II, III // Singularities and Bifurcation / Ed. V. I. Arnold. P. 117–145. (Advances in Soviet Mathematics. 1994. Vol. 21)
- Dehornoy P. L'art de tresser // Pour la science. 1997. Special issue. P. 68–74.
- Haken W. Theorie der Normalflächen // Acta Mathematica. 1961. Vol. 105. P. 245–375.
- Jaworski J., Stewart I. Get Knotted. London: Pan Books, 1976.
- Jensen D. The Hagfish // Scientific American. 1966. Vol. 214. P. 82–90.
- Mercat C. Théorie des nœuds et enluminures celtes // L'Ouvert. 1996. № 84.
- Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
- Rouse Ball W. W. Fun with String Figures. New York: Dover, 1971.
- Stewart I. Le polynôme de Jones // Pour la science. 1989. Vol. 146. P. 94.
- Thomson W. Hydrodynamics // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1867. Vol. 6. P. 94–105.
- Walker J. Cat's Cradles and Other Topologies Armed with a Two-Meter Loop of Flexible String // Scientific American. 1985. Vol. 252. P. 138–143.
- Wang J. C. Appendix I. An introduction to DNA Supercoiling and DNA Topoisomerase-catalyzed Linking Number Changes of Supercoiled DNA // Advances in Pharmacology. 1994. Vol. 29B. P. 257–270.

Алексей Брониславович Сосинский
Узлы. Хронология одной математической теории

Подписано в печать 27.10.2005 г. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 7. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов во ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru
