В. И. Корзюк

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебника для студентов математических специальностей, прикладной математики, информатики

Минск
БГУ
2010

УДК 517.958 (075.8)
ББК 22.161.6 я 73
К 66

Рекомендовано Ученым советом
факультета прикладной математики и информатики
3 ноября 2009 г., протокол №3

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук, профессор Н. И. Юрчук;
кафедра дифференциальных уравнений и оптимального управления Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

Корзюк В. И.

Уравнения математической физики. / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2010. – 509 с.

В книге рассматриваются основные уравнения математической физики и задачи для них. Излагаются методы исследования разных граничных задач для дифференциальных уравнений математической физики.

Отличительной особенностью данной книги является то, что большое внимание уделяется вопросу разрешимости и доказательству корректной постановки рассматриваемых задач. Наряду с многими классическими методами предлагаются новый метод доказательства существования и единственности сильного решения граничных задач и метод характеристик отыскания классических решений смешанных задач для одномерного волнового уравнения.

Для студентов математических специальностей университетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Курс математической физики занимает значительное место в общей математической подготовке студентов факультетов прикладной математики, математических и физических факультетов университетов. Он стоит рядом с курсами вычислительной математики и математического моделирования, где уделяется большое внимание численным методам решения задач и созданию математических моделей, описывающих конкретные физические и другие моделируемые явления и процессы. Задача курса „Уравнения математической физики“ дать методы и строгое математическое обоснование утверждений полученных математических задач (математических моделей) при аналитическом их исследовании.

Автор данной книги читает ежегодно курс лекций по уравнениям математической физики на протяжении существования с 1970 года факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета для студентов, специализирующихся по специальности „Прикладная математика“. Книга написана в соответствии с программой по данной специальности.

Автор выражает глубокую благодарность доценту Е. С. Чеб и аспирантке Конопелько О. А. кафедры математической физики, которые проделали большую работу по набору и подготовке рукописи к печати, а также за замечания многим студентам, которы данный курс читали в предложенном электронном варианте и смогли увидеть неточности и опечатки в изложении материала.

Введение

Настоящий курс лекций посвящен математической физике, а точнее, — уравнениям математической физики и задачам для них. Математическая физика соединяет в себе два мира — миры математики и физики, образующая свою теорию, методы исследования и познания.

В отличие от своих родителей — физики и математики, история которых насчитывает тысячелетия, математическая физика — наука сравнительно молодая. За два столетия развития математическая физика приобрела свое лицо, свое направление и сумела при этом сохранить гибкость и способность к совершенствованию. Она обогатила математику и физику новыми методами и результатами и продолжает это делать в настоящее время. Математическая физика дала особенно большой толчок созданию и развитию теории дифференциальных уравнений с частными производными. Поэтому между курсами уравнений математической физики и дифференциальных уравнений с частными производными трудно провести разделительную грань. Они взаимосвязаны между собой. Основным математическим объектом исследования в математической физике, как правило, являются дифференциальные уравнения с частными производными или их системы. Здесь также присутствуют и интегральные, интегро-дифференциальные и другие уравнения, которые являются результатом математического описания физических законов и других закономерностей при моделировании различных физических явлений. Математическое моделирование многих физических процессов (математическая физика) породило многие задачи для дифференциальных уравнений, которые стали объектом изучения на отыскание решений и, в некоторой степени, создания теории дифференциальных уравнений с частными производными. Как и для многих разделов математики, для этой теории присуща черта самостоятельного развития. Поэтому для изучения уравнений математической физики нужны знания и современные методы из теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Таким образом, математическая физика является собранием всех математических теорий, уравнений, систем и методов познания и изучения задач для этих объектов путем широкого математического моделирования разных изучаемых явлений и задач в физике. Сегодня в целом специфика современной науки состоит в том, что она основана на развитии и широком применении математического моделирования и вычислительного эксперимента и служит ближайшим стратегическим резервом ускорения научно-технического прогресса. Сущность математического моделирования и его главное преимущество состоит в замене исходного объекта соответствующей математической моделью и в дальнейшем ее изучение (экспериментирование) на компьютере с помощью вычислительных алгоритмов. Математическое моделирование представляет собой естественное развитие и обобщение методов научного исследования, соединенных с современной информационной технологией. Цикл вычислительного эксперимента "объект – алгоритм – программа – компьютер – управление объектом" отражает основные этапы процесса познания в нынешнем компьютерном воплощении. Здесь органично соединяются сильные стороны теоретических методов и научного эксперимента.

Как было сказано раньше, теория математических моделей физических явлений и математическое моделирование их составляет предмет математической физики. Математическая физика развивалась со времени Ньютона параллельно развитию физики и математики. Многие задачи классической математической физики сводятся к краевым задачам для дифференциальных (иногда интегро-дифференциальных) уравнений – уравнений математической физики. Основными математическими средствами исследования этих задач служит теория дифференциальных и интегральных уравнений, вариационное исчисление, теория функций, функциональный анализ, приближенные методы, вычислительная математика, компьютерные технологии.

Середина прошлого столетия явилась для теории уравнений с частными производными периодом исключительно быстрого развития. В это время были заложены основы общей теории систем уравнений с частными производными, решены многие давно стоящие фундаментальные проблемы, созданы новые важные разделы теории. Характерной чертой этого периода является проникновение в теорию уравнений с частными производными идей и методов функционального анализа. Развитие этих двух наук происходило в тесной связи и взаимодействии. Особенно большое влияние на теорию уравнений с частными производными оказала теория обобщенных функций, зарождение которой и первые ее применения относятся к тридцатым годам прошлого столетия (С.Л.Соболев), а системное применение – к пятидесятым годам (после работ Л.Шварца). Аппарат теории обобщенных функций позволил глубже понять многие ранее известные факты, получить простые и естественные доказательства ряда важнейших теорем, придать завершенный характер отдельным частным результатам, а также решить ряд новых фундаментальных проблем.

Традиционная (классическая) математическая физика имеет дело с задачами классической физики: механики, гидродинамики, акустики, микроэлектроники и т. д. С появлением квантовой физики множество используемых математических средств значительно расширилось: наряду с традиционными областями математики стали широко применять теорию операторов, теорию обобщенных функций, теорию функций комплексных переменных, топологические и алгебраические методы, вычислительную математику и технику.

Среди задач математической физики выделяется важный класс корректно поставленных задач, т. е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Хотя эти требования не первый взгляд кажутся совершенно естественными, но их, тем не менее, надо доказывать в рамках принятой математической модели: модель не противоречива (решение существует), модель однозначно описывает физический процесс (решение единственно), модель малочувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задачи).

Представленный курс "Уравнения математической физики" составлен на основе лекций, которые читаются в последние годы для студентов факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета по специальности "Прикладная математика".

Зато если приучить их себе, они могут рассказать много интересного. Лауреат Нобелевской премии Ричард Фейман – один из крупнейших физиков современности – говорил, что понять уравнение – это означает написать его решение, не решая. Но сегодня компьютерная техника и математические методы позволяют детально исследовать математическую модель любой сложности, ее решение.

1. Предварительные сведения

1.1. Множества и элементы

В курсе уравнений математической физики постоянно будем иметь дело с функциями, операторами и другими функциональными зависимостями. Прежде чем говорить об отображении представим некоторые сведения из теории множеств и булевой алгебры.

Будем рассматривать некоторые отдельные объекты той или иной природы, которые обладают определенными свойствами и находятся в определенных отношениях между собой. Совокупность объектов будем называть *множествами*, а сами отдельные объекты, из которых состоят множества, их *элементами*. Множества будем обозначать большими буквами, а элементы их – малыми буквами.

1. Отношение $x \in X$ означает, что x является элементом множества X (x принадлежит X). Множество, состоящее из одного элемента a обозначается символом $\{a\}$.

2. Если X и Y – два множества, то отношение $X \subset Y$ означает, что множество X содержится во множестве Y, т. е. каждый элемент x множества X является элементом Y.

3. Отрицание отношения $X \subset Y$ записывается так: $X \not\subset Y$.

4. Отношение $X = Y$ означает, что множества X и Y состоят из одних и тех же элементов (множества X и Y совпадают между собой).

5. Пусть имеется множество X и свойство P для некоторых его элементов. Подмножество $\big\{x \in X |\, P(x)\big\}$ множества X состоит из тех элементов $x \in X$, для которых свойство P истинно.

6. Обозначим через $\varnothing$ пустое множество. Это означает, что для любого множества X $\varnothing = \big\{x \in X |\, x \neq x\big\}$.

7. Если X и Y – такие два множества, для которых $Y \subset X$, то подмножество $\big\{x \in X | x \notin Y\big\} \subset X$ множества X называется *разностью* между X и Y и обозначается $X \setminus Y$, или *дополнением* Y в X и обозначается CY. Здесь $x \notin Y$ – обозначение отрицания свойства $x \in Y$.

8. Пусть X и Y – два множества. Отношение $X \cap Y$ означает *пересечение* множеств X и Y, т. е. $X \cap Y$ – подмножество X и Y, состоящее из элементов, которые принадлежат одновременно множеству X и множеству Y.

9. Множество, состоящее из элементов, принадлежащих по крайней мере одному из двух множеств X и Y, называется *объединением* X и Y и обозначается символом $X \cup Y$.

10. Обозначим через (x,y) упорядоченную пару элементов x и y. Две упорядоченные пары (x,y) и $(\tilde{x},\tilde{y})$ равны, если $x = \tilde{x}$, $y = \tilde{y}$. Для любых двух множеств X и Y существует множество, состоящее из всех упорядоченных пар (x,y), где $x \in X$, $y \in Y$. Оно обозначается символом $X \times Y$ и называется *декартовым произведением* множеств X и Y. Здесь упорядоченные пары определены для каждого $x \in X$ и любого $y \in Y$, и, наоборот, для каждого элемента $y \in Y$ и любого $x \in X$ определены пары (x,y).

1.2. Отображения

Пусть X и Y — два множества и $\mathscr{F}(x,y)$ — отношение между $x \in X$ и $y \in Y$. Отношение $\mathscr{F}(x,y)$ функционально по y, если для каждого $x \in X$ существует один и только один такой элемент $y \in Y$, что отношение $\mathscr{F}(x,y)$ истинно. Таким образом, мы получаем некоторое подмножество $\mathscr{F} = \{(x,y) | \mathscr{F}(x,y)\text{функционально по}\, y\}$ пар (x,y) из декартового произведения $X \times Y$, для которых отношение $\mathscr{F}(x,y)$ функционально по y. Подмножество $\mathscr{F} \subset X \times Y$ вместе с отношением $\mathscr{F}(x,y)$, функционального по y, называется *отображением или функцией* из X в Y. Элементы $y = f(x)$ из множества Y называются значениями данного отображения (функции). Это отображение (функцию) будем обозначать через f, входящее в обозначение значений $y = f(x)$, следующим образом: $f : X \ni x \to f(x) \in Y$. Множество всех тех элементов $x \in X$ из множества X, для которых отношение $\mathscr{F}(x,y)$ функционально по y, называется *областью определения отображения* f и обозначается $\mathscr{D}(f)$. А множество всех элементов $y \in Y$, для которых $\mathscr{F}(x,y)$ функционально для всех $x \in \mathscr{D}(f) \subset X$, называется *областью значений отображения* f и обозначается $\mathscr{R}(f)$.

Пусть задано отображение $f : X \ni x \to f(x) \in Y$ в пределах двух множеств X и Y. Для любого подмножества $A \subset X$ подмножество множества Y, определяемое отношением: "существует такой элемент $x \in A$, что $y = f(x)$", называется *образом* множества A при отображении $f : X \ni x \to f(x) \in Y$ и обозначается $f(A)$, $f(A) \subset Y$.

Для любого подмножества $B \subset Y$ подмножество множества X, определяемое отношением $f(x) \in B$, называется *прообразом* B при отображении $f : X \ni x \to f(x) \in Y$ и обозначается символом $f^{-1}(B)$. Отметим, что в силу своих определений прообраз $f^{-1}(B) \subset \mathscr{D}(f) \subset X$ $f(A) \subset \mathscr{R}(f) \subset Y$.

Пусть X, Y, Z — три множества. Рассмотрим два отображения $f : X \ni x \to f(x) \in Y$ и $g : Y \ni y \to g(y) \in Z$. Если область значений $\mathscr{R}(f)$ содержится или совпадает с областью определения $\mathscr{D}(g)$ отображения g, тогда можно определить новое отображение h, которое определяется следующим образом: $h : X \ni x \to f(x) \to g\big(f(x)\big) \in Z$ с областью определения $\mathscr{D}(h) = \mathscr{D}(f)$ и некоторой областью значений $\mathscr{R}(h)$. Таким образом определенное отображение h называется композицией отображений f и g или сложной функцией и обозначается символом $h = f \circ g$.

1.3. Действительные и комплексные числа

Элементарное представление о действительных (вещественных) числах дается в курсе средней школы. Однако этих понятий недостаточно для строгого изложения полного курса по математическому анализу. Поэтому во многих учебниках и учебных пособиях по математическому анализу изложение начинается с изучения множества действительных чисел. Для введения действительных чисел используются бесконечные десятичные дроби, бесконечные двоичные дроби, дедекиндовы сечения в области рациональных чисел, аксиоматический подход и другие способы.

Здесь предполагается, что студенты, изучающие настоящий курс, уже знают теорию действительных чисел, множество которых обозначается символом $\mathbb{R}$. Подмножество рациональных чисел множества $\mathbb{R}$ обозначим через $\mathbb{Q}$, а подмножество натуральных чисел $1, 2, \ldots$ — через $\mathbb{N}$. Множество всех целых неотрицательных чисел — $\widetilde{\mathbb{N}}$. В силу своего определения справедливы включения $\mathbb{N} \subset \widetilde{\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Как известно, для любых элементов множества $\mathbb{R}$ определены операции:

- операция сложения $\mathbb{R} \ni x{,}y \to x + y \in \mathbb{R}$;
- операция произведения $\mathbb{R} \ni x{,}y \to x \cdot y \in \mathbb{R}$;
- отношение сравнения $x \leqslant y$ (меньше или равно).

($\mathbb{R}$) **Множество $\mathbb{R}$ есть поле, т. е.**

($\mathbb{R}1$) $x+(y+z) = (x+y)+z$ — операция ассоциативна относительно сложения;

($\mathbb{R}2$) $x + y = y + x$ — операция коммутативна относительно сложения;

($\mathbb{R}3$) существует такой элемент $0 \in \mathbb{R}$, что $0 + x = x$ для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$;

($\mathbb{R}4$) для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$ существует элемент $-x \in \mathbb{R}$ такой, что $x + (-x) = 0$;

($\mathbb{R}5$) $x(yz) = (xy)z$ – операция ассоциативна относительно умножения элементов;

($\mathbb{R}6$) $xy = yx$ – операция коммутативна относительно произведения;

($\mathbb{R}7$) в $\mathbb{R}$ существует такой элемент $1 \neq 0$ (не равный нулю), что $1 \cdot x = x$ для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$;

($\mathbb{R}8$) для каждого элемента $x \neq 0$ множества $\mathbb{R}$ существует такой элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (или обозначаемый символом $1/x$), что $x \cdot x^{-1} = 1$;

($\mathbb{R}8$) $x(y + z) = xy + xz$.

($\widetilde{\mathbb{R}}$) **Множество $\mathbb{R}$ есть упорядоченное поле, т. е. выполняются следующие аксиомы:**

($\widetilde{\mathbb{R}}1$) из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ следует $x \leqslant z$;

($\widetilde{\mathbb{R}}2$) из соотношений $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ следует эквивалентное отношение $x = y$;

($\widetilde{\mathbb{R}}3$) для любых двух элементов $x,y \in \mathbb{R}$ справедливо или отношение $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$;

($\widetilde{\mathbb{R}}4$) из $x \leqslant y$ следует $x + z \leqslant y + z$;

($\widetilde{\mathbb{R}}5$) из $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$ следует $0 \leqslant xy$.

Отношение $x \leqslant y$ и $x \neq y$ записывается в виде $x < y$ или $y > x$.

Наряду с множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ рассмотрим еще число i – мнимую единицу, где $i^2 = i \cdot i = -1$. Для любого элемента $y \in \mathbb{R}$ определено произведение iy, для которого $(iy)^2 = iy \cdot iy = i^2y^2 = -y^2$.

Для любой упорядоченной пары (x_1,x_2) декартового произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ *комплексным числом* называется элемент вида $x_1 + ix_2$. Множество комплексных чисел обозначим через $\mathbb{C}$. Любое комплексное число $z = x_1 + ix_2$ можно рассматривать как отображение вида $\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} = (x_1,x_2) \to x_1 + ix_2 = z \in \mathbb{C}$. Действительное число x_1 называется действительной частью комплексного числа $z = x_1 + ix_2$, а x_2 – мнимой частью.

Для элементов множества $\mathbb{C}$, как и для $\mathbb{R}$ вводятся операция сложения через соответствующую операцию для элементов множества $\mathbb{R}$ по правилу: $(x_1 + ix_2) + (y_1 + iy_2) = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2)$ и операция произведения – $(x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = (x_1y_1 - x_2y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$.

Два комплексных числа $x_1 + ix_2, y_1 + iy_2$ считаются равными в том и только том случае, если $x_1 = x_2$ (действительные части равны) $y_1 = y_2$ (мнимые части равны).

Роль нуля во множестве комплексных чисел играет число $0 + i0$, а единицы $-\ 1 + i0$.

Отметим, что для элементов множества $\mathbb{C}$ отношение сравнения отсутствует.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ является полем в силу свойств элементов множества $\mathbb{R}$ и определения операций сложения и произведения для элементов из $\mathbb{C}$. Число $x_1 - ix_2$ называется сопряженным к числу $z = x_1 + ix_2$ и обозначается $\overline{z}$. Для каждого числа $z = x_1 + ix_2 \neq 0$ в качестве z^{-1} следует брать число

$$\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\overline{z} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - i\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad zz^{-1} = 1 + i0.$$

Заметим, что множество $\mathbb{R}$ можно рассматривать как подмножество $\mathbb{C}$, если элементы $x \in \mathbb{R}$ отождествлять с числами $x + i0$.

1.4. Линейные пространства

Нормированные пространства и пространства со скалярным произведением представляют собой линейные (векторные) пространства, наделенные топологической структурой с помощью нормы или скалярного произведения.

Обозначим через $\mathbb{K}$ поле скаляров, представляющих собой поле вещественных (действительных) чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 1.4.1. Множество E называется *линейным пространством*, если для его элементов $x, y, z, \ldots$ введены две операции: сумма (сложение) элементов и произведение элементов на скаляр, для которых выполняются аксиомы линейного пространства, а именно:

($E1$) Каждой паре элементов x,$y \in E$ ставится в соответствие элемент $x + y \in E$, называемый суммой, и для этой операции сложения выполняются аксиомы:

($E1.1$) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

($E1.2$) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

($E1.3$) существует элемент $0 \in E$, называемый нулем, такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента $x \in E$ $(\forall x \in E)$;

($E1.4$) каждому элементу $x \in E$ соответствует противоположный элемент $-x \in E$ такой, что $x + (-x) = 0$.

($E2$) Каждому элементу $x \in E$ и каждому скаляру (числу) λ из поля $\mathbb{K}$ ставится в соответствие элемент λx (произведение скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$ на элемент $x \in E$) из E. Для операции умножения любого скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$ на любой элемент $x \in E$ справедливы следующие аксиомы:

($E2.1$) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $\forall x \in E$ (ассоциативность умножения);

($E2.2$) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ для $\forall\alpha \in \mathbb{K}$; и $\forall x,y \in E$ (дистрибутивность умножения);

($E2.3$) $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ для $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ и $\forall x \in E$ (дистрибутивность умножения относительно скаляров);

($E2.4$) $1 \cdot x = x$;

($E2.5$) $0 \cdot x = 0$.

Линейное пространство E называется *действительным (вещественным)*, если $\mathbb{K}$ – поле действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$, и *комплексным*, если $\mathbb{K}$ – поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Сформулируем без доказательства некоторые свойства линейного пространства.

Свойство 1.4.1. В E нулевой элемент 0 является единственным.

Свойство 1.4.2. Для каждого элемента $x \in E$ существует единственный противоположный элемент $-x \in E$.

Свойство 1.4.3. Если $\alpha x = \beta x$, то $\alpha = \beta$, если $x \neq 0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

Свойство 1.4.4. Если $\alpha x = \alpha y$ и $\alpha \neq 0$, то $x = y$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x,y \in E$.

Свойство 1.4.5. Для всякого элемента x линейного пространства E противоположным элементом является элемент $-x = (-1)x$.

Определение 1.4.2. Множество $\widetilde{E}$ в линейном пространстве E ($\widetilde{E} \subset E$) называют *линейным многообразием*, если для любых элементов $x,y \in \widetilde{E}$ и любых скаляров $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ линейная комбинация $\alpha x + \beta y \in \widetilde{E}$.

Следствие 1.4.1. Линейное пространство E является линейным многообразием, так как можно взять $\widetilde{E} = E$.

Определение 1.4.3. Элементы $x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}$ в пространстве E называются *линейно независимыми*, если их линейная комбинация $\sum_{k=1}^{l} \alpha^{(k)} x^{(k)}$ ($\alpha^{(k)} \in \mathbb{K}$) равна нулю тогда и только тогда, когда все $\alpha^{(1)} = \ldots = \alpha^{(l)} = 0$. Если это не выполняется, т. е. $\sum_{k=1}^{l} \alpha^{(k)} x^{(k)} = 0$ хотя бы при некотором $\alpha^{(k)} \neq 0$, то элементы $x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}$ называются *линейно зависимыми*.

Свойство 1.4.6. Если элементы в E линейно зависимы, то среди этих элементов найдутся такие, которые представляют собой комбинацию остальных.

Определение 1.4.4. Линейное пространство E называется m - *мерным*, если в нем существует m линейно независимых элементов, а любые $m + 1$ элемента из E линейно зависимы.

Набор любых m линейно независимых элементов в m - мерном линейном пространстве E называется *базисом* в E. Пусть $e^{(1)}$, $e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}$ – базис в E.

Определение 1.4.5. Если для элемента $x \in E$ существуют такие скаляры $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(m)} \in \mathbb{K}$, для которых

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha^{(k)} e^{(k)}, \tag{1.4.1}$$

то (1.4.1) называется *разложением* элемента x по базису $e^{(1)}$, $e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}$ пространства E.

Свойство 1.4.7. Для любого элемента $x \in E$ существует разложение x по базису линейного пространства E.

Определение 1.4.6. Линейное пространство E называется *бесконечномерным*, если для каждого натурального m существует m линейно независимых элементов в E.

Замечание 1.4.1. Из определения 1.4.6 следует, что в бесконечномерном линейном пространстве базисом может быть не менее чем счетное множество элементов.

1.5. Нормированные и гильбертовы пространства

Современный математический анализ широко использует понятие окрестности, приближение или сходимость одних элементов к другим, малое расстояние между элементами, предельный переход, непрерывность, дифференцируемость и другие. Без топологических понятий или связанных с ними нельзя проводить глубокие исследования для дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных и других уравнений в рамках функциональных пространств, которые как множества являются не только линейными пространствами, но и должны обладать топологической структурой. Топологию на линейных пространствах можно задать с помощью скалярного произведения или нормы.

Пусть E — линейное пространство.

Определение 1.5.1. *Нормой* в E будем называть отображение $\|\cdot\| : E \ni x \to \|x\| \in \mathbb{R}$ для любого элемента $x \in E$, удовлетворяющего условиям:

$(N1)$ $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

$(N2)$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для любого скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$ и любого элемента $x \in E$, где $|\lambda|$ — модуль числа λ;

$(N3)$ $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника для любых элементов $x,y \in E$.

Определение 1.5.2. Линейное пространство, на котором определена норма, называется *нормированным* пространством.

Таким образом, нормированное пространство — это линейное (векторное) пространство плюс заданная на нем норма. В дальнейшем, как правило, чтобы не было путаницы и не приходилось всякий раз оговаривать норму, заданную на том или ином линейном пространстве E, будем, например, обозначать символом $\|x\|_E$ с помощью значка E внизу. На одном и том же линейном пространстве можно задать разные нормы и, тем самым, получить разные нормированные пространства.

Замечание 1.5.1. Любое нормированное пространство является метрическим пространством, где в качестве расстояния можно взять отображение $\rho : E \times E \ni (x,y) \to \rho(x,y) = \|x - y\|_E \in \mathbb{R}$. Из свойств нормы определенная таким образом функция ρ удовлетворяет всем аксиомам расстояния метрического пространства.

$(M1)$ $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ для любого элемента $x \in E$;

$(M2)$ $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для любых элементов $x,y \in E$;

$(M3)$ $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ для любых элементов $x,y,z \in E$.

Свойство 1.5.1. Для любых элементов $x,y \in E$ нормированного пространства E справедливо неравенство

$$\|x - y\| \geqslant \big|\|x\| - \|y\|\big|.$$

Пусть E — линейное или нормированное пространство. Отображение $\{\cdot\} : \mathbb{N} \ni n \to x^{(n)} \in E$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, называется последовательностью элементов E и обозначается $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{x^{(n)}\}$.

Определение 1.5.3. Последовательность $\{x^{(n)}\} \subset E$ нормированного пространства E *сходится к элементу* $x \in E$ по норме (сходится к элементу $x \in E$), если предел нормы $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n^{(0)}$, что для всех $n > n^{(0)}$ $\|x^{(n)} - x\| < \varepsilon$. В этом случае будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ или $x^{(n)} \to x$ при $n \to \infty$.

Свойство 1.5.2. Если последовательность $\{x^{(n)}\}$ нормированного пространства E сходится к элементу $x \in E$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\| = \|x\|.$$

Определение 1.5.4. Отображение $(\cdot,\cdot)_E : E \times E \ni (x,y) \to \to (x,y)_E \in \mathbb{C}$, где E — комплексное линейное пространство, называется *скалярным произведением*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$(G1)$ для любого элемента $x \in E$ $(x,x)_E$ — действительное неотрицательное число и $(x,x)_E = 0$ тогда и только тогда, когда x — нулевой элемент в E, $(x = 0)$;

$(G2)$ $(x,y)_E = \overline{(y,x)_E}$ для любых элементов $x, y \in E$, где черта означает комплексное сопряжение;

$(G3)$ $(\lambda x,y)_E = \lambda(x,y)_E$ для любых элементов $x,y \in E$ и любого скаляра $\lambda \in \mathbb{C}$;

$(G4)$ $(x + y,z)_E = (x,z)_E + (y,z)_E$ для любых элементов $x,y,z \in E$.

Комплексное линейное пространство E называется *пространством со скалярным произведением* (предгильбертовым пространством, унитарным пространством), если на декартовом произведении $E \times E$ задано скалярное произведение.

Теорема 1.5.1. *Для скалярного произведения в E справедливо неравенство Коши – Буняковского*

$$|(x,y)_E| \leqslant (x,x)_E^{1/2}(y,y)_E^{1/2} \tag{1.5.1}$$

для любых элементов $x,y \in E$.

В предгильбертовом пространстве E можно ввести норму с помощью скалярного произведения по формуле $\|\cdot\|_E : E \ni x \to \|x\|_E = (x,x)_E^{1/2} \in \mathbb{R}$ и его можно рассматривать как нормированное пространство. То, что введенная таким образом норма удовлетворяет всем условиям согласно определению 1.5.1, легко проверяется используя условия скалярного произведения (определение 1.5.4) и неравенство Коши – Буняковского (1.5.1) для доказательства неравенства треугольника.

Свойство 1.5.3. Скалярное произведение любого предгильбертова пространства E обладает свойством непрерывности, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^{(n)},y^{(n)}\right)_E = (x,y)_E$, если $\lim\limits_{n\to\infty}(x^{(n)}) = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(y^{(n)}) = y$.

Свойство 1.5.4. (равенства параллелограмма) Для любых элементов x и y предгильбертова пространства E справедливо равенство параллелограмма

$$\|x+y\|_E^2 + \|x-y\|_E^2 = 2\|x\|_E^2 + 2\|y\|_E^2.$$

Для приложений используются многие функциональные пространства, обладающие свойством полноты, которое определяется через фундаментальные последовательности (последовательности Коши).

Пусть E – нормированное пространство.

Определение 1.5.5. Последовательность $\{x^{(n)}\} \subset E$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n^{(0)}$, что для любых номеров $n > n^{(0)}$ и любых натуральных чисел $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|x^{(n+m)} - x^{(n)}\|_E < \varepsilon.$$

Фундаментальные последовательности нормированного пространства обладают свойствами, характерными для числовых фундаментальных последовательностей. Отметим некоторые из них:

- всякая фундаментальная последовательность ограничена по норме соответствующего нормированного пространства;
- если последовательность $\{x^{(n)}\}$ является фундаментальной, то и $\{\lambda x^{(n)}\}$ также фундаментальная последовательность, $\lambda \in \mathbb{K}$;
- если последовательности $\{x^{(n)}\}$ и $\{y^{(n)}\}$ являются фундаментальными, то и последовательность $\{x^{(n)} + y^{(n)}\}$ также фундаментальна;
- всякая сходящаяся последовательность в нормированном пространстве является фундаментальной.

Возникает обратный вопрос по отношению утверждения последнего свойства: всякая ли фундаментальная последовательность нормированного пространства является сходящейся. В общем случае ответ отрицателен. Однако выделяются нормированные пространства, удовлетворяющие этому свойству.

Определение 1.5.6. Нормированное пространство E называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность является сходящейся, т. е. если последовательность $\{x^{(n)}\} \subset E$ является фундаментальной, то в E существует элемент $x \in E$, к которому $\{x^{(n)}\}$ сходится.

Полные нормированные пространства называются *банаховыми* пространствами.

Так как в предгильбертовом пространстве через скалярное произведение определяется норма, то и в этом пространстве автоматически определяется понятие фундаментальных последовательностей.

Полное предгильбертово пространство называется *гильбертовым* пространством.

1.6. Конечномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим линейное пространство действительных чисел $\mathbb{R}$. Его можно рассматривать как пространство со скалярным произведением и как нормированное пространство. В $\mathbb{R}$ определена операция умножения элементов. Эту операцию можно взять за скалярное произведение, т. е.

отображение

$$(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,y) \to x\cdot y \in \mathbb{R} \tag{1.6.1}$$

для любых элементов $x,y \in \mathbb{R}$. Отображение (1.6.1) удовлетворяет всем условиям скалярного произведения согласно определению 1.5.4.

В качестве нормы в $\mathbb{R}$ берется отображение

$$\|\cdot\|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \ni x \to \|x\|_{\mathbb{R}} = (x,x)_{\mathbb{R}}^{1/2} = |x| \tag{1.6.2}$$

для любого элемента $x \in \mathbb{R}$, где символ $|\cdot|$ обозначает модуль числа.

Последовательность $\{x^{(n)}\} \subset \mathbb{R}$, составленная из действительных чисел $x^{(n)} \in \mathbb{R}$, является фундаментальной, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует $n^{(0)}$, для которого при $n > n^{(0)}$ $|x^{(n+m)} - x^{(n)}| < \varepsilon$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Из теории действительных чисел известно, что любая фундаментальная последовательность $\{x^{(n)}\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся, т. е. существует число $x \in \mathbb{R}$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} |x^{(n)} - x| = 0$.

Таким образом, множество действительных чисел со скалярным произведением (1.6.1) и нормой (1.6.2) можно рассматривать как гильбертово и банахово пространство.[1]

Рассмотрим множество $\mathbb{R}^n$, которое является множеством всевозможных упорядоченных конечных последовательностей $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ из n действительных чисел $x_i \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1, i = 1,\ldots,n$. Множество $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать и как декартово произведение $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n}$. Линейное пространство $\mathbb{R}^n$ является n – мерным пространством. Здесь базисом могут быть следующие элементы: $\boldsymbol{e}^{(1)} = (1,0,\ldots,0),\ldots,$ $\boldsymbol{e}^{(i)} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}^{(n)} = (0,\ldots,0,1)$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ ассоциируется с геометрической интерпретацией его элементов $\boldsymbol{x}$. Для этого рассмотрим декартову систему с координатными осями $x_1,\ldots,x_n$. В этой системе будем рассматривать векторы $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, начало которых находится в начале координат декартовой системы, а конец – в точке x с координатами x_1, x_2 и т. д. Очевидно между элементами $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ и точками x с координатами $x_1,\ldots,x_n$ в декартовой системе координат существует взаимно однозначное соответствие.

[1] Норму в $\mathbb{R}^n$ можно вводить с помощью других отображений. Отметим, что все нормы, введенные другими способами, будут эквивалентными по отношению к норме, определенной отображением (1.6.1). Это свойство конечномерных пространств.

1.7. Функции многих независимых переменных

Рассматривая $\mathbb{R}^n$ как нормированное пространство, через расстояние в $\mathbb{R}^n$ можно ввести понятие окрестности любой точки, понятие открытого и замкнутого множеств, расстояние между элементами, понятие связных и многосвязных множеств, выпуклых множеств.

Определение 1.7.1. *Окрестностью точки* $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (как и в других нормированных пространствах) называют произвольное открытое множество, содержащее в себе эту точку. Открытое множество можно определить через открытый шар.

Определение 1.7.2. Под функцией f многих независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ понимают отображение $f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to \to f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, при этом, как известно, каждому $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ соответствует только одно значение $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Множество элементов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, для которых определено отображение f, называется *областью определения* $\mathscr{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$, а совокупность точек $\{f(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}(f)\}$ называется *множеством значений* $\mathscr{R}(f)$ функции f.

Определение 1.7.3. Функция f имеет в точке $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *предел*, равный A, если она определена в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$, за исключением, быть может, ее самой, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(\boldsymbol{x}) - A| = \|f(\boldsymbol{x}) - A\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$$

для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta.$$

То, что функция f в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ имеет предел A, будем записывать следующим образом:

$$A = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^{(0)}} f(\boldsymbol{x}).$$

Возможны и определения предела функций в других терминах, эквивалентные приведенному здесь.

Определение 1.7.4 (Критерий Коши). Для того, чтобы функция f имела в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ предел (конечный), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая окрестность $U(\boldsymbol{x}^{(0)})$, чтобы для всех $\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{x}} \in U(\boldsymbol{x}^{(0)}) \subset \mathbb{R}^n$, отличных от $\boldsymbol{x}^{(0)}$, имело место неравенство

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\widetilde{\boldsymbol{x}})\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon.$$

Существуют понятия предела функции в точке по направлению. Рассмотрим функцию f и точку $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ в некоторой окрестности, в которой задана функция f, кроме, быть может точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ – произвольный вектор конечной длины. Точку вида $\boldsymbol{x}^{(0)} + t\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n (t \geqslant 0)$ можно рассматривать как точку, в которой находится конец луча, выходящего из точки $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ в направлении вектора $\boldsymbol{\omega}$. Пусть $0 < t < \delta_\omega$, где δ_ω – число, зависящее от $\boldsymbol{\omega}$.

Определение 1.7.5. Предел функции $f(\boldsymbol{x}^{(0)} + t\boldsymbol{\omega})$ по переменной t, т. е.

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\boldsymbol{x}^{(0)} + t\boldsymbol{\omega}) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\boldsymbol{x}_1^{(0)} + t\omega_1, \boldsymbol{x}_1^{(0)} + t\omega_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n^{(0)} + t\omega_n),$$

если он существует, называют пределом функции f в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ по направлению вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Из того, что функция f имеет в точке $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ предел, равный A, следует, очевидно, что она имеет в этой точке предел, равный A, и по любому направлению $\boldsymbol{\omega}$. Однако, обратное утверждение неверно – функция f может иметь предел в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$, равный A по любому направлению $\boldsymbol{\omega}$ и в то же время не иметь предела в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

В качестве примера, подтверждающего последнее утверждение, можно рассмотреть функцию

$$f\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} \in \mathbb{R}. \tag{1.7.1}$$

Эта функция задана во всех точках плоскости $\mathbb{R}^2$, кроме точки (0,0). Действительно, в направлении вектора $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2)$ точка $\boldsymbol{x} = (0,0) + \boldsymbol{\omega} t$ имеет вид $x_1 = \omega_1 t$, $x_2 = \omega_2 t$, $\omega_1^2 + \omega_2^2 > 0$. Предел

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t\boldsymbol{\omega}) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\omega_1^2\omega_2 t}{\omega_1^4 t^2 + \omega_2^2} = 0.$$

Если же рассматривать предел функции (1.7.1) вдоль параболы $x_2 = x_1^2$, то

$$\lim_{x_1\to 0} f(x_1,x_1^2) = \lim_{x_1\to 0}\frac{x_1^2x_1^2}{x_1^4+x_1^4} = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что функция (1.7.1) предела в точке (0,0) не имеет.

Через предел вводится определение непрерывной функции в точке.

Определение 1.7.6. Функция f *непрерывна в точке* $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, если она определена в некоторой окрестности ее $U(\boldsymbol{x}^{(0)})$, в том числе и в самой точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$, и если в этой точке значение функции $f(\boldsymbol{x}^{(0)})$ совпадает с пределом:

$$f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^{(0)}} f(\boldsymbol{x}).$$

Если функция f непрерывна в каждой точке области $Q \subset \mathbb{R}^n$, то говорят, что она непрерывна в Q. Это свойство будем записывать с помощью обозначения $f \in C(Q)$, т. е. функция f принадлежит классу непрерывных функций в Q.

Отметим, что для сокращенной записи здесь и в дальнейшем функции иногда будем обозначать через их значения. Например, функцию $u : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ обозначим через $u(\boldsymbol{x})$, чтобы подчеркнуть — от каких независимых переменных она рассматривается.

1.8. Производные функций многих независимых переменных

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^n \supset Q \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x})$, которая определена на области Q и принадлежит классу $C(Q)$. Рассмотрим приращение f в точке $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in Q$ вдоль векторного направления $\boldsymbol{e^{(i)}} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

$$\Delta_{x_i} f(\boldsymbol{x},t) = f(x_1, \ldots,x_{i-1},x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots,x_n). \quad (1.8.1)$$

В выражении (1.8.1) параметр t по модулю выбираем достаточно малым, чтобы функция $\Delta_{x_i} f$ была определена в Q.

Определение 1.8.1. *Частной производной* по x_i в точке $\boldsymbol{x}$ называется предел

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta_{x_i} f(\boldsymbol{x},t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}^{(i)}) - f(\boldsymbol{x})}{t}, \quad (1.8.2)$$

если он существует.

Частную производную по x_i можно рассматривать как производную функции от одной независимой переменной x_i при фиксированных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Производная, определяемая пределом (1.8.2), называется производной по x_i первого порядка функции f.

Если существуют все частные производные в некоторой области Q и все они непрерывны в Q, то в этом случае говорят, что функция принадлежит классу $C^1(Q)$.

Если определена частная производная f_{x_i}, то, рассматривая ее как новую функцию, по тому же правилу (1.8.2) через предел, если он существует, можно определить какую-нибудь частную производную по x_j:

$$(f_{x_i})_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{t\to 0} \frac{f_{x_i}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}^{(j)}) - f_{x_i}(\boldsymbol{x})}{t}.$$

Тем самым, получим частную производную второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j}$ по переменным x_i и x_j. Если функция достаточно гладкая, таким образом можно определить производную любого порядка.

Введем сокращенное обозначение производных любого порядка. Обозначим через $\boldsymbol{\alpha}$ мультииндекс, т. е. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \geqslant 0$ и представляют собой целые неотрицательные числа, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Производную порядка $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ представим с помощью следующей записи

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \mathbf{D}^{\alpha} f, \text{ где}$$

$$\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)}_{\alpha_i}, \quad \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Множество функций, которые в области Q имеют все непрерывные производные $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}$ до порядка k , т. е. $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant k$, будем обозначать через $C^k(Q)$, а множество функций, для которых существуют непрерывные производные в Q любого порядка — через $C^{\infty}(Q)$.

Через предел можно определить производную по любому направлению, а не только вдоль координатной оси. Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ есть произвольный единичный вектор, $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2 = 1$.

Определение 1.8.2. *Производной* от функции f в точке $\boldsymbol{x}$ *по направлению* $\boldsymbol{\omega}$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{\omega}) - f(\boldsymbol{x})}{t} \tag{1.8.3}$$

(если он существует).

Подчеркнем, что при вычислении предела (1.8.3) t стремится к нулю, принимая как положительные значения, так и отрицательные.

В декартовой системе координат производную в точке $\boldsymbol{x}$ по направлению $\boldsymbol{\omega}$ можно представить через частные производные по x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для этого выражение, от которого вычисляется предел (1.8.3), представим следующим образом:

$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{\omega}) - f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{\omega}) - f(x_1, x_2 + t\omega_2, \ldots, x_n + t\omega_n) + \\ + f(x_1, x_2 + t\omega_2, \ldots, x_n + t\omega_n) - f(x_1, x_2, x_3 + t\omega_2, \ldots, x_n + t\omega_n) + \cdots + \\ + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t\omega_i, \ldots, x_n + t\omega_n) - \\ - f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1} + t\omega_{i+1}, \ldots, x_n + t\omega_n) + \\ + \cdots + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + t\omega_n) - f(\boldsymbol{x}). \end{gathered} \tag{1.8.4}$$

Так как $|\omega_i| \leqslant 1$, с помощью (1.8.4) $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ можно записать в виде суммы пределов следующим образом:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \lim_{t\to 0} \tfrac{f(\boldsymbol{x}+t\omega) - f(x_1, x_2+t\omega_2, \ldots, x_n+t\omega_n)}{t\omega_1}\omega_1 + \\ + \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_1, x_2+t\omega_2, \ldots, x_n+t\omega_n) - f(x_1, x_2, x_3+t\omega_3, \ldots, x_n+t\omega_n)}{t\omega_2}\omega_2 + \cdots + \\ + \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+t\omega_i, \ldots, x_n+t\omega_n) - f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}+t\omega_{i+1}, \ldots, x_n+t\omega_n)}{t\omega_i}\omega_i + \\ + \cdots + \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n+t\omega_n) - f(\boldsymbol{x})}{t\omega_n}\omega_n = \tfrac{\partial f}{\partial x_1}\omega_1 + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\omega_n \end{gathered} \tag{1.8.5}$$

В формуле (1.8.5) в декартовой системе фактически ω_i есть косинусы углов между направлением $\boldsymbol{\omega}$ и координатными осями x_i, $\omega_i = \cos(\boldsymbol{\omega}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

1.9. Элементы векторного анализа

В предыдущем параграфе были определены частные производные. С этим связано и понятие дифференцируемости функции. Если функция

f в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ дифференцируема,то

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^{(0)}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^{(0)})}{\partial x_i}(x_i - x_i^{(0)}) + O(\rho) \tag{1.9.1}$$

в окрестности точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$ радиуса

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})^2}$$

и $\rho \to 0$, т. е. значение функции f в окрестности данной точки с точностью до бесконечно малых более высокого порядка $O(\rho)$, чем ρ, равно

$$f(\boldsymbol{x}) \cong f(\boldsymbol{x}^{(0)}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^{(0)})}{\partial x_i}(x_i - x_i^{(0)}).$$

Главная линейная часть приращения (1.9.1) называется *дифференциалом* f и записывается так

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i.$$

Если функция f дифференцируема, то существуют частные производные первого порядка и справедлива формула (1.8.5). В связи с формулой (1.8.5) введем вектор-функцию

$$\mathbf{grad}\, f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right), \tag{1.9.2}$$

называемый *градиентом* функции f в точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Для гиперплоскости $(\alpha)(\boldsymbol{x}^{(0)})$, проходящей через точку $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и перпендикулярной в этой точке к вектору $\mathbf{grad}\, f$, если он не равен нулю, скалярное произведение векторов $\mathbf{grad}\, f$ и $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}$ равно нулю, и, тем самым, имеем уравнение

$$(\mathbf{grad}\, f, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^{(0)})}{\partial x_i}\bigl(x_i - x_i^{(0)}\bigr) = 0, \tag{1.9.3}$$

для всех $\boldsymbol{x} \in (\alpha)(\boldsymbol{x}^{(0)})$. Эта гиперплоскость характеризуется тем, что ее можно в силу (1.8.5) рассматривать как геометрическое место лучей

$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}$, выходящих из точки $\boldsymbol{x}^0$, вдоль которых производная от f равна нулю.

И еще, формула (1.8.5) говорит о том, что производная от f в точке $\boldsymbol{x}$ по направлению единичного вектора $\boldsymbol{\omega}$ равна проекции $\mathbf{grad}\, f$ в этой точке на направление $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{grad}\, f,\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{x}) = \mathrm{grad}_{\boldsymbol{\omega}}\, f(\boldsymbol{x}). \tag{1.9.4}$$

В силу неравенства Буняковского из (1.9.4) имеем очевидное неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} \leqslant |\,\mathbf{grad}\, f| = \|\,\mathbf{grad}\, f\|_{\mathbb{R}^n} \tag{1.9.5}$$

для любого вектора $\boldsymbol{\omega}$. Если $\mathbf{grad}\, f \neq \mathbf{0}$ (хотя бы одна из частных производных не равна нулю), то (1.9.5) есть строгое неравенство для всех единичных векторов $\boldsymbol{\omega}$, за исключением единственного вектора $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, направление которого совпадает с направлением вектора $\mathbf{grad}\, f$, т. е когда $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\nu}}\, f = |\,\mathbf{grad}\, f|$. Направляющие косинусы $\nu_i (i = 1, \ldots, n)$, таким образом, через производные определяются по формулам

$$\nu_i = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{|\,\mathbf{grad}\, f|} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2}}\,. \tag{1.9.6}$$

Градиент функции f еще записывается с помощью оператора $\boldsymbol{\nabla}$(набла), который называется оператором Гамильтона,

$$\mathbf{grad}\, f = \boldsymbol{\nabla} f, \quad \boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right). \tag{1.9.7}$$

Обозначим через $\boldsymbol{e}^{(i)}$ единичные векторы $\boldsymbol{e}^{(i)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где i - тая координата равна 1, остальные равны 0. Тогда

$$\mathbf{grad}\, f = \boldsymbol{\nabla} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \boldsymbol{e}^{(i)}.$$

Для числовых функций $f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ часто используется термин "скалярное поле". Если задано отображение $\boldsymbol{r}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to$ $\to \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \big(r_1(\boldsymbol{x}), \ldots, r_n(\boldsymbol{x})\big) \in \mathbb{R}^n$ через скалярные функции $r_i(\boldsymbol{x}), i =$

$= 1, \ldots, n$, то это означает, что задано векторное поле $\boldsymbol{r}$. Векторное поле $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ называется дифференцируемым, если дифференцируемы функции $r_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, \ldots, n$. Примером векторного поля может быть также отображение $\mathbf{grad}\, f \colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to \mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{R}^n$.

Оператор div переводит векторное поле в скалярное. Пусть $\boldsymbol{r} \colon \boldsymbol{x} \to \to \big(r_1(\boldsymbol{x}), \ldots, r_n(\boldsymbol{x})\big)$ – векторное поле. Тогда

$$\operatorname{div} \colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \to \operatorname{div} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \in \mathbb{R}. \tag{1.9.8}$$

Если под $\boldsymbol{\nabla}$ понимать оператор-вектор $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, то, понимая под записью $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r})_{\mathbb{R}^n}$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\nabla}$ и $\boldsymbol{r}$,

$$\operatorname{div} \mathbf{r}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r})_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}).$$

Определим известный оператор под названием вихрь или ротор **rot**, который переводит векторное поле в векторное в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Итак, оператор **rot** есть отображение

$$\mathbf{rot} \colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{r} \to \mathbf{rot}\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{r} = \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_2} - \frac{\partial r_2}{\partial x_3}, \frac{\partial r_1}{\partial x_3} - \frac{\partial r_3}{\partial x_1}, \frac{\partial r_2}{\partial x_1} - \frac{\partial r_1}{\partial x_2}\right),$$

который называется *вихрем* или *ротором* векторного поля $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = = \big(r_1(\boldsymbol{x}), r_2(\boldsymbol{x}), r_3(\boldsymbol{x})\big)$ и обозначается $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{r}$. Значение этого оператора в символической записи можно представить с помощью определителя 3 - го порядка

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}^{(1)} & \boldsymbol{e}^{(2)} & \boldsymbol{e}^{(3)} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ r_1(\boldsymbol{x}) & r_2(\boldsymbol{x}) & r_3(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}. \tag{1.9.9}$$

С помощью операторов div и **rot** формулируются формулы Остроградского и Стокса, которые приводятся ниже.

А теперь сформулируем понятие циркуляции векторного поля. Пусть в области Q задано векторное поле $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \big(r_1(\boldsymbol{x}), \ldots, r_n(\boldsymbol{x})\big) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in Q$.

Пусть γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая[1] в области Q. Интеграл

$$\int\limits_{\gamma}\Big(r_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1+\cdots+r_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n\Big) \tag{1.9.10}$$

называется *циркуляцией* векторного поля $\boldsymbol{r}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \big(r_1(\boldsymbol{x}), r_2(\boldsymbol{x}),\ldots,r_n(\boldsymbol{x})\big)$.

Векторное поле $\boldsymbol{r}$, циркуляция которого по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в области Q, равна нулю, называется *потенциальным*.

Пусть S — некоторая ориентированная поверхность, находящаяся в области Q, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1(\boldsymbol{x}),\ldots,\nu_n(\boldsymbol{x}))$ — единичная нормаль на поверхности S, задающая её ориентацию, и S^+ — поверхность S с указанной ориентацией с помощью $\boldsymbol{\nu}$. Интеграл

$$\int\limits_{S^+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}s \tag{1.9.11}$$

называется *потоком* векторного поля $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \big(r_1(\boldsymbol{x}),\ldots,r_n(\boldsymbol{x})\big)$ через поверхность S, где $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{\nu}$.

Скалярное произведение $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})_{\mathbb{R}^n}$ есть проекция $\text{пр}_\nu\boldsymbol{r}$ вектора $\boldsymbol{r}$ на вектор $\boldsymbol{\nu}$. Поэтому поток есть также

$$\int\limits_{S^+}\text{пр}_\nu\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}s.$$

Векторное поле $\boldsymbol{r} = \big(r_1(\boldsymbol{x}),\ldots,r_n(\boldsymbol{x})\big)$, поток которого через любую кусочно-гладкую поверхность $\partial\Omega$, находящуюся в области Q и являющуюся границей некоторой ограниченной области $\Omega \subset Q$, равен нулю,

$$\int\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}s = 0, \tag{1.9.12}$$

называется *соленоидальным* в Q.

---

[1] Кривую будем называть кусочно-гладкой кривой, если она непрерывна и состоит из конечного числа кривых класса C^k. Кривая γ принадлежит классу C^1, если для любой её точки можно указать окрестность Ω_x на γ этой точки, в которой функции кривой непрерывно дифференцируемы. Это означает, следующее. В Ω_x с началом координат в точке $\boldsymbol{x}$ выбираем декартову систему координат, где одну ось τ направляем вдоль касательной прямой к данной кривой, а остальные $\nu^{(1)},\ldots,\nu^{(n-1)}$ выбираем перпендикулярными к τ и между собой. Тогда положение кривой в этой системе координат и в Ω_x можно описать с помощью τ и функций $\nu^{(1)}(\boldsymbol{x})$, …, $\nu^{(n-1)}(\boldsymbol{x})$. Если все функции $\nu^{(i)}(\boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируемы, то говорят, что кривая в окрестности принадлежит классу C^1.

Пусть Q – ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂Q [1]. Пусть в замыкании $\overline{Q}$ области Q задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{r} = \big(r_1(\boldsymbol{x}), \ldots, r_n(\boldsymbol{x})\big)$, т. е. заданы на $\overline{Q}$ непрерывные функции $r_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, n$, вместе с непрерывными производными [2] $\frac{\partial r_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\int\limits_Q \operatorname{div} \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial Q} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\nu}) \, \mathrm{d}s, \tag{1.9.13}$$

т. е. интеграл по области Q от дивергенции заданного векторного поля $\boldsymbol{r}$ равен потоку этого поля $\boldsymbol{r}$ через поверхность ∂Q, ограничивающую данную область Q. Формула (1.9.13) называется формулой *Остроградского* или формулой *Остроградского-Гаусса*.

Замечание 1.9.1. В формуле Остроградского-Гаусса (1.9.13) достаточно потребовать непрерывность только производных $\partial r_i(\boldsymbol{x})/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь требование кусочной гладкости поверхности ∂Q является достаточным. Предельную допустимость гладкости ∂Q, при которой формула (1.9.13) верна, трудно установить. Иногда говорят, что поверхность ∂Q такова (обладает достаточной гладкостью), для которой справедлива формула Остроградского-Гаусса.

А теперь напишем формулу Стокса, которая связывает циркуляцию и поток вихря. В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ в области Q задано дважды непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{r} = \big(r_1(\boldsymbol{x}),\, r_2(\boldsymbol{x}),\, r_3(\boldsymbol{x})\big)$ $\Big(r_i(\boldsymbol{x})$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми в Q функциями, $i = 1,2,3\Big)$ и пусть S ориентированная с помощью векторного поля единичных векторов нормалей $\boldsymbol{\nu} = \big(\nu_1(\boldsymbol{x}), \nu_2(\boldsymbol{x}), \nu_3(\boldsymbol{x})\big)$ поверхность в Q, ∂S – граница S, согласованно ориентированная по "правилу штопора" с поверхностью S и

[1] Поверхность $\Gamma \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ размерности $m < n$ называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа частей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ поверхностей той же размерности класса C^1. Некоторая поверхность принадлежит классу C^1, если для ее точки $\boldsymbol{x}$ существует окрестность Ω_x, в которой функции этой поверхности непрерывно дифференцируемы. Это следует понимать так. Пусть в локальной декартовой системе с началом координат в точке $\boldsymbol{x}$ взаимно ортогональные оси координат $r^1, \ldots, r^m$ выбраны в касательной плоскости по отношению к данной поверхности, а остальные $\nu^{m+1}, \ldots, \nu^n$ выбраны перпендикулярными по отношению друг к другу и $r^1, \ldots, r^m$. Тогда наша поверхность в данной системе координат и в окрестности Ω_x описывается с помощью функций $\nu^{m+1}(r^1, \ldots, r^m), \ldots, \nu^n(r^1, \ldots, r^m)$, которые непрерывно дифференцируемы первого порядка.

[2] Непрерывность частных производных на границе ∂Q понимается как непрерывная продолжимость их на границу ∂Q области Q.

кусочно-гладкая. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{\partial S} (\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{x})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{S} (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}s, \tag{1.9.14}$$

т. е. циркуляция векторного поля $\boldsymbol{r}$ по контуру ∂S равна потоку вихря этого поля через поверхность S, ограниченную контуром ∂S. Здесь скалярное произведение $(\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = r_1(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1 + r_2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_2 + r_3(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_3$.

В координатной форме формула (1.9.14) имеет вид

$$\int\limits_{\partial S} \Big(r_1(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1 + r_2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_2 + r_3(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_3 \Big) = \int\limits_{S} \begin{vmatrix} \nu_1(\boldsymbol{x}) & \nu_2(\boldsymbol{x}) & \nu_3(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ r_1(\boldsymbol{x}) & r_2(\boldsymbol{x}) & r_3(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} \mathrm{d}s,$$

или

$$\begin{gathered} \int\limits_{\partial S} \Big(r_1(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1 + r_2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_2 + r_3(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_3 \Big) = \\ = \int\limits_{S} \bigg[\left(\frac{\partial r_3}{\partial x_2} - \frac{\partial r_2}{\partial x_3} \right) \cos(\boldsymbol{\nu}, x_1) + \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_3} - \frac{\partial r_3}{\partial x_1} \right) \cos(\boldsymbol{\nu}, x_2) + \\ + \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1} - \frac{\partial r_1}{\partial x_2} \right) \cos(\boldsymbol{\nu}, x_3) \bigg]\, \mathrm{d}s, \end{gathered} \tag{1.9.15}$$

где $\cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)(i = 1,2,3)$ — косинус угла между вектором $\boldsymbol{\nu}$ и осью x_i, $\nu_i(\boldsymbol{x}) = \cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)$.

Справедливы следующие утверждения, которые доказываются непосредственной проверкой на основании определений (1.9.2), (1.9.8), (1.9.9) и (1.9.13).

1. $\operatorname{div} \mathbf{grad}\, u = \Delta u$, где $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;
2. $\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, u = 0$;
3. $\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{r} = 0$;
4. $\mathbf{rot}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{r} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{r} - \Delta \boldsymbol{r}$, где $\Delta \boldsymbol{r} = \big(\Delta r_1(\boldsymbol{x}), \Delta r_2(\boldsymbol{x}), \Delta r_3(\boldsymbol{x}) \big)$;
5. $\operatorname{div} (f\boldsymbol{r}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{r} + (\mathbf{grad}\, f, \boldsymbol{r})$;
6. $\operatorname{div} (\boldsymbol{r} \times \mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{r}, \mathbf{rot}\, \mathbf{q})$;
7. $\mathbf{rot}\, f\boldsymbol{r} = f\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{r} + \mathbf{grad}\, f \times \boldsymbol{r}$.

Здесь u, f — скалярные достаточно гладкие функции, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \big(r_1(\boldsymbol{x}), r_2(\boldsymbol{x}), r_3(\boldsymbol{x}) \big)$, $\mathbf{q}(\boldsymbol{x}) = \big(q_1(\boldsymbol{x}), q_2(\boldsymbol{x}), q_3(\boldsymbol{x}) \big)$, $\boldsymbol{r} \times \mathbf{q}$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{r}$ и $\mathbf{q}$.

Используя формулу Остроградского-Гаусса доказать следующие соотношения:

$$\int\limits_Q \Delta uv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,v\,\mathrm{d}s - \int\limits_Q (\mathbf{grad}\,u, \mathbf{grad}\,v)_{\mathbb{R}^n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

если $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q}), v \in C^1(Q) \cap C(\overline{Q})$;

$$\int\limits_Q (\Delta u\, v - u\,\Delta v)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial Q} \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} v - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\,\mathrm{d}s,$$

если $u,v \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$; где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный внешний относительно Q вектор нормали поля, заданного на поверхности ∂Q, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \nu_n(\boldsymbol{x})), C^k(\overline{Q})$ — множество непрерывно дифференцируемых до порядка k включительно функций, заданных на замыкании $\overline{Q}$ области Q.

2. Дифференциальные уравнения с частными производными

2.1. Понятие об уравнениях с частными производными

Независимые переменные $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ рассматриваем как элементы n - мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Уравнения с частными производными определяются относительно функций с многими независимыми переменными.

Пусть искомая функция

$$u : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R},$$

которую в дальнейшем будем обозначать через u. Дифференциальное уравнение с частными производными можно записать в виде

$$\Phi\Big(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u, \dots\Big) = 0, \tag{2.1.1}$$

где Φ — функциональная зависимость между независимыми переменными $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, искомой функцией u, ее производными первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}$, производными более высокого порядка $\boldsymbol{\alpha}$ $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u$, $|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2$.

О п р е д е л е н и е 2.1.1. Наибольший порядок производной, входящей в уравнение (2.1.1), называется *порядком* этого уравнения.

Как правило, правая часть дифференциального уравнения представляет некоторую заданную функцию $f : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. В этом случае уравнение записывается в виде

$$A\Big(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u, \dots\Big) = f(\boldsymbol{x}). \tag{2.1.2}$$

Запись дифференциальных уравнений с частными производными относительно одной искомой функции в виде (2.1.1) или (2.1.2) охватывает широкий класс уравнений и практически все, которые изучаются в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Левую часть уравнения (2.1.2) рассматриваем как отображение (оператор A) из множества $\mathscr{B}$ (функционального пространства $\mathscr{B}$) искомых элементов u, представляющих собой функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, в некоторое другое множество F (функциональное пространство F), в котором должна находиться заданная функция $f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Таким образом, оператор A есть отображение

$$A\colon \mathscr{B} \ni u \to Au = A\Big(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u, \ldots\Big) \in F.$$

Решить дифференциальное уравнение (2.1.2) — это означает следующее. Надо в $\mathscr{B}$ подобрать такую функцию u, чтобы значение Au оператора A от функции u равнялось бы заданной функции $f \in F$.

Допустимый класс функций $u \in \mathscr{B}$, для которых определено значение оператора Au, называется *областью определения оператора* A и обозначается $\mathscr{D}(A)$. Совокупность значений Au оператора A для любой функции $u \in \mathscr{D}(A)$ называется *множеством значений оператора* A и обозначается $\mathscr{R}(A)$, т. е. $\mathscr{R}(A) = \big\{Au \mid u \in \mathscr{D}(A)\big\}$. Уравнение (2.1.2) в сокращенной записи можно представить как операторное уравнение

$$Au = f, \tag{2.1.3}$$

где $u \in \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{B}$, $f \in \mathscr{R}(A) \subset F$.

Определение 2.1.2. Уравнение (2.1.2) называется *линейным*, если оператор A является линейным, т. е. если выполняются условия линейности в (2.1.2) относительно функции u и всех ее производных, входящих в левую часть (2.1.2). Напомним, что оператор A называется *линейным*, если для любых элементов u и чисел α и β выполняется равенство

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av.$$

В более подробной записи линейное уравнение порядка m можно записать в виде

$$\mathscr{L} u(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \big(a^{(\boldsymbol{\alpha})} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u\big)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \tag{2.1.4}$$

где $a^{(\boldsymbol{\alpha})}$ — функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, т. е. $a^{(\boldsymbol{\alpha})}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Функции $a^{(\boldsymbol{\alpha})}$ называются *коэффициентами уравнения* (2.1.4).

Замечание 2.1.1. Уравнение (2.1.4) является уравнением порядка m, если в левой части его имеется хотя бы одно слагаемое $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x})$, где $|\boldsymbol{\alpha}| = m$ и $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$. В противном случае уравнение (2.1.4) можно сделать любого порядка $l > m$, считая в левой части присутствие слагаемых $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x})$, где $|\boldsymbol{\alpha}| = l$, $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$. Такие уравнения со слагаемыми, у которых коэффициенты тождественно равны нулю, не представляют интереса.

Предположим, что оператор A можно представить в виде суммы $A = A^{(0)} + A^{(1)}$ двух операторов $A^{(0)}$ и $A^{(1)}$, где в $A^{(0)}$ входят те и только те слагаемые с производными $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u$, порядок которых равен m, т. е. $|\alpha| = m$. Следовательно, оператор $A^{(1)}$ – дифференциальный оператор с частными производными порядка меньше m. Здесь дифференциальное выражение $A^{(1)}$ нулевого порядка также называем дифференциальным оператором с частными производными, чтобы в каждом случае не делать оговорок.

Определение 2.1.3. Дифференциальное уравнение (2.1.2) называется *квазилинейным*, если выполняется условие линейности только для главной части $A^{(0)}$ оператора A.

В общем случае квазилинейное уравнение можно в более подробной записи представить так:

$$\begin{gathered} A^{(0)}u + A^{(1)}u = \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=m \\ |\boldsymbol{\beta}|<m}} a^{(\boldsymbol{\alpha})}\big(\boldsymbol{x},u,\ldots,\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}u,\ldots\big)\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) + \\ + A^{(1)}\big(\boldsymbol{x},u,\tfrac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\mathbf{D}^{\boldsymbol{\gamma}}u,\ldots\big) = f(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_n), \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n), |\boldsymbol{\gamma}| < m. \end{gathered} \tag{2.1.5}$$

Линейное дифференциальное уравнение с частными производными (2.1.4) через главную часть $\mathscr{L}^{(0)}$ и младшие слагаемые $\mathscr{L}^{(1)}$ можно записать в виде

$$\mathscr{L}^{(0)}u + \mathscr{L}^{(1)}u = f(\boldsymbol{x}), \tag{2.1.6}$$

где $\mathscr{L}^{(0)}u = \sum\limits_{|\alpha|=m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x})$, $\mathscr{L}^{(1)}u = \sum\limits_{|\alpha|<m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u$.

2.2. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

Согласно сказанному в предыдущем пункте, уравнение с частными производными первого порядка можно записать в виде (2.1.1), т. е.

$$\Phi\Big(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0. \tag{2.2.1}$$

Рассмотрим уравнение (2.2.1), когда оно является линейным, однородным и $a^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 0$. В этом случае, согласно (2.1.6), имеем уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{2.2.2}$$

Найдем решения уравнения (2.2.2), которые можно объединить в одну запись под названием общего решения. Наряду с уравнением (2.2.2) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a^{(1)}(\boldsymbol{x})} = \frac{\mathrm{d}x_2}{a^{(2)}(\boldsymbol{x})} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{a^{(n)}(\boldsymbol{x})}. \tag{2.2.3}$$

Установим связь между уравнением (2.2.2) и системой (2.2.3). Для этого будем предполагать, что коэффициенты $a^{(i)}$ $(i = 1, \dots, n)$ определены и непрерывны вместе с частными производными первого порядка в некоторой окрестности $\Omega(x^{(0)})$ точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и в этой точке они не обращаются одновременно в нуль, $\left(a^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)})\right)^2 + \ldots + \left(a^{(n)}(\boldsymbol{x}^{(0)})\right)^2 \neq 0$, т. е. точка $\boldsymbol{x}^{(0)}$ не является особой точкой системы (2.2.3). Пусть, например, $a^{(n)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) \neq 0$. Тогда систему (2.2.3) можно записать в равносильной системе $n-1$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_n} = \frac{a^{(1)}}{a^{(n)}}, \dots, \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}x_n} = \frac{a^{(n-1)}}{a^{(n)}}. \tag{2.2.4}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что система (2.2.4) имеет ровно $n-1$ независимых интегралов, определенных и непрерывных вместе с частными производными первого порядка в некоторой окрестности $\tilde{\Omega}(\boldsymbol{x}^{(0)}) \subset \Omega(\boldsymbol{x}^{(0)})$ точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

Утверждение 2.2.1. Всякий интеграл системы (2.2.4) (системы (2.2.3)) является решением уравнения (2.2.2).

Доказательство. Пусть $\psi(\boldsymbol{x}) = C$ есть интеграл системы (2.2.4), определенный в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Тогда полный дифференциал $\mathrm{d}\psi \equiv 0$, или

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n \equiv 0. \tag{2.2.5}$$

Из системы (2.2.4)

$$\mathrm{d}x_1 = \frac{a^{(1)}}{a^{(n)}}\,\mathrm{d}x_n, \dots, \mathrm{d}x_{n-1} = \frac{a^{(n-1)}}{a^{(n)}}\,\mathrm{d}x_n. \tag{2.2.6}$$

Подставляя выражения (2.2.6) в (2.2.5), получим уравнение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{a^{(1)}}{a^{(n)}}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{a^{(n-1)}}{a^{(n)}}+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\mathrm{d}x_n\equiv 0,$$

из которого легко следует уравнение (2.2.2) для функции ψ, т. е. ψ является решением (2.2.2). $\otimes$

Утверждение 2.2.2. Всякое решение уравнения (2.2.2) является интегралом системы (2.2.3) (системы (2.2.4)).

Доказательство. Пусть функция u есть решение уравнения (2.2.2) и имеется система (2.2.6). Тогда

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n=\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(n)}}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+\frac{a^{(n-1)}}{a^{(n)}}\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\mathrm{d}x_n=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\mathrm{d}x_n}{a^{(n)}}\equiv 0. \qquad (2.2.7)$$

Равенство (2.2.7) имеет место в силу (2.2.2) и оно говорит о том, что функция u есть интеграл системы (2.2.6) или системы (2.2.3). $\otimes$

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\ldots,\psi^{(n-1)}(\boldsymbol{x})$ *– независимые интегралы системы* (2.2.3). *Тогда функция* $u(\boldsymbol{x})=\Psi\big(\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\ldots,\psi^{(n-1)}(\boldsymbol{x})\big)$*, где* Ψ *– произвольная функция, имеющая непрерывные производные первого порядка по* $\psi^{(1)},\ldots,\psi^{(n-1)}$ *(в том числе и* $\Psi\equiv$ *const) будет решением уравнения* (2.2.2).

Доказательство. Подставляя функцию Ψ в уравнение (2.2.2), получим

$$\sum_{i=1}^{n}a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}a^{(i)}(\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial\psi^{(j)}}\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial\psi^{(j)}}\sum_{i=1}^{n}a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial x_i}\equiv 0.$$

$\otimes$

Функцию $u:\boldsymbol{x}\to u(\boldsymbol{x})=\Psi\big(\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\ldots,\psi^{(n-1)}(\boldsymbol{x})\big)$ называют *общим решением* уравнения (2.2.2). И чтобы найти общее решение (2.2.2), достаточно через дифференциалы независимых переменных и коэффициенты уравнения (2.2.2) составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2.3), из нее найти $n-1$ независимых интегралов $\psi^{(i)}$, $(i = 1, \ldots, n-1)$, от которых, как от независимых переменных, рассматриваем любую достаточно гладкую функцию Ψ.

Рассмотрим теперь неоднородное квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(\boldsymbol{x},u). \tag{2.2.8}$$

Как и в предыдущем случае уравнения (2.2.2), относительно коэффициентов будем предполагать, что они непрерывны и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)})$ заданной точки $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

Решение уравнения (2.2.8) будем искать в виде неявной функции

$$U(x_1, \ldots, x_n, u) = 0, \tag{2.2.9}$$

где функция $U(\boldsymbol{x},u)$ имеет непрерывные частные производные. Согласно теореме о неявной функции, условие $\partial U/\partial u \neq 0$ гарантирует представление искомой функции из уравнения (2.2.9) в явном виде в некоторой окрестности $\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)})$.

Вычислим частные производные по всем x_i $(i = 1, \ldots, n)$ от функции U, рассматривая ее как сложную функцию. Из уравнения (2.2.9) получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда можем найти частные производные $\partial u/\partial x_i$ функции u по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial U}{\partial u}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2.2.8), получим относительно функции U, рассматривая ее как функцию от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n, u$, однородное линейное уравнение вида (2.2.2)

$$\sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x},u)\frac{\partial U}{\partial x_i} + f(\boldsymbol{x},u)\frac{\partial U}{\partial u} = 0. \tag{2.2.10}$$

Далее, составляем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a^{(1)}} = \frac{\mathrm{d}x_2}{a^{(2)}} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{a^{(n)}} = \frac{\mathrm{d}u}{f}. \tag{2.2.11}$$

Решая систему (2.2.11), находим отсюда n независимых интегралов $\psi^{(1)}(\boldsymbol{x},u),\ldots,\psi^{(n)}(\boldsymbol{x},u)$. Как уже нам известно, общее решение уравнения (2.2.10) задается произвольной, достаточно гладкой функцией $U\ :\ \boldsymbol{x}\ \to\ U\big(\psi^{(1)}(\boldsymbol{x},u),\ldots,\psi^{(n)}(\boldsymbol{x},u)\big)$ от независимых переменных $\psi^{(1)}(\boldsymbol{x},u),\ldots,\psi^{(n)}(\boldsymbol{x},u)$. Согласно (2.2.9), приравнивая к нулю найденную функцию U, получим решение уравнения (2.2.8), т. е. решение уравнения

$$\mathscr{F}\Big(\psi^{(1)}(\boldsymbol{x},u),\ldots,\psi^{(n)}(\boldsymbol{x},u)\Big)=U(x_1,\ldots,x_n,u) \tag{2.2.12}$$

относительно функции u.

Решение уравнения (2.2.12) относительно u будет *общим решением* уравнения (2.2.8).

2.3. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка

Рассмотрим квазилинейное уравнение (2.1.5) второго порядка в случае двух независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, когда коэффициенты при старших производных не зависят от искомого решения $u(\boldsymbol{x})$. Уравнение (2.1.5) в этом случае можно записать так

$$\begin{gathered}\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u=a(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+c(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\\ +\mathscr{L}^{(1)}\Big(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)=f(\boldsymbol{x}).\end{gathered} \tag{2.3.1}$$

Здесь запись коэффициента $2b(\boldsymbol{x})$ с двойкой делается для удобства в дальнейших рассуждениях.

Через дискриминант $\mathscr{D}(\boldsymbol{x})=b^2(\boldsymbol{x})-a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})$ коэффициентов главной части уравнения (2.3.1) принята следующая классификация.

Определение 2.3.1. Уравнение (2.3.1) в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ будем называть:

- *эллиптическим*, если $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}^{(0)})<0$;
- *параболическим*, если $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}^{(0)})=0$;
- *гиперболическим*, если $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}^{(0)})>0$.

Уравнение (2.3.1) называется *эллиптическим* (*параболическим*, *гиперболическим*) во всей области его задания $\Omega\in\mathbb{R}^2$, если $\mathscr{D}(\boldsymbol{x})<0$ ($\mathscr{D}(\boldsymbol{x})=0$, $\mathscr{D}(\boldsymbol{x})>0$) для всех точек $\boldsymbol{x}\in\Omega$.

Определение 2.3.2. Уравнение (2.3.1) является уравнением в *каноническом виде*, если $b(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, а коэффициенты $a(\boldsymbol{x})$ и $c(\boldsymbol{x})$ равны одному из значений множества $\{1, 0, -1\}$, т. е. равны либо 1, либо 0, либо -1.

Отметим, это будет доказано в следующем параграфе, что уравнение (2.3.1) всегда с помощью некоторой невырожденной замены

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi(\boldsymbol{x}), \\ y_2 &= \psi(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

независимых переменных x_1 и x_2 приводится к каноническому виду. Рассмотрим некоторое семейство линий $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$, где для функции φ вектор $\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Определение 2.3.3. Семейство $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ называется *характеристическими линиями* или *характеристиками* уравнения (2.3.1), если функция φ есть решение следующего дифференциального уравнения

$$a(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2b(\boldsymbol{x}) \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 = 0. \tag{2.3.3}$$

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения второго порядка со многими независимыми переменными $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) (n \geqslant 3)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a^{(0)}(\boldsymbol{x}) u = f(\boldsymbol{x}). \tag{2.3.4}$$

Предположим, что с помощью невырожденной замены новых независимых переменных $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ через старые $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(\boldsymbol{x}), \\ &\cdots \\ y_n &= y_n(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

уравнение (2.3.4) приведено к каноническому виду

$$\sum_{i,j=1}^{n} A^{(ij)}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} A^{(i)}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial u}{\partial y_i} + A^{(0)}(\boldsymbol{y}) u = \tilde{f}(\boldsymbol{y}), \tag{2.3.6}$$

где $A^{(ii)} \in \{0,1,-1\}$, $A^{(ij)} = 0$ для всех $i \neq j,\ i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Каноническую форму (2.3.6) для классификации уравнения (2.3.4) запишем в более удобном виде

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \sum_{i=r+1}^{s+r} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} A^{(i)} \frac{\partial u}{\partial y_i} + A^{(0)} u = \tilde{f}(\boldsymbol{y}). \tag{2.3.7}$$

Определение 2.3.4. Уравнение (2.3.4) называется *эллиптическим* в точке либо в области, если оно после невырожденной замены (2.3.5) преобразуется в уравнение (2.3.7), где $r+s=n$ и $r=n$, $s=0$, либо $r=0$, $s=n$.

Определение 2.3.5. Уравнение (2.3.4) называется *гиперболическим* относительно направления y_n, если $r+s=n$, $r=n-1$, $s=1$. Аналогично, будем называть гиперболическим относительно направления вдоль оси y_1, если $r+s=n$, $r=1$, $s=n-1$.

Определение 2.3.6. Уравнение (2.3.4) называется *ультрагиперболическим*, если $r+s=n \geqslant 4$ и $r,s \geqslant 2$.

Определение 2.3.7. Уравнение (2.3.4) называется *параболическим*, если $r+s<n$, и в частности:

- *параболо-эллиптическим*, если $r=0$ или $s=0$;
- *параболо-гиперболическим*, если $r=1$, а $s \geqslant 1$, или $s=1$, $r \geqslant 1$.

2.4. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

При замене независимых переменных уравнение (2.3.1) можно привести к каноническому виду. Как это сделать — рассмотрим в этом параграфе. Приведенное к каноническому виду уравнение во многих случаях упрощается и можно найти его общее решение.

В предыдущем параграфе для квазилинейного дифференциального уравнения (2.3.1) второго порядка в случае двух независимых переменных введена классификация через дискриминант $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) = b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})$ коэффициентов $a(\boldsymbol{x})$, $b(\boldsymbol{x})$ и $c(\boldsymbol{x})$ (определение 2.3.1). При приведении к каноническому виду возникает вопрос: меняется ли тип уравнения (2.3.1) при замене независимых переменных x_1 и x_2.

Теорема 2.4.1. *При невырожденной замене независимых переменных тип уравнения* (2.3.1) *не меняется.*

Доказательство. Замену независимых переменных запишем в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi(\boldsymbol{x}), \\ y_2 &= \psi(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Предположим, что замена (2.4.1) является невырожденной. Это означает, что существует обратное преобразование

$$x_1 = x_1(y), \qquad x_2 = x_2(y). \tag{2.4.2}$$

Если у нас функция $u(\boldsymbol{x})$ от переменных x_1 и x_2, то в результате замены (2.4.1) получим некоторую функцию $v(\boldsymbol{y}) = v\big(\varphi(\boldsymbol{x}),\psi(\boldsymbol{x})\big) = u(\boldsymbol{x})$ от независимых новых переменных y_1 и y_2. Вычислим производные функции u через производные функции v, рассматривая u как сложную функцию с учетом замены (2.4.1).

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\Big)^2 + \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \\ + \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}.$$

Подставляя выражения (2.4.3) в уравнение (2.3.1), получим

$$\alpha(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + 2\beta(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} + \gamma(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} + \mathscr{L}^{(2)}\Big(\boldsymbol{y},v(\boldsymbol{y}),\frac{\partial v}{\partial y_1},\frac{\partial v}{\partial y_2}\Big) =$$

$$= f(x_1(\boldsymbol{y}),x_2(\boldsymbol{y})) = g(\boldsymbol{y}), \tag{2.4.4}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{x}) &= a(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2,\\
\beta(\boldsymbol{x}) &= a(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + b(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big) + c(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\\
\gamma(\boldsymbol{x}) &= a(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big)^2.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Вычислим дискриминант коэффициентов $\alpha(\boldsymbol{x}), \beta(\boldsymbol{x}), \gamma(\boldsymbol{x})$, выражая его через коэффициенты $a(\boldsymbol{x}), b(\boldsymbol{x}), c(\boldsymbol{x})$ согласно формулам (2.4.5). Итак

$$\begin{gathered}
\big(\beta^2 - \alpha\gamma\big)(\boldsymbol{x}) = a^2(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big)^2 + b^2(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big)^2 +\\
+b^2(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b^2(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + c^2(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big)^2 +\\
+2a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})\bigg(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\bigg)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + 2a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big)^2 +\\
+2a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + 2b(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big)^2 +\\
+2b(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - a^2(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big)^2 -\\
-2a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big)^2 -\\
-2a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big)^2 - 4b^2(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} -\\
-2b(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big)^2 - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big)^2 -\\
-2b(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - c^2(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big)^2 = \big(b^2 - ac\big)(\boldsymbol{x})\mathcal{J}^2(\boldsymbol{x}),
\end{gathered}$$

где $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}.$

Таким образом, мы установили связь дискриминанта новых коэффициентов уравнения (2.4.4) после замены независимых переменных и дискриминанта коэффициентов уравнения (2.3.1) до замены через якобиан $\mathcal{J}(\boldsymbol{x})$ замены независимых переменных (2.4.1) с помощью следующей формулы:

$$\big(\beta^2 - \alpha\gamma\big)(\boldsymbol{x}) = \big(b^2 - ac\big)\mathcal{J}^2(\boldsymbol{x}). \tag{2.4.6}$$

Если замена (2.4.1) является невырожденной, т. е. $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, то формула (2.4.6) является доказательством теоремы (2.4.1). $\otimes$

Вернемся к уравнению характеристик (2.3.3), т. е. к уравнению

$$a(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2 = 0, \tag{2.4.7}$$

где $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{const}$ и $\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$. В этом случае полный дифференциал функции φ будет равен нулю, т. е. $\mathrm{d}\varphi = 0$. С другой стороны

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2. \tag{2.4.8}$$

Отсюда, так как $\mathbf{grad}\,\varphi \neq 0$,

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}. \tag{2.4.9}$$

Подставляя выражения (2.4.9) в уравнение (2.4.7), получим одно или два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$a(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_2)^2 - 2b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + c(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_1)^2 = 0, \tag{2.4.10}$$

т. е.

$$a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 - \big(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\big)(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 = 0, \text{если } a(\boldsymbol{x}) \neq 0, \tag{2.4.11}$$

или

$$c(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 - \big(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\big)(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2 = 0, \text{ если } \quad c(\boldsymbol{x}) \neq 0, \tag{2.4.12}$$

или

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0, \text{ если } \quad a(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}) = 0, \text{ а } \quad b(\boldsymbol{x}) \neq 0. \tag{2.4.13}$$

Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений [40] при определенной гладкости на коэффициенты $a(\boldsymbol{x})$, $b(\boldsymbol{x})$ и $c(\boldsymbol{x})$ существуют, в общем случае, два интегрирующих множителя $\mu^{(i)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ $(i = 1, 2)$ после умножения уравнений (2.4.11) или (2.4.12) на которые, левые части их представляют полный дифференциал. Другими словами, существуют такие функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, для которых, например,

$$\mathrm{d}\varphi = \mu^{(1)}(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2 - \bigl(b + \sqrt{b^2 - ac}\bigr)(\boldsymbol{x})\mu^{(1)}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 = 0. \tag{2.4.14}$$

Здесь $\partial\varphi/\partial x_1 = -\mu^{(1)}(\boldsymbol{x})\bigl(b + \sqrt{b^2 - ac}\bigr)(\boldsymbol{x})$, $\partial\varphi/\partial x_2 = \mu^{(1)}(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{x})$. Из формулы (2.4.14), с одной стороны, имеем решение $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$, с другой стороны, согласно выражениям (2.4.9) функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ являются решением уравнения (2.4.7). Уравнение (2.4.13) имеет первые интегралы $x_1 = \mathrm{const}$ и $x_2 = \mathrm{const}$.

Таким образом, отыскание характеристик $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ уравнения (2.3.1), являющихся решениями уравнения (2.4.7), сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4.10) (линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4.11), или (2.4.12), или (2.4.13)) первого порядка.

Доказана следующая теорема:

Теорема 2.4.2. *Если функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ является решением уравнения* (2.4.7)*, то выражение $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ представляет собой первый интеграл обыкновенного дифференциального уравнения* (2.4.10)*, и наоборот, если $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ — первый интеграл уравнения* (2.4.10)*, то функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ является решением уравнения* (2.4.7).

В этой связи наряду с уравнением (2.4.7) уравнение (2.4.10) также называют *уравнением характеристик* дифференциального уравнения с частными производными (2.3.1).

А теперь установим правила приведения уравнения (2.3.1) к каноническому виду. Согласно его классификации (определение 2.3.1) рассмотрим три случая.

2.4.1. Приведение к каноническому виду гиперболических уравнений

$\underline{\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) > 0.}$ Пусть уравнение (2.3.1) является уравнением гиперболического типа в некоторой области $\Omega \in \mathbb{R}^2$, т. е. его дискриминант $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) = b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) > 0$ в этой области. Если коэффициенты $a(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}) = 0$, то в этом случае $b(\boldsymbol{x}) \neq 0$ и мы уже имеем так называемый *второй канонический вид*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \mathscr{L}^{(1)}\Big(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) = f(\boldsymbol{x}) \tag{2.4.15}$$

уравнения (2.3.1). Исключаем случай $a = c = 0$ и рассматриваем уравнение характеристик (2.4.10), которое распадается на два разные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения (2.4.11) или (2.4.12) с действительными коэффициентами. Если коэффициенты этих уравнений являются непрерывными функциями, то существуют соответствующие интегрирующие множители $\mu^{(1)}(\boldsymbol{x})$ и $\mu^{(2)}(\boldsymbol{x})$ для этих уравнений, которые позволяют найти после умножения на них дифференциальных уравнений первые интегралы $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ и $\psi(\boldsymbol{x}) = C$. Делаем замену старых независимых переменных $\boldsymbol{x}$ через новые y по формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi(\boldsymbol{x}), \\ y_2 &= \psi(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

В результате замены (2.4.16) получим

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{x}) = {}& a(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2b(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 = 0, \\ \gamma(\boldsymbol{x}) = {}& a(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + 2b(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

в силу теоремы 2.4.2.

Рассмотрим якобиан замены (2.4.16). Пусть у нас $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$ и мы рассматривали характеристические уравнения (2.4.11). Тогда

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-b + \sqrt{b^2 - ac})\mu^{(1)} & a\mu^{(1)} \\ (-b - \sqrt{b^2 - ac})\mu^{(2)} & a\mu^{(2)} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\mu^{(1)}(\boldsymbol{x})\mu^{(2)}(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{x})\sqrt{\mathscr{D}(\boldsymbol{x})} \neq 0.$$

Если $c(\boldsymbol{x}) \neq 0$, то, используя уравнения (2.4.12),

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = 2\mu^{(1)}(\boldsymbol{x})\mu^{(2)}(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\sqrt{\mathscr{D}(\boldsymbol{x})} \neq 0.$$

Далее, согласно формуле (2.4.6) и уравнениям (2.4.17), $\beta^2(\boldsymbol{x}) = \big(b^2 - ac\big)(\boldsymbol{x})\mathcal{J}^2(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Следовательно, после замены (2.4.16) уравнение (2.3.1) через новые независимые переменные $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ согласно (2.4.4) примет вид

$$2\beta(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} + \mathscr{L}^{(2)}\left(\boldsymbol{y}, v, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = g(\boldsymbol{y}).$$

Разделив в последнем уравнении обе части равенства на $\beta(\boldsymbol{x})$, получим второй канонический вид (2.4.15) относительно функции $v(\boldsymbol{y})$ и независимых переменных, т. е.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} + \mathscr{L}^{(3)}\Big(\boldsymbol{y}, v, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}\Big) = \tilde{g}(\boldsymbol{y}). \tag{2.4.18}$$

Чтобы от уравнения второго канонического вида (2.4.18) перейти к уравнению первого канонического вида достаточно сделать замену независимых переменных $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ через новые $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + y_2, \\ z_2 &= y_1 - y_2 \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

и убедиться в этом. После замены (2.4.19) уравнение (2.4.18) относительно функции $w(\boldsymbol{z}) = v\big(y_1(\boldsymbol{x}), y_2(\boldsymbol{x})\big)$ приведется к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2} + \mathscr{L}^{(4)}\Big(\boldsymbol{z}, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \frac{\partial w}{\partial z_2}\Big) = \tilde{f}(\boldsymbol{z}). \tag{2.4.20}$$

А теперь можем для рассмотренного случая сформулировать правило приведения к каноническому виду уравнения (2.3.1)

Правило 2.4.1. Чтобы привести гиперболическое ($\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) > 0$) уравнение (2.3.1) к каноническому виду достаточно:

- составить соответствующее уравнение характеристик (2.4.10);
- найти характеристики (решить уравнения (2.4.10));

- через функции, определяющие характеристики, сделать замену независимых переменных по формулам (2.4.16);
- получить вторую каноническую форму (2.4.18)
- от второй канонической формы (2.4.18) перейти к первой (2.4.20) через замену независимых переменных по формулам (2.4.19).

2.4.2. Приведение к каноническому виду параболических уравнений

$\underline{\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) = 0}$. Если $a(\boldsymbol{x}) = 0$ или $c(\boldsymbol{x}) = 0$, то из уравнения $b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) = 0$ следует, что и $b(\boldsymbol{x}) = 0$. В этом случае уравнение фактически имеет канонический вид. Например, уравнение

$$a(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \mathscr{L}^{(1)}\big(\boldsymbol{x}, u, \ldots\big) = f(\boldsymbol{x}), \qquad a(\boldsymbol{x}) \neq 0,$$

записано в каноническом виде с точностью до множителя $a(\boldsymbol{x})$.

Считаем, что все коэффициенты $a(\boldsymbol{x})$, $b(\boldsymbol{x})$, $c(\boldsymbol{x})$ в уравнении (2.3.1) не равны нулю. Рассматриваем уравнение характеристик (2.4.10). С учетом предположения $b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) = 0$ оно записывается в виде

$$a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 - b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 = 0. \tag{2.4.21}$$

Находим общее решение $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ уравнения (2.4.21), если надо, с помощью соответствующего интегрирующего множителя $\mu(\boldsymbol{x})$. Через функцию $\varphi(\boldsymbol{x})$ и еще какую-нибудь функцию делаем замену независимых переменных так, чтобы якобиан был отличен от нуля и уравнение (2.3.1) привелось бы к каноническому виду. В качестве замен можно выбрать следующие:

$$y_1 = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad y_2 = x_1, \tag{2.4.22}$$

или

$$y_1 = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad y_2 = x_2, \tag{2.4.23}$$

где $\varphi(\boldsymbol{x})$ — функция, определяющая первый интеграл $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ уравнения (2.4.21), или решение, согласно теореме 2.4.2, характеристического уравнения

$$a(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\Big)^2 = \alpha(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Якобиан в случае замены (2.4.22) равен

$$\mathscr{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} -\mu(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) & \mu(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{x}) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mu(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{x}) \neq 0,$$

а в случае замены (2.4.23)

$$\mathscr{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} -\mu(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) & \mu(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{x}) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\mu(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) \neq 0,$$

Подсчитаем коэффициенты $\gamma(\boldsymbol{x})$ замены (2.4.22) согласно формулам (2.4.5), $\gamma(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})$, а в случае замены (2.4.23), очевидно, $\gamma(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x})$. Из уравнений (2.4.6), (2.4.7) и $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) = 0$ следует, что $\beta(\boldsymbol{x}) = 0$.

Таким образом, уравнение (2.3.1) с помощью невырожденных замен (2.4.22) и (2.4.23) приводится к виду

$$k(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} + \mathscr{L}^{(2)}(\boldsymbol{y},v,\ldots) = g(\boldsymbol{y}), \tag{2.4.24}$$

где $k(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})$ (замена (2.4.22)), или $k(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x})$ (замена (2.4.23)). Производя деление обеих частей равенства (2.4.24) на $k(\boldsymbol{x}) \neq 0$, получим канонический вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} + \mathscr{L}^{(3)}(\boldsymbol{y},v,\ldots) = \tilde{g}(\boldsymbol{y}). \tag{2.4.25}$$

Правило 2.4.2. Чтобы привести уравнение (2.3.1) к каноническому виду в случае, когда оно является параболическим ($\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) = 0$), достаточно:

- составить уравнение характеристик (2.4.10);
- найти характеристики $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ (решить уравнение (2.4.10));
- через функцию $\varphi(\boldsymbol{x})$ сделать замену старых независимых переменных через новые по формулам (2.4.22) или (2.4.23);
- уравнение (2.3.1) приведется с помощью этих замен к каноническому виду (2.4.25).

2.4.3. Приведение к каноническому виду эллиптических уравнений

$\underline{\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) < 0.}$ В этом случае уравнение (2.3.1) является согласно определению 2.3.1 эллиптическим. Отметим, что здесь коэффициенты $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$ и $c(\boldsymbol{x}) \neq 0$ и они одного знака.

Уравнения характеристик будем рассматривать в виде (2.4.11), которые запишем так:

$$a(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2 - b(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \pm i\sqrt{-\mathscr{D}(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}x_1 = 0. \tag{2.4.26}$$

Так как функция $-\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) > 0$, то уравнения (2.4.26) являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка с комплекснозначными коэффициентами. Если коэффициенты уравнений (2.4.26) представляют собой аналитические функции, то существуют для них интегрирующие множители $\mu^{(i)}(\boldsymbol{x}) = Re\,\mu^{(i)}(\boldsymbol{x}) + i\,Im\,\mu^{(i)}(\boldsymbol{x})$, $i = 1{,}2$, где запись $Re\,\mu^{(i)}$ означает действительную часть функции $\mu^{(i)}(\boldsymbol{x})$, $Im\,\mu^{(i)}$ — мнимая часть.

Лемма 2.4.1. *Пусть* $\mu(\boldsymbol{x}) = Re\ \mu + iIm\ \mu$ *— интегрирующий множитель уравнения* $a\,\mathrm{d}x_2 - b\,\mathrm{d}x_1 - i\sqrt{-\mathscr{D}}\,\mathrm{d}x_1 = 0$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ *— первый интеграл этого уравнения и* $\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) = \mu(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 - \mu(\boldsymbol{x})\big(b(\boldsymbol{x}) + i\sqrt{-\mathscr{D}(\boldsymbol{x})}\big)\mathrm{d}x_1 = 0$. *Тогда функция* $\bar{\mu}(\boldsymbol{x}) = Re\ \mu(\boldsymbol{x}) - iIm\ \mu(\boldsymbol{x})$ *будет интегрирующим множителем уравнения* $a(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2 - b(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 + i\sqrt{-\mathscr{D}(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}x_1 = 0$, $\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}) = C$ *— первый интеграл его и* $\mathrm{d}\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \bar{\mu}(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2 - \bar{\mu}(\boldsymbol{x})\big(b(\boldsymbol{x}) - i\sqrt{-\mathscr{D}(\boldsymbol{x})}\big)\,\mathrm{d}x_1 = 0.$

Доказательство. Равенство $\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} Re\,\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) &= Re\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + Re\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 = 0,\\ Im\,\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) &= Im\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + Im\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered} Re\,\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})Re\,\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 - b(\boldsymbol{x})Re\,\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 + \sqrt{-\mathscr{D}(\boldsymbol{x})}Im\,\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1,\\ Im\,\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})Im\,\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 - b(\boldsymbol{x})Im\,\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 - \sqrt{-\mathscr{D}(\boldsymbol{x})}Re\,\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1. \end{gathered} \tag{2.4.27}$$

Рассмотрим выражение

$$\bar{\mu}(a\,\mathrm{d}x_2 - b\,\mathrm{d}x_1 + i\sqrt{-\mathscr{D}}\mathrm{d}x_1) = (Re\,\mu - i\,Im\,\mu)(a\,\mathrm{d}x_2 - b\,\mathrm{d}x_1 +$$

$$+ i\sqrt{-\mathscr{D}})\mathrm{d}x_1 = (a\,Re\,\mu\,\mathrm{d}x_2 - b\,Re\,\mu\,\mathrm{d}x_1 + \sqrt{-\mathscr{D}}Im\,\mu\,\mathrm{d}x_1) -$$

$$- i(a\,Im\,\mu\,\mathrm{d}x_2 - b\,Im\,\mu\,\mathrm{d}x_1 - \sqrt{-\mathscr{D}}Re\,\mu\,\mathrm{d}x_1) = Re\,\mathrm{d}\varphi - i\,Im\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что выражение $\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}) = C$ является первым интегралом уравнения $a\,\mathrm{d}x_2 - b\,\mathrm{d}x_1 + i\sqrt{-\mathscr{D}}\,\mathrm{d}x_1 = 0$.

Лемма (2.4.1) доказана. $\otimes$

Для приведения к каноническому виду эллиптического уравнения (2.3.1) рассмотрим замену независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ через $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ по формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= Re\,\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{\varphi(\boldsymbol{x}) + \bar{\varphi}(\boldsymbol{x})}{2}, \\ y_2 &= Im\,\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{\varphi(\boldsymbol{x}) - \bar{\varphi}(\boldsymbol{x})}{2i}, \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

где $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$ и $\bar{\varphi}(x) = C$ согласно лемме (2.4.1) являются первыми интегралами уравнений характеристик (2.4.11) или $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\bar{\varphi}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяют уравнению характеристик с частными производными (2.4.7).

Согласно формулам (2.4.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Re\,\varphi}{\partial x_1} &= -b\,Re\,\mu + \sqrt{-\mathscr{D}}Im\,\mu, & \frac{\partial Re\,\varphi}{\partial x_2} &= a\,Re\,\mu; \\ \frac{\partial Im\,\varphi}{\partial x_1} &= -b\,Im\,\mu - \sqrt{-\mathscr{D}}Re\,\mu, & \frac{\partial Im\,\varphi}{\partial x_2} &= a\,Im\,\mu. \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Теперь с помощью выражений (2.4.29) легко подсчитать якобиан замены (2.4.28) $\mathcal{J}(\boldsymbol{x})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = {} & -ab\,Re\,\mu\,Im\,\mu + a\sqrt{-\mathscr{D}}(Im\,\mu)^2 + ab\,Re\,\mu\,Im\,\mu + \\ & + a\sqrt{-\mathscr{D}}(Re\,\mu)^2 = a\sqrt{-\mathscr{D}}\,[(Re\,\mu)^2 + (Im\,\mu)^2] \neq 0. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты $\alpha(\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{x})$ и $\gamma(\boldsymbol{x})$ уравнения (2.4.4), которые мы должны получить в результате замены (2.4.28). Итак,

$$\alpha(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}Re\,\varphi(\boldsymbol{x})\Big)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_1}Re\,\varphi(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_2}Re\,\varphi(\boldsymbol{x}) +$$

$$+c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial}{\partial x_2} Re\,\varphi(\boldsymbol{x})\Big)^2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4}\mathscr{C}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\mathscr{B}(\boldsymbol{x}), \qquad (2.4.30)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) &= a(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2,\\
\mathscr{C}(\boldsymbol{x}) &= a(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2}\right)^2,\\
\mathscr{B}(\boldsymbol{x}) &= a(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1} + b(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\right) + c(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2}\right).
\end{aligned}$$

Точно также с помощью вычислений можно показать, что

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4}\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{4}\mathscr{C}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\mathscr{B}(\boldsymbol{x}). \qquad (2.4.31)$$

Вычислим коэффициент $\beta(\boldsymbol{x})$,

$$\beta(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})\frac{\partial Re\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial Im\varphi}{\partial x_1} + b(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial Re\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial Im\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial Re\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial Im\varphi}{\partial x_1}\Big) +$$

$$+c(\boldsymbol{x})\frac{\partial Re\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial Im\varphi}{\partial x_2} = \frac{1}{4i}\Big\{a(\boldsymbol{x})\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\Big)\Big] +$$

$$+b(\boldsymbol{x})\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2}\Big) + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2}\Big)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\Big)\Big] +$$

$$+c(\boldsymbol{x})\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2}\Big)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2}\Big)\Big]\Big\} = \frac{1}{4i}\Big\{\Big[a(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} +$$

$$+c(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2\Big] - \Big[a(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x_2})^2\Big]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{4i}\Big(\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) - \mathscr{C}(\boldsymbol{x})\Big). \qquad (2.4.32)$$

Так как $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\bar\varphi(\boldsymbol{x})$ являются решениями уравнения (2.4.7), то $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) \equiv \mathscr{C}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$. Из (2.4.32) следует, что $\beta(\boldsymbol{x}) \equiv 0$. Покажем, что $\mathscr{B}(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Действительно, из формулы (2.4.6)

$$\mathscr{B}^2(\boldsymbol{x}) = (b^2 - ac)\tilde{\mathscr{J}}^2(\boldsymbol{x}), \qquad (2.4.33)$$

где

$$\tilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b\mu - i\sqrt{-\mathscr{D}}\mu & a\mu \\ -b\bar{\mu} + i\sqrt{-\mathscr{D}}\bar{\mu} & a\bar{\mu} \end{vmatrix} = -2a\mu\bar{\mu}i\sqrt{-\mathscr{D}} =$$

$$= -2ai\sqrt{-\mathscr{D}}\left[(Re\,\mu)^2 + (Im\,\mu)^2\right] \neq 0.$$

Отсюда и из (2.4.33) следует, что $\mathscr{B}(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Таким образом, $\alpha(\boldsymbol{x}) = \gamma(\boldsymbol{x}) = 1/2\mathscr{B}(\boldsymbol{x})$. Согласно (2.4.4) уравнение (2.3.1) с помощью замены (2.4.28) независимых переменных приведется к виду

$$\frac{1}{2}\mathscr{B}(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right) + \mathscr{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, \ldots) = g(\boldsymbol{y}). \tag{2.4.34}$$

Если обе части уравнения (2.4.34) разделить на $1/2\mathscr{B}(\boldsymbol{x})$, то получим уравнение следующего канонического вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} + \mathscr{L}^{(3)}\left(\boldsymbol{y}, v(\boldsymbol{y}), \frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \tilde{g}(\boldsymbol{y}). \tag{2.4.35}$$

Приходим к следующему правилу.

Правило 2.4.3. Чтобы привести к каноническому виду уравнение (2.3.1) в случае, когда оно является эллиптическим ($\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) < 0$), достаточно:

- составить одно из уравнений характеристик (2.4.26);
- найти семейство характеристик $\varphi(\boldsymbol{x}) = C$;
- через функцию $\varphi(\boldsymbol{x})$ сделать замену старых переменных через новые по формулам (2.4.28);
- уравнение (2.3.1), если $b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) < 0$, приведется с помощью замены (2.4.28) к каноническому виду (2.4.35).

2.5. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка со многими независимыми переменными

В предыдущем параграфе с помощью функций $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x})$ или одной функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, которые связаны с решениями уравнения характеристик (2.3.3), было показано, как можно выбрать замену и привести в области к каноническому виду квазилинейное уравнение (2.3.1) в случае двух независимых переменных. В случае $n \geqslant 3$ такие правила отсутствуют. Не доказано, что можно указать такие функции $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi^{(n)}(\boldsymbol{x})$, с помощью которых можно сделать замену независимых переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \\ \cdots \\ y_n &= \varphi^{(n)}(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

и всегда привести уравнение (2.3.4) к каноническому виду ($n \geqslant 3$). Отсутствие такого доказательства можно объяснить следующим фактом, если произвести элементарный подсчет. Если брать замену в виде (2.5.1), то должны подчинить требованиям обращения в нуль коэффициентов после замены независимых переменных при всех смешанных производных. Число этих производных в общем случае равно $n(n-1)/2$. Другими словами, должны найти n функций $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{x})$ ($i = 1, \ldots, n$), починенные $n(n-1)/2$ условиям. Очевидно, что число таких условий больше при $n \geqslant 3$ по сравнению с числом выбранных функций и равно их числу при $n = 3$. Но здесь еще надо присоединить условия при других производных, при которых коэффициенты должны обратиться в 1, либо в -1, либо в 0.

Однако оказывается, что в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$, или в случае постоянных коэффициентов уравнение (2.3.4) можно привести к каноническому виду с помощью линейной замены независимых переменных.

Итак, рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (2.3.4) второго порядка с многими независимыми переменными ($n \geqslant 3$) с постоянными коэффициентами, которое запишем в том же виде

$$\mathscr{L}(\mathbf{D})u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)} \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a^{(i)} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} + a^{(0)} u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}). \tag{2.5.2}$$

Чтобы привести (2.5.2) к каноническому виду, сделаем замену старых независимых $\boldsymbol{x}$ через новые $\boldsymbol{y}$ в виде линейной комбинации

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} x_i, \quad \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.5.3}$$

матрица которой

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.5.4}$$

Замена (2.5.3) является невырожденной. Если вычислить производные от функции $v(\boldsymbol{y}) = u\big(x_1(\boldsymbol{y}), \ldots, x_n(\boldsymbol{y})\big)$, получим следующие выражения

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \frac{\partial v}{\partial y_k}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{lj} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}.$$

Уравнение (2.5.2) после замены (2.5.3) приобретет вид

$$\sum_{k,l=1}^{n} A^{(kl)} \frac{\partial^2 v(\boldsymbol{y})}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{k=1}^{n} A^{(k)} \frac{\partial v(\boldsymbol{y})}{\partial y_k} + A^{(0)} v(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}), \qquad (2.5.5)$$

где

$$A^{(kl)} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)} \alpha_{ki}\alpha_{lj}, \quad A^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)} \alpha_{ki}.$$

А теперь рассмотрим характеристический многочлен оператора уравнения (2.5.2) $\mathscr{L}(\mathbf{D})$,

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)} \xi_i \xi_j, \qquad (2.5.6)$$

который составлен из главной части $\mathscr{L}^{(0)}(\mathbf{D})$ (см. п. 2.1) путем замены операторов дифференцирования $\partial/\partial x_i$ на параметры ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Многочлен (2.5.6) рассматриваем как квадратичную форму, которую, как известно, всегда можно привести к каноническому виду. При этом, согласно закону инерции, какую бы невырожденную замену ни взяли, число слагаемых с коэффициентом 1 и число слагаемых с коэффициентом -1 после нее будут всегда без изменения. Предположим, что это можно сделать с помощью замены

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \lambda_k, \qquad (2.5.7)$$

матрица которой является транспонированной по отношению к матрице A (см. 2.5.4). Если замену (2.5.7) подставить в выражение (2.5.6), то получим полином от параметров λ_k, т. е.

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k,l=1}^{n} A^{(kl)} \lambda_k \lambda_l,$$

где $A^{(kl)}$ – коэффициенты дифференциального уравнения (2.5.5).

Правило 2.5.1. Чтобы уравнение (2.5.2) привести к каноническому виду, достаточно его характеристический многочлен (2.5.6), рассматривая как квадратичную форму, привести к каноническому виду через замену (2.5.7). Тогда с помощью замены (2.5.3), где ее матрица является транспонированной по отношению к матрице замены (2.5.7), уравнение (2.5.2) приведется к каноническому виду.

Кроме приведения к каноническому виду можно освободиться от слагаемых с производными первого порядка с помощью соответствующей замены.

Предположим, что линейное уравнение второго порядка не содержит вторых смешанных производных, т. е. имеет вид

$$\sum_{i=1}^{r} a^{(ii)} \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} a^{(i)} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} + a^{(0)} u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \tag{2.5.8}$$

где $a^{(ii)} \neq 0$ ($i = 1, \ldots, r$, $r \geqslant 1$). Сделаем замену функции $u(\boldsymbol{x})$ через новую $v(\boldsymbol{x})$ по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{x}) \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \frac{a^{(i)}}{a^{(ii)}} x_i\Big). \tag{2.5.9}$$

Вычисляя производные, получим

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \frac{a^{(j)}}{a^{(jj)}} x_j\Big) - \frac{1}{2} \frac{a^{(i)}}{a^{(ii)}} u(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, r,$$

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2} \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \frac{a^{(j)}}{a^{(jj)}} x_j\Big) - \frac{a^{(i)}}{a^{(ii)}} \frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \times$$

$$\times \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \frac{a^{(j)}}{a^{(jj)}} x_j\Big) + \frac{1}{4} \frac{(a^{(i)})^2}{(a^{(ii)})^2} u(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, r, \tag{2.5.10}$$

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \frac{a^{(j)}}{a^{(jj)}} x_j\Big), \quad i = r+1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2} \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \frac{a^{(j)}}{a^{(jj)}} x_j\Big), \quad i = r+1, \ldots, n.$$

Подставляя значения производных функции $u(\boldsymbol{x})$ согласно формулам (2.5.10) в уравнение (2.5.8) получим следующее линейное дифференциальное уравнение относительно функции $v(\boldsymbol{x})$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r} a^{(ii)}\frac{\partial^2 v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2}+\sum_{i=r+1}^{n} a^{(i)}\frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}+\Big(a^{(0)}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{r}\frac{(a^{(i)})^2}{a^{(ii)}}\Big)v(\boldsymbol{x})=\\ =f(\boldsymbol{x})\exp\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\frac{a^{(i)}}{a^{(ii)}}x_i\Big).\end{gathered}\tag{2.5.11}$$

Таким образом, с помощью замены функции $u(\boldsymbol{x})$ через новую функцию $v(\boldsymbol{x})$ по формуле (2.5.9) уравнение (2.5.8) приводится к уравнению (2.5.11) без производных первого порядка для всех i, для которых коэффициенты уравнения (2.5.8) $a^{(ii)} \neq 0$.

2.6. Понятие о характеристиках дифференциальных уравнений с частными производными

В параграфе 2.3 было введено определение характеристик (определение 2.3.3) квазилинейного уравнения (2.3.1). В параграфе 2.5 был определен характеристический многочлен (см. (2.5.6)) для дифференциального уравнения второго порядка с многими независимыми переменными. Эти понятия можно распространить на квазилинейные уравнения произвольного порядка, в котором коэффициенты главной части не зависят от искомой функции и ее производных.

Для простоты записи и рассуждений рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с частными производными m - го порядка относительно неизвестной функции $u(\boldsymbol{x})$

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u=f(\boldsymbol{x}),\tag{2.6.1}$$

заданного в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ переменных $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega$.

Обозначим через $C^k(\Omega)$ множество непрерывно дифференцируемых до порядка k включительно функций в любой точке $\boldsymbol{x}\in\Omega$.

Левую часть уравнения (2.6.1) можно рассматривать как значение $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u$ оператора $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D}) = \sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\colon C^m(\Omega)\to C^0(\Omega)$. Уравнение (2.6.1) можно записать в операторном виде

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u=f(\boldsymbol{x}).$$

Оператору $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ ставим в соответствие полином, заменяя символ $\mathbf{D}$ на вещественный или комплексный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots ,\xi_n)$, т. е.

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Таким образом, каждому дифференциальному оператору $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ ставится взаимно однозначным образом полином $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, т. е. биективное отображение $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D}) \to \mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$. Однако многие свойства дифференциальных уравнений с частными производными и задач для них зависят только от главной части уравнения

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u.$$

Соответствующий полином $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}$ называется *характеристическим полиномом* оператора $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D}) = \sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}$ и уравнения (2.6.1).

Определение 2.6.1. Вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots ,\xi_n)$ называется *характеристическим направлением* в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ уравнения (2.6.1) или оператора $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$, если

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\xi}) = 0. \tag{2.6.2}$$

Рассмотрим теперь гиперповерхность S, содержащую точку $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots ,x_n^{(0)})$, которая задается уравнением

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)}).$$

Предположим, что наша поверхность S является гладкой, расположена в области Ω, где задан оператор $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$, и не имеет особых точек, т. е. $\varphi \in C^1(\Omega)$ и $\mathbf{grad}\ \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{x_1}, \ldots ,\varphi_{x_n}) \neq 0$.

Определение 2.6.2. Гиперповерхность S называется *характеристической* дифференциального оператора $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ или дифференциального уравнения (2.6.1) в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$, если

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}^{(0)}, \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}^{(0)})) = 0. \tag{2.6.3}$$

Определение 2.6.3. Гиперповерхность S называется *характеристической поверхностью* или *характеристикой* уравнения (2.6.1) (оператора $\mathscr{L}(x,\mathbf{D})$), если для всех $x \in S$ справедливо уравнение

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}, \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x})) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = 0. \quad (2.6.4)$$

Установим некоторую связь между характеристиками и характеристическими направлениями. Пусть $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)})$ — характеристика уравнения (2.6.1). Для функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ справедливо уравнение (2.6.4). Тогда (см. п. 1.9) единичный вектор $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}^{(0)})/|\,\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}^{(0)})|$, перпендикулярный в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ к поверхности S, согласно (2.6.4), удовлетворяет уравнению (2.6.2), т. е.

$$\mathscr{L}^{(0)}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}, \frac{\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}^{(0)})}{|\,\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}^{(0)})|}\right) = 0.$$

Это следует из уравнения (2.6.4) и однородности полинома $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}, \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}))$.

Таким образом, из предыдущего можно сделать следующее заключение.

Свойство 2.6.1. Перпендикулярный вектор к характеристической поверхности в любой ее точке является характеристическим направлением.

Установим обратную связь. Пусть вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является характеристическим направлением уравнения (2.6.1) в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$, т. е. $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\xi}) = 0$. Пусть гиперплоскость $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$, которая проходит через точку $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и которая перпендикулярна вектору $\boldsymbol{\xi}$. Уравнение ее, как известно, следующее:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \big(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\xi}\big) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})\xi_i = 0. \quad (2.6.5)$$

Нетрудно видеть, что $\partial\varphi/\partial x_i = \xi_i$ во всех точках x. Из уравнения $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = 0$ следует, что гиперплоскость $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$, заданная уравнением (2.6.5), является характеристической поверхностью уравнения (2.6.1) в точке $x^{(0)}$. Из сказанного следует свойство.

Свойство 2.6.2. Если задано поле $\mathscr{N}$ характеристических направлений $\boldsymbol{\xi}(x)$ уравнения (2.6.1) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то любая гиперплоскость, проходящая через точку $\boldsymbol{x}$ и перпендикулярная $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$, является характеристической поверхностью в точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ уравнения (2.6.1).

Таким образом, через поле $\mathscr{N}$ характеристических направлений $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ можно однозначным образом построить поле Φ характеристических гиперплоскостей $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ в соответствующих точках $\boldsymbol{x}$.

Свойство 2.6.3. Огибающая S гиперплоскостей $\varphi = 0$ из Φ, содержащая точки, в которых соответствующие гиперплоскости являются характеристическими гиперповерхностями уравнения (2.6.1) и касательными к S, будет характеристикой уравнения (2.6.1) в области Ω.

Это свойство следует из определения характеристик и дифференциальной геометрии (существование огибающей).

ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим **уравнение Пуассона**

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \qquad u(\boldsymbol{x}) = u(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.6.6}$$

Уравнение характеристических направлений следующее

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 0. \tag{2.6.7}$$

Очевидно, решениями из поля действительных чисел уравнения (2.6.7) будут только тривиальные решения $\xi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n$. Это говорит о том, что уравнение (2.6.6) не имеет действительных характеристических направлений и, следовательно, действительных характеристик.

2. **Уравнение теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(t, \boldsymbol{x}), \qquad u(t, \boldsymbol{x}) = u(t, x_1, \ldots, x_n). \tag{2.6.8}$$

Для отыскания действительных характеристических направлений $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ рассматриваем уравнения

$$-a^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 0. \tag{2.6.9}$$

Решениями (2.6.9) являются только $\xi_i = 0, \quad i = 1,\ldots,n$. Отсюда следует, что любой вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0,0,\ldots,0)$ ($\xi_0 \neq 0$) является характеристическим направлением в любой точке $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ уравнения (2.6.8). По этим характеристическим направлениям можно указать характеристики и ими являются все гиперплоскости $\{(t,\boldsymbol{x})|\, t = \mathrm{const}\}$.

3. Рассмотрим **уравнение колебания струны**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{2.6.10}$$

Уравнением характеристик для (2.6.10) будет уравнение

$$\xi_0^2 - a^2\xi_1^2 = 0 \tag{2.6.11}$$

для вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0,\xi_1)$. Решениями уравнения (2.6.11) будут $\xi_0 = \pm a\xi_1$. Отсюда следует, что имеем два поля $\mathscr{N}_1 = \{(a\tau,\tau)\}$ и $\mathscr{N}_2 = \{(-a\tau,\tau)\}$ характеристических направлений, где параметр $\tau \in \mathbb{R}^1$ и $\tau > > 0$. По этим семействам характеристических направлений легко построить два семейства характеристик вида $\{x + at = \mathrm{const}\}$ и $\{ x - at = \mathrm{const}\}$, к которым перпендикулярны характеристические направления $(-a\tau,\tau)$ и $(a\tau,\tau)$ соответственно.

4. **Уравнение Трикоми.** Уравнением Трикоми называется уравнение

$$x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \tag{2.6.12}$$

относительно функции u независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$. Это уравнение является уравнением смешанного типа. Легко видеть, что оно в полуплоскости $\mathbb{R}^{2+} = \{\boldsymbol{x}|\, x_2 > 0\}$ является эллиптическим, в полуплоскости $\mathbb{R}^{2-} = \{\boldsymbol{x}|\, x_2 < 0\}$ — гиперболическим, а на границе γ раздела этих полуплоскостей, т. е. $\gamma = \{\boldsymbol{x}|\, x_2 = 0\}$ — параболическим.

2.7. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными

Как и в предыдущем параграфе будем рассматривать линейные дифференциальные уравнения с частными производными m - го порядка

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u = f(\boldsymbol{x}). \tag{2.7.1}$$

Имеется довольно большая классификация дифференциальных уравнений с частными производными, которую в полном объеме трудно охватить. Она делается исходя из свойств уравнений, постановки задач, поведения решений и т. д. Имеющаяся классификация охватывает далеко не все уравнения и системы, даже линейные. Здесь мы выделим три класса уравнений, определения которых приняты в литературе и уже являются классическими.

Определение 2.7.1. Оператор $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ или уравнение (2.7.1) называется *эллиптическим в точке* $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$, если в этой точке $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ для любого вектора $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Оператор $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ (уравнение (2.7.1)) *эллиптичен в области* $\Omega \in \mathbb{R}^n$, если он (уравнение) является эллиптическим в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Замечание 2.7.1. Уравнение $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ для любого $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ означает, что в точке $\boldsymbol{x}$ отсутствуют действительные характеристические направления.

Свойство 2.7.1. Эллиптический оператор в области его задания не имеет действительных характеристик.

Теорема 2.7.1. *Линейный эллиптический оператор* $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ *уравнения* (2.7.1)) *имеет четный порядок при выполнении одного из следующих двух условий:*

- $n > 2$;
- *коэффициенты* $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})$ *оператора* $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ *являются вещественными функциями (мнимая часть равна нулю).*

Доказательство. Пусть $n > 2$, $\boldsymbol{\xi}$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ – линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим полином $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi} + \tau\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ комплексного переменного τ. Представим его в виде полинома относительно τ следующим образом

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi} + \tau\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \tau^m \mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}}) + \tau^{m-1}\mathscr{L}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}}) + \cdots + \mathscr{L}^{(m)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),$$

где $\mathscr{L}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ $(i = 1,\ldots,m)$ – полиномы от $\boldsymbol{\xi}$ и $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$. Уравнение

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi} + \tau\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = 0 \tag{2.7.2}$$

относительно τ при фиксированном $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ согласно определению 2.7.1 и линейной независимости $\boldsymbol{\xi}$ и $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ не имеет вещественных корней для любого

$\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$, где $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ — дополнение в $\mathbb{R}^n$ к прямой, содержащей начало координат и вектор $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$. Так как $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \neq 0$ и не зависит от $\boldsymbol{\xi}$, то корни $\tau_k(\boldsymbol{\xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$

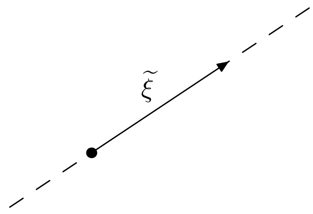

Рис. 2.1

уравнения (2.7.2) непрерывно зависят от $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

При $n > 2$ $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ является связным множеством. Поэтому число корней (с учетом их кратности) $\tau_k(\boldsymbol{\xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ с положительной мнимой частью (соответственно с отрицательной мнимой частью) остается постоянным для любого $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$. Обозначим это число через l (соответственно через $m - l$). Заметим, что если $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$, то и $(-\boldsymbol{\xi}) \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$. Поэтому число l для полиномов $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi} + \tau\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ и $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{\xi} + \tau\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ одно и то же. У полинома $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi} - \tau\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ число корней с положительной мнимой частью будет $m - l$. Но из равенства

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{\xi} + \tau\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = (-1)^m \mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi} - \tau\tilde{\boldsymbol{\xi}})$$

следует $l = m - l$, т. е. $m = 2l$.

Пусть $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})$ — вещественные функции (мнимая часть равна нулю) и $n = 2$. Тогда

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}.$$

Для любого вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,0)$, у которого координата $\xi_1 \neq 0$, $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},(\xi_1,0)) = \xi_1^m a^{(m0)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Отсюда следует, что $a^{(m0)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Точно также $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},(0,\xi_2)) = \xi_2^m a^{(0m)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, для $\xi_2 \neq 0$ и $a^{(0m)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Таким образом, $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = 0$ при $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ может быть при $\xi_1 \neq 0$ и $\xi_2 \neq 0$. Согласно основной теореме алгебры уравнение

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},(\xi_1,1)) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\xi_1^{\alpha_1} = 0$$

над полем комплексных чисел имеет m корней $\xi_{1i}(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \ldots ,m)$ и

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},(\xi_1,1)) = a^{(m0)}(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{m} (\xi_1 - \xi_{1i}(\boldsymbol{x})). \qquad (2.7.3)$$

Согласно определению 2.7.1 все корни ξ_{1i} комплекснозначные и попарно комплексно сопряженные. Отсюда и из равенства

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = a^{(m0)}(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{m} \big(\xi_1 - \xi_2\xi_{1i}(\boldsymbol{x})\big),$$

которое следует из (2.7.3) для любого $\xi_2 \neq 0$, можно заключить, что m является четным числом. ⊗

Примерами эллиптических операторов высокого порядка являются $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D}) = \Delta^k$ $(k = 1,\ldots,s)$, где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ — оператор Лапласа, а s — любое число из натурального ряда.

Замечание 2.7.2. В качестве примера эллиптического оператора нечетного порядка при $n = 2$ можно взять оператор Коши-Римана $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D}) = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$.

Определение 2.7.2. Пусть задан вещественный вектор $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$. Оператор $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ или уравнение (2.7.1) называется гиперболическим или *строго гиперболическим в точке* $\boldsymbol{x}^{(0)}$ относительно вектора $\boldsymbol{\zeta}$, если выполняются следующие условия:

1. $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\zeta}) \neq 0$;
2. $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\xi} + \tau\boldsymbol{\zeta})$ — полином относительно τ для каждого вектора $\boldsymbol{\xi}$, не параллельного $\boldsymbol{\zeta}$, имеет m вещественных различных корней.

Оператор $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$ (уравнение (2.7.1)) называется *гиперболическим в области* Ω относительно векторного поля $\mathscr{N}$, заданного в Ω, если он является гиперболическим в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ относительно соответствующего вектора $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})$ из поля $\mathscr{N}$.

Примером гиперболического уравнения является волновое уравнение

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D}) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(t,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n),$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$. В качестве векторного поля $\mathscr{N}$ можно взять поле, состоящее из векторов $\boldsymbol{\zeta} = (1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$. Очевидно $\mathscr{L}^{(0)}(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{\zeta}) = 1 \neq 0$. Тогда для любого $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ $\mathscr{L}^{(0)}(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi} + \tau\boldsymbol{\zeta}) = (\xi_0 + \tau)^2 - a^2|\boldsymbol{\xi}'|^2$, где $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Если $\boldsymbol{\xi}' \neq 0$, то уравнение $\mathscr{L}^{(0)}(t,\boldsymbol{x}^{(0)};\boldsymbol{\xi} + \tau\boldsymbol{\zeta}) = 0$ относительно τ имеет различные корни $\tau_{1,2} = -\xi_0 \pm |a|\,|\boldsymbol{\xi}'|$.

Рассмотрим уравнения (2.7.1), для которых плоскость, перпендикулярная заданному направлению $\boldsymbol{\zeta}$, является характеристической поверхностью в некоторой точке $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots ,x_n^{(0)})$. Для определённости предположим, что таким направлением является вектор $\boldsymbol{\zeta} = (0, \dots ,0,1)$. Согласно предположению $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\zeta}) = 0$. Это означает, что коэффициент при производной $\mathbf{D}_n^m$ равен $a^{(0\dots 0m)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = 0$. Таким образом, порядок производных по x_n, входящих в уравнение (2.7.1), меньше m. Пусть этот порядок равен $m' < m$ и

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}'|+p\alpha_n\leqslant \\ \leqslant m=m'p}} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}^{(0)})\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

где $p = m/m'$, $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \dots ,\alpha_{n-1})$. В уравнении (2.7.1) выделим не только главную часть его, но и некоторые слагаемые с младшими производными по x_n, т. е. рассмотрим следующий полином

$$\mathscr{L}^{(0,p)}(\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}'|+p\alpha_n=m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}^{(0)})\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{2.7.4}$$

Наряду с полиномом (2.7.4) будем рассматривать уравнение

$$\mathscr{L}^{(0,p)}(\boldsymbol{x}^{(0)},i\boldsymbol{\xi}',\xi_n) = 0 \tag{2.7.5}$$

относительно ξ_n, где в (2.7.5) $i = \sqrt{-1}$, $\mathscr{L}^{(0,p)}(\boldsymbol{x}^{(0)},i\boldsymbol{\xi}',\xi_n)$ есть выражение (2.7.4), в котором ξ_k заменены на $i\xi_k$, $k = 1, \dots ,n-1$.

Определение 2.7.3. Если вещественные части корней относительно ξ_n уравнения (2.7.5) для всех $|\boldsymbol{\xi}'| = 1$ являются отрицательными, то уравнение (2.7.1) и соответствующий оператор $\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^{(0)},\mathbf{D})$ называются p - *параболическими в точке* $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Если уравнение (2.7.1) (оператор $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})$) является p - параболическим в каждой точке $\boldsymbol{x}$ из области Ω, то оно (он) называется p - параболическим в Ω.

Примером p - параболического уравнения является уравнение теплопроводности

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(t,\boldsymbol{x}), \tag{2.7.6}$$

$\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$, $p = 2$. Относительно направления $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_0,0, \dots ,0)$ $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta}) = 0$ для уравнения (2.7.6). Наивысший порядок производных по t, входящих в оператор уравнения (2.7.6), равен 1. Следовательно для уравнения (2.7.6) $p = 2$.

Уравнение

$$\mathscr{L}^{(0,2)}(\boldsymbol{x},\xi_0,i\boldsymbol{\xi}') = \xi_0 + a^2|\boldsymbol{\xi}'|^2 = 0,$$

соответствующее (2.7.6), относительно ξ_0 имеет единственный корень $\xi_0 = -a^2|\boldsymbol{\xi}'|^2$, вещественная часть $-a^2|\boldsymbol{\xi}'|^2$ которого – отрицательная величина для любых $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \ldots ,\xi_n) \neq 0$.

Вернемся теперь к уравнению (2.3.1) в частном случае, когда оно является линейным и $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$. Уравнение (2.3.1) в этом случае в общем виде можно записать так:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u = a(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\\ +a^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + b^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + c^{(0)}(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Кроме приведенной выше классификации (определения 2.7.1 – 2.7.3) существует еще классификация уравнений (2.7.7) через дискриминант $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) = b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})$ коэффициентов правой части $a(\boldsymbol{x})$, $b(\boldsymbol{x})$ и $c(\boldsymbol{x})$, а именно:

Уравнение (2.7.7) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется:

- *эллиптическим*, если $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) < 0$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$;
- *параболическим*, если $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) = 0$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$;
- *гиперболическим*, если $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) > 0$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Покажем, что определение 2.3.1 для уравнения (2.7.7) не противоречит определениям 2.7.1 – 2.7.3 и определения эллиптических и гиперболических уравнений совпадают.

Заметим, что из определения 2.7.1 или требования $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) < 0$ следует, что $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$ и $c(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Рассмотрим уравнение характеристических направлений $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2)$

$$a(\boldsymbol{x})\xi_1^2 + 2b(\boldsymbol{x})\xi_1\xi_2 + c(\boldsymbol{x})\xi_2^2 = 0. \tag{2.7.8}$$

Отсюда следует, что, ξ_1 и ξ_2 связаны соотношениями

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{x})\xi_1 = (-b(\boldsymbol{x}) \pm \sqrt{\mathscr{D}(\boldsymbol{x})})\xi_2,\\ (-b(\boldsymbol{x}) \pm \sqrt{\mathscr{D}(\boldsymbol{x})})\xi_1 = c(\boldsymbol{x})\xi_2.\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

Из формул (2.7.9) видно, что уравнение (2.7.7) не имеет действительных характеристик тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) < 0$, т. е.

определение 2.7.1 эквивалентно 2.3.1 в случае эллиптических уравнений (2.7.7).

Рассмотрим теперь случай гиперболических уравнений вида (2.7.7). Согласно определению 2.7.2 рассмотрим направление $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1,\zeta_2)$, для которого $\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta}) = a(\boldsymbol{x})\zeta_1^2 + 2b(\boldsymbol{x})\zeta_1\zeta_2 + c(\boldsymbol{x})\zeta_2^2 \neq 0$. Далее рассматриваем уравнение

$$\begin{gathered}\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi} + \tau\boldsymbol{\zeta}) = a(\boldsymbol{x})(\xi_1 + \tau\zeta_1)^2 + \\ +2b(\boldsymbol{x})(\xi_1 + \tau\zeta_1)(\xi_2 + \tau\zeta_2) + c(\boldsymbol{x})(\xi_2 + \tau\zeta_2)^2 = 0\end{gathered} \tag{2.7.10}$$

относительно τ для любого вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, не параллельного $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1,\zeta_2)$. Уравнение (2.7.10) запишем в виде

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})\tau^2 + 2Q(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta})\tau + \mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = 0, \tag{2.7.11}$$

где $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) = a(\boldsymbol{x})\xi_1\zeta_1 + b(\boldsymbol{x})(\xi_1\zeta_2 + \xi_2\zeta_1) + c(\boldsymbol{x})\zeta_2^2$. Корни уравнения (2.7.11) определяются формулой

$$\tau_{1,2} = \frac{-Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) \pm \sqrt{Q^2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) - \mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})}}{\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})}. \tag{2.7.12}$$

Непосредственной проверкой доказывается следующая связь дискриминантов

$$Q^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) - \mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta}) = (\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1)^2\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) > 0. \tag{2.7.13}$$

В выражении (2.7.13) $\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1 \neq 0$, так как векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\zeta}$ не являются параллельными. Из соотношений (2.7.12) и (2.7.13) следует, что корни τ_1 и τ_2 уравнения (2.7.11) являются действительными и различными тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}(\boldsymbol{x}) > 0$. Это эквивалентно определению (2.3.1) в случае гиперболических уравнений (2.7.7).

Замечание 2.7.3. Определение параболичности в определении 2.3.1 шире по сравнению с определением 2.7.3 для уравнения (2.7.7).

3. Основные уравнения математической физики и задачи для них

3.1. О постановке задач для дифференциальных уравнений с частными производными

Искать решение уравнений с частными производными, как правило, не имеет смысла, так как в принципе сделать это нельзя даже для простых уравнений. Этому могут быть следующие объяснения.

1. Решения дифференциальных уравнений с частными производными представляют довольно сложную структуру и поэтому с помощью имеющихся формул аналитического и другого представления функций далеко не всегда можно сделать это.
2. Любое дифференциальное уравнение, а тем более с частными производными, всегда имеет бесконечное множество решений. Эта причина является основным препятствием численного решения дифференциальных уравнений без дополнительных условий на искомую функцию.
3. Наличие бесконечного множества решений не представляет интереса при моделировании конкретных физических явлений.

В п. 2.1 введены понятия дифференциальных уравнений с частными производными. В данном параграфе описывается общий подход к постановке задач для дифференциальных уравнений.

Согласно понятиям, изложенным в п. 2.1, дифференциальное уравнение с частными производными записывается с помощью оператора A в виде

$$Au = A\Big(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u\Big) = f(\boldsymbol{x}), \tag{3.1.1}$$

где искомая и заданная функции u и f зависят от n независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{B}$, $f \in \mathscr{R}(A) \subset F$.

В связи со сказанным, к основному дифференциальному уравнению (3.1.1) присоединяются дополнительно другие уравнения под названием условий на искомую функцию u

$$l_k u = \varphi_k, \quad k = 1, \ldots, k^{(0)}, \tag{3.1.2}$$

где φ_k — заданные элементы, l_k — некоторые операторы, которые определяются конкретными ситуациями моделирования явлений и рассматриваемым основным уравнением (3.1.1). Относительно искомой функции u имеем систему уравнений (3.1.1), (3.1.2), которая называется задачей для уравнения (3.1.1). Если через $\boldsymbol{A}$ обозначить вектор $(A, l_1, \ldots, l_{k^{(0)}}) = \boldsymbol{A}$, состоящий из операторов $A, l_1, \ldots, l_{k^{(0)}}$, а через $\boldsymbol{F}$ — элемент - вектор $(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k^{(0)}})$, то задачу (3.1.1), (3.1.2) можно записать в операторном виде

$$\boldsymbol{A}u = \boldsymbol{F}, \quad u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{A}). \tag{3.1.3}$$

Здесь область определения $\mathscr{D}(\boldsymbol{A})$ оператора $\boldsymbol{A}$ может быть из некоторого другого пространства B, содержащегося в $\mathscr{B}$ ($B \subset \mathscr{B}$), а элемент $\boldsymbol{F}$ — из декартового произведения $H = F \times \mathscr{F}_1 \times \ldots \times \mathscr{F}_{k^{(0)}}$, где $f \in F$, $\varphi_i \in \mathscr{F}_i, i = 1, \ldots, k^{(0)}$. Добавление условий (3.1.2) к уравнению (3.1.1) сужает класс решений операторного уравнения (3.1.3) (задачи (3.1.1), (3.1.2)).

Заметим еще, что при постановке задач (3.1.1), (3.1.2) *для функции u и f указываются их область определения $\mathscr{D}(u) = \mathscr{D}(f) = Q$, или область изменения независимых переменных, в которой задано уравнение* (3.1.1). *Тоже самое и для* (3.1.2) *для каждого условия*

$$l_k u = \varphi_k,$$

($k \in \{1, \ldots, k^{(0)}\}$) необходимо указывать область изменения независимых переменных, в которой задано это условие. Это очень важно и необходимо при постановке задачи (3.1.1), (3.1.2).

Можно рассматривать дифференциальные уравнения с частными производными не только для одной искомой функции, но и для нескольких $u_1, \ldots, u_N$. В этом случае вместо одного основного уравнения (2.1.3) мы имеем систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$A_j \boldsymbol{u} = f_j \quad j = 1, \ldots, j^{(0)}\,, \tag{3.1.4}$$

где обычно $j^{(0)} = N$, т. е. количество уравнений $j^{(0)}$ в системе (3.1.4) равно количеству искомых функций N. Но это требование не является обязательным.

Далее, при постановке задач для искомых функций $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N)$ к системе уравнений (3.1.4) присоединяются дополнительные условия

$$l_j \boldsymbol{u} = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, \tilde{j}^{(0)}\,. \tag{3.1.5}$$

Задачу (3.1.4) – (3.1.5) можно также записать в виде операторного уравнения

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}, \tag{3.1.6}$$

где $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N)$ – искомые функции, $\boldsymbol{F} = (f_1, \ldots, f_{j^{(0)}}; \varphi_1, \ldots, \varphi_{\tilde{j}^{(0)}})$ – заданные функции, оператор $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_{j^{(0)}}; l_1, \ldots, l_{\tilde{j}^{(0)}})$.

Здесь, как и в случае одного уравнения, также является важным при постановке задач вида (3.1.4) – (3.1.5) указывать области изменения независимых переменных, в которых задаются уравнения (3.1.4) и (3.1.5). В дальнейшем условия (3.1.2) или (3.1.5) будут задаваться на гиперплоскостях, которые являются кусочно-гладкими (см. п. 1.9).

3.2. Корректная постановка задач

В предыдущем параграфе задачи для дифференциальных уравнений или их систем записывали в операторном виде (3.1.3) и (3.1.6). Для определенности рассмотрим задачи только для одного уравнения (3.1.1), т. е. ограничимся операторным уравнением (3.1.3)

$$\boldsymbol{A}u = \boldsymbol{F}, \quad u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{A}). \tag{3.2.1}$$

Решить исходную задачу или соответствующее ей операторное уравнение (3.2.1) – означает, что надо найти такой элемент u, чтобы значение $\boldsymbol{A}u$ оператора $\boldsymbol{A}$ равнялось заданному элементу $\boldsymbol{F}$.

Бывают разные операторы $\boldsymbol{A}$. В понятие решения задачи может вкладываться разный смысл. В 30-е годы прошлого столетия французский математик Ж. Адамар ввел понятие корректно поставленной задачи[1]. В это понятие вкладываются три естественные требования и оно охватывает довольно широкий круг задач. Сформулируем эти требования.

1. *Решение уравнения* (3.2.1) *существует*. Более подробно рассмотрим это требование. Оператор $\boldsymbol{A}$ действует из некоторого пространства (множества) B в другое пространство (множество) H, т. е. $\boldsymbol{A} : B \to H$. Пространства B и H следует подобрать таким образом, чтобы для любого $\boldsymbol{F} \in H$ существовал такой элемент $u \in B$, для которого выполнялось бы равенство (3.2.1). Другими словами, надо подобрать B и H таким образом, чтобы множество значений $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$ совпадало с H, $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = H$.

[1]Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.

2. *Единственность решения.* Путем сужения B надо добиться того, чтобы для любого $\boldsymbol{F} \in H$ существовало одно решение $u \in B$ уравнения (3.2.1). Для линейной задачи это требование равносильно тому, чтобы однородное уравнение

$$\boldsymbol{A}u = 0 \tag{3.2.2}$$

имело только нулевое решение.

Отметим, что задача (3.1.1) – (3.1.2) называется *линейной*, если все уравнения (3.1.1) и (3.1.2) являются линейными. В этом случае оператор $\boldsymbol{A}$ уравнения (3.1.3) (задачи (3.1.1), (3.1.2)) является линейным оператором.

Пусть $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ – два решения уравнения, т. е.

$$\boldsymbol{A}u^{(i)} = \boldsymbol{F}, \quad i = 1{,}2. \tag{3.2.3}$$

Вычитая друг из друга (3.2.3), в силу линейности оператора $\boldsymbol{A}$ получим уравнение

$$\boldsymbol{A}(u^{(1)} - u^{(2)}) = 0, \tag{3.2.4}$$

или уравнение (3.2.2). А так как (3.2.2) имеет только нулевое решение, то $u^{(1)} = u^{(2)}$ и наоборот. Заметим, что для некоторых задач решение не может быть единственным (нельзя выбрать B, чтобы решение было единственным), а определяется с точностью до какого-то малого класса. Например, решение определяется с точностью до константы.

3. *Непрерывная зависимость от данных.* Это требование означает следующее: если $\boldsymbol{F}^{(1)}$ мало отличается от $\boldsymbol{F}^{(2)}$, то $u^{(1)}$ должно мало в каком-то смысле отличаться от $u^{(2)}$, где

$$\boldsymbol{A}u^{(i)} = \boldsymbol{F}^{(i)}, i = 1{,}2.$$

Пусть оператор $\boldsymbol{A}$ является линейным, B и H – нормированные пространства и выполняется энергетическое неравенство

$$\|u\|_B \leqslant c\|\boldsymbol{A}u\|_H \tag{3.2.5}$$

для любых $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{A})$, где константа c не зависит от u, $\|.\|_B$ – норма в B, $\|.\|_H$ – норма в пространстве H. В этом случае в силу линейности оператора $\boldsymbol{A}$ сформулированное требование непрерывной зависимости от данных $\boldsymbol{F}$, очевидно следует из энергетического неравенства (3.2.5).

Более сильное требование непрерывной зависимости искомого решения от данных, когда малые изменения $\boldsymbol{F}$ и коэффициентов оператора $\boldsymbol{A}$ могут порождать только малые изменения функции u, т. е. решение u уравнения (3.2.1) непрерывно зависит от правых частей $\boldsymbol{F}$ этого уравнения и коэффициентов оператора $\boldsymbol{A}$.

С точки зрения моделирования требования существования решения и его единственности математической модели очевидны и естественны. Рассмотрим более подробно третье требование. При составлении математической модели какого-нибудь явления предварительно делаются измерения, дополнительные доступные эксперименты, которые описываются функциями, входящими в элемент $\boldsymbol{F}$ и коэффициенты оператора $\boldsymbol{A}$. Естественно, что это делается с какой-то погрешностью по отношению к истинным показателям. Решение математической задачи (3.2.1) (математической модели) моделируемого объекта будет приближенным. Поэтому естественно ожидать, чтобы это приближенное решение (решение математической модели) мало отличалось от истинного, если измерения входных данных делаются с большей точностью. И чем меньше эта погрешность, решение задачи с большей точностью должно стремиться к истинному, а математическая модель должна более адекватно описывать моделируемое явление.

3.3. Уравнения поперечных колебаний струны

В качестве примеров составления математических моделей выведем простейшие уравнения математической физики и сформулируем задачи для них, используя физические законы.

В этом пункте опишем с помощью дифференциального уравнения с частными производными поперечные колебания струны.

Под струной будем понимать тонкую упругую нить, не оказывающую сопротивления поперечным изгибам , а только растяжению.

Задача 1. *Описать с помощью дифференциального уравнения на основании закона Ньютона об изменении количества движения поперечные колебания внутренних точек струны в любой момент времени t.*

Факт отсутствия сопротивления поперечному изгибу математически выражается тем, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательной к ее мгновенному профилю.

Будем рассматривать струну, сориентированную вдоль оси x. Смещения точек струны обозначим через u. Если колебания происходят в пространстве, то $\boldsymbol{u}$ — вектор-функция, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Будем рассматривать колебания, при которых смещения точек струны происходят в одной плоскости декартовых переменных (u,x). Таким образом, положения точек струны достаточно фиксировать с помощью одной независимой переменной x. Временную независимую переменную обозначим через t. Следовательно, u есть функция от t и x, т. е. $u : \mathbb{R}^2 \ni (t,x) \to u(t,x) \in \mathbb{R}$. Вектор сил натяжения обозначим через $\boldsymbol{T}$. Обозначим через $\rho(t,x)$ линейную плотность струны, а через $f(t,x)$ — плотность внешних сил, действующих на струну в направлении оси u. Будем рассматривать изменение количества движения участка $[x^{(1)}, x^{(2)}]$ за время $[t^{(1)},t^{(2)}]$. Количество движения участка $[x^{(1)},x^{(2)}]$ в момент времени t равно

$$\int\limits_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \boldsymbol{e} u_t(t,x)\rho(t,x)\,\mathrm{d}x,$$

где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль траектории движения точки x, $u_t = \partial u/\partial t$. Согласно второму закону Ньютона, изменение количества движения участка $[x^{(1)},x^{(2)}]$ за время $\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)}$ равно импульсу действующих сил, которые в рассматриваемом случае складываются из сил натяжения $\boldsymbol{T}$, приложенных к концам участка, и внешних сил

$$\int\limits_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \boldsymbol{e} f(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Запишем это изменение количества движения

$$\int\limits_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \Big(\boldsymbol{e}\, u_t(t,x)\rho(t,x)\Big)\Big|_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}} \mathrm{d}x = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \boldsymbol{T}\Big|_{x=x^{(1)}}^{x=x^{(2)}} \mathrm{d}t + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \boldsymbol{e} f(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x, \tag{3.3.1}$$

где $u_t(t,x) = \partial u(t,x)/\partial t$. Уравнение (3.3.1) и есть уравнение поперечных колебаний участка струны $[x^{(1)},x^{(2)}]$ в интегрально-векторной форме. Спроектируем его на ось u. В результате получим

$$\int\limits_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} (u_t(t,x)\rho(t,x))\Big|_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}} \mathrm{d}x = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} T_u\Big|_{x=x^{(1)}}^{x=x^{(2)}} \mathrm{d}t + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x, \tag{3.3.2}$$

где T_u — проекция $\boldsymbol{T}$ на ось u. Как видно из рис. 3.1

$$T_u = |\boldsymbol{T}|\sin\alpha = T\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = T\operatorname{tg}\alpha\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}, \quad (3.3.3)$$

где $T = |\boldsymbol{T}|$, $u_x = \partial u(t,x)/\partial x$. Если $u(t,x)$ имеет непрерывные производ-

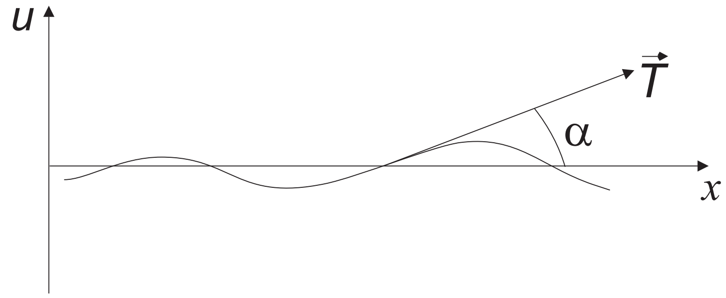

Рис. 3.1. Струна

ные второго порядка, а T — производные первого порядка, то уравнение (3.3.2) с учетом (3.3.3) можно записать в виде

$$\int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(u_t(t,x)\rho(t,x)\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\Big) - f(t,x)\right]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = 0\,. \quad (3.3.4)$$

Применяя теорему о среднем для интеграла уравнения (3.3.4),получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right) - f\right](\tilde{t},\tilde{x})\Delta t\Delta x = 0, \quad (3.3.5)$$

где $\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)}, \Delta x = x^{(2)} - x^{(1)}, (\tilde{t},\tilde{x}) \in [t^{(1)},t^{(2)}] \times [x^{(1)},x^{(2)}]$. Разделив обе части (3.3.5) на $\Delta t\Delta x$ и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}) = f(t,x)\,. \quad (3.3.6)$$

Если рассматривать *малые поперечные* колебания струны, в том смысле, что $\operatorname{tg}^2\alpha = u_x^2 \cong 0$, то тогда, во-первых, длина струны участка $[x^{(1)},x^{(2)}]$ в момент времени t равна

$$\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}\sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x \cong \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}\,\mathrm{d}x = x^{(2)} - x^{(1)}\,,$$

т. е. не меняется практически со временем. Отсюда в силу закона Гука величина натяжения T не зависит от t. Во-вторых, нелинейное уравнение (3.3.6) становится линейным

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(T u_x) = f(t,x) \ . \tag{3.3.7}$$

Если $T = \text{const}, \rho = \text{const}$ (струна однородная), то уравнение (3.3.7) принимает вид

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \tag{3.3.8}$$

где $a^2 = T/\rho$, $f \sim f/\rho$.

Уравнение (3.3.6) называется *уравнением поперечных колебаний струны*, (3.3.7) и (3.3.8) — *уравнением малых колебаний струны*.

3.4. Уравнение теплопроводности

Выведем уравнение, описывающее распределение температуры в теле. Координаты точек $\boldsymbol{x}$ тела будем обозначать через x_1, x_2, x_3, т. е. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Пусть $u(t,\boldsymbol{x})$ — температура тела в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени t.

Согласно закону Фурье плотность потока тепла ω в направлении единичного вектора нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ за единицу времени через границу $\partial\Omega$ области Ω определяется формулой

$$\omega = -k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}, \tag{3.4.1}$$

где $k(t,\boldsymbol{x},u)$ — коэффициент теплопроводности. Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_3 = (\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nu}), \boldsymbol{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right),$$

$(\boldsymbol{\nabla} u,\boldsymbol{\nu})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\nabla} u$ и $\boldsymbol{\nu}$.

Рассмотрим произвольную часть тела Ω, ограниченную поверхностью $\partial\Omega$. Обозначим через $f(t,\boldsymbol{x},u)$ — плотность источников тепла. Подсчитаем баланс тепла для части тела Ω за время $t^{(2)} - t^{(1)} = \Delta t$. Итак,

$$Q_1 = \int\limits_{\Omega} c\rho u \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \Bigg|_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}} \text{ — расход тепла на изменение температуры,}$$

c — коэффициент теплоемкости, ρ — плотность вещества;

$$Q_2 = -\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$ — изменение тепла за счет выходящего из Ω

потока;

$$Q_3 = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega} f(t,\boldsymbol{x},u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$ — изменение тепла за счет источников.

Тогда

$$Q_1 + Q_2 = Q_3,$$

или

$$\int\limits_{\Omega} c\rho u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Bigg|_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}} - \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega} f(t,\boldsymbol{x},u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,. \tag{3.4.2}$$

Чтобы перейти от интегрального уравнения (3.4.2) к дифференциальному, преобразуем его к интегральному соотношению с одной и той же областью интегрирования. Согласно формуле Остроградского (1.9.13)

$$\int\limits_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\partial\Omega} k(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\partial\Omega} (k\boldsymbol{\nabla} u,\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}(k\boldsymbol{\nabla} u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.4.3}$$

Соотношение Q_1 можно записать еще и так

$$Q_1 = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.4.4}$$

Согласно (3.4.3) и (3.4.4) из (3.4.2) следует уравнение

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - \mathrm{div}(k\boldsymbol{\nabla} u) - f\right]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Воспользуемся теоремой о среднем для интеграла $\int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int_{\Omega}\ldots\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ и перейдем к пределу при $\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)} \to 0$, объема $|\Omega|$ и диаметра $\mathrm{d}(\Omega)$, стремящихся к нулю. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - \mathrm{div}(k\boldsymbol{\nabla} u) = f(t,\boldsymbol{x},u) \tag{3.4.5}$$

для любой точки $\boldsymbol{x}$ тела и в любой момент времени t. Уравнение (3.4.5) называется уравнением теплопроводности. Здесь

$$\operatorname{div}(k\boldsymbol{\nabla}u) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_3}\right).$$

В общем случае, когда функции k и f зависят от u, т. е. $k = k(t, \boldsymbol{x},u)$, $f = f(t,\boldsymbol{x},u)$, получаем нелинейное уравнение теплопроводности (3.4.5). Если же эти функции $k\colon \mathbb{R}^4 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to u(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R}^4 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to f(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ являются функциями только от переменных t и $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$, то уравнение (3.4.5) будет линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Если $c = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$, $k = \mathrm{const}$ и ввести обозначение $\frac{k}{c\rho} = a^2$, то уравнение (3.4.5) записывается в виде

$$u_t - a^2\Delta u = f(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.4.6}$$

где $f \sim \frac{f}{c\rho}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – *оператор Лапласа.*

В случае стационарного процесса искомая функция $u : \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ не зависит от t и уравнение (3.4.5) преобразуется в уравнение

$$\operatorname{div}(k\boldsymbol{\nabla}u) = f(\boldsymbol{x},u). \tag{3.4.7}$$

Если в (3.4.7) $k = \mathrm{const}$ и функция f не зависит от u, то уравнение (3.4.7) принимает вид

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}) \tag{3.4.8}$$

и называется *уравнением Пуассона*. Однородное уравнение Пуассона

$$\Delta u = 0. \tag{3.4.9}$$

называется *уравнением Лапласа*.

3.5. Математические модели на основе уравнений колебания струны и теплопроводности

Рассмотрим некоторые примеры физических явлений, которые порождают корректно поставленные задачи (см. пп. 3.1, 3.2) для уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности.

1. Предположим, что мы рассматриваем малые поперечные колебания струны, если в начальный момент времени известно ее положение и известны также в начальный момент времени скорости точек струны. Кроме того, размеры струны по длине ее достаточно велики и таковы, что на колебания ее рассматриваемого участка не оказывают любые явления, происходящие на концах ее.

Как уже было показано в п. 3.3 отклонения внутренних точек струны в любой момент времени описываются дифференциальным уравнением
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \tag{3.5.1}$$
если струна однородная.

Теперь встает вопрос: какой области в этом уравнении принадлежат независимые переменные t и x. Если считать началом момент отсчета $t = 0$, то, естественно, считаем в (3.5.1) любое $t > 0$ или $t \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty) = \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}$. Что можно сказать относительно переменной x? Если считать что x в (3.5.1) меняется в конечных пределах, то из непрерывного изменения x будет следовать, что физические процессы, происходящие на концах струны, будут влиять на колебания в близлежащих внутренних точках. Поэтому следует считать, что в (3.5.1) x меняется в бесконечных пределах, т. е. $x \in \mathbb{R}$.

Если учесть положение струны и скорости ее точек в начальный момент времени, то для смещений (функции) $u(t,x)$ с помощью заданных функций, например, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно записать
$$\begin{aligned} l_0 u = {}& u(0,x) &= \varphi(x),\\ l_1 u = {}& u_t(0,x) &= \psi(x). \end{aligned} \tag{3.5.2}$$
Здесь $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)$ описывает профиль струны при $t = 0$, $\psi(x)$ – скорость смещений.

Таким образом, получаем так называемую задачу Коши: найти решение $u(t,x)$ уравнения (3.5.1), заданного для всех $t > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$, при наличии начальных условий (3.5.2), определенных для всех $x \in \mathbb{R}$.

2. Предположим, что мы имеем аналогичную задачу, где нас интересуют ещё и смещения $u(t,x)$ точек струны, близлежащих от граничных точек. В данном случае мы не можем учитывать эффекты на границе.

Предположим, что струна длины l и можно считать, что $0 < x < l$. Согласно п. 3.3, для внутренних точек имеем основное дифференциальное уравнение
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad (t,x) \in Q \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.5.3}$$

если струна однородная, где $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}_+, x \in (0,l)\}$. В начальный момент времени $t = 0$ задаются условия

$$l_0 u = u|_{t=0} = \varphi(x),\ l_1 u = u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < l, \tag{3.5.4}$$

которые называются *начальными условиями*. На концах струны могут быть разные ситуации. Концы закреплены жестко. Тогда, если ось x сориентирована вдоль струны, то смещения на концах струны

$$u(t,0) = u(t,l) = 0. \tag{3.5.5}$$

Концы двигаются по заданным законам, которые описываются функциями $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$. И мы имеем граничные условия

$$\begin{aligned} u(t,0) &= \mu_1(t), \\ u(t,l) &= \mu_2(t). \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

В этих случаях задачу (3.5.3) – (3.5.5) называют *первой смешанной задачей* с однородными граничными условиями, задачу (3.5.3) – (3.5.4), (3.5.6) *первой смешанной задачей* с неоднородными граничными условиями для уравнения колебания струны.

3. Предположим, что на концах струны $x = 0$ и $x = l$ приложены силы упругости $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ соответственно, направленные вдоль траектории струны. Рассмотрим эту ситуацию при $x = 0$. Рассуждая по схеме вывода основного уравнения, как это сделано в п. 3.3, относительно участка струны $[0, \Delta x]$ получим уравнение

$$\int_0^{\Delta x} \rho u_t \Big|_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}} \mathrm{d}x = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} (T u_x - P^{(1)}) \mathrm{d}t + \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int_0^{\Delta x} f(t,x)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x. \tag{3.5.7}$$

Устремляя Δx к нулю и пользуясь произволом выбора $[t^{(1)},t^{(2)}]$, получим

$$T u_x|_{x=0} = P^{(1)}. \tag{3.5.8}$$

Аналогично, проводя эти рассуждения для участка струны $[l-\Delta x, l]$, будем иметь

$$u_x|_{x=l} = \frac{P^{(2)}}{T}. \tag{3.5.9}$$

Задача (3.5.3), (3.5.4), (3.5.8), (3.5.9) называется *второй смешанной задачей* для уравнения колебания струны. Если концы свободны, то $P^{(1)} = P^{(2)} = 0$, и мы получаем однородные условия (3.5.8) и (3.5.9).

4. Предположим, что на концах струны действуют силы упругости, пропорциональные смещениям. Применяя второй закон Ньютона к участкам при концах, в результате получим условия

$$\begin{aligned} &(u_x+\sigma_1 u)|_{x=0}=0,\\ &(u_x+\sigma_2 u)|_{x=l}=0, \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

где σ_i $(i=1{,}2)$ — заданные коэффициенты пропорциональности. В этом случае задача (3.5.3), (3.5.4), (3.5.10) называется *третьей смешанной задачей* с однородными граничными условиями (3.5.10).

Если на концах струны действуют силы упругости, пропорциональные смещениям с некоторой корректировкой, то мы получим неоднородные условия

$$\begin{aligned} &(u_x+\sigma_1 u)|_{x=0}=\mu_1(t),\\ &(u_x+\sigma_2 u)|_{x=l}=\mu_2(t), \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

и соответственную *третью смешанную задачу* (3.5.3), (3.5.4), (3.5.11) с неоднородными граничными условиями (3.5.11).

Могут быть разные комбинации условий (3.5.5), (3.5.6), (3.5.10) (3.5.11) на концах струны $x=0$ и $x=l$.

5. Предположим, что изучаются поперечные колебания струны при одном конце, например, $x = 0$. Тогда получаем соответствующие граничные задачи, где уравнение (3.5.3) задается для $(t,x) \in Q = \{(t,x)\,|\,t,x \in \mathbb{R}_+\}$. Начальные условия также задаются для $x \in \mathbb{R}_+$, а при $x = 0$ — одно из граничных условий. Получаем следующую смешанную задачу в общей записи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x), \quad (t,x)\in Q\subset\mathbb{R}^2,$$

где $Q=\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\,|\,t,x\in\mathbb{R}_+\big\}$,

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}_+,$$

$$\Big(\sigma^{(1)}(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma^{(2)}(t)u\Big)\Big|_{x=0}=\mu(t), \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

где коэффициенты $\sigma^{(i)}$, $i=1{,}2$, одновременно не обращаются в нулю,

$$(\sigma^{(1)})^2+(\sigma^{(2)})^2\geqslant\sigma^{(0)}=\mathrm{const}>0.$$

Рассмотрим некоторые примеры задач для уравнения теплопроводности.

6. Если процесс распространения тепла рассматриваем локально без учета граничных явлений, то здесь получаем задачу Коши для уравнения теплопроводности, т. е. уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - \operatorname{div}(k\boldsymbol{\nabla} u) = f(t,\boldsymbol{x}), \quad (t,\boldsymbol{x}) \in Q, \tag{3.5.12}$$

$Q = \{(t,x)\,|t \in \mathbb{R}_+,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^4$ и начальное условие

$$lu = u|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{3.5.13}$$

описывающее с помощью функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ в начальный момент температуру точек тела.

7. Задачи с учетом граничных эффектов. Если процесс распространения тепла рассматривается и в точках вблизи границы, то в этом случае следуем учитывать условия, создаваемые внешней средой. Возможны также, как и в случае уравнения колебания струны, разные варианты. Рассмотрим некоторые из них. Прежде всего, считаем, что изучаемое относительно распространения тепла тело занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$. Тогда основное уравнение теплопроводности (3.5.12) для внутренних точек $(t,\boldsymbol{x})$ задается в области $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, начальное условие (3.5.13) — для $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Пусть на границе температура $u(t,\boldsymbol{x})$ поддерживается по заданному закону $\mu(t,\boldsymbol{x})$. Тогда получаем

$$u|_{\partial\Omega} = \mu(t,\boldsymbol{x}), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.5.14}$$

В этом случае получаем *первую смешанную задачу* (3.5.12)–(3.5.14) для $(t,\boldsymbol{x}) \in Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

8. Предположим, что тело по границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ теплоизолировано. В этом случае отсутствует поток на $\partial\Omega$ между точками тела и внешней средой. Как известно из физики, величина потока пропорциональна производной $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности $\partial\Omega$. Таким образом, в этом случае получаем граничное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_{\partial\Omega,\, t\in\mathbb{R}_+} = 0. \tag{3.5.15}$$

Это условие можно вывести более строго, используя схему вывода в п. 3.4 основного уравнения теплопроводности. Этот подход особенно требуется тогда, когда искомая функция u недостаточно гладкая на границе $\partial\Omega$ и граничные условия рассматриваются как предельные значение изнутри области Ω соответствующих выражений.

Рассмотрим произвольную часть тела Ω' достаточно малой толщины, прилегающей к границе $\partial\Omega$. Для Ω' составим баланс изменения тепла так как это сделано в п. 3.4. Граница $\partial\Omega'$ области Ω' состоит из двух частей $\Delta\partial\Omega$ и Γ, где $\Delta\partial\Omega = \partial\Omega \cap \bar{\Omega}'$, $\Gamma \subset \Omega$ и $\partial\Omega' = \Delta\partial\Omega \cup \Gamma$ (рис. 3.2), $\bar{\Omega}'$ – замыкание области Ω'. Расход тепла за период $[t^{(1)}, t^{(2)}]$ за счет вы-

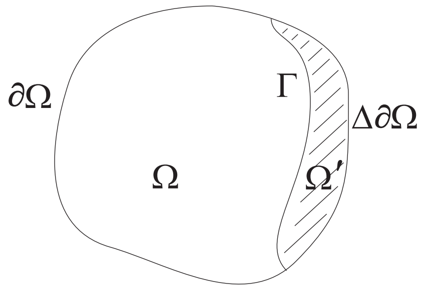

Рис. 3.2. Область Ω

ходящего из Ω' или входящего потока $\omega(t,\boldsymbol{x})$ определяется формулой

$$Q_2 = -\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\partial\Omega'} \omega(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = -\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\Delta\partial\Omega} \omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s - \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\Gamma} \omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.$$

Так как поток $\omega(t,\boldsymbol{x})$ на $\Delta\partial\Omega$ равен нулю, то

$$Q_2 = -\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\Gamma} \omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.$$

Если записать уравнение баланса изменения тепла в области Ω', получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega'} c\rho u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Bigg|_{t=t^{(1)}}^{t=t^{(2)}} + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\Omega'} f(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \qquad (3.5.16)$$

В (3.5.16) переходим к пределу при $\Gamma \to \Delta\partial\Omega$, т. е. объем $|\Omega'| \to 0$ и точки поверхности Γ стремятся к точкам $\Delta\partial\Omega$. В результате получим

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\Delta\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = 0,$$

Отсюда, в силу произвольности выбора временного отрезка $[t^{(1)},t^{(2)}]$ и части $\Delta\partial\Omega$ поверхности $\partial\Omega$ получим условие (3.5.15).

Предположим, что на $\partial\Omega$ поддерживается заданный поток. Проводя те же рассуждения, получим неоднородное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_{\substack{\partial\Omega,\\ t>0}} = \mu(t,\boldsymbol{x}). \tag{3.5.17}$$

Задача (3.5.12), (3.5.13), (3.5.15) или (3.5.12), (3.5.13), (3.5.17), где $\boldsymbol{x} \in \Omega$, называется *второй смешанной задачей*.

9. Пусть на $\partial\Omega$ поток пропорционален температуре с корректировкой. В этом случае получаем условие третьего рода

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma u\right)\right|_{\substack{\partial\Omega,\\ t>0}} = \mu(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.5.18}$$

где σ и μ — заданные функции. Соответствующая задача (3.5.12), (3.5.13), (3.5.18), где $\boldsymbol{x} \in \Omega$ в (3.5.12) и (3.5.13), называется *третьей смешанной задачей* для уравнения теплопроводности.

10. Если рассматривается стационарный процесс, то для описания процесса изменения температуры для внутренних точек уравнения теплопроводности (3.5.12) вырождается в уравнение

$$\operatorname{div}(k\nabla u) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{3.5.19}$$

Естественно, что начальное условие отсутствует. На границе $\partial\Omega$ может быть одно из следующих граничных условий:

$$u|_{\partial\Omega} = \mu(\boldsymbol{x}), \tag{3.5.20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_{\partial\Omega} = \mu(\boldsymbol{x}), \tag{3.5.21}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma u\right)\right|_{\partial\Omega} = \mu(\boldsymbol{x}). \tag{3.5.22}$$

Задача (3.5.19) – (3.5.20) называется *задачей Дирихле*, а задача (3.5.19), (3.5.21) – *задачей Неймана*.

3.6. Вывод уравнения колебаний мембраны

Точно также, как и уравнение малых поперечных колебаний струны, происходящих в плоскости, на основании 2-го закона Ньютона об изменении количества движения можно вывести и уравнение поперечных колебаний мембраны.

Под мембраной понимается тонкая материальная пленка, которая не оказывает сопротивления поперечным изгибам, а только растяжениям. Предполагается,что в состоянии равновесия мембрана занимает положение некоторой области координатной плоскости x_1Ox_2 в декартовой системе координат. Следовательно, каждая точка мембраны имеет координаты x_1 и x_2. Будем предполагать, что внешние силы, которые вызывают колебания мембраны, направлены вдоль единичного вектора $\mathbf{e}$, перпендикулярного плоскости x_1Ox_2. В связи с этим мы будем наблюдать поперечные колебания точек мембраны. К декартовой системе x_1Ox_2 дополним еще перпендикулярную ось, относительно которой мы будем наблюдать смещения u точек мембраны во время колебаний. Очевидно, что эти смещения будут меняться со временем t. Следовательно, функция u является функцией от переменных t, x_1 и x_2 и функцией поверхности мембраны.

Для вывода уравнения поперечных колебаний мембраны обозначим ее плотность через $\rho(t,\boldsymbol{x})$, $f(t,\boldsymbol{x})$ — плотность внешних сил, действующих на мембрану вдоль вектора $\boldsymbol{e}$, перпендикулярного плоскости x_1Ox_2. Точки мембраны с координатами $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ также будут совершать колебания в вертикальном направлении вдоль вектора $\boldsymbol{e}$.

Рассмотрим произвольный участок мембраны G с границей ∂G. Вдоль границы ∂G распределены силы натяжения $\boldsymbol{T}$, вектор которых в каждой точке ∂G, поскольку отсутствуют поперечные силы упругости, перпендикулярен к границе ∂G и находится в касательной плоскости к поверхности мембраны. Как и в случае вывода уравнения колебаний струны применяем второй закон Ньютона. Согласно этому закону об изменении количества движения за время $[t^{(1)},t^{(2)}]$, примененному к участку мембраны G, справедливо следующее уравнение

$$\int\limits_G \frac{\partial u}{\partial t}\rho(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}G\Big|_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial G}\boldsymbol{T}\mathrm{d}t\mathrm{d}s + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{G^*} f(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad (3.6.1)$$

G^* — проекция участка мембраны G на плоскость x_1Ox_2. Рассмотрим на ось u проекцию векторного уравнения (3.6.1). Здесь вектор $\boldsymbol{e}$ параллелен оси u. Проекция уравнения (3.6.1) запишется в виде

$$\int\limits_{G} \frac{\partial u}{\partial t}\rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}G\bigg|_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial G} T_u\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{G*} f(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.6.2}$$

Скалярное интегро-дифференциальное уравнение (3.6.2) можно привести к дифференциальному, если рассматривать малые поперечные колебания точек мембраны. Что понимать под малыми поперечными колебаниями? Обозначим через $\beta(t,\boldsymbol{x})$ угол между касательной плоскостью к поверхности мембраны $u(t,\boldsymbol{x})$ в точке $(t,\boldsymbol{x})$ и координатной плоскостью x_1Ox_2. Будем рассматривать такие колебания, при которых $\beta^2(t,\boldsymbol{x})$ и, следовательно, $(\sin\beta(t,\boldsymbol{x}))^2$ и $(\operatorname{tg}\beta(t,\boldsymbol{x}))^2$ сравнимы с нулем ($\beta^2 \cong 0$). При таких предположениях $\mathrm{d}G = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\cos\beta} = \sqrt{1+(\operatorname{tg}\beta)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cong \mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Интеграл по области G можно заменить на интеграл по ее проекции G^* переменных x_1 и x_2.

Обозначим через T абсолютную величину вектора $\boldsymbol{T}$, $T = |\boldsymbol{T}|$. Вектор $\boldsymbol{T}(t,\boldsymbol{x})$ находится в касательной плоскости и составляет со своей проекцией на плоскость x_1Ox_2 угол $\alpha(t,\boldsymbol{x})$. По своему определению $\alpha(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \beta(t,\boldsymbol{x})$. Поэтому считаем, что $\alpha^2(t,\boldsymbol{x}) \cong 0$. Проекция $T_u = T\sin\alpha = T\operatorname{tg}\alpha\frac{1}{\sqrt{1+(\operatorname{tg}\alpha)^2}}$.Согласно свойствам производных, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к контуру ∂G или ∂G^* и перпендикулярен оси u. Элемент ∂G равен $\frac{\mathrm{d}s^*}{\cos\gamma}$, где $\gamma(t,\boldsymbol{x})$ — угол между $\mathrm{d}s$ и его проекцией $\mathrm{d}s^*$ на плоскость x_1Ox_2. Так как $\cos\gamma = \sqrt{\frac{1}{1+(\operatorname{tg}\gamma)^2}}$ и $(\operatorname{tg}\gamma)^2 \leqslant (\operatorname{tg}\beta)^2$. Следовательно $\mathrm{d}s \cong \mathrm{d}s^*$.

С учетом проведенных рассуждений уравнение (3.6.2) преобразуется в уравнение

$$\int\limits_{G^*} \frac{\partial u}{\partial t}\rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\bigg|_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial G^*} T\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s^* + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{G^*} f(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.6.3}$$

Приведем уравнение (3.6.3) к интегро-дифференциальному уравнению с одной областью интегрирования $Q = (t^{(1)},t^{(2)}) \times G^*$. Левую часть его, очевидно, можно записать так

$$\int\limits_{G^*} \frac{\partial u}{\partial t}\rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\bigg|_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} = \int\limits_{Q} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(t,\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial t}\right)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.6.4}$$

Значение производной

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,\nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,\nu_2 = (\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}} u, \boldsymbol{\nu}). \tag{3.6.5}$$

Применяя формулу Остроградского (1.9.13),

$$\begin{gathered}\int\limits_{\partial G^*} T\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s^* = \int\limits_{G^*} \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(T\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}} u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ \int\limits_{G^*} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(T\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(T\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{gathered} \tag{3.6.6}$$

Отметим, что в силу наших предположений (малых поперечных колебаний) плотность $\rho(t,\boldsymbol{x})$ не будет зависеть от времени, так как

$$|G^*| = \int\limits_{G^*} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{G} \cos\beta\,\mathrm{d}G = \int\limits_{G} \sqrt{\frac{1}{1 + (\mathrm{tg}\,\beta)^2}}\,\mathrm{d}G \cong \int\limits_{G}\,\mathrm{d}G = |G| \tag{3.6.7}$$

для любого участка мембраны G, где $|G^*|$ – площадь G^*, $|G|$ – площадь G. По этой причине и T не зависит от времени. Действительно, для любого участка Γ границы ∂G

$$|\Gamma| = \int\limits_{\Gamma^*} \frac{\mathrm{d}\Gamma^*}{\cos\gamma} = \int\limits_{\Gamma^*} \sqrt{1 + (\mathrm{tg}\,\beta)^2}\,\mathrm{d}\Gamma^* = \int\limits_{\Gamma^*}\,\mathrm{d}\Gamma^* = |\Gamma^*|,$$

где $|\Gamma|$, $|\Gamma^*|$ – длина Γ и Γ^* соответственно, Γ^* – проекция Γ на плоскость x_1Ox_2.

Уравнение (3.6.3) в силу (3.6.4) – (3.6.7) запишется в виде

$$\int\limits_{Q} \left[\rho(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\,(T\,\mathbf{grad}\;u) - f(t,\boldsymbol{x})\right]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Отсюда в силу произвольного выбора интервала $(t^{(1)},t^{(2)})$ и области G заключаем, что подынтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$\rho(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\,(T\,\mathbf{grad}\;u) = f(t,\boldsymbol{x}) \tag{3.6.8}$$

для любого $t > 0$ и $\boldsymbol{x} \in \Omega$, где 0 – начало отсчета по времени малых поперечных колебаний мембраны, которая занимает область Ω в координатной плоскости x_1Ox_2.

Если мембрана однородная, т. е. $\rho(\boldsymbol{x}) \equiv \rho_0 = \mathrm{const}$, то T также не зависит от $\boldsymbol{x}$, $T(\boldsymbol{x}) = T_0 = \mathrm{const}$, уравнение (3.6.8) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle u = f(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.6.9}$$

где $a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}$, $f \sim \frac{f}{\rho_0}$.

3.7. Задачи для волнового уравнения и уравнений теплопроводности и Пуассона

Будем рассматривать функции $u : \mathbb{R}^{n+1} \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ от $n+1$ независимых переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Относительно функции u уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \triangle u = f(\boldsymbol{x}), \tag{3.7.1}$$

называется *волновым уравнением*, где число $a^2 \in \mathbb{R}$, $a^2 > 0$, $\triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – заданная функция.

При $n = 1$ уравнение (3.7.1) является уравнением малых поперечных колебаний однородной струны (п. 3.3), при $n = 2$ – уравнением малых поперечных колебаний однородной мембраны (см. п. 3.6). Уравнение (3.7.1) кроме колебаний струны и мембраны описывает многие другие явления из физики, микроэлектроники, радиофизики, биологии, экономики и других областей знаний.

Аналогично, относительно функции $u : \mathbb{R}^{n+1} \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} - a^2 \triangle u = f(\boldsymbol{x}), \tag{3.7.2}$$

называется *уравнением теплопроводности*. Его получили в п. 3.4 в случае $n = 3$ при описании процесса распространения тепла.

Для функции $u : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ уравнение

$$\triangle u = f(\boldsymbol{x}), \tag{3.7.3}$$

называется *уравнением Пуассона,* а уравнение

$$\triangle u = 0, \tag{3.7.4}$$

уравнением Лапласа.

Уравнения (3.7.2) – (3.7.4) кроме распространения тепла описывают также многие другие явления из разных областей науки и техники.

Уравнения (3.7.1) – (3.7.4) являются простейшими линейными уравнениями в математической физике, которые в этой области претендуют на название классических уравнений. Поэтому остановимся в этом параграфе на более конкретной формулировке постановки разных задач для них, являющихся при определенных условиях корректно поставленными.

3.7.1. Задачи для волнового уравнения

Рассмотрим задачи для волнового уравнения (3.7.1).

1.a. Простейшая задача Коши. Такая задача характеризуется тем, что основное уравнение (3.7.1) задается в полупространстве $Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ независимых переменных, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \triangle u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q. \tag{3.7.5}$$

На границе $\partial Q = \{\boldsymbol{x}\,|x_0 = 0\}$ области Q задаются начальные условия

$$\begin{aligned} u|_{x_0=0} &= \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} &= \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

через заданные на ∂Q функции $\varphi(\boldsymbol{x}')$ и $\psi(\boldsymbol{x}')$. Условия (3.7.6) называют еще *условиями Коши*.

1.b. Обобщенная задача Коши. Она характеризуется тем, что граница ∂Q области Q является не обязательно гиперплоскостью. Пусть область $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ независимых переменных $\boldsymbol{x}$. Граница ее ∂Q такова, что все единичные векторы $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = (\nu_0(\boldsymbol{x}),\ldots,\nu_n(\boldsymbol{x}))$, соответствующие внешним относительно Q нормалям в точках $\boldsymbol{x} \in \partial Q$, удовлетворяют следующим условиям: $\nu_0^2 - a^2|\boldsymbol{\nu}\,'|^2 \geqslant c_1 > 0, \nu_0 \leqslant c_2 < 0$ для одних и тех же $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$ и всех $\boldsymbol{x} \in \partial Q$, где $\boldsymbol{\nu}\,' = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ и $|\boldsymbol{\nu}\,'|^2 = \sum_{i=1}^n \nu_i^2$.

Термин "векторы $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$, соответствующие внешним относительно Q нормалям в точках $\boldsymbol{x}$," следует понимать в том смысле, что тот или иной вектор нормали в точке $\boldsymbol{x} \in \partial Q$ при параллельном переносе в начало координат совпадет с $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$. В дальнейшем в таких ситуациях будем просто говорить, что $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ – единичный вектор внешней нормали в точке $\boldsymbol{x} \in \partial Q$.

Пусть $\mathcal{M}$ – некоторое векторное поле на $\overline{Q}$ элементов $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$ таких, что $(\mu_0^2 - a^2|\boldsymbol{\mu}\,'|^2)(\boldsymbol{x}) \neq 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \partial Q$, здесь $\overline{Q}$ – замыкание множества Q.

Обобщенная задача Коши состоит в отыскании решения уравнения (3.7.1) в области Q при наличии условий

$$\begin{aligned} u|_{\partial Q} &= \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right|_{\partial Q} &= \psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q. \end{aligned} \tag{3.7.7}$$

1.c. Смешанные задачи в цилиндрической области. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим уравнение (3.7.1) в цилиндрической области $Q = (0,\infty) \times \Omega$, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \triangle u = f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in Q = (0,\infty) \times \Omega. \tag{3.7.8}$$

К уравнению (3.7.8) присоединяются условия Коши

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega, \tag{3.7.9}$$

и граничное условие

$$\left.\left(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right|_{\Gamma} = \mu(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{3.7.10}$$

на боковой поверхности $\Gamma = (0,\infty) \times \partial\Omega$, $\partial\Omega$ – граница области Ω, $(\sigma^{(0)})^2 + (\sigma^{(1)})^2 \neq 0$, $\sigma^{(0)}$ и $\sigma^{(1)}$ – заданные коэффициенты.

Задача (3.7.8) – (3.7.10) называется

- *первой смешанной задачей*, если $\sigma^{(0)} \equiv 1$, $\sigma^{(1)} \equiv 0$;
- *второй смешанной задачей*, если $\sigma^{(0)} \equiv 0$, $\sigma^{(1)} \equiv 1$;
- *третьей смешанной задачей*, если $\sigma^{(0)} \equiv 1$, $\sigma^{(1)} \not\equiv 0$;
- *смешанной задачей со смешанными граничными условиями* (3.7.10), если, например, $\sigma^{(0)} \equiv 0$ на $\Gamma^{(1)}$, $\sigma^{(1)} \equiv 0$ на $\Gamma^{(2)}$, где $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ – части границы Γ и такие, что $\Gamma^{(1)} \cap \Gamma^{(2)} = \varnothing$, $\Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)} = \Gamma$, $\Gamma^{(i)} \neq \varnothing$, $i = 1,2$, $\varnothing$ – пустое множество. Могут быть и другие смешанные условия на Γ.

1.d. Смешанные задачи в нецилиндрических областях. Пусть Q — нецилиндрическая область переменных $\boldsymbol{x} = (x_0,x_1,\ldots,x_n)$. Это означает, что граница ∂Q состоит из частей двух видов $\Omega^{(0)}$ и Γ, $\Omega^{(0)}\cup\Gamma = \partial Q$, удовлетворяющих следующим условиям. Обозначим через $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ единичный вектор внешней нормали в точке $\boldsymbol{x} \in \partial Q$. Тогда $\nu_0^2-a^2|\boldsymbol{\nu}\,'|^2 \geqslant c_1 > 0$ и $\nu_0 \leqslant c_2 < 0$ для $(t,\boldsymbol{x}) \in \Omega^{(0)}$ и $\nu_0^2 - a^2|\boldsymbol{\nu}\,'|^2 \leqslant c_3 < 0$ для $\boldsymbol{x} \in \Gamma$.

Смешанные задачи в нецилиндрической области состоят в том, что уравнение (3.7.1) задается в указанной выше области Q, начальные условия (3.7.7) на $\Omega^{(0)}$, и граничные условия (3.7.10) на криволинейной боковой поверхности Γ.

Граница ∂Q области Q может состоять из трех частей: $\Omega^{(0)}$, Γ и $\Omega^{(1)}$. Вектор внешней нормали $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ для точек $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(1)}$ удовлетворяет условиям: $\nu_0^2 - a^2|\boldsymbol{\nu}\,'|^2 \geqslant c_4 > 0$, $\nu_0 \geqslant c_5 > 0$. Постановка смешанных задач состоит в том, что уравнение (3.7.1) задается в области Q, на $\Omega^{(0)}$ — начальные условия (3.7.7), на Γ — граничные условия (3.7.10), а на $\Omega^{(1)}$ условия не задаются.

1.e. Задачи сопряжения однотипных волновых уравнений. Рассмотрим случай цилиндрических областей. Пусть область $\Omega \in \mathbb{R}^n$ состоит из двух подобластей $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ и их общей границы $\gamma^{(0)}$, т. е. $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \cup \gamma^{(0)}, \bar{\Omega}^{(1)} \cap \bar{\Omega}^{(2)} = \gamma^{(0)}$. Обозначим через $Q^{(i)} = (0,\infty) \times \Omega^{(i)}$, $i = 1,2$, цилиндрические области, для которых граница раздела $\Gamma^{(0)} = (0,\infty) \times \gamma^{(0)} = \bar{Q}^{(1)} \cap \bar{Q}^{(2)}$. Рассмотрим простейшую задачу сопряжения. В каждой из областей $Q^{(i)}$ $(i = 1,2,)$ задается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_0^2} - a_i^2 \triangle u^{(i)} = f^{(i)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q^{(i)}. \tag{3.7.11}$$

К уравнениям (3.7.11) присоединяем начальные условия

$$u^{(i)}|_{x_0=0} = \varphi^{(i)}(\boldsymbol{x}'), \quad \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_0}\bigg|_{x_0=0} = \psi^{(i)}(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega^{(i)},\ i = 1,2, \tag{3.7.12}$$

граничные условия на боковой поверхности $\Gamma = (0,\infty) \times \partial\Omega$

$$\left(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\bigg|_{\Gamma} = \mu(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{3.7.13}$$

и условия сопряжения

$$\begin{aligned} \left(k^{(1)}(\boldsymbol{x})u^{(1)} + k^{(2)}(\boldsymbol{x})u^{(2)}\right)\Big|_{\Gamma^{(0)}} &= \mu^{(0)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma^{(0)}, \\ \left(m^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} + m^{(2)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\Bigg|_{\Gamma^{(0)}} &= \mu^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.7.14}$$

Здесь в условии (3.7.13) обозначение $u(\boldsymbol{x})$ следующее: $u(\boldsymbol{x}) = u^{(1)}(\boldsymbol{x})$, если $\boldsymbol{x} \in \partial Q^{(1)}$, и $u(\boldsymbol{x}) = u^{(2)}(\boldsymbol{x})$, если $\boldsymbol{x} \in \partial Q^{(2)}$. В условиях (3.7.13) и (3.7.14) значения $u^{(i)}(\boldsymbol{x})$ и производных $\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ по нормали $\boldsymbol{\nu}$ рассматриваются как предельные значения из $Q^{(i)}$ соответствующих функций, $i = 1,2$.

Аналогично ставится задача сопряжения однотипных волновых уравнений в нецилиндрических областях (см. еще и предыдущий пункт **1.d**).

Замечание 3.7.1. Задачи сопряжения возникают при моделировании явлений в средах с резко отличающимися свойствами.

3.7.2. Задачи для уравнения теплопроводности

Задачи для уравнения теплопроводности формулируются похожим образом как и задачи для волнового уравнения.

2.a. Простейшая задача Коши. В области $Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ для искомой функции $u(\boldsymbol{x})$ рассматривается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} - a^2 \triangle u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q, \tag{3.7.15}$$

при наличии условия Коши на ∂Q

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7.16}$$

2.b. Обобщенная задача Коши. Постановка этой задачи состоит в том, что уравнение теплопроводности (3.7.2) задается в области $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ относительно искомой функции $u(\boldsymbol{x})$, а на границе ∂Q задается значение $u(\boldsymbol{x})$,

$$u|_{\partial Q} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q. \tag{3.7.17}$$

Требования к гиперповерхности таковы, что вектор внешней относительно Q нормали $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = \big(\nu_0(\boldsymbol{x}), \ldots, \nu_n(\boldsymbol{x})\big)$ для всех точек $\boldsymbol{x} \in \partial Q$

удовлетворяет следующему условию: если $\nu_0(\boldsymbol{x}) > 0$, то $|\boldsymbol{\nu}\,'(\boldsymbol{x})| = \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2(\boldsymbol{x})\right)^{1/2} \geqslant c_0 > 0,\ c_0 \in \mathbb{R}$.

2.c. Смешанные задачи в цилиндрических областях. Постановка этих задач для уравнения (3.7.15) такая же, как и постановка смешанных задач для волнового уравнения (3.7.8) – (3.7.10), только вместо двух условий Коши (3.7.9) берется только одно условие Коши в виде

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'),$$

так как производная по x_0 в уравнении теплопроводности (3.7.2) только первого порядка.

2.d. Смешанные задачи в нецилиндрических областях. Эти задачи являются обобщением смешанных задач в случае задания уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях. Здесь области Q могут быть достаточно широкой конфигурации.

Постановка задач следующая. Граница ∂Q области Q разбиваются на две части $\Omega^{(0)}$ и Γ, $\partial Q = \Omega^{(0)} \cup \Gamma$. Требования к $\Omega^{(0)}$ такие как и требования к ∂Q в п. **2.b** при постановке обобщенной задачи Коши. Для векторов внешней нормали $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ для $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ требуется, чтобы $|\boldsymbol{\nu}\,'(\boldsymbol{x})| \geqslant c_0 > 0$. Тогда в области Q задается уравнение теплопроводности (3.7.2), на $\Omega^{(0)}$ задается условие Коши

$$u|_{\Omega^{(0)}} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^{(0)},$$

и на Γ граничное условие вида (3.7.10).

Для смешанных задач для уравнения теплопроводности как и в случае волнового уравнения в п. **1.c** этого параграфа делается классификация на первую, вторую, третью смешанные задачи со смешанными граничными условиями.

2.e. Постановка задач сопряжения однотипных уравнений теплопроводности такая же как и задач сопряжения волновых уравнений вида вида (3.7.11) – (3.7.14) такая же за исключением условий (3.7.12). Здесь берется только одно начальное условие

$$u^{(i)}|_{x_0=0} = \varphi^{(i)}(\boldsymbol{x}').$$

3.7.3. Задачи сопряжения разнотипных уравнений

Здесь сформулируем в качестве примера задачу вида (3.7.11) – (3.7.14). Пусть $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ – области из $\mathbb{R}^{n+1}$, определенные в п. **1.e.**

Для функций $u^{(1)}(\boldsymbol{x})$ и $u^{(2)}(\boldsymbol{x})$ рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_0^2} - a_1^2 \triangle u^{(1)} = f^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q^{(1)}, \\ &\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_0} - a_2^2 \triangle u^{(2)} = f^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.7.18}$$

К уравнениям (3.7.18) присоединяем условия Коши

$$u^{(i)}|_{x_0=0} = \varphi^{(i)}(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega^{(i)}, \quad i = 1,2,$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega^{(1)}.$$

В качестве граничных условий на Γ и условий сопряжения на $\Gamma^{(0)}$ можно рассматривать условия (3.7.13) и (3.7.14) п. **1.e.**

Замечание 3.7.2. По аналогии постановки задач сопряжения для двух дифференциальных уравнений можно рассматривать задачи сопряжения более двух как однотипных, так и разнотипных уравнений.

3.7.4. Задачи для уравнения Пуассона

Задачи для уравнения Пуассона (3.7.3) и Лапласа (3.7.4), которые здесь будут представлены, характеризуются тем, что условия задаются на всей границе области задания основного уравнения. Поскольку уравнение (3.7.4) является частным случаем уравнения Пуассона (3.7.3) и нет отличительной специфики для формулировки задач, то мы будем в дальнейшем рассматривать только уравнение (3.7.3).

4.a. Пусть Ω — ограниченная область n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. В Ω задается уравнение Пуассона

$$\triangle u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega. \tag{3.7.19}$$

К уравнению (3.7.19) присоединяются условия

$$\left(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}) u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{3.7.20}$$

где $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ — единичный вектор внешней относительно области Ω нормали, $(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}))^2 + (\sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}))^2 \neq 0$. Если $\sigma^{(0)} \equiv 1$, $\sigma^{(1)} \equiv 0$, то задача (3.7.19)

– (3.7.20) называется *задачей Дирихле*; если $\sigma^{(0)} \equiv 0$, $\sigma^{(1)} \equiv 1$, задача (3.7.19) – (3.7.20) – *задача Неймана*.

Если Ω является неограниченной областью, при постановке задачи для уравнения (3.7.19) на бесконечности задаются дополнительные условия.

4.b. Пусть на $\overline{\Omega}$ заданы векторные поля $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n-1}$, элементы которых $\boldsymbol{m}^{(1)}(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{m}^{(n-1)}(\boldsymbol{x})$ в точках $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ линейно независимы и являются касательными векторами к гиперповерхности $\partial\Omega$. Область Ω является ограниченной. К уравнению (3.7.19), заданного в Ω, присоединяются граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) \,, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{m}^{(n-1)}}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi^{(n-1)}(\boldsymbol{x}) \,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \qquad (3.7.21)$$

4.c. Задачи сопряжения. Пусть область $\Omega \in \mathbb{R}^n$ состоит из двух подобластей $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ и общей границы $\gamma^{(0)} = \bar{\Omega}^{(1)} \cap \bar{\Omega}^{(2)}$. В каждой из областей $\Omega^{(i)}$ (i=1,2,) задаются уравнения Пуассона

$$\triangle u^{(i)} = f^{(i)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^{(i)}. \qquad (3.7.22)$$

На границе $\partial\Omega$ присоединяются условия (3.7.20), т. е.

$$\left(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), \qquad (3.7.23)$$

и условия сопряжения

$$\begin{aligned} \left(k^{(1)}(\boldsymbol{x})u^{(1)} + k^{(2)}(\boldsymbol{x})u^{(2)}\right)\Big|_{\gamma^{(0)}} &= \psi^{(0)}(\boldsymbol{x}), \\ \left(p^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} + p^{(2)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\Big|_{\gamma^{(0)}} &= \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \qquad (3.7.24)$$

3.7.5. Обобщение волнового уравнения и уравнения теплопроводности

Согласно классификации дифференциальных уравнений с частными производными, изложенной в п. 2.7, волновое уравнение (3.7.1) является гиперболическим уравнением, уравнение (3.7.2) – параболическим, и (3.7.3) – эллиптическим уравнением. Можно сделать некоторые обобщения этих уравнений.

5.a. Относительно независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{D}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{3.7.25}$$

Предположим, что коэффициенты $a^{(ij)}(\boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой области независимых переменных и удовлетворяют условию симметрии $a^{(ij)}(\boldsymbol{x}) = a^{(ji)}(\boldsymbol{x})$ для всех индексов $i,j = 1, \ldots, n$. Характеристический полином

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j$$

представляет собой для всех $\boldsymbol{x}$ положительную квадратичную форму, т. е.

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant c^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{3.7.26}$$

для любых $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $c^{(0)} > 0$.

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \boldsymbol{A}^{(0)}(\mathbf{D})u + \boldsymbol{A}^{(1)}(\mathbf{D})u = f(\boldsymbol{x}) \tag{3.7.27}$$

при выполнении условия (3.7.26) будет гиперболическим относительно вектора $\boldsymbol{\zeta} = (1,0, \ldots ,0)$, где

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(\mathbf{D})u = \sum_{i=0}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + b^{(0)}(\boldsymbol{x})u. \tag{3.7.28}$$

Для уравнения (3.7.27) та же постановка задач, что и для волнового уравнения (3.7.1), описанная в начале этого параграфа. Только здесь при постановке задач, там где в граничных условиях и условиях сопряжения стояла производная по нормали $\partial/\partial\boldsymbol{\nu}$, следует вместо ее рассматривать производную по конормали

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j.$$

Например, вместо условия (3.7.10) в случае уравнения (3.7.27) следует рассматривать условие

$$\Big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big)\Big|_{\Gamma} = \chi(\boldsymbol{x}).$$

5.b. Аналогично, обобщением уравнения теплопроводности (3.7.2) является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} - \boldsymbol{A}^{(0)}(\mathbf{D})u + \boldsymbol{A}^{(2)}(\mathbf{D})u = f(\boldsymbol{x}), \tag{3.7.29}$$

где

$$\boldsymbol{A}^{(2)}(\mathbf{D})u = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + b^{(0)}(\boldsymbol{x})u.$$

При постановке задач для уравнения (3.7.29) повторяем постановку задач для уравнения теплопроводности, заменяя производную по нормали на производную по конормали.

5.c. Пусть $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ и рассматриваем уравнение

$$\tilde{\boldsymbol{A}}^{(0)}(\mathbf{D})u + \tilde{\boldsymbol{A}}^{(1)}(\mathbf{D})u = f(\boldsymbol{x}), \tag{3.7.30}$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{A}}^{(0)}(\mathbf{D})u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big),\ \tilde{\boldsymbol{A}}^{(1)}(\mathbf{D})u = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + b^{(0)}(\boldsymbol{x})u.$$

Предполагается, что характеристический полином $\tilde{\boldsymbol{A}}^{(0)}(\boldsymbol{\xi})$ оператора $\tilde{\boldsymbol{A}}^{(0)}(\mathbf{D})$ удовлетворяет условию (3.7.26). В этом случае уравнение (3.7.30) будет эллиптическим и для него вместо условия (3.7.23) следует присоединять условие

$$\Big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}).$$

3.8. Уравнение неразрывности

Основные уравнения гидродинамики и газовой динамики основаны на законах сохранения массы, количества движения и энергии. Они вместе обычно называются законами сохранения.

Закон сохранения массы описывается дифференциальным уравнением, которое называется уравнением неразрывности, хотя для него больше подходит название "уравнение сохранения массы".

Для вывода уравнения неразрывности обозначим через Ω ограниченную область, которую занимает сложная деформируемая среда в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Это может быть жидкость или газовая среда, не уточняя на данном этапе. Точки $\mathbb{R}^n$, а следовательно и Ω, как и ранее будем обозначать через $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$. В реальности, как правило, $n = 3$. Временную независимую переменную будем обозначать через t. Обозначим через функцию $\rho\colon \Omega \ni (t,\boldsymbol{x}) \to \rho(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ плотность рассматриваемой среды в момент времени t. Функция $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{R} \ni t \to \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ представляет собой траекторию некоторой частицы среды. Производная по временной независимой переменной от функции — это есть скорость изменения функции. Если функция $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ описывает траекторию частицы, то функция $\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R} \ni t \to \boldsymbol{v}(t) = (v_1(t),\ldots,v_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ есть скорость этой частицы, где $v_j(t) = \mathrm{d}x_j(t)/\mathrm{d}t$, $j = 1,\ldots,n$.

Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \ni (t,\boldsymbol{x}) \to f(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ — плотность внешних источников массы. Масса среды в момент времени t, заключенной в объем Ω, будет равна интегралу по этому объему от функции $\rho(t,\boldsymbol{x})$,

$$\int\limits_{\Omega} \rho(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Масса в фиксированном объеме может изменится за счет изменения плотности жидкости (газа), движения частиц среды через границу $\partial\Omega$ и за счет внешних источников с плотностью $f(t,\boldsymbol{x})$. Рассмотрим эти изменения за промежуток времени $\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)}$ и составим баланс. В результате получим уравнение

$$\int\limits_{\Omega}[\rho(t^{(2)},\boldsymbol{x}) - \rho(t^{(1)},\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega} \rho(t,\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega} f(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.8.1}$$

В уравнении (3.8.1) первое слагаемое левой части описывает изменение за счет изменения плотности, второе слагаемое — изменение за счет потока $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\nu})$ через границу $\partial\Omega$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали в точках $\partial\Omega$, правая часть — изменение за счет внешних источников. Преобразуя левую часть уравнения (3.8.1), используя при этом формулу Остроградского, из (3.8.1) получаем уравнение

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial\rho(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})(t,\boldsymbol{x})-f(t,\boldsymbol{x})\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0. \tag{3.8.2}$$

В силу произвольности выбора интервала $(t^{(1)},t^{(2)})$ и области Ω из (3.8.2) следует, что подынтегральное выражение равно нулю

$$\frac{\partial\rho(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x})-f(t,\boldsymbol{x})=0, \tag{3.8.3}$$

т. е. дифференциальное уравнение для любого $t>0$, считая $t=0$ началом отсчета времени, и любой точки $\boldsymbol{x}$ из области, которую занимает среда. Уравнение (3.8.3) называется *уравнением неразрывности*.

В частном случае, если источник массы отсутствует, то уравнение неразрывности — однородное уравнение:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{3.8.4}$$

Если рассматривать стационарное движение сжимаемой жидкости и газа, то $\partial\rho/\partial t=0$ и, следовательно,

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{3.8.5}$$

Если жидкость несжимаемая, то уравнение неразрывности принимает наиболее простую форму:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0. \tag{3.8.6}$$

3.9. Уравнения движения

Помимо скалярных и векторных полей в механике сложной среды рассматривают еще *тензорные* поля, с помощью которых удобно описывать основные свойства материальных полей.

В сложной среде вырежем элементарный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям. На грани этого параллелепипеда со стороны остальной среды действуют поверхностные напряжения. В общем случае на каждую грань $i=1,2,3$ действуют как

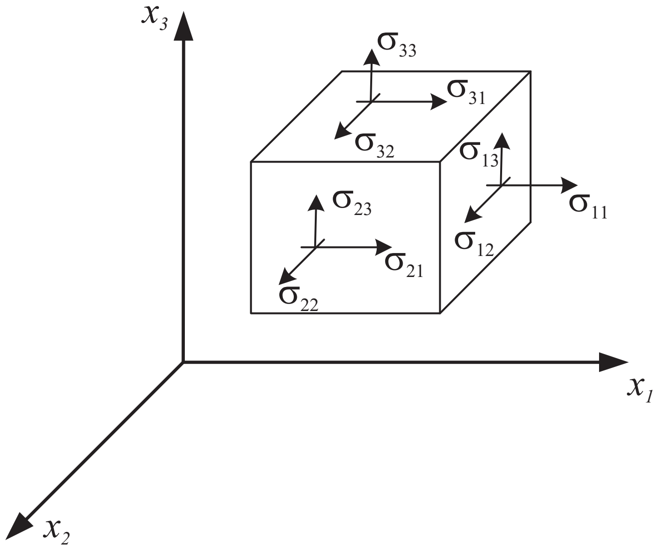

Рис. 3.3. Элементарный параллелепипед и действующие на него напряжения

нормальные, так и касательные напряжения σ_{ij}, $j = 1{,}2{,}3$. Компоненты напряжения можно записать в виде матрицы тензора напряжений

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{3.9.1}$$

Тензор напряжений в общем случае описывается девятью функциями $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)$, $i,j = 1{,}2{,}3$, от трех переменных x_1, x_2, x_3. Однако тензор напряжений обладает одной важной особенностью. Из условия равенства нулю моментов, действующих на элементарный куб объёма, следует, что касательные напряжения с одинаковыми, но расположенными в обратном порядке индексами равны, т. е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i,j = 1{,}2{,}3$. Такой тензор называется симметричным и его можно записать так:

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{3.9.2}$$

В этом случае тензор напряжений выражается через шесть функций от трех независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. Конечно, не во всех случаях только шесть функций образуют тензор напряжений.

Тензор напряжений должен удовлетворять определенному закону пересчета компонент при изменении координат. Это свойство должно быть согласовано с особенностью изменения напряжений, действующих на площадку, при изменении ориентации площадки.

Рассмотрим тензор напряжений. Здесь компоненты напряжений представляют как нормальные σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, так и касательные σ_{12}, σ_{13}, σ_{21}, σ_{23}, σ_{31}, σ_{32} напряжения. Касательные напряжения возникают в следствии вязкости, которой обладают все реальные жидкости. Касательные напряжения практически равны нулю при рассмотрении газов. Поэтому практически для газов считаем $\sigma_{ij} = 0$, $i,j = 1,2,3$, если $i \neq j$. В покоящейся вязкой жидкости касательные напряжения отсутствуют (так как скорости деформации равны нулю), а нормальные напряжения вызваны только давлением $p(\boldsymbol{x})$ и не зависят от ориентации площадки (закон Паскаля). Таким образом, в покоящейся жидкости или в случае идеальных жидкости и газа, тензор напряжений принимает вид

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \tag{3.9.3}$$

т. е. $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера и $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$, $i = j$. Перед p стоит знак минус, так как давление сжимает жидкость или газ, т. е. действует против положительного направления изменения плотности.

При рассмотрении движения вязкой жидкости также целесообразно выделить ту часть нормального напряжения, которая не зависит от вязкости, и записать функции σ_{ij} в виде:

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = -p(\boldsymbol{x})\delta_{ij} + \widetilde{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{x}), \tag{3.9.4}$$

где $\widetilde{\sigma}_{ij}$ зависят только от вязкости. Если $i \neq j$, то $\widetilde{\sigma}_{ij}$ представляет касательные напряжения; если $i = j$, то $\tilde{\sigma}_{ii}$ выражает добавочные нормальные напряжения, вызванные вязкостью жидкости.

Величинами $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})$ представляют компоненты напряжений по трем взаимно перпендикулярным граням, перпендикулярным осям координат. Однако при выводе основных законов движения жидкости или газа необходимо знать напряжения, которые действуют на произвольно ориентированную площадку. Эти напряжения, действующие на произвольно ориентированную площадку, можно выразить через σ_{ij} и направляющие косинусы между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ в точках площадки и координатными осями x_i, $i = 1,2,3$.

Действительно, рассмотрим произвольную элементарную площадку, не параллельную координатным плоскостям декартовой системы x_1, x_2, x_3, как показано на рис. 3.4. Здесь $\boldsymbol{\sigma}_i$, $i = 1, 2, 3$, – векторы напряжений, действующие на площадку ABC, образуют ортогональную систему, где $\boldsymbol{\sigma}_1$ направлен вдоль перпендикулярного к ABC единичного вектора $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, а $\boldsymbol{\sigma}_2$ и $\boldsymbol{\sigma}_3$ находятся в плоскости элементарной площадки ABC. Через направляющие косинусы ν_1, ν_2 и ν_3 вектор $\boldsymbol{\sigma}_1$ с помощью σ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, выражается по формуле $\boldsymbol{\sigma}_1 = (\nu_1\sigma_{11}, \nu_2\sigma_{22}, \nu_3\sigma_{33})$. Аналогично, площадь проекций треугольника ABC на координатные плоскости равны площади ABC, умноженной на соответствующие направляющие косинусы ν_i, $i = 1, 2, 3$. Таким же свойством обладают и касательные векторы $\boldsymbol{\sigma}_2$ и $\boldsymbol{\sigma}_3$, если они соответствующим образом сориентированы.

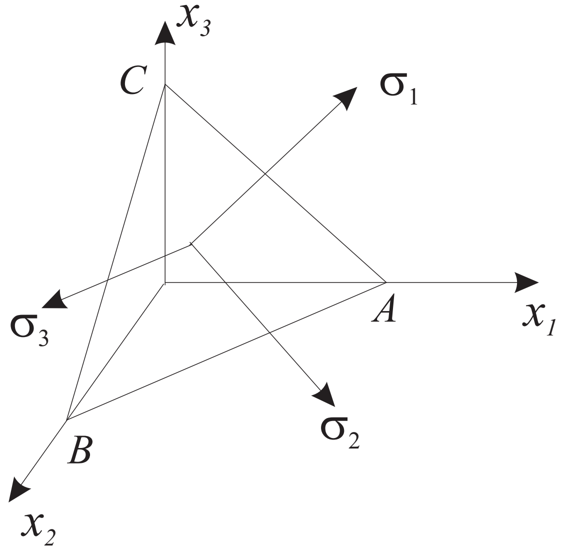

Рис. 3.4. Не параллельная координатным плоскостям элементарная площадка и действующие на нее напряжения

Уравнения движения можно вывести на основании закона об изменении количества движения за некоторый произвольный промежуток времени $(t^{(1)},t^{(2)})$, примененного к некоторой массе движущейся среды.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ – произвольная область с границей $\partial\Omega$. Обозначим через $\boldsymbol{\nu}$ вектор единичной нормали к поверхности $\partial\Omega$. Изменение количества движения за промежуток времени $(t^{(1)}, t^{(2)})$ происходит за счет изменения плотности $\rho(t,\boldsymbol{x})$ и вытекания и втекания массы через поверхность $\partial\Omega$ со скоростью $\boldsymbol{v}$. Масса вещества, вытекающего в единицу времени через поверхность $\mathrm{d}s$ равна $\rho(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}s$. Следовательно, общее изменение количества движения за время $(t^{(1)}, t^{(2)})$ будет определятся в интегральном виде следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega} \left[(\rho \boldsymbol{v})(t^{(2)},\boldsymbol{x}) - (\rho \boldsymbol{v})(t^{(1)},\boldsymbol{x})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t. \tag{3.9.5}$$

Выражение (3.9.5) должно равняться импульсу

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \mathscr{F}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.9.6}$$

действующих сил $\mathscr{F}$. Под $\mathscr{F}$ следует понимать результирующую всех сил, приложенных к жидкости или газу в выделенном объеме Ω. Силы действующие на выделенный объем вещества, можно разделить на *массовые* и *поверхностные*. Плотность массовых сил обозначается через $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$. В качестве таких сил могут быть сила тяжести, силы электромагнитного притяжения и другие. Импульс таких сил определяется выражением

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.9.7}$$

Поверхностными, называют силы, действующие только на поверхность жидкости (газа) выделенного объема Ω со стороны окружающей среды. Эти силы в общем случае действуют как по нормалям, так и по касательным направлениям. Поверхностные силы определяются тензором напряжений $\{\sigma_{ij}\}$ и направляющими косинусами ν_i, $i = 1, 2, 3$. На элементарной площадке $\mathrm{d}s$ действуют поверхностные силы, проекции которых на координатные грани будут определяться формулами

$$\sigma_j \mathrm{d}s = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\sigma}_j)\, \mathrm{d}s,$$

где $\boldsymbol{\sigma}_j = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j})$. Импульс поверхностных сил определяется формулой

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \int\limits_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s, \tag{3.9.8}$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)$. А теперь количество изменения движения (3.9.5) приравняем сумме импульсов (3.9.7) и (3.9.8) действующих сил на жидкость (газ) выделенного объема Ω за промежуток времени $(t^{(1)}, t^{(2)})$. В результате получим интегральное уравнение баланса в векторном виде

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\nu})(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=
=\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s. \tag{3.9.9}$$

От уравнения (3.9.9) перейдем известным уже путем к дифференциальному. Чтобы применить формулу Остроградского, спроектируем уравнение (3.9.9) на координатные оси Ox_j, $j=1,2,3$. В результате получим следующие скалярные уравнения движения в интегральной форме:

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}v_j\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=
=\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega}f_j(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma}_j,\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s,\quad j=1,2,3. \tag{3.9.10}$$

К уравнениям (3.9.10) применяем формулу Остроградского. Получим уравнения, в которых область интегрирования во всех слагаемых одна и та же. В силу произвольного выбора промежутка $(t^{(1)},t^{(2)})\subset\mathbb{R}$ и области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ делаем заключение, что подынтегральные выражения равны нулю, т.е.получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j)+\operatorname{div}(v_j\rho\boldsymbol{v})=f_j+\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_j,\quad j=1,2,3, \tag{3.9.11}$$

т. е. уравнения движения, которые справедливы для любых $(t,\boldsymbol{x})\in$ $\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^3$.

Форма записи уравнений движения в форме (3.9.11) имеет преимущества при разработке численных методов движения сплошной среды.

При аналитическом решении или исследовании на разрешимость задач для уравнений движения (3.9.11) обычно удобнее их записать в другом виде. Для этого раскроем производные произведений слагаемых в левой части уравнений (3.9.11). В результате получим

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}v_j+v_j\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_j\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})+\rho\sum_{i=1}^{3}v_i\frac{\partial}{\partial x_i}v_j=f_j+\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_j. \tag{3.9.12}$$

Заметим, что сумма второго и третьего слагаемых в левой части уравнения (3.9.12) равна нулю в силу уравнения неразрывности (3.8.4). Тогда получим

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \frac{1}{\rho} f_j + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_j, \; j = 1, 2, 3. \tag{3.9.13}$$

В уравнениях (3.9.13) целесообразно явно выделить член, зависящий от давления $p(t,\boldsymbol{x})$, воспользовавшись представлением напряжений σ_{ij} по формулам (3.9.4). Таким образом,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} = - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (p\, \delta_{ij}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{\sigma}_{ij} =$$
$$= - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{\sigma}_{ij}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. В силу последних соотношений уравнения (3.9.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} f_j + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \widetilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.9.14}$$

Уравнения (3.9.14) называются уравнениями движения вязкой жидкости. Последние слагаемые правых частей этих уравнений учитывают влияние сил вязкости.

Для жидкости, лишенной вязкости (идеальная жидкость), и большинства газов последние члены уравнений (3.9.14) равны нулю. В этом случае уравнения движения записываются в виде

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} f_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.9.15}$$

и называются *уравнениями Эйлера* (1755г).

3.10. Уравнение энергии

Третьим основным уравнением гидрогазодинамики является уравнение энергии. При движении жидкости (газа) массовые и поверхностные силы совершают работу. К жидкости (газу) может подводиться теплота или другие источники энергии. Вследствие этого может изменятся как кинетическая, так и внутренняя (потенциальная) энергия изучаемого вещества.

Подход вывода уравнения энергии такой же, как и в предыдущих случаях при выводе других уравнений. Выделим произвольный объем Ω жидкости или газа и запишем изменения кинетической и внутренней энергии за промежуток времени $(t^{(1)},t^{(2)})$, происходящие за счет разных источников.

Введем следующие обозначения:

- $\boldsymbol{v}\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = (v_1(t,\boldsymbol{x}),v_2(t,\boldsymbol{x}),v_3(t,\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^3$ – вектор скорости частиц в момент времени t в точке $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$;
- $\rho\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to \rho(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – плотность жидкости или газа;
- $p\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to p(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – давление;
- $\varepsilon\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to \varepsilon(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – удельная внутренняя энергия;
- $q\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to q(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – мощность объемных источников энергии;
- $\boldsymbol{w}\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$ – вектор плотности теплового потока;
- $\boldsymbol{f}\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$ – плотность внешних сил;
- $T\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \ni (t,\boldsymbol{x}) \to T(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – температура.

Из физических соображений можно записать изменение энергии за время $(t^{(1)}, t^{(2)})$ вещества, ограниченного объемом Ω. Эта величина следующая:

$$\begin{split}\int\limits_{\Omega}\Big[\big(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+\rho\varepsilon\big)(t^{(2)},\boldsymbol{x})-\big(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+\rho\varepsilon\big)(t^{(1)},\boldsymbol{x})\Big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\\ +\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}\big(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+\rho\varepsilon\big)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.\end{split}\tag{3.10.1}$$

В (3.10.1) первый интеграл выражает изменение параметров потока (плотности, скорости и т. д), второй интеграл представляет скорость выноса энергии через границу $\partial\Omega$ текущей жидкостью (газом).

Источником изменения энергии, определяемого выражением (3.10.1), является работа, производимая массовыми и поверхностными силами, а также источниками и другими видами. Запишем импульсы всех этих источников, совершенные за время $(t^{(1)},t^{(2)})$. Тогда

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega}\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.10.2}$$

есть импульс за счет внешних сил. Объемные источники дадут импульс, равный

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\Omega}(\rho q)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.10.3}$$

Поверхностные источники будут выражаться через тензор напряжений, а именно:

$$\begin{aligned}\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t &= \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}v_j(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\sigma}_j)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}v_j\sigma_{ij}\nu_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.10.4}$$

И наконец, изменение энергии за счет теплового потока с плотностью $\boldsymbol{w}$. Оно запишется в виде следующего выражения:

$$\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\int\limits_{\partial\Omega}w_i\nu_i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s, \tag{3.10.5}$$

где w_i — проекция вектора $\boldsymbol{w}$ на координатные оси. Составляющие w_i, $i = 1,2,3$, вектора $\boldsymbol{w}$ можно выразить через градиент температурного поля и коэффициент теплопроводности k формулой Фурье:

$$w_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3.$$

Выражения (3.10.1) – (3.10.5) в совокупности порождают уравнение энергии в интегральной форме

$$\begin{aligned}&\int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\left[\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2+\rho\varepsilon\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2+\rho\varepsilon\right)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}}\left[\int\limits_{\Omega}(\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{f})+\rho q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}v_j\nu_i-\sum_{i=1}^{3}w_i\nu_i\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right],\end{aligned} \tag{3.10.6}$$

где $|\boldsymbol{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$. Заменив в (3.10.6) интегралы по поверхности $\partial\Omega$ на интегралы по объему с помощью формулы Остроградского точно также, как это было сделано в предыдущих параграфах, получим уравнение энергии в дифференциальной форме:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \rho\varepsilon\right) + \operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{2}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \rho\varepsilon\right)\boldsymbol{v}\right] = \\ = \rho(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) + \rho q + \sum_{j=1}^{3} \operatorname{div}(v_j\boldsymbol{\sigma}_j) - \operatorname{div}\boldsymbol{w}.\end{gathered} \tag{3.10.7}$$

В силу формулы (3.9.4)

$$\sum_{j=1}^{3} \operatorname{div}(v_j\boldsymbol{\sigma}_j) = -\operatorname{div}(p\boldsymbol{v}) + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{\sigma}_{ij}v_j).$$

В силу последнего выражения уравнение (3.10.7) запишется в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \rho\varepsilon\Big) + \operatorname{div}\Big[\Big(\frac{1}{2}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \rho\varepsilon\Big)\boldsymbol{v}\Big] + \operatorname{div}(p\boldsymbol{v}) = \\ = \rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{f}) + \rho q - \operatorname{div}\boldsymbol{w} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{\sigma}_{ij}v_j).\end{gathered} \tag{3.10.8}$$

Уравнение (3.10.8) и есть уравнение энергии гидрогазодинамики.

3.11. О задачах в гидродинамике и газовой динамике

В предыдущих параграфах 3.8 — 3.10 выведены основные уравнения гидродинамики и газовой динамики, которые используются в процессе моделирования различного рода явлений жидкостей и газов. В гидродинамике уравнения неразрывности, движения и энергии, как правило, используются с учетом вязкости и в этом случае их называют *уравнениями Новье—Стокса*. В газовой динамике, в основном, используют эти уравнения без учета вязкости. Они имеют более простую структуру и в литературе они называются *уравнениями Эйлера*. В дальнейшем их будем называть *уравнениями гидрогазодинамики*.

При постановке задач, если мы используем уравнения гидродинамики, получаем систему пяти нелинейных скалярных уравнений относительно шести неизвестных функций $v_1(t,\boldsymbol{x})$, $v_2(t,\boldsymbol{x})$, $v_3(t,\boldsymbol{x})$, $\rho(t,\boldsymbol{x})$, $p(t,\boldsymbol{x})$, $\varepsilon(t,\boldsymbol{x})$. Здесь временную переменную t считаем больше нуля при нулевом начале отсчета, $t \in (0,\infty)$, а $\boldsymbol{x}$ изменяется в той области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, которую занимает изучаемая жидкость или газ. К системе уравнений гидродинамики присоединяются начальные условия, граничные, условия сопряжения или другие условия относительно искомых функций.

Отметим, что система основных уравнений насчитывает пять уравнений, а искомых функций шесть. Поэтому систему уравнений надо дополнить до полной системы. При постановке задач моделирования к системе уравнений гидродинамики присоединяется еще какое-нибудь уравнение. Такими уравнениями бывают уравнения, которые выражают функциональную зависимость давления от плотности, или удельной внутренней энергии от плотности, т. е.

$$p = p(\rho, T), \tag{3.11.1}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T). \tag{3.11.2}$$

Могут быть и другие уравнения.

3.12. Уравнения Максвелла (основные уравнения электродинамики)

Моделирование в электродинамике основано на понятии *электромагнитного поля*. Трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ заполнено полностью или частично материальной средой, точки которой описываются в декартовой системе с помощью координат $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3)$. Временную независимую переменную будем обозначать через x_0. В общем случае независимые переменные будут $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, от которых рассматриваются функции, характеризующие электромагнитное поле.

Рассматриваемая среда предполагается изотропной, и ее электромагнитные свойства характеризуются диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\boldsymbol{x})$, магнитной проницаемостью $\mu(\boldsymbol{x})$, электропроводимостью $\sigma(\boldsymbol{x})$. В областях пространства $\mathbb{R}^3$, где материальная среда отсутствует (вакуум), функции $\varepsilon(\boldsymbol{x})$, $\mu(\boldsymbol{x})$ и $\sigma(\boldsymbol{x})$ принимают постоянные значения. В общем случае $\varepsilon(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x}), \sigma(\boldsymbol{x})$ – кусочно-дифференцируемые ограниченные функции, причем $\varepsilon(\boldsymbol{x}) > 0, \mu(\boldsymbol{x}) > 0$ и $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$. Возможен предельный случай бесконечно большой проводимости (идеальный проводник), тогда электромагнитные поля рассматриваются только вне области идеального проводника. Кроме всего этого, полезно понятие плотности заряда $\rho(\boldsymbol{x})$, которая определяется при помощи предельного соотношения

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \lim_{\triangle\mathbf{v}\to 0} \frac{\triangle q}{\triangle\mathbf{v}},$$

где $\triangle q$ — заряд, содержащийся в электромагнитном объеме $\triangle\mathbf{v}$.

Подобно предыдущему плотность тока выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{j} = \lim_{\triangle s\to 0} \boldsymbol{\nu}\frac{\triangle I}{\triangle s},$$

где $\triangle s$ — элементарная площадка, ориентированная перпендикулярно движению зарядов, $\triangle I$ — ток, пересекающий эту площадку, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к площадке.

Электромагнитные поля описывают при помощи векторных функций координат x_1, x_2, x_3 и времени x_0 с помощью следующих величин:

- $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ — напряженность электрического поля;
- $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ — магнитная индукция;
- $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ — напряженность магнитного поля;
- $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$ — электрическая индукция.

Физическую сущность этих и введенных ранее величин описывать не будем. Ее можно найти в литературе по электродинамике. Но чтобы составить исходные представления об этих векторах, обратимся к хорошо изученному кругу явлений, в которых участвуют тела, принимаемые за точечные заряды. На точечный заряд в электромагнитном поле действует сила Лоренца

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]),$$

где q — величина заряда, $\boldsymbol{v}$ — скорость движения заряда, $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение.

Фундаментальные законы электромагнитизма формулируются в виде *уравнений Максвелла*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial x_0} + \boldsymbol{j},\\
&\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x_0},\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.
\end{aligned} \tag{3.12.1}$$

Кроме уравнений (3.12.1) имеется связь

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{j} &= \sigma \boldsymbol{E}. \end{aligned} \tag{3.12.2}$$

Формулируя закон сохранения заряда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_0},$$

получим уравнение под названием "*уравнения непрерывности*".

Основными классами электромагнитных явлений соответствуют частные виды уравнений Максвелла (3.12.1) – (3.12.2). Простейшими являются неизменяемые со временем поля. В этом случае система Максвелла распадается на две независимые системы

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \rho, \\ \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E}, \end{aligned} \tag{3.12.3}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \\ \boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H}. \end{aligned} \tag{3.12.4}$$

Система (3.12.3) называется *уравнениями электростатики*, а (3.12.4) – *уравнениями магнитостатики*.

При постановке задач для системы уравнений электродинамики присоединятся граничные условия, условия излучения, условия сопряжения на границах раздела, начальные условия, которые выводятся из геометрических и физических соображений при изучении тех или иных явлений электродинамики.

3.13. Уравнение Гельмгольца

При рассмотрении электромагнитных полей, которые изменяются гармонически во времени, используется понятие *комплексной диэлектрической проницаемости*

$$\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon(\boldsymbol{x}) + i\sigma(\boldsymbol{x})/\omega, \quad i = \sqrt{-1},$$

где ω — частота изменения поля. Рассмотрим электромагнитные поля, гармонически изменяющиеся во времени по закону $e^{-i\omega x_0}$. Источником поля является электрический ток, изменяющийся во времени по закону $e^{-i\omega x_0}$ и характеризующийся распределением плотности тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$. В этом случае электромагнитное поле $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ и плотность тока $\boldsymbol{j}$ связаны между собой уравнениями Максвелла

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} = -i\omega\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}, \tag{3.13.1}$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = i\omega\mu\boldsymbol{H}. \tag{3.13.2}$$

Из уравнений (3.13.1) и (3.13.2) получаем уравнение

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{i\omega\mu}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\right) = -i\omega\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}. \tag{3.13.3}$$

Так как

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\right) = \frac{1}{\mu}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} \times \mathbf{grad}\,\frac{1}{\mu},$$

а $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \triangle\boldsymbol{E}$, то

$$\triangle\boldsymbol{E} + k^2\boldsymbol{E} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} \times \left(\mu\,\mathbf{grad}\,\frac{1}{\mu}\right) - \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -i\omega\mu\boldsymbol{j}, \tag{3.13.4}$$

где $k^2 = \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu$. Из уравнения Максвелла

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}\Big(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\,\mathbf{grad}\,\tilde{\varepsilon}\Big) + \frac{i}{\tilde{\varepsilon}}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}. \tag{3.13.5}$$

Объединяя (3.13.4) и (3.13.5), получим уравнение для $\boldsymbol{E}$

$$\begin{aligned}\triangle\boldsymbol{E} + k^2\boldsymbol{E} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} \times \left(\frac{1}{\mu}\,\mathbf{grad}\,\mu\right) + \mathbf{grad}\Big(\boldsymbol{E}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\,\mathbf{grad}\,\tilde{\varepsilon}\Big) = \\ = -\,i\omega\mu\boldsymbol{j} + \mathbf{grad}\Big(\frac{i}{\tilde{\varepsilon}}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}\Big).\end{aligned} \tag{3.13.6}$$

В случае постоянных $\tilde{\varepsilon}$ и μ получаем из (3.13.6) уравнение

$$\triangle\boldsymbol{E} + k^2\boldsymbol{E} = -i\omega\mu\boldsymbol{j} + \mathbf{grad}\Big(\frac{i}{\tilde{\varepsilon}}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}\Big). \tag{3.13.7}$$

Уравнение вида

$$\triangle u + k^2 u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.13.8}$$

называется *уравнением Гельмгольца*, параметр $k^2 > 0$, $\triangle$ — оператор Лапласа, f — заданная функция. Из предыдущих рассуждений мы получили, если записать (3.13.7) через скалярные уравнения, уравнение типа Гельмгольца.

Уравнение Гельмгольца (3.13.8) получается при описании волновых процессов, связанных с установившимися колебаниями (электромагнитными, акустическими, механическими и др.). Поэтому его еще называют волновым уравнением, хотя оно, согласно классификации, относится к эллиптическому типу, а волновое уравнение в общем случае — к гиперболическому типу.

Еще для примера, когда возникает уравнение Гельмгольца, рассмотрим колебания мембраны, занимающей площадь Ω на $\mathbb{R}^2$. Предположим, что колебания мембраны происходят под действием периодических во времени сил. Как известно, соответствующее дифференциальное уравнение, описывающее смещение $\tilde{u}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, внутренних точек мембраны $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2)$ в перпендикулярном относительно ее плоскости направлении, имеет вид

$$\triangle \tilde{u} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_0^2} - f(\boldsymbol{x}') \cos \omega x_0, \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega. \tag{3.13.9}$$

При наличии заданной периодической функции $\cos \omega x_0$ удобно пользоваться вместо нее комплексной функцией $e^{i\omega x_0}$. В этом случае вместо уравнения (3.13.9) следует рассматривать уравнение

$$\triangle u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - f(\boldsymbol{x}') e^{i\omega x_0}, \tag{3.13.10}$$

где $\triangle = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, функция $\tilde{u}$ уравнения (3.13.9) является действительной частью решения u уравнения (3.13.10).

Решение $u(\boldsymbol{x})$ уравнения (3.13.10) будем искать в виде произведения

$$u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{x}') e^{i\omega x_0} \tag{3.13.11}$$

через новую функцию v. С физической точки зрения функция v описывает распределения амплитуды установившихся колебаний. Если функцию u вида (3.13.11) подставить в (3.13.10), получим относительно функции v уравнение Гельмгольца

$$\triangle v + k^2 v = -f(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \tag{3.13.12}$$

Если на границе $\partial\Omega$ области Ω силы равны нулю, то для v получаем граничное условие

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Если на границе $\partial\Omega$ совершаются периодические колебания с той же частотой ω

$$u\big|_{\partial\Omega,\ x_0>0} = \varphi(\boldsymbol{x}')e^{i\omega x_0}, \quad \boldsymbol{x}' \in \partial\Omega,$$

то для v получаем условие Дирихле

$$v\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}').$$

Для уравнения (3.13.12) могут быть другие задачи, так как на $\partial\Omega$ могут быть и другие условия.

При изучении электромагнитных волн в разных средах возникают задачи с условиями сопряжения, в том числе и для уравнений Гельмгольца.

При постановке граничных задач для уравнения Гельмгольца в случае неограниченных областей на бесконечности учитываются условия излучения, которые требуют стремления к нулю решения при $\|\boldsymbol{x}'\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$.

3.14. Другие уравнения математической физики

Конечно, собрать все уравнения математической физики воедино — является неразрешимой задачей. В этом параграфе будут приведены еще некоторые дифференциальные уравнения, которые описывают конкретные физические явления и которые отличаются от предыдущих.

3.14.1. Уравнения равновесия балки

Изменение прогиба балки u будем рассматривать в пределах одной плоскости, предполагая, что на других направлениях прогибы отсутствуют. Таким образом, если ось отсчета сечений направлять вдоль балки, то функция u будет только функцией от $x \in \mathbb{R}$.

Введем обозначения:

- $E(x)$ – модуль упругости (модуль Юнга);
- $I(x)$ – момент инерции поперечного сечения относительно оси изгиба;
- $Q(x)$ – коэффициент упругости опоры;
- $f(x)$ – функция, представляющая вертикальную нагрузку.

Если на основании закона об изменении количества движения рассматривать поперечные колебания балки с учетом сил упругости, то у нас получится уравнение не второго, а четвертого порядка. Здесь балка находится на упругой опоре под действием вертикальных сил. Если потом рассматривать стационарный процесс, то уравнение будет уравнением четвертого порядка вида

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big(E(x)I(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\Big) + Q(x)u = f(x). \tag{3.14.1}$$

Для уравнения (3.14.1) можно рассматривать разные граничные задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть балка единичной длины, т. е. $x \in (0,1)$ в уравнении (3.14.1). Если концы балки зажаты, то имеем граничные условия

$$u(0) = \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} = u(1) = \frac{\mathrm{d}u(1)}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{3.14.2}$$

Если балка находится на простой опоре, то здесь граничные условия имеют вид

$$u(0) = \frac{\mathrm{d}^2u(0)}{\mathrm{d}x^2} = u(1) = \frac{\mathrm{d}^2u(1)}{\mathrm{d}x^2} = 0. \tag{3.14.3}$$

Таким образом, для уравнения (3.14.1) имеем две простейшие задачи (3.14.1) – (3.14.2) и (3.14.1), (3.14.3).

3.14.2. Уравнение равновесия пластины

Как и при выводе уравнения поперечных колебаний мембраны можно рассматривать поперечные колебания пластины с учетом сил упругости. Здесь также используется закон об изменении количества движения и импульса действующих сил. В результате получается уравнение четвертого порядка. Если рассмотреть стационарный процесс, то производных по временной переменной не будет и функция $u(\boldsymbol{x})$, описывающая прогиб пластины, будет зависеть от переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Дифференциальное уравнение равновесия пластины имеет вид

$$\triangle^2 u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.14.4}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа и $\triangle^2 = \partial^4/\partial x_1^4 + 2\partial^4/\partial x_1^2 \partial x_2^2 + \partial^4/\partial x_2^4$, Ω — область из $\mathbb{R}^2$, которую занимает рассматриваемая пластина, функция $f(\boldsymbol{x})$ описывает распределение внешних перпендикулярных сил, действующих на пластину.

К уравнению (3.14.4) присоединим нетривиальные граничные условия. Пусть

$$\mathscr{M} u\big|_{\partial\Omega} = \sigma \triangle u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2},$$

$$\mathscr{N} u\big|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial \triangle u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right],$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор в касательной плоскости, т. е. скалярное произведение $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\tau}) = 0$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$, σ — параметр и $0 < \sigma < 1$.

Задача, состоящая из уравнения (3.14.4) и граничных условий

$$u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

описывает прогиб пластины, закрепленной по краю.

Уравнение (3.14.4) и граничные условия

$$u\big|_{\partial\Omega} = g(\boldsymbol{x}), \quad \mathscr{M} u\big|_{\partial\Omega} = h(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,$$

описывают прогиб пластины $u(\boldsymbol{x})$, имеющей заданное положение $g(\boldsymbol{x})$ вдоль края и заданный момент $h(\boldsymbol{x})$.

Уравнение (3.14.4) и условия

$$\mathscr{M} u \,|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathscr{N} u \,|_{\partial\Omega} = 0,$$

соответствуют задаче отыскания прогиба пластины $u(\boldsymbol{x})$ в точках $\boldsymbol{x}$ со свободной границей.

3.14.3. Уравнение Шредингера

Возникновение квантовой теории света предшествовало развитию квантовой механики. Моделирование явлений, связанных с распространением света, в конце прошлого столетия преобладало с точки зрения волновой по сравнению с корпускулярной. Победе волновой точке зрения придавала созданная теория Максвелла.

Триумф электромагнитной теории света, однако, был неполным. Целый ряд важных явлений , относящихся к испусканию и поглощению света не укладывался в рамки волновых представлений. Закон распределения энергии в спектре черного тела, выведенный на основе волновой теории, оказывался в несогласии с опытом и содержал некоторые внутренние противоречия.

В 1901 годе М.Планк сформулировал совпадающий с опытом закон распределения энергии в спектре излучения абсолютного черного тела, находящегося в тепловом равновесии. Этот закон явился исходным пунктом создания квантовой теории. В основе его лежало допущение о прерывном характере испускания и поглощения света веществом, об испускании и поглощении света *квантами света*(конечными порциями). Энергия ε такого кванта света пропорциональна частоте колебаний света ω и выражается равенством

$$\varepsilon = h\omega, \tag{3.14.5}$$

где $h = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ эрг$\cdot$ сек и называется постоянной Планка. Кванту света еще приписывается импульс $p = \epsilon/c$, направление которого $\boldsymbol{p}$ совпадает с направлением распространения света, c — скорость распространения света. Тогда

$$\boldsymbol{p} = h\boldsymbol{k}, \tag{3.14.6}$$

где волновой вектор $\boldsymbol{k} = 2\pi\boldsymbol{\nu}/\lambda$, где λ — длина волны, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к световой волне. Формулы (3.14.5) и (3.14.6) являются основными уравнениями квантовой теории света. Пусть в некоторый момент времени x_0 волновая функция $u(x_0,x_1,x_2,x_3)$ описывает состояние ансамбля частиц с координатами $\boldsymbol{x}^{'} = (x_1,x_2,x_3)$. С помощью этой волновой функции $u(\boldsymbol{x})$ мы можем вычислять вероятность результатов измерения различных механических величин для момента времени x_0. В этом смысле говорят, что волновая функция $u(\boldsymbol{x})$ определяет состояние частицы в момент времени x_0.

Для определения волновой функции $u(\boldsymbol{x}) = u(x_0,\boldsymbol{x}^{'})$ в любой момент времени x_0 и любой точке $\boldsymbol{x}^{'} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ выведено дифференциальное уравнение

$$ih\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{h^2}{2m_0}\Delta u = U(\boldsymbol{x})u, \tag{3.14.7}$$

где h — постоянная Планка, m_0 — масса частицы, $U(\boldsymbol{x})$ — потенциальная энергия частицы, $i = \sqrt{-1}$, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$. Уравнение (3.14.7) называется *уравнением Шредингера*.

Особенностью уравнения Шредингера является наличие мнимой единицы перед производной $\partial u/\partial x_0$. Если его сравнить классическим уравнением под названием "уравнением обратной теплопроводности"

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + a^2 \Delta u = f(\boldsymbol{x}), \tag{3.14.8}$$

то можно выяснить следующее. Уравнение (3.14.8) описывает необратимые процессы, например, диффузию, теплопроводность. Это означает то , что задание начального условия $u(0,\boldsymbol{x}') = \varphi(\boldsymbol{x}')$ уравнения (3.14.8) не определяет функцию $u(\boldsymbol{x})$ для $x_0 > 0$. Благодаря коэффициенту i уравнение Шредингера (3.14.7) имеет периодические решения и другие корректные задачи с начальным условием.

3.14.4. Солитоны и нелинейные волновые уравнения

Открытие солитона дает много его замечательных свойств и богатство математических методов описания. История берет свое начало с наблюдения в 1834 году Джоном Скоттом Расселом "большой уединенной волны". Свое наблюдение Дж.С.Рассел описывает так:

"Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила вдоль узкого канала пара лошадей, когда внезапно баржа остановилась — вся масса воды в канале пришла в движение; вода собралась у носа корабля в состоянии волнения, затем вдруг оторвалась от него и покатилась с большой скоростью, приняв вид большого уединенного возвышения; округлый гладкий четко выраженный холм воды продолжал свое движение по каналу без видимого изменения формы или уменьшения скорости. Я бросился за этой волной верхом на лошади и догнал ее, когда она все еще двигалась со скоростью около восьми или девяти миль в час, сохраняя первоначальную форму, и имела около тридцати футов в длину и от фута до полутора футов в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял ее в изгибах канала. Так в августе месяце 1834 г. произошла моя первая случайная встреча с этим необыкновенным и прекрасным явлением, которое я назвал Волной Переноса ..."

Привлекательной чертой теории солитонов является тесная связь физики и математики. Сама теория развивалась из наблюдения физического явления, в основе которого, как теперь известно, лежит односолитонное решение уравнения Кортевега-де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = 6u\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}. \tag{3.14.9}$$

Последующая история солитонов есть на самом деле история трех нелинейных эволюционных уравнений:

- уравнения Кортевега-де Фриза (3.14.9);
- нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2u|u|^2 = 0, \tag{3.14.10}$$

- уравнения sin-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \sin u. \tag{3.14.11}$$

Уравнение (3.14.11) с помощью невырожденной замены независимых переменных $(x_1 + x_0)/2 \sim x_1$, $(x_1 - x_0)/2 \sim x_0$ принимает форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1} = \sin u.$$

Для описания и изучения солитонных явлений используются модифицированные уравнения и другие нелинейные уравнения. В теории нелинейных уравнений солитонов в последнее время появляются обобщение на случай, когда рассматривается не одна пространственная переменная, а большее количество независимых пространственных переменных.

Приложения солитонных уравнений нашли свое место в других областях физики таких, как в физике твердого тела, квантовой теории поля, в физике плазмы и др.

При изучении явлений с помощью солитонных уравнений появляются задачи для упомянутых выше уравнений, к которым для искомой функции присоединяются дополнительные условия: начальные, периодичность и др.

3.14.5. Уравнения переноса

Кинетические уравнения (уравнения переноса) возникли в кинетической теории газов. Родоначальником их был Больцман. Затем кинетические уравнения использовались в моделировании задач нейтронной физики, в вопросах прохождения нейтронов через вещество.

Кинетическое уравнение Больцмана, описывающее неравновесные процессы в газах малой плотности, является одним из самых важных уравнений физической кинетики. Разновидностями уравнения Больцмана для ионизированного газа (плазмы) являются *кинетические уравнения Л.Д. Ландау и А.А. Власова.*

Различные обобщения уравнения Больцмана, так называемые *кинетические уравнения,* в том числе линеаризованное уравнение Больцмана, применяются при изучении таких математически родственных явлений, как перенос электронов в твердых телах и плазме, перенос нейтронов в ядерных реакторах, перенос фононов в сверхтекучих жидкостях, перенос излучения, перенос ионов в твердом теле при ионной имплантации. Кинетические уравнения более точно описывают явления переноса по сравнению с уравнениями Эйлера и Навье–Стокса.

Линеаризованное уравнение Больцмана (интегро-дифференциальное) в некоторых ситуациях может быть заменено (аппроксимировано) *уравнением* в частных производных *Фоккера–Планка.*

Рассмотрим вывод линейного кинетического уравнения, описывающего перенос нейтронов в трехмерной области. Пусть $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ – функция распределения нейтронов по времени x_0, по координатам $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3)$ и по скоростям $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}')$. В объеме $\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ и в интервале скоростей $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})$ число нейтронов будет $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$, где $\mathrm{d}\boldsymbol{v} = (\mathrm{d}v_1, \mathrm{d}v_2, \mathrm{d}v_3)$. Согласно определению функции $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ количество нейтронов в точке $\boldsymbol{x}'$ в момент времени x_0 равно значению интеграла

$$\int\limits_{\boldsymbol{v}} u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

где интегрирование ведется по всем возможным значениям скорости $\boldsymbol{v}$.

Подсчитаем изменение за время $\mathrm{d}x_0$ число нейтронов, имеющих скорости в интервале $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v})$ в некотором фиксированном элементе объема $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$.

Итак, $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ – количество нейтронов уйдет из рассматриваемого объема $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$, так как здесь нейтроны имеют отличную от нуля скорость. Далее, $u(x_0,\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{v}\mathrm{d}x_0,\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ – количество нейтронов придет в элемент $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ (по инерции). Здесь полагаем что диаметр объема $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ намного меньше произведения $|\boldsymbol{v}|$ на dx_0.

При взаимодействии с ядрами произойдет уменьшение количества нейтронов в рассматриваемом объеме $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ соответственно на величины:

- $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})a_s(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ – за счет рассеяния;
- $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})a_c(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ – за счет поглощения;
- $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})a_j(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ – за счет деления.

Таким образом, суммарное уменьшение за счет всех трех перечисленных выше процессов будет $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})a(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$, где $a(\boldsymbol{v}) = a_s(\boldsymbol{v})+$ $+a_c(\boldsymbol{v}) + a_j(\boldsymbol{v})$.

Пусть при рассеянии нейтрон изменяет скорость с $\tilde{\boldsymbol{v}}$ на $\boldsymbol{v}$, при этом, $w_s(\tilde{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ – вероятность того, что нейтрон, имеющий скорость $\boldsymbol{v}$, рассеится после соударения с ядром и получит скорость в интервале скоростей $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v})$. Тогда число нейтронов, скорость которых $\tilde{\boldsymbol{v}}$ в результате рассеяния на ядрах, содержащихся в $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$, изменится по величине и направлению так, что станет $\boldsymbol{v}$, будет равно интегралу

$$\int\limits_{\tilde{\boldsymbol{v}}}[u(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{v}})a_s(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}w_s(\tilde{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tilde{v}]\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{v}}$$

по всевозможным значениям скоростей $\tilde{\boldsymbol{v}}$.

Число нейтронов со скоростью $\boldsymbol{v}$, появившихся в результате деления ядер нейтронами со скоростью $\widetilde{\boldsymbol{v}}$, равно

$$\int\limits_{\tilde{\boldsymbol{v}}}[u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})a_f(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}w_f(\tilde{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v}\mu(\tilde{\boldsymbol{v}})]\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{v}}.$$

Здесь $w_f(\tilde{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ – вероятность иметь испущенному нейтрону скорость в интервале $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v})$, если деление вызвал нейтрон со скоростью $\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\mu(\tilde{\boldsymbol{v}})$ – среднее число вторичных нейтронов, возникающих от одного поглощенного нейтрона, имевшего скорость $\tilde{\boldsymbol{v}}$.

Посторонние источники нейтронов дают количество нейтронов равное $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Уравнение баланса нейтронов запишется в виде

$$\begin{gathered}
u(x_0,\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{v}\mathrm{d}x_0,\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\boldsymbol{v} - u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}- \\
-u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})a(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \int u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})a_s(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}w_s(\tilde{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{v}}+ \\
+\int u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})a_f(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}w_f(\tilde{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\mu(\tilde{v})]\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{v}}+ \\
+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x_0}u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v},
\end{gathered} \tag{3.14.12}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x_0}\, u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}$ — общее изменение числа нейтронов со скоростью из интервала $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})$ в фиксированном элементе объема $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ за время $\mathrm{d}x_0$. Так как

$$u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) - u(x_0,\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{v}\mathrm{d}x_0,\boldsymbol{v}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}'}\, \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}x_0 = (\boldsymbol{v}, \mathbf{grad}\, u)\, \mathrm{d}x_0,$$

то после суммирования и сокращения на $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ получим кинетическое уравнение, описывающее процесс распространения нейтронов в среде,

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x_0} + (\boldsymbol{v}, \mathbf{grad}\, u) = -a|\boldsymbol{v}|u + f(x,\boldsymbol{v}) + \int [a_s(\tilde{\boldsymbol{v}})w_s(\tilde{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v}) + \\ + \mu(\tilde{\boldsymbol{v}})a_f(\tilde{\boldsymbol{v}})w_f(\tilde{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v})]u(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{v}})|\tilde{\boldsymbol{v}}|\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}.\end{gathered} \tag{3.14.13}$$

При постановке задач к кинетическому уравнению (3.14.13) присоединяются начальные и граничные условия.

Начальное условие для уравнения переноса задается стандартным образом. Поэтому рассмотрим граничные условия. В случае, когда задача ставится для выпуклой области G из $\mathbb{R}^3$, на ее граничной поверхности должен быть задан входящий поток нейтронов:

$$u\Big|_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Gamma \\ (\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{n})<0}} = u_0(\gamma,\boldsymbol{\nu}), \tag{3.14.14}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали; γ — переменная границы Γ. Если область неоднородная, то на границах раздела задаются условия сопряжения, которые обеспечивают непрерывность функции $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu})$ внутри всей области G. При рассмотрении задач переноса излучения область G может быть невыпуклой. Тогда задаются граничные условия более общего вида

$$u\Big|_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Gamma_1 \\ (\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{n})<0}} = q(\gamma,\boldsymbol{\nu}) + R^{\star}u\Big|_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Gamma_2 \\ (\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{n})<0}}, \tag{3.14.15}$$

где Γ_1 — часть границы, через которую частицы входят в область G, Γ_2 — часть границы, через которую частицы вылетают из области, R^{*} — оператор отражения, $q(\gamma,\boldsymbol{\nu})$ — внешний источник нейтронов. При исследовании переноса заряженных частиц (например, перенос ионов при ионной имплантации) сечение рассеяния Σ_S является сильно анизотропным и имеет резко выраженный максимум в окрестности нулевого угла рассеяния. В этом случае его можно аппроксимировать уравнением Фоккера—Планка. Рассмотрим вывод уравнения Фоккера—Планка исходя из азимутально-симметричного уравнения переноса в плоскопараллельной геометрии, когда облучаемое твердое тело (мишень) представляет собой плоский слой.

$$\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{E}^{E/(1-\gamma)}\Phi(x,E+T,\mu')\delta\big(\Omega\cdot\Omega'-\cos\theta(E,T)\big)\Sigma_S(E,T)\,\mathrm{d}T\mathrm{d}\mu'\mathrm{d}\alpha'-$$
$$-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{E}^{E/(1-\gamma)}\Phi(x,E,\mu)\delta\big(\Omega\cdot\Omega'-\cos\theta(E,T)\big)\Sigma_S(E,T)\,\mathrm{d}T\mathrm{d}\mu'\mathrm{d}\alpha'+$$
$$+\frac{\partial}{\partial E}\big(S_e\Phi\big).$$

Здесь скорость частиц задается посредством кинетической энергии E и единичного вектора направления движения Ω, причем $0<E<\overline{E}$. В свою очередь, Ω определяется полярным углом φ ($\mu=\cos\varphi$) и азимутальным углом α. Распределение потока движущихся частиц Φ зависит только от μ — косинуса полярного угла — в силу предположения об азимутальной симметрии. Скалярная переменная x означает расстояние до поверхности мишени, при этом $0<x<H$, где H — толщина слоя.

Будем считать, что неизвестная функция Φ может быть представлена в виде ряда по полиномам Лежандра P_k с коэффициентами $\Phi_k(x,E)$. Воспользуемся также разложением δ-функции в ядре интеграла по полиномам Лежандра:

$$\delta\big(\Omega\cdot\Omega'-\cos\theta\big)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2}P_k(\Omega\cdot\Omega')P_k(\cos\theta).$$

Подставив разложение δ-функции в уравнение переноса и воспользовавшись теоремой сложения для полиномов Лежандра, после некоторых преобразований получим:

$$\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2}P_k(\mu)\times$$
$$\times\int\limits_{E}^{g(E)}\big(\Phi_k(x,E+T)P_k(\cos\theta)-\Phi_k(x,E)\big)\Sigma_S(E,T)\,\mathrm{d}T. \tag{3.14.16}$$

Далее функции $\Phi_k(x,E+T)$ разлагаем в ряд Тейлора в окрестности точки $T=0$, а функцию $P_k(\cos\theta)$ — в окрестности точки $\cos\theta=1$.

$$\Phi_k(x,E+T)=\Phi_k(x,E)+T\frac{\partial}{\partial E}\Phi_k(x,E)+\ldots,$$

$$P_k(\cos\theta) = P_k(1) - (1-\cos\theta)P'_k(1) + \ldots.$$

Затем, используя равенства $P_k(1) = 1$, $P'_k(1) = k(k+1)/2$ и оставляя в тейлоровских разложениях только слагаемые первого порядка, получим разложение

$$\Phi_k(x,E+T)P_k(\cos\theta) =$$
$$= \Phi_k(x,E) + T\frac{\partial}{\partial E}\Phi_k(x,E) - (1-\cos\theta)\frac{k(k+1)}{2}\Phi_k(x,E) + \ldots.$$

В уравнение (3.14.16) подставим полученное усеченное разложение и проведем ряд преобразований, связанный с изменением порядка операций интегрирования и дифференцирования. В результате получим:

$$\begin{gathered}\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2}P_k(\mu)\frac{k(k+1)}{2}\Phi_k(x,E)\times\\ \times\int\limits_E^{g(E)}(1-\cos\theta)\Sigma_S(E,T)\,\mathrm{d}T + \frac{\partial}{\partial E}\big(S_n\Phi(x,E)\big),\end{gathered} \tag{3.14.17}$$

где коэффициент ядерного торможения определен как

$$S_n(E) = \int\limits_E^{g(E)}\Sigma_S(E,T)T\,\mathrm{d}T.$$

И, наконец, воспользуемся для полиномов Лежандра следующим соотношением:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}(1-\mu^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}P_k(\mu) = k(k+1)P_k(\mu).$$

В результате уравнение (3.14.17) преобразуется в уравнение с частными производными второго порядка — уравнение Фоккера–Планка:

$$\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \alpha(E)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}(1-\mu^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\Phi(x,E,\mu) + \frac{\partial}{\partial E}\big(S_n\Phi(x,E)\big), \tag{3.14.18}$$

где диффузионный коэффициент углового рассеяния определен следующим образом:

$$\alpha(E) = 2\pi\int\limits_E^{g(E)}\big(1-\cos\theta(E,T)\big)\Sigma_S(E,T)\,\mathrm{d}T.$$

Добавим следующие физически обоснованные граничные условия, чтобы получить корректную начально-краевую задачу для уравнения (3.14.17):

$$\Phi\Big|_{\substack{x=0,\\ \mu>0}} = \Phi_0(E,\mu), \quad \Phi\Big|_{\substack{x=H,\\ \mu<0}} = \Phi_H(E,\mu), \quad \Phi\Big|_{E=\overline{E}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2\alpha(E)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} - \frac{\partial}{\partial E}\big(S_n(E)\Phi\big)\right)\Bigg|_{\mu=1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2\alpha(E)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} + \frac{\partial}{\partial E}\big(S_n(E)\Phi\big)\right)\Bigg|_{\mu=-1} = 0.$$

4. Задача Коши

4.1. Теорема Ковалевской

4.1.1. Аналитические функции и формулировка теоремы Ковалевской

В п. 3.7 сформулирована обобщенная задача Коши для гиперболического уравнения 2-го порядка, в том числе и для волнового уравнения. А теперь эту задачу рассмотрим для произвольного линейного уравнения порядка m

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u \equiv \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u = f(\boldsymbol{x}) \tag{4.1.1}$$

относительно искомой функции u независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Предположим, что уравнение (4.1.1) задано, вообще говоря, в некоторой неограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}, \boldsymbol{x} \in Q$. Граница ∂Q области является гиперповерхностью класса C^1. На замыкании $\overline{Q}$ области Q зададим векторное поле $\mathscr{M}$ векторов $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0(\boldsymbol{x}), \ldots, \mu_n(\boldsymbol{x}))$. Функции $\mu_j(\boldsymbol{x})$ обладают достаточной гладкостью и они принадлежат множеству $C^1(\overline{Q})$. Поле $\mathscr{M}$ не является касательным к гиперповерхностям ∂Q, т. е. все векторы $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in \partial Q$ скалярное произведение $(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})) \neq 0$, где $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ – единичные векторы внешней нормали относительно Q в точках $\boldsymbol{x} \in \partial Q$.

Обобщенная задача Коши для уравнения (4.1.1) формулируется следующим образом: найти решение $u(\boldsymbol{x})$ уравнения (4.1.1) в области Q независимых переменных $\boldsymbol{x}$ при наличии условий Коши

$$\begin{aligned} u\Big|_{\partial Q} &= \psi^{(0)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\mu}}\Big|_{\partial Q} &= \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q, \\ &\ldots \\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \boldsymbol{\mu}^{m-1}}\Big|_{\partial Q} &= \psi^{(m-1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Обобщенную задачу (4.1.1) – (4.1.2) можно свести к простейшей задаче Коши. С помощью соответствующей замены независимых переменных, если гиперповерхность ∂Q не является характеристикой уравнения (4.1.1).

Действительно, пусть в некоторой окрестности $\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)})$ точки $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \partial Q$ уравнением $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ задается гиперповерхность ∂Q в декартовой системе переменных $\boldsymbol{x}$, где $\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$, $\boldsymbol{x} \in \partial Q$. Для определенности считаем, что $\partial\varphi/\partial x_0 \neq 0$. Сделаем замену независимых переменных по формулам

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi(\boldsymbol{x}), \\ y_1 &= x_1, \\ &\cdots \\ y_n &= x_n. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

В результате замены (4.1.3) производные по старым независимым переменным $\boldsymbol{x}$ будут выражаться через производные и новые независимые переменные $\boldsymbol{y} = (y_0, \ldots, y_n)$ по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_0}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.1.4}$$

Выражая в $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\mathbf{D})u$ производные по формулам (4.1.4) через новые переменные $\boldsymbol{y}$ получим уравнение в новой записи

$$\mathscr{L}_0\big(\boldsymbol{x}, \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial^m v}{\partial y_0^m} + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m,\\ \alpha_0<m}} b^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{y})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}v(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}), \tag{4.1.5}$$

где $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{y})$, $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{y})$. Если ∂Q не является характеристикой и не имеет характеристических направлении, то $\mathscr{L}_0(\boldsymbol{x},\mathbf{grad}\varphi(\boldsymbol{x})) \neq 0$ в окрестности $\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)})$ и уравнение (4.1.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial^m v}{\partial y_0^m} + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m,\\ \alpha_0<m}} \frac{b^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{y})}{\mathscr{L}_0(\boldsymbol{x},\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}))}\,\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}v(\boldsymbol{y}) = \frac{g(\boldsymbol{y})}{\mathscr{L}_0(\boldsymbol{x}, \mathbf{grad}\ \varphi)}. \tag{4.1.6}$$

Уравнение (4.1.6) называется *уравнением типа Ковалевской* относительно производных по переменной y_0.

Начальные условия (4.1.2) в результате замены (4.1.3) запишутся в виде

$$v\Big|_{y_0=0} = v^{(0)}(\boldsymbol{y}'),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \widetilde{\boldsymbol{\mu}}}\Big|_{y_0=0} &= v^{(1)}(\boldsymbol{y}'), \\ \cdots \\ \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{m-1}}\Big|_{y_0=0} &= v^{(m-1)}(\boldsymbol{y}'), \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

где $\boldsymbol{y}' = (y_1, \ldots, y_n)$, $\quad v^{(j)}(\boldsymbol{y}') = \psi^{(j)}(\boldsymbol{x})$, $\quad j = 0, \ldots, m-1$, $\quad \widetilde{\mathscr{M}}$ – векторное поле, которое получилось из $\mathscr{M}$ в результате замены (4.1.3) и $\widetilde{\boldsymbol{\mu}} \in \widetilde{\mathscr{M}}$.

Обозначим через $\mathbb{C}^n$ n-мерное пространство комплексных переменных $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, $\quad z_j = Re\ z_j + iIm\ z_j = x_j + iy_j$, $\quad x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$.

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и функция $f : \mathbb{C}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{z} \to \to f(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}$.

Определение 4.1.1. Функция $f(\boldsymbol{z})$ называется *аналитической* в области Ω, если для каждой точки $\boldsymbol{z}^{(0)} \in \Omega$ существует поликруг $|z_j - z_j^{(0)}| < r_j$, $\quad j = 1, \ldots, n$, радиуса $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ с центром в этой точке $\boldsymbol{z}^{(0)}$, в котором функция $f(\boldsymbol{z})$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд:

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} C^{(\boldsymbol{\alpha})} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{(0)})^{\boldsymbol{\alpha}},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс, $C^{(\boldsymbol{\alpha})} = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z}^{(0)})$ – коэффициенты Тейлора.

Аналогичное определение аналитической функции имеет место и для функций $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ от действительных переменных $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Из определения аналитических функций следует, что они бесконечно дифференцируемы. Обратное утверждение не всегда верно.

Замечание 4.1.1. Для функций многих комплексных переменных это обратное свойство всегда справедливо, т. е. любая дифференцируемая (голоморфная) функция от комплексных переменных является аналитической. Поэтому в этом случае часто понятия аналитической и голоморфной функции отождествляют.

Функция

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} exp(-\frac{1}{||\boldsymbol{x}||^2_{\mathbb{R}^n}}), & \boldsymbol{x} \neq 0, \\ 0, & x_i = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \end{cases}$$

является бесконечно дифференцируемой во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, но ее ряд Тейлора с центром $\boldsymbol{x}^{(0)}$ при $\boldsymbol{x} \neq 0$ имеет сумму 0, а не $f(\boldsymbol{x})$, т. е. не является аналитической функцией в окрестности начала координат.

Через определение 4.1.1 вводится понятие аналитической функции, заданной на гиперповерхности. Функции $\psi^{(j)}(\boldsymbol{x})$, заданные на ∂Q, будут аналитическими, если для каждой точки $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \partial Q$ существует ее окрестность в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая, например, с помощью замены 4.1.3 переходит в окрестность $\Omega(\boldsymbol{y}^{(0)})$ точки $\boldsymbol{y}^{(0)} = (0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)})$, где функции $\psi^{(j)}(\boldsymbol{x}) = v^{(j)}(\boldsymbol{y}')$ в окрестности $\Omega(\boldsymbol{y}^{(0)}) \cap \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+1} | y_0 = 0\}$ являются аналитическими функциями.

Сформулируем локальную теорему существования и единственности в классе аналитических функций задачи Коши (4.1.1) – (4.1.2). Обозначим через $\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)})$ окрестность в $\mathbb{R}^{n+1}$ некоторой точки $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \partial Q$.

Теорема 4.1.1 (С. Ковалевская). *Предположим, что для некоторой окрестности $\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)})$ точки $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \partial Q$*

(i) коэффициенты $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})$ и функция $f(\boldsymbol{x})$ являются аналитическими функциями в $\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)}) \cap \overline{Q}$;

(ii) функции $\psi^{(j)}(\boldsymbol{x})$, $\quad j = 0,\ldots,m-1$, являются аналитическими в $\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)}) \cap \partial Q$;

(iii) гиперповерхность ∂Q не является характеристикой во всех точках $\boldsymbol{x} \in \Omega(\boldsymbol{x}^{(0)}) \cap \partial Q$.

Тогда, возможно для меньшей окрестности $\widetilde{\Omega}(\boldsymbol{x}^{(0)}) \subset \Omega(\boldsymbol{x}^{(0)})$ точки $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \partial Q$ в $\widetilde{\Omega}(\boldsymbol{x}^{(0)}) \cap \overline{Q}$ существует аналитическая функция $u(\boldsymbol{x})$, которая является решением задачи Коши (4.1.1) – (4.1.2), и это решение единственное в классе аналитических функций.

Замечание 4.1.2. Теорема Ковалевской справедлива для задачи Коши для квазилинейного уравнения

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u + A_1(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\mathbf{D}^{\gamma} u,\ldots) = f(\boldsymbol{x}), \qquad (4.1.8)$$

$|\boldsymbol{\gamma}| < m$, и системы таких уравнений.

Замечание 4.1.3. Для уравнений, не имеющих представление (4.1.6), теорема Ковалевской, вообще говоря, не имеет места. Об этом говорит следующий пример, принадлежащий Ковалевской. Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0$$

в области $Q = \{(x_0,x_1) |\; x_0 > 0, |x_1| < 1\}$ переменных x_0 и x_1. При $x_0 = 0$ зададим начальное условие

$$u\Big|_{x_0=0} = \frac{1}{1-x_1}, \quad |x_1| < 1.$$

Аналитическое решение этой задачи, если оно существует, в окрестности начала координат представляется рядом

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!} \frac{x_0^k}{(1-x_1)^{2k+1}}.$$

Но этот ряд расходится в каждой точке $\boldsymbol{x} = (x_0,x_1)$, где $x_0 \neq 0$.

4.1.2. Сведение задачи Коши к задаче Коши для линейных систем первого порядка

Задача Коши (4.1.6) – (4.1.7) легко сводится к задаче Коши для линейных систем первого порядка. Как это делается, для простоты изложения проиллюстрируем на примере линейного уравнения второго порядка, которое запишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a^{(0i)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i} + \\ + \sum_{i=0}^{n} b^{(0i)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a^{(00)}(\boldsymbol{x}) u + f(\boldsymbol{x}),\end{gathered} \tag{4.1.9}$$

где $a^{(ij)}(\boldsymbol{x}), b^{(0i)}(\boldsymbol{x})$ и $f(\boldsymbol{x})$ – аналитические функции своих аргументов в окрестности точки $\boldsymbol{x}^{(0)}, \quad i,j = 0,1,\ldots,n$.

Задача Коши для уравнения (4.1.9) состоит в отыскании решения $u(\boldsymbol{x})$ в области $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ при наличии на ∂Q условий Коши

$$\begin{aligned} u\Big|_{\partial Q} &= \psi^{(0)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\mu}}\Big|_{\partial Q} &= \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Введем наряду с функцией $u(\boldsymbol{x})$ новые функции $u^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \partial u/\partial x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. В результате этой замены получаем систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_0} &= \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\frac{\partial u^{(j)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} a^{(0i)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} + \sum_{i=0}^{n} b^{(0i)}u^{(i)} + a^{(00)}u + f,\\ \frac{\partial u}{\partial x_i} &= u^{(i)}, \quad i = 0,1,\ldots,n,\end{aligned}$$

и начальные условия

$$\begin{aligned}u\Big|_{\partial Q} &= \psi^{(0)}(\boldsymbol{x}),\\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\mu}}\Big|_{\partial Q} &= \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}^{(k)}}\Big|_{\partial Q} &= \frac{\partial \psi^{(0)}(\boldsymbol{x})}{\partial \tau^{(k)}}, \quad k = 1,\ldots,n,\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

где $\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\tau}^{(n)}$ – линейно независимые векторы из некоторых векторных полей $\mathcal{T}^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}^{(n)}$, заданных на $\overline{Q}$, которые являются касательными в точках $\boldsymbol{x} \in \partial Q$. Поскольку $\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\tau}^{(n)}$ - линейно независимые, с помощью направляющих косинусов из системы (4.1.11) можно выразить значения всех производных $\partial u/\partial x_i$, $\quad i = 0, \ldots, n$ на ∂Q через заданные функции правых частей (4.1.11). Таким образом, из (4.1.11) получаем условия Коши

$$\begin{aligned}u\Big|_{\partial Q} &= \psi^{(0)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q,\\ u^{(i)}\Big|_{\partial Q} &= \widetilde{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q, \quad i = 0,\ldots,n,\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

для искомых функций $u(\boldsymbol{x})$, $\quad u^{(i)}(\boldsymbol{x})$ $(i = 0,\ldots,n)$. Тем самым задачу Коши (4.1.9) – (4.1.10) для линейного дифференциального уравнения второго порядка (4.1.9) свели к задаче Коши (4.1.11), (4.1.12) для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка (4.1.11).

Этим методом можно свести задачу Коши для дифференциального уравнения (4.1.1) любого порядка или системы дифференциальных уравнений (4.1.8) разных порядков.

С помощью замены (4.1.3) задача (4.1.1) – (4.1.2) была сведена к задаче (4.1.6) – (4.1.7). С помощью обратной замены задачу (4.1.6) – (4.1.7) можно свести к задаче (4.1.1) – (4.1.2). Как было только что показано задача Коши для уравнений высокого порядка легко сводится к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Поэтому докажем теорему Ковалевской для произвольной линейной системы, которую в $Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ запишем в виде

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_0} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a^{(ijk)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a^{(ij)}(\boldsymbol{x}) u^{(j)} + f^{(i)}(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4.1.13}$$

К системе (4.1.13) присоединяем простейшие условия Коши

$$u^{(i)}\Big|_{x_0=0} = \varphi^{(i)}(\boldsymbol{x}'), \quad i = 1, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1.14}$$

Коэффициенты $a^{(ijk)}(\boldsymbol{x})$, $a^{(ij)}(\boldsymbol{x})$ и функции $f^{(i)}(\boldsymbol{x})$, $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{x}')$ — аналитические функции, $i,j = 1, \ldots, N$, $\quad k = 1, \ldots, n$.

Случай любых аналитических функций $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{x}')$ в условиях (4.1.14) легко сводятся к случаю, когда они равны нулю, т. е. рассматриваем однородные начальные условия

$$u^{(i)}\Big|_{x_0=0} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1.15}$$

Чтобы условия (4.1.14) свести к однородным условиям (4.1.15), достаточно сделать замену старых искомых функций $u^{(i)}(\boldsymbol{x})$ через новые $v^{(i)}(\boldsymbol{x})$ по формулам

$$v^{(i)}(\boldsymbol{x}) = u^{(i)}(\boldsymbol{x}) - \varphi^{(i)}(\boldsymbol{x}'), \quad i = 1, \ldots, N.$$

В дальнейшем рассматриваем задачу Коши (4.1.13), (4.1.15) для искомых функций $u^{(i)}(\boldsymbol{x})$.

4.1.3. Единственность решения задачи Коши

Сначала докажем единственность решения задачи Коши (4.1.13), (4.1.15) в классе аналитических функций в окрестности точки $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, \ldots, 0)$.

Так как рассматриваемая задача линейная, то разность $\widetilde{u}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = u^{(i)}(\boldsymbol{x}) - v^{(i)}(\boldsymbol{x})$ двух аналитических решений $u^{(i)}(\boldsymbol{x})$ и $v^{(i)}(\boldsymbol{x})$ будет удовлетворять однородной системе (4.1.13)

$$\frac{\partial \widetilde{u}^{(i)}}{\partial x_0} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a^{(ijk)} \frac{\partial \widetilde{u}^{(j)}}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a^{(ij)} \widetilde{u}^{(j)} \tag{4.1.16}$$

и однородным условиям Коши (4.1.15), $i = 1, \ldots, N$.

Согласно определению аналитических функций, решение $\widetilde{u}^{(i)}(\boldsymbol{x})$ задачи (4.1.15) – (4.1.16) представим в виде степенных рядов

$$\widetilde{u}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 0} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\widetilde{u}^{(i)}(0,\ldots,0)\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{4.1.17}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_0! \ldots \alpha_n!$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Из начальных условий (4.1.15) следует, что в разложении (4.1.17) все слагаемые с $\boldsymbol{\alpha} = (0,\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0,\boldsymbol{\alpha}')$ равны нулю, так как $\mathbf{D}^{(0,\boldsymbol{\alpha}')}\widetilde{u}^{(i)}(0, \ldots, 0) = 0$.

А теперь искомые решения $\widetilde{u}^{(i)}(x)$, представленные в виде (4.1.17), подставляем в систему (4.1.16) и сравниваем коэффициенты при равных степенях $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$. После подстановки нетрудно убедиться, что коэффициенты в левой части с $\boldsymbol{\alpha} = (1,\boldsymbol{\alpha}')$ следует приравнивать коэффициентам с $\boldsymbol{\beta} = (0,\boldsymbol{\beta}')$. Но последние как было показано в силу условий (4.1.15), равны нулю. Таким образом, мы доказали, что все коэффициенты в (4.1.17) с $\boldsymbol{\alpha} = (1,\boldsymbol{\alpha}')$ равны нулю.

Двигаясь таким образом по $k = 1, 2,3, \ldots$ мы последовательно с увеличением номера k на единицу каждый раз будем доказывать, что все коэффициенты в (4.1.17) для всех мультииндексов вида $\boldsymbol{\alpha} = (k,\boldsymbol{\alpha}')$ для каждого k на k-ом этапе равны нулю. Тем самым мы доказали, что $\widetilde{u}^{(i)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, N$.

4.1.4. Существование решения задачи Коши

Докажем существование решения задачи Коши (4.1.13), (4.1.15) в классе аналитических функций. Решение будем рассматривать в окрестности начала координат.

Как и при доказательстве единственности, решение ищем в виде степенных рядов

$$u^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 0} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u^{(i)}(0,\ldots,0)\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{4.1.18}$$

так как $u^{(i)}(\boldsymbol{x})$ должны быть аналитическими функциями в окрестности начала координат. Далее, нам надо показать, что ряды (4.1.18) действительно являются решением задачи (4.1.13), (4.1.15) и они сходятся.

Чтобы функции (4.1.18) были решением указанной задачи, надо чтобы коэффициенты $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u^{(i)}(0, \ldots, 0)$ определялись единственным образом данными задачами. Это можно получить, если применить рассуждения из предыдущего пункта. Действительно, $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u^{(i)}(0,\ldots,0)$ для $\boldsymbol{\alpha}$ вида $\boldsymbol{\alpha}=(0,\boldsymbol{\alpha}')$ определяются единственным образом из начальных условий (4.1.15) или (4.1.14), рассматривая $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u^{(i)}(0,\boldsymbol{x}')$ как производные по касательным направлениям из этих условий. Затем с помощью этих функций, значений $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u^{(i)}(0,\ldots,0)$, функций $f^{(i)}(\boldsymbol{x})$ $(i=1,\ldots,N)$ из системы (4.1.13) определяем единственным образом $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u^{(i)}(0,\ldots,0)$ для $\boldsymbol{\alpha}=(1,\boldsymbol{\alpha}')$, затем для $\boldsymbol{\alpha}=(2,\boldsymbol{\alpha}')$ и т. д. Таким образом, мы определим все коэффициенты разложений в ряд (4.1.18).

Для доказательства сходимости рядов (4.1.18) можно воспользоваться методом мажорант для аналитических функций. А теперь определим, что это такое.

Определение 4.1.2. *Мажорантой* для некоторой функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, аналитической в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_0^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$, называется любая функция $\psi(\boldsymbol{x})$, аналитическая в этой окрестности, у которой все коэффициенты разложения в степенной ряд по $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}$ неотрицательны и больше или равны абсолютных величин соответствующих коэффициентов разложения функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ по степеням $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}$.

А теперь рассматриваем функцию $\varphi(\boldsymbol{x})$, которая является аналитической в начале координат. Построим мажоранту, которой будем пользоваться в дальнейших рассуждениях доказательства сходимости рядов (4.1.18).

Пусть
$$\varphi(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}C^{(\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}. \qquad (4.1.19)$$

Тогда ряд в правой части (4.1.19) абсолютно сходится в некоторой точке $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ из окрестности нуля и все $|a_i|>0$, $i=0,\ldots,n$. Существует такое число $M>0$, что для любых $\boldsymbol{\alpha}$

$$|C^{(\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}|\leqslant M,$$

или

$$|C^{(\boldsymbol{\alpha})}|\leqslant\frac{M}{|\boldsymbol{a}|^{\boldsymbol{\alpha}}},$$

где $|\boldsymbol{a}|^{\boldsymbol{\alpha}} = |a_0|^{\alpha_0} \dots |a_n|^{\alpha_n}$. Поэтому функция

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{M}{\prod\limits_{i=0}^{n}\left(1 - \dfrac{x_i}{|a_i|}\right)} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0} \frac{M}{|\boldsymbol{a}|^{\boldsymbol{\alpha}}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \tag{4.1.20}$$

является мажорантой функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x}$, для которых $|x_i| < |a_i|$, $i = 0, \dots, n$.

Можно построить и другие мажоранты.

Так, например, для функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, представленной рядом (4.1.19), мажорантой будет также функция

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{M}{1 - \dfrac{x_0 + \dots + x_n}{a}}, \tag{4.1.21}$$

где $a = \min(|a_0|, \dots, |a_n|)$, $\quad a_i \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$ и $\boldsymbol{a} = (a_0, \dots, a_n)$ — некоторая точка из полукруга сходимости ряда (4.1.19).

Действительно, при $|x_0| + \dots + |x_n| < a$ функция (4.1.21) разлагается в ряд

$$\psi(\boldsymbol{x}) = M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x_0 + \dots + x_n}{a}\right)^k = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = k} \frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{4.1.22}$$

Но $k!/\boldsymbol{\alpha}! \geqslant 1$ и

$$\frac{1}{a^k} \geqslant \frac{1}{|a_0|^{\alpha_0} \dots |a_n|^{\alpha_n}}, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = k,$$

т. е. коэффициенты ряда (4.1.22) положительны и не меньше соответствующих коэффициентов ряда (4.1.20).

Точно также показывается, что функция

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{M}{1 - \dfrac{\frac{x_0}{\delta} + x_1 \dots + x_n}{a}} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{x_0}{\delta} + x_1 \dots + x_n\right)^k}{a^k}$$

будет мажорантой для функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, где $a = \min\limits_{i=0,\dots,n} |a_i|$, $a_i \neq 0$, $0 < \delta < 1$.

Переходим теперь непосредственно к доказательству существования решения задачи (4.1.13), (4.1.15).

Для функций $u^{(i)}(\boldsymbol{x})$ в (4.1.18) строим мажоранты

$$U^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 0} A^{(\boldsymbol{\alpha},i)}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{4.1.23}$$

т. е. должны доказать существование сходящихся рядов (4.1.23), коэффициенты $A^{(\boldsymbol{\alpha},i)}$ которых мажорируют соответствующие коэффициенты рядов (4.1.18),

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\mathbf{D}^{(\boldsymbol{\alpha})}u^{(i)}(0)\right| \leqslant A^{(\boldsymbol{\alpha},i)}. \tag{4.1.24}$$

Для $\boldsymbol{\alpha} = (0,\boldsymbol{\alpha}')$ коэффициенты можно построить из начальных данных (4.1.15). Для $\boldsymbol{\alpha} = (k,\boldsymbol{\alpha}')$ при $k > 0$ коэффициенты $A^{(\boldsymbol{\alpha},i)}$ получаются из коэффициентов $A^{(\boldsymbol{\alpha},i)}$ младших k, коэффициентов мажорант коэффициентов системы (4.1.13) и функций $f_i(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1,\ldots,N)$. Поэтому отсюда убеждаемся, если неравенства (4.1.24) справедливы для $k < k^{(0)}$, то они справедливы и для $k = k^{(0)}$, где $\boldsymbol{\alpha} = (k,\boldsymbol{\alpha}')$.

Для этого подберем числа $M > 0$ и $a > 0$ так, чтобы функция

$$\frac{M}{1 - \dfrac{\frac{x_0}{\delta} + x_1 + \ldots + x_n}{a}}$$

при $0 < \delta < 1$ была мажорантой для всех коэффициентов системы и свободных членов. Это можно сделать, так как мажоранта такого вида существует у каждого коэффициента и свободного члена $f^{(i)}(\boldsymbol{x})$. Для выбора M берем максимальное из всех этих мажорант, а $a > 0$ — минимальное из соответствующих значений в мажорантах. А теперь напишем мажорирующую систему дифференциальных уравнений для $U^{(i)}(\boldsymbol{x})$ в виде

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x_0} = \frac{M}{1 - \dfrac{\frac{x_0}{\delta} + x_1 + \ldots + x_n}{a}}\left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} U^{(j)} + \widetilde{M}\right], \tag{4.1.25}$$

где $0 < \delta < 1$. Решение системы (4.1.25) будем искать в виде

$$U^{(i)}(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x}) = U\left(\frac{x_0}{\delta} + x_1 + \ldots + x_n\right) = U(y), \tag{4.1.26}$$

где $y = \dfrac{x_0}{\delta} + x_1 + \ldots + x_n$. Подставим функции, определенные выражением (4.1.26) в систему (4.1.25). Для функции $U(y)$ получим уравнение

$$\frac{1}{\delta}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = A(y)\left(Nn\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} + NU + \widetilde{M}\right), \tag{4.1.27}$$

где $A(y) = M/\bigl(1 - \dfrac{y}{a}\bigr)$. Уравнение (4.1.27) можно записать в виде, разделив переменные

$$\frac{\mathrm{d}U}{\dfrac{N}{\widetilde{M}}U + 1} = \frac{\widetilde{M}A(y)\mathrm{d}y}{\dfrac{1}{\delta} - NnA(y)} = B(y)\mathrm{d}y.$$

Выбираем $\delta > 0$ таким, чтобы было

$$\frac{1}{\delta} - NnA(y) > 0$$

в некоторой окрестности $y = 0$. Тогда в этой окрестности функция $B(y)$ является аналитической.

Частное решение

$$U(y) = \frac{\exp \frac{N}{\widetilde{M}} \int\limits_0^y B(\xi)\mathrm{d}\xi - 1}{N}\widetilde{M}$$

является мажорантой для функций $u^{(i)}(\boldsymbol{x})$.

Действительно, $A(y) = M/\Bigl(1-\dfrac{y}{a}\Bigr)$ — аналитическая функция с неотрицательными коэффициентами в окрестности точки $y = 0$. Следовательно, и функция

$$B(y) = \frac{\widetilde{M}\delta A(y)}{1 - \delta A(y)Nn} = \widetilde{M}\delta A(y)\bigl(1 + \delta A(y)Nn + \ldots\bigr)$$

в разложении имеет неотрицательные коэффициенты по степеням y. Отсюда функции

$$C(y) = \frac{N}{\widetilde{M}}\int\limits_0^y B(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad e^{C(y)} - 1 = C(y) + \frac{C^2(y)}{2!} + \ldots, U(y)$$

обладают этим свойством.

Таким образом, функция $U(y)$ разлагается по степеням $x_0, x_1, \ldots, x_n$ с положительными коэффициентами, так как $y = \dfrac{x_0}{\delta} + x_1 + \ldots + x_n$.

Замечание 4.1.4. В книге [29] показано сведение обобщенной задачи Коши для системы дифференциальных уравнений порядка $\geqslant 1$ к простейшей задаче. От теоремы Ковалевской, которая была доказана для локальной задачи Коши, можно через покрытие перейти к теореме Ковалевской в случае нелокальной задачи Коши (см. в [23]).

4.1.5. Примеры некорректно поставленных задач

В п. 3.2 сформулированы принципы и требования корректной постановки задачи. Далее в главе 3 рассмотрены основные уравнения математической физики и задачи для них. Сформулированные задачи при определенных требованиях на гладкость данных являются корректно поставленными задачами. Как известно, при постановке таких задач сформулированы три требования: существование решения, единственность решения, непрерывная зависимость решения от данных задач.

Примеры некорректно поставленных задач, для которых не будет выполняться первое или второе требование, легко получить из корректно поставленных. Если для корректно поставленной задачи ввести дополнительные условия на искомую функцию, то в этом случае, как правило, нарушается условие существования, а если убрать некоторые дополнительные условия, нарушится требование единственности решения поставленной задачи.

Для примера рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{4.1.28}$$

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1.29}$$

Если вместо начальных условий (4.1.29) взять три или более начальных условий, например,

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{x_0=0} = \chi(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1.30}$$

то задача (4.1.28), (4.1.30) не будет иметь решения без дополнительных условий на функции φ, ψ , ξ и f. Действительно, из третьего условия

(4.1.30) и уравнения (4.1.28) имеем необходимое условие на эти функции, а именно:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \Delta u\right)\bigg|_{x_0=0} = \chi(\boldsymbol{x}') - a^2 \Delta\varphi(\boldsymbol{x}') = f(0, \boldsymbol{x}').$$

Если рассмотреть уравнение (4.1.28) и только одно начальное условие

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'),$$

то эта задача будет иметь не единственное решение, а более.

Третье требование не является таким тривиальным и очевидным. Рассмотрим пример задачи, для которой существует единственное решение, но нарушается третье требование корректности.

В этом смысле Ж.Адамар привел пример некорректной постановки задачи Коши для уравнения Лапласа. Для этого на плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа, т. е.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \boldsymbol{x} \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \tag{4.1.31}$$

$$u|_{x_1=0} = \varphi(x_2), \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \psi(x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.1.32}$$

Считаем, что функции $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, т. е. бесконечно дифференцируемые функции. Выберем их специальным образом. Рассмотрим последовательность $\varphi^{(n)}(x_2) = 0$ и $\psi^{(n)}(x_2) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx_2$. Как видно из самих функций

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x_2^k}\,\psi^{(n)}(x_2)\right| \leqslant n^k e^{-\sqrt{n}}.$$

Это означает, что при $n \to \infty \quad \varphi^{(n)}(x_2) \to 0$ и $\psi^{(n)}(x_2) \to 0$ и все ее производные $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x_2^k}\psi^{(n)}(x_2) \to 0$, т.е. последовательности $\{\varphi^{(n)}\}$ и $\{\psi^{(n)}\}$ сходятся к нулю в топологии $C^\infty(\mathbb{R})$.

Путем подстановки можно убедиться, что функция

$$u(\boldsymbol{x}) = A \operatorname{sh} \lambda x_1 \sin \lambda x_2 \tag{4.1.33}$$

является решением уравнения (4.1.31), где A и λ - некоторые параметры. Параметры выберем таким образом, чтобы функция (4.1.33) удовлетворяла условию Коши

$$
\begin{aligned}
u|_{x_1=0} &= A\frac{e^{\lambda\cdot 0}-e^{-\lambda\cdot 0}}{2}\sin\lambda x_2 = 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} &= \lambda A\frac{e^{\lambda x_1}+e^{-\lambda x_1}}{2}\Big|_{x_1=0}\sin\lambda x_2 = \lambda A\sin\lambda x_2 =\\
&= \psi^{(n)}(x_2) = e^{-\sqrt{n}}\sin nx_2.
\end{aligned}
\tag{4.1.34}
$$

Отсюда следует, что $\lambda = n, \lambda A = nA = e^{-\sqrt{n}}$.

Таким образом, функция

$$
u^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}\operatorname{sh} nx_1 \sin nx_2 \tag{4.1.35}
$$

является решением задачи Коши (4.1.31), (4.1.34). Из (4.1.35) следует, что $u^{(n)}(\boldsymbol{x}) \to \infty$ при фиксированном $x_1 > 0$ и x_2, для которых $\sin nx_2 \neq 0$,при $n \to \infty$. Действительно, так как

$$
\operatorname{sh} nx_1 = \frac{e^{nx_1}-e^{-nx_1}}{2} \to \infty \text{ при } n \to \infty,
$$

то

$$
\frac{e^{nx_1}e^{-\sqrt{n}}}{n} \to \infty \text{ при } n \to \infty.
$$

Отсюда следует, что нет непрерывной зависимости функций $u^{(n)}(\boldsymbol{x})$ от $\varphi^{(n)}(x_2)$ и $\psi^{(n)}(x_2)$.

Функции $u^{(n)}(\boldsymbol{x})$, представленные формулой (4.1.35), для каждого $n \in \mathbb{N}$ принадлежат множеству $C^m([0,\infty)\times\mathbb{R})$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Из этого класса функция $u^{(n)}(\boldsymbol{x})$ является единственным решением задачи (4.1.31), (4.1.32). Это следует из теоремы Хольмгрена, которую сформулируем и докажем ее.

Рассмотрим однородное линейное уравнение типа Ковалевской (4.1.6), которое запишем в более компактном виде относительно независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$
\mathscr{L}u = \frac{\partial^m u}{\partial x_0^m} + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m\\ \alpha_0<m}} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u = 0. \tag{4.1.36}
$$

Это уравнение типа Ковалевской относительно производных по переменной x_0 порядка m. К уравнению (4.1.36) присоединим однородные условия

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial x_0^j}\right|_{x_0=0} = 0, j = 0, \ldots, m-1. \tag{4.1.37}$$

Теорема 4.1.2 (Хольмгрен).

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \quad x_0 + |\boldsymbol{x}'|^2 < \varepsilon, x_0 > 0\}. \tag{4.1.38}$$

Предположим, что коэффициенты $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})$ *уравнения* (4.1.36) *являются аналитическими в окрестности начала координат* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Тогда существует такое* $\varepsilon^{(0)} > 0$, *что если* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^{(0)}$ *и функция* u *из множества* $C^m(\Omega^{(\varepsilon^{(0)})})$, *являющаяся решением задачи* (4.1.36) $-$ (4.1.37), *то* $u(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ *в* $\Omega^{(\varepsilon)}$.

Доказательство. Сделаем замену независимых переменных $\boldsymbol{x}$ через новые $\boldsymbol{y} = (y_0, \ldots, y_n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &y_0 = x_0 + x_1^2 + \ldots + x_n^2, \\ &y_1 = x_1, \\ &\ldots \\ &y_n = x_n. \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

При замене (4.1.39) полупространство $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{\boldsymbol{x} | \, x_0 > 0\}$ перейдет в область $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \quad \boldsymbol{y}_0 - |\boldsymbol{y}'|^2 > 0\}$. Заметим, что функция $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ является решением задачи

$$\mathscr{L}v = \frac{\partial^m v}{\partial y_0^m} + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m \\ \alpha_0 < m}} b^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{y}) \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} v = 0, \tag{4.1.40}$$

$$\left.\frac{\partial^j v}{\partial y_0^j}\right|_{y_0 = |\boldsymbol{y}'|^2} = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{4.1.41}$$

в некоторой достаточно малой окрестности $\Omega^{(h)} = \Omega \bigcap \{\boldsymbol{y} | \, 0 \leqslant y_0 \leqslant h\}$ начала координат. Здесь выбирается достаточно малая окрестность для того, чтобы коэффициент при производной $\frac{\partial^m v}{\partial y_0^m}$ был не равен нулю.

Наряду с оператором $\mathscr{L}$ рассмотрим формально сопряженный оператор $\mathscr{L}'$, который определяется следующим образом:

$$\mathscr{L}'w = (-1)^m \frac{\partial^m w}{\partial y_0^m} + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m \\ \alpha_0 < m}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \big(b^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{y}) w\big).$$

Пусть функция $w(\boldsymbol{y})$ такова, что

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}'w = 0, \\ &\left.\frac{\partial^j w}{\partial y_0^j}\right|_{y_0=h} = 0, j = 0, \ldots, m-2. \end{aligned} \tag{4.1.42}$$

Если функция v в $\Omega^{(h)}$ является решением задачи (4.1.40) - (4.1.41), а w — решением задачи (4.1.42), то

$$\int\limits_{\Omega_h} (\mathscr{L}vw - \mathscr{L}'wv)\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int\limits_{\Gamma_h} (-1)^m v(h, \boldsymbol{y}') \frac{\partial^{m-1} w(h, \boldsymbol{y}')}{\partial y_0^{m-1}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}' = 0. \tag{4.1.43}$$

Здесь Γ_h — основание конуса $\Omega^{(h)}$ и $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \cap \{\boldsymbol{y} |\, y_0 = h\}$. Заметим, что коэффициенты оператора $\mathscr{L}'$ также являются аналитическими функциями. Если к начальным условиям задачи (4.1.42) добавить условие

$$\frac{\partial^{m-1} w(h,\boldsymbol{y}')}{\partial y_0^{m-1}} = P^{(k)}(\boldsymbol{y}'), \tag{4.1.44}$$

то в силу теоремы Ковалевской существует единственная аналитическая функция $w(\boldsymbol{y})$, являющаяся решением задачи (4.1.42), (4.1.44) для каждого полинома $P^{(k)}(\boldsymbol{y}')$.

Равенство (4.1.43) можно записать в виде:

$$\int\limits_{\Gamma_h} v(h, \boldsymbol{y}') P^{(k)}(\boldsymbol{y}') \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}' = 0, \tag{4.1.45}$$

где равенство (4.1.45) можно рассматривать как условие ортогональности в $L_2(\Gamma_h)$ функции $v(h, \boldsymbol{y}')$ по отношению к множеству всевозможных полиномов $P^{(k)}(\boldsymbol{y}')$. Согласно теореме Вейерштрасса из курса математического анализа множество полиномов является плотным множеством в $L_2(\Gamma_h)$. Из (4.1.45) следует, что $v(h, \boldsymbol{y}') = 0$. В качестве h можно взять любое число $0 \leqslant h \leqslant h^{(0)}$ для некоторого числа $h^{(0)} > 0$.

Таким образом, мы показали, что $v(\boldsymbol{y}') \equiv 0$ в $\Omega_0^{(h)}$. Отсюда следует, что $v(\boldsymbol{y}') \equiv 0$ и в Ω (см. замечание 4.1.4). Тем самым теорема Хольмгрена доказана не только для случая окрестности $\Omega^{(\varepsilon)}$, так как $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$, но и для всего полупространства $\mathbb{R}^{n+1}$. $\otimes$

4.2. Метод Даламбера

Путем приведения к каноническому виду уравнения можно найти его общее решение. Если у нас имеется задача, то тогда из общего решения выделяется частное, удовлетворяющее всем условиям задачи.

Этот метод применим для нахождения решения задачи Коши для уравнения поперечных колебаний однородной струны (одномерного волнового уравнения), также применим и для других задач.

4.2.1. Формула Даламбера

Постановка задачи. В области $Q = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$ рассматриваем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q}, \tag{4.2.1}$$

относительно функции $u(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющей условиям Коши

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x_1), \ \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{\partial Q} = \psi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \tag{4.2.2}$$

где $\partial Q = \{\boldsymbol{x} \in \overline{Q} |\, x_0 = 0\}$.

Уравнение (4.2.1) приведем к каноническому виду, чтобы найти общее его решение. Для этого находим семейство характеристик. Уравнение характеристик имеет вид:

$$(\mathrm{d}x_1)^2 - a^2(\mathrm{d}x_0)^2 = 0,$$

или

$$\mathrm{d}x_1 = \pm a\, \mathrm{d}x_0. \tag{4.2.3}$$

Очевидно, что общие решения уравнений (4.2.3) будут семейства

$$x_1 - ax_0 = \mathrm{const},$$
$$x_1 + ax_0 = \mathrm{const}.$$

Как уже известно (см.п.2.4), с помощью замены

$$y_0 = x_1 - ax_0,$$
$$y_1 = x_1 + ax_0,$$

уравнение (4.2.1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 v(\boldsymbol{y})}{\partial y_0 \partial y_1} = 0, \tag{4.2.4}$$

где $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$. Отсюда

$$\partial v(\boldsymbol{y})/\partial y_1 = v^{(1)}(y_1), \tag{4.2.5}$$

где $v^{(1)}(y_1)$ — произвольная функция от одного независимого переменного y_1. Далее интегрируя (4.2.5), получим

$$v(\boldsymbol{y}) = \int v^{(1)}(y_1)\,\mathrm{d}y_1 + v^{(2)}(y_0) = v^{(2)}(y_0) + v^{(3)}(y_1), \tag{4.2.6}$$

где $v^{(i)}, (i = 1, 2, 3)$ — произвольные функции от одного независимого переменного. Из (4.2.6) имеем

$$v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x}) = v^{(2)}(x_1 - ax_0) + v^{(3)}(x_1 + ax_0), \tag{4.2.7}$$

общее решение уравнения (4.2.1). Из общего решения (4.2.7) выделяем то, которое удовлетворяет начальным условиям (4.2.2). Итак,

$$\begin{aligned} &u\Big|_{x_0=0} = v^{(2)}(x_1) + v^{(3)}(x_1) = \varphi(x_1), \\ &\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = -a\frac{\mathrm{d}v^{(2)}(x_1)}{\mathrm{d}x_1} + a\frac{\mathrm{d}v^{(3)}(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = \psi(x_1). \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Решаем систему (4.2.8). Из второго уравнения, путем его интегрирования, получаем уравнение

$$-v^{(2)}(x_1) + v^{(3)}(x_1) = \frac{1}{a}\int_0^{x_1} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C, \tag{4.2.9}$$

где C — произвольная константа. Интеграл справа в (4.2.9) записан в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом для удобства. Уравнение (4.2.9) вместе с первым уравнением из (4.2.8) дают следующие значения функций $v^{(2)}(x_1)$ и $v^{(3)}(x_1)$:

$$v^{(3)}(x_1) = \frac{1}{2}\varphi(x_1) + \frac{1}{2a}\int_0^{x_1} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{C}{2},$$

$$v^{(2)}(x_1) = \frac{1}{2}\varphi(x_1) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x_1}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{C}{2}.$$

Подставляя эти выражения в (4.2.7), получаем решение задачи Коши (4.2.1) – (4.2.2)

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\varphi(x_1 + ax_0) + \varphi(x_1 - ax_0)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1 - ax_0}^{x_1 + ax_0}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \qquad (4.2.10)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему о решении задачи Коши (4.2.1) – (4.2.2)

Теорема 4.2.1. *Если* $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, *а* $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, *то функция* (4.2.10) *является функцией из класса* $C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворяет уравнению* (4.2.1) *и условиям* (4.2.2).

Выражение (4.2.10) называется *формулой Даламбера*, являющейся решением задачи Коши (4.2.1) – (4.2.2) для одномерного однородного волнового уравнения.

4.2.2. Смешанная задача в четверти плоскости

Путем приведения к каноническому виду уравнения (4.2.1) найдем решение смешанной задачи для этого уравнения в четверти плоскости $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$.

Постановка этой задачи следующая: найти решение в области $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$ уравнения (4.2.1), для решения которого заданы начальные и граничное условия

$$\begin{aligned} &u\Big|_{x_0=0} = \varphi(x_1),\ \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(x_1), \quad x_1 \in (0,\infty), \\ &u\Big|_{x_1=0} = \mu(x_0), \quad x_0 \in (0,\infty), \end{aligned} \qquad (4.2.11)$$

для $x_0, x_1 \in (0,\infty)$.

Для нахождения решения поставленной смешанной задачи воспользуемся общим решением задачи (4.2.7) уравнения (4.2.1). Выбирая из (4.2.7) решение, удовлетворяющее начальным условиям, воспользоваться формулой (4.2.10) не можем по следующей причине. В нашей смешанной задаче функции $\varphi : (0,\infty) \ni x_1 \to \varphi(x_1) \in \mathbb{R}$ и

$\psi : (0,\infty) \ni x_1 \to \psi(x_1) \in \mathbb{R}$ определены на интервале $(0,\infty)$ положительных действительных чисел. А если обратиться опять к формуле (4.2.10), то видно, что в ней функции φ и ψ должны быть определены как от положительных, так и от отрицательных независимых переменных.

В связи с этим область $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$ разобьем на две части: $Q^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in Q | x_1 - ax_0 > 0\}$ и $Q^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \in Q | x_1 - ax_0 < 0\}$. Для определенности считаем $a > 0$. Так как $\boldsymbol{x} \in Q$, то для этих всех $\boldsymbol{x}$ и $a > 0$ соотношение всегда $x_1 + ax_0 > 0$. Поэтому необходимо только следить за выражением $x_1 - ax_0$. В декартовой системе x_0Ox_1 луч $x_1 = ax_0$ разделяет $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$ на две подобласти $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$. Для $\boldsymbol{x} \in Q^{(1)}$ $x_1 + ax_0 > 0$ и $x_1 - ax_0 > 0$. В этом случае можно воспользоваться фор-

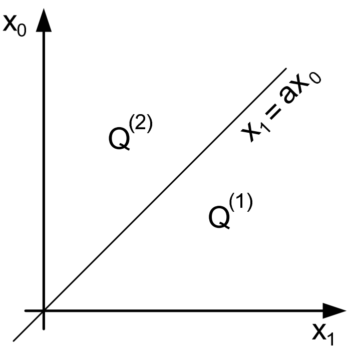

Рис. 4.1

мулой Даламбера (4.2.10) и решение смешанной задачи в подобласти $Q^{(1)}$ запишется в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\varphi(x_1 + ax_0) + \varphi(x_1 - ax_0)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_1 - ax_0}^{x_1 + ax_0} \psi(\xi) \mathrm{d}\xi, \quad \boldsymbol{x} \in Q^{(1)}. \tag{4.2.12}$$

Для отыскания решения в $Q^{(2)}$ обратимся к общему решению (4.2.7). Здесь необходимо определить функцию $v^{(2)}$ от отрицательного аргумента, так как $x_1 - ax_0 < 0$, если $\boldsymbol{x} \in Q^{(2)}$. Для этого воспользуемся граничным условием из (4.2.11). Итак, выбираем из общего решения (4.2.7) то решение, которое удовлетворяет этому условию:

$$u\Big|_{x_1=0} = v^{(2)}(-ax_0) + v^{(3)}(ax_0) = \mu(x_0),\ x_0 \in (0,\infty),$$

или

$$v^{(2)}(-s) + v^{(3)}(s) = \mu\Big(\frac{s}{a}\Big), \quad s \in (0,\infty),$$

$$v^{(2)}(-s) = \mu\Big(\frac{s}{a}\Big) - v^{(3)}(s), \quad s \in (0,\infty). \tag{4.2.13}$$

Функция $v^{(3)}(s)$ определяется из первого уравнения (4.2.8) и (4.2.9) и

$$v^{(3)}(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^s \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{C}{2}, \quad s \in (0,\infty). \tag{4.2.14}$$

Таким образом,

$$v^{(2)}(-s) = \mu\Big(\frac{s}{a}\Big) - \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^s \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{C}{2}, \quad s \in (0,\infty). \tag{4.2.15}$$

Значения функций $v^{(2)}$ и $v^{(3)}$, определенные через заданные функции φ и ψ начальных условий для $x_1 \in (0,\infty)$ и μ граничного условия из (4.2.11) по формулам (4.2.14) и (4.2.15), подставляем в общее решение (4.2.7). В результате получаем решение $u(\boldsymbol{x})$ для $\boldsymbol{x} \in Q^{(2)}$, а именно:

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\varphi(ax_0 + x_1) - \varphi(ax_0 - x_1)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{ax_0 - x_1}^{ax_0 + x_1} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \mu\Big(x_0 - \frac{x_1}{a}\Big), \tag{4.2.16}$$

где $\boldsymbol{x} \in Q^{(2)}$.

Формулами (4.2.12) и (4.2.16) определяется решение задачи (4.2.1), (4.2.11) в области $Q^{(1)} \cup Q^{(2)}$. Но нам необходимо найти решение в области $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$. С этой целью потребуем, чтобы для функций, определяемых формулами (4.2.12) и (4.2.16), предельные значения их и их производных $\partial^j u/\partial {x_i}^j, i = 0,1; j = 0,1,2$, совпадали при переходе через границу раздела $x_1 = ax_0$ областей $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$. Для доказательства этого факта потребуются условия согласования на функции φ, ψ и μ следующего вида:

$$\varphi(0) = \mu(0),\ \psi(0) = \mu'(0),\ \varphi''(0) = \mu''(0). \tag{4.2.17}$$

Проверим, что условия (4.2.17) обеспечивают непрерывность решения и его производных первого и второго порядков при переходе через луч $x_1 = ax_0$.

Действительно, предельное значение функции (4.2.12) на луче $x_1 = ax_0$ есть выражение

$$\frac{\varphi(2x_1) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2x_1} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{4.2.18}$$

а функции (4.2.16)

$$\frac{\varphi(2x_1)-\varphi(0)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{2x_1}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\mu(0). \qquad (4.2.19)$$

Выражения (4.2.18) и (4.2.19) сравниваем между собой. В результате получим первое условие из (4.2.17).

Проверяем совпадение производной $\dfrac{\partial u}{\partial x_0}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_1=ax_0} &= \frac{1}{2}\Big[a\varphi'(2x_1)-a\varphi'(0)\Big]+\frac{1}{2}\big[\psi(2x_1)-\psi(0)\big]+\mu'(0)=\\ &= \frac{1}{2}\Big[a\varphi'(2x_1)-a\varphi'(0)\Big]+\frac{1}{2}\big[\psi(2x_1)+\psi(0)\big].\end{aligned}$$

По этой схеме проверяются совпадение и производных $\partial u/\partial x_1, \partial^2 u/\partial {x_0}^2$ и $\partial^2 u/\partial {x_1}^2$ при $x_1 = ax_0$ для функций, определяемых формулами (4.2.12) и (4.2.16).

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4.2.2. *Пусть функции* φ, μ : $[0,\infty) \ni x \to \varphi(x)$, $\mu(x) \in \mathbb{R}$ *принадлежат классу* $C^2([0,\infty))$, *функция* $\psi : [0,\infty) \ni x \to \to \psi(x) \in \mathbb{R}$ *из класса* $C^1([0,\infty))$ *и выполняются условия согласования* (4.2.17). *Тогда функции* (4.2.12) *и* (4.2.16) *в совокупности представляют функцию из класса* $C^2\big([0,\infty)\times[0,\infty)\big) = C^2(\overline{Q})$ *и она удовлетворяет в* Q *уравнению* (4.2.1), *на* $[0,\infty)$ *− условиям Коши и граничному условию* (4.2.11).

4.3. Формула Кирхгофа

Используя формулу (4.2.16) и оператор осреднения функции по сфере можно получить формулу решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в случае независимых переменных $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$.

4.3.1. Осреднение функций по сфере

Пусть функция $v(\boldsymbol{x})$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ принадлежит классу $C(\mathbb{R}^3)$. Рассмотрим осреднения функций $v(\boldsymbol{x})$ по сфере с помощью интегральных соотношений

$$
\begin{aligned}
J_v(\boldsymbol{x},r) &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|=1} v(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y})\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|=r} v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=r} v(\boldsymbol{y})\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}},
\end{aligned} \tag{4.3.1}
$$

где $|\boldsymbol{y}| = \|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^3}, r \in [0,\infty) \subset \mathbb{R}$. Сформулируем некоторые свойства этих операторов осреднения, которые легко доказываются:

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ J_v(\boldsymbol{x},0) = v(\boldsymbol{x}); \\
&\bullet\ \lim_{r\to 0} J_v(\boldsymbol{x},r) = v(\boldsymbol{x}).
\end{aligned} \tag{4.3.2}
$$

Наряду с оператором $J_v : v(\boldsymbol{x}) \to J_v(\boldsymbol{x},r)$ введем оператор $\mathcal{M}_r : v(\boldsymbol{x}) \to \mathcal{M}_r v(\boldsymbol{x}) = rJ_v(\boldsymbol{x},r)$. С учетом свойств (4.3.2) запишем легко доказываемые свойства для оператора $\mathcal{M}_r$:

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ \lim_{r\to 0} \mathcal{M}_r v(\boldsymbol{x}) = 0; \\
&\bullet\ \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{M}_r v(\boldsymbol{x})}{r} = v(\boldsymbol{x}); \\
&\bullet\ \frac{\partial}{\partial r}\mathcal{M}_r v(\boldsymbol{x})\Big|_{r=0} = \lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{M}_r v(\boldsymbol{x})}{r} = v(\boldsymbol{x}).
\end{aligned} \tag{4.3.3}
$$

Лемма 4.3.1. *Для любой функции $v \in C^2(\mathbb{R}^3)$ справедлива формула*

$$
\Delta_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}_r v(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathcal{M}_r v(\boldsymbol{x}), \tag{4.3.4}
$$

где $r \in (0,\infty) \subset \mathbb{R}, \Delta_{\boldsymbol{x}} = \sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$.

Доказательство. Рассмотрим объемный интеграл по шару радиуса r от функции $v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ по переменным $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, преобразуя его в повторный

$$
\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\leqslant r} v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int\limits_0^r \mathrm{d}\rho \int\limits_{|\boldsymbol{y}|=\rho} v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 4\pi\int\limits_0^r \rho^2 J_v(\boldsymbol{x},\rho)\mathrm{d}\rho. \tag{4.3.5}
$$

Применяем оператор Лапласа $\Delta_{\boldsymbol{x}}$ по переменным $\boldsymbol{x}$ к обеим частям равенства (4.3.5). В силу достаточной гладкости функции v оператор $\Delta_{\boldsymbol{x}}$ можно подносить под знак интегралов. В результате воздействия оператора $\Delta_{\boldsymbol{x}}$ на равенство (4.3.5) получим

$$\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\leqslant r} \Delta_{\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 4\pi\int\limits_0^r \rho^2\Delta_{\boldsymbol{x}} J_v(\boldsymbol{x},\rho)\mathrm{d}\rho.$$

Левую часть последнего равенства преобразуем, применяя при этом известную формулу Остроградского. Итак,

$$\begin{gathered}
4\pi\int\limits_0^r \rho^2\Delta_{\boldsymbol{x}} J_v(\boldsymbol{x},\rho)\,\mathrm{d}\rho = \int\limits_{|\boldsymbol{y}|\leqslant r} \Delta_{\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\
\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\leqslant r} \Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int\limits_{|\boldsymbol{y}|\leqslant r} \mathrm{div}_{\boldsymbol{y}}\,\mathbf{grad}_{\boldsymbol{y}}\, v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\
\int\limits_{|\boldsymbol{y}|=r} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\frac{y_i}{r}\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = \int\limits_{|\boldsymbol{y}|=1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y})}{\partial (ry_i)} y_i r^2\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = \\
\int\limits_{|\boldsymbol{y}|=1} \frac{\partial v(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y})}{\partial r} r^2\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = r^2 4\pi\frac{\partial}{\partial r} J_v(\boldsymbol{x},r).
\end{gathered} \tag{4.3.6}$$

В равенстве (4.3.6) производим сокращение на 4π и дифференцируем обе части его по переменному r. В результате получим равенство

$$r^2\Delta_{\boldsymbol{x}} J_v(\boldsymbol{x},r) = 2r\frac{\partial}{\partial r}J_v(\boldsymbol{x},r) + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}J_v(\boldsymbol{x},r) = r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathcal{M}_r v(\boldsymbol{x}).$$

Последнее равенство — фактически доказываемое равенство (4.3.4). Тем самым, доказана лемма 4.3.1. $\otimes$

4.3.2. Вывод формулы Кирхгофа

Выведем формулу Кирхгофа, которая является решением задачи Коши для однородного волнового уравнения в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с учетом временной независимой переменной.

Постановка задачи Коши. Найти в области $Q = (0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ решение $u(\boldsymbol{x}) = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_0}^2} - a^2\Delta_{\boldsymbol{x}'} u = 0, \boldsymbol{x}\in Q, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3), \tag{4.3.7}$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$u\Big|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'),\ \ \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3. \tag{4.3.8}$$

Сведем задачу (4.3.7) – (4.3.8) к более простой задаче, которая рассмотрена в п.4.2.2 предыдущего параграфа. Для этого к обеим частям уравнения (4.3.7) и условиям (4.3.8) применим оператор осреднения по сфере $\mathcal{M}_r$ по независимым переменным $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3)$, используя при этом равенство (4.3.4) леммы 4.3.1. В результате этой процедуры получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2}{\partial {x_0}^2}\mathcal{M}_r u(\boldsymbol{x}) - a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathcal{M}_r u(\boldsymbol{x}) = 0,\ x_0 > 0,\ r > 0, \tag{4.3.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r u\Big|_{x_0=0} &= \mathcal{M}_r\varphi(\boldsymbol{x}'),\\ \frac{\partial \mathcal{M}_r u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} &= \mathcal{M}_r\psi(\boldsymbol{x}'), \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

$$\mathcal{M}_r u(\boldsymbol{x})\Big|_{r=0} = \lim_{r\to 0}\mathcal{M}_r u(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{4.3.11}$$

Задачу (4.3.9) – (4.3.11) рассматриваем относительно искомой функции $\mathcal{M}_r u(x)$ независимых переменных x_0 и r в области $\widetilde{Q} = (0,\infty) \times (0,\infty)$. Здесь независимые переменные $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3)$ играют роль параметров. Наша окончательная цель найти решение задачи Коши (4.3.7) – (4.3.8) по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{M}_r u(\boldsymbol{x})}{r}. \tag{4.3.12}$$

А теперь обращаемся к формулам решения в $\widetilde{Q}$ смешанной задачи пункта 4.2.2 параграфа 4.2. Решение этой задачи определяется формулами (4.2.12) и (4.2.16). Нам необходимо найти предел при $r \to 0$ по формуле (4.3.12) для каждого фиксированного $\boldsymbol{x} \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3$. Это означает, что для $x_0 > 0$ в зависимости от его величины при $r \to 0$ для достаточно малых значений параметра r будет выполняться неравенство $r < ax_0$. Исходя из этого для определения $\mathcal{M}_r u(x)$ следует воспользоваться формулой (4.2.16), т. е.

$$\mathcal{M}_r u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ax_0+r}\varphi(\boldsymbol{x}') - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ax_0-r}\varphi(\boldsymbol{x}') + \frac{1}{2a}\int\limits_{ax_0-r}^{ax_0+r}\mathcal{M}_\xi\psi(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\xi.$$

Отсюда

$$u(\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{M}_r u(\boldsymbol{x})}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\mathcal{M}_r\varphi(\boldsymbol{x}')\Big|_{r=ax_0} + \frac{ax_0}{a}J_\psi(\boldsymbol{x}',ax_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_0}\Bigg(x_0\int\limits_{|\boldsymbol{y}'|=1}\varphi(\boldsymbol{x}'+ax_0\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}'}\Bigg)+ \\ + \frac{x_0}{4\pi}\int\limits_{|\boldsymbol{y}'|=1}\psi(\boldsymbol{x}'+ax_0\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}'} = \tag{4.3.13}$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\Bigg[\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{1}{x_0}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=ax_0}\varphi(\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}'}\Big) + \frac{1}{x_0}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=ax_0}\psi(\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}'}\Bigg].$$

Формула (4.3.13) называется *формулой Кирхгофа*. Из формулы Кирхгофа видно, что если функции $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, то функция $u \in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$ и является решением задачи (4.3.7) – (4.3.8), единственным в классе функций $C^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$. То, что функция (4.3.13) является решением, следует из рассуждений вывода этой формулы, или можно убедиться непосредственной проверкой путем подстановки (4.3.13) в уравнение (4.3.7) и условия (4.3.8). Единственность доказывается методом предположения от противного существования двух решений. Из того, что задача (4.3.7) – (4.3.8) линейная, разность двух решений удовлетворяет однородному уравнению (4.3.7) и однородным начальным условиям (4.3.8). Отсюда и из формулы (4.3.13) имеем совпадение предполагаемых решений. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3.1. *Если функции $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, входящие в качестве заданных в начальные условия* (4.3.8)*, то существует и единственно решение задачи Коши* (4.3.7) – (4.3.8) *в классе $C^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$, которое определяется формулой Кирхгофа* (4.3.13).

4.3.3. Формула Пуассона для волнового уравнения

В п. 4.2 получена формула Даламбера, которая является решением задачи Коши однородного волнового уравнения в случае двух независимых переменных, а в случае четырех независимых переменных этой задачи, как уже известно, решением является формула Кирхгофа. В случае трех независимых переменных формула решения задачи Коши однородного волнового уравнения отсутствует.

Эту формулу можно получить из формулы Кирхгофа, рассматривая в ней функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x})$ только от двух независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ вместо трех.

Рассмотрим теперь задачу Коши в случае трех независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_0}^2} - a^2 \Delta_{\boldsymbol{x}'} u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \big((0,\infty) \times \mathbb{R}^2\big) = Q, \tag{4.3.14}$$

$$u\Big|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2, \tag{4.3.15}$$

где $\Delta_{\boldsymbol{x}'} = \partial^2/\partial {x_1}^2 + \partial^2/\partial {x_2}^2$.

Как было сказано, для отыскания решения задачи (4.3.14) – (4.3.15) воспользуемся формулой Кирхгофа (4.3.13), в которой считаем, что функции φ и ψ зависят только от двух независимых переменных x_1 и x_2. В связи с этим поверхностные интегралы в (4.3.13) преобразуем через двойные интегралы по проекции Ω этой поверхности S (сферы с центром в точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$) на координатную плоскость переменных $\boldsymbol{y}' = (y_1, y_2)$. Для этого используем формулу

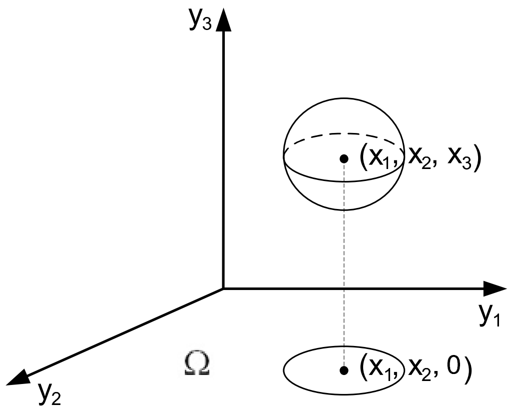

Рис. 4.2

$$\int\limits_S v(y_1,y_2,y_3)\,\mathrm{d}s = \int\limits_\Omega v(y_1,y_2,y_3(y_1,y_2))\frac{1}{\cos(\boldsymbol{\nu},y_3)}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2, \tag{4.3.16}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали в точках поверхности S.

Уравнение поверхности, по которой ведется интегрирование в (4.3.13), записывается в виде

$$y_3 = x_3 \pm \sqrt{a^2 x_0{}^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2} = x_3 \pm \sqrt{a^2 x_0^2 - |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'|^2},$$
$$\cos(\boldsymbol{\nu}, y_3) = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + (\frac{\partial y_3}{\partial y_1})^2 + (\frac{\partial y_3}{\partial y_2})^2}} = \frac{\pm\sqrt{a^2 x_0^2 - |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'|^2}}{a x_0}. \qquad (4.3.17)$$

Используя формулу перехода (4.3.16) для интегралов в (4.3.13) и в силу (4.3.17), из формулы Кирхгофа получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|\leqslant a x_0} \frac{\varphi(\boldsymbol{y}')}{\sqrt{a^2 x_0{}^2 - |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'|^2}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}' + \right. \\ &\left. + \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|\leqslant a x_0} \frac{\psi(\boldsymbol{y}')}{\sqrt{a^2 x_0{}^2 - |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'|^2}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}'\right], \end{aligned} \qquad (4.3.18)$$

где $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_3)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y}' = (y_1, y_2)$.

Формула (4.3.18) называется *формулой Пуассона* и она при условии, что $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$ и $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, является решением задачи Коши (4.3.14) – (4.3.15) из класса $C^2\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^2\big)$, при этом единственным решением из этого класса.

Замечание 4.3.1. Метод получения формулы Пуассона (4.3.18) из формулы Кирхгофа называют еще метод спуска из большей размерности на случай меньшей размерности.

4.3.4. Вывод формулы Даламбера из формулы Пуассона

Методом спуска из формулы Пуассона (4.3.18) можно получить формулу Даламбера (4.2.10). Для этого в (4.3.18) функции φ и ψ рассматриваем от одного независимого переменного $y_1 \in \mathbb{R}$, записывая двойные интегралы через повторные.

Итак,

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x}) &= u(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0}\varphi(y_1)\mathrm{d}y_1\int\limits_A^B\frac{\mathrm{d}y_2}{\sqrt{a^2{x_0}^2-|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|^2}}+\\
&+ \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0}\psi(y_1)dy_1\int\limits_A^B\frac{\mathrm{d}y_2}{\sqrt{a^2{x_0}^2-|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|^2}}=\\
&= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0}\varphi(y_1)\mathrm{d}y_1\arcsin\frac{y_2-x_2}{\sqrt{a^2{x_0}^2-(x_1-y_1)^2}}\Bigg|_{y_2=A}^{y_2=B}+\\
&+ \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0}\psi(y_1)\mathrm{d}y_1\arcsin\frac{y_2-x_2}{\sqrt{a^2{x_0}^2-(x_1-y_1)^2}}\Bigg|_{y_2=A}^{y_2=B}=\\
&= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0}\varphi(y_1)\mathrm{d}y_1+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0}\psi(y_1)\mathrm{d}y_1=\\
&= \frac{1}{2}\big[\varphi(x_1+ax_0)+\varphi(x_1-ax_0)\big]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0}\psi(y_1)\mathrm{d}y_1,
\end{aligned}
$$

где $A = x_2-\sqrt{a^2{x_0}^2-(x_1-y_1)^2}$, $B = x_2+\sqrt{a^2{x_0}^2-(x_1-y_1)^2}$.

4.3.5. Принцип Гюйгенса

Рассмотрим формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера, дающие решения задачи Коши для однородного уравнения соответственно в трехмерном, двумерном и одномерном случаях относительно пространственных переменных, т. е. уравнения

$$
u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{1}{x_0}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=ax_0}\varphi(\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s\Big)+\frac{1}{x_0}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=ax_0}\psi(\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s\right],
$$

$$
\boldsymbol{x}\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \tag{4.3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi a}\Bigg[\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|\leqslant ax_0}\frac{\varphi(\boldsymbol{y}')}{\sqrt{a^2x_0^2-|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}'\Big)+\\
+\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|\leqslant ax_0}\frac{\psi(\boldsymbol{y}')}{\sqrt{a^2x_0^2-|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}'\Bigg],
\end{aligned} \tag{4.3.20}
$$

где $\boldsymbol{x} = (x_0,\boldsymbol{x}') \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$,

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\varphi(x_1 + ax_0) + \varphi(x_1 - ax_0)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0} \psi(y)\,\mathrm{d}y,\ \boldsymbol{x} \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \tag{4.3.21}$$

Обратимся к формуле (4.3.19). Пусть в этой формуле начальные функции $\varphi(\boldsymbol{y}')$ и $\psi(\boldsymbol{y}')$ не равны нулю лишь в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ (см. рис. 4.3).

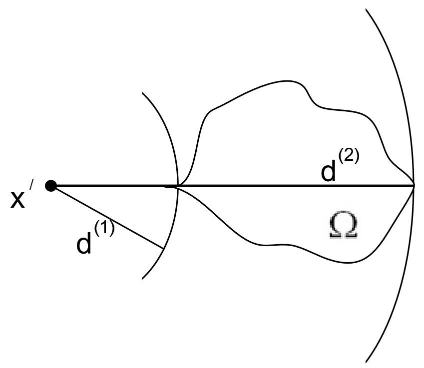

Рис. 4.3

Будем наблюдать за состоянием среды в точке $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3)$. Обозначим расстояние от $\boldsymbol{x}'$ до области $\boldsymbol{\Omega}$ через $\mathrm{d}^{(1)}$, а через $\mathrm{d}^{(2)}$ — расстояние от $\boldsymbol{x}'$ до наиболее удаленной от нее точки $\overline{\boldsymbol{\Omega}}$. Для $x_0 < x_0^{(1)}$, $x_0^{(1)} = \mathrm{d}^{(1)}/a$, поверхности, по которым ведется интегрирование в (4.3.19), не пересекают области $\boldsymbol{\Omega}$ и, следовательно, значения интегралов здесь равны нулю, т. е. $u(\boldsymbol{x}) = 0$ в (4.3.19) для $x_0 \leqslant x_0^{(1)}$. Но как только при $x_0 > x_0^{(1)}$ сфера точек $\{\boldsymbol{y}' |\, |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'| = ax_0\}$ с центром в точке $\boldsymbol{x}'$ начинает пересекать носители функций $\varphi(\boldsymbol{y}')$ и $\psi(\boldsymbol{y}')$. В точке $\boldsymbol{x}'$ наблюдаем резко очерченный передний фронт волны. Колебания в точке $\boldsymbol{x}'$ наблюдаем до тех пор, пока сфера, по которой ведется интегрирование, пересекает носители функций из начальных условий. Но как только расширяющаяся сфера интегрирования с центром в точке $\boldsymbol{x}'$ прекратит пересекать носители функций $\varphi(\boldsymbol{y}')$ и $\psi(\boldsymbol{y}')$ наблюдаем резко очерченный задний фронт волны (справедлив принцип Гюйгенса). Это возможно, по крайней мере, для $x_0 \geqslant \mathrm{d}^{(2)}/a$.

Пусть функция $u : \mathbb{R}^n \supset Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$.

Определение 4.3.1. Замыкание подмножества из Q, на котором значения $u(\boldsymbol{x})$ не равны нулю, называется носителем функции u и обозначается $\operatorname{supp}\ u$, т. е. $\operatorname{supp}\ u = \overline{\{\boldsymbol{x} : u(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$.

Если область Ω является неограниченной, где объединение носителей $\operatorname{supp}\ \varphi(\boldsymbol{y}') \cup \operatorname{supp}\ \psi(\boldsymbol{y}') = \overline{\Omega}$, то мы в точке $\boldsymbol{x}' \notin \Omega$ можем наблюдать только резко очерченный передний фронт волны.

Если точка $\boldsymbol{x}' \in \Omega$, то в этом случае нет в $\boldsymbol{x}'$ резко очерченного переднего фронта волны.

Рассмотрим формулу Пуассона (4.3.20). Здесь интегрирование ведется по шару $\{\boldsymbol{y}' |\, |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'| \leqslant ax_0\}$ с центром в точке $\boldsymbol{x}'$. Если в этом случае $\overline{\Omega} = \operatorname{supp}\ \varphi(\boldsymbol{y}') \cup \operatorname{supp}\ \psi(\boldsymbol{y}')$ является и ограниченным множеством, то мы все время в $\boldsymbol{x}'$ будем наблюдать размытый задний фронт волны. Это связано с тем, что если формулу (4.3.20) рассматривать в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, а не в $\mathbb{R}^2$ относительно переменных $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{y}'$, то мы будем всегда иметь неограниченную цилиндрическую область носителей функций $\varphi(y_1, y_2)$ и $\psi(y_1, y_2)$ (y_3 свободная).

Аналогичная ситуация и с формулой Даламбера.

4.4. Метод Дюамеля

Формулы Даламбера (4.2.10), Пуассона (4.3.18), Кирхгофа (4.3.13) являются решениями задачи Коши для однородного волнового уравнения. С помощью этих же формул можно выписать решения этой задачи и для неоднородного волнового уравнения методом вариации произвольной функции. Запишем рассматриваемую теперь задачу.

Постановка задачи. Относительно искомой функции $u(\boldsymbol{x})$ рассматривается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \triangle_{\boldsymbol{x}'} u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in ((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) = Q, \quad n = 1, 2, 3, \quad (4.4.1)$$

удовлетворяющей начальным условиям

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \quad (4.4.2)$$

где $\triangle_{\boldsymbol{x}'} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Задачу (4.4.1) – (4.4.2), используя линейность, разобьем на две части:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_0^2} - a^2 \triangle_{\boldsymbol{x}'} \tilde{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in Q, \tag{4.4.3}$$

$$\tilde{u}|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'),\ \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4.4}$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - a^2 \triangle_{\boldsymbol{x}'} v = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q, \tag{4.4.5}$$

$$v|_{x_0=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = 0, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \quad n = 1, 2, 3. \tag{4.4.6}$$

Очевидно, что $u(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}(\boldsymbol{x}) + v(\boldsymbol{x})$ является решением задачи (4.4.1) – (4.4.2).

Как сказано было в начале параграфа, решения задачи (4.4.3) – (4.4.4) записываются с помощью формул Даламбера (n=1), Пуассона (n=2) и Кирхгофа (n=3). С помощью этих же формул можно найти решение и задачи (4.4.5) – (4.4.6). Утвердительный ответ дает следующая лемма.

Лемма 4.4.1. *Пусть* $\omega(x_0,\tau,\boldsymbol{x}')$ *– решение задачи Коши:*

$$\frac{\partial^2 \omega(x_0,\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial x_0^2} - a^2 \triangle_{\boldsymbol{x}'} \omega(x_0,\tau,\boldsymbol{x}') = 0, \quad x_0, \tau \in (0,\infty),\ \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4.7}$$

$$\omega|_{x_0=0} = 0, \left.\frac{\partial \omega}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = f(\tau,\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4.8}$$

Тогда функция

$$v(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_0} \omega(x_0 - \tau,\tau,\boldsymbol{x}') \mathrm{d}\tau \tag{4.4.9}$$

является решением задачи (4.4.5) – (4.4.6).

Доказательство. Доказательство леммы 4.4.1 проводится непосредственной подстановкой функции (4.4.9) в уравнение (4.4.5) и условиям (4.4.6), принимая во внимание уравнение (4.4.7) и условия (4.4.8).

Действительно,

$$v(\boldsymbol{x})|_{x_0=0} = \int_0^0 \omega(x_0 - \tau,\tau,\boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}\tau = 0.$$

Производная по x_0

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_0} = \omega(0,x_0,\boldsymbol{x}') + \int\limits_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0}\omega(x_0-\tau,\tau,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\tau.$$

Отсюда и в силу первого условия (4.4.8)

$$\left.\frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = 0.$$

А теперь проверяем, что функция $v(\boldsymbol{x})$ (4.4.9) удовлетворяет уравнению (4.4.5). Для этого вычисляем производные от функции (4.4.9), учитывая второе условие из (4.4.8),

$$\frac{\partial^2 v(\boldsymbol{x})}{\partial x_0^2} = \left.\frac{\partial\omega(x_0-\tau,\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial(x_0-\tau)}\right|_{\tau=x_0} + \int\limits_0^{x_0} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\omega(x_0-\tau,\tau,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= f(\boldsymbol{x}) + \int\limits_0^{x_0} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\omega(x_0-\tau,\tau,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\tau.$$

Значение производной подставляем в уравнение (4.4.5). Учитывая уравнение (4.4.7), в результате получим

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - a^2\triangle_{\boldsymbol{x}'}\Big)v(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \int\limits_0^{x_0} (\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - a^2\triangle_{\boldsymbol{x}'})\omega(x_0-\tau,\tau,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\tau = f(\boldsymbol{x}).$$

Таким образом, лемма 4.4.1 доказана. $\otimes$

С помощью формул (4.2.10), (4.3.18) и (4.3.13) запишем решения задачи (4.4.5) – (4.4.6). Из формулы Кирхгофа

$$v(\boldsymbol{x}) = \int\limits_0^{x_0} \frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{x_0-\tau} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=a(x_0-\tau)} f(\tau,\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}'}\,\mathrm{d}\tau,$$

или, после замены $a(x_0-\tau)=\xi$,

$$\begin{aligned} v(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{ax_0} \frac{a}{\xi} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\xi} f(x_0-\frac{\xi}{a},\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}'}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|\leqslant ax_0} \frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|} f(x_0-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|}{a},\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}'. \end{aligned} \qquad (4.4.10)$$

При $n = 2$

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^{x_0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| \leqslant a(x_0-\tau)} \frac{f(\tau,\boldsymbol{y}')}{\sqrt{a^2(x_0-\tau)^2 - |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|^2}}\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}'. \quad (4.4.11)$$

Согласно формуле Даламбера при $n = 1$

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^{x_0} \int\limits_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)} f(\tau,y)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}y. \quad (4.4.12)$$

Объединяя полученные результаты этого параграфа с предыдущими при решении задачи Коши для волнового уравнения, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.4.1. *Если функции φ, ψ, f таковы, что $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$ при $n = 1$ и $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ при $n = 2, 3$, то существует единственное решение $u(\boldsymbol{x}) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ задачи Коши* (4.4.1) − (4.4.2) *и*

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[\varphi(x_1 + ax_0) + \varphi(x_1 - ax_0)] + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_1-ax_0}^{x_1+ax_0} \psi(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int\limits_0^{x_0} \int\limits_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)} f(\tau,y)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}y, \quad n = 1;$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| \leqslant ax_0} \frac{\varphi(\boldsymbol{y}')}{\sqrt{a^2x_0^2 - |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|^2}} \mathrm{d}\boldsymbol{y}' + \right. \\ + \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| \leqslant ax_0} \frac{\psi(\boldsymbol{y}')}{\sqrt{a^2x_0^2 - |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|^2}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}' + \\ \left. + \int\limits_0^{x_0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'| \leqslant a(x_0-\tau)} \frac{f(\tau,\boldsymbol{y}')}{\sqrt{a^2(x_0-\tau)^2 - |\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|^2}}\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}' \right], \quad n = 2;$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{1}{x_0}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=ax_0}\varphi(\boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}'}\Big)+\right.$$
$$+\frac{1}{x_0}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=ax_0}\psi(\boldsymbol{y}')\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}'}+$$
$$\left.+\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|\leqslant ax_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|}f\left(x_0-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|}{a},\boldsymbol{y}'\right)\,d\boldsymbol{y}'\right],\quad n=3;$$

4.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности

В замечании 4.1.3 параграфа 4.1 рассмотрен пример задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в случае двух независимых переменных, которая не имеет решений в классе аналитических функций. Но если этот класс расширить, то окажется, что эта задача поставлена корректно. В этом параграфе будет показано, что задача Коши для уравнения теплопроводности при некоторых ограничениях на данные является корректно поставленной и будет представлена формула решения этой задачи через заданные функции правой части уравнения и начального условия.

4.5.1. Принцип минимума и максимума для уравнения теплопроводности.

Пусть Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Q^T цилиндрическую область $Q^T=\{\boldsymbol{x}|0<x_0<T,\boldsymbol{x}'\in\Omega\}$ высотой T. Граница ∂Q^T области Q^T состоит из нижнего основания $\Omega^{(0)}=\{\boldsymbol{x}|x_0=0,\boldsymbol{x}'\in\Omega\}$, верхнего основания $\Omega^{(T)}=\{\boldsymbol{x}|x_0=T,\boldsymbol{x}'\in\Omega\}$ и боковой поверхности $\Gamma^{(T)}=\{\boldsymbol{x}|x_0\in(0,T),\boldsymbol{x}'\in\partial\Omega\}$.

В области Q^T рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$$\mathscr{L}u=\frac{\partial u}{\partial x_0}-a^2\triangle u=0, \tag{4.5.1}$$

решением которого является функция $u(\boldsymbol{x})=u(x_0,\ldots,x_n)$ независимых переменных $x_0,\ldots,x_n$, $\triangle=\triangle_{\boldsymbol{x}'}=\partial^2/\partial x_1^2+\ldots+\partial^2/\partial x_n^2$.

Обозначим через $C^{1,2}(Q^T\cup\Omega^{(T)})$ множество непрерывно дифференцируемых функций по x_0 до первого порядка и по $x_i (i=1,\ldots,n)$ —

до второго порядка включительно, $C(\overline{Q^T})$ — множество непрерывных функций, заданных на $\overline{Q^T}$ — замыкании области Q^T.

Теорема 4.5.1. *Пусть функция* $u : \boldsymbol{x} \in \overline{Q^T} \longrightarrow u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ *из класса* $C(\overline{Q^T}) \cap C^{1,2}(Q^T \cup \Omega^{(T)})$ *удовлетворяет уравнению* (4.5.1). *Тогда такая функция принимает свое наименьшее и наибольшее значения на* $\Omega^{(0)}$ *или на* $\Gamma^{(T)}$.

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{Q^T}} u(\boldsymbol{x})$ и $m = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega^{(0)}\bigcup\Gamma^{(T)}} u(\boldsymbol{x})$. Чтобы доказать теорему, надо доказать равенство $M = m$.

По своему определению $m \leqslant M$. Предположим, что утверждение теоремы 4.5.1 не выполняется и $m < M$. Тогда существует точка $\overline{\boldsymbol{x}} \in Q^T \cup \Omega^{(T)}$, где $u(\overline{\boldsymbol{x}}) = M$. Рассмотрим вспомогательную функцию $v(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) + \frac{M-m}{2T}(\overline{x}_0 - x_0)$, где $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_n)$. Для всех $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(0)} \bigcup \Gamma^{(T)}$ $\overline{x}_0 - x_0 \leqslant \overline{x}_0 \leqslant T$. Поэтому $v(\boldsymbol{x})\big|_{\Omega^{(0)}\bigcup\Gamma^{(T)}} \leqslant m + \frac{M-m}{2} < M$. В то же время $v(\overline{\boldsymbol{x}}) = M$. Отсюда следует, что функция $v(\boldsymbol{x})$ на множестве $\overline{Q^T}$ принимает свое максимальное значение, а точнее, на множестве $Q^T \cup \Omega^{(T)}$. Пусть $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — та точка из $Q^T \cup \Omega^{(T)}$, значение $v(\tilde{\boldsymbol{x}})$ функции $v : \boldsymbol{x} \in \overline{Q^T} \to v(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ в которой максимальное, т. е.

$$v(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\overline{Q^T}} v(\boldsymbol{x}) = \max_{x\in Q^T\cup\Omega^{(T)}} v(\boldsymbol{x}). \qquad (4.5.2)$$

Предположим, что $\tilde{\boldsymbol{x}} \in Q^T$. Необходимые условия в этой точке $\frac{\partial v(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i} = 0$, $\frac{\partial^2 v(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i^2} \leqslant 0$, $i = 0, \ldots, n$. Учитывая это, значение оператора $\mathscr{L}$ от функции v в этой точке неотрицательно, т. е.

$$(\mathscr{L}v)(\tilde{\boldsymbol{x}}) = -a^2 \triangle v(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant 0. \qquad (4.5.3)$$

С другой стороны, вычисляем значение $\mathscr{L}v$ в этой точке с учетом определения функции v через функцию u уравнения (4.5.1). В результате получим

$$(\mathscr{L}v)(\tilde{\boldsymbol{x}}) = (\mathscr{L}u)(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \frac{M-m}{2T} = -\frac{M-m}{2T} < 0 \qquad (4.5.4)$$

в силу предположения $m < M$. Противоречие неравенств (4.5.3) и (4.5.4) указывает на то, что точка $\tilde{\boldsymbol{x}}$ не может принадлежать области Q^T.

Пусть теперь $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \Omega^{(T)}$. Тогда, так как $\tilde{\boldsymbol{x}}$ является граничной точкой замкнутого множества $\overline{Q^T}$, то

$$\frac{\partial v(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_0} \geqslant 0, \quad \frac{\partial v(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i^2} \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Мы опять имеем неравенства (4.5.3) и (4.5.4), которые противоречат друг другу и для $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \Omega^{(T)}$.

Эти противоречия указывают на то, что предположение $m < M$ было неверным. $\otimes$

Доказательство равенства

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \overline{Q^T}} u(\boldsymbol{x}) = \min_{x \in Q^T \cup \Omega^{(T)}} u(\boldsymbol{x})$$

проводится по предыдущей схеме или сводится к предыдущему путем замены функции $u(\boldsymbol{x})$ на функцию $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = -u(\boldsymbol{x})$.

4.5.2. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

В параграфе 3.7 дается постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности. Напомним ее.

Постановка задачи Коши. В области $Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ найти решение $u(\boldsymbol{x}) = u(x_0, \ldots, x_n)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} - a^2 \triangle u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q, \tag{4.5.5}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u\Big|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \tag{4.5.6}$$

$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Теорема 4.5.2. *Задача* (4.5.5) − (4.5.6) *в классе ограниченных функций и множества* $C\big([0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big) \cap C^{1,2}\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big)$ *имеет не более одного решения для заданных функций* $f(\boldsymbol{x})$ *и* $\varphi(\boldsymbol{x}')$, *если решение существует.*

Доказательство. Пусть $u^{(1)}(\boldsymbol{x})$, $u^{(2)}(\boldsymbol{x})$ — два решения задачи (4.5.5) – (4.5.6) для одних и тех же $f(\boldsymbol{x})$, $\varphi(\boldsymbol{x}')$, т. е.

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_0} - a^2 \triangle u^{(i)} = f(\boldsymbol{x}), \tag{4.5.7}$$

$$u^{(i)}\Big|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad i = 1, 2. \tag{4.5.8}$$

В силу линейности этой задачи путем вычитания друг из друга уравнений (4.5.7) и (4.5.8) для $i = 1$ и $i = 2$ соответственно, для разности $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = u^{(1)}(\boldsymbol{x}) - u^{(2)}(\boldsymbol{x})$ получим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_0} - a^2 \triangle \tilde{u} = 0 \tag{4.5.9}$$

и начальное условие

$$\tilde{u}\Big|_{x_0=0} = 0. \tag{4.5.10}$$

Так как решения $u^{(i)}$ $(i = 1,2)$ находятся в классе ограниченных функций, то их разность $\tilde{u}$ также находится в этом классе. Предположим, что $|\tilde{u}(\boldsymbol{x})| \leqslant M < +\infty$ для любых $\boldsymbol{x} \in Q$.

Обозначим через $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ шар радиуса r с центром в начале координат. В цилиндрической области $Q(r) = (0,\infty) \times B(0,r)$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(\boldsymbol{x},r) = \frac{2Mn}{r^2}\Big(\frac{|\boldsymbol{x}'|^2}{2n} + a^2 x_0\Big), \tag{4.5.11}$$

где $x_0 \in (0,\infty)$, $\boldsymbol{x}' \in B(0,r)$, $|\boldsymbol{x}'|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция (4.5.11) удовлетворяет уравнению (4.5.9). Рассмотрим значение $v(\boldsymbol{x},r)$ на нижнем основании $\Omega^{(0)}(r) = \{\boldsymbol{x} \in \overline{Q}(r) | x_0 = 0\}$ и боковой поверхности $\Gamma(r) = (0,\infty)\times$ $\times \partial B(0,r) = (0,\infty) \times \{\boldsymbol{x}' \in \overline{B(0,r)} | |\boldsymbol{x}'| = r\}$ цилиндра $Q(r)$, $\overline{B(0,r)}$ — замыкание шара $B(0,r)$.

Итак, на $\Omega^{(0)}(r)$

$$v(\boldsymbol{x},r)\Big|_{x_0=0} = \frac{M|\boldsymbol{x}'|^2}{r^2} \geqslant |\tilde{u}|\Big|_{x_0=0} = 0, \tag{4.5.12}$$

$$v(\boldsymbol{x},r)\Big|_{\Gamma(r)} = M + \frac{2Mna^2x_0}{r^2} \geqslant M \geqslant |\tilde{u}|\Big|_{\Gamma(r)}. \tag{4.5.13}$$

Из неравенств (4.5.12) и (4.5.13) для функций $v(\boldsymbol{x},r) + \tilde{u}(x)$ и $v(\boldsymbol{x},r) - \tilde{u}(x)$ на $\Omega^{(0)}(r)$ и $\Gamma(r)$ следуют оценки:

$$(v(\boldsymbol{x},r) \pm \tilde{u}(\boldsymbol{x}))\Big|_{x_0=0} \geqslant 0,$$

$$(v(\boldsymbol{x},r) \pm \tilde{u}(\boldsymbol{x}))\Big|_{\Gamma(r)} \geqslant 0.$$

Из этих неравенств и, так как функции $v(\boldsymbol{x},r) \pm \tilde{u}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяют уравнению (4.5.1), в силу теоремы (4.5.1), следуют неравенства $v(\boldsymbol{x},r) \pm \tilde{u}(x) \geqslant 0$ для всех $|\boldsymbol{x}'| \leqslant r$ и $x_0 > 0$, т. е.

$$|\tilde{u}(\boldsymbol{x})| \leqslant v(\boldsymbol{x},r) = \frac{2Mn}{r^2}(\frac{|\boldsymbol{x}'|^2}{2n} + a^2 x_0) \tag{4.5.14}$$

для всех $\boldsymbol{x} \in \overline{B(0,r)}$.

Для любой фиксированной точки $\boldsymbol{x} \in Q$ можно взять шар $B(0,r)$ достаточно большого радиуса r, для которого данная точка $\boldsymbol{x}$ будет принадлежать области $Q(r)$. Затем из неравенства (4.5.14) при $r \to \infty$ получим опять для этой точки $\boldsymbol{x}$, временно фиксированной, что $|\tilde{u}(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$ для любого наперед заданного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, т. е. $|\tilde{u}(\boldsymbol{x})| = 0$, или $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = 0$.

Все эти рассуждения справедливы для любых $\boldsymbol{x} \in Q$. Значит $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in Q$. $\otimes$

Что касается корректной постановки задачи Коши (4.5.5) – (4.5.6), кроме доказанной теоремы о единственности решения ее должны рассмотреть вопрос о существовании решения. Ниже будет доказана с помощью интегральных преобразований Фурье формула решения этой задачи.

4.5.3. Преобразование Фурье

Обозначим через $L_1(\mathbb{R}^n)$ пространство суммируемых функций, т. е. $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$, если интеграл Лебега $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$ и $\|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,\mathrm{d}x$.

Пусть функция $u : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longrightarrow u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^n)$. Преобразование Фурье $\widehat{u} : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{y} \longrightarrow \widehat{u}(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ задается формулой

$$\widehat{u}(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{4.5.15}$$

где $< \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} >= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_{\mathbb{R}^n} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n, \quad i = \sqrt{-1}$.

Изучим некоторые свойства преобразования Фурье (4.5.15). В параграфе 1.8 определено множество $C^\infty(Q)$, $Q \in (\mathbb{R}^n)$, функций $u : \mathbb{R}^n \supset Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}$.

Обозначим через $C_0^\infty(Q)$ подмножество множества $C^\infty(Q)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Q.

Пусть $Q = \mathbb{R}^n$. Тогда справедливо соотношение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ для множеств $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Введем еще промежуточное по отношению к этим множествам множество S или $S(\mathbb{R}^n)$.

Определение 4.5.1. Через $S(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать множество всех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$|\varphi|_{S(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(\boldsymbol{x})| < +\infty \tag{4.5.16}$$

для любых мультииндексов $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots ,\alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots ,\beta_n)$.

Топология в $S(\mathbb{R}^n)$ задается полунормами, определенными левой частью неравенства (4.5.16).

В силу своих определений для множеств $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $S(\mathbb{R}^n)$ справедливы соотношения $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Примером функций из $S(\mathbb{R}^n)$ является функция $\varphi(\boldsymbol{x}) = e^{-a|\boldsymbol{x}|^2}$, где $a \in \mathbb{R}$ и $a > 0$, $\quad |\boldsymbol{x}|^2 = ||\boldsymbol{x}||^2_{\mathbb{R}^n} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Справедливы следующие свойства преобразования Фурье.

Теорема 4.5.3. *Если $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, то:*

(i) преобразование Фурье $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ и отображение $S(\mathbb{R}^n) \ni \ni \varphi \longrightarrow \widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным относительно топологии, задаваемой полунормами (4.5.16)*;*

(ii) $\widehat{\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi}(\boldsymbol{y}) = iy_j\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})$;

(iii) $\widehat{ix_j\varphi}(\boldsymbol{y}) = -\dfrac{\partial}{\partial y_j}\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Согласно определению преобразования Фурье по формуле (4.5.15)

$$\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4.5.17}$$

Подынтегральное выражение в (4.5.17) умножим и разделим, например, на $(1+|\boldsymbol{x}|)^{n+1}$. Тогда

$$|\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \Big|(1+|\boldsymbol{x}|)^{n+1}\varphi(\boldsymbol{x})\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\boldsymbol{x}|)^{n+1}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Отсюда видно, что согласно определению 4.5.1,

$$|\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})| < \infty,$$

т. е. интеграл (4.5.17) равномерно сходится и, следовательно, существует, если $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим производную

$$\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}(-i\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4.5.18}$$

Так как функция $(-i\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(\boldsymbol{x}) \in S(\mathbb{R}^n)$, то в силу предыдущих рассуждений, интеграл (4.5.18) сходится равномерно и

$$|\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})| < \infty.$$

Нетрудно видеть, что функция $\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})$ и $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями относительно независимых переменных вида $y_1, \ldots, y_n$. Заметим, что для функций из $S(\mathbb{R}^n)$ можно проводить интегрирование по частям в несобственных интегралах (4.5.17), (4.5.18) и др. Учитывая это свойство, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}(i\boldsymbol{y})^{\beta}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y}) &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbf{D}_x^{\boldsymbol{\beta}} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}(-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}(-i\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}[(-i\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(\boldsymbol{x})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{4.5.19}$$

Поскольку $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, то интеграл в (4.5.19) сходится равномерно. Отсюда следует, что $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$. Кроме того

$$|\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})|_{S(\mathbb{R}^n)} \leqslant C|\varphi(\boldsymbol{y})|_{S(\mathbb{R}^n)}.$$

Последнее неравенство доказывает свойство (i), т. е. преобразование Фурье $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ и отображение $S(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \to \widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным относительно топологии, определяемой (4.5.16). Кроме того, формула (4.5.18) есть равенство

$$|\widehat{(-i\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi}| = \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\varphi}.$$

Отсюда следует свойство (iii).

Интегрируя по частям, получим соотношение

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{iy_j}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = iy_j\widehat{\varphi},$$

или свойство (ii). ⊗

Если функция $\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})$ окажется интегрируемой, то через ее можно выразить функцию $\varphi(\boldsymbol{x})$ по формуле

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{4.5.20}$$

Формула (4.5.20) называется *обратным преобразованием Фурье*.

Теорема 4.5.4. *Если $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ и справедлива формула обратного преобразования Фурье* (4.5.20).

Доказательство. То, что $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$, следует из предыдущей теоремы 4.5.3.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим повторный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}>}\varphi(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z}, \tag{4.5.21}$$

где $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Здесь нельзя изменить порядок интегрирования, так как двойной интеграл не сходится абсолютно. Чтобы устранить эту трудность, введем в выражение (4.5.21) множитель $\psi(\boldsymbol{y}) \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\psi(\boldsymbol{y})\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}.\end{aligned} \tag{4.5.22}$$

Если рассмотреть теперь функцию $\psi(\varepsilon x)$, $\quad \varepsilon > 0$, то ее преобразование Фурье

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\psi(\varepsilon\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\frac{\boldsymbol{z}}{\varepsilon},\boldsymbol{y}>}\psi(\boldsymbol{z})\frac{1}{\varepsilon^n}\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \varepsilon^{-n}\widehat{\psi}\Big(\frac{\boldsymbol{y}}{\varepsilon}\Big). \tag{4.5.23}$$

В равенстве (4.5.22) вместо функции $\psi(\boldsymbol{y})$ берем функцию $\psi(\varepsilon\boldsymbol{y})$. Тогда в силу (4.5.23) получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})\psi(\varepsilon\boldsymbol{y})e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \qquad (4.5.24)$$

В равенстве (4.5.24) функции $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}$ принадлежат пространству $S(\mathbb{R}^n)$, значит они интегрируемы. Функции φ и ψ ограничены и непрерывны. В равенстве (4.5.24) можно под знаком интегралов перейти к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Это дает равенство

$$\psi(0)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}. \qquad (4.5.25)$$

Чтобы завершить доказательство, достаточно в (4.5.25) взять в качестве функции $\psi(\boldsymbol{x}) = e^{-|\boldsymbol{x}|^2/2}$. Тогда $\psi(0) = 1$. Вычислим преобразование Фурье $\widehat{\psi}(\boldsymbol{y})$ от этой функции.

Итак,

$$\widehat{\psi}(\boldsymbol{y}) = \widehat{e^{-|\boldsymbol{x}|^2/2}} = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}e^{-|\boldsymbol{x}|^2/2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}e^{-|\boldsymbol{y}|^2/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j+iy_j)^2/2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}e^{-|\boldsymbol{y}|^2/2}\prod_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x_j+iy_j)^2/2}\,\mathrm{d}x_j.$$

Выделим j—ый множитель

$$J_j = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x_j+iy_j)^2/2}\mathrm{d}x_j = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x+iy)^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Рассмотрим плоскость комплексной переменной $\zeta = \xi+i\eta$. Построим прямоугольник с контуром γ, как показано на рис. 4.4.

Функция $e^{-\zeta^2/2}$ является аналитической. По теореме Коши

$$\int\limits_{\gamma} e^{-\zeta^2/2}\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

Распишем последнее равенство более подробно, а именно:

$$\int\limits_{N}^{-N} e^{-(\xi+iy)^2/2}\,\mathrm{d}\xi + i\int\limits_{y}^{0} e^{-(-N+i\eta)^2/2}\,\mathrm{d}\eta + \int\limits_{-N}^{N} e^{-\xi^2/2}\,\mathrm{d}\xi + i\int\limits_{0}^{y} e^{-(N+i\eta)^2/2}\,\mathrm{d}\eta = 0. \qquad (4.5.26)$$

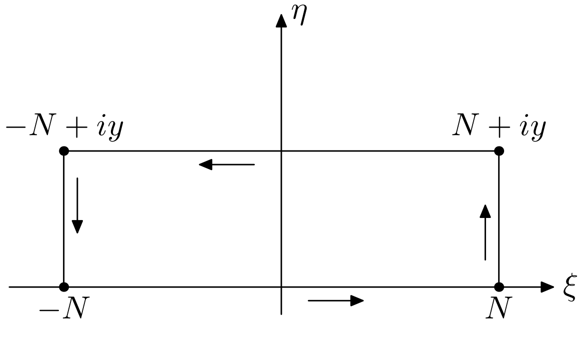

Рис. 4.4

В последнем равенстве переходим к пределу при $N \to \infty$. При этом второй и четвертый интегралы стремятся к нулю, так как

$$\left| i \int_0^y e^{-(\pm N + i\eta)^2/2}\, \mathrm{d}\eta \right| \leqslant \int_0^y e^{(-N^2+\eta^2)/2}\, \mathrm{d}\eta = e^{-N^2/2} \int_0^y e^{\eta^2/2} \mathrm{d}\eta \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Из равенства (4.5.26) при $N \to \infty$ следует, что

$$J_j = \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2/2}\, \mathrm{d}\xi = (2\pi)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\widehat{\psi}(\boldsymbol{y}) = e^{-|\boldsymbol{y}|^2/2},$$

а

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{y}|^2/2}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = (2\pi)^{n/2}.$$

Из последнего соотношения и равенства (4.5.25) следует доказываемая формула (4.5.20). $\otimes$

Теорема 4.5.5. *Если функции $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\psi \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\widehat{\psi}\, d\boldsymbol{x}, \tag{4.5.27}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}\, d\boldsymbol{x} \quad \text{(формула Парсеваля)}. \tag{4.5.28}$$

Доказательство. Равенство (4.5.27) является частным случаем равенства (4.5.22) при $\boldsymbol{x} = (0, \ldots, 0)$.

Для доказательства (4.5.28) в (4.5.27) положим $\chi(x) = \overline{\widehat{\psi}}(x)$ вместо функции ψ. Отсюда получаем равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\widehat{\overline{\widehat{\psi}}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Но $\widehat{\overline{\widehat{\psi}}} = \overline{\psi}$. Действительно, с помощью формулы обратного преобразования Фурье (4.5.20)

$$\psi(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\widehat{\psi}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\overline{\chi}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}\chi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \widehat{\chi}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\overline{\widehat{\psi}}}(\boldsymbol{x}).$$

Таким образом, формула (4.5.28) доказана.

$\otimes$

4.5.4. Пространство $L_2(\Omega)$

Пусть область Ω из $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $L_2(\Omega)$ пространство квадратично суммируемых на Ω по Лебегу функций, определенных почти всюду на $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функция $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ принадлежит $L_2(\Omega)$, если

$$\int\limits_{\Omega} u^2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} < +\infty.$$

Скалярное произведение и норма соответственно задаются формулами

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \|u\|_{L_2(\Omega)} = (u,u)^{1/2}_{L_2(\Omega)}.$$

Пространство $L_2(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

В частном случае Ω может совпадать со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

Пусть Ω — открытое ограниченное связное множество в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, для которой справедлива формула Остроградского.

Для функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ в случае ограниченных областей Ω справедливы непрерывность в среднем и непрерывность по мере.

Лемма 4.5.1. *Для любого элемента* $u \in L_2(\Omega)$ *и любого числа* $\delta > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon(u,\delta)$*, что*

$$\|u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon(u,\delta)$$

для всех $\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ *и* $\varepsilon(u,\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$. *Здесь функцию* $u \in L_2(\Omega)$ *считаем доопределенной нулем на все пространство* $\mathbb{R}^n$*, т. е.* $u(\boldsymbol{x}) = 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \notin \Omega$ *(* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$*).*

Лемма 4.5.2. *Для любого элемента* $u \in L_2(\Omega)$ *и любого числа* $\delta > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon(u,\delta)$*, что для произвольного измеримого множества* $E \subset \Omega$*, мера которого меньше* δ, *имеют место неравенства*

$$\Big|\int\limits_E u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big| < \varepsilon(u,\delta), \qquad \|u\|_{L_2(E)} < \varepsilon(u,\delta),$$

где $\varepsilon(u,\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство лемм 4.5.1 и 4.5.2 можно найти, например, в [8, стр. 45] и [23, стр. 55].

В представленных леммах число δ выбирается достаточно малым, не зависящим от функции $u(\boldsymbol{x})$, в то же время ε, участвующее в записи непрерывности в среднем и по мере, зависит от u. Эту зависимость можно поменять местами и сформулировать леммы следующим образом.

Лемма 4.5.3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой функции* $u \in L_2(\Omega)$ *существует такое число* $\delta(u) > 0$*, что* $\|u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$ *для любых* $\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(u)$.

Лемма 4.5.4. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $u \in L_2(\Omega)$ *можно указать* $\delta(u) > 0$*, что для произвольного измеримого множества* $E \subset \Omega$*, для которого мера меньше* $\delta(u)$*, имеет место неравенство*

$$\Big|\int\limits_E u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big| < \varepsilon.$$

Лемма 4.5.5. *Для любого* $u \in L_2(\Omega)$ *и* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta(u) > 0$*, что*

$$\|u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon\|u\|_{L_2(\Omega)}$$

для любых $\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(u)$.

4.5.5. Операторы осреднения Соболева

Пусть функция $\omega(\boldsymbol{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\omega(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, носитель которой supp $\omega(\boldsymbol{x}) \subset \left\{\boldsymbol{x}\middle|\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant 1\right\}$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x = 1$. В качестве такой функции можно рассматривать функцию

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = C_\varphi \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|\boldsymbol{x}|}} & , |\boldsymbol{x}| = \|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n} < 1, \\ 0 & , |\boldsymbol{x}| \geqslant 1, \end{cases}$$

где постоянная C_φ выбирается из равенства

$$C_\varphi \int\limits_{|\boldsymbol{x}|<1} e^{-\frac{1}{1-|\boldsymbol{x}|}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1.$$

Оператор $J_\delta : L_2(\Omega) \ni u \to J_\delta u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим выражением

$$J_\delta u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\delta^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta}\Big) u(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{4.5.29}$$

где $u(\boldsymbol{x}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Путем замены независимых переменных (4.5.29) можно записать в виде

$$J_\delta u(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{x} - \delta \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{4.5.30}$$

Укажем некоторые свойства оператора J_δ.

Свойство 4.5.1. Оператор J_δ расширяет носитель функции $J_\delta u$ по сравнению с носителем функции u.

Это хорошо видно из (4.5.30). Окрестность носителя функции u, на которую расширяется носитель функции $J_\delta u$, зависит от параметра δ.

Свойство 4.5.2. Если область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченной, то функция $J_\delta u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Это следует из (4.5.29) и того, что $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Если функция $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то $J_\delta u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Свойство 4.5.3. Множество $C_0^\infty(\Omega)$ является плотным множеством в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Обозначим через $\Omega_{2\delta}$ подобласть области Ω, точки которой удалены от границы $\partial\Omega$ области Ω не меньше, чем на 2δ, т. е.

$$\inf_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Omega_{2\delta},\\ \boldsymbol{y}\in\partial\Omega}} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n} \geqslant 2\delta,$$

и $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant N$ для $\boldsymbol{x} \in \Omega_{2\delta}$, $N \in \mathbb{R}$.

Пусть функция $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in \Omega_{2\delta}$ и $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = 0$ для $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega_{2\delta}$ и $|\boldsymbol{x}| > N$ для достаточно большого положительного числа $N \in \mathbb{R}$. Область Ω может быть как ограниченной так и неограниченной. В общем случае для достаточно большого $N \in \mathbb{R}$

$$\|u-\tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u-\tilde{u}\|_{L_2(\Omega_{(N)})} + \|u\|_{L_2(\Omega^{(N)})},$$

где $\Omega_{(N)} = \left\{\boldsymbol{x} \in \Omega \,\middle|\, |\boldsymbol{x}| \leqslant N\right\}$, $\Omega^{(N)} = \left\{\boldsymbol{x} \in \Omega \,\middle|\, |\boldsymbol{x}| > N\right\}$. В силу определения несобственного интеграла по неограниченной области при достаточно большом N

$$\|u\|_{L_2(\Omega^{(N)})} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее, в силу непрерывности по мере (см. лемму 4.5.4) при соответствующем выборе δ.

$$\|u-\tilde{u}\|_{L_2(\Omega_{(N)})} = \|u\|_{L_2(\Omega_{(N)}\cap(\Omega\backslash\Omega_{2\delta}))} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом,

$$\|u-\tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.31}$$

для любого наперед заданного ε для достаточно малого $\delta(u)$.

Рассмотрим оператор осреднения Соболева J_δ от функции $\tilde{u}$, которую считаем доопределенной нулем вне области Ω во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|J_\delta\tilde{u}-\tilde{u}\|^2_{L_2(\Omega)} &= \int\limits_{\Omega}(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(y)\tilde{u}(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} - \tilde{u}(\boldsymbol{x}))^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\Omega}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(y)[\tilde{u}(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\boldsymbol{y})^2 \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{\Omega}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} &\int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(\boldsymbol{y})(\tilde{u}(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x}))^2\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\int\limits_{\Omega}(\tilde{u}(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x}))^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{4.5.32}$$

Здесь использовано неравенство Буняковского относительно скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Далее, интеграл

$$\int\limits_{\Omega}(\tilde{u}(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y})-\tilde{u}(\boldsymbol{x}))^2\mathrm{d}x=\int\limits_{|x|\leqslant N+\delta}(\tilde{u}(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y})-\tilde{u}(\boldsymbol{x}))^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \qquad (4.5.33)$$

Слагаемое правой части (4.5.33) меньше наперед заданного числа $\varepsilon/2$ в силу непрерывности в среднем при интегрировании по ограниченной области и достаточно малом $\delta(u)$ (см. лемму 4.5.3).

В совокупности неравенства (4.5.31) и (4.5.33) дают неравенство

$$\|u-J_\delta\tilde{u}\|^2_{L_2(\Omega)}<\varepsilon,$$

где функция $J_\delta\tilde{u}\in C_0^\infty(\Omega)$. Тем самым доказано утверждение, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, так как в последнем неравенстве ε можно выбрать сколь угодно малым за счет малого δ. $\otimes$

Свойство 4.5.4. Функция $J_\delta\tilde{u}$ принадлежит $L_2(\Omega)$ для функции $u\in L_2(\Omega)$.

Это утверждение следует из предыдущего свойства и неравенства

$$\|J_\delta\tilde{u}-u\|_{L_2(\Omega)}\geqslant\|J_\delta\tilde{u}\|_{L_2(\Omega)}-\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема 4.5.6. *Если функция $u\in L_2(\mathbb{R}^n)$, то ее преобразование Фурье $\widehat{u}$ ((4.5.14)) также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$ и справедливо равенство Парсеваля*

$$\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}=|\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (4.5.34)$$

Доказательство. Пусть $v\in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда $J_\delta\tilde{v}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим скалярное произведение $(\widehat{u},J_\delta\tilde{v})_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ для функции $u\in L_2(\mathbb{R}^n)$. Данное скалярное произведение можно рассматривать как линейный функционал относительно элементов $J_\delta\tilde{v}$ для любых функций $v\in L_2(\mathbb{R}^n)$. Он является и непрерывным. Действительно,

$$\begin{gathered}\left|(\widehat{u},J_\delta\tilde{v})_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right|=\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}u(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}J_\delta\tilde{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big|=\\ =\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}u(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}J_\delta\tilde{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big|\leqslant\\ \leqslant\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\|\widehat{J_\delta\tilde{v}}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}=\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\|J_\delta\tilde{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.\end{gathered} \qquad (4.5.35)$$

Для доказательства неравенства (4.5.35) было использовано неравенство Коши −Буняковского относительно скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и равенство (4.5.28) из теоремы 4.5.5, так как $J_\delta \tilde{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$. В неравенстве (4.5.35) переходим к пределу при $\delta \to 0$. В результате получим неравенство

$$\left|(\widehat{u},v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right| \leqslant \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \tag{4.5.36}$$

для любой функции $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$. В силу теоремы Ф.Рисса существует единственный элемент $w \in L_2(\mathbb{R}^n)$, для которого

$$(\widehat{u},v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (w,v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда следует, что существует преобразование Фурье $\widehat{u}$ от функции u и $\widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Полагая в неравенстве (4.5.36) $v = \widehat{u}$ получим неравенство

$$\|\widehat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.5.37}$$

Теперь неравенство (4.5.37) докажем в обратную сторону. Для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, в том числе для любой $\varphi \in C_0^\infty$ согласно теореме 4.5.5

$$\big(J_\delta \tilde{v}, \varphi\big)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \big(\widehat{J_\delta \tilde{v}}, \widehat{\varphi}\big)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \big(\widehat{\widehat{J_\delta \tilde{v}}}, \varphi\big)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда в силу плотности множества C_0^∞ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (свойство 4.5.3) имеем равенство

$$J_\delta \tilde{v}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\widehat{J_\delta \tilde{v}}}(\boldsymbol{x}).$$

Используя последнее равенство и формулу (4.5.20) обратного преобразования Фурье для $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ будем иметь соотношения

$$\left|(u, J_\delta \tilde{v})_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right| = \left|(u, \widehat{\widehat{J_\delta \tilde{v}}})_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right| =$$

$$= \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>} \widehat{u}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\, \widehat{\widehat{J_\delta \tilde{v}}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left|\big(\widehat{u}, \widehat{J_\delta \tilde{v}}\big)_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right| \leqslant \|\widehat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \big\|\widehat{J_\delta \tilde{v}}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \big\|J_\delta \tilde{v}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Полученные оценки указывают на то, что линейный функционал, определенный с помощью обратного преобразования

$$u = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>} \widehat{u}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

является непрерывным функционалом на плотном множестве $\{J_\delta \tilde{v}\} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. По непрерывности он продолжается на все пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ и для любой функции $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ будем иметь неравенство
$$\left|(u,v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right| \leqslant \|\widehat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$
В силу теоремы Рисса для $\widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ существует обратное преобразование Фурье $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, определяемое формулой (4.5.20). В последнем неравенстве полагаем $u = v$ и мы получим соотношение
$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\widehat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$
которое вместе с неравенством (4.5.37) порождает доказываемое неравенство (4.5.34). $\otimes$

4.5.6. Вывод формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу Коши (4.5.5) – (4.5.6). К уравнению (4.5.5) и условию (4.5.6) применяем преобразование Фурье (4.5.15) по переменным $\boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_n)$. В результате получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:
$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\widehat{u}(x_0,\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}x_0} + a^2|\boldsymbol{y}|^2\widehat{u}(x_0,\boldsymbol{y}) = \widehat{f}(x_0,\boldsymbol{y}),\\ x_0 \in (0,\infty), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\end{gathered} \tag{4.5.38}$$
$$\widehat{u}(0,\boldsymbol{y}) = \widehat{\varphi}(\boldsymbol{y}), \tag{4.5.39}$$
где переменные $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ играют роль параметров.

Решение задачи (4.5.38) – (4.5.39), как хорошо известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, представляется формулой:
$$\widehat{u}(x_0,\boldsymbol{y}) = \widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})e^{-a^2|\boldsymbol{y}|^2 x_0} + \int\limits_0^{x_0} e^{-a^2|\boldsymbol{y}|^2(x_0-\tau)}\widehat{f}(\tau,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\tau.$$

Отсюда с помощью формулы обратного преобразования Фурье (4.5.20) можно найти решение $u(x_0,\boldsymbol{x}') = u(\boldsymbol{x})$ задачи (4.5.5) – (4.5.6)

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{y}) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\boldsymbol{z}|^2 x_0 + i<\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} + \\ &+ (2\pi)^{-n} \int\limits_0^{x_0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\tau,y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\boldsymbol{z}|^2(x_0-\tau) + i<\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>} \,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}, \end{aligned} \tag{4.5.40}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_0,\boldsymbol{x}') \in \mathbb{R}^{n+1}$; $\quad \boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$. Здесь проведены преобразования формально без обоснований, связанных с несобственными интегралами и интегрируемостью по Лебегу.

Вычислим внутренние интегралы в формуле (4.5.40). Пусть

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\boldsymbol{z}|^2 x_0 + i<\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>} \,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a^2 \boldsymbol{z}_k^2 x_0 + i(x_k-y_k)z_k} \,\mathrm{d}z_k = \prod_{k=1}^{n} J_k.$$

Для вычисления интегралов J_k поступим таким же образом, как и в аналогичной ситуации при доказательстве теоремы 4.5.4. Преобразуем интеграл J_k, чтобы применить для его вычисления теорему Коши из теории комплексного анализа,

$$J_k = e^{-\frac{(x_k-y_k)^2}{4a^2x_0}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a^2x_0(z_k - i\frac{x_k-y_k}{2a^2x_0})^2} \,\mathrm{d}z_k = e^{-\frac{(x_k-y_k)^2}{4a^2x_0}} \tilde{J}_k.$$

Для вычисления $\tilde{J}_k$ рассмотрим интеграл $\oint\limits_{\gamma} e^{-a^2x_0\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$ по замкнутому контуру γ, который является границей прямоугольника, представленного на рис. 4.5 комплексной плоскости переменных $\zeta = z_k + i\eta$, $\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}z_k + i\mathrm{d}\eta$.

Согласно теореме Коши

$$\oint\limits_{\gamma} e^{-a^2x_0\zeta^2} \,\mathrm{d}\zeta = 0. \tag{4.5.41}$$

Распишем левую часть равенства (4.5.41) с учетом того, что контур γ является достаточно простым и представляет собой границу специально выбранного прямоугольника.

$$\int\limits_{N}^{-N} e^{-a^2x_0z_k^2}\,\mathrm{d}z_k + \int\limits_{0}^{-\frac{x_k-y_k}{2a^2x_0}} ie^{-a^2x_0(-N+i\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta + \int\limits_{-N}^{N} e^{-a^2x_0(z_k-i\frac{x_k-y_k}{2a^2x_0})^2}\,\mathrm{d}z_k + \int\limits_{-\frac{x_k-y_k}{2a^2x_0}}^{0} ie^{-a^2x_0(N+i\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta = 0. \tag{4.5.42}$$

В равенстве (4.5.42) переходим к пределу при $N \to \infty$. При этом заметим, что второй и четвертый интегралы стремятся к нулю при $N \to \infty$. Это следует из оценки

$$\left|\int\limits_{0}^{-\frac{x_k-y_k}{2a^2x_0}} ie^{-a^2x_0(\pm N+i\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta\right| \leqslant \int\limits_{0}^{\frac{|x_k-y_k|}{2a^2x_0}} e^{-a^2x_0(N^2-\eta^2)}\,\mathrm{d}\eta = e^{-a^2x_0N^2} \int\limits_{0}^{\frac{|x_k-y_k|}{2a^2x_0}} e^{a^2x_0\eta^2}\,\mathrm{d}\eta,$$

где правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $N \to \infty$. С учетом этого обстоятельства из равенства (4.5.42) при переходе к пределу при $N \to \infty$ получаем равенство

$$\tilde{J}_k = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a^2x_0z_k^2}\mathrm{d}z_k = \frac{1}{(x_0a^2)^{1/2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2} d\xi = \left(\frac{\pi}{a^2x_0}\right)^{1/2}.$$

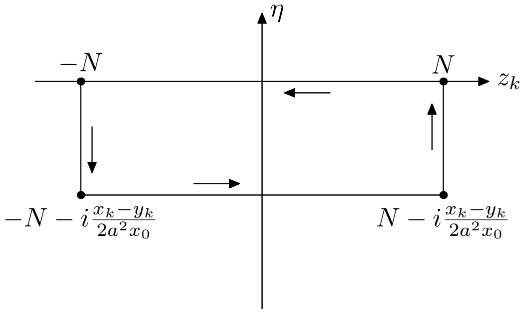

Рис. 4.5

Следовательно,

$$J = \left(\frac{\pi}{a^2 x_0}\right)^{n/2} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2 x_0}}. \tag{4.5.43}$$

Аналогично вычисляется внутренний интеграл второго слагаемого правой части формулы (4.5.40) и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\boldsymbol{z}|^2(x_0-\tau)+i<\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \left(\frac{\pi}{a^2(x_0-\tau)}\right)^{n/2} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2(x_0-\tau)}}. \tag{4.5.44}$$

С учетом (4.5.43) и (4.5.44) из (4.5.40) следует формула

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) = {}& \frac{1}{(2\sqrt{a^2\pi x_0})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2 x_0}}\varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+ \\ &+\frac{1}{(2\sqrt{a^2\pi})^n}\int\limits_0^{x_0}\frac{1}{(x_0-\tau)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2(x_0-\tau)}} f(\tau,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{4.5.45}$$

Формула (4.5.45) называется *формулой Пуассона* решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

4.5.7. Обоснование формулы Пуассона (4.5.45)

Данная формула получена формально. При выводе ее не проводилось обоснования всех операций, существования несобственных интегралов. Здесь возможны два варианта. Первый — это доказательство всего, о чем говорилось только что, второй — при некоторых ограничениях на функции $\varphi(\boldsymbol{x}')$ и $f(\boldsymbol{x})$ проверить, что интегралы в (4.5.45) представляют собой функции, а формула (4.5.45) является решением задачи Коши (4.5.5) – (4.5.6).

Мы изберем второй вариант. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.5.7. *Если функции* $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ *и ограничены по совокупности своих независимых переменных, то* $u(\boldsymbol{x})$, *определяемая формулой* (4.5.45), *принадлежит классу* $C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)\cap C^{1,2}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ *и является единственным решением задачи Коши* (4.5.4) – (4.5.5).

Доказательство. Пусть $Q = (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ и $Q^{(k)} = (1/k,k)\times\Omega^{(k)}$, где $\Omega^{(k)} = \left\{\boldsymbol{x}'\in\mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}'|<k\right\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса k с центром

в начале координат. Объединение областей $Q^{(k)}$ покрывает область Q, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q^{(k)} = Q$.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2x_0}}\varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

на замыкании $\overline{Q^{(k)}}$ области $Q^{(k)}$. Он сходится равномерно на $\overline{Q^{(k)}}$. Действительно, оценивая остаточный интеграл, получим

$$\left|\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\geqslant m} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2x_0}}\varphi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right| \leqslant M \int\limits_{|\boldsymbol{y}|\geqslant m} e^{-\frac{r^2}{4a^2x_0}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{4.5.46}$$

где $r = |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}|$, M — постоянная, для которой $|\varphi(\boldsymbol{x}')|,\ |f(\boldsymbol{x})| < M$ для всех $\boldsymbol{x} \in Q$, так как функции $\varphi(\boldsymbol{x}')$ и $f(\boldsymbol{x})$ из класса ограниченных функций. Выберем $m \geqslant 2k$. Тогда $r = |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}| \geqslant |\boldsymbol{y}| - |\boldsymbol{x}'| \geqslant |\boldsymbol{y}| - k \geqslant 1/2|\boldsymbol{y}|$, так как $|\boldsymbol{x}'| \leqslant k,\ \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega^{(k)}}$. С учетом неравенства $r \geqslant 1/2|\boldsymbol{y}|$ продолжая оценку (4.5.46) дальше, получим

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\geqslant m} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|}{4a^2x_0}}\varphi(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right| \leqslant M \int\limits_{|\boldsymbol{y}|\geqslant m} e^{-\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{16a^2x_0}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \leqslant \\ \leqslant M \int\limits_{|\boldsymbol{y}|\geqslant m} e^{-\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{16a^2k}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = M|S(0,1)|\int\limits_{m}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{16a^2k}}\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho,\end{gathered} \tag{4.5.47}$$

где $|S(0,1)|$ — площадь сферы радиуса 1. В (4.5.45) последний интеграл при достаточно большом m можно сделать сколь угодно малым, так как интеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\rho^2}\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho < +\infty$$

сходится.

Аналогично показывается равномерная сходимость на $\overline{Q^{(k)}}$ и интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2(x_0-\tau)}}f(\tau,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

В силу условий теоремы 4.5.7 выражение (4.5.45) представляет собой непрерывную функцию на $\overline{Q^{(k)}}$, а следовательно, функция $u(\boldsymbol{x})$, определяемая (4.5.45), принадлежит множеству $C\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\right)$.

Дифференцируя (4.5.45) по $x_j,\ (j = 0, \ldots, n)$, можно показать равномерную сходимость полученных интегралов, так как их структура по существу не меняется в результате дифференцирования. Сходимость всегда обеспечивает показательная функция, которая остается без изменения при дифференцировании. И в результате мы показываем принадлежность функции $u(\boldsymbol{x})$, определяемой формулой (4.5.45), по крайней мере, множеству $C^{1,2}(Q)$. Путем подстановки ее в уравнение (4.5.5) можно убедиться, что она является решением этого уравнения.

В завершение доказательства теоремы 4.5.7 покажем, что выполняется начальное значение (4.5.6) как предельное значение функции (4.5.45) при $x_0 \to 0$. Кроме этого, тем самым и докажем принадлежность $u(\boldsymbol{x})$, определяемой выражением (4.5.45), классу $C\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^n\right)$.

Действительно,

$$\begin{aligned}\lim_{x_0\to 0} u(\boldsymbol{x}) &= \lim_{x_0\to 0} \frac{1}{\left(2\sqrt{(a^2x_0\pi)}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^2}{4a^2x_0}} \varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\ &= \lim_{x_0\to 0} \pi^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{z}|^2} \varphi(\boldsymbol{x}' + 2\sqrt{a^2x_0}\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \\ &= \lim_{x_0\to 0} \pi^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{z}|^2} \Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} + \varphi(\boldsymbol{x}'),\end{aligned} \tag{4.5.48}$$

где $\Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z}) = \varphi(\boldsymbol{x}' + 2\sqrt{a^2x_0}\boldsymbol{z}) - \varphi(\boldsymbol{x}')$. Для оценки интеграла в правой части (4.5.48) разобьем на два слагаемых: на интеграл по шару достаточно большого радиуса N и на интеграл по внешности этого шара, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{z}|^2} \Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \int\limits_{|\boldsymbol{z}|\geqslant N} e^{-|\boldsymbol{z}|^2} \Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} + \int\limits_{|\boldsymbol{z}|\leqslant N} e^{-|\boldsymbol{z}|^2} \Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}.$$

В силу сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho$ и ограниченности функции $|\Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})| \leqslant 2M$

$$\left| \int\limits_{|\boldsymbol{z}|\geqslant N} e^{-|\boldsymbol{z}|^2} \Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} \right| \leqslant 2M|S(0,1)| \int\limits_N^\infty e^{-\rho^2}\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.49}$$

при достаточно большом $N > 0$.

Теперь N выбрано по ε и временно зафиксировано.

В силу непрерывности функции $\varphi(\boldsymbol{x}')$ на $\mathbb{R}^n$, то есть при x_0 близком к нулю $|\Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z}| < \delta,\ \delta > 0$,

$$\left|\int\limits_{|\boldsymbol{z}|\leqslant N} e^{-|\boldsymbol{z}|^2}\Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\right| \leqslant \delta \int\limits_{|z|\leqslant N} e^{-|\boldsymbol{z}|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{z} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.5.50)$$

для наперед заданного ε. Оценки (4.5.49) и (4.5.50) дают оценку

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{z}|^2}\Delta\varphi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z}\right| < \varepsilon$$

как только $x_0 < \tilde{\delta}$ для достаточно малого числа $\tilde{\delta} > 0$. Таким образом, для функции $u(\boldsymbol{x})$ из (4.5.40)

$$\lim_{x_0\to 0} u(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}')$$

и $u \in C\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^n\right)$. $\otimes$

4.6. Решение задачи Коши для волнового уравнения с помощью преобразования Фурье

В п. 4.2 – 4.4 с помощью метода Даламбера выведены формулы решения задачи Коши для волнового уравнения независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ в случае $n = 1, 2, 3$. Для большей размерности n таких формул нет. Для любого n решение этой задачи можно определить с помощью преобразования Фурье. Это одна цель. Вторая цель – продемонстрировать применение преобразования Фурье для отыскания решения задачи Коши для волнового уравнения.

Рассмотрим постановку задачи Коши для несколько общего по сравнению с (4.4.1) волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2\Delta u + cu = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q, \qquad (4.6.1)$$

$$u\Big|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \qquad (4.6.2)$$

где $c \geqslant 0,\ \boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}'),\ Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^n,\ \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$.

Предположим, что все выполняемые ниже операции законны.

К обеим частям уравнения (4.6.1) и условиям (4.6.2) применим преобразование Фурье по независимым переменным $\boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_n)$, используя при этом свойство

$$\widehat{\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial x_j}} = i y_j \hat{u}(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

В результате получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{\mathrm{d}^2 \hat{u}(x_0, \boldsymbol{y})}{\mathrm{d}x_0^2} + \left(a^2 |\boldsymbol{y}|^2 + c\right) \hat{u}(x_0, \boldsymbol{y}) = \hat{f}(x_0, \boldsymbol{y}), \tag{4.6.3}$$

$$\hat{u}(0, \boldsymbol{y}) = \hat{\varphi}(\boldsymbol{y}), \quad \left.\frac{\mathrm{d}\hat{u}(x_0, \boldsymbol{y})}{\mathrm{d}x_0}\right|_{x_0=0} = \hat{\psi}(\boldsymbol{y}), \tag{4.6.4}$$

относительно искомой функции $\hat{u}(x_0, \boldsymbol{y})$, рассматривая независимые переменные $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ в качестве параметров. Решение задачи (4.6.3) – (4.6.4), как известно, записывается в явном виде следующим образом:

$$\begin{gathered}
\hat{u}(x_0, \boldsymbol{y}) = \hat{\varphi}(\boldsymbol{y}) \cos\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2 + c}\; x_0\right) + \\
+ \frac{\hat{\psi}(\boldsymbol{y})}{\left(a^2|\boldsymbol{y}|^2 + c\right)^{1/2}} \sin\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2 + c}\; x_0\right) + \\
+ \frac{1}{\left(a^2|\boldsymbol{y}|^2 + c\right)^{1/2}} \int\limits_0^{x_0} \sin\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2 + c}\; (x_0 - \tau)\right) \hat{f}(\tau, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\tau.
\end{gathered} \tag{4.6.5}$$

Применяя к (4.6.5) обратное преобразование Фурье (4.5.18), получим функцию

$$u(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}>} \hat{u}(x_0, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} =$$

$$\begin{gathered}
= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}>} \cos\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2 + c}\; x_0\right) \hat{\varphi}(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} + \\
+ (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}>} \frac{\hat{\psi}(\boldsymbol{y})}{\left(a^2|\boldsymbol{y}|^2 + c\right)^{1/2}} \sin\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2 + c}\; x_0\right) +
\end{gathered} \tag{4.6.6}$$

$$+(2\pi)^{-n/2}\int\limits_0^{x_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}\frac{\hat{f}(\tau,\boldsymbol{y})}{(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)^{1/2}}\sin\Big(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,(x_0-\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Проведем обоснование формулы (4.6.6).

Теорема 4.6.1. *Если функция* $\varphi:\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{x}'\to\varphi(\boldsymbol{x}')\in\mathbb{R}$, $\psi:\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{x}'\to\psi(\boldsymbol{x}')\in\mathbb{R}$ *и функция* $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}$ *относительно независимых переменных* $\boldsymbol{x}'=(x_1,\ldots,x_n)$ *принадлежат* $S(\mathbb{R}^n)$, *то функция* u, *определяемая формулой* (4.6.6), *является классическим решением задачи Коши* (4.6.1) – (4.6.2), *т. е.* $u\in C^2\big([0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$ *и удовлетворяет уравнению* (4.6.1) *и условиям* (4.6.2).

Доказательство. Если функции $\varphi,\psi,f(x_0,\cdot):\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{x}'\to\varphi(\boldsymbol{x}')$, $\psi(\boldsymbol{x}'),f(x_0,\boldsymbol{x}')$ принадлежат пространству $S(\mathbb{R}^n)$, то согласно теореме 4.5.4 преобразование Фурье $\widehat{\varphi},\widehat{\psi},\widehat{f}(x_0,\cdot)\mathbb{R}^n\ni\boldsymbol{y}\to\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y}),\widehat{\psi}(\boldsymbol{y}),\widehat{f}(x_0,\boldsymbol{y})$ также принадлежит $S(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим, например функцию u, определяемую формулой (4.6.6). Чтобы убедиться, что (4.6.6) действительно функция, покажем равномерную и абсолютную сходимость интегралов в (4.6.6). Согласно определению 4.5.1 множество $S(\mathbb{R}^n)$ состоит из функций $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, убывающих при $|\boldsymbol{x}'|\to\infty$ вместе с производными любого порядка быстрее любой функции вида $1/(1+|\boldsymbol{x}'|^k)$, $k>0$. Следовательно, остаточные интегралы из (4.6.6) от абсолютных величин подынтегральных функций меньше наперед заданного числа $\varepsilon>0$, т. е.

$$\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\geqslant N}|\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\geqslant N}\frac{|\widehat{\psi}(\boldsymbol{y})|}{(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)^{1/2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int\limits_0^{x_0}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\geqslant N}\frac{|\widehat{f}(\tau,\boldsymbol{y})|}{(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)^{1/2}}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}<\varepsilon$$

для $x_0\leqslant x_0^{(0)}$, где $x_0^{(0)}$ – наперед заданное число из $\mathbb{R}$.

Рассмотрим производные второго порядка от функции (4.6.6).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}\cos\big(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,x_0\big)\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}-$$

$$-(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)^{1/2}\sin\big(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,x_0\big)\widehat{\psi}(\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y})-$$

$$-(2\pi)^{-n/2}\int\limits_0^{x_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)^{1/2}\sin\big(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,(x_0-\tau)\big)\times$$

$$\times\widehat{f}(\tau,\boldsymbol{y})\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\boldsymbol{y} + (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}\widehat{f}(x_0,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \qquad (4.6.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = -(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} y_j^2 e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}\cos\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,x_0\right)\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}-$$

$$-(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}\frac{y_j^2}{(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)^{1/2}}\sin\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,x_0\right)\widehat{\psi}(\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y})-$$

$$-(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}\frac{y_j^2}{(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)^{1/2}}\sin\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,(x_0-\tau)\right)\widehat{f}(\tau,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

$$j=1,\ldots,n. \qquad (4.6.8)$$

Для несобственных интегралов выражений (4.6.7) и (4.6.8) справедлива равномерная и абсолютная их сходимость. Доказательство такое же как и для интегралов (4.6.6), используя свойство принадлежности пространству $S(\mathbb{R}^n)$ функций $\widehat{\varphi},\widehat{\psi},\widehat{f}$. Таким образом, функции, определяемые формулами (4.6.7) и (4.6.8), представляют собой непрерывные функции на множестве $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Суммируя полученные результаты можно утверждать, что функция (4.6.6) принадлежит классу $C^2\big([0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$, хотя она обладает и большей гладкостью.

Покажем, что функция (4.6.6) является решением уравнения (4.6.1). Подставляя функции (4.6.6) – (4.6.8) в (4.6.1), получим

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}\left[\frac{\mathrm{d}^2\widehat{u}(x_0,\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}x_0^2}+(a^2|\boldsymbol{y}|^2+c)\widehat{u}(x_0,\boldsymbol{y})-\widehat{f}(x_0,\boldsymbol{y})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{y}=0.$$

Последнее равенство справедливо также в соответствии с уравнением (4.6.3) для функции (4.6.5), через которую определяется решение $u(\boldsymbol{x})$ (см. (4.6.6)).

Выполнение начальных условий (4.6.2) следует из условий (4.6.4), представления (4.6.5) функции (4.6.6) и производной

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i<\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}>}\left[-\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,\sin\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,x_0\right)\widehat{\varphi}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\right.$$

$$\left.+\cos\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,x_0\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{y})+\int\limits_0^{x_0}\cos\left(\sqrt{a^2|\boldsymbol{y}|^2+c}\,(x_0-\tau)\right)\widehat{f}(\tau,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Теорема доказана. $\otimes$

4.7. Сильное[1] решение задачи Коши для гиперболического уравнения

В п. п. 4.2 – 4.4 получены формулы решения задачи Коши для волнового уравнения в полупространстве $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ для $n = 1,2,3$, где решение задачи Коши получается из общего решения волнового уравнения. Отсюда следует и единственность решения этой задачи для $n = 1,2,3$.

В п. 4.6 решение получено с помощью преобразования Фурье для любого $n \in \mathbb{N}$. Вопрос единственности решения остается открытым для $n = 4,5,\ldots$. Забегая вперед, отметим, что единственность решения (4.6.6) задачи (4.6.1) – (4.6.2) следует из энергетического неравенства, которое будет доказано в этом параграфе. Энергетическое неравенство здесь докажем для более общего по сравнению с (4.6.1) гиперболического уравнения. На основе энергетического неравенства, из которого будет следовать единственность решения задачи (4.6.1) – (4.6.2), будет введено сильное решение задачи Коши и доказано его существование.

4.7.1. Постановка задачи и вспомогательные неравенства

А теперь перейдем к формулировке рассматриваемой задачи. Для функции $u : \mathbb{R}^{n+1} \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - A^{(0)}u + A^{(1)}u = f(\boldsymbol{x}), \tag{4.7.1}$$

где $A^{(0)}u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, $A^{(1)}u = \sum\limits_{i=0}^{n} a^{i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + a^{(00)}(\boldsymbol{x})u$, $a^{(ij)} = a^{(ji)}$ для любых индексов $i,j = 1,\ldots,n$.

Уравнение (4.7.1) рассматриваем в полупространстве $Q = (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0,\boldsymbol{x}')$ таких, что $x_0 \in (0,\infty)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что коэффициенты уравнения $a^{(ij)} \in \mathbb{C}^1(\overline{Q})$, $a^{(i)},a^{(00)} \in \mathbb{C}(\overline{Q})$, и $a^{(ij)}$, $i,j = 1,\ldots,n$, таковы, что они в совокупности являются элементами матрицы положительной квадра-

[1]Сильное решение представляет собой обобщение классического решения и является решением операторного уравнения, где оператор последнего получается из оператора исходной задачи путем расширения в сильной топологии (путем замыкания в подходящих функциональных пространствах).

тичной формы, т. е. выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant c^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{4.7.2}$$

для всех $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$, положительной константы $c^{(0)} \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Согласно определению 2.7.2 при выполнении условия (4.7.2) уравнение (4.7.1) является строго гиперболическим относительно направления $\boldsymbol{\xi} = (1,0,\ldots,0)$ для всех $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$.

К уравнению (4.7.1) присоединяем простейшие граничные условия – условия Коши

$$l_0 u = u\Big|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad l_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n. \tag{4.7.3}$$

Лемма 4.7.1 (Неравенство Гроноулла). *Пусть* $v^{(i)} : (0,\tau) \ni t \to v^{(i)}(t) \in \mathbb{R}$ – *неотрицательные интегрируемые на* $(0,\tau)$ *функции,* $0 < \tau < +\infty$, $i = 1,2,3$. *Кроме того, функция* $v^{(3)}(t)$ *не убывает. Тогда из неравенства*

$$\int_0^\tau v^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t + v^{(2)}(\tau) \leqslant c\int_0^\tau v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t + v^{(3)}(\tau) \tag{4.7.4}$$

следует неравенство

$$\int_0^\tau v^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t + v^{(2)}(\tau) \leqslant e^{c\tau}v^{(3)}(\tau), \tag{4.7.5}$$

а из неравенства

$$v^{(1)}(\tau) + v^{(2)}(\tau) \leqslant c\int_0^\tau v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t + v^{(3)}(\tau) \tag{4.7.6}$$

– неравенство

$$v^{(1)}(\tau) + v^{(2)}(\tau) \leqslant e^{c\tau}v^{(3)}(\tau), \tag{4.7.7}$$

где постоянная $c \geqslant 0$.

Доказательство. Для удобства записи введем обозначение оператора

$$I\cdot = c\int_0^\tau \cdot\,\mathrm{d}t.$$

Проведем доказательство первой части утверждения леммы. Из неравенства (4.7.4) следует неравенство

$$v^{(2)} \leqslant Iv^{(2)} + v^{(3)}, \tag{4.7.8}$$

к которому применяем оператор I. В результате получим

$$Iv^{(2)} \leqslant I^2v^{(2)} + Iv^{(3)}. \tag{4.7.9}$$

Соотношения (4.7.8) и (4.7.9) порождают неравенство

$$v^{(2)} \leqslant I^2v^{(2)} + \sum_{j=0}^{1} I^j v^{(3)}, \tag{4.7.10}$$

где $I^0v^{(3)} = v^{(3)}$. Опять применяем к (4.7.10) оператор I. В результате получаем неравенство, которое вместе с (4.7.8) дает оценку для $v^{(2)}$ вида

$$v^{(2)} \leqslant I^3v^{(2)} + \sum_{j=0}^{2} I^j v^{(3)}.$$

Продолжая этот процесс дальше, с учетом исходного неравенства (4.7.4) будем иметь соотношение

$$Iv^{(1)} + v^{(2)} \leqslant I^{k+1}v^{(2)} + \sum_{j=0}^{k} I^j v^{(3)} \tag{4.7.11}$$

для любого натурального числа k. В многократном интеграле $I^{k+1}v^{(2)}$ меняя порядок интегрирования, получим оценку

$$I^{k+1}v^{(2)} = c^{k+1}\frac{1}{k!}\int_0^\tau v^{(2)}(t)(\tau-t)^k\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c^{k+1}\tau^k}{k!}\int_0^\tau v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.7.12}$$

где правая часть очевидно стремится к нулю при $k \to \infty$.

Для второго слагаемого правой части (4.7.11) справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{k} I^j v^{(3)} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} I^j v^{(3)} \leqslant v^{(3)}(\tau)\sum_{j=0}^{\infty} I^j\cdot 1 = e^{c\tau}v^{(3)}(\tau), \tag{4.7.13}$$

так как функция $v^{(3)}$ не убывает и является неотрицательной. В силу (4.7.12) и (4.7.13) из неравенства (4.7.11) при $k \to \infty$ получаем доказываемое неравенство (4.7.5).

Аналогично доказывается неравенство (4.7.7), если справедливо (4.7.6). $\otimes$

В дальнейшем будем использовать неравенство

$$|2ab| \leqslant a^2 + b^2, \tag{4.7.14}$$

которое следует из неравенства $(a \pm b)^2 \geqslant 0$. В свою очередь, из (4.7.14) следует неравенство

$$2|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \tag{4.7.15}$$

для любого положительного числа $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Для любых элементов $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_0, \ldots, b_n)$ из $\mathbb{R}^{n+1}$ с учетом (4.7.15)

$$2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})_{\mathbb{R}^{n+1}}| \leqslant 2\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{R}^{n+1}}\|\boldsymbol{b}\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} b_k^2. \tag{4.7.16}$$

4.7.2. Гильбертовы пространства Соболева $H^l(\Omega)$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ область Ω (ограниченную или неограниченную). Обозначим через $L_1^{loc}(\Omega)$ множество функций $u : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, для которых и любого компакта $K \subset \Omega$ интеграл Лебега

$$\int_K |u(\boldsymbol{x})| \mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty.$$

Определение 4.7.1. Последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ функций $u^{(k)} \in L_1^{loc}(\Omega)$ сходится к функции $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ в $L_1^{loc}(\Omega)$, если

$$\lim_{k\to\infty} \|u^{(k)} - u\|_{L_1(K)} = \lim_{k\to\infty} \int_K |u^{(k)} - u| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

для любого компакта $K \subset \Omega$.

Пусть функция $u \in C^l(\Omega)$ и вместе со своими производными до порядка $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant l$, принадлежит $L_1^{loc}(\Omega)$. Тогда, используя формулу Остроградского (1.9.13), интегрируя по частям для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega u\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int\limits_\Omega \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u\cdot\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4.7.17}$$

Равенство (4.7.17) положено в основу определения обобщенной производной функции $u \in L_1^{loc}(\Omega)$.

Определение 4.7.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является открытым множеством, $\boldsymbol{\alpha} \in \widetilde{\mathbb{N}}^n$, $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, и функции u, $u^{(\boldsymbol{\alpha})} \in L_1^{loc}(\Omega)$. Тогда функция $u^{(\boldsymbol{\alpha})}$ называется *обобщенной производной функции u порядка* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в Ω, если равенство

$$\int\limits_\Omega u\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int\limits_\Omega u^{(\boldsymbol{\alpha})}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4.7.18}$$

выполняется для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Обобщенная производная $u^{(\alpha)}$ функции u обозначается тем же символом $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, что и обычная производная, определяемая поточечно через предел, хотя она имеет совсем другое определение (интегральную сущность в определении). Это связано с тем, что если функция u достаточно гладкая и имеет обычную производную $\mathbf{D}^\alpha u$, то тогда обобщенная производная $u^{(\boldsymbol{\alpha})}$ совпадает с производной, определяемой через предел в каждой точке $x \in \Omega$. Действительно, из формулы (4.7.17) путем интегрирования по частям имеем равенство

$$\int\limits_\Omega u\mathbf{D}^{\alpha}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int\limits_\Omega \mathbf{D}^{\alpha}u\cdot\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int\limits_\Omega u^{(\boldsymbol{\alpha})}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

которое выполняется для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда имеем

$$\int\limits_\Omega \left(\mathbf{D}^\alpha u - u^{(\boldsymbol{\alpha})}\right)\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.7.19}$$

Поскольку множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ (см. свойство 4.5.3), то из (4.7.19) в силу ортогональности к плотному множеству только нулевого элемента в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ имеем равенство $u^{(\boldsymbol{\alpha})} = \mathbf{D}^\alpha u$.

С помощью операторов осреднения Соболева J_δ можно показать, что имеет место сходимость по норме банахова пространства $L_1(K)$

$$\|J_\delta u - u\|_{L_1(K)} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Действительно,

$$\|J_\delta u - u\|_{L_1(K)} = \int\limits_K \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{y}) \left[u(\boldsymbol{x} - \delta \boldsymbol{y}) - u(x) \right] \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \right| =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}y \int\limits_K |u(\boldsymbol{x} - \delta \boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})| \, \mathrm{d}x < \varepsilon(u,\delta).$$

В равенстве (4.7.19) интегрирование ведется фактически по некоторому компакту $K = \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$ ($\operatorname{supp} \varphi$ — носитель функции φ). Запишем производную $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_\delta u$ согласно определению 4.7.2, т. е. выполняется равенство

$$\int\limits_\Omega J_\delta u \cdot \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int\limits_\Omega \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_\delta u \cdot \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4.7.20}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Для каждой функции φ равенство (4.7.20) имеет вид

$$\int\limits_K J_\delta u \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int\limits_K \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_\delta u \cdot \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

В последнем равенстве переходим к пределу при $\delta \to 0$. И так как

$$\left| \int\limits_K (J_\delta u - u) \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \leqslant \sup_K |\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi| \|J_\delta u - u\|_{L_1(K)} \leqslant \varepsilon(\delta,u) \cdot \sup_{x \in K} |\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(x)|,$$

то отсюда и в силу (4.7.20) имеем

$$\int\limits_\Omega u \mathbf{D}^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \lim_{\delta \to \infty} \int\limits_\Omega \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_\delta u \cdot \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4.7.21}$$

На основании равенства (4.7.21) и (4.7.17) можно дать следующее определение обобщенной производной, эквивалентное определению 4.7.2.

Определение 4.7.3. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset \subset \widetilde{\mathbb{N}}^n$, $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, функции u, $u^{(\boldsymbol{\alpha})} \in L_1^{loc}(\Omega)$. Функция $u^{(\boldsymbol{\alpha})}$ называется *обобщенной производной порядка $\boldsymbol{\alpha}$ функции* $u : \Omega \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$, если для любой последовательности $\{u^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ функций $u^k \in C^\infty(\Omega)$, сходящейся к u в $L_1^{loc}(\Omega)$, последовательность $\{\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u^k\}_{k=1}^\infty$ функций $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u^{(k)}$ сходится тоже в $L_1^{loc}(\Omega)$ к $u^{(\boldsymbol{\alpha})}$.

Определим пространства $H^l(\Omega)$, $l \in \mathbb{N}$.

Определение 4.7.4. Обозначим через $H^l(\Omega)$ множество всех функций $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, для которых выполняются условия:

- $u \in L_2(\Omega)$;
- функция u имеет обобщенную производную $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L_2(\Omega)$ для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \widetilde{\mathbb{N}}^n$, где $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant l$.

На $H^l(\Omega)$ вводится скалярное произведение $H^l(\Omega) \times H^l(\Omega) \ni u,v \to \to (u,v)_{H^l(\Omega)} = \sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant l} \big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u, \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} v\big)_{L_2(\Omega)}$ и норма $H^l(\Omega) \ni u \to \|u\|_{H^l(\Omega)} = = (u,u)^{1/2}_{H^l(\Omega)}$.

Замечание 4.7.1. Можно считать в определении 4.7.4, что $l \in \widetilde{\mathbb{N}}$. В этом случае полагаем $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Теорема 4.7.1. *Справедливо включение $L_2(\Omega) \subset L_1^{loc}(\Omega)$ вместе с топологией.*

Доказательство. Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Тогда для любого компакта $K \subset \Omega$ в силу неравенства Буняковского

$$\int\limits_K |u(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_K \mathrm{d}\boldsymbol{x} \int\limits_K |u(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \text{ mes } K \|u\|^2_{L_2(K)} \leqslant \\ \leqslant \text{ mes } K \|u\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty.$$

Следовательно, $u \in L_1^{loc}(\Omega)$. $\otimes$

Теорема 4.7.2. *Пространство $H^l(\Omega)$ является гильбертовым пространством.*

Доказательство. Согласно определению 4.7.4 в $H^l(\Omega)$ определено скалярное произведение и норма. Докажем, что оно является полным. Полнота $H^l(\Omega)$ следует из полноты гильбертова пространства $L_2(\Omega)$.

Действительно, пусть последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ функций $u^{(k)}$ пространства $H^l(\Omega)$ является фундаментальной, т. е. $\|u^{(k)} - u^{(j)}\|_{H^l(\Omega)} \to \to 0$ при $k, j \to \infty$. Тогда последовательности, составленные из обобщенных производных $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(k)$ для любых $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant l$, являются фундаментальными в $L_2(\Omega)$. В силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ существуют функции $u^{(\boldsymbol{\alpha})} \in L_2(\Omega)$, где $\|\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u^{(k)} - u^{(\boldsymbol{\alpha})}\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Согласно определению обобщенных производных

$$\int\limits_{\Omega} u^{(k)} \cdot \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int\limits_{\Omega} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u^{(k)} \cdot \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4.7.22}$$

для любых $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Из сильной сходимости (по норме) $u^{(k)} \to u$, $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u^{(k)} \to u^{(\boldsymbol{\alpha})}$ в $L_2(\Omega)$ при $k \to \infty$ следует сходимость этих функций через скалярные произведения. Таким образом, переходя к пределу в равенстве (4.7.22) при $k \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\Omega} u \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int\limits_{\Omega} u^{(\boldsymbol{\alpha})} \mathbf{D}^{(\boldsymbol{\alpha})}\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Тем самым показали, что $u^{(\boldsymbol{\alpha})} = \mathbf{D}^{(\boldsymbol{\alpha})} u$ является обобщенной производная функции u, которая принадлежит пространству $L_2(\Omega)$. $\otimes$

Очевидно, для пространств $H^l(\Omega)$ справедливы включения $H^l(\Omega) \subset H^{\tilde{l}}(\Omega)$ для любых $\tilde{l} < l$, $l, \tilde{l} \in \tilde{\mathbb{N}}$.

Замечание 4.7.2. Множество $\mathbb{C}^\infty(\Omega)$ является плотным в пространстве $H^l(\Omega)$ для любого $l \in \mathbb{N}$, так как $J_\delta u \in C^\infty(\Omega)$ для $u \in H^l(\Omega)$ и $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_\delta u \to \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u$ в $L_2(\Omega)$ при $\delta \to 0$. Поэтому $H^l(\Omega)$ можно рассматривать как пополнение $\mathbb{C}^\infty(\Omega)$ по норме пространства $H^l(\Omega)$.

Если рассматривать множество бесконечно дифференцируемых функций $\mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$, определенных на замыкании $\overline{\Omega}$ открытого множества Ω, то это множество не всегда является плотным в $H^l(\Omega)$. Это утверждение зависит от гладкости границы $\partial\Omega$ области Ω. При некоторых ограничениях на Ω $H^l(\Omega)$ получается путем замыкания множества $\mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ по норме пространства $H^l(\Omega)$, т. е. множество $\mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $H^l(\Omega)$.

4.7.3. Энергетическое неравенство для задачи Коши (4.7.1), (4.7.3)

Введем необходимые обозначения и пространства.

Для любой точки $\boldsymbol{x} \in Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ уравнение (4.7.1) имеет два семейства характеристических направлений $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, которые определяются из уравнения (см. определение 2.6.1)

$$\xi_0^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x}) \xi_i \xi_j = 0. \tag{4.7.23}$$

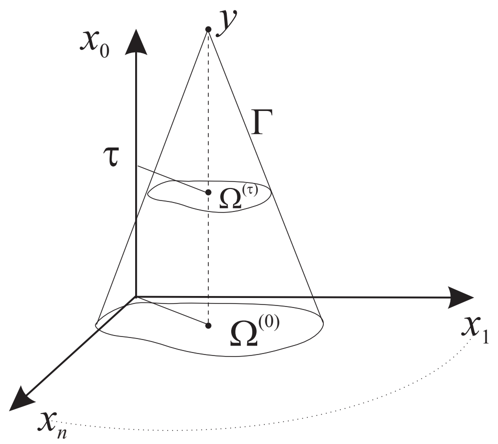

Рис. 4.6

Уравнение (4.7.23) в силу условия (4.7.2) имеет два различных действительных значения $\xi_0 = \pm\Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j\Big)^{1/2}$ для любого $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $|\boldsymbol{\xi}'| = 1$. Таким образом, характеристическими направлениями уравнения (4.7.1), соответствующими точке $\boldsymbol{x} \in Q$, будут

$$\boldsymbol{\xi} = \Big(\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j\Big)^{\frac{1}{2}}, \xi_1, \ldots, \xi_n\Big), \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \Big(-\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j\Big)^{1/2}, \xi_1, \ldots, \xi_n\Big).$$

В области Q рассмотрим ограниченную подобласть $K(\boldsymbol{y})$, которая представляет собой, вообще говоря, криволинейный конус с вершиной в точке $\boldsymbol{y} = (y_0, \ldots, y_n)$, $y_0 > 0$, представленной на рисунке 4.6.

Здесь боковая поверхность $\Gamma = \{x \in \partial K(y) | 0 < x_0 < y_0\}$ представляет собой характеристическую поверхность относительно уравнения (4.7.1), т. е. единичный вектор $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = (\nu_0(\boldsymbol{x}), \ldots, \nu_n(\boldsymbol{x}))$ внешней относительно области $K(\boldsymbol{y})$ нормали удовлетворяет уравнению (4.7.23) и $\nu_0(\boldsymbol{x}) > 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, где $\partial K(\boldsymbol{y})$ — граница конуса $K(\boldsymbol{y})$ и $\partial K(\boldsymbol{y}) = \overline{K(\boldsymbol{y})} \backslash K(\boldsymbol{y})$.

Обозначим через $\Omega^{(\tau)}$ сечение конуса $K(\boldsymbol{y})$ гиперплоскостью $\{\boldsymbol{x} | x_0 = \tau\}$, $\Omega^{(\tau)} = K(\boldsymbol{y}) \cap \{\boldsymbol{x} \in Q | x_0 = \tau\}$, $0 < \tau < y_0$. Основание конуса обозначим через $\Omega^{(0)} = \overline{K(\boldsymbol{y})} \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_0 = 0\}$. Таким образом, граница $\partial K(\boldsymbol{y})$ конуса $K(\boldsymbol{y})$ состоит из объединения $\Gamma \cup \Omega^{(0)} = \partial K(\boldsymbol{y})$.

Рассмотрим норму $\| \cdot \|_{B(\boldsymbol{y})}$ функций, которая определяется формулой

$$\|u\|_{B(\boldsymbol{y})} = \sup_{0<\tau<y_0}\Big(\sum_{i=0}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \|u\|_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big), \qquad (4.7.24)$$

где интегрирование ведется по интегралу Лебега. Обозначим через $B(\boldsymbol{y})$ банахово пространство, которое получается замыканием множества $\mathbb{C}^2(\overline{K(\boldsymbol{y})})$ по норме (4.7.24), где $\overline{K(\boldsymbol{y})}$ - замыкание области $K(\boldsymbol{y})$.

В силу своего определения $B(\boldsymbol{y}) \subset H^1(K(\boldsymbol{y}))$. Из теорем вложения Соболева следует, что $H^2(K(\boldsymbol{y})) \subset B(\boldsymbol{y})$.

Задачу Коши (4.7.1), (4.7.3) запишем в виде операторного уравнения

$$\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{F}, \qquad (4.7.25)$$

где оператор $\boldsymbol{L}$ определяется через операторы $\mathscr{L}$, l_0 и l_1 по правилу вектор-функции $\boldsymbol{L}u = (\mathscr{L}u, l_0u, l_1u)$, $\boldsymbol{F} = (f(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x}'), \psi(\boldsymbol{x}'))$. В качестве области определения $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ оператора $\boldsymbol{L}$ возьмем множество $\mathbb{C}^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$.

Операторное уравнение (4.7.25) будем рассматривать на функциях u, определенных на множестве $\overline{K(\boldsymbol{y})}$. Теперь в качестве области определения оператора $\boldsymbol{L}$ возьмем $\mathbb{C}^2(\overline{K(\boldsymbol{y})})$ и будем обозначать $\mathscr{D}(\boldsymbol{L}) = \mathbb{C}^2(\overline{K(\boldsymbol{y})})$.

Обозначим через $H(\boldsymbol{y})$ гильбертово пространство, представляющее собой декартово произведение $L_2(K) \times H^1(\Omega_1^{(0)}) \times L_2(\Omega_0^{(0)})$. Для элементов $\boldsymbol{F}$, $\widetilde{\boldsymbol{F}} \in H(\boldsymbol{y})$ скалярное произведение и норма определяются следующим образом:

$$(\boldsymbol{F},\widetilde{\boldsymbol{F}})_{H(\boldsymbol{y})} = (f,\widetilde{f})_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} + (\varphi,\widetilde{\varphi})_{H^1(\Omega^{(0)})} + (\psi,\widetilde{\psi})_{L_2(\Omega^{(0)})},$$

$$\|\boldsymbol{F}\|_{H(\boldsymbol{y})} = \big(\|f\|^2_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} + \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega^{(0)})} + \|\psi\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})}\big)^{1/2},$$

где $\boldsymbol{F} = (f(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x}'),\psi(\boldsymbol{x}'))$, $\widetilde{\boldsymbol{F}} = (\widetilde{f}(\boldsymbol{x}), \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{x}'),\widetilde{\psi}(\boldsymbol{x}'))$; $f, \widetilde{f} : \overline{K(\boldsymbol{y})} \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x})$, $\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$; φ, $\widetilde{\varphi}$, ψ, $\widetilde{\psi} : \Omega^{(0)} \ni \boldsymbol{x}' \to \varphi(\boldsymbol{x}')$, $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{x}')$, $\psi(\boldsymbol{x}')$, $\widetilde{\psi}(\boldsymbol{x}') \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.7.3. *Для любой функции $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_{B(\boldsymbol{y})} \leqslant C\|\boldsymbol{L}u\|_{H(\boldsymbol{y})}, \qquad (4.7.26)$$

где постоянная C не зависит от u и $C > 0$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $2\mathscr{L}u\,\frac{\partial u}{\partial x_0}$, которое представим следующим образом:

$$2\mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \boldsymbol{A}^{(1)}(u,u), \tag{4.7.27}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(u,u) = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{(ij)}(\boldsymbol{x})}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2\boldsymbol{A}^{(1)}u\frac{\partial u}{\partial x_0}.$$

Обозначим через $K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})$ подобласть области $K(\boldsymbol{y})$, для которой $0 < x_0 < \tau \leqslant y_0$ и граница $\partial K^{(\tau)}(\boldsymbol{y}) = \Omega^{(0)} \cup \Omega^{(\tau)} \cup \Gamma^{(\tau)}$, $\Gamma^{(\tau)} = \{\boldsymbol{x} \in \Gamma | \ 0 < x_0 < \tau\}$.

Проинтегрируем равенство (4.7.27) по области $K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})$. Заметим что единичный вектор внешней относительно $K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})$ нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$ в точках $x \in \Omega^{(0)}$ имеет вид $\boldsymbol{\nu} = (-1,0,\ldots,0)$, в точках $x \in \Omega^{(\tau)}$ — $\boldsymbol{\nu} = (1,0,\ldots,0)$. Учитывая это

$$2\int\limits_{K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})}\mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2\nu_0\,\mathrm{d}s - \\ -2\int\limits_{\Gamma^{(\tau)}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\nu_i\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\partial K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})}\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\nu_0\,\mathrm{d}s + \\ + \int\limits_{K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})}\boldsymbol{A}^{(1)}(u,u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = I^{(\tau)}. \tag{4.7.28}$$

Рассмотрим более подробно слагаемые правой части $I^{(\tau)}$ равенства (4.7.28). $I^{(\tau)}$ можно представить в виде

$$I^{(\tau)} = I_1^{(\tau)} + I_2^{(\tau)} + I_3^{(\tau)} + I_4^{(\tau)},$$

где

$$\begin{aligned}
I_1^{(\tau)} &= \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}(\tau) + \int\limits_{\Omega^{(\tau)}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}(\tau,\boldsymbol{x}')\frac{\partial u(\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial x_i}\frac{\partial u(\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}',\\
I_2^{(\tau)} &= -\|l_1u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} - \int\limits_{\Omega^{(0)}}\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}(0,\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial x_i}l_0u\frac{\partial}{\partial x_j}l_0u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}',\\
I_3^{(\tau)} &= \int\limits_{\Gamma^{(\tau)}}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2\nu_0 - 2\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_0}\nu_i + \sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_0\Big]\,\mathrm{d}s,\\
I_4^{(\tau)} &= \int\limits_{K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})}\boldsymbol{A}^{(1)}(u,u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Сделаем оценки снизу для $I_1^{(\tau)}$ и $I_3^{(\tau)}$ и сверху для $I_2^{(\tau)}$ и $I_4^{(\tau)}$. При этом заметим, что коэффициенты $a^{(ij)} \in C^1(\overline{K(\boldsymbol{y})})$, $i,j = 1,\ldots,n$; $a^{(i)}, a^{(00)} \in C(\overline{K(\boldsymbol{y})})$ для всех $i = 0,\ldots,n$; $a^{(ij)}(\boldsymbol{x})$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ удовлетворяют условию (4.7.2) для всех $\boldsymbol{x} \in \overline{K(\boldsymbol{y})}$. Итак,

$$\begin{gathered} I_1^{(\tau)} \geqslant C^{(1)} \sum_{i=0}^{n} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}(\tau), \\ |I_2^{(\tau)}| \leqslant C^{(2)}\big(\|l_0 u\|^2_{H^1(\Omega^{(0)})} + \|l_1 u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})}\big). \end{gathered} \tag{4.7.29}$$

Для $x \in \Gamma^{(\tau)}$ $\nu_o > 0$. Учитывая неравенство (4.7.2) и равенство (4.7.23), получим оценку

$$\begin{aligned} I_3^{(\tau)} &= \int\limits_{\Gamma^{(\tau)}} \frac{1}{\nu_0}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2 \nu_0^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_0}\nu_i\nu_0 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_0^2\Big]\,\mathrm{d}s = \\ &= \int\limits_{\Gamma^{(\tau)}} \frac{1}{\nu_0}\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\nu_i - \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_0\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\nu_j - \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_0\Big)\,\mathrm{d}s \geqslant \\ &\geqslant C^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Gamma^{(\tau)}} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\nu_i - \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_0\Big)^2 \mathrm{d}s \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.7.30}$$

Используя неравенство (4.7.14) получим для $I_4^{(\tau)}$ оценку сверху вида

$$\begin{gathered} |I_4^{(\tau)}| \leqslant C^{(3)} \int\limits_{K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} \Big(\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 + u^2\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ C^{(3)} \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega^{(t)}} \Big(\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 + u^2\Big)(t,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}t = C^{(3)}\int\limits_0^{\tau} v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{gathered} \tag{4.7.31}$$

Далее

$$\begin{aligned} 2\Big|\int\limits_{K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} \mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big| &\leqslant C^{(4)}\Big(\|\mathscr{L}u\|^2_{L_2\left(K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2\left(K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}\Big) \leqslant \\ &\leqslant C^{(4)}\Big(\|\mathscr{L}u\|^2_{L_2\left(K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \int\limits_0^{\tau} v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t\Big), \end{aligned} \tag{4.7.32}$$

где

$$v^{(2)}(t) = \int\limits_{\Omega^{(t)}} \Big[u^2 + \sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2\Big](t,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'.$$

Рассмотрим более подробно доказательство оценок (4.7.29), (4.7.31) и (4.7.32). В силу условия (4.7.2) существует константа $C^{(1)}$, для которой

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\tau,\boldsymbol{x}')\frac{\partial u(\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial x_i}\frac{\partial u(\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial x_j} \geqslant C^{(1)}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u(\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial x_i}\Big)^2,$$

принимая в качестве вектора $\boldsymbol{\xi} = \Big(\dfrac{\partial u(\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial u(\tau,\boldsymbol{x}')}{\partial x_n}\Big)$. Отсюда, очевидно, следует первое неравенство (4.7.29). В силу того, что коэффициенты $a^{(ij)}(\boldsymbol{x}) \in C(\overline{K(\boldsymbol{y})})$, то существует константа $\widetilde{C}^{(2)}$, для которой

$$\max_{i,j=1,\ldots,n}\max_{\boldsymbol{x}\in\overline{K(\boldsymbol{y})}}|a^{(ij)}(\boldsymbol{x})| \leqslant \widetilde{C}^{(2)}.$$

Учитывая эту оценку, получим

$$\begin{aligned}
|I_2^{(\tau)}| &\leqslant \|l_1u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} + \widetilde{C}^{(2)}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega^{(0)}}\frac{\partial}{\partial x_i}l_0u\frac{\partial}{\partial x_j}l_0u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \leqslant \\
&\leqslant \|l_1u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} + \widetilde{C}^{(2)}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega^{(0)}}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}l_0u\Big)^2 + \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}l_0u\Big)^2\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \leqslant \\
&\leqslant \|l_1u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} + n\widetilde{C}^{(2)}\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}l_0u\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} \leqslant \\
&\leqslant \|l_1u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} + n\widetilde{C}^{(2)}\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}l_0u\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} + \big\|l_0u\big\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})}\Big] \leqslant \\
&\leqslant C^{(2)}\Big(\|l_1u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} + \|l_0u\|^2_{H_1(\Omega^{(0)})}\Big),
\end{aligned}$$

где $C^{(2)} = \max\{1,n\widetilde{C}^{(2)}\}$.

По этой схеме доказывается и оценка (4.7.31)

Оценку (4.7.32) можно усилить следующим образом:

$$2\Big|\int\limits_{K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})}\mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big| \leqslant C^{(4)}\Big(\|\mathscr{L}u\|^2_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} + \int\limits_0^\tau v^{(2)}(t)\mathrm{d}t\Big). \qquad (4.7.33)$$

Исходя из равенства (4.7.28) и оценок (4.7.29) – (4.7.33), получаем неравенство

$$\sum_{i=0}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}(\tau) \leqslant C^{(5)}\int\limits_0^\tau v^{(2)}(t)\mathrm{d}t + C^{(6)}v^{(3)}, \qquad (4.7.34)$$

где $C^{(5)}$, $C^{(6)}$ — некоторые положительные постоянные, которые выражаются через $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$,

$$v^{(3)} = \|\mathscr{L}u\|^2_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} + \|l_0u\|^2_{H^1(\Omega^{(0)})} + \|l_1u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})}.$$

К неравенству (4.7.34) применить лемму 4.7.1 пока не можем, так как левая часть его не совпадает с функцией $v^{(2)}(\tau)$. Это положение можно исправить.

Рассмотрим равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u^2 = 2u\frac{\partial u}{\partial x_0},$$

обе части которого проинтегрируем по области $K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})$. В результате получим

$$\int\limits_{\partial K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} u^2\nu_0\,\mathrm{d}s = 2\int\limits_{K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} u\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4.7.35}$$

Как и при выводе неравенства (4.7.34) расписываем левую часть (4.7.35) по участкам границы $\partial K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})$ и делаем соответствующие оценки, т. е.

$$\int\limits_{\partial K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} u^2\nu_0\,\mathrm{d}s = \|u\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}(\tau) - \|l_0u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} + \int\limits_{\Gamma^{(\tau)}} u^2\nu_0\,\mathrm{d}s,$$

$$2\Big|\int\limits_{K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} u\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big| \leqslant \|u\|^2_{L_2(K^{(\tau)}(\boldsymbol{y}))} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(K^{(\tau)}(\boldsymbol{y}))} \leqslant \int\limits_0^\tau v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.7.36}$$

Так как $\nu_0 > 0$ для $\boldsymbol{x} \in \Gamma^{(\tau)}$, то

$$\int\limits_{\Gamma^{(\tau)}} u^2\nu_0\,\mathrm{d}s \geqslant 0. \tag{4.7.37}$$

Из равенства (4.7.35) и соотношений (4.7.36) и (4.7.37) получаем неравенство

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}(\tau) \leqslant \|l_0u\|^2_{L_2(\Omega^{(0)})} + \int\limits_0^\tau v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_0^\tau v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t + v^{(3)}. \tag{4.7.38}$$

Неравенства (4.7.34) и (4.7.38) сложим друг с другом. В результате получим новое неравенство вида

$$v^{(2)}(\tau) \leqslant C^{(7)}\int\limits_0^\tau v^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t + C^{(8)}v^{(3)}, \tag{4.7.39}$$

где $C^{(7)}$ и $C^{(8)}$ — новые постоянные. А теперь к неравенству (4.7.39) применяем утверждение леммы 4.7.1, где $v^{(1)}(t) \equiv 0$. Из неравенства (4.7.39) следует неравенство

$$v^{(2)}(\tau) \leqslant C^{(8)} e^{C^{(7)}\tau} v^{(3)} \leqslant C^{(8)} e^{C^{(7)} y_0} v^{(3)} = C^{(9)} v^{(3)}. \qquad (4.7.40)$$

Для положительных чисел $b^{(j)}$ $(j = 0, \ldots, m)$ справедливо неравенство

$$C^{(10)} \sum_{j=0}^{m} (b^{(j)})^2 \leqslant \Big(\sum_{j=0}^{m} b^{(j)}\Big)^2 \leqslant C^{(11)} \sum_{j=0}^{m} \big(b^{(j)}\big)^2. \qquad (4.7.41)$$

В силу этого неравенства из (4.7.38) следует неравенство

$$\Big(\|u\|_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \sum_{i=0}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau) \leqslant C \|\boldsymbol{L}u\|_{H(\boldsymbol{y})}. \qquad (4.7.42)$$

Правая часть неравенства (4.7.42) не зависит от τ. Поэтому в левой части его можно перейти к верхней грани по τ. В результате получим доказываемое энергетическое неравенство (4.7.26). $\otimes$

Следствие 4.7.1. Решение (4.6.6) задачи Коши (4.6.1) – (4.6.2) является единственным в классе функций $C^2\big([0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big)$.

Доказательство. Утверждение следствия 4.7.1 основано на энергетическом неравенстве (4.7.26). Докажем сначала единственность решения (4.6.6) в конусе $\overline{K(\boldsymbol{y})}$. Предположим, что еще есть решение $u^{(1)}$ задачи (4.6.1) – (4.6.2) при тех же функциях f, φ и ψ, что и решение (4.6.6). В силу линейности задачи (4.6.1) – (4.6.2) для разности $\widetilde{u}$ решений (4.6.6) и $u^{(1)}$ получим однородное уравнение (4.6.1) и однородные условия (4.6.2), т. е.

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x_0^2} - a^2 \Delta \widetilde{u} + c\widetilde{u} = 0, \qquad \widetilde{u}\Big|_{x_0=0} = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = 0.$$

В силу энергетического неравенства (4.7.26) $\|\widetilde{u}\|_{B(\boldsymbol{y})} \leqslant 0$, т. е. $\widetilde{u} \equiv 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \overline{K(\boldsymbol{y})}$. Так как $\boldsymbol{y}$ — произвольная точка, принадлежащая области $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, то отсюда делаем заключение, что решение $u^{(1)}$ совпадает с решением (4.6.6) во всем полупространстве $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. $\otimes$

4.7.4. Понятие сильного решения

Линейные задачи порождают операторные уравнения с линейными операторами. При доказательстве разрешимости этих уравнений для любых элементов из некоторого пространства требуется, как правило, расширение операторов уравнений. В качестве расширений операторов можно брать их замыкание в подходящих пространствах.

Пусть B — некоторое банахово пространство и H — гильбертово пространство. Рассмотрим линейный оператор L из пространства B в H с плотной в B областью определения $\mathscr{D}(L)$. Множество значений оператора L будем обозначать через $\mathscr{R}(L)$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Lu = F, \quad u \in \mathscr{D}(L). \tag{4.7.43}$$

Область определения $\mathscr{D}(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$ состоит из элементов $u \in B$, для которых существуют последовательности $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ элементов $u^{(k)} \in \mathscr{D}(L)$, где $u^{(k)} \to u$ в B и $Lu^{(k)} \to F$ в H при $k \to \infty$, $F \in H$. Соответствующие элементы $F \in H$ относят к области значений $\mathscr{R}(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$ и полагают

$$\overline{L}u = F.$$

Определение 4.7.5. Линейный оператор $L\colon B \to H$ *допускает замыкание* тогда и только тогда, если из условий $u^{(k)} \to 0$ в B и $Lu^{(k)} \to F$ в H при $k \to \infty$ следует $F = 0$ по норме пространства H, где члены последовательности $u^{(k)}$ принадлежат множеству $\mathscr{D}(L)$.

Замечание 4.7.3. В функциональном анализе понятие замыкаемости оператора вводится через замыкание графика оператора, а утверждение в определении 4.7.5 получается как свойство. Поскольку понятие графика оператора мы не вводили, то это свойство возьмем в качестве определения замыкаемости оператора (определение 4.7.5).

Предположим, что оператор $L\colon B \to H$ допускает замыкание $\overline{L}$.

Определение 4.7.6. Решение операторного уравнения

$$\overline{L}u = F, \quad u \in \mathscr{D}(\overline{L}), \tag{4.7.44}$$

называется *сильным решением* уравнения (4.7.43).

Определение 4.7.7. *Энергетическим неравенством* для оператора L будем называть соотношение вида

$$\|u\|_B \leqslant c\|Lu\|_H, \tag{4.7.45}$$

которое выполняется для любых $u \in \mathscr{D}(L)$ и где постоянная $c > 0$ не зависит от u.

Теорема 4.7.4. *Если справедливо энергетическое неравенство* (4.7.45) *для оператора* $L\colon B \to H$ *и оператор* L *допускает замыкание* $\overline{L}$, *то тогда неравенство*

$$\|u\|_B \leqslant c\|\overline{L}u\|_H \tag{4.7.46}$$

выполняется для любого элемента $u \in \mathscr{D}(\overline{L})$ *и постоянная* $c > 0$ *из неравенства* (4.7.45).

Доказательство. Утверждение теоремы 4.7.4 является фактически следствием неравенства (4.7.45) и определения замыкания $\overline{L}$ оператора L. Неравенство (4.7.46) получается из (4.7.45) путем предельного перехода для любой функции $u \in \mathscr{D}(\overline{L})$. ⊗

Если операторное уравнение (4.7.44) является линейным, то единственность решения его доказывается путем предположения существования двух решений. Для разности их получаем однородное уравнение. Тогда из неравенства (4.7.46) следует, что разность есть нулевой элемент. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 4.7.2. Если сильное решение уравнения (4.7.43) существует, то оно единственно.

Неравенство (4.7.45) является критерием непрерывности обратного оператора L^{-1}, определенного на множестве значений $\mathscr{R}(L)$ оператора L. Как известно, непрерывный оператор L^{-1} по непрерывности можно продолжить на множество $\overline{\mathscr{R}(L)}$ (замыкание множества $\mathscr{R}(L)$). В результате продолжения получим непрерывный оператор $\overline{L^{-1}}$, определенный на $\overline{\mathscr{R}(L)}$.

Теорема 4.7.5. *Если для оператора* $L\colon B \to H$ *справедливо энергетическое неравенство* (4.7.45) *и оператор* L *допускает замыкание* $\overline{L}\colon B \to H$, *то* $\overline{\mathscr{R}(L)} = \mathscr{R}(\overline{L})$ *и* $\overline{L^{-1}} = \overline{L}^{\,-1}$, *где* $\overline{L}^{\,-1}$ – *обратный оператор по отношению к оператору* $\overline{L}$, $\mathscr{R}(\overline{L})$ – *множество значений оператора* $\overline{L}$.

Доказательство. На основании определения $\mathscr{R}(\overline{L}) \subset \overline{\mathscr{R}(L)}$. Докажем обратное включение $\overline{\mathscr{R}(L)} \subset \mathscr{R}(\overline{L})$. Пусть $F \in \overline{\mathscr{R}(L)}$. Тогда существует последовательность $\left\{F^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad F^{(k)} \in \mathscr{R}(L)$, которая сходится к F в H при $k \to \infty$. Следовательно, последовательность $\left\{F^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной и $F^{(k)} = Lu^{(k)}, \quad u^{(k)} \in \mathscr{D}(L)$. Из неравенства (4.7.45) вытекает, что последовательность $\left\{u^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной в B. Так как B — банахово пространство, то существует $u \in B$ и $u^{(k)} \to u$ в B. А это означает, согласно определению сильного решения, $u \in \mathscr{D}(\overline{L})$ и $\overline{L}u = F$, т. е. $F \in \mathscr{R}(\overline{L})$.

Отсюда и из равенства $\mathscr{D}(\overline{L^{-1}}) = \mathscr{D}(\overline{L}^{\,-1})$ следует, что $\overline{L^{-1}} = \overline{L}^{\,-1}$. $\otimes$

Следствие 4.7.3. Для доказательства существования сильного решения уравнения (4.7.43) при любом элементе $\boldsymbol{F} \in H$ достаточно доказать энергетическое неравенство (4.7.45), замыкаемость оператора L и плотность множества значений $\mathscr{R}(L)$ в пространстве H.

4.7.5. Сильное решение задачи Коши (4.7.1), (4.7.3)

Согласно п. 4.7.3 задача Коши (4.7.1),(4.7.3) может быть записана в виде операторного уравнения (4.7.25), где оператор $\boldsymbol{L}$ действует из банахова пространства $B(\boldsymbol{y})$ в гильбертово пространство $H(\boldsymbol{y}) = L_2(K(\boldsymbol{y})) \times H^1(\Omega^{(0)}) \times L_2(\Omega^{(0)})$. Для оператора $\boldsymbol{L}$ доказано энергетическое неравенство (4.7.26). Согласно следствию 4.7.3, для доказательства существования сильного решения задачи Коши (4.7.1), (4.7.3) достаточно доказать, что оператор $\boldsymbol{L}$, действующий из пространства $B(\boldsymbol{y})$ в пространство $H(\boldsymbol{y})$, допускает замыкание $\overline{\boldsymbol{L}}$ и плотность множества значений $\mathscr{R}(\boldsymbol{L})$ в пространстве $H(\boldsymbol{y})$.

Лемма 4.7.2. *Оператор $\boldsymbol{L}$ операторного уравнения* (4.7.25)*, как оператор из $B(\boldsymbol{y})$ в $H(\boldsymbol{y})$, допускает замыкание.*

Доказательство. Согласно определению 4.7.5, пусть последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ функций $u^{(k)}$ из области определения $\mathscr{D}(\boldsymbol{L}) = C^2(\overline{K(\boldsymbol{y})})$ оператора $\boldsymbol{L}$ сходится к нулю по норме пространства $B(\boldsymbol{y})$, т. е. $\|u^{(k)}\|_{B(\boldsymbol{y})} \to 0$ при $k \to \infty$.

Так как $\|l_0 u^{(k)}\|_{H^1(\Omega^{(0)})} \le c\|u^{(k)}\|_{B(\boldsymbol{y})}$ и $\|l_1 u^{(k)}\|_{L_2(\Omega^{(0)})} \leqslant c\|u^{(k)}\|_{B(\boldsymbol{y})}$, то отсюда вытекает, что $\|l_0 u^{(k)}\|_{L_2(\Omega^{(0)})} \to 0$ и $\|l_1 u^{(k)}\|_{L_2(\Omega^{(0)})} \to 0$ при $k \to \infty$.

Теперь покажем, что $\mathscr{L}u^{(k)} \to 0$ в $L_2(K(\boldsymbol{y}))$ при $k \to \infty$. Для этого рассмотрим скалярное произведение $(\mathscr{L}u^{(k)},v)_{L_2(K(\boldsymbol{y}))}$ для любой функции $v \in C_0^\infty(K(\boldsymbol{y}))$. Интегрируя по частям последнее выражение получим

$$\left(\mathscr{L}u^{(k)},v\right)_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} = \left(u^{(k)},A^{(0)}v\right)_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} + \left(A^{(1)}u^{(k)},v\right)_{L_2(K(\boldsymbol{y}))}. \quad (4.7.47)$$

Из предположения $\|u^{(k)}\|_{B(\boldsymbol{y})} \to 0$ следует $\|u^{(k)}\|_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} \to 0$ и $\|A^{(1)}u^{(k)}\|_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из (4.7.47) следует, что $\left(\mathscr{L}u^{(k)},v\right)_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} \to 0$ при $k \to \infty$ для любого $v \in C_0^\infty(K(\boldsymbol{y}))$. Поскольку множество $C_0^\infty(K(\boldsymbol{y}))$ плотно в $L_2(K(\boldsymbol{y}))$ (см. п. 4.5.5), то $\mathscr{L}u^{(k)} \to 0$ в $L_2(K(\boldsymbol{y}))$ при $k \to \infty$. $\otimes$

Замыкание оператора $\boldsymbol{L}$ обозначим через $\overline{\boldsymbol{L}}$. Оператор $\overline{\boldsymbol{L}}$ действует из $B(\boldsymbol{y})$ в $H(\boldsymbol{y})$. К области определения $\mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$ оператора $\overline{\boldsymbol{L}}$ принадлежат все элементы $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ и все $u \in B(\boldsymbol{y})$, для которых существуют последовательности $\{u^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ элементов $u^{(k)} \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$, где $\|u - u^{(k)}\|_{B(\boldsymbol{y})} \to 0$ при $k \to \infty$, и существует элемент $\boldsymbol{F} \in H(y)$, для которого $\|\boldsymbol{L}u^{(k)} - \boldsymbol{F}\|_{H(\boldsymbol{y})} \to 0$ при $k \to \infty$. В этом случае $\boldsymbol{F}$ относится к области значений $\mathscr{R}(\overline{\boldsymbol{L}})$ и $\boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{L}}u$.

Таким образом, решение уравнения

$$\overline{\boldsymbol{L}}u = \boldsymbol{F} \quad (4.7.48)$$

называется *сильным решением задач* (4.7.1), (4.7.3).

Путем предельного перехода из неравенства (4.7.26) и определения области определения $\mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$ оператора $\overline{\boldsymbol{L}}$ следует энергетическое неравенство

$$\|u\|_{B(\boldsymbol{y})} \le c\|\overline{\boldsymbol{L}}u\|_{H(\boldsymbol{y})} \quad (4.7.49)$$

для любого $u \in \mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$, где постоянная $c > 0$ та же, что и в неравенстве (4.7.26).

Следствие 4.7.4. Из неравенства (4.7.49) следует единственность сильного решения задачи Коши (4.7.1), (4.7.3), если оно существует.

Доказательство. Доказательство проводится из предположения, что существуют два решения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ для одного и того же элемента $\boldsymbol{F}$. В силу линейности оператора $\overline{\boldsymbol{L}}$ путем вычитания друг из друга получим $0 = \overline{\boldsymbol{L}}u^{(1)} - \overline{\boldsymbol{L}}u^{(2)} = \overline{\boldsymbol{L}}(u^{(1)} - u^{(2)}) = \overline{\boldsymbol{L}}\widetilde{u}$. Так как $\widetilde{u} \in \mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$, то для него справедливо энергетическое неравенство (4.7.49). Отсюда, так как $\overline{\boldsymbol{L}}\widetilde{u} = 0$, $\|\widetilde{u}\|_{B(\boldsymbol{y})} \leqslant 0$, т. е. $\widetilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)} = 0$ по норме пространства $B(\boldsymbol{y})$. $\otimes$

Основным моментом доказательства существования сильного решения задачи Коши (4.7.1), (4.7.3) для любого элемента $\boldsymbol{F} \in H(\boldsymbol{y})$ является установление плотности множества значений $\{\boldsymbol{L}u\}$ оператора $\boldsymbol{L}$, если u — произвольная функция из множества $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L}) = \{u \in \mathscr{D}_k(\boldsymbol{L}) \mid l_0 u = l_1 u = 0\}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.7.3. *Пусть коэффициенты* $a^{(ij)}, a^{(k)} \in C^1(\overline{K(\boldsymbol{y})})$, $i,j = 1,\ldots,n$; $k = 0,\ldots,n$; $a^{(00)} \in C(\overline{K(\boldsymbol{y})})$ *уравнения* (4.7.1). *Если для некоторого элемента* $v \in L_2(K(\boldsymbol{y}))$ *выполняется равенство*

$$(\mathscr{L}u,v)_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} = 0 \qquad (4.7.50)$$

для любого $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$, *то* $v = 0$ *по норме пространства* $L_2(K(\boldsymbol{y}))$.

Доказательство будет проведено с помощью операторов осреднения с переменным шагом, которые будут введены позже. А теперь вернемся к рассмотрению сильного решения задачи Коши (4.7.1), (4.7.3).

Теорема 4.7.6. *Пусть выполняются условия леммы 4.7.3 относительно гладкости коэффициентов уравнения* (4.7.1). *Для любых функций* $f \in L_2(K(\boldsymbol{y}))$, $\varphi \in H^1(\Omega^{(0)})$, $\psi \in L_2(\Omega^{(0)})$ *существует и единственно сильное решение* $u \in B(\boldsymbol{y})$ *задачи Коши* (4.7.1), (4.7.3) *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{B(\boldsymbol{y})} \leq c\left(\|f\|_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} + \|\varphi\|_{H^1(\Omega^{(0)})} + \|\psi\|_{L_2(\Omega^{(0)})}\right), \qquad (4.7.51)$$

где постоянная $c > 0$ *та же, что и в неравенстве* (4.7.45).

Доказательство. Для существования сильного решения задачи Коши (4.7.1), (4.7.3) согласно следствию 4.7.3 достаточно доказать энергетическое неравенство для оператора задачи, замыкаемость его и плотность множества значений.

Завершая изучение существования сильного решения задачи Коши (4.7.1), (4.7.3) осталось показать плотность множества значений $\mathscr{R}(\boldsymbol{L})$ оператора $\boldsymbol{L}$ в пространстве $H(\boldsymbol{y})$, так для него энергетическое неравенство доказано (см. теорему 4.7.3) и он допускает замыкание $\overline{\boldsymbol{L}}$ (см. лемму 4.7.2).

Пусть элемент $\boldsymbol{v} = \left(v(\boldsymbol{x}), v^{(0)}(\boldsymbol{x}'), v^{(1)}(\boldsymbol{x}')\right) \in H(\boldsymbol{y})$ ортогонален множеству $\mathscr{R}(\boldsymbol{L})$. Это означает, что выполняется равенство

$$\left(\mathscr{L}u,v\right)_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} + \left(l_0u,v^{(0)}\right)_{H^1(\Omega^{(0)})} + \left(l_1u,v^{(1)}\right)_{L_2(\Omega^{(0)})} = 0 \tag{4.7.52}$$

для любого элемента $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$. Полагая в (4.7.52), в частности, что u равно любому элементу из $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$, получим из (4.7.52) равенство

$$(\mathscr{L}u, v)_{L_2(K(\boldsymbol{y}))} = 0 \tag{4.7.53}$$

для всех $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$. Согласно лемме 4.7.3 из равенства (4.7.53) следует, что оно выполняется только для $v = 0$ в $L_2(K(\boldsymbol{y}))$.

Возвращаясь опять к (4.7.52) с учетом (4.7.53) будем иметь равенство ортогональности

$$\left(l_0u,v^{(0)}\right)_{H^1(\Omega^{(0)})} + \left(l_1u,v^{(1)}\right)_{L_2(\Omega^{(0)})} = 0 \tag{4.7.54}$$

для любого $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$. Если функция $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L}) = C^2\left(\overline{K(\boldsymbol{y})}\right)$, то $l_0u = u(0,\boldsymbol{x}') \in C^2\left(\overline{\Omega^{(0)}}\right)$ и $l_1u = \frac{\partial u(0,\boldsymbol{x}')}{\partial x_0} \in C^1\left(\overline{\Omega^{(0)}}\right)$. Очевидно, что для любой функции $u^{(0)} \in C^2\left(\overline{\Omega^{(0)}}\right)$ существует $u \in C^2\left(\overline{K(\boldsymbol{y})}\right)$, где $u(0,\boldsymbol{x}') = u^{(0)}$. То же самое можно сказать о значении l_1u оператора l_1, т. е. для любой функции $u^{(1)} \in C^1\left(\overline{\Omega^{(0)}}\right)$ существует функция $u \in C^2\left(\overline{K(\boldsymbol{y})}\right)$, где $\frac{\partial u(0,\boldsymbol{x}')}{\partial x_0} = u^{(1)}(\boldsymbol{x}')$. Множество $C^2\left(\overline{\Omega^{(0)}}\right)$ плотно в $H^1\left(\Omega^{(0)}\right)$, а $C^1\left(\Omega^{(0)}\right)$ — в $L_2\left(\Omega^{(0)}\right)$. Так как l_0 и l_1 линейно независимы и множества $\{l_0u\}$ и $\{l_1u\}$ плотны в $H^1\left(\Omega^{(0)}\right)$ и $L_2\left(\Omega^{(0)}\right)$ соответственно, если u пробегает все множество $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$, то равенство (4.7.54) справедливо тогда и только тогда, если $v^{(0)} = 0$ в $H^1\left(\Omega^{(0)}\right)$ и $v^{(1)} = 0$ в $L_2\left(\Omega^{(0)}\right)$.

Таким образом, доказана плотность множества значений $\mathscr{R}(\boldsymbol{L})$ оператора $\boldsymbol{L}$ в $H(\boldsymbol{y})$, если выполняется утверждение леммы 4.7.3.

Тем самым, согласно следствию 4.7.3, доказано существование сильного решения задачи Коши (4.7.1), (4.7.3) для любого элемента $\boldsymbol{F} \in H(\boldsymbol{y})$, т. е. для любых функций $f \in L_2\left(K(\boldsymbol{y})\right)$, $\varphi \in H^1\left(\Omega^{(0)}\right)$ и $\psi \in L_2\left(\Omega^{(0)}\right)$.

Согласно следствию 4.7.4 энергетическое неравенство (4.7.49) доказывает единственность существующего сильного решения и порождает доказываемую оценку (4.7.51), если элемент $\boldsymbol{F} \in H(\boldsymbol{y})$. Тем самым, теорема 4.7.6 доказана. $\otimes$

Осталось завершить доказательство леммы 4.7.3. Но как отмечалось выше, это доказательство будет проведено с использованием операторов осреднения с переменным шагом и их свойств, которые рассмотрим в следующем пункте.

4.7.6. Операторы осреднения с переменным шагом

В пункте 4.5.5 определены операторы осреднения Соболева J_δ с помощью формулы (4.5.29). Основное их свойство то, что они исходную функцию преобразуют в бесконечно дифференцируемые функции для разных значений параметра δ и эти функции $J_\delta u$ сходятся к u по соответствующей норме при стремящимся к нулю δ. Недостаток операторов J_δ тот, что они размывают носитель исходной функции и не сохраняют ее граничные значения. Чтобы устранить эти недостатки на основе операторов Соболева введем новые операторы осреднения с переменным шагом.

Идея введения новых операторов осреднения следующая. У оператора Соболева параметр δ является постоянным для всех точек носителя осредняемой функции. Введем операторы осреднения, для которых этот параметр для разных точек задания функции принимал бы разные значения в зависимости от нашего выбора. И в то же время значения этого оператора представляли бы бесконечно дифференцируемые функции и являлись бы с любой точностью аппроксимацией исходной функции.

Пусть Ω — некоторая область из $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$. С помощью операторов Соболева (4.5.27) предварительно докажем лемму о разбиении единицы. Через функции разбиения будут введены новые операторы осреднения.

Здесь предполагается разбиение области Ω на подобласти $\Omega_{(\varepsilon)}$. Через $\Omega_{(\varepsilon)}$ будем обозначать совокупности точек $x \in \Omega$, удаленные от границы $\partial\Omega$ не менее, чем на ε. Через подобласти $\Omega_{(\varepsilon)}$ введем новые подобласти $G_{(m)}$ следующим образом: $G_{(-1)} = \varnothing$, $G_{(0)} = \Omega_{(1/2)}$, $G_{(m)} = \Omega_{(1/2^{m+1})} - \Omega_{(1/2^m)}, m = 1,2,\ldots$, $\varnothing$ — пустое множество. Здесь выбрано сгущение подобластей $G_{(m)}$ при $m \to \infty$ около границы $\partial\Omega$, чтобы в последующем операторы осреднения учитывали граничные условия осредняющих функций.

Как видно из определения подобластей $G_{(m)}$ сгущение их можно сделать около любой наперед заданной гиперповерхности или их конечного объединения.

Лемма 4.7.4. *(о разбиении единицы). Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Существует такая последовательность неотрицательных функций $\Psi_{(m)} : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, $\Psi_{(m)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что:*

E.1. $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin \Omega; \end{cases}$

E.2. $\Omega = \sum\limits_{m=0}^{\infty} supp\, \Psi_{(m)}$*, причем кратность покрытия множества* Ω *множествами* $supp\ \ \Psi_{(m)}$ *не превышает двух;*

E.3. $supp\ \ \Psi_{(m)} \subset G_{(m-1)} \cup G_{(m)} \cup G_{(m+1)}$, $m = 0{,}1, \ldots;$

E.4. *для любого мультииндекса* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *справедлива оценка* $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \leqslant C_{(\alpha)}2^{m|\boldsymbol{\alpha}|}$*, где* $C_{(\alpha)}$ *зависит от* α.

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{G}_{(m)} = \Omega_{(1/2^{m+1}-1/2^{m+3})} - \Omega_{(1/2^m+1/2^{m+3})}.$$

Введем функцию $\varphi_{(m)}$ с помощью подобласти $\widetilde{G}_{(m)}$ по формуле

$$\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\delta^n_{(m)}} \int\limits_{\widetilde{G}_{(m)}} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(m)}}\Big)\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{4.7.55}$$

где $\delta_{(m)} = 1/2^{m+4}$, функция $\omega : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to \omega(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ определена в пункте 4.5.5.

Рассмотрим свойства функции $\varphi_{(m)}$.

1. Так как $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, то и $\varphi_{(m)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Это хорошо видно из формулы (4.7.55)

2. Сделаем оценку для производной $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_{(m)}$,

$$\begin{gathered} |\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_{(m)}| = \frac{1}{\delta^n_{(m)}}\Big| \int\limits_{\widetilde{G}_{(m)}} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(m)}}\Big)\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}\Big| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\delta^{|\boldsymbol{\alpha}|}_{(m)}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\omega(\boldsymbol{z})|\mathrm{d}\boldsymbol{z} = C_{(\alpha)}\frac{1}{\delta^{|\boldsymbol{\alpha}|}_{(m)}} = C_{(\alpha)}2^{(m+4)|\boldsymbol{\alpha}|}. \end{gathered} \tag{4.7.56}$$

3. Функция $\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, если $\omega\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(m)}}\right) \neq 0$. А это возможно для тех $\boldsymbol{x}$, которые лежат в области, получаемой от расширения $\widetilde{G}_{(m)}$ на расстояние $\delta_{(m)} = 1/2^{m+4}$. Таким образом,

$$\operatorname{supp} \ \varphi_{(m)} \subset \overline{\Omega_{(1/2^{m+1}-1/2^{m+3}-1/2^{m+4})}} - \Omega_{(1/2^m+1/2^{m+3}+1/2^{m+4})} =$$
$$= \overline{\Omega_{(5/2^{m+4})}} - \Omega_{(19/2^{m+4})}.$$

Покажем, что для $j \geqslant 2$ $\operatorname{supp} \ \varphi_{(m)} \cap \operatorname{supp} \ \varphi_{(m+j)} = \varnothing$, т. е. выясним, когда

$$\left(\overline{\Omega_{(5/2^{m+j+4})}} - \Omega_{(19/2^{m+j+4})}\right) \cap \left(\overline{\Omega_{(5/2^{m+4})}} - \Omega_{(19/2^{m+4})}\right) = \varnothing. \qquad (4.7.57)$$

Так как $\Omega_{\varepsilon^{(1)}} \supset \Omega_{\varepsilon^{(2)}}$ для $\varepsilon^{(1)} < \varepsilon^{(2)}$, то (4.7.57) возможно, если $19/2^{m+j+4} < 5/2^{m+4}$, или $19 < 5 \cdot 2^j$ для $j \geqslant 2$.

Рассмотрим объединение $G_{(m-1)} \cup G_{(m)} \cup G_{(m+1)} = \big(\Omega_{(1/2^m)} - \Omega_{(1/2^{m-1})}\big) \cup \big(\Omega_{(1/2^{m+1})} - \Omega_{(1/2^m)}\big) \cup \big(\Omega_{(1/2^{m+2})} - \Omega_{(1/2^{m+1})}\big) = \big(\Omega_{(1/2^{m+2})} - \Omega_{(1/2^{m-1})}\big)$. Так как $1/2^{m+2} < 5/2^{m+4}$ и $1/2^{m-1} > 19/2^{m+4}$, то $\operatorname{supp} \ \varphi_{(m)} \subset \big(G_{(m-1)} \cup G_{(m)} \cup G_{(m+1)}\big)$.

4. В силу определения (4.7.55) значения функции $0 \leqslant \varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$. Если $\boldsymbol{x} \in G_{(m)}$, то $\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = 1$. Действительно, в этом случае $\{\boldsymbol{y}|\,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \leqslant \delta_{(m)} = 1/2^{m+4} \subset \tilde{G}_{(m)}\}$ и функция $\omega : \tilde{G}_{(m)} \ni \boldsymbol{y} \to \omega(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(m)}})$ в формуле (4.7.55) принимает все свои значения, не равные нулю.

5. Из пункта **3** настоящего доказательства следует, что кратность покрытия множества Ω множествами $\operatorname{supp} \ \varphi_{(m)}$ не превышает двух. Отсюда и так как $0 \leqslant \varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$, $\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = 1$ для $\boldsymbol{x} \in G_{(m)}$, то $1 \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \leqslant 2$.

Функция $\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \in C^{\infty}(\Omega)$. Для $\boldsymbol{x} \in G_{(m)}$ $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_{(m-1)}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_{(m+1)}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_{(m-1)}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_{(m+1)}(\boldsymbol{x})$. Отсюда и из (4.7.56) следует оценка

$$\left|\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{(m)}(\boldsymbol{x})\right| \leqslant \tilde{C}_{(\alpha)} 2^{m|\boldsymbol{\alpha}|}, \quad x \in \widetilde{G}_{(m)}. \qquad (4.7.58)$$

6. Полагаем

$$\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x})}{\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{(m)}(\boldsymbol{x})}, & x \in G_{(m)}, \\ 0, & x \notin G_{(m)}. \end{cases} \qquad (4.7.59)$$

Из определения $\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})$ по формуле (4.7.59) и доказанных свойств **1** — **5** для функции $\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x})$ следуют доказываемые свойства **E.1** — **E.3** леммы 4.7.4.

Далее, для $\boldsymbol{x} \in \operatorname{supp}\ \Psi_{(m)}$

$$\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} \frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})!}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Big(\frac{1}{\Phi(\boldsymbol{x})}\Big),$$

где $\Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{(m)}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha} = (\beta_1 \leqslant \alpha_1,\ldots \beta_n \leqslant \alpha_n)$, $\boldsymbol{\alpha}! = (\alpha_1!,\ldots,\alpha_n!)$, $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta} = (\alpha_1-\beta_1,\ldots,\alpha_n-\beta_n)$, $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})! = \big((\alpha_1-\beta_1)!,\ldots,(\alpha_n-\beta_n)!\big)$. Производные $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Big(\frac{1}{\Phi(\boldsymbol{x})}\frac{\Sigma}{\Phi(\boldsymbol{x})^{|\boldsymbol{\beta}|+1}}\Big)$, где Σ состоит из конечного числа слагаемых производных от функции $\Phi(\boldsymbol{x})$. Учитывая это, оценку (4.7.58) и определение функции $\Phi(\boldsymbol{x})$ по формуле (4.7.59), получим доказываемую оценку в **E.4**. $\otimes$

Рассмотрим операторы осреднения, которые определяются следующими формулами

$$J_{(k)}u(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})J_{\delta_{(mk)}}u(\boldsymbol{x}), \tag{4.7.60}$$

$$J^{\star}_{(k)}u(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=0}^{\infty}J_{\delta_{(mk)}}\big(\Psi_{(m)}u\big)(\boldsymbol{x}), \tag{4.7.61}$$

где $J_{\delta_{(mk)}}$ — операторы осреднения Соболева (4.5.27), $\Psi_{(m)}$ — функция разбиения единицы (см. лемму 4.7.4), $\delta_{(mk)} \leqslant 2^{-m-4}$, $\delta_{(mk)} = \delta_{(mk)}(u)$ выбирается в зависимости от функции u (см. лемму 4.5.3, лемму 4.5.4), $\delta_{(mk)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Как отмечалось уже, характерной особенность операторов осреднения (4.7.60) и (4.7.61) в отличие от операторов Соболева (4.5.27) является то, что они сохраняют граничные условия осредняющих функций, если эти функции имеют смысл на границе $\partial\Omega$ области Ω и Ω разбита соответствующим образом на подобласти $G_{(m)}$, сгущение которых наблюдается в окрестности гиперповерхности $\partial\Omega$.

Докажем некоторые свойства операторов осреднения (4.7.60) и (4.7.61).

J.1. *Пусть функция $u \in C^l(\overline{\Omega})$. Тогда*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\tilde{\boldsymbol{x}}} J_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) = \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}}),\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\tilde{\boldsymbol{x}}} J^{\star}_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) = \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})$$

для любой точки $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega$, любых $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant l$, $l \in \widetilde{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — некоторая точка гиперповерхности $\partial\Omega$ и $\boldsymbol{x}$ из области Ω, где расстояние $|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}| = \|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, $\delta > 0$. Рассмотрим разность значений по модулю $J_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x})$ и $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})$, т. е $|J_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})|$. Воспользуемся свойствами $\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = 1$ и $(J_{\delta_{(mk)}}\cdot 1)(\boldsymbol{x}) = 1$ для любой точки $\boldsymbol{x}\in\Omega$, где $\Psi_{(m)}$ — функции разбиения единицы,$J_{\delta_{(mk)}}$ — операторы Соболева, определяемые оператором $J_{(k)}$. Тогда, возвращаясь к рассматриваемой разности

$$|J_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})| =$$
$$= |J_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})(J_{\delta_{(mk)}}\cdot 1)(\boldsymbol{x})| =$$
$$= \Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\frac{1}{\delta^n_{(mk)}}\int\limits_{\Omega}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\frac{1}{\delta^n_{(mk)}}\int\limits_{\Omega}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big|\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})\Big|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \qquad (4.7.62)$$

В силу того, что функция $u\in C^l(\overline{\Omega})$, то из того, что $|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}| < \delta$, следует $\Big|\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})\Big| < \varepsilon(u)$, $\varepsilon(u)\to 0$ при $\delta\to 0$. Следовательно, $|J_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})| < \varepsilon\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\frac{1}{\delta^n_{(mk)}}\int\limits_{\Omega}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \varepsilon\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\tilde{\boldsymbol{x}}} J_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) = \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\tilde{\boldsymbol{x}})$.

Аналогично доказывается второе утверждение свойства **J.1**. $\otimes$

J.2. *Для любой функции $u\in L_2(\Omega)$ осредненные функции $J_{(k)}u$, $J^{\star}_{(k)}u\in C^{\infty}(\Omega)$.*

Это свойство следует из того, что функции $\Psi_{(m)}\in C^{\infty}(\Omega)$ и $\omega\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, которые определяют операторы $J_{(k)}$,$J^{\star}_{(k)}$.

J.3. *Для любых функций u,$v\in L_2(\Omega)$*

$$(J_{(k)}u,v)_{L_2(\Omega)} = (u, J^{\star}_{(k)}v)_{L_2(\Omega)}. \qquad (4.7.63)$$

Доказательство. Для доказательства равенства (4.7.63) рассмотрим выражение $(J_{(k)}u,v)_{L_2(\Omega)}$, в котором поменяем порядок интегрирования, т. е.

$$(J_{(k)}u,v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\frac{1}{\delta^n_{(mk)}}\int\limits_{\Omega}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$
$$= \int\limits_{\Omega}u(\boldsymbol{y})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\delta^n_{(mk)}}\int\limits_{\Omega}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = (u, J^{\star}_{(k)}u)_{L_2(\Omega)}.$$

$\otimes$

Обозначим через $L_\infty(\Omega)$ банахово пространство, которое порождается нормой

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} vrai|u(\boldsymbol{x})| < +\infty.$$

J.4. *Для любой функции $u \in L_2(\Omega)$*

$$\|J_{(k)}u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.7.64}$$

$$\|J^\star_{(k)}u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.7.65}$$

где положительная константа c не зависит от функции u.

Доказательство. Докажем неравенство (4.7.64). Используя неравенство треугольника для нормы можно сделать следующие оценки сверху

$$\begin{aligned}\|J_{(k)}u\|_{L_2(\Omega)} &= \Big\|\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}J_{\delta_{(mk)}}u\Big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\big\|\Psi_{(m)}J_{\delta_{(mk)}}u\big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\|\Psi_{(m)}\|_{L_\infty(\Omega)}\|J_{\delta_{(mk)}}u\|_{L_2(\mathrm{supp}\ \Psi_{(m)})}.\end{aligned} \tag{4.7.66}$$

В (4.7.66) $\|\Psi_{(m)}\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 1$ для всех $m = 0{,}1,\ldots$, согласно свойству **E.1** В силу свойства **E.3** леммы 4.7.4 $\mathrm{supp}\ \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \subset G_{(m-1)} \cup G_{(m)} \cup G_{(m+1)}$ и, так как $\delta_{(mk)} \leqslant 2^{-m-4}$, $2^{-m+1} + \delta_{(mk)} \leqslant 2^{-m+2}$, $2^{-m-2} - \delta_{(mk)} > 2^{-m-3}$. Другими словами, если $\boldsymbol{x} \in supp\,\Psi_{(m)}$ и $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \delta_{(mk)}$, то $\boldsymbol{y} \in \cup_{s=m-2}^{m+2}G_{(s)} = G_{m-2}^{m+2}$. На основании неравенства Коши - Буняковского

$$\begin{aligned}&\|J_{\delta_{(mk)}}u\|^2_{L_2(\mathrm{supp}\ \Psi_{(m)})} \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\mathrm{supp}\ \Psi_{(m)}}\Big[\delta_{(mk)}^{-n}\int\limits_{G_{m-2}^{m+2}}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\delta_{(mk)}^{-n}\int\limits_{G_{m-2}^{m+2}}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)u^2(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\Big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ &= \int\limits_{\mathrm{supp}\ \Psi_{(m)}}\delta_{(mk)}^{-n}\int\limits_{G_{m-2}^{m+2}}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)u^2(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{G_{m-2}^{m+2}}u^2(\boldsymbol{y})\,\delta_{(mk)}^{-n}\int\limits_{\Omega}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \|u\|^2_{L_2(G_{m-2}^{m+2})}.\end{aligned} \tag{4.7.67}$$

Таким образом, из неравенства (4.7.66) в силу (4.7.67) с учетом кратности интегрирования следует доказываемое неравенство

$$\|J_{(k)}u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 5\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Неравенство (4.7.65) доказывается аналогично. $\otimes$

J.5. *Для любой функции* $u \in L_2(\Omega)$ $J_{(k)}u \to u$ *и* $J^\star_{(k)}u \to u$ *в* $L_2(\Omega)$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим по норме пространства $L_2(\Omega)$ разность $J_{(k)}u - u$ и проведем соответствующие оценки, т. е.

$$\|J_{(k)}u - u\|_{L_2(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega \Big[\sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{(m)} J_{\delta_{(mk)}}u - u\Big]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\int\limits_\Omega \Big[\sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \int\limits_{|\boldsymbol{z}|\leqslant 1} \omega(\boldsymbol{z})\Big(u(\boldsymbol{x} + \delta_{(mk)}\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{x})\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\Big]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\int\limits_\Omega \Big[\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \int\limits_{|\boldsymbol{z}|\leqslant 1} \omega(\boldsymbol{z})\Big(u(\boldsymbol{x} + \delta_{(mk)}\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{x})\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\Big]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \|\Psi_{(m)}\|_{L_\infty(\Omega)} \Big(\int\limits_{|\boldsymbol{z}|\leqslant 1} \omega(\boldsymbol{z}) \int\limits_{\operatorname{supp}\,\Psi_{(m)}} \big[u(\boldsymbol{x} + \delta_{(mk)}\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{x})\big]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\Big)^{1/2}. \tag{4.7.68}$$

Здесь использованы неравенство треугольника для норм, неравенство Гельдера и другие элементарные неравенства. В силу леммы 4.5.3 $\delta_{(mk)}$ можно выбрать так, что

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\,\Psi_{(m)}} \big[u(\boldsymbol{x} + \delta_{(mk)}\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{x})\big]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{1}{4k^2 2^{2m}}. \tag{4.7.69}$$

Тогда из (4.7.68) и (4.7.69) следует неравенство

$$\|J_{(k)}u - u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{\infty} \|\Psi_{(m)}\|_{L_\infty(\Omega)} \Big(\int\limits_{|\boldsymbol{z}|\leqslant 1} \omega(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\Big)^{1/2} \frac{1}{2^m} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2k2^m} = \frac{1}{k}, \text{ т. е. } J_{(k)}u \to u \text{ при } k \to \infty.$$

Аналогично доказывается, что $J^\star_{(k)}u \to u$ в $L_2(\Omega)$ при $k \to \infty$. $\otimes$

Если в процессе доказательства утверждения **J.5** вместо леммы 4.5.3 воспользоваться леммой 4.5.5, то получим следующее утверждение.

J.6. *Для любой функции* $u \in L_2(\Omega)$ *можно выбрать числа* $\delta_{(mk)} = = \delta_{(mk)}(u)$ *в операторах осреднения* $J_{(k)}$ *и* $J^{\star}_{(k)}$ *таким образом, что*

$$\|J_{(k)}u) - u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k}\|u\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|J^{\star}_{(k)}u - u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k}\|u\|_{L_2(\Omega)},$$

для любого $k \in \mathbb{N}$.

Свойства **J.5** и **J.6** доказаны для функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$, в топологии этого пространства. Эти свойства можно обобщить на случай пространства Соболева $H^l(\Omega)$ для целых положительных индексов l. Рассмотрим доказательство этих свойств по норме пространства $H^l(\Omega)$.

Для любой функции $u \in H^l(\Omega)$ и любого конечного мультииндекса $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant l$,

$$\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_{(k)}u = \sum_{\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} a_{(\boldsymbol{\beta})} J_{(k)}\Big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Psi, \omega\Big)\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}u,$$

где

$$J_{(k)}\Big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Psi, \omega\Big)\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}u = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n} \int_{\Omega} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

$\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$ — неравенство мультииндексов $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, под которым понимается неравенство координат $\beta_j \leqslant \alpha_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$; $a_{(\boldsymbol{\beta})}$ — коэффициенты формулы Лейбница частной производной $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}$ произведения двух функций. При $\boldsymbol{\beta} \neq 0$ $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = 0$. Это следует из того, что $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = 1, \boldsymbol{x} \in \Omega$. Выражение $J_{(k)}\Big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Psi, \omega\Big)\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}u$ при $\boldsymbol{\beta} \neq 0$ можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} J_{(k)}\Big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Psi, \omega\Big)\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}u = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n} \times \\ \times \int_{\Omega} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big[\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}u(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}u(\boldsymbol{x})\Big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \end{gathered} \tag{4.7.70}$$

А теперь рассмотрим разность

$$
\begin{gathered}
\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_{(k)} u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) = \\
= \sum_{\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} a_{(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \delta_{(mk)}^{-n} \int_{\Omega} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \Big[\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{y}) - \\
- \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x})\Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \sum_{\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} a_{(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \times \\
\times \int_{|z| \leqslant 1} \omega(\boldsymbol{z}) \Big[\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x} + \delta_{(mk)} \boldsymbol{z}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x})\Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{z}.
\end{gathered}
\tag{4.7.71}
$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
\|J_{(k)} u - u\|_{H^l(\Omega)} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant l} \Big\| \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_{(k)} u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) \Big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\
\leqslant \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant l} \sum_{\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} \Big[a_{(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \Big\| \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}} \Psi_{(m)} \Big\|_{L_\infty(\Omega)} \times \\
\times \Big\| \int_{|\boldsymbol{z}| \leqslant 1} \omega(\boldsymbol{z}) \Big[\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x} + \delta_{(mk)} \boldsymbol{z}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x})\Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{z} \Big\|_{L_2(G_{m-1}^{m+1})},
\end{gathered}
\tag{4.7.72}
$$

где, согласно лемме 4.7.4 (свойство **E.4**),

$$
\Big\| \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}} \Psi_{(m)} \Big\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C_{(\boldsymbol{\beta})} 2^{m|\boldsymbol{\beta}|},
\tag{4.7.73}
$$

постоянная $C_{(\boldsymbol{\beta})}$ не зависит от u. Как и при доказательстве свойства **J.6** можно показать, что

$$
\begin{gathered}
\Big\| \int_{|\boldsymbol{z}| \leqslant 1} \omega(\boldsymbol{z}) \Big[\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x} + \delta_{(mk)} \boldsymbol{z}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x})\Big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{z} \Big\|_{L_2(G_{m-1}^{m+1})} \leqslant \\
\leqslant \Big\{ \int_{|\boldsymbol{z}| \leqslant 1} \omega(\boldsymbol{z}) \int_{G_{m-1}^{m+1}} \Big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x} + \delta_{(mk)} \boldsymbol{z}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x})\Big)^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}\boldsymbol{z} \Big\}^{1/2} \leqslant \\
\leqslant \varepsilon_{(mk)} \Big\| \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u \Big\|_{L_2(G_{m-1}^{m+1})},
\end{gathered}
\tag{4.7.74}
$$

где $\varepsilon_{(mk)}$зависит от выбора $\delta_{(mk)}$ и $\varepsilon_{(mk)} \to 0$ при $\delta_{(mk)} \to 0$.

Аналогично,

$$
\|J^{\star}_{(k)} u - u\|_{H^l(\Omega)} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant l} \Big\| \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J^{\star}_{(k)} u(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) \Big\|_{L_2(\Omega)},
$$

$$\Big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J^{\star}_{(k)} u - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u\Big)(\boldsymbol{x}) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{(mk)}^{-n} \int\limits_{\Omega} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} a_{(\boldsymbol{\beta})} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{y}) \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} -$$
$$-\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} a_{(\boldsymbol{\beta})} \delta_{(mk)}^{-n} \int\limits_{\Omega} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \times \tag{4.7.75}$$
$$\times \Big[\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\Big] \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} + \Big(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} J_{(k)} u - \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u\Big)(\boldsymbol{x}).$$

Таким образом, справедливы следующие утверждения:

J.7. *Для любой функции $u \in H^l(\Omega)$ $J_{(k)}u \to u$ и $J^{\star}_{(k)}u \to u$ в $H^l(\Omega)$ при $k \to \infty$.*

J.8. *Для любой функции $u \in L_2(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать числа $\delta_{(mk)} = \delta_{(mk)}(u)$, для которых*

$$\|J_{(k)}u - u\|_{H^l(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k}\|u\|_{H^l(\Omega)}, \tag{4.7.76}$$

$$\|J^{\star}_{(k)}u - u\|_{H^l(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k}\|u\|_{H^l(\Omega)}. \tag{4.7.77}$$

Доказательство. Неравенство (4.7.76) непосредственно следует из приведенных соотношений (4.7.70) – (4.7.71) и неравенств (4.7.72) – (4.7.74). В свою очередь, из неравенства (4.7.76) имеем сходимость $J_{(k)}u \to u$ в $H^l(\Omega)$ при $k \to \infty$.

Аналогично, если рассматривать (4.7.75), используя здесь непрерывность функции $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}}\Psi_{(m)}$ в $\overline{\Omega}$ для всех $|\boldsymbol{\beta}| \leqslant l$, можно доказать неравенство (4.7.77) и сходимость $J^{\star}_{(k)}u \to u$ в $H^l(\Omega)$ при $k \to \infty$. $\otimes$

Пусть $u \in H^1(\Omega)$. В этом случае можно говорить о том, что след $u\big|_{\partial\Omega} \in L_2(\partial\Omega)$. Обозначим через $\partial\Omega_{(\varepsilon)} \subset \Omega$ гиперповерхность, которая находится на близком расстоянии от границы $\partial\Omega$ области Ω, т. е.

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega_{(\varepsilon)},\tilde{\boldsymbol{x}}\in\partial\Omega} |\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}| < \varepsilon$$

и $\partial\Omega_{(\varepsilon)}$ той же гладкости, что и $\partial\Omega$.

J.9. *Если $u \in H^1(\Omega)$, то $\|J_{(k)}u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})} \to \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}$ и $\|J^{\star}_{(k)}u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})} \to \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}$ при $k \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\Big|\|J_{(k)}u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})} - \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}\Big| \leqslant \Big|\|J_{(k)}u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})} - \|u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})}\Big| +$$

$$+\Big|\|u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})}-\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}\Big| \leqslant \big\|J_{(k)}u-u\big\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})}+ \\ +\Big|\|u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})}-\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}\Big|. \tag{4.7.78}$$

Используя теоремы вложения Соболева, можно сделать оценки

$$\|J_{(k)}u-u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})} \leqslant C\|J_{(k)}u-u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.7.79}$$

$$\Big|\|u\|_{L_2(\partial\Omega_{(\varepsilon)})}-\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}\Big| \leqslant C\|u\|_{H^1(\Omega\setminus\Omega_{(\varepsilon)})}. \tag{4.7.80}$$

Правая часть (4.7.79) стремится к нулю при $k\to\infty$ в силу утверждения **J.7**, а правая часть (4.7.80) стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$ в силу леммы 4.5.4. Таким образом, из (4.7.78) – (4.7.80) получаем первое утверждение **J.9**.

Аналогично доказывается вторая часть утверждения **J.9** $\lim\limits_{k\to\infty}\|J^{\star}_{(k)}u\|_{L_2(\Omega_{(\varepsilon)})}=\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}$ при $\varepsilon\to 0$.

$\otimes$

При доказательстве разрешимости граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными важную роль играют оценки коммутаторов дифференциальных операторов с операторами осреднения (4.7.60) и (4.7.61).

Рассмотрим коммутатор операторов $J_{(k)}$ с операторами дифференцирования $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}$

$$K^{(1)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})u=\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\Big(a(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}J_{(k)}u\Big)-J_{(k)}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\Big(a\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}u\Big),$$

где функция $a(\boldsymbol{x})\in C^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\overline{\Omega})$. Коммутатор $K^{(1)}$ в более подробной записи представим следующим образом:

$$K^{(1)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})u=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}a_{(\boldsymbol{\beta})}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}|}\delta_{(mk)}^{-n}\int\limits_{\Omega}\mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}}\times \\ \times\left\{\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big[\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}}a(\boldsymbol{x})-\mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\beta}}a(\boldsymbol{y})\Big]\right\}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+ \\ +\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}\sum_{\substack{\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}\\|\boldsymbol{\gamma}|\neq 0}}a_{(\boldsymbol{\beta})}a_{(\boldsymbol{\gamma})}\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}}a(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\gamma}}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|}\delta_{(mk)}^{-n}\times \tag{4.7.81}$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \left\{ \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \right\} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

где $a_{(\boldsymbol{\beta})}$ и $a_{(\boldsymbol{\gamma})}$ — коэффициенты формулы Лейбница производной произведения двух функций, $\boldsymbol{\alpha} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\beta} = (\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n + \tilde{\alpha}_n - \beta_n)$, $\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha} = (\beta_1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \beta_n \leqslant \alpha_n)$ — неравенство мультииндексов $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{|\boldsymbol{\beta}|} = \partial^{|\boldsymbol{\beta}|}/\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{|\boldsymbol{\beta}|} = \partial^{|\boldsymbol{\beta}|}/\partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_n^{\beta_n}$.

Аналогично,

$$K^{(2)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})u = \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\Big(a\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} J^{\star}_{(k)} u\Big) - J^{\star}_{(k)} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\Big(a\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} u\Big) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} a_{(\boldsymbol{\beta})}(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}|} \delta_{(mk)}^{-n} \int\limits_{\Omega} \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}} \left\{ \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \times \right.$$

$$\left. \times \Big[\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}} a(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\beta}} a(\boldsymbol{y})\Big] \Big[\Psi_{(m)}(\boldsymbol{y}) - \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\Big] \right\} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \tag{4.7.82}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta} \\ |\boldsymbol{\gamma}|\neq 0}} a_{(\boldsymbol{\beta})} a_{(\boldsymbol{\gamma})} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|} \mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}} a(\boldsymbol{x}) \delta_{(mk)}^{-n} \int\limits_{\Omega} \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}} \times$$

$$\times \left\{ \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \Big[\mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\gamma}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\gamma}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\Big] \right\} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + K^{(1)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})u.$$

Заметим, что правые части (4.7.81) и (4.7.82) можно рассматривать для любых $u \in L_2(\Omega)$. В дальнейшем под значениями операторов $K^{(1)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})$ и $K^{(2)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})$ будем подразумевать выражения (4.7.81) и (4.7.82) соответственно.

J.10. *Для любых $u \in H^{|\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Omega)$, $a \in C^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать числа $\delta_{(mk)} = \delta_{(mk)}(u)$, для которых*

$$\Big\| K^{(i)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})u \Big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k} \|u\|_{H^{|\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}|-1}}, \quad i = 1, 2. \tag{4.7.83}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (4.7.83), если $i = 1$, воспользуемся представлением (4.7.81) для коммутатора $K^{(1)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})$. Рассмотрим по отдельности его слагаемые.

При $\boldsymbol{\beta} = (0,0,\ldots,0)$ слагаемое

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}|} \delta_{(mk)}^{-n} \int\limits_{\Omega} \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} \left\{ \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \big[a(\boldsymbol{z}) - a(\boldsymbol{y})\big] \right\} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n} \int\limits_{\Omega} \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}^{(i)}} \left\{ \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big[a(\boldsymbol{y})-a(\boldsymbol{x})\Big] \right\} \times \tag{4.7.84}$$
$$\times \Big[\mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}^{(i)}} u(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}^{(i)}} u(\boldsymbol{x})\Big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

где $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = (0,\ldots,0,\frac{\partial}{\partial x_i},0\ldots,0)$, $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \leqslant \boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$. В преобразованиях (4.7.84) было использовано, что

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}^{(i)}} \left\{ \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\big[a(\boldsymbol{y})-a(\boldsymbol{x})\big] \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(\boldsymbol{x}) = 1, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Для получения оценки (4.7.83) к правой части (4.7.84) следует применить неравенство Коши—Буняковского, лемму 4.5.5 и тот факт, что

$$\left|\delta_{(mk)}^{-n} \int\limits_{\Omega} \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}^{(i)}} \left\{ \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\big[a(\boldsymbol{y})-a(\boldsymbol{x})\big] \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{y}\right| \leqslant C,$$

в силу непрерывности функции a, где C — некоторая постоянная. Остальные слагаемые (4.7.81) путем интегрирования по частям можно записать в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha} \\ |\boldsymbol{\beta}|\neq 0}} a_{(\boldsymbol{\beta})}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n} \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big[\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}} a(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\beta}} a(\boldsymbol{y})\Big]\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta} \\ |\boldsymbol{\gamma}|\neq 0}} a_{(\boldsymbol{\beta})}a_{(\boldsymbol{\gamma})}\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}} a(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\gamma}}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n} \times \tag{4.7.85}$$
$$\times \int\limits_{\Omega} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big[\mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x})\Big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Здесь использовано равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{D}^{\boldsymbol{\gamma}}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

для $\boldsymbol{\gamma} \neq 0$. Из соотношения (4.7.85) в силу леммы 4.5.5, непрерывности функций $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\beta}} a$ и того, что $|\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}|-1$, следует доказываемая оценка (4.7.83) для $i = 1$.

Неравенство (4.7.83) в случае $i = 2$ доказывается аналогично. Для этого коммутатор $K^{(2)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})$ представляется в виде

$$K^{(2)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})u = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{(mk)}^{-n} \int_{\Omega} \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}^{(i)}} \Big\{ \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \times$$

$$\times \big[a(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{y})\big]\big[\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) - \Psi_{(m)}(\boldsymbol{y})\big]\Big\} \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}^{(i)}} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha} \\ |\boldsymbol{\beta}|\neq 0}} \sum_{\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}} a_{(\boldsymbol{\beta})} a_{(\boldsymbol{\gamma})} \mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}} a(\boldsymbol{x}) \delta_{(mk)}^{-n} \times$$

$$\times \int_{\Omega} \omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta_{(mk)}}\Big) \Big[\mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\gamma}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\gamma}} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\Big] \mathbf{D}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} +$$

$$+ K^{(1)}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{D}^{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}})u.$$

$\otimes$

4.7.7. Доказательство леммы 4.7.3

В равенстве (4.7.50) в качестве функций u возьмем функции $J_{(k)}u$, где $J_{(k)}$ — операторы осреднения (4.7.60). Такой выбор возможен потому, что $J_{(k)}u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$, если $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$, в силу свойств **J.1** и **J.2** операторов осреднения $J_{(k)}$.

Равенство (4.7.50) с функцией $J_{(k)}u$ можно представить в виде

$$\Big(\mathscr{L} J_{(k)} u, v\Big)_{L_2\left(K(\boldsymbol{y})\right)} = \Big(J_{(k)} \mathscr{L} u, v\Big)_{L_2\left(K(\boldsymbol{y})\right)} + \tag{4.7.86}$$

$$+ \Big(\mathscr{L} J_{(k)} u - J_{(k)} \mathscr{L} u, v\Big)_{L_2\left(K(\boldsymbol{y})\right)} = \Big(\mathscr{L} u, J_{(k)}^{\star} v\Big)_{L_2\left(K(\boldsymbol{y})\right)} + \Big(K u, v\Big)_{L_2\left(K(\boldsymbol{y})\right)}.$$

Распишем более подробно коммутатор $K = \mathscr{L} J_{(k)} - J_{(k)} \mathscr{L}$, т. е.

$$K u = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - A^{(0)} + A^{(1)}\Big) \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) J_{\delta_{(mk)}} u -$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})J_{\delta_{(mk)}}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}-A^{(0)}u+A^{(1)}u\Big)=R_0u+\sum_{i=0}^{n}K_i\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

где

$$R_0u=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\frac{\partial^2\Psi_{(m)}}{\partial x_0^2}J_{\delta_{(mk)}}u-\sum_{i,j=1}^{n}\Big\{\frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi_{(m)}}{\partial x_j}J_{\delta_{(mk)}}u+$$

$$+a^{(ij)}\frac{\partial^2\Psi_{(m)}}{\partial x_i\partial x_j}J_{\delta_{(mk)}}u-\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n-1}\int\limits_{K(\boldsymbol{y})}\frac{\partial}{\partial z_i}\Big[\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial a^{(ij)}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}-\frac{\partial a^{(ij)}(\boldsymbol{z})}{\partial z_j}\Big)\Big]u(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\Big\}+\sum_{i=1}^{n}\Big[a^{(i)}\frac{\partial\Psi_{(m)}}{\partial x_i}J_{\delta_{(mk)}}u-$$

$$-\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n-1}\int\limits_{K(\boldsymbol{y})}\frac{\partial}{\partial z_i}\Big[\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big(a^{(i)}(\boldsymbol{x})-a^{(i)}(\boldsymbol{z})\Big)\Big]u(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\Big]+$$

$$+\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n-1}\int\limits_{K(\boldsymbol{y})}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big(a^{(00)}(\boldsymbol{x})-a^{(00)}(\boldsymbol{z})\Big)u(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z},$$

$$K_0\frac{\partial u}{\partial x_0}=\sum_{m=0}^{\infty}2\frac{\partial\Psi_{(m)}}{\partial x_0}J_{\delta_{(mk)}}\frac{\partial u}{\partial x_0},$$

$$K_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\Big\{\Psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n-1}\int\limits_{K(\boldsymbol{y})}\frac{\partial}{\partial z_j}\Big[\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})-$$

$$-a^{(ij)}(\boldsymbol{z})\Big)\Big]\frac{\partial u(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}-2a^{(ij)}\frac{\partial\Psi_{(m)}}{\partial x_j}J_{\delta_{(mk)}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\},\quad i=1,\ldots,n.$$

Здесь использовалось интегрирование по частям интегралов по области $K(\boldsymbol{y})$. Но поскольку носитель функции $\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big)$ содержится в $K(\boldsymbol{y})$, то граничные слагаемые отсутствуют.

Вернемся к равенству (4.7.86). Путем интегрирования по частям левой части его, получим новое равенство

$$\begin{gathered}\Big(u,\mathscr{L}'J_{(k)}^{\star}v\Big)_{L_2\big(K(\boldsymbol{y})\big)}+\Big(u,R_0^{\star}v\Big)_{L_2\big(K(\boldsymbol{y})\big)}-\\ -\sum_{i=0}^{n}\Big(u,\frac{\partial}{\partial x_i}K_i^{\star}v\Big)_{L_2\big(K(\boldsymbol{y})\big)}+\mathscr{M}\big(u,v;\partial K(\boldsymbol{y})\big)=0,\end{gathered}\qquad(4.7.87)$$

где $\mathscr{L}'$ — формально сопряженный оператор по отношению к оператору $\mathscr{L}$ и

$$\mathscr{L}'\cdot=\frac{\partial^2\cdot}{\partial x_0^2}-A^{(0)}\cdot-\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a^{(i)}(\boldsymbol{x})\cdot\big)+a^{(00)}(\boldsymbol{x})\cdot\,.$$

$R_0^\star$ и $K_i^\star(i=0,\dots,n)$ — сопряженные операторы по отношению к операторам R_0 и K_i соответственно, $\mathscr{M}\big(u,v;\partial K(\boldsymbol{y})\big)$ — совокупность граничных слагаемых, которые появились в результате интегрирования по частям. Рассмотрим слагаемое $\mathscr{M}\big(u,v;\partial K(\boldsymbol{y})\big)$, которое представим в виде

$$\mathscr{M}\big(u,v;\partial K(\boldsymbol{y})\big)=\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J^\star_{(k)}v;\partial K(\boldsymbol{y})\big)+\sum_{i=0}^{n}\int\limits_{\partial K(\boldsymbol{y})}uK_i^\star v\,\nu_i\,\mathrm{d}s,$$

где

$$\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J^\star_{(k)}v;\partial K(\boldsymbol{y})\big)=\int\limits_{\partial K(\boldsymbol{y})}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}J^\star_{(k)}v-u\frac{\partial}{\partial x_0}J^\star_{(k)}v\Big)\nu_0-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}J^\star_{(k)}v-u\frac{\partial}{\partial x_j}J^\star_{(k)}v\Big)\nu_i+\sum_{i=0}^{n}a^{(i)}uJ^\star_{(k)}v\nu_i\Big]\,\mathrm{d}s.$$

Рассмотрим $\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J^\star_{(k)}v;\partial K(\boldsymbol{y})\big)$ на частях $\Omega^{(0)}$ и Γ границы $\partial K(\boldsymbol{y})$. Из однородных граничных условий (4.7.3) $l_0u,\,l_1u=0\big(u\in\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})\big)$ имеем

$$\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J^\star_{(k)}v;\Omega^{(0)}\big)=0,$$

Для точек $\boldsymbol{x}\in\Gamma$ пусть $\{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\dots,\boldsymbol{\tau}^{(n)}\}$ — полная ортогональная локальная система координат с началом в точке $\boldsymbol{x}$. Тогда

$$\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J^\star_{(k)}v;\Gamma\big)=\int\limits_{\Gamma}\Bigg[\Big(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\nu_0^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}^{(l)}}\tau_0^{(l)}\nu_0\Big)J^\star_{(k)}v-$$

$$-u\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}J^\star_{(k)}v\nu_0^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}^{(l)}}J^\star_{(k)}v\nu_0\tau_0^{(l)}\Big)- \tag{4.7.88}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\Bigg\{\Big(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\nu_i\nu_j+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}^{(l)}}\nu_i\tau_j^{(l)}\Big)J^\star_{(k)}v-u\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}J^\star_{(k)}v\nu_i\nu_j+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}^{(l)}}J^\star_{(k)}v\nu_i\tau_j^{(l)}\Big)\Bigg\}+\sum_{i=0}^{n}a^{(i)}uJ^\star_{(k)}v\nu_i\Bigg]\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\int\limits_{\Gamma}\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\tau}^{(l)})\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}^{(l)}}J^\star_{(k)}v-u\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}^{(l)}}J^\star_{(k)}v\Big]\mathrm{d}s+\sum_{i=0}^{n}\int\limits_{\Gamma}a^{(i)}uJ^\star_{(k)}v\nu_i\,\mathrm{d}s,$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали, $\boldsymbol{\tau}^{(l)}(l = 1,\ldots,n)$ — единичные векторы, находящиеся в касательной гиперплоскости,

$$\mathscr{L}^{(0)}(\nu,\boldsymbol{\tau}^{(l)}) = 2\nu_0\tau_0^{(l)} - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\big(\nu_i\tau_j^{(l)} + \nu_j\tau_i^{(l)}\big).$$

Для записи $\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J^{\star}_{(k)}v;\Gamma\big)$ в виде (4.7.88), было использовано равенство

$$\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{\nu}) = \nu_0^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\nu_i\nu_j = 0$$

для всех $x \in \Gamma$.

Вернемся к равенству (4.7.87), которое выполняется для любой функции $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$. Варьируя в равенстве (4.7.87) выбором функции u в пределах множества $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$, можно показать, что оно выполняется тогда и только тогда, если выполняются равенства

$$\Big(u,\mathscr{L}' J^{\star}_{(k)}v + R^{\star}_0 v - \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}K^{\star}_i v\Big)_{L_2\left(K(y)\right)} = 0, \tag{4.7.89}$$

$$\mathscr{M}\big(u,v;\partial K(y)\big) = 0, \tag{4.7.90}$$

так как разные области интегрирования в (4.7.89) и (4.7.90).

Равенство (4.7.90) (см. также и (4.7.88)) порождает граничные условия

$$J^{\star}_{(k)}v\Big|_{\Gamma} = 0, K^{\star}_i v\Big|_{\Gamma} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{4.7.91}$$

Обозначим через $\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})$ подобласть $K(\boldsymbol{y}) \setminus K^{(\tau)}(\boldsymbol{y}) \cup \Omega^{(\tau)}$ области $K(\boldsymbol{y})$, т. е. $\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y}) = \big\{x \in K(\boldsymbol{y}) | \tau < x_0 < y_0\big\}$. Боковую часть границы конуса $\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})$ обозначим через $\tilde{\Gamma}^{(\tau)}$ и $\tilde{\Gamma}^{(\tau)} = \big\{x \in \Gamma | \tau < x_0 < y_0\big\}$.

Поскольку множество $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$ плотно в $L_2\big(K(\boldsymbol{y})\big)$, то равенство (4.7.89) с помощью предельного перехода можно распространить на все функции $u \in L_2\big(K(\boldsymbol{y})\big)$. В равенстве (4.7.90) полагаем

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} Jv(\boldsymbol{x}), & x \in \tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y}), \\ 0, & x \in K^{(\tau)}(\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.7.92}$$

где

$$Jv(\boldsymbol{x}) = \int_{\tau}^{x_0} J^{\star}_{(k)}v(t,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}t, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1,\ldots,x_n).$$

После подстановки функции u, выбранной по формуле (4.7.92), в равенство (4.7.89) получим

$$\Big(Jv,\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}J^\star_{(k)}v\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}-\sum_{i,j=1}^n\Big(Jv,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}\frac{\partial}{\partial x_j}J^\star_{(k)}v\Big)\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}-$$

$$-\sum_{i=0}^n\Big(Jv,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(i)}J^\star_{(k)}v\Big)\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+\Big(Jv,a^{(00)}J^\star_{(k)}v\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+ \qquad (4.7.93)$$

$$+\Big(Jv,R_0^\star v-\sum_{i=0}^n\frac{\partial}{\partial x_i}K_i^\star v\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}=0.$$

В силу определения функции $Jv(\boldsymbol{x})$ производная

$$\frac{\partial Jv(\boldsymbol{x})}{\partial x_0}=J^\star_{(k)}v$$

и $Jv(\tau,\boldsymbol{x}')=0$. С учетом этого и условий (4.7.91) левую часть равенства (4.7.93) проинтегрируем по частям. В результате получим равенство

$$-\Big(\frac{\partial}{\partial x_0}Jv,\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}Jv\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+\sum_{i,j=1}^n\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}Jv,a^{(ij)}\frac{\partial}{\partial x_j}J^\star_{(k)}v\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+$$

$$+\sum_{i=0}^n\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}Jv,a^{(i)}J^\star_{(k)}v+K_i^\star v\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+\Big(Jv,a^{(00)}J^\star_{(k)}v\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+ \qquad (4.7.94)$$

$$+\Big(Jv,R_0^\star v\Big)_{L_2\left(\tilde K^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+\mathscr{M}^{(1)}(Jv,J^\star_{(k)}\Big(v;\tilde\Gamma^{(\tau)}\Big)=0,$$

где

$$\mathscr{M}^{(1)}(Jv,J^\star_{(k)}v;\tilde\Gamma^{(\tau)})=\int\limits_{\tilde\Gamma^{(\tau)}}Jv\Big[\frac{\partial}{\partial x_0}J^\star_{(k)}v\nu_0-\sum_{i,j=1}^n a^{(ij)}\frac{\partial}{\partial x_j}J^\star_{(k)}v\nu_i\Big]\,\mathrm{d}s.$$

В силу первого условия из (4.7.91) на границе $\tilde\Gamma^{(\tau)}$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}J^\star_{(k)}v\nu_0-\sum_{i,j=1}^n a^{(ij)}\frac{\partial}{\partial x_j}J^\star_{(k)}v\nu_i=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}J^\star_{(k)}v\Big[\nu_0^2-\sum_{i,j=1}^n a^{(ij)}\nu_i\nu_j\Big]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}J^\star_{(k)}v\mathscr{L}^{(0)}(\boldsymbol{\nu})=0.$$

Следовательно, и $\mathscr{M}^{(1)}(Jv, J^{\star}_{(k)}v; \tilde{\Gamma}^{(\tau)}) = 0$. Теперь равенство (4.7.94) можно записать в виде

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} \frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{\partial}{\partial x_0}Jv\Big)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} \frac{\partial}{\partial x_0}\Big(a^{(ij)}\frac{\partial}{\partial x_i}Jv\frac{\partial}{\partial x_j}Jv\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$= \mathscr{F}^{(1)}(v),$$

или

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^{(\tau)}} \Big(J^{\star}_{(k)}v\Big)^2(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\tilde{\Gamma}^{(\tau)}} a^{(ij)}\frac{\partial}{\partial x_i}Jv\frac{\partial}{\partial x_j}Jv\nu_0\,\mathrm{d}s = \mathscr{F}^{(1)}(v), \tag{4.7.95}$$

где

$$\mathscr{F}^{(1)}(v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} \frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_i}Jv\frac{\partial}{\partial x_j}Jv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} -$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}Jv, a^{(i)}J^{\star}_{(k)}v + K^{\star}_{i}v\Big)_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} - \Big(Jv, a^{(00)}J^{\star}_{(k)}v\Big)_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}$$

$$-(Jv, R^{\star}_0 v)_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}.$$

Здесь было использовано первое условие из (4.7.91) и $Jv(\tau,\boldsymbol{x}') = 0$.

Чтобы применить неравенство Гронуолла, наряду с функцией Jv введем еще функцию

$$\tilde{J}v(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{x_0}^{\tilde{x}_0} J^{\star}_{(k)}v(t,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}t,$$

$(\tilde{x}_0, \boldsymbol{x}') \in \tilde{\Gamma}^{(\tau)}$. В силу своих определений функции Jv и $\tilde{J}v$ связаны соотношением

$$Jv(\boldsymbol{x}) + \tilde{J}v(\boldsymbol{x}) = \tilde{J}v(\tau,\boldsymbol{x}'),\ Jv(\tilde{x}_0,\boldsymbol{x}') = \tilde{J}v(\tau,\boldsymbol{x}').$$

Теперь равенство (4.7.95) запишется в виде

$$\int\limits_{\Omega^{(\tau)}} \left[\Big(J^{\star}_{(k)}v\Big)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{J}v\right](\tau,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \mathscr{F}^{(2)}(v), \tag{4.7.96}$$

$$\mathscr{F}^{(2)}(v) = \int\limits_{\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})} \left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\tilde{J}v(\tau,\boldsymbol{x}') - \tilde{J}v(\boldsymbol{x})\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\tilde{J}v(\tau,\boldsymbol{x}') - \tilde{J}v(\boldsymbol{x})\Big) -\right.$$

$$-2\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v(\tau,\boldsymbol{x}') - \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v(\boldsymbol{x})\Big)\big(a^{(i)}J^{\star}_{(k)}v + K^{\star}_i v\big) -$$
$$\left. -\big(\tilde{J}v(\tau,\boldsymbol{x}') - \tilde{J}v(\boldsymbol{x})\big)\big(a^{(00)}J^{\star}_{(k)}v + R^{\star}_0 v\big)\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Исходя из равенства (4.7.96), делаем соответствующие оценки как и при выводе энергетического неравенства. В силу условия (4.7.2)

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega^{(\tau)}}\left[\Big(J^{\star}_{(k)}v\Big)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{J}v\right](\tau,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \geqslant \\ \geqslant c^{(1)}\Big(\big\|J^{\star}_{(k)}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau).\end{gathered} \tag{4.7.97}$$

Заметим, что операторы $R^{\star}_0$ и $K^{\star}_i (i = 0,\ldots,n)$ являются операторами осреднения типа $J^{\star}_{(k)}$ и для них справедливы оценки вида (4.7.64) или (4.7.65), т. е.

$$\big\|R^{\star}_0 v\big\|_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}, \big\|K^{\star}_i v\big\|_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} \leqslant c^{(2)}\|v\|_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}.$$

Оцениваем $\mathscr{F}^{(2)}(v)$ сверху. Для этого учитываем, что коэффициенты $\partial a^{(ij)}/\partial x_0$, $a^{(i)}$, $a^{(00)}$ равномерно ограничены на $\overline{Q}$. В силу неравенства $|2ab| \leqslant a^2 + b^2$ получим

$$\begin{gathered}|\mathscr{F}^{(2)}(v)| \leqslant c^{(3)}\bigg\{\big\|\tilde{J}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \\ +(y_0 - \tau)\Big(\big\|\tilde{J}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau) + \|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \\ +\big\|J^{\star}_{(k)}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}\bigg\}.\end{gathered}$$

Учитывая (4.7.97), из равенства (4.7.96) получим неравенство

$$\begin{gathered}\Big(\big\|J^{\star}_{(k)}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau) \leqslant \\ \leqslant c^{(4)}\big\|\tilde{J}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \\ +(y_0-\tau)c^{(5)}\Big(\big\|\tilde{J}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau) + \\ +c^{(4)}\Big(\|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \big\|J^{\star}_{(k)}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}\Big).\end{gathered} \tag{4.7.98}$$

Чтобы в левой части неравенства (4.7.98) ввести слагаемое $\left\|\tilde{J}v\right\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}$, сложим его с неравенством

$$\left\|\tilde{J}v\right\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} \leqslant \left\|J^{\star}_{(k)}v\right\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \left\|\tilde{J}v\right\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}.$$

Последнее неравенство получается в результате интегрирования по области $\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})$ соотношения

$$-\frac{\partial}{\partial x_0}\big(\tilde{J}v\big)^2 \leqslant \Big(\frac{\partial}{\partial x_0}\tilde{J}v\Big)^2 + \big(\tilde{J}v\big)^2,\ \frac{\partial}{\partial x_0}\tilde{J}v = -J^{\star}_{(k)}v.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\Big(\left\|J^{\star}_{(k)}v\right\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \left\|\tilde{J}v\right\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau) \leqslant \\ \leqslant c^{(6)}\int\limits_{\tau}^{y_0}\Big[\left\|\tilde{J}v\right\|^2_{L_2(\Omega^{(t)})} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(t)})}\Big](t)\,\mathrm{d}t + \\ +(y_0-\tau)c^{(7)}\Big(\left\|\tilde{J}v\right\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau) + \\ +c^{(7)}\Big(\|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)} + \left\|J^{\star}_{(k)}v\right\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}\Big).\end{gathered} \tag{4.7.99}$$

Чтобы в неравенстве (4.7.99) освободится от первого слагаемого правой части для этого случая нужно применить модифицированное неравенство Гронуолла, которое сформулируем в виде следующей леммы

Лемма 4.7.5. *Если неотрицательные функции* $\omega^{(i)} : (0,T) \ni t \to \omega^{(i)}(t) \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, *являются интегрируемыми на отрезке* $[0,T]$, *и, кроме того, функция* $\omega^{(3)}$ *не возрастает, то из неравенства*

$$\int\limits_{\tau}^{T}\omega^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t + \omega^{(2)}(\tau) \leqslant c\int\limits_{\tau}^{T}\omega^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t + \omega^{(3)}(\tau)$$

следует неравенство

$$\int\limits_{\tau}^{T}\omega^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t + \omega^{(2)}(\tau) \leqslant e^{c(T-\tau)}\omega^{(3)}(\tau),$$

а из неравенства

$$\omega^{(1)}(\tau)+\omega^{(2)}(\tau)\leqslant c\int\limits_{\tau}^{T}\omega^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t+\omega^{(3)}(\tau)$$

следует неравенство

$$\omega^{(1)}(\tau)+\omega^{(2)}(\tau)\leqslant e^{c(T-\tau)}\omega^{(3)}(\tau)$$

Доказательство. Доказательство леммы 4.7.5 проводится по схеме доказательства леммы 4.7.1.

В силу леммы 4.7.5 из неравенства (4.7.99) следует неравенство

$$\begin{gathered}\Big(\big\|J^{\star}_{(k)}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}+\big\|\tilde{J}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}+\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau)\leqslant\\ \leqslant(y_0-\tau)c^{(7)}e^{c^{(6)}(y_0-\tau)}\Big(\big\|\tilde{J}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}+\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big)(\tau)+\\ +c^{(7)}e^{c^{(6)}(y_0-\tau)}\Big(\|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+\big\|J^{\star}_{(k)}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}\Big).\end{gathered}\tag{4.7.100}$$

Пусть $\xi\in\mathbb{R}$ некоторое неотрицательное число, где $\xi<y_0$. В неравенстве (4.7.100) $0\leqslant\xi\leqslant\tau\leqslant y_0$. Тогда из неравенства (4.7.100) имеем

$$\begin{gathered}\omega^{(1)}(\tau)+\omega^{(2)}(\tau)\leqslant(y_0-\xi)c^{(5)}e^{c^{(7)}(y_0-\xi)}\omega^{(2)}(\tau)+\\ +c^{(7)}e^{c^{(7)}(y_0-\xi)}\Big(\|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+\big\|J^{\star}_{(k)}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}\Big),\end{gathered}\tag{4.7.101}$$

где

$$\omega^{(1)}(\tau)=\big\|J^{\star}_{(k)}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})},\ \omega^{(2)}(\tau)=\big\|\tilde{J}v\big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}+\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{J}v\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}(\tau).$$

Берем ξ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$(y_0-\xi)c^{(7)}e^{c^{(6)}y_0}\leqslant 1.$$

В этом случае из неравенства (4.7.101) следует неравенство

$$\omega^{(1)}(\tau)\leqslant c^{(8)}\Big(\|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}+\big\|\tilde{J}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\tau)}(\boldsymbol{y})\right)}\Big),\tag{4.7.102}$$

где $c^{(8)} = c^{(7)}e^{c^{(6)}y_0}$. Поскольку правая часть (4.7.102) не зависит от τ, в левой части его можно перейти к верхней грани, т. е.

$$\sup_{\xi\leqslant\tau}\omega^{(1)}(\tau) \leqslant c^{(8)}\Big(\|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})\right)} + \big\|J^\star_{(k)}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})\right)}\Big).$$

Далее,

$$\big\|J^\star_{(k)}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})\right)} \leqslant (y_0-\xi)\sup_{\xi\leqslant\tau\leqslant y_0}\omega^{(1)}(\tau).$$

Из последнего неравенства и (4.7.102) имеем

$$\big\|J^\star_{(k)}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})\right)} \leqslant (y_0-\xi)c^{(8)}\Big(\|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})\right)} + \big\|J^\star_{(k)}v\big\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})\right)}\Big). \tag{4.7.103}$$

В (4.7.103) переходим к пределу при $k\to\infty$. Кроме этого, при выборе ξ требуем, чтобы $2(y_0-\xi)c^{(8)}\leqslant 1$. В этом случае из (4.7.103) получаем, что

$$\|v\|^2_{L_2\left(\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})\right)} \leqslant 0,$$

т. е. $v=0$ почти всюду в конусе $\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})$.

Возвращаемся опять к равенству (4.7.87), где уже интегралы будут вместо области $K(\boldsymbol{y})$ по усеченному конусу $K^{(\xi)}(\boldsymbol{y})$. Далее повторяем предыдущие рассуждения, исходя из равенства (4.7.87) с областью интегрирования $K^{(\xi)}(\boldsymbol{y})$.

Отметим, что в этом случае границей $\partial K^{(\xi)}(\boldsymbol{y})$ являются гиперповерхности $\Omega^{(0)}, \Omega^{(\xi)}$ и $\Gamma^{(\xi)}$. Поэтому вместо условий (4.7.91) будут условия

$$J^\star_{(k)}v\big|_{\Omega^{(\xi)}} = \frac{\partial}{\partial x_0}J^\star_{(k)}v\big|_{\Omega^{(\xi)}} = J^\star_{(k)}v\big|_{\Gamma^{(\xi)}} = 0,$$

$$K^\star_i v\big|_{\Gamma^{(\xi)}} = 0, \quad i=0,1,\ldots,n.$$

Далее рассуждения повторяются фактически без изменения. В результате для некоторого $\tilde{\xi}$, $0\leqslant\tilde{\xi}<\xi<y_0$, где

$$(\xi-\tilde{\xi})c^{(7)}e^{c^{(6)}y_0}\leqslant 1,$$

$$2(\xi-\tilde{\xi})c^{(8)}\leqslant 1,$$

получим, что $v=0$ почти всюду в $\tilde{K}^{(\xi)}(\xi,\tilde{\xi},\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x}\in K(\boldsymbol{y})|\tilde{\xi}<x_0<$ $<\xi\}$.

Объединяя предыдущий результат и этот, получим $v = 0$ почти всюду в $\tilde{K}^{(\xi)}(\boldsymbol{y})$. Таким образом, за конечное число шагов мы покажем, что $v = 0$ почти всюду в $K(\boldsymbol{y})$, т. е. $v = 0$ в $L_2\big(K(\boldsymbol{y})\big)$.

Лемма 4.7.3 доказана. $\otimes$

4.8. Метод Римана

В п. 2.4.1 для гиперболических уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ определен их второй канонический вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + b(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}). \tag{4.8.1}$$

Для уравнения (4.8.1) характеристиками являются семейства прямых $x_1 = \mathrm{const}$ и $x_2 = \mathrm{const}$. В зависимости от характеристик и границы области, в которой задается уравнение, формулируются задачи Коши, Гурса, смешанные и другие задачи. Для этих задач методом Римана можно находить решения. Суть метода Римана заключается в том, что решение исходной задачи представляется через функцию Римана. Функция Римана есть решение соответствующей граничной задачи. Если эта задача проще чем исходная, то в этом случае целесообразно использовать метод Римана.

4.8.1. Задачи для гиперболического уравнения второго порядка в случае двух независимых переменных, записанного во втором каноническом виде

Пусть уравнение (4.8.1) относительно независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ задано в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Задача Гурса. Предположим, что граница $\partial\Omega$ состоит из характеристик $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ разных семейств: $\Gamma^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega |\, x_1 = x_1^{(0)}, x_2 > x_2^{(0)}\}$, $\Gamma^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega |\, x_1 > x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}\}$, см. рис. 4.7. Уравнение (4.8.1) задается в области Ω. К уравнению (4.8.1) присоединяются граничные условия Гурса

$$\begin{aligned} u\big|_{x_1=x_1^{(0)}} &= \varphi(x_2), \quad x_2 > x_2^{(0)}, \\ u\big|_{x_2=x_2^{(0)}} &= \psi(x_1), \quad x_1 > x_1^{(0)}, \end{aligned} \tag{4.8.2}$$

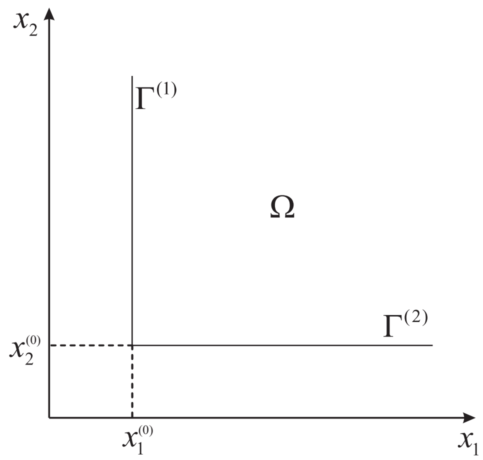

Рис. 4.7

и условия согласования

$$\varphi(x_2^{(0)}) = \psi(x_1^{(0)}).$$

Задача Пикара. Задача Пикара характеризуется тем, что граница $\partial\Omega$ области Ω, в которой задается уравнение (4.8.1), состоит из характеристики $\Gamma^{(1)}$ и не характеристической кривой $\Gamma^{(2)}$, см рис. 4.8.

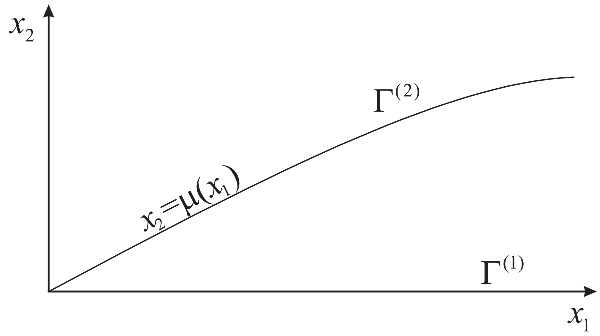

Рис. 4.8

Для примера рассмотрим область

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \big|\ x_1 > 0,\ 0 < x_2 < \mu(x_1),\ \mu \in C^1(0,\infty),\ \mu'(x_1) > 0,\ \mu(0) = 0\}.$$

К уравнению (4.8.1), заданного в этой области Ω, присоединяются граничные условия

$$\begin{aligned} u\big|_{x_2=0} &= \varphi(x_1), \quad x_1 > 0, \\ u\big|_{x_2=\mu(x_1)} &= \psi(x_1), \quad x_1 > 0. \end{aligned} \tag{4.8.3}$$

К граничным условиям (4.8.3) присоединяются условия согласования

$$\varphi'(0) = \psi(0).$$

Задача Коши. В случае задачи Коши граница не имеет характеристических направлений и принадлежит классу C^1.

Пусть

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \big|\ x_2 > \mu(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R},\ \mu \in C^1(\mathbb{R}),\ \mu'(x_1) < 0\}. \tag{4.8.4}$$

Граница $\partial\Omega$ задается уравнением $x_2 = \mu(x_1)$. Предположим, что в $\mathbb{R}^2$ задано векторное поле $\mathscr{P}$ векторов $\boldsymbol{\rho}$, которое не является касательным к $\partial\Omega$ в ее точках и которое является непрерывным, т.е. функции $\rho_i \in C(\mathbb{R}^2)$, где $i = 1{,}2$ и $\boldsymbol{\rho} = \big(\rho_1(\boldsymbol{x}),\rho_2(\boldsymbol{x})\big)$. Тогда к уравнению (4.8.1), заданного в области Ω вида (4.8.4), присоединяются условия Коши

$$\begin{aligned} u\big|_{x_2=\mu(x_1)} &= \varphi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\rho}}\Big|_{x_2=\mu(x_1)} &= \psi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.8.5}$$

см. рис. 4.9.

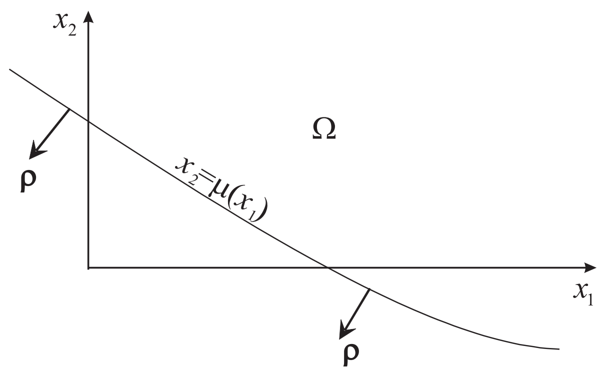

Рис. 4.9

Смешанная задача. Здесь граница $\partial\Omega$ области Ω не имеет в своих точках характеристических направлений и состоит из двух частей $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ из класса C^1. Пусть $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = \{\nu_1(\boldsymbol{x}),\nu_2(\boldsymbol{x})\}$ — единичный вектор внешней относительно Ω нормали в точках $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Если $\boldsymbol{x}$ принадлежит, например, только $\Gamma^{(1)}$, то функции ν_k $(k = 1,2)$ знака не меняют для всех $\boldsymbol{x} \in \Gamma^{(1)}$. Если $\boldsymbol{x} \in \Gamma^{(2)}$, то компоненты ν_k знака не меняют для любого $\boldsymbol{x}$, находящегося в пределах $\Gamma^{(2)}$. Но одна из функций ν_k меняет знак на противоположный, когда $\boldsymbol{x}$ из $\Gamma^{(1)}$ переходит на $\Gamma^{(2)}$ и наоборот.

Для примера рассмотрим область Ω, изображенную на рис. 4.10. Пусть

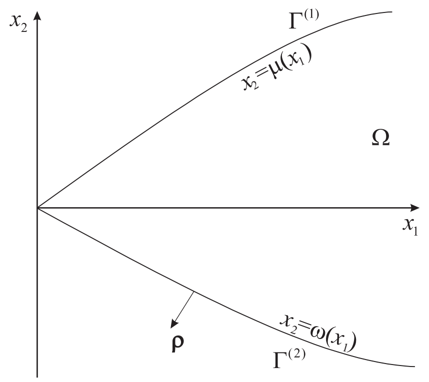

Рис. 4.10

$$\begin{aligned}\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \big|\, x_1 > 0,\ \omega(x_1) < x_2 < \mu(x_1),\ \omega,\mu \in C^1, \\ \mu'(x_1) > 0,\ \omega'(x_1) < 0, \mu(0) = \omega(0)\}.\end{aligned} \tag{4.8.6}$$

К уравнению (4.8.1), заданного в области Ω вида (4.8.1), присоединяются условия Коши

$$\begin{aligned} u\big|_{x_2=\omega(x_1)} &= \varphi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\rho}}\Big|_{x_2=\omega(x_1)} &= \psi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.8.7}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — не касательное направление к линии $\Gamma^{(1)}$, и граничное условие

$$u\big|_{x_2=\mu(x_1)} = \chi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{4.8.8}$$

К условиям (4.8.7) – (4.8.8) присоединяются условия согласования. Из них

$$\varphi(0) = \chi(0).$$

Задача (4.8.1), (4.8.7), (4.8.8) называется первой смешанной задачей. Вместо граничного условия (4.8.8) могут быть другие граничные условия: например, задание производной $\partial u/\partial \boldsymbol{\rho}$ по некоторому не касательному направлению $\boldsymbol{\rho}$, комбинация значений функции u и ее производных и т. д.

4.8.2. Метод Римана для задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши (4.8.1), (4.8.5) в области Ω, представленной на рис. 4.9.

Левую часть уравнения (4.8.1) представим через оператор $\mathscr{L}$,

$$\mathscr{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + b(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})u.$$

Наряду с $\mathscr{L}$ будем использовать и формально сопряженный оператор $\mathscr{L}'$, который определяется равенством

$$\big(\mathscr{L}u,v\big)_{L_2(\Omega)} = \big(u,\mathscr{L}'v\big)_{L_2(\Omega)}$$

для любых функций $u,v \in C_0^\infty(\Omega)$, т. е.

$$\mathscr{L}'v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\big(a(\boldsymbol{x})v\big) - \frac{\partial}{\partial x_2}\big(b(\boldsymbol{x})v\big) + c(\boldsymbol{x})v.$$

Решение u задачи (4.8.1), (4.8.5) ищем в произвольной точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$, т. е. ее считаем временно фиксированной, см. рис. 4.11.

Область криволинейного треугольника ABC обозначим через $\Omega^{(\boldsymbol{x})}$, а переменные в $\Omega^{(\boldsymbol{x})}$ — через $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)$.

Выражение

$$\begin{aligned}\big(v\mathscr{L}u - u\mathscr{L}'v\big)(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_1}\Big(v\,\frac{\partial u}{\partial y_2} - u\,\frac{\partial v}{\partial y_2} + 2auv\Big)+ \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_2}\Big(v\,\frac{\partial u}{\partial y_1} - u\,\frac{\partial v}{\partial y_1} + 2buv\Big)\end{aligned} \tag{4.8.9}$$

проинтегрируем по области $\Omega^{(\boldsymbol{x})}$. Заметим, что $\mathrm{d}s\nu_1 = \mathrm{d}s\cos(\boldsymbol{\nu},y_1) = \mathrm{d}y_2$, $\mathrm{d}s\nu_2 = \mathrm{d}s\cos(\boldsymbol{\nu},y_2) = -\mathrm{d}y_1$, где $\mathrm{d}s$ — элемент границы $\partial\Omega^{(\boldsymbol{x})}$, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали. В результате интегрирования

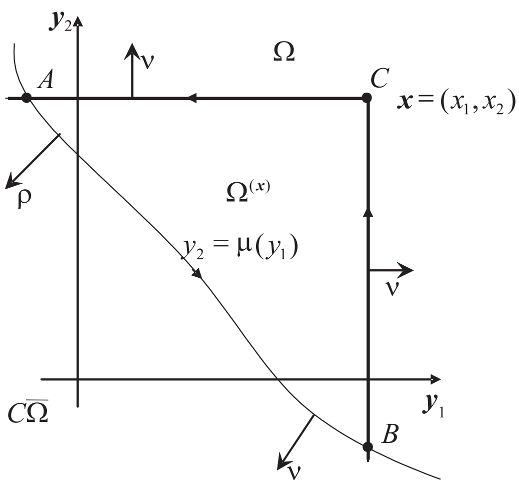

Рис. 4.11

получим выражение

$$\int\limits_{\Omega^{(\boldsymbol{x})}} \bigl(v\mathscr{L}u - u\mathscr{L}'v\bigr)\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega^{(\boldsymbol{x})}} \Bigl(u\frac{\partial v}{\partial y_1} - v\,\frac{\partial u}{\partial y_1} - 2buv\Bigr)\,\mathrm{d}y_1 + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega^{(\boldsymbol{x})}} \Bigl(v\,\frac{\partial u}{\partial y_2} - u\,\frac{\partial v}{\partial y_2} + 2auv\Bigr)\,\mathrm{d}y_2 = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_A^B \mathcal{A}(u,v) + \frac{1}{2}\int\limits_B^C \mathcal{A}(u,v) + \frac{1}{2}\int\limits_C^A \mathcal{A}(u,v), \tag{4.8.10}$$

где

$$\mathcal{A}(u,v) = \Bigl(u\frac{\partial v}{\partial y_1} - v\,\frac{\partial u}{\partial y_1} - 2buv\Bigr)\,\mathrm{d}y_1 + \Bigl(v\,\frac{\partial u}{\partial y_2} - u\,\frac{\partial v}{\partial y_2} + 2auv\Bigr)\,\mathrm{d}y_2.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_C^A \mathcal{A}(u,v) = -\frac{1}{2}uv\Big|_C^A + \int\limits_C^A u\Bigl(\frac{\partial v}{\partial y_1} - bv\Bigr)\,\mathrm{d}y_1, \tag{4.8.11}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_B^C \mathcal{A}(u,v) = \frac{1}{2}uv\Big|_B^C - \int\limits_B^C u\Bigl(\frac{\partial v}{\partial y_2} - av\Bigr)\,\mathrm{d}y_2. \tag{4.8.12}$$

Из соотношений (4.8.10) – (4.8.12) в результате подстановки (4.8.11) и (4.8.12) в (4.8.10) следует равенство

$$(uv)(C) = (uv)(\boldsymbol{x}) = \frac{(uv)(A) + (uv)(B)}{2} + \int\limits_A^C u\Big(\frac{\partial v}{\partial y_1} - bv\Big)\,\mathrm{d}y_1 + \\ + \int\limits_B^C u\Big(\frac{\partial v}{\partial y_2} - av\Big)\,\mathrm{d}y_2 - \frac{1}{2}\int\limits_A^B \mathcal{A}(u,v) + \int\limits_{\Omega^{(\boldsymbol{x})}} \big(vf - u\mathscr{L}'v\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{4.8.13}$$

Из условий Коши (4.8.5) следует, что в (4.8.13) в подынтегральном выражении $\mathcal{A}(u,v)$ на линии AB задана функция u и ее производные. В (4.8.13) функцию v выбираем таким образом, чтобы те слагаемые, в которых функция u не задана, обратились в нуль. Достаточно $v\ :\ \overline{\Omega^{(\boldsymbol{x})}} \times \overline{\Omega^{(\boldsymbol{x})}} \ni (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = v(x_1,x_2;y_1,y_2) \in \mathbb{R}$ определить как решение уравнения

$$L'_{\boldsymbol{y}}v = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_1}(av) - \frac{\partial}{\partial y_2}(bv) + cv = 0, \tag{4.8.14}$$

удовлетворяющую условиям

$$v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big|_{y_1=x_1} = e^{\int\limits_{x_2}^{y_2} a(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi}, \tag{4.8.15}$$

$$v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big|_{y_2=x_2} = e^{\int\limits_{x_1}^{y_1} b(\xi,x_2)\,\mathrm{d}\xi}. \tag{4.8.16}$$

В силу уравнения (4.8.14) и условий (4.8.15), (4.8.16) формула (4.8.13) запишется в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \int\limits_{\Omega^{(\boldsymbol{x})}} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int\limits_A^B \mathcal{A}(u,v). \tag{4.8.17}$$

Таким образом, решение u задачи (4.8.1), (4.8.5) в точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ определяется формулой (4.8.17) через заданные функции f,φ,ψ и функцию v, являющуюся решением задачи (4.8.14) – (4.8.16). Поскольку точка $\boldsymbol{x} \in \Omega$ выбрана произвольным образом в области Ω, то тем самым мы получили по формуле (4.8.17) решение задачи Коши (4.8.1), (4.8.5) через функцию v – *функцию Римана*.

Заметим, что v есть решение задачи Гурса (4.8.14) – (4.8.16) для однородного уравнения (4.8.14).

Методом Римана можно решать задачу Коши (4.8.1), (4.8.5) для области $C\overline{\Omega}$ и другие задачи, сформулированные в п. 4.8.1.

5. Задача Гурса

5.1. Постановка Задачи Гурса для гиперболического уравнения

Задача Гурса характеризуется тем, что граница областей, в которых рассматриваются уравнения, представляют собой характеристики.

Рассмотрим задачу Гурса для уравнения (4.7.1)

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - A^{(0)}u + A^{(1)}u = f(\boldsymbol{x}), \tag{5.1.1}$$

где

$$A^{(0)}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big),\ A^{(1)}u = \sum_{i=0}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + a^{(00)}(\boldsymbol{x})u,$$

$\boldsymbol{x} = (x_0,x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Предполагаем, что уравнение (5.1.1) является гиперболическим относительно вектора $\boldsymbol{\eta} = (1,0,\ldots,0)$. Для этого предполагаем, что коэффициенты $a^{(ij)}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяют условию положительности квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant c^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{5.1.2}$$

для любого вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, где постоянная $c^{(0)}$ не зависит от выбора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$.

Задача Гурса для уравнения (5.1.1) рассматривается в области Q, граница которой представляет собой характеристическую поверхность по отношению к уравнению (5.1.1). Постановка ее близка к постановке задачи Коши (4.7.1), (4.7.3) в том смысле, что в качестве области Q берется криволинейный перевернутый конус $K(\boldsymbol{y})$, боковая поверхность которого является характеристической. Вершину конуса поместим на координатную гиперплоскость $\{\boldsymbol{x}|\, x_0 = 0\}$. Изобразим область с помощью рисунка 5.1. Здесь для любой точки $\boldsymbol{x} \in \partial Q$ и вектора нормали относительно ∂Q $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$ в этой точке выполняется равенство

$$\mathscr{L}_0(\operatorname{grad}\boldsymbol{\nu}) = \nu_0^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\nu_i\nu_j = 0, \quad \nu_0 < 0. \tag{5.1.3}$$

Задача Гурса. Найти решение $u : Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ в области Q уравнения (5.1.1), удовлетворяющего граничному условию (условию

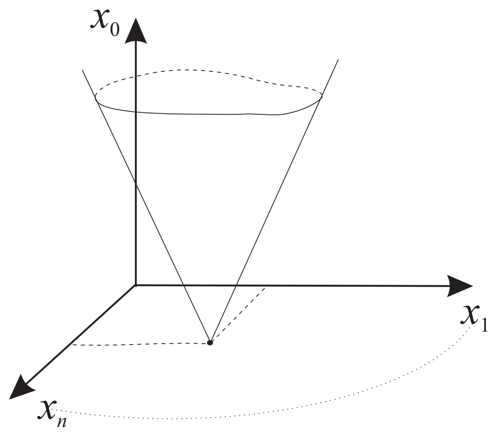

Рис. 5.1

Гурса)

$$u\Big|_{\partial Q} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial Q, \tag{5.1.4}$$

где $\varphi : \partial Q \ni \boldsymbol{x} \to \varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – заданная функция и $x_0 \in (0,\infty)$, если $\boldsymbol{x} \in Q$.

С помощью теорем о продолжении функции с ∂Q на область Q задачу (5.1.1), (5.1.4) можно свести к задаче Гурса с однородным граничным условием

$$u\Big|_{\partial Q} = 0. \tag{5.1.5}$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу (5.1.1), (5.1.5).

5.2. Энергетическое неравенство задачи Гурса

В параграфе 4.7 рассмотрено сильное решение задачи Коши для уравнения (5.1.1). Похожим образом можно ввести понятие сильного решения и задачи Гурса (5.1.1), (5.1.5) путем замыкания оператора рассматриваемой задачи.

Решение u задачи Гурса рассматривается в неограниченной области Q. Пусть $Q^{(T)}$ – подобласть области Q и $Q^{(T)} = \{\boldsymbol{x} \in Q |\, 0 < x_0 < < T < \infty\}$. Если доказать разрешимость задачи Гурса (5.1.1), (5.1.5) в $Q^{(T)}$ для любого $T \in (0,\infty)$, то тем самым можно утверждать, что доказана разрешимость задачи (5.1.1), (5.1.5) и в области Q. Ограниченная область $Q^{(T)}$ вводится для того, чтобы проще описать пространства, в которых рассматривается сильное решение задачи.

Обозначим через $\Omega^{(\tau)}$ сечение конуса $Q^{(T)}$ гиперплоскостью $\{\boldsymbol{x}|\,x_0=\tau\}$, т. е. $\Omega^{(\tau)}=\{\boldsymbol{x}\in Q^{(T)}|\,x_0=\tau\}, 0<\tau<T$. Рассмотрим норму $\|\cdot\|_{B(Q^{(T)})}$ функций, которая определяется формулой

$$\|u\|_{B(Q^{(T)})}=\sup_{0<\tau<T}\Big(\sum_{i=0}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega^{(\tau)})}+\|u\|_{L_2(\Omega^{(\tau)})}\Big). \tag{5.2.1}$$

Обозначим через $B(Q^{(T)})$ банахово пространство, получаемое замыканием множества $C^2_{\text{гр}}(\overline{Q^{(T)}})=\{u\in C^2(\overline{Q^{(T)}})|\,u|_{\partial Q^{(T)}}=0\}$ дважды непрерывно дифференцируемых в замыкании $\overline{Q^{(T)}}$ области $Q^{(T)}$ функций, удовлетворяющих условию (5.1.5).

Будем рассматривать задачу Гурса (5.1.1), (5.1.5) как операторное уравнение (5.1.1)

$$\mathscr{L}u=f \tag{5.2.2}$$

из $B(Q^{(T)})$ в $L_2(Q^{(T)})$ с областью определения $\mathscr{D}(\mathscr{L})=C^2_{\text{гр}}(\overline{Q^{(T)}})$.

Теорема 5.2.1. *Для любой функции $u\in\mathscr{D}(\mathscr{L})$ справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_{B(Q^{(T)})}\leqslant c\big\|\mathscr{L}u\big\|_{L_2(Q^{(T)})}, \tag{5.2.3}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от $u\in\mathscr{D}(\mathscr{L})$.

Доказательство. Доказательство неравенства (5.2.3) проведем по схеме доказательства теоремы 4.7.3. Для этого рассмотрим выражение $2\mathscr{L}u\,\partial u/\partial x_0$, представленное в виде (4.7.27). Проинтегрируем его по подобласти $Q^{(\tau)}=\{\boldsymbol{x}\in Q^{(T)}|\,0<x_0<\tau\}$ области $Q^{(T)}$. Граница $\partial Q^{(\tau)}$ подобласти $Q^{(\tau)}$ состоит из сечения $\Omega^{(\tau)}$ и боковой поверхности $\Gamma^{(\tau)}=\{x\in\partial Q^{(T)}|\,0<x_0<\tau\}$.

Интеграл по области $Q^{(\tau)}$ выражения $2\mathscr{L}u\,\partial u/\partial x_0$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}2\int\limits_{Q^{(\tau)}}\mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int\limits_{\Omega^{(\tau)}}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2+\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big](\tau,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'+\\+\int\limits_{\Gamma^{(\tau)}}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2\nu_0+\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_0-2\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i\Big)\Big](\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s+\\+\int\limits_{Q^{(\tau)}}\mathcal{A}^{(1)}(u,u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=I^{(\tau)},\end{gathered} \tag{5.2.4}$$

где $\boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\mathcal{A}^{(1)}(u,u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a^{(ij)}(\boldsymbol{x})}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2A^{(1)}u\frac{\partial u}{\partial x_0}.$$

Здесь $I^{(\tau)} = I_1^{(\tau)} + I_3^{(\tau)} + I_4^{(\tau)}$ в обозначениях формулы (4.7.28) параграфа 4.7.3 и

$$I_1^{(\tau)} = \Big(\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})} + \int\limits_{\Omega^{(\tau)}} \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\Big)(\tau),$$

$$I_3^{(\tau)} = \int\limits_{\Gamma^{(\tau)}} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2\nu_0 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_0 - 2\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i\Big)\Big](\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s,$$

$$I_4^{(\tau)} = \int\limits_{Q^{(\tau)}} \mathcal{A}^{(1)}(u,u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Выражение $I_2^{(\tau)}$ в отличие от (4.7.28) отсутствует. В силу условия (5.1.2)

$$I_1^{(\tau)} \geqslant c^{(1)}\sum_{i=0}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(\Omega^{(\tau)})}(\tau). \qquad (5.2.5)$$

В силу условия (5.1.5) для $x \in \Gamma^{(\tau)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{\Gamma^{(\tau)}} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\Gamma^{(\tau)}}\nu_i,\ i = 0, \ldots, n. \qquad (5.2.6)$$

Учитывая (5.2.6)

$$I_3^{(\tau)} = \int\limits_{\Gamma^{(\tau)}} \Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)^2\nu_0\,\mathscr{L}_0(\operatorname{grad}\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}s = 0. \qquad (5.2.7)$$

Здесь использовано равенство (5.1.3), которое справедливо для всех точек $\boldsymbol{x} \in \Gamma^{(\tau)}$.

Далее доказательство фактически является повторением доказательства теоремы 4.7.3 на основе неравенства (5.2.5) и равенства (5.2.7). $\otimes$

5.3. Сильное решение задачи Гурса

Если оператор $\mathscr{L}$ уравнения (5.2.2) рассматривать как оператор из $B(Q^{(T)})$ в $L_2(Q^{(T)})$, то можно доказать, что он допускает замыкание $\overline{\mathscr{L}}$.

Лемма 5.3.1. *Оператор $\mathscr{L}$ уравнения* (5.2.2) (*задачи Гурса) из пространства $B(Q^{(T)})$ в пространство $L_2(Q^{(T)})$ допускает замыкание $\overline{\mathscr{L}}$.*

Доказательство. Проверим критерий замыкаемости линейных операторов.

Пусть последовательность $\mathbb{N} \ni k \to u^{(k)}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ функций $u^{(k)}$ стремится к нулю при $k \to \infty$ по норме пространства $B(Q^{(T)})$, т. е. $\|u^{(k)}\|_{B(Q^{(T)})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Рассмотрим последовательность $\mathbb{N} \ni k \to \to \mathscr{L}u^{(k)}$, составленную из значений оператора $\mathscr{L}$ от этих функций, в пространстве $L_2(Q^{(T)})$. Для этого рассмотрим скалярное произведение $\left(\mathscr{L}u^{(k)},v\right)_{L_2(Q^{(T)})}$ для любой функции $v \in C_0^\infty(Q^{(T)})$. Интегрируя по частям, получим

$$\left(\mathscr{L}u^{(k)},v\right)_{L_2(Q^{(T)})} = \left(u^{(k)},A^{(0)}v\right)_{L_2(Q^{(T)})} + \left(A^{(1)}u^{(k)},v\right)_{L_2(Q^{(T)})}. \tag{5.3.1}$$

Из предположения $\|u^{(k)}\|_{B(Q^{(T)})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ следует $\|u^{(k)}\|_{L_2(Q^{(T)})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и $\|A^{(1)}u^{(k)}\|_{L_2(Q^{(T)})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, так как $\|u^{(k)}\|_{L_2(Q^{(T)})}$, $\|A^{(1)}u^{(k)}\|_{L_2(Q^{(T)})} \leqslant \leqslant c\|u^{(k)}\|_{B(Q^{(T)})}$, $c > 0$. Отсюда и из (5.3.1) следует, что $\left(\mathscr{L}u^{(k)},v\right)_{L_2(Q^{(T)})} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ для любого элемента $v \in C_0^\infty(Q^{(T)})$. Поскольку множество $C_0^\infty(Q^{(T)})$ плотно $L_2(Q^{(T)})$ (см. п. 4.5.5), то $\mathscr{L}u^{(k)} \to 0$ по норме пространства $L_2(Q^{(T)})$ при $k \to \infty$. $\otimes$

Замыкание оператора $\mathscr{L}$ обозначим через $\overline{\mathscr{L}} : B(Q^{(T)}) \supset \mathscr{D}(\overline{\mathscr{L}}) \ni \ni u \to \overline{\mathscr{L}}u \in L_2(Q^{(T)})$.

Решение уравнения

$$\overline{\mathscr{L}}u = f(\boldsymbol{x}) \tag{5.3.2}$$

называется *сильным решением задачи Гурса* (5.1.1), (5.1.5).

Путем предельного перехода из энергетического неравенства (5.2.3) для оператора $\mathscr{L}$ получим энергетическое неравенство

$$\|u\|_{B(Q^{(T)})} \leqslant c\|\overline{\mathscr{L}}u\|_{L_2(Q^{(T)})},\ u \in \mathscr{D}(\overline{\mathscr{L}}), \tag{5.3.3}$$

для замкнутого оператора $\overline{\mathscr{L}}$ с той же константой $c > 0$, что и в неравенстве (5.2.3).

Следствие 5.3.1. Из неравенства (5.3.3) следует единственность сильного решения задачи Гурса (5.1.1), (5.1.5), если оно существует, для любой функции $f \in L_2(Q^{(T)})$.

Для доказательства смотри доказательство следствия 4.7.4.

Нами доказаны замыкаемость оператора $\mathscr{L} : B(Q^{(T)}) \to L_2(Q^{(T)})$ и энергетическое неравенство для $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$. Согласно следствию 4.7.3 для завершения доказательства существования сильного решения задачи Гурса (5.1.1), (5.1.5) для любого $f \in L_2(Q^{(T)})$ достаточно установить, что множество значений $\mathscr{R}(\mathscr{L})$ оператора $\mathscr{L}$ — плотное множество в $L_2(Q^{(T)})$.

Лемма 5.3.2. *Пусть коэффициенты уравнения* (5.1.1) $a^{(ij)}$, $a^{(k)} \in C^1(\overline{Q^{(T)}})$, $i,j = 1,\ldots,n$; $k = 0,1,\ldots,n$; $a^{(00)} \in C(\overline{Q^{(T)}})$. *Тогда, если для некоторого элемента* $v \in L_2(Q^{(T)})$ *выполняется равенство*

$$\big(\mathscr{L}u,v\big)_{L_2(Q^{(T)})} = 0 \tag{5.3.4}$$

для любой функции $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$, *то* $v = 0$ *по норме пространства* $L_2(Q^{(T)})$.

Доказательство. Доказательство леммы 5.3.1 проводится по схеме доказательства леммы 4.7.3 в параграфе 4.7.7.

В равенстве (5.3.4) вместо u берем функцию $J_{(k)}u$, так как $J_{(k)}u$ принадлежит $\mathscr{D}(\mathscr{L})$, где $J_{(k)}$ — оператор осреднения (4.7.60). Равенство (5.3.4) с функцией $J_{(k)}u$ представляем в виде

$$\big(\mathscr{L}J_{(k)}u,v\big)_{L_2(Q^{(T)})} = \big(\mathscr{L}u,J^{\star}_{(k)}v\big)_{L_2(Q^{(T)})} + \big(Ku,v\big)_{L_2(Q^{(T)})} = 0, \tag{5.3.5}$$

где коммутатор $K = \mathscr{L}J_{(k)} - J_{(k)}\mathscr{L}$ имеет то же выражение, что и в равенстве (4.7.86).

Выражение $\big(\mathscr{L}u,J^{\star}_{(k)}v\big)_{L_2(Q^{(T)})}$ интегрируем по частям. В результате из равенства (5.3.5) получаем равенство

$$\begin{gathered}\big(u,\mathscr{L}'J^{\star}_{(k)}v\big)_{L_2(Q^{(T)})} + \big(u,R^{\star}_0 v\big)_{L_2(Q^{(T)})} - \\ -\sum_{i=0}^{n}\Big(u,\frac{\partial}{\partial x_i}K^{\star}_i v\Big)_{L_2(Q^{(T)})} + \mathscr{M}\big(u,v;\partial Q^{(T)}\big) = 0,\end{gathered} \tag{5.3.6}$$

где

$$\mathscr{L}'\cdot = \frac{\partial^2\cdot}{\partial x_0^2} - A^{(0)}\cdot - \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a^{(i)}(\boldsymbol{x})\cdot\big) + a^{(00)}(\boldsymbol{x})\cdot,$$

$R_0^\star$ и $K_i^\star (i = 0,\ldots,n)$ — сопряженные операторы по отношению к операторам R_0 и K_i соответственно (см. (4.7.86)), $\mathscr{M}\big(u,v;\partial Q^{(T)}\big)$ — совокупность граничных слагаемых от результата интегрирования по частям выражения $\big(\mathscr{L}u, J_{(k)}^\star v\big)_{L_2(Q^{(T)})}$.

Слагаемое $\mathscr{M}\big(u,v;\partial Q^{(T)}\big)$ представим в виде

$$\mathscr{M}\big(u,v;\partial Q^{(T)}\big) = \mathscr{M}^{(0)}\big(u,J_{(k)}^\star v;\partial Q^{(T)}\big) + \sum_{i=0}^{n}\int\limits_{\partial Q^{(T)}} u\,K_i^\star v\,\nu_i\,\mathrm{d}s,$$

где

$$\begin{gathered}\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J_{(k)}^\star v;\partial Q^{(T)}\big) = \int\limits_{\partial Q^{(T)}}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}J_{(k)}^\star v - u\frac{\partial}{\partial x_0}J_{(k)}^\star v\Big)\nu_0 - \\ - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}J_{(k)}^\star v - u\frac{\partial}{\partial x_j}J_{(k)}^\star v\Big)\nu_i + \sum_{i=0}^{n} a^{(i)}uJ_{(k)}^\star v\nu_i\Big]\,\mathrm{d}s.\end{gathered}\tag{5.3.7}$$

Граница $\partial Q^{(T)}$ состоит из $\Gamma^{(T)}$ и $\Omega^{(T)}$. Выражение (5.3.7) рассмотрим отдельно на $\Gamma^{(T)}$ и $\Omega^{(T)}$.

На $\Gamma^{(T)}$ $\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J_{(k)}^\star v;\partial\Gamma^{(T)}\big)$ можно представить в виде (4.7.88). Из этой формулы видно, что в силу граничного условия (5.1.5)

$$\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J_{(k)}^\star v;\Gamma^{(T)}\big) = 0.\tag{5.3.8}$$

На $\Omega^{(T)}$ (см. (5.3.7)) нетрудно видеть, что

$$\mathscr{M}^{(0)}\big(u,J_{(k)}^\star v;\Omega^{(T)}\big) = \int\limits_{\Omega^{(T)}}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}J_{(k)}^\star v - u\frac{\partial}{\partial x_0}J_{(k)}^\star v\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'.\tag{5.3.9}$$

В силу условия (5.1.5) и так как $\boldsymbol{\nu} = (1,0,\ldots,0)$ для всех точек $\boldsymbol{x} \in \in \Omega^{(T)}$, то

$$\mathscr{M}\big(u,v;\partial Q^{(T)}\big) = \mathscr{M}^{(0)}\big(u,J_{(k)}^\star v;\Omega^{(T)}\big) + \int\limits_{\Omega^{(T)}} uK_0^\star v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'.\tag{5.3.10}$$

Вернемся к равенству (5.3.6), которое выполняется для любой функции $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$. Здесь присутствуют слагаемые с областью интегрирования по всей области $Q^{(T)}$ и слагаемые с областью интегрирования $\Omega^{(T)}$ (см. (5.3.10)). Варьируя выбором функции u в пределах множества $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ методом противоположного предположения можно доказать, что равенство (5.3.6) для любой функции $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ выполняется тогда и только тогда, если выполняются равенства

$$\Big(u,\mathscr{L}' J^{\star}_{(k)}v + R^{\star}_0 v - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} K^{\star}_i v\Big)_{L_2(Q^{(T)})} = 0, \tag{5.3.11}$$

$$\mathscr{M}^{(0)}\big(u, J^{\star}_{(k)}v; \Omega^{(T)}\big) + \int\limits_{\Omega^{(T)}} u\, K^{\star}_0 v\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' = 0. \tag{5.3.12}$$

для любой функции $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$. В свою очередь (5.3.12) выполняется для любой функции $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ тогда и только тогда, если

$$J^{\star}_{(k)}v(T,\boldsymbol{x}') = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} J^{\star}_{(k)}v(T,\boldsymbol{x}') = 0, \quad K^{\star}_i v(T,\boldsymbol{x}') = 0, \tag{5.3.13}$$

или вместо двух последних условий в (5.3.13) — одно условие

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_0} J^{\star}_{(k)}v - K^{\star}_i v\Big)(T,\boldsymbol{x}') = 0.$$

Обозначим через $\tilde{Q}^{(\tau)}$ подобласть $Q^{(T)}$, которая определяется следующим образом: $\tilde{Q}^{(\tau)} = \{\boldsymbol{x} \in Q^{(T)} | \, \tau < x_0 < T\}$. Таким образом, $Q^{(T)} = Q^{(\tau)} \cup \Omega^{(T)} \cup \tilde{Q}^{(\tau)}$.

Поскольку множество $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ плотно в $L_2 Q^{(T)}$, то считаем, что равенство (5.3.11) выполняется для любой функции $u \in L_2 Q^{(T)}$. Это утверждение доказывается предельным переходом в (5.3.11) от множества $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ к множеству $L_2(Q^{(T)})$.

А теперь в равенстве (5.3.11) полагаем

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} Iv(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \tilde{Q}^{(\tau)}, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in Q^{(\tau)}, \end{cases} \tag{5.3.14}$$

где

$$Iv(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\tau}^{x_0} J^{\star}_{(k)}v(t,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}t.$$

Далее доказательство является фактически повторением доказательства леммы 4.7.3 в параграфе 4.7.7, начиная с формулы (4.7.92). $\otimes$

Теорема 5.3.1. *Пусть выполняются условия леммы 5.3.1 относительно гладкости коэффициентов уравнения* (5.1.1). *Для любой функции $f \in L_2(Q^{(T)})$ существует и единственно сильное решение $u \in B(Q^{(T)})$ в $Q^{(T)}$ задачи* (5.1.1), (5.1.5) *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{B(Q^{(T)})} \leqslant c\|f\|_{L_2(Q^{(T)})},$$

где постоянная $c > 0$ та же, что и в неравенстве (5.2.3).

Доказательство теоремы 5.3.1 непосредственно вытекает из следствия 4.7.3, теоремы 5.2.1, леммы 5.3.1, неравенства (5.3.3), следствия 5.3.1 и леммы 5.3.2.

5.4. Метод последовательных приближений

Суть метода последовательных приближений в том, что исходная задача для дифференциального уравнения сводится к интегральным уравнениям второго рода, к которым можно применить метод последовательных приближений.

Для примера рассмотрим сформулированную в п. 4.8.1 задачу Гурса для гиперболического уравнения второго порядка в случае двух независимых переменных, представленного во втором каноническом виде.

Пусть в области $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \, x_1 > x_1^{(0)}, \; x_2 > x_2^{(0)}\}$ (см. рис. 5.2) независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + b(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}) \tag{5.4.1}$$

относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^2 \ni \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$.

К уравнению (5.4.1) присоединяются условия Гурса

$$\begin{aligned} u\big|_{x_1 = x_1^{(0)}} &= \varphi(x_2), \quad x_2 > x_2^{(0)}, \\ u\big|_{x_2 = x_2^{(0)}} &= \psi(x_1), \quad x_1 > x_1^{(0)}, \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

и условия согласования значений функций φ и ψ

$$\varphi(x_2^{(0)}) = \psi(x_1^{(0)}).$$

Для производных функции u введем обозначения: $v : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to$ $\to v(\boldsymbol{x}) = \partial u / \partial x_1(\boldsymbol{x})$, $w : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to w(\boldsymbol{x}) = \partial u / \partial x_2(\boldsymbol{x})$. Теперь

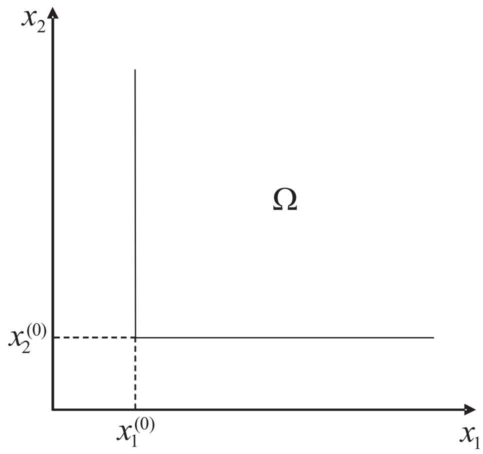

Рис. 5.2

уравнение (5.4.1) в новых обозначениях запишется в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} + a(\boldsymbol{x})v + b(\boldsymbol{x})w + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}), \tag{5.4.3}$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} + a(\boldsymbol{x})v + b(\boldsymbol{x})w + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}). \tag{5.4.4}$$

Интегрируем уравнение (5.4.3) от $x_2^{(0)}$ до x_2, а (5.4.4) – от $x_1^{(0)}$ до x_1. В результате интегрирования получим систему интегральных уравнений второго рода

$$\begin{aligned} v(\boldsymbol{x}) &= \psi'(x_1) + \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \big(f - av - bw - cu\big)(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\ w(\boldsymbol{x}) &= \varphi'(x_2) + \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} \big(f - av - bw - cu\big)(\xi,x_2)\,\mathrm{d}\xi, \\ u(\boldsymbol{x}) &= \psi(x_1) + \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} w(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Обратно, если функции u,v,w достаточно гладкие, то из (5.4.5) можно получить задачу (5.4.1) – (5.4.2).

Действительно, из последнего уравнения системы (5.4.5) имеем

$$\begin{aligned} & u\big|_{x_2=x_2^{(0)}} = \psi(x_1), \\ & \frac{\partial u}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Из второго уравнения (5.4.5), подставляя значение $x_1 = x_1^{(0)}$, получаем условие

$$w\big|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi'(x_2).$$

Отсюда и из (5.4.6)

$$u(\boldsymbol{x}) = u\big|_{x_2=x_2^{(0)}} + \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} w(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\begin{gathered} u(x_1^{(0)},x_2) = u(x_1^{(0)},x_2^{(0)}) + \varphi(x_2) - \varphi(x_2^{(0)}) = \\ = \psi(x_1^{(0)}) + \varphi(x_2) - \varphi(x_2^{(0)}) = \varphi(x_2). \end{gathered}$$

Из второго уравнения (5.4.5) и (5.4.6) путем дифференцирования по x_1 получим уравнение

$$u_{x_1x_2} = f - av - bw - cu, \tag{5.4.7}$$

т. е. уравнение (5.4.1). Далее первое уравнение из (5.4.5) интегрируем по x_1 от $x_1^{(0)}$ до x_1, а второе — по x_2 от $x_2^{(0)}$ до x_2. В результате получим два соотношения

$$\int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} v(\xi,x_2)\,\mathrm{d}\xi = \psi(x_1) - \psi(x_1^{(0)}) + \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1}\int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \big(f - av - bw - cu\big)(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} w(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi = \varphi(x_2) - \varphi(x_2^{(0)}) + \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1}\int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \big(f - av - bw - cu\big)(y)\,\mathrm{d}y.$$

Отсюда, из последних соотношений, имеем равенство

$$\begin{aligned} \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} v(\xi,x_2)\,\mathrm{d}\xi - \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} w(x_1,\xi) = \psi(x_1) - \psi(x_1^{(0)}) - \\ -\varphi(x_2) + \varphi(x_2^{(0)}) = \psi(x_1) - \varphi(x_2). \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Уравнение (5.4.8) и последнее уравнение из (5.4.5) дают соотношение

$$u(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_2) + \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} v(\xi,x_2)\,\mathrm{d}\xi.$$

Отсюда

$$u\big|_{x_1=x_1^{(0)}} = \varphi(x_2),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = v(\boldsymbol{x}).$$

Тем самым доказана лемма.

Лемма 5.4.1. *Задача* (5.4.1) – (5.4.2) *и система уравнений* (5.4.5) *эквивалентны, если* $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v, w, a, b, c, f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^1[x_2^{(0)},\infty)$, $\psi \in C^1[x_1^{(0)},\infty)$.

Теорема 5.4.1. *Если* $a, b, c, f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^1[x_2^{(0)},\infty)$, $\psi \in C^1[x_1^{(0)},\infty)$, *то существует единственное решение* $u, v, w \in C(\overline{\Omega})$ *системы уравнений* (5.4.5), *а также* $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 \in C(\overline{\Omega})$ *и функция* u *является решением задачи* (5.4.1) – (5.4.2).

Доказательство. Применим метод последовательных приближений. За нулевое приближение системы (5.4.5) возьмем $v^{(0)} = \psi'$, $w^{(0)} = \varphi'$ $u^{(0)} = \psi$. Следующие приближения вычисляются по формуле

$$v^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \psi'(x_1) + \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \big(f - av^{(k-1)} - bw^{(k-1)} - cu^{(k-1)}\big)(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$w^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \varphi'(x_2) + \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} \big(f - av^{(k-1)} - bw^{(k-1)} - cu^{(k-1)}\big)(\xi,x_2,)\,\mathrm{d}\xi, \quad (5.4.9)$$

$$u^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \psi(x_1) + \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} w^{(k-1)}(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Пусть $\Omega^{(\lambda)} \subset \Omega$, $\lambda = 1, 2, \ldots$ подобласти в Ω такие, что $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} \Omega^{(\lambda)} = \Omega$, $\Omega^{(\lambda)} \subset \Omega^{(\tilde\lambda)}$, $\lambda < \tilde\lambda$, $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^2$. Докажем равномерную сходимость последовательностей $\{v^{(k)}, w^{(k)}, u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$.

Путем вычитания предыдущего приближения из последующего получим соотношения

$$v^{(k+1)} - v^{(k)} = -\int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \big(a(v^{(k)} - v^{(k-1)}) +$$

$$+ b(w^{(k)} - w^{(k-1)}) + c(u^{(k)} - u^{(k-1)})\big)(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\begin{gathered} w^{(k+1)} - w^{(k)} = -\int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} \big(a(v^{(k)} - v^{(k-1)}) + \\ + b(w^{(k)} - w^{(k-1)}) + c(u^{(k)} - u^{(k-1)})\big)(\xi,x_2,)\,\mathrm{d}\xi, \\ u^{(k+1)} - u^{(k)} = \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} (w^{(k)} - w^{(k-1)})(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad k = 1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{5.4.10}$$

Покажем, что разности $|v^{(k+1)} - v^{(k)}|$, $|w^{(k+1)} - w^{(k)}|$, $|u^{(k+1)} - u^{(k)}|$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} |v^{(k+1)} - v^{(k)}|, |w^{(k+1)} - w^{(k)}|, |u^{(k+1)} - u^{(k)}| \leqslant \\ \leqslant K^k A \frac{\big(x_1 + x_2 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\big)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots, \end{gathered} \tag{5.4.11}$$

$K = \max\big(|a| + |b| + |c|\big)(\boldsymbol{x})$, A — некоторая постоянная. При $k = 0$ неравенство (5.4.11) легко проверяется, так как

$$\begin{gathered} v^{(1)} - v^{(0)} = -\int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \big(a\psi' + b\varphi' + c\psi\big)(x_1,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\ w^{(1)} - w^{(0)} = -\int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} \big(a\psi' + b\varphi' + c\psi)(\xi,x_2,)\,\mathrm{d}\xi, \\ u^{(1)} - u^{(0)} = \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \varphi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{gathered}$$

Оценка (5.4.11) при $k = 0$ сразу видна, если выбрать число A достаточно большим, которое зависит от функций a, b, c, φ, ψ и размера области

$\Omega^{(\lambda)}$. Из (5.4.10) для $k = 1{,}2,\ldots$ имеем

$$|v^{(k+1)} - v^{)k)}| \leqslant \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \big(|a| + |b| + |c|\big) K^{k-1} A \frac{\big(x_1 + \xi - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\big)^{k-1}}{(k-1)!}\, \mathrm{d}\xi \leqslant$$

$$\leqslant K^k A \frac{\big(x_1 + \xi - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\big)^{k}}{k!}\Bigg|_{x_2^{(0)}}^{x_2} \leqslant K^k A \frac{\big(x_1 + x_2 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\big)^{k}}{k!}.$$

Аналогично оцениваются разности $|w^{(k+1)} - w^{(k)}|$ и $|u^{(k+1)} - u^{(k)}|$. Заметим, что

$$v^{(k)} = v^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} (v^{(j)} - v^{(j-1)}), w^{(k)} = w^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} (w^{(j)} - w^{(j-1)}),$$

$$u^{(k)} = u^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} (u^{(j)} - u^{(j-1)}).$$

Из оценок (5.4.11) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$v^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (v^{(k)} - v^{(k-1)}),\ \ w^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (w^{(k)} - w^{(k-1)}),\ \ u^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (u^{(k)} - u^{(k-1)}),$$

в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, члены которого по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$A + A\sum_{k=0}^{\infty} K^{k-1} \frac{\big(x_1 + x_2 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\big)^{k}}{k!} = A\Big(1 + e^{K(x_1 + x_2 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)})}\Big).$$

Следовательно, последовательные приближения $\{v^{(k)}, w^{(k)}, u^{(k)}\}$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ равномерно стремятся соответственно к непрерывным в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ функциям $v, w, u : \mathbb{R}^2 \supset \overline{\Omega^{(\lambda)}} \ni \boldsymbol{x} \to v(\boldsymbol{x}), w(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Переходя к пределу в (5.4.9) при $k \to \infty$, получим, что v, w, u являются решением системы (5.4.5).

Докажем единственность решения. Предположим, что существуют два решения системы (5.4.5) $v^{(i)}$, $w^{(i)}$ $u^{(i)}$, $i = 1, 2$, и $\tilde{v} = v^{(2)} - v^{(1)}$,

$\tilde{w} = w^{(2)} - w^{(1)}$, $\tilde{u} == u^{(2)} - u^{(1)}$. Тогда

$$\tilde{v} = -\int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \bigl(a\tilde{v} + b\tilde{w} + c\tilde{u}\bigr)(x_1, \xi)\,\mathrm{d}\xi,$$
$$\tilde{w} = -\int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \bigl(a\tilde{v} + b\tilde{w} + c\tilde{u}\bigr)(\xi, x_2,)\,\mathrm{d}\xi, \tag{5.4.12}$$
$$\tilde{u} = \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} (\xi)\tilde{w}(x_1, \xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Функции $\tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{u} \in C(\overline{\Omega^{(\lambda)}})$. Поэтому $|\tilde{v}|, |\tilde{w}|, |\tilde{u}| \leqslant B$, B — некоторая константа. Из (5.4.12) имеем

$$|\tilde{v}(\boldsymbol{x})| \leqslant \int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \bigl(|a|+|b|+|c|\bigr)B\,\mathrm{d}\xi \leqslant KB\bigl(x_2 - x_2^{(0)}\bigr) \leqslant KB\frac{x_1 + x_2 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{1!}.$$

Такие же оценки справедливы и для $\tilde{w}$ и $\tilde{u}$. Применяя метод математической индукции, получим

$$|\tilde{v}(\boldsymbol{x})|, |\tilde{w}(\boldsymbol{x})|, |\tilde{u}(\boldsymbol{x})| \leqslant K^k B\frac{\bigl(x_1 + x_2 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\bigr)^k}{k!}$$

для любого натурального k и любого $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega^{(\lambda)}}$. Отсюда следует, что $\tilde{v} \equiv \tilde{w} \equiv \tilde{u} \equiv 0$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, если перейти к пределу при $k \to \infty$.

Таким образом, мы доказали утверждение теоремы 5.4.1 для системы (5.4.5) относительно подобласти $\Omega^{(\lambda)}$. Поскольку система $\{\Omega^{(\lambda)}\}_{\lambda=1}^{\infty}$ является покрытием области Ω, то отсюда получаем доказываемое утверждение теоремы 5.4.1 для системы (5.4.5).

Отсюда, в силу леммы 5.4.1 и системы (5.4.5) для функции u производная $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2$ принадлежит классу $C(\overline{\Omega})$, а сама функция u является решением задачи (5.4.1) – (5.4.2). $\otimes$

6. Задачи для эллиптических уравнений. Обобщенное решение

6.1. Обобщенное решение задачи Дирихле

Пусть Ω — ограниченная область n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Относительно функции $u : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ рассматривается простейшее эллиптическое уравнение второго порядка — уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6.1.1}$$

Как известно (см. п. 3.7.4), для уравнения (6.1.1) рассматривались постановки задач Дирихле, Неймана и третья граничная задача.

6.1.1. Определение обобщенного решения задачи Дирихле

Напомним постановку задачи Дирихле. Требуется найти функцию u из $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, которая удовлетворяет уравнению (6.1.1) и граничному условию

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{6.1.2}$$

где $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая граница области Ω, $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω. Здесь функции $f : R^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, $\varphi : \partial\Omega \ni \boldsymbol{x} \to \varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ — заданные функции.

Решение уравнения (6.1.1), удовлетворяющее условию (6.1.2), называется *классическим решением задачи Дирихле* (6.1.1) – (6.1.2).

Задачу (6.1.1) – (6.1.2) можно рассматривать как некоторое интегральное равенство похожим образом, как было введено понятие обобщенной производной. Чтобы прийти к определению обобщенного решения этой задачи, проделаем следующую процедуру. Уравнение (6.1.1) умножим на произвольную функцию из множества бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем $C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Ω. В результате получим соотношение

$$\int\limits_\Omega \Delta u \, v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega f \, v \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Интегрируя левую часть равенства по частям с использованием формулы Остроградского, получим

$$(\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)} = -(f, v)_{L_2(\Omega)}. \tag{6.1.3}$$

Равенство (6.1.3) берем за основу введения нового понятия решения задачи (6.1.1) – (6.1.2).

В п.4.7.2 было введено пространство Соболева $H^1(\Omega)$. Из теорем вложения Соболева следует, что элемент u из $H^1(\Omega)$ имеет смысл на гиперповерхности $\partial\Omega$ меньшей размерности по сравнению с Ω, по крайней мере, в $L_2(\partial\Omega)$. Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ подпространство пространства $H^1(\Omega)$, элементы которого на $\partial\Omega$ равны нулю. Подпространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ можно еще получить из множества $C_0^\infty(\Omega)$ путем его замыкания по норме пространства $H^1(\Omega)$. Левую и правую часть равенства (6.1.3) можно рассматривать как линейные непрерывные функционалы в пространстве $H^1(\Omega)$ относительно v. То, что они являются линейными непрерывными функционалами, доказывается с помощью неравенства Коши – Буняковского путем проверки критерия непрерывности, т. е. доказываются неравенства

$$\left|(\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)}\right|, \ \left|(f, v)_{L_2(\Omega)}\right| \leqslant c\|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{6.1.4}$$

для любой функции $v \in C_0^\infty$.

По непрерывности равенство (6.1.3) с помощью предельного перехода распространяется на любую функцию $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. В левой части (6.1.3) функцию u можно брать не только из множества $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, но она может быть элементом из пространства $H^1(\Omega)$. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 6.1.1. Функцию $u \in H^1(\Omega)$ называем *обобщенным решением задачи Дирихле* (6.1.1) – (6.1.2), если она удовлетворяет для некоторой функции $f \in L_2(\Omega)$ уравнению (6.1.3) для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и граничному условию (6.1.2) для некоторой заданной функции $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$.

Теперь мы забываем о постановке задачи (6.1.1) – (6.1.2) в виде этих уравнений в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ (уравнение (6.1.1)) и $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ (уравнение (6.1.2)), а решение ее рассматриваем в смысле определения 6.1.1.

Введение обобщенного решения задачи (6.1.1) – (6.1.2) не противоречит понятию классического решения. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6.1.1. Если обобщенное решение задачи (6.1.1) – (6.1.2) в смысле определения 6.1.1 является достаточно гладкой функцией, то оно является классическим.

Доказательство. Здесь гладкость, имеется в виду, обобщенного решения такова, что имеет смысл запись уравнения (6.1.1) и условия (6.1.2). Предположим, для определенности, что обобщенное решение u принадлежит классу $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Согласно определению 6.1.1, эта функция удовлетворяет условию (6.1.2). Покажем, что она удовлетворяет уравнению (6.1.1) в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$, если функция f определена в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Опять же, согласно определению 6.1.1, имеем равенство (6.1.3) для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Интегрируя левую часть его по частям, равенство (6.1.3) запишется в виде

$$(\Delta u, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)},$$

или

$$(\Delta u - f, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{6.1.5}$$

которое выполняется для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Так как множество $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ является плотным в $L_2(\Omega)$ (см. свойство 4.5.3 в п.4.5.5), то из равенства (6.1.5) следует равенство

$$\Delta u - f = 0,$$

которое выполняется в Ω почти всюду, или – равенство (6.1.1). Если функции u и f – достаточно гладкие функции, то имеем равенство (6.1.1) для любой точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$. $\otimes$

6.1.2. Эквивалентность норм пространств $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$

Рассмотрим левую часть равенства (6.1.3), которую обозначим через $a(u,v)$, т. е.

$$a(u,v) = (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Форму $a(u,v)$ будем рассматривать для любых функций $u, v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ как отображение $a : \mathring{H}^1(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega) \ni (u,v) \to a(u,v) \in \mathbb{R}$ из декартового произведения $\mathring{H}^1(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega)$ множеств $\mathring{H}^1(\Omega)$ в $\mathbb{R}$.

Теорема 6.1.1. *Отображение $a : \mathring{H}^1(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ определяет скалярное произведение элементов множества $\mathring{H}^1(\Omega)$, где норма $\|u\|_{\mathscr{H}^a(\Omega)} = a^{1/2}(u,u)$ эквивалентна норме пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$.*

Доказательство. Проверим выполнение всех свойств скалярного произведения для заданного отображения $a : \mathring{H}^1(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega) \ni (u,v) \to$ $\to a(u,v) \in \mathbb{R}$:

1. Форма $a(u,v) \geqslant 0$ для любых функций $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Если $a(u,u) =$ $= 0$, то это означает, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|^2_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Отсюда следует, что все обобщенные производные $\partial u/\partial x_k$ почти всюду равны нулю в Ω. Таким образом, $u = \text{const}$. Но поскольку функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, то она удовлетворяет однородному граничному условию

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.1.6}$$

и, следовательно, $u = \text{const} = 0$ почти всюду в Ω.

Непосредственной проверкой легко устанавливаются следующие свойства:

2. $a(u,v) = a(v, u), \quad u,v \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

3. $a(\lambda u,v) = \lambda a(u, v)$ для любого скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. $a(u^{(1)} + u^{(2)},v) = a(u^{(1)},v) + a(u^{(2)},v)$.

5. Покажем теперь, что форма $a(u,v)$ удовлетворяет неравенству Коши – Буняковского

$$a^2(u,v) \leqslant a(u,u)a(v,v) \tag{6.1.7}$$

для любых функций $u,v \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Действительно,

$$0 \leqslant a(u + \lambda v,u + \lambda v) = a(u,u) + 2\lambda a(u,v) + \lambda^2 a(v,v)$$

для любого действительного числа $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $\lambda = -a(u,v)/a(v,v)$. Тогда, подставляя значение λ, получим

$$0 \leqslant a(u,u) - 2\frac{a^2(u,v)}{a(v,v)} + \frac{a^2(u,v)}{a(v,v)},$$

из которого следует неравенство (6.1.7).

6. С помощью неравенства Коши – Буняковского (6.1.7) для $a(u,v)$ можно доказать неравенство треугольника

$$a^{1/2}(u+v,u+v) \leqslant a^{1/2}(u,u) + a^{1/2}(v,v). \tag{6.1.8}$$

Для этого распишем левую часть неравенства (6.1.8) более подробно

$$a(u+v,u+v) = a(u,u) + 2a(u,v) + a(v,v) \leqslant$$

$$\leqslant a(u,u) + 2a^{1/2}(u,u)a^{1/2}(v,v) + a(v,v) = \left(a^{1/2}(u,u) + a^{1/2}(v,v)\right)^2.$$

С помощью формы $a(u,v)$ над множеством $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ вводим новое скалярное произведение $a : \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \ni (u,v) \to a(u,v) \in \mathbb{R}$ и норму

$$\|\cdot\|_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^1(\Omega)} : \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \ni u \to \|u\|_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^1(\Omega)} = a^{1/2}(u,u) \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, наряду с гильбертовым пространством $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ получаем новое пространство $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^1(\Omega)$ со скалярным произведением и нормой, определенными на том же множестве, что и пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Можно показать, что пространство $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^1(\Omega)$ является также гильбертовым пространством, используя свойство полноты пространства $L_2(\Omega)$.

Докажем теперь эквивалентность норм пространств $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$, т. е. неравенства

$$\|u\|_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)} \tag{6.1.9}$$

для любых функций $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и некоторой положительной константы c, не зависящей от функции u.

Первое неравенство вытекает из неравенства

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)} \leqslant \|u\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}$$

в силу определения норм пространств $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$.

Второе неравенство

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^a(\Omega)}$$

из (6.1.9) будем доказывать методом противоположного утверждения. Другими словами, предположим, что для любого натурального $m \in \mathbb{N}$ существует функция $u^{(m)} \in \mathring{H}^1(\Omega)$, для которой

$$\|u^{(m)}\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \geqslant m\|u^{(m)}\|_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)}. \tag{6.1.10}$$

Для элемента $g^{(m)} = u^{(m)}/\|u^{(m)}\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}$ из неравенства (6.1.10) следует оценка

$$\|g^{(m)}\|_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)} \leqslant \frac{1}{m}, \tag{6.1.11}$$

где

$$\|g^{(m)}\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} = 1. \tag{6.1.12}$$

Из теорем вложения С.Л. Соболева следует, что вложение $\mathring{H}^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ является компактным, т. е. тождественное отображение $I : \mathring{H}^1(\Omega) \ni u \to u \in L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным оператором. Это означает, что из ограниченной последовательности $\{g^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ (см. (6.1.12)) можно выбрать фундаментальную в $L_2(\Omega)$ подпоследовательность $\{g^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{g^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $k^{(0)}$, что для $k > k^{(0)}$ и любого целого положительного числа $p \in \mathbb{N}$

$$\|g^{(m_{k+p})} - g^{(m_k)}\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Покажем теперь, что последовательность $\{g^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной и в $\mathring{H}^1(\Omega)$. Действительно, на языке $\varepsilon > 0$

$$\|g^{(m_{k+p})} - g^{(m_k)}\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \|g^{(m_{k+p})} - g^{(m_k)}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g^{(m_{k+p})} - g^{(m_k)}\|^2_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 + \left(\|g^{(m_{k+p})}\|_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)} + \|g^{(m_k)}\|_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 + 2\|g^{(m_{k+p})}\|^2_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)} + 2\|g^{(m_k)}\|^2_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)}.$$

Здесь использовано неравенство треугольника (6.1.8) и неравенство $2ab \leqslant a^2 + b^2$. Продолжая оценки дальше, используя при этом оценку (6.1.11), получим

$$\|g^{(m_{k+p})} - g^{(m_k)}\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon^2 + \frac{2}{m^2_{k+p}} + \frac{2}{m^2_k}. \tag{6.1.13}$$

При $k \to \infty$ $m_{k+p} \to \infty$ и $m_k \to \infty$. Поэтому при достаточно большом $k^{(0)}$ и при $k > k^{(0)}$ будет $\varepsilon^2 + 2/m^2_{k+p} + 2/m^2_k \leqslant 4\varepsilon^2$. Таким образом, доказано, что последовательность $\mathbb{N} \ni k \to g^{(m_k)} \in \mathring{H}^1(\Omega)$ является фундаментальной в $\mathring{H}^1(\Omega)$.

Поскольку пространство $\mathring{H}^1(\Omega)$ является полным, то существует элемент $g \in \mathring{H}^1(\Omega)$, к которому сходится последовательность $\mathbb{N} \ni k \to$ $\to g^{(m_k)} \in \mathring{H}^1(\Omega)$ при $k \to \infty$, т. е.

$$\|g^{(m_k)} - g\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \|g^{(m_k)}\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} = 1 = \|g\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}. \tag{6.1.14}$$

С другой стороны, в силу (6.1.11)

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|g^{(m_k)}\|^2_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Big\| \frac{\partial g^{(m_k)}}{\partial x_i} \Big\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k^2} = 0 = \|g\|^2_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \Big\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big\|^2_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)}. \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

Это означает, что обобщенные производные $\partial g/\partial x_i, i = 1, \ldots ,n$, равны нулю, т. е. $g = \mathrm{const}$. Из равенств (6.1.14) и (6.1.15) следует

$$1 = \|g\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \|g\|^2_{L_2(\Omega)} = g^2 \int_{\Omega} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = g^2|\Omega|,$$

где $|\Omega|$ — объем области Ω. Из последнего равенства вытекает, что $g = 1/|\Omega|^{1/2}$ и $g \neq 0$, если $|\Omega| \neq 0$.

Полученный результат $g = 1/|\Omega|^{1/2} \neq 0$, противоречит тому, что $g \in \mathring{H}^1(\Omega)$ и $g|_{\partial\Omega} = 0$. Это противоречие указывает на то, что наше предположение о том, что существуют функции $u^{(m)}(\boldsymbol{x})$, для которых выполняются неравенства (6.1.10),является неверным. Тем самым, доказано и второе неравенство (6.1.9). $\otimes$

6.1.3. Теорема Ф. Рисса

Теорема Ф. Рисса дает представление линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве H через некоторый его элемент h.

Примером непрерывного функционала $l : H \ni v \to l(v) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, заданного на гильбертовом пространстве H, является его скалярное произведение

$$l^h : H \ni v \to (v,h)_H = l^h(v),$$

которое выполняется для некоторого фиксированного элемента $h \in H$. Это следует из неравенства для скалярного произведения

$$\|l^h(v)\| \leqslant \|v\|_H \|h\|_H$$

для любых элементов $v, h \in H$. Оно является критерием непрерывности линейного функционала $l^h : H \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ над полем действительных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел.

Теорема 6.1.2. *Для любого линейного непрерывного функционала $l : H \ni v \to l(v)$, заданного на гильбертовом пространстве H, существует элемент $h \in H$, однозначно определяемый функционалом l, такой, что для любого элемента $v \in H$ имеет место равенство*

$$l(v) = (h,v)_H, \tag{6.1.16}$$

где $l(v)$ — значение функционала l от элемента $v \in H$, $(\cdot,\cdot)_H$ — значение скалярного произведения в H. Наряду с равенством (6.1.16) *справедливо еще и равенство*

$$\|l\| = \|h\|_H,$$

где $\|h\|_H$ — значение нормы элемента h в пространстве H, $\|l\|$ — норма функционала l и

$$\|l\| = \sup_{v \in H} \frac{|l(v)|}{\|v\|_H}.$$

Доказательство. Пусть $L = Ker\, l = \{z \in H : l(z) = 0\}$. Тогда L является подпространством в H. Если $L = H$, то по следствию из теоремы Хана-Банаха об отделимости точки от подпространства функционал $l = 0$, поэтому можно взять $h = 0$.

Пусть $L \subset H$, тогда $H = L + L^\perp$, где $L^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству L, $L^\perp = \{w \in H : (w,z)_H = 0, \ \forall z \in L\}$. Следовательно, существует элемент $z^{(0)} \in L^\perp$ такой, что $l(z^{(0)}) \neq 0$.

Возьмем произвольный элемент $v \in H$ и построим элемент $z = v - \frac{z^{(0)}}{l(z^{(0)})}\, l(v)$, который лежит в L. Действительно,

$$l(z) = l(v) - \frac{l(z^{(0)})}{l(z^{(0)})}\, l(v) = 0.$$

Но тогда $z \perp z^{(0)}$. Поэтому

$$(z,z^{(0)})_H = 0 = (v,z^{(0)})_H - \frac{(z^{(0)},z^{(0)})_H}{l(z^{(0)})}\, l(v).$$

Откуда $l(v) = (v,h)_H$, где $h = \frac{\overline{l(z^{(0)})}}{\|z^{(0)}\|^2}\, z^{(0)}$. Далее, по неравенству Коши – Буняковского $|l(v)| = |(v,h)_H| \leqslant \|h\|\,\|v\|$. Поэтому $\|l\| \leqslant \|h\|$. Для $v = h$ имеем $\|l\| \geqslant \frac{|l(h)|}{\|h\|} = \frac{|(h,h)_H|}{\|h\|} = \|h\|$. Докажем единственность элемента h. Предположим, что существуют два элемента $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ из H такие, что $l(v) = (v,h^{(1)})_H = (v,h^{(2)})_H$. Тогда $(v, h^{(1)} - h^{(2)})_H = 0$ для всех $v \in H$. При $v = h^{(1)} - h^{(2)}$ имеем $\|h^{(1)} - h^{(2)}\| = 0$ или $h^{(1)} = h^{(2)}$. $\otimes$

6.1.4. Существование обобщенного решения задачи Дирихле

Существование обобщенного решения задачи (6.1.1) – (6.1.2) будет доказано с помощью теоремы Ф. Рисса. Согласно его определению 6.1.1 функция $u \in H^1(\Omega)$ будет обобщенным решением указанной задачи, если она удовлетворяет равенству (6.1.3) для любого элемента $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Поскольку u и v из разных пространств, то теорему Рисса пока применить непосредственно нельзя.

Согласно определению обобщенного решения функция u должна удовлетворять неоднородному условию (6.1.2). С помощью замены $u = w + \Phi$ через новую искомую функцию w и некоторую функцию $\Phi(\boldsymbol{x})$, заданную в области Ω, сужение которой на $\partial\Omega$ совпадает с функцией $\varphi(\boldsymbol{x})$, т. е.

$$\Phi\big|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{6.1.17}$$

мы приходим к отысканию функции w, удовлетворяющей однородному граничному условию

$$w\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.1.18}$$

Если функция $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$, то ее нельзя продолжить функцией Φ на всю область Ω так, чтобы $\Phi \in H^1(\Omega)$. Требуется от функции φ большая гладкость. Если предположить, что $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$, то тогда (см. в [23] теорему 2 п. 2 §4 гл. III) существует функция $\Phi \in C^1(\overline{\Omega})$ и, тем более, из $H^1(\Omega)$, которая удовлетворяет условию (6.1.17).

Функцию $u = w + \Phi$ подставляем в равенство (6.1.3). Относительно функции w получим равенство

$$(\mathbf{grad}\, w, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)} = -(f,v)_{L_2(\Omega)} - (\mathbf{grad}\, \Phi, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (6.1.19)$$

Так как функция $w = u - \Phi$ принадлежит $H^1(\Omega)$ и удовлетворяет условию (6.1.18), то $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Следуя равенству (6.1.19) функция $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ является обобщенным решением граничной задачи для уравнения

$$\Delta w = f - \Delta\Phi, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (6.1.20)$$

при наличии условия (6.1.18), если она удовлетворяет равенству (6.1.19) для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

В равенстве (6.1.19) левую часть можно рассматривать как значение скалярного произведения в $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$ элементов w и v. Правая часть его для некоторого элемента $f \in L_2(\Omega)$ представляет собой линейный непрерывный функционала гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$. Действительно,

$$|l^{f,\Phi}(v)| = |-(f,v)_{L_2(\Omega)} - (\mathbf{grad}\, \Phi, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)}| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}\Big)\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leqslant c\Big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}\Big)\|v\|_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)}.$$

Согласно теореме 6.1.2 для линейного непрерывного функционала $l^{f,\Phi}$: $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega) \ni v \to l^{f,\Phi}(v) \in \mathbb{R}$ существует единственный элемент $w \in \overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$, для которого

$$(w,v)_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)} = l^{f,\Phi}(v),$$

т. е. выполняется равенство (6.1.19). Если $w \in \overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$, то и $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Таким образом, мы доказали существование и единственность обобщенного решения $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ задачи (6.1.18), (6.1.20) и, следовательно, существование и единственность обобщенного решения $u = w + \Phi \in H^1(\Omega)$ задачи (6.1.1) – (6.1.2).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6.1.3. *Если заданы функции $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ уравнения* (6.1.1) *и граничного условия* (6.1.2), *то существует единственное обобщенное решение (определение 6.1.1) задачи Дирихле* (6.1.1) – (6.1.2) *для уравнения Пуассона.*

6.2. Обобщенное решение задачи Неймана

Напомним постановку задачи Неймана для уравнения Пуассона. Она состоит в отыскании функции $u : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ уравнения (6.1.1) при наличии граничного условия

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{6.2.1}$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней относительно Ω нормали к гиперповерхности $\partial\Omega$ в ее точках.

Как и в случае задачи Дирихле с помощью интегральных соотношений введем понятие обобщенного решения задачи Неймана (6.1.1), (6.2.1). Для этого уравнение (6.1.1) умножим на произвольную функцию $v \in H^1(\Omega)$ и результат проинтегрируем по области Ω. В результате этой операции и интегрирования по частям получим равенство

$$(\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)} = -(f,v)_{L_2(\Omega)} + (\psi,v)_{L_2(\partial\Omega)} \tag{6.2.2}$$

для любой функции $v \in H^1(\Omega)$.

Равенство (6.2.2) является основой введения обобщенного решения задачи (6.1.1), (6.2.1), если $f \in L_2(\Omega)$ и $\psi \in L_2(\partial\Omega)$.

Определение 6.2.1. Функцию $u \in H^1(\Omega)$ назовем *обобщенным решением задачи Неймана* (6.1.1), (6.2.1), если она удовлетворяет уравнению (6.2.2) для любой функции $v \in H^1(\Omega)$.

Определение 6.2.1 не противоречит понятию классического решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в виде уравнений (6.1.1) и (6.2.1), которые выполняются для любых точек $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, если функция u, например, принадлежит классу $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Если здесь дословно копировать схему доказательства существования обобщенного решения задачи Дирихле, то этот вариант успеха не принесет, так как левая часть равенства (6.2.2) не порождает скалярное произведение на множестве $H^1(\Omega)$.

Видоизменим левую часть равенства (6.2.2) путем прибавления и вычитания слагаемого $(u,v)_{L_2(\Omega)}$. В результате получим соотношение

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} - (u,v)_{L_2(\Omega)} = -(f,v)_{L_2(\Omega)} + (\psi,v)_{L_2(\partial\Omega)}, \tag{6.2.3}$$

которое является эквивалентным по отношению к (6.2.2). Второе слагаемое левой части приведем к скалярному произведению пространства $H^1(\Omega)$ с помощью вполне непрерывного оператора $\mathscr{K} : H^1(\Omega) \to \to H^1(\Omega)$.

Лемма 6.2.1. *Существует линейный непрерывный оператор $\mathscr{K} : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ с областью определения $L_2(\Omega)$, для которого выполняется равенство*

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = (\mathscr{K}u,v)_{H^1(\Omega)} \tag{6.2.4}$$

для всех $v \in H^1(\Omega)$. Кроме того, для оператора $\mathscr{K}$ существует обратный оператор $\mathscr{K}^{-1}$ и $\mathscr{K}$, как оператор из $H^1(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, является линейным, самосопряженным, положительным и вполне непрерывным.

Доказательство. Скалярное произведение $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \ni (u,v) \to (u,v)_{L_2(\Omega)} \in \mathbb{R}$ будем рассматривать как некоторый функционал $l^u : H^1(\Omega) \ni v \to l^u = (u,v)_{L_2(\Omega)} \in \mathbb{R}$ относительно переменного элемента $v \in H^1(\Omega)$. Рассматриваемый функционал l^u является линейным. Это утверждение следует, очевидно, из линейности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Он является и непрерывным в $H^1(\Omega)$ в силу критерия о непрерывности линейных функционалов Это следует из оценок

$$|l^u(v)| \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

По теореме 6.1.2 найдется единственный элемент $U \in H^1(\Omega)$, через который значение функционала $l^u(v)$ представляется в виде скалярного произведения $H^1(\Omega)$

$$l^u(v) = (U,v)_{H^1(\Omega)} \tag{6.2.5}$$

и

$$\|l^u\| = \|U\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{6.2.6}$$

Функционал l^u определяется элементом $u \in L_2(\Omega)$, а его значение согласно равенству (6.2.5) выражается через скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ и соответствующий ему единственный элемент $U \in H^1(\Omega)$. Тем самым мы определили оператор

$$\mathscr{K} : L_2(\Omega) \ni u \to \mathscr{K}u = U \in H^1(\Omega).$$

Очевидно, оператор $\mathscr{K}$ является линейным. Это утверждение опять следует из линейности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Равенство (6.2.5), если его записать с помощью оператора $\mathscr{K}$, является доказываемым равенством (6.2.4).

Из неравенства (6.2.6) следует неравенство

$$\|\mathscr{K}u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Равенство (6.2.5), если его записать с помощью оператора $\mathscr{K}$, является доказываемым равенством (6.2.4).

Из неравенства (6.2.6) следует неравенство

$$\|\mathscr{K}u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)},$$

критерий непрерывности оператора $\mathscr{K} : L_2(\Omega) \in H^1(\Omega)$. У нас элементы u — элементы не только пространства $L_2(\Omega)$, но они фактически принадлежат $H^1(\Omega)$. Поэтому оператор $\mathscr{K}$ можно рассматривать в пределах пространства $H^1(\Omega)$, т. е.

$$\mathscr{K} : H^1(\Omega) \ni u \to \mathscr{K}u \in H^1(\Omega).$$

Из теорем вложения Соболева следует, что естественное вложение $I : H^1(\Omega) \ni u \to u \in L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным оператором. Поэтому оператор $\mathscr{K} : H^1(\Omega) \ni u \to \mathscr{K}u \in H^1(\Omega)$ можно рассматривать как композицию двух операторов $I : H^1(\Omega) \ni u \to u \in L_2(\Omega)$ и $\mathscr{K} : L_2(\Omega) \ni u \to \mathscr{K}u \in H^1(\Omega)$. Поскольку первый является вполне непрерывным, а второй — непрерывным, то их композиция, как известно из теорем вполне непрерывных операторов, будет вполне непрерывным оператором.

Оператор $\mathscr{K} : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ является самосопряженным. Это следует из следующих соотношений:

$$(\mathscr{K}u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L_2(\Omega)} = (v,u)_{L_2(\Omega)} = (\mathscr{K}v,u)_{H^1(\Omega)} = (u,\mathscr{K}v)_{H^1(\Omega)},$$

которое выполняется для любых элементов $u,v \in H^1(\Omega)$.

Оператор $\mathscr{K}$ является положительным, так как

$$(\mathscr{K}u,u)_{H^1(\Omega)} = (u,u)_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} > 0,\ u \neq 0,$$

для всех элементов $u \in H^1(\Omega)$.

И последнее утверждение леммы 6.2.1, которое мы должны доказать: оператор $\mathscr{K} : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ имеет обратный оператор $\mathscr{K}^{-1} : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$. Для этого рассмотрим однородное уравнение

$$\mathscr{K} u = 0, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{6.2.7}$$

Уравнение (6.2.7) равносильно уравнению

$$(\mathscr{K} u,v)_{L_2(\Omega)} = (u,v)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{6.2.8}$$

которое выполняется для любой функции $v \in L_2(\Omega)$. В силу теоремы об ортогональности в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ из равенства (6.2.8) следует, что оно справедливо только при $u = 0$ по норме $L_2(\Omega)$. Отсюда следует, поскольку $u \in H^1(\Omega)$, что $u = 0$ и в $H^1(\Omega)$.

Нетрудно видеть, что из последних рассуждений вытекает, что существует обратный оператор $\mathscr{K}^{-1} : H^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$, если исходный оператор $\mathscr{K}$ рассматривать как оператор из $L_2(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$. $\otimes$

А теперь докажем теорему о существовании обобщенного решения задачи Неймана.

Теорема 6.2.1. *Если функции $f \in L_2(\Omega)$ и $\psi \in L_2(\partial\Omega)$, $\partial\Omega$ — кусочно гладкая гиперповерхность, Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, то обобщенное решение $u \in H^1(\Omega)$ задачи Неймана* (6.1.1), (6.2.1) *существует тогда и только тогда, если f и ψ удовлетворяет условию*

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \psi\,\mathrm{d}s. \tag{6.2.9}$$

Обобщенное решение определяется с точностью до постоянной и справедлива оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c^{(1)}\Big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)}\Big) + c^{(2)}\|u\|_{L_2(\Omega)}, \tag{6.2.10}$$

где $c^{(1)}, c^{(2)}$ — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Возвращаемся к определению обобщенного решения задачи (6.1.1), (6.2.1), а точнее, к равенству (6.2.3). Правую часть его рассмотрим как функционал $l^{f,\psi} : H^1(\Omega) \ni v \to l^{f,\psi}(v) =$

$= -(f,v)_{L_2(\Omega)} + (\psi,v)_{L_2(\partial\Omega)} \in \mathbb{R}$ относительно аргумента $v \in H^1(\Omega)$. На основании неравенства Буняковского для $l^{f,\psi}$ можно получить оценки

$$|l^{f,\psi}(v)| \leqslant \Big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)}\Big)\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \Big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)}\Big)\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.2.11}$$

Неравенство (6.2.11) говорит о том, что функционал $l^{f,\psi}$ является линейным непрерывным функционалом на $H^1(\Omega)$ и в силу теоремы Рисса существует единственный линейный непрерывный функционал на $H^1(\Omega)$ и элемент $\mathscr{F} \in H^1(\Omega)$, для которого

$$l^{f,\psi}(v) = (\mathscr{F},v)_{H^1(\Omega)}. \tag{6.2.12}$$

Теперь равенство (6.2.3) с учетом (6.2.12) можно записать в виде скалярного произведения

$$(u - \mathscr{K}u - \mathscr{F},v)_{H^1(\Omega)} = 0 \tag{6.2.13}$$

для любого $v \in H^1(\Omega)$. Равенство (6.2.13) равносильно уравнению

$$u - \mathscr{K}u = \mathscr{F}, \tag{6.2.14}$$

которое рассматривается в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega)$. Уравнение (6.2.14) является уравнением второго рода с вполне непрерывным оператором $\mathscr{K}$. Согласно альтернативе Фредгольма уравнение (6.2.14) разрешимо тогда и только тогда, если элемент $\mathscr{F}$ ортогонален решениям однородного уравнения

$$w - \mathscr{K}^\star w = 0, \tag{6.2.15}$$

$\mathscr{K}^\star$ – сопряженный оператор к оператору $\mathscr{K}$. Согласно лемме 6.2.1 $\mathscr{K}^\star = \mathscr{K}$. Следовательно, уравнение (6.2.15) имеет вид

$$w - \mathscr{K}w = 0, \tag{6.2.16}$$

или

$$(w - \mathscr{K}w,v)_{H^1(\Omega)} = 0 \tag{6.2.17}$$

для элемента $v \in H^1(\Omega)$. В силу определения оператора $\mathscr{K}$ уравнение (6.2.17) запишется в виде равенства

$$(w,v)_{H^1(\Omega)} - (w,v)_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{6.2.18}$$

которое выполняется для любого $v \in H^1(\Omega)$. В (6.2.4) полагаем $v = w$. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|^2_{L_2(\Omega)} = 0,$$

или $w = \text{const}$ почти всюду в Ω. Следовательно, уравнение (6.2.15) имеет одно линейно независимое решение $w = 1$. Условие разрешимости уравнения (6.2.14) будет

$$(\mathscr{F},1)_{H^1(\Omega)} = -(f,1)_{L_2(\Omega)} + (\psi,1)_{L_2(\partial\Omega)} = 0,$$

т. е. условие (6.2.9).

Что касается единственности обобщенного решения, то исследование его в силу линейности задачи путем вычитания сводится к решению однородного уравнения (6.2.16) для разности любых двух решений уравнения (6.2.14). Как уже видели, общее решение (6.2.16) есть константа. Отсюда можно сделать вывод, что обобщенное решение задачи Неймана (6.1.1), (6.2.1), если оно существует, определяется с точностью до константы.

Осталось доказать только оценку (6.2.10). Для доказательства ее в равенстве (6.2.3) полагаем $v = u$. Тогда получим неравенство

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \left|(f,u)_{L_2(\Omega)}\right| + \left|(\psi,u)_{L_2(\partial\Omega)}\right|. \tag{6.2.19}$$

Для продолжения оценок в (6.2.19) воспользуемся элементарным неравенством $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и любых $a,b \in \mathbb{R}$. После применения его получим

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\,\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Из теорем вложения С.Л. Соболева следует неравенство для некоторого числа $c > 0$

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant c\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Из последних двух неравенств при соответствующем выборе $\varepsilon > 0$ получаем доказываемую оценку (6.2.10) $\otimes$

6.3. Граничная задача третьего рода для уравнения Пуассона

В этом параграфе рассмотрим следующую граничную задачу третьего рода для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{6.3.1}$$

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma(\boldsymbol{x})u\Big)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{6.3.2}$$

Здесь $f : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – заданная функция на области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\sigma,\varphi : \partial\Omega \ni \boldsymbol{x} \to \sigma(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x})$ – заданные функции на границе $\partial\Omega$ области Ω.

Как известно (см. п. 3.7.4), функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ называется *классическим решением задачи* (6.3.1) – (6.3.2), если она удовлетворяет в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ уравнению (6.3.1) и при $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ – условию (6.3.2). Введем определение обобщенного решения задачи (6.3.1) – (6.3.2). Как и в предыдущих двух параграфах вместо уравнений (6.3.1) и (6.3.2) будем рассматривать соответствующее интегральное равенство

$$a(u,v) = (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma uv \,\mathrm{d}s = -(f,v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi,v)_{L_2(\partial\Omega)} \tag{6.3.3}$$

для любой функции $v \in H^1(\Omega)$. Если u является классическим решением задачи (6.3.1) – (6.3.2), то в этом случае уравнение (6.3.3) получается путем умножения уравнения (6.3.1) на функцию $v \in H^1(\Omega)$ и интегрирования полученного равенства по области Ω с учетом граничного условия (6.3.2).

Предположим, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$.

Определение 6.3.1. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением задачи* (6.3.1) – (6.3.2), если она удовлетворяет уравнению (6.3.3) для любого элемента $v \in H^1(\Omega)$.

Утверждение 6.3.1. Если обобщенное решение задачи (6.3.1) – (6.3.2) принадлежит классу $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, а функции $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$, то оно является классическим решением этой задачи, т. е. в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (6.3.1) и при $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ – условию (6.3.2).

Доказательство. Данное утверждение доказывается аналогично утверждению 6.1.1. Действительно, левую часть равенства (6.3.3) проинтегрируем по частям. В результате получим

$$\begin{aligned} -(\Delta u,v)_{L_2(\Omega)} + \Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}},v\Big)_{L_2(\partial\Omega)} + (\sigma u,v)_{L_2(\partial\Omega)} = \\ = -(f,v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi,v)_{L_2(\partial\Omega)}, \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

которое выполняется для любой функции $v \in H^1(\Omega)$.

Рассмотрим (6.3.4) для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Тогда из равенства (6.3.4) получим равенство

$$(\Delta u - f, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{6.3.5}$$

для $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Так как множество $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то из (6.3.5) следует уравнение (6.3.1). Таким образом, получили уравнение (6.3.1), которое справедливо для любой точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Так как мы уже имеем уравнение (6.3.1), то из равенства (6.3.4) в связи с (6.3.1) следует равенство

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma u - \varphi, v\Big)_{L_2(\partial\Omega)} = 0 \tag{6.3.6}$$

для любой функции $v \in H^1(\Omega)$. Поскольку множество следов на $\partial\Omega$ множества $H^1(\Omega)$ плотно в $\partial\Omega$, то из (6.3.6) следует и граничное условие (6.3.2). $\otimes$

Теорема 6.3.1. *Если $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ и $\sigma(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$ для $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, то выражение $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to a(u,v) \in \mathbb{R}$ левой части* (6.3.3) *является скалярным произведением элементов множества $H^1(\Omega)$, где норма $\|u\|_{\mathscr{H}^a(\Omega)} = a^{1/2}(u,u)$ эквивалентна норме пространства $H^1(\Omega)$.*

Доказательство теоремы 6.3.1 аналогично доказательству теоремы 6.1.1 и является фактически повторением его в случае пространства $H^1(\Omega)$.

Теорема 6.3.2. *Если $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$, выполняются условия теоремы 6.3.1 относительно функции σ и граница $\partial\Omega$ является кусочно гладкой, то существует единственное обобщенное решение $u \in H^1(\Omega)$ задачи* (6.3.1) – (6.3.2) *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}\big), \tag{6.3.7}$$

где c — некоторая положительная константа.

Доказательство. Правую часть равенства (6.3.1) рассматриваем как линейный функционал $l^{f,\varphi} : H^1(\Omega) \ni v \to -(f,v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi,v)_{L_2(\partial\Omega)} \in \mathbb{R}$, который является непрерывным над пространством

$H^1(\Omega)$ или $\mathscr{H}^a(\Omega)$. Здесь $\mathscr{H}^a(\Omega)$ – гильбертово пространство, которое определяется с помощью векторного пространства $H^1(\Omega)$ и скалярного произведения $(u,v)_{\mathscr{H}^a(\Omega)} = a(u,v)$. Затем на основании теоремы 6.3.1 с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве доказывается существование и единственность обобщенного решения $u \in H^1(\Omega)$ задачи (6.3.1) – (6.3.2) для $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$.

Оценка (6.3.7) следует из равенства (6.3.3), если положить $v = u$, теоремы 6.3.1 и непрерывности функционала $l^{f,\varphi}$. $\otimes$

6.4. Задача Штурма – Лиувилля

Задача Штурма – Лиувилля возникает при отыскании решений граничных задач для эллиптических уравнений, смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений методом Фурье (методом разделения переменных).

Пусть A – эллиптический оператор, коэффициенты которого заданы в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Относительно функции $u : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ рассматриваем уравнение

$$Au + \lambda u = 0 \tag{6.4.1}$$

в области Ω для некоторого числового параметра λ.

Задача Штурма – Лиувилля: найти нетривиальные решения u в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ для некоторых числовых параметров λ, удовлетворяющие на границе $\partial\Omega$ области Ω некоторым граничным условиям.

Те значения λ, для которых существуют нетривиальные решения задачи Штурма – Лиувилля, *называются собственными значениями*, а сами решения $u : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – *собственными функциями*.

6.4.1. Задача Штурма – Лиувилля с условиями Дирихле

Рассмотрим простейшую задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа с однородными условиями Дирихле, т. е. задачу:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.4.2}$$

Для задачи (6.4.2) рассмотрим обобщенные решения (см. п. 6.1).

Определение 6.4.1. Функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ назовем *обобщенным решением задачи Штурма — Лиувилля* (6.4.2), если она удовлетворяет уравнению

$$a(u,v) = (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)} = \lambda(u,v)_{L_2(\Omega)} \tag{6.4.3}$$

для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Согласно теореме 6.1.1 форма $a(u,v)$ в (6.4.3) определяет на $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ скалярное произведение, эквивалентную норму и, следовательно, гильбертово пространство $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega) \cong \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Сформулируем понятие обобщенного решения задачи (6.4.2) в терминах пространства $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$.

Определение 6.4.2. Функцию $u \in \overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$ назовем обобщенным решением задачи (6.4.2), если она удовлетворяет уравнению

$$(u,v)_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)} - \lambda(u,v)_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{6.4.4}$$

для любой функции $v \in \overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$.

Поскольку $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega) \cong \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, то определение 6.4.1 эквивалентно определению 6.4.2.

В силу теоремы 6.1.1 для каждого u скалярное произведение $(u,v)_{L_2(\Omega)} = l^u(v)$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал, определенный на гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$. В силу теоремы Рисса точно как и в лемме 6.2.1 скалярное произведение $(u,v)_{L_2(\Omega)}$ определяет по правилу

$$l^u(v) = (u,v)_{L_2(\Omega)} = (\mathscr{K} u,v)_{\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)}$$

линейный самосопряженный, положительно определенный, вполне непрерывный оператор $\mathscr{K}$, действующий из $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$ в $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$. Следовательно, уравнение (6.4.4) сводится к уравнению второго рода

$$u - \lambda \mathscr{K} u = 0 \tag{6.4.5}$$

с вполне непрерывным оператором $\mathscr{K}$ в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^a(\Omega)$, имеющим обратный оператор $\mathscr{K}^{-1}$.

Свойство 6.4.1. Собственные значения λ уравнения (6.4.5), если они существуют, положительны.

Доказательство. В равенстве (6.4.4) положим $v = u$. В результате этого получим

$$\lambda = \frac{\|u\|^2_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}} \geqslant 0.$$

Покажем, что $\lambda > 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то из равенства (6.4.4) при $v = u$ получим

$$\|u\|_{\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)} = 0,$$

т. е. $u = 0$ в $\mathring{\mathscr{H}}^a(\Omega)$, или $u = 0$ в $\mathring{H}^1(\Omega)$, $\otimes$

Для уравнения (6.4.5) применима теория уравнений с вполне непрерывным оператором. Согласно теореме Гильберта – Шмидта из функционального анализа (см., например, §23 в [42]) сформулируем в виде свойства результат о собственных значениях и собственных функциях (6.4.5) с учетом свойства (6.4.1).

Свойство 6.4.2. Существует счетное множество значений $\lambda^{(k)} > 0$, $(k = 1,2,\ldots)$, $\lambda^{(k)} \to \infty$ при $k \to \infty$ и каждому значению $\lambda^{(k)}$ соответствует не более, чем конечное множество линейно независимых собственных функций.

Каждому собственному значению $\lambda^{(k)}$ с учетом его повторения будем ставить в соответствие одну собственную функцию $u^{(k)}(\boldsymbol{x})$ из числа линейно независимых функций.

Таким образом, для уравнения (6.4.5) или задачи (6.4.2) в смысле обобщенных решений существует с учетом повторения при нумерации счетное множество собственных значений

$$0 < \lambda^{(1)} \leqslant \lambda^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda^{(k)} \leqslant \ldots$$

и последовательность $\mathbb{N} \ni k \to u^{(k)} \in \mathring{H}^1(\Omega)$ линейно независимых собственных функций $u^{(k)} : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u^{(k)}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$. Поскольку множество $\mathring{H}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то множество $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ будет базисом и в $L_2(\Omega)$. Последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ можно проортонормировать в пространстве $L_2(\Omega)$ с помощью его скалярного произведения и нормы.

Свойство 6.4.3. Уравнение (6.4.5) имеет счетное множество собственных значений, а соответствующие собственные функции образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$.

6.4.2. Задача Штурма – Лиувилля с условиями Неймана

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа с условиями Неймана

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.4.6}$$

По схеме параграфа 6.2 введем понятие обобщенного решения задачи (6.4.6)

О п р е д е л е н и е 6.4.3. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (6.4.6), если она удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)} - \lambda(u,v)_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{6.4.7}$$

для любой функции $v \in H^1(\Omega)$.

Если в (6.4.7) положить $v = u$, то опять получим, что собственное значение $\lambda \geqslant 0$. Значение $\lambda^{(0)} = 0$ является собственным значением. Действительно, при $\lambda = 0$ и $v = u$ из (6.4.7) получаем равенство

$$\|\,\mathbf{grad}\, u^{(0)}\|^2_{L_2(\Omega)} = 0,$$

т. е. $u^{(0)} \equiv \mathrm{const}$.

С в о й с т в о 6.4.4. Если собственные значения задачи (6.4.6) существуют, то они неотрицательны.

Рассмотрим уравнение (6.4.7). Его можно записать в виде

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} - (\lambda + 1)(u,v)_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{6.4.8}$$

В силу леммы 6.2.1 из уравнения (6.4.8) следует операторное уравнение

$$u - (\lambda + 1)\mathcal{K}u = 0 \tag{6.4.9}$$

в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega)$. В силу альтернативы Фредгольма и теоремы Гильберта – Шмидта справедливо следующее свойство.

С в о й с т в о 6.4.5. Задача Штурма – Лиувилля (6.4.6) имеет счетное множество значений

$$0 = \lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda^{(k)} \leqslant \ldots,$$

где $\lambda^{(k)} \to \infty$ при $k \to \infty$, а соответствующие собственные функции $u^{(k)}(\boldsymbol{x})$ в совокупности образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$.

6.4.3. Задача Штурма – Лиувилля со смешанными граничным условиями Дирихле и Неймана

Пусть $\partial\Omega = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$, где $\int\limits_{\Gamma^{(i)}} \mathrm{d}s \neq \varnothing$ $(i = 1{,}2)$. Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа со смешанными граничными условиями Дирихле и Неймана

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u|_{\Gamma^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\Gamma^{(2)}} = 0. \tag{6.4.10}$$

Рассмотрим подпространство $H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ пространства $H^1(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют условию Дирихле $u\big|_{\Gamma^{(1)}} = 0$ на части границы $\Gamma^{(1)}$. Если на $H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ рассматривать форму $a(u,v) = (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)}$, то она определяет скалярное произведение.

Теорема 6.4.1. *Отображение* $a : H^1_{гр}(\Omega) \times H^1_{гр}(\Omega) \ni (u,v) \to a(u,v) \in \mathbb{R}$ *определяет скалярное произведение элементов множества* $H^1_{гр}(\Omega)$, *где норма* $\|u\|_{\mathscr{H}^a_{гр}} = a^{1/2}(u,u)$ *эквивалентна норме пространства* $H^1_{гр}(\Omega)$.

Доказательство теоремы 6.4.1 полностью повторяет доказательство теоремы 6.1.1. Здесь достаточно условия $u\big|_{\Gamma^{(1)}} = 0$, где $\int\limits_{\Gamma^{(1)}} \mathrm{d}s \neq \varnothing$, чтобы на множестве $H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ форма $a(u,v)$ определяла скалярное произведение.

Как и в предыдущих случаях для задачи (6.4.10) вводится обобщенное решение через скалярное произведение.

Определение 6.4.4. Функция $u \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ называется *обобщенным решением задачи* (6.4.10), если она удовлетворяет уравнению

$$a(u,v) = (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)} = \lambda(u,v)_{L_2(\Omega)} \tag{6.4.11}$$

для любой функции $v \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$.

Если в (6.4.11) положить $v = u$, то получим, что

$$\lambda = \frac{a(u,u)}{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}} \geqslant 0. \tag{6.4.12}$$

Значение $\lambda = 0$ не является собственным значением. Действительно, при $\lambda = 0$ из уравнения (6.4.11) получаем $\mathbf{grad}\, u = 0$. Отсюда и из того, что $u \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$, следует $u = 0$.

Далее уравнение (6.4.11) в силу леммы 6.2.1 записываем в виде уравнения
$$u - \lambda\mathcal{K}u = 0 \tag{6.4.13}$$
с вполне непрерывным в $\mathscr{H}^a_{\text{гр}}(\Omega)$ оператором $\mathcal{K}$. Для разрешимости задачи на собственные значения и собственные функции уравнения (6.4.13) применяем альтернативу Фредгольма и теорему Гильберта — Шмидта. Отсюда и из (6.4.12) получаем следующее утверждение.

Свойство 6.4.6. Задача Штурма — Лиувилля (6.4.10) имеет счетное число значений
$$0 < \lambda^{(1)} \leqslant \lambda^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda^{(k)} \leqslant \ldots,$$
где $\lambda^{(k)} \to \infty$ при $k \to \infty$, а соответствующие собственные функции $u^{(k)}(\boldsymbol{x})$ в совокупности образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$.

6.4.4. Задача Штурма — Лиувилля с граничными условиями третьего рода

Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля для оператора Лапласса с однородным условием (6.3.2), т. е. задачу
$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma(\boldsymbol{x})u\right)\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.4.14}$$

Как и в предыдущих случаях вместо уравнений (6.4.14) будем рассматривать соответствующее интегральное равенство
$$a(u,v) = (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)_{L_2(\Omega)} + (\sigma u,v)_{L_2(\partial\Omega)} - \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{6.4.15}$$
которое выполняется для любой функции $v \in H^1(\Omega)$.

Определение 6.4.5. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением задачи* (6.4.14), если она удовлетворяет уравнению (6.4.15) для любого элемента $v \in H^1(\Omega)$.

Согласно теореме 6.3.1 форма $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \ni (u,v) \to$ $\to a(u,v) \in \mathbb{R}$ равенства (6.4.15) является скалярным произведением, если функция $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ и носитель supp $\sigma \neq 0$. При этом норма $\|u\|_{\mathscr{H}^a(\Omega)} = a^{1/2}(u,u)$ эквивалентна норме $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ для любой функции $u \in H^1(\Omega)$.

В соответствии с утверждением леммы 6.2.1 уравнение (6.4.15) записывается в виде операторного уравнения

$$u - \lambda\mathcal{K}u = 0 \tag{6.4.16}$$

с вполне непрерывным оператором $\mathcal{K}$, действующим в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}^a(\Omega)$. Затем опять применяем альтернативу Фредгольма и теорему Гильберта – Шмидта для уравнения (6.4.16) и получаем свойство 6.4.6 в случае задачи Штурма – Лиувилля (6.4.15).

6.4.5. Обобщение оператора Лапласа

В заключение данной главы отметим, что вместо оператора Лапласа можно брать более общие эллиптические операторы и рассматривать для них соответствующие задачи. Для примера запишем эллиптическое выражение второго порядка

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + b^{(0)}(\boldsymbol{x})u \tag{6.4.17}$$

в предположении, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant c\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{6.4.18}$$

и $a^{(ij)} = a^{(ji)}$, $i,j = 1,\ldots,n$, где $c > 0$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$. При некоторых ограничениях на коэффициенты оператора A из (6.4.17) справедливы теоремы о разрешимости задач Дирихле, Неймана, Штурма – Лиувилля и других граничных задач в случае эллиптического оператора A вида (6.4.17).

Как отмечено в параграфе 3.7, если уравнение

$$Au = f(\boldsymbol{x}) \tag{6.4.19}$$

задано в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, то для постановки корректных граничных задач к уравнению (6.4.19) присоединяются на $\partial\Omega$ граничные условия, которые запишем в виде одного выражения

$$\left(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{6.4.20}$$

где $\partial u/\partial \boldsymbol{N}$ – производная по конормали и

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big|= \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i\Big|,$$

$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = \big(\nu_1(\boldsymbol{x}),\ldots,\nu_n(\boldsymbol{x})\big)$ – единичный вектор нормали. Если $\sigma^{(0)} \equiv 1$, $\sigma^{(1)} \equiv 0$, то мы имеем задачу Дирихле, при $\sigma^{(0)} \equiv 0$, $\sigma^{(1)} \equiv 1$, – задачу Неймана, при других значениях коэффициентов $\sigma^{(i)}(\boldsymbol{x}), i = 0{,}1$, – граничные задачи с условиями третьего рода и смешанными граничными условиями.

Пусть функции $u{,}v \in C^2(\overline{\Omega})$, коэффициенты $a^{(ij)} \in C^1(\overline{\Omega})$, $a^{(i)}, b^{(0)} \in C(\overline{\Omega})$, $i{,}j = 1,\ldots,n$. Рассмотрим скалярное произведение $(Au{,}v)_{L_2(\Omega)}$. Путем интегрирования по частям, используя формулу Остроградского и уравнение (6.4.19), эту форму можно записать в виде

$$\begin{gathered}(Au{,}v)_{L_2(\Omega)} = \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - \\ - \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x_i} + b^{(0)}u{,}v\Big)_{L_2(\Omega)} = \\ = -a(u{,}v) + \Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}{,}v\Big)_{L_2(\partial\Omega)} = (f{,}v)_{L_2(\Omega)},\end{gathered} \tag{6.4.21}$$

где

$$\begin{gathered}a(u{,}v) = \sum_{i,j=1}^{n}\Big(a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}{,}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{L_2(\Omega)} + \\ +\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x_i} - b^{(0)}u{,}v\Big)_{L_2(\Omega)}.\end{gathered}$$

Обобщенные решения задач (6.4.19) – (6.4.20) вводятся на основе равенства (6.4.21) и граничных условий (6.4.20). Чтобы условия (6.4.20) всегда присутствовали и не вырождались, требуем выполнения условия

$$\big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})\big)^2 + \big(\sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\big)^2 \neq 0 \tag{6.4.22}$$

для всех $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, а $\sigma^{(i)}(i = 0{,}1)$ являются кусочно - гладкими функциями. Граница $\partial\Omega$ представим в виде объединения двух множеств $\Gamma^{(0)}$ и $\Gamma^{(1)}$ $\big(\partial\Omega = \Gamma^{(0)} \cup \Gamma^{(1)}\big)$, где $\Gamma^{(1)} = \operatorname{supp}\ \sigma^{(1)} = \overline{\big\{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega|\ \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}) \neq 0\big\}}$, $\Gamma^{(0)} = \partial\Omega \setminus \Gamma^{(1)}$. Кроме того, предположим, что

$$\big(\sigma^{(1)}\big)^2 \geqslant c^{(1)} > 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma^{(1)}. \tag{6.4.23}$$

После введенных всех этих обозначений равенство (6.4.21) записывается в виде

$$a(u,v) + \Big(\frac{\sigma^{(0)}}{\sigma^{(1)}}\,u,v\Big)_{L_2(\Gamma^{(1)})} = \Big(\frac{\varphi}{\sigma^{(1)}}\,,v\Big)_{L_2(\Gamma^{(1)})} - (f,v)_{L_2(\Omega)}. \qquad (6.4.24)$$

Прежде чем вводить обобщенные решения задач (6.4.19) – (6.4.20) заменой $u = w+\Phi$, граничное условие (6.4.20) сводим к однородному на $\Gamma^{(0)}$, где Φ – функция, которая является продолжением функции $\varphi/\sigma^{(0)}$ с $\Gamma^{(0)}$ на $\overline{\Omega}$.

Обозначим через $C^2_{\text{гр}}(\overline{\Omega})$ подмножество $C^2(\overline{\Omega})$, функции которого обращаются в нуль на $\Gamma^{(0)}$. Обозначим через $H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ подпространство пространства $H^1(\Omega)$, получаемое замыканием множества $C^2_{\text{гр}}(\Omega)$ по норме пространства $H^1(\Omega)$.

Определение 6.4.6. Функция $u \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи (6.4.19) – (6.4.20) в случае $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ на $\Gamma^{(0)}$, если она удовлетворяет уравнению (6.4.24) для любой функции $v \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ для некоторых $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi, \sigma^{(1)} \in L_2(\Gamma^{(1)})$.

Чтобы ответить на вопрос, когда существует обобщенное решение задачи (6.4.19) – (6.4.20) и когда оно единственно, сделаем некоторые оценки в выражениях левой части уравнения (6.4.24).

Форму $a(u,v)$ представим в виде суммы

$$a(u,v) = a^{(0)}(u,v) + a^{(1)}(u,v) - (b^{(0)}u,v)_{L_2(\Omega)},$$

где

$$a^{(0)}(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n}\Big(a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,,\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{L_2(\Omega)},$$

$$a^{(1)}(u,v) = \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,,v\Big)_{L_2(\Omega)}.$$

В силу условия (6.4.18) справедлива оценка снизу

$$a^{(0)}(u,u) \geqslant c\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (6.4.25)$$

для любой функции $u \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$. Используя элементарное неравенство $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + 1/\varepsilon\, b^2$ для формы $a^{(1)}(u,v)$ можно получить оценку сверху

$$|a^{(1)}(u,v)| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{c^{(1)}}{\varepsilon} \|v\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{6.4.26}$$

Теорема 6.4.2. *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi/\sigma^{(1)} \in L_2(\Gamma^{(1)})$, $\sigma^{(0)}\sigma^{(1)} \geqslant 0$. *Тогда, если* $c-\varepsilon > 0$, $b^{(0)}+c^{(1)}/\varepsilon < 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$ *или* $b^{(0)}+c^{(1)}/\varepsilon \leqslant 0$ *и* $\Gamma^{(0)} \neq \oslash$, *существует обобщенное решение* $u \in H^1_{гр}(\Omega)$ *задачи* (6.4.19) – (6.4.20).

Доказательство. В силу неравенств (6.4.18), (6.4.25), (6.4.26) и условий теоремы форма $a(u,v)$ является положительной относительно первых производных функций u,v или относительно функций u,v и их первых производных, является скалярным произведением на множестве $H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ и порождает новое пространство $\mathscr{H}^a(\Omega)$, которое совпадает с $H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ с точностью до эквивалентности норм. Правую часть уравнения (6.4.24) рассматриваем как линейный функционал на $H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ относительно переменных v, который является непрерывным. В силу теоремы Рисса 6.3.1 получаем существование и единственность обобщенного решения задачи (6.4.19) – (6.4.20) при выполнении условий, указанных в теореме. $\otimes$

Если условия $\sigma^{(0)}\sigma^{(1)} \geqslant 0$, $c - \varepsilon > 0$, и $b^{(0)} + c^{(1)}/\varepsilon \leqslant 0$ не выполняются, то поступаем, как и при доказательстве теоремы 6.2.1. Выбираем $\varepsilon > 0$, для которого $c - \varepsilon > 0$. В левую часть уравнения (6.4.24) добавляем и вычитаем выражение $c^{(2)}(u,v)_{L_2(\Omega)}$ с достаточно большой константой $c^{(2)}$, чтобы выражение $c^{(2)} - b^{(0)}(\boldsymbol{x}) - c^{(1)}/\varepsilon$ было больше нуля для всех $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$. Скалярное произведение $(u,v)_{L_2(\Omega)}$ порождает некоторый вполне непрерывный оператор $\mathscr{K}$ в пространстве $H^1_{\text{гр}}$ и $(u,v)_{L_2(\Omega)} = (\mathscr{K} u,v)_{\mathscr{H}^a(\Omega)}$. Выражение $a(u,v) + c^{(2)}(u,v)_{L_2(\Omega)} + (\sigma^{(0)}/\sigma^{(0)}u,v)_{L_2(\Gamma^{(1)})}$ при условии $\sigma^{(0)}\sigma^{(1)} \geqslant 0$ порождает скалярное произведение $(u,v)_{\mathscr{H}^a(\Omega)}$ на множестве $H^1_{\text{гр}}$ и, следовательно, новое пространство $\mathscr{H}^a(\Omega)$. Потом доказывается, что пространства $\mathscr{H}^a(\Omega)$ и $H^1_{\text{гр}}$ совпадают с точностью до эквивалентности норм. В результате приходим к исследованию относительно разрешимости уравнения

$$(u,v)_{\mathscr{H}^a(\Omega)} - c^{(2)}(\mathscr{K} u,v)_{\mathscr{H}^a(\Omega)} = (\mathscr{F},v)_{\mathscr{H}^a(\Omega)}$$

для любой функции $v \in \mathscr{H}^a(\Omega)$ или уравнения

$$u - c^{(2)}\mathscr{K}u = \mathscr{F} \tag{6.4.27}$$

в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}^a(\Omega)$, где элемент $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^a(\Omega)$ и

$$(\mathscr{F},v)_{\mathscr{H}^a(\Omega)} = \left(\frac{\varphi}{\sigma^{(1)}},v\right)_{L_2(\Gamma^{(1)})} - (f,v)_{L_2(\Omega)}.$$

В силу альтернативы Фредгольма уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}$ ортогонально в $\mathscr{H}^a(\Omega)$ всем линейно независимым решениям однородного уравнения (6.4.27). Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6.4.3. *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi/\sigma^{(1)} \in L_2(\Gamma^{(1)})$, $\sigma^{(0)}\sigma^{(1)} \geqslant 0$. *Тогда, если* $c - \varepsilon > 0$, *существует обобщенное решение задачи* (6.4.19) – (6.4.20) *в том и только том случае, когда функции* f *и* φ *удовлетворяют условию*

$$\left(\frac{\varphi}{\sigma^{(1)}},w\right)_{L_2(\Gamma^{(1)})} = (f,w)_{L_2(\Omega)},$$

где w *— решения однородного уравнения*

$$w - c^{(2)}\mathscr{K}w = 0. \tag{6.4.28}$$

Замечание 6.4.1. Если условия $c - \varepsilon > 0$, $b^{(0)} + c^{(1)}/\varepsilon < 0$ теоремы 6.4.2 не выполняются, то это не означает еще, что утверждение теоремы 6.4.2 будет отрицательным. Эти условия являются достаточными. Поэтому возможно, что при не выполнении указанных условий в некоторых случаях существует единственное обобщенное решение задачи (6.4.19) – (6.4.20) для любых $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi \in L_2(\Gamma^{(1)})$. Это утверждение можно получить из теоремы 6.4.3. В этом случае $a(u,v) + \left(\sigma^{(0)}/\sigma^{(1)}u,v\right)_{L_2(\Gamma^{(1)})}$ будет скалярным произведением и уравнение (6.4.28) будет иметь только тривиальное решение.

Задача Штурма – Лиувилля для оператора (6.4.17) рассматривается аналогично.

7. Классические методы в теории эллиптических задач

С помощью названных методов можно получить некоторые новые результаты относительно разрешимости граничных задач для эллиптических уравнений, выписать представления их решений в виде формул. Отсюда возникает теория специальных функций. Методы Грина, Бубнова — Галеркина, специальные функции и другие стали основой развития численных методов решения граничных задач для уравнений с частными производными и в первую очередь — метод конечных элементов. Методы под названием "классические" будут изложены в основном на примерах изучения задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона.

7.1. Метод Фурье

Метод Фурье или метод разделения переменных состоит в том, что решение ищется в виде разложения по системе собственных функций, зависящие от одних независимых переменных, а коэффициенты — от других. Здесь важным моментом является решение соответствующей задачи Штурма — Лиувилля, чтобы получить систему собственных функций. Существенно используется то свойство собственных функций, что они образуют полную систему в рассматриваемом пространстве. Применение метода Фурье зависит от конфигурации области, в которой задается основное уравнение задачи. Поэтому его в общем случае описать не представляется возможным. В связи с этим рассмотрим для уравнения Пуассона конкретные задачи и области, где оно задается.

7.1.1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике

Относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ в прямоугольнике $\Omega = (0,a) \times (0,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a,b > 0$, рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{7.1.1}$$

удовлетворяющей условиям Дирихле

$$\begin{aligned} u\big|_{x_1=0} &= \varphi^{(0)}(x_2), \quad u\big|_{x_1=a} = \varphi^{(1)}(x_2), \\ u\big|_{x_2=0} &= \psi^{(0)}(x_1), \quad u\big|_{x_2=b} = \psi^{(1)}(x_1). \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Если функция u является классическим решением уравнения (7.1.1) и удовлетворяет граничным условиям (7.1.2), то она должна быть в Ω непрерывной и иметь непрерывные производные до второго порядка включительно. Следовательно, должны выполняться условия согласования

$$\begin{aligned} &\varphi^{(0)}(0) = \psi^{(0)}(0), \quad \varphi^{(0)}(b) = \psi^{(1)}(0), \\ &\varphi^{(1)}(b) = \psi^{(1)}(a), \quad \varphi^{(1)}(0) = \psi^{(0)}(a). \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

Предположим, что заданные функции обладают достаточной гладкостью, а именно: $f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)} \in C[0,b]$, $\psi^{(0)}, \psi^{(1)} \in C[0,a]$.

Задача Штурма – Лиувилля в виде обобщенных решений рассматривалась в предыдущей главе. Оттуда видно, что ее решения должны удовлетворять однородным условиям. Эти условия должны быть согласованы с условиями рассматриваемой задачи (7.1.1) – (7.1.2). Будем рассматривать задачу Штурма – Лиувилля по независимой переменной x_2. Вторые два условия из (7.1.2) приведем к однородным путем замены искомой функции u по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}) + \frac{b - x_2}{b}\,\psi^{(0)}(x_1) + \frac{x_2}{b}\,\psi^{(1)}(x_1). \tag{7.1.4}$$

Предположим, что еще $\psi^{(0)}, \psi^{(1)} \in C^2[a,b]$. Тогда новая функция w с учетом условий согласования (7.1.3) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta w = f(\boldsymbol{x}) - \frac{b - x_2}{b}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_1^2}\,\psi^{(0)}(x_1) - \frac{x_2}{b}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_1^2}\,\psi^{(1)}(x_1) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}). \tag{7.1.5}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} w\big|_{x_1=0} &= \varphi^{(0)}(x_2) - \frac{b - x_2}{b}\,\varphi^{(0)}(0) - \frac{x_2}{b}\,\varphi^{(0)}(b) = \tilde{\varphi}^{(0)}(x_2), \\ w\big|_{x_1=a} &= \varphi^{(1)}(x_2) - \frac{b - x_2}{b}\,\varphi^{(1)}(0) - \frac{x_2}{b}\,\varphi^{(1)}(b) = \tilde{\varphi}^{(1)}(x_2), \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

$$w\big|_{x_2=0} = w\big|_{x_2=b} = 0. \tag{7.1.7}$$

Из формул (7.1.6) следует, что $\tilde{\varphi}^{(0)}(0) = \tilde{\varphi}^{(0)}(b) = \tilde{\varphi}^{(1)}(0) = \tilde{\varphi}^{(1)}(b) = 0$.

Решение задачи (7.1.5) – (7.1.7) ищем в виде ряда произведений двух функций от разных независимых переменных

$$w(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)}(x_1)v^{(k)}(x_2). \tag{7.1.8}$$

Вычисляя оператор Лапласа от выражения (7.1.8), получим

$$\Delta w = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^2 T^{(k)}(x_1)}{\mathrm{d}x_1^2}v^{(k)}(x_2) + T^{(k)}(x_1)\frac{\mathrm{d}^2 v^{(k)}(x_2)}{\mathrm{d}x_2^2}\right). \qquad (7.1.9)$$

Потребуем, чтобы для каждого $k = 1,2,\ldots$ функции $v^{(k)}$ удовлетворяли уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^{(k)}(x_2)}{\mathrm{d}x_2^2} + \lambda^{(k)} v^{(k)}(x_2) = 0, \quad x_2 \in (0,b), \qquad (7.1.10)$$

и условиям

$$v^{(k)}(0) = v^{(k)}(b) = 0. \qquad (7.1.11)$$

Граничные условия (7.1.11) для функций $v^{(k)}$ выбраны для того, чтобы функция w вида (7.1.8) удовлетворяла условиям (7.1.7).

Задача (7.1.10) – (7.1.11) и есть задача Штурма – Лиувилля, соответствующая задаче (7.1.5) – (7.1.7). Нетривиальными решениями задачи (7.1.10) – (7.1.11) будут

$$v^{(k)}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{b}}\,\sin\frac{k\pi}{b}x_2 = 0, \quad k = 1,2,\ldots \qquad (7.1.12)$$

для $\lambda^{(k)} = k^2\pi^2/b^2$. Система функций $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, представленная формулами (7.1.12), является ортонормированной, т. е.

$$(v^{(k)}, v^{(l)})_{L_2(0,b)} = \delta_{kl},$$

где δ_{kl} – символ Кронекера, $\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$ и $\delta_{kl} = 1$ при $k = l$. Кроме того, она обладает самым важным свойством, необходимым в методе Фурье, это то, что она является полной (замкнутой) системой функций в $L_2(0,b)$. Данное утверждение следует из теории рядов Фурье [44] и свойства 4.5.3.

Возвращаемся к уравнению (7.1.5). Если функция $\tilde{f}$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, а тем более, если $\tilde{f} \in C(\overline{\Omega})$, то ее можно по системе $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ разложить в ряд Фурье

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}^{(k)}(x_1) v^{(k)}(x_2), \qquad (7.1.13)$$

где коэффициенты Фурье $\tilde{f}^{(k)}$ определяются формулами

$$\tilde{f}^{(k)}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{b}} \int\limits_0^b \tilde{f}(\boldsymbol{x}) \sin \frac{k\pi}{b}\, x_2 \, \mathrm{d}x_2.$$

Точно также функции

$$\tilde{\varphi}^{(i)}(x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}^{(ik)} v^{(k)}(x_2), \tag{7.1.14}$$

где

$$\tilde{\varphi}^{(ik)} = \sqrt{\frac{2}{b}} \int\limits_0^b \tilde{\varphi}^{(i)}(x_2) \sin \frac{k\pi}{b}\, x_2 \, \mathrm{d}x_2, i = 0{,}1, k = 1{,}2, \ldots.$$

Функцию w, представленную рядом (7.1.8), подставляем в (7.1.5). Используя разложение (7.1.13) и уравнение (7.1.10), в результате получим равенство

$$\Delta w = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}^2 T^{(k)}}{\mathrm{d}x_1^2} - \lambda^{(k)} T^{(k)} \right) v^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}^{(k)} v^{(k)}. \tag{7.1.15}$$

Так как система функций $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в $L_2(0{,}b)$ и линейно независимой, то из (7.1.15) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функций $T^{(k)}$ для каждого $k = 1{,}2, \ldots$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 T^{(k)}}{\mathrm{d}x_1^2} - \lambda^{(k)} T^{(k)} \right)(x_1) = \tilde{f}^{(k)}(x_1). \tag{7.1.16}$$

Точно также, подставляя (7.1.8) в (7.1.6), получим для $T^{(k)}$ граничные условия

$$T^{(k)}(0) = \tilde{\varphi}^{(0k)}, \quad T^{(k)}(a) = \tilde{\varphi}^{(1k)}, \quad k = 1{,}2, \ldots. \tag{7.1.17}$$

Таким образом, для определения коэффициентов $T^{(k)}$ разложения w в ряд (7.1.8) получили систему граничных задач (7.1.16) – (7.1.17). Решая эти задачи, получим выражение коэффициентов $T^{(k)}$, которые определяются формулами

$$T^{(k)}(x_1) = a^{(k)} \left(e^{\sqrt{\lambda^{(k)}} x_1} - e^{-\sqrt{\lambda^{(k)}} x_1} \right) + \varphi^{(0k)} e^{-\sqrt{\lambda^{(k)}} x_1} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\lambda^{(k)}}}\int\limits_0^{x_1}\Big(e^{\sqrt{\lambda^{(k)}}(x_1-\tau)}-e^{-\sqrt{\lambda^{(k)}}(x_1-\tau)}\Big)\tilde{f}^{(k)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

где

$$a^{(k)}=\frac{-1}{2\sqrt{\lambda^{(k)}}\Big(e^{\sqrt{\lambda^{(k)}}a}-e^{-\sqrt{\lambda^{(k)}}a}\Big)}\int_0^a\Big(e^{\sqrt{\lambda^{(k)}}(a-\tau)}-e^{-\sqrt{\lambda^{(k)}}(a-\tau)}\Big)\tilde{f}^{(k)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+$$

$$+\frac{\tilde{\varphi}^{(1k)}-\tilde{\varphi}^{(0k)}e^{-\sqrt{\lambda^{(k)}}a}}{e^{\sqrt{\lambda^{(k)}}a}-e^{-\sqrt{\lambda^{(k)}}a}},$$

$\lambda^{(k)}=k\pi/b, k=1{,}2,\ldots.$

Если заданная функция $\tilde{f}\in C(\overline{\Omega})$, то из (7.1.13) и (7.1.15) следует, что она должна удовлетворять граничным условиям

$$\tilde{f}\Big|_{x_2=0}=\tilde{f}\Big|_{x_2=b}=0.$$

Заметим, что для завершения изучения задачи Дирихле (7.1.1) – (7.1.2) необходимо провести обоснование, т. е. доказать сходимость ряда (7.1.8) и рядов, полученных почленным дифференцированием по x_1 и по x_2 до второго порядка включительно.

7.1.2. Задача Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольнике

Здесь в прямоугольнике $\Omega=(0,a)\times(0,b)$ рассматривается уравнение Пуассона (7.1.1) относительно искомой функции $u:\Omega\ni\boldsymbol{x}\to\to u(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}$, удовлетворяющей условию Неймана

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0}=\varphi^{(0)}(x_2), &&\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=a}=\varphi^{(1)}(x_2),\\ &\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=\psi^{(0)}(x_1), &&\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=b}=\psi^{(1)}(x_1).\end{aligned}\qquad(7.1.18)$$

Метод Фурье для задачи (7.1.1), (7.1.18) изложим более кратко по сравнению с задачей Дирихле (7.1.1) – (7.1.2). Условия из (7.1.18), которые будут участвовать в определении задачи Штурма – Лиувилля, сводятся к однородным с помощью замены искомой функции по формуле

$$u(\boldsymbol{x})=w(\boldsymbol{x})-\frac{(b-x_2)^2}{2b}\,\psi^{(0)}(x_1)+\frac{x_2^2}{2b}\,\psi^{(1)}(x_1).\qquad(7.1.19)$$

Относительно функции w получается задача Неймана

$$\begin{gathered}\Delta w = \tilde{f},\\ \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = \tilde{\varphi}^{(0)}(x_2), \quad \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{x_1=a} = \tilde{\varphi}^{(1)}(x_2),\\ \frac{\partial w}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = \frac{\partial w}{\partial x_2}\Big|_{x_2=b} = 0.\end{gathered} \tag{7.1.20}$$

Здесь в задаче (7.1.20) обозначения правой части $\tilde{f}$ уравнения Пуассона, граничных условий $\tilde{\varphi}^{(0)}$ и $\tilde{\varphi}^{(1)}$ определяются через замену (7.1.19).

Решение w задачи (7.1.20) ищем в виде ряда

$$w(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)}(x_1) v^{(k)}(x_2),$$

где собственные функции $v^{(k)}$ определяются из решения соответствующей задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2 v^{(k)}}{\mathrm{d}x_2^2} + \lambda^{(k)} v^{(k)} = 0, \quad x_2 \in [0,b],\\ \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=b} = 0.\end{gathered} \tag{7.1.21}$$

Линейно независимые нетривиальные решения задачи (7.1.21) можно выписать в явном виде и они определяются формулами

$$v^{(k)}(x_2) = \cos\frac{(k-1)\pi}{b}\, x_2, \quad \lambda^{(k)} = \frac{(k-1)^2\pi^2}{b^2}, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Из математического анализа известно, что система $\{\cos\frac{(k-1)\pi}{b}\, x_2\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в $L_2(0,b)$. Для определения коэффициентов $T^{(k)}(x_1)$ получаем уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_1^2} T^{(k)} - \lambda^{(k)} T^{(k)} = \tilde{f}^{(k)}(x_1),$$

граничные условия

$$T^{(k)}(0) = \tilde{\varphi}^{(0k)}, \quad T^{(k)}(a) = \tilde{\varphi}^{(1k)}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где

$$\tilde{f}^{(k)} = \frac{1}{\|v^{(k)}\|^2_{L_2(0,b)}} \big(\tilde{f}, v^{(k)}\big)_{L_2(0,b)}(x_1),$$

$$\tilde{\varphi}^{(ik)} = \frac{1}{\|v^{(k)}\|^2_{L_2(o,b)}} \left(\tilde{\varphi}^{(i)}, v^{(k)}\right)_{L_2(0,b)}(x_1), i = 0,1, k = 1,2\dots.$$

7.1.3. Задача со смешанными условиями для уравнения Пуассона

В прямоугольнике $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ рассматривается уравнение Пуассона (7.1.1) со следующими смешанными условиями и условием согласования

$$\begin{gathered} u\big|_{x_1=0} = \varphi^{(0)}(x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=a} = \varphi^{(1)}(x_2), \\ u\big|_{x_2=0} = \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=b} = 0, \quad \varphi^{(0)}(0) = 0. \end{gathered} \tag{7.1.22}$$

Считаем, что граничные условия, которые используются для нахождения нетривиальных решений задачи Штурма — Лиувилля, приведены с помощью соответствующей замены к однородным. Как и в предыдущих случаях получаем следующую задачу на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}^2 v^{(k)}}{\mathrm{d}x_2^2} + \lambda^{(k)} v^{(k)} = 0, \quad x_2 \in [0,b], \\ v^{(k)}\big|_{x_2=0} = \frac{\mathrm{d}v^{(k)}}{\mathrm{d}x_2}\Big|_{x_2=b} = 0, \ k = 1,2,\dots \end{gathered} \tag{7.1.23}$$

Решениями задачи (7.1.23) будут функции

$$v^{(k)}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{2k-1}{2b} \pi x_2$$

для $\lambda^{(k)} = (2k-1)^2\pi^2/4b^2, k = 1,2,\dots$. Здесь присутствует множитель $\sqrt{2}/\sqrt{b}$ для того, чтобы система функций $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ была ортонормированной. Кроме того, она является и полной в $L_2(0,b)$.

Решение задачи (7.1.22) ищем, поскольку система собственных функций задачи Штурма — Лиувилля (7.1.23) является полной в $L_2(0,b)$, в виде разложения в ряд по этой системе

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)}(x_1) \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{2k-1}{2b} \pi x_2.$$

Для определения коэффициентов $T^{(k)}$ этого разложения получаем для каждого $k \in \mathbb{N}$ граничную задачу

$$\frac{\mathrm{d}^2 T^{(k)}}{\mathrm{d}x_1^2} - \lambda^{(k)} T^{(k)} = f^{(k)}(x_1), T^{(k)}(0) = \varphi^{(0k)}, \quad \frac{\mathrm{d}T^{(k)}}{\mathrm{d}x_1}\Big|_{x_1=a} = \varphi^{(1k)},$$

где $f^{(k)}(x_1), \varphi^{(0k)}$ и $\varphi^{(1k)}$ — коэффициенты рядов Фурье разложений функций f уравнения (7.1.1) и $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$ граничных условий (7.1.22) по полной системе собственных функций $\sqrt{2/b}\sin\big(((2k-1)/2b)\,\pi x_2\big)$.

7.1.4. О граничных задачах для уравнения Пуассона в прямоугольнике с условиями третьего рода

Уравнение Пуассона (7.1.1) рассматривается в прямоугольнике $\Omega = (0{,}a) \times (0{,}b)$. К уравнению присоединяются на $\partial\Omega$ граничные условия, в которых присутствуют условия третьего рода $\big(u + \sigma \partial u/\partial \boldsymbol{\nu}\big)\big|_\Gamma = \varphi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, где Γ вся граница $\partial\Omega$ или ее часть. Если граничные условия являются неоднородными, то они с помощью соответствующей замены искомой функции через новую сводятся к однородным. Граничные условия обязательно сводить к однородным те, которые используются для решения соответствующих задач Штурма — Лиувилля.

Здесь подробно не будем рассматривать разные граничные задачи для уравнения Пуассона (7.1.1) в прямоугольнике с присутствием на границе граничных условий третьего рода. Поскольку схема построения решений в виде разложения по собственным функциям одна и та же, то мы остановимся только на рассмотрении задач Штурма — Лиувилля с разными граничными условиями, возникающими из соответствующих условий рассматриваемых первоначальных граничных задач для уравнения Пуассона.

Как уже известно, общий вид уравнения задачи Штурма — Лиувилля для этих задач есть

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^{(k)}}{\mathrm{d}x_2^2} + \lambda^{(k)} v^{(k)} = 0, \quad x_2 \in [0{,}b]. \tag{7.1.24}$$

Если к уравнению присоединять разного рода граничные условия, то будем получать и разные системы собственных функций и собственных значений. Рассмотрим некоторые из них.

1. $v^{(k)}(0) = 0, \quad \Big(\dfrac{\mathrm{d}v^{(k)}}{\mathrm{d}x_2} + \sigma v^{(k)}\Big)\Big|_{x_2=b} = 0$, где $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$. Здесь собственные значения $\lambda^{(k)}$ определяются из уравнения

$$\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda^{(k)}}b) = -\frac{1}{\sigma}\sqrt{\lambda^{(k)}},$$

где

$$\frac{\pi^2}{b^2}\Big(k - \frac{1}{2}\Big)^2 < \lambda^{(k)} < \frac{\pi^2}{b^2}k^2, \quad k = 1,2,\ldots .$$

Собственные функции $v^{(k)}(x_2) = \sin\sqrt{\lambda^{(k)}}x_2$.

2. $\Big(\dfrac{\mathrm{d}v^{(k)}}{\mathrm{d}x_2} - \sigma^{(0)}v^{(k)}\Big)\Big|_{x_2=0} = \Big(\dfrac{\mathrm{d}v^{(k)}}{\mathrm{d}x_2} + \sigma^{(1)}v^{(k)}\Big)\Big|_{x_2=b} = 0, \sigma^{(i)} \geqslant 0, i = 0,1,$ $\sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} > 0$. Собственные значения $\lambda^{(k)}$ определяются как решения уравнения

$$\mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda^{(k)}}b) = \frac{\lambda^{(k)} - \sigma^{(0)}\sigma^{(1)}}{\sqrt{\lambda^{(k)}}(\sigma^{(0)} + \sigma^{(1)})},$$

$$\frac{\pi^2}{b^2}\big(k - 1\big)^2 < \lambda^{(k)} < \frac{\pi^2}{b^2}k^2, \quad k = 1,2,\ldots .$$

Собственные функции $v^{(k)}(x_2) = \sin\sqrt{\lambda^{(k)}}x_2 + \sqrt{\lambda^{(k)}}/\sigma^{(0)}\cos\lambda^{(k)}x_2$.

7.1.5. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в параллелепипеде

Прежде чем рассматривать задачу Дирихле в параллелепипеде докажем необходимое нам утверждение в виде леммы.

Пусть область Ω в $\mathbb{R}^n$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и область G в $\mathbb{R}^m$ переменных $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. Рассмотрим гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и $L_2(G)$. Предположим, что в $L_2(\Omega)$ задана ортонормированная система $\{X^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ функций $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to X^{(i)}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ и в $L_2(G)$ – ортонормированная система $\{Y^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ функций $\mathbb{R}^m \supset G \ni \boldsymbol{y} \to Y^{(j)}(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$.

Лемма 7.1.1. *Если система $\{X^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой в $L_2(\Omega)$ и система $\{Y^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ – полной ортонормированной в пространстве $L_2(G)$, то система $\{X^{(i)}Y^{(j)}\}_{i,j=1}^{\infty}$ функций $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset \Omega \times G \ni (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \to X^{(i)}(\boldsymbol{x})Y^{(j)}(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ является полной ортонормированной в $L_2(\Omega \times G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что система $\{X^{(i)}Y^{(j)}\}_{i,j=1}^{\infty}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega \times G)$. Рассмотрим для функций $X^{(i)}Y^{(j)}$ и $X^{(k)}Y^{(l)}$ скалярное произведение

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{G} X^{(i)}(\boldsymbol{x})Y^{(j)}(\boldsymbol{y})X^{(k)}(\boldsymbol{x})Y^{(l)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\ = \int\limits_{\Omega} X^{(i)}(\boldsymbol{x})X^{(k)}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int\limits_{G} Y^{(j)}(\boldsymbol{y})Y^{(l)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \delta_{ik}\delta_{jl},\end{gathered} \tag{7.1.25}$$

где δ_{ik} и δ_{jl} – символы Кронекера. Из (7.1.25) следует, что для разных функций $X^{(i)}Y^{(j)}$ и $X^{(k)}Y^{(l)}$, где $i \neq k$, или $j \neq l$, или одновременно $i \neq k, j \neq l$, их скалярное произведение равно нулю и равно единице, если $i = k$ и $j = l$.

Покажем, что система $\{X^{(i)}Y^{(j)}\}_{i,j=1}^{\infty}$ является полной в $L_2(\Omega \times G)$. Пусть функция $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ является ортогональной этой системе, т. е.

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{G} w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})X^{(i)}(\boldsymbol{x})Y^{(j)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0 \tag{7.1.26}$$

для всех $i,j \in \mathbb{N}$. В (7.1.26) кратный интеграл заменяем на повторный

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{G} w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})X^{(i)}(\boldsymbol{x})Y^{(j)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\ \int\limits_{\Omega} X^{(i)}(\boldsymbol{x})\int\limits_{G} w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})Y^{(j)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} w^{(j)}(\boldsymbol{x})X^{(i)}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{gathered} \tag{7.1.27}$$

Здесь функция $w^{(j)} \in L_2(\Omega)$. Это утверждение следует из неравенства

$$\begin{gathered}\|w^{(j)}\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{G} w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})Y^{(j)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\Big)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\Omega}\int\limits_{G} w^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\cdot\int\limits_{G}(Y^{(j)})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int\limits_{\Omega\times G} w^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} < \infty.\end{gathered}$$

Поскольку равенство (7.1.27) выполняется для всех $i \in \mathbb{N}$ и система $\{X^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ является полной в $L_2(\Omega)$, то функции $w^{(j)}$ равны нулю почти всюду в Ω для всех $j \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\int\limits_{G} w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})Y^{(j)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0 \text{ для всех } j \in \mathbb{N}.$$

А так как система $\{Y^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ является полной в $L_2(G)$, то из последнего равенства следует, что $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ почти всюду в $\Omega \times G$. $\otimes$

Уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q, \tag{7.1.28}$$

рассматривается в области $Q \subset \mathbb{R}^3$, представляющей собой параллелепипед $Q = (0,a) \times (0,b) \times (0,d)$ трехмерного евклидова пространства. На границе ∂Q области Q рассмотрим условия Дирихле вида

$$\begin{aligned} &u\big|_{x_1=0} = \varphi^{(0)}(\boldsymbol{x}'), \quad u\big|_{x_1=a} = \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' = (x_2, x_3), \\ &u\big|_{x_2=0} = u\big|_{x_2=b} = u\big|_{x_3=0} = u\big|_{x_3=d} = 0, \\ &\varphi^{(i)}(0, x_3) = \varphi^{(i)}(b, x_3) = \varphi^{(i)}(x_2, 0) = \varphi^{(i)}(x_2,d) = 0,\ i = 0,1. \end{aligned} \tag{7.1.29}$$

В (7.1.29) однородные условия будут участвовать при рассмотрении задачи Штурма – Лиувилля. Если эти условия были бы неоднородными, то с помощью соответствующей замены искомой функции они должны быть сведены к однородной для рассмотрения соответствующей задачи на собственные значения и собственные функции.

Решение задачи (7.1.28) – (7.1.29) ищем в виде разложения в ряд

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)}(x_1) v^{(k)}(\boldsymbol{x}'), \tag{7.1.30}$$

где $v^{(k)}$ – решения задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} &\Delta v^{(k)} + \lambda^{(k)} v^{(k)} = 0, \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega = (0,b) \times (0,d), \\ &v^{(k)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{7.1.31}$$

Нетривиальные решения задачи (7.1.31) ищем также методом Фурье, т. е. в виде произведения sw двух функций s и w, где $s : (0,b) \ni x_2 \to s(x_2) \in \mathbb{R}$, $w : (0,d) \ni x_3 \to w(x_3) \in \mathbb{R}$. Вычислим оператор Лапласа от sw,

$$\Delta sw = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}x_2^2}\, w + s\, \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x_3^2}.$$

Потребуем выполнения дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}x_2^2} + \mu s = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x_3^2} + \theta w = 0 \tag{7.1.32}$$

для того, чтобы функция sw удовлетворяла уравнению

$$\Delta sw + (\mu + \theta) sw = 0.$$

Граничные условия $sw\big|_{\partial\Omega} = 0$ распадается на условия

$$s(0) = s(b) = 0, \quad w(0) = w(d) = 0. \tag{7.1.33}$$

Задачи (7.1.32) – (7.1.33) являются задачами Штурма – Лиувилля, рассмотренными в п. 7.1.1. Здесь собственными ортонормированными функциями являются $s^{(i)}(x_2) = \sqrt{2/b}\sin\frac{\pi i}{b}x_2$ и $w^{(j)}(x_3) = \sqrt{2/d}\sin\frac{\pi j}{d}x_3$ при соответствующих собственных значениях $\mu^{(i)} = i^2\pi^2/b^2$ и $\theta^{(j)} = j^2\pi^2/d^2$, где $i,j \in \mathbb{N}$. Так как система $\{s^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой функций в $L_2(0,b)$, а $\{w^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ – в $L_2(0,d)$, то в силу леммы 7.1.1 система функций $\{s^{(i)}w^{(j)}\}_{i,j=1}^{\infty} = \{\sqrt{2/bd}\sin\frac{\pi i}{b}x_2\sin\frac{\pi j}{d}x_3\}_{i,j=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой функций в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Таким образом, если множество чисел $\{\mu^{(i)}+\theta^{(j)}\}_{i,j=1}^{\infty} = \{\pi^2(i^2/b^2 + j^2/d^2)\}_{i,j=1}^{\infty}$ занумеровать в порядке возрастания и обозначить через $\lambda^{(k)}$, где $0 < \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} \leqslant \ldots$, $\lambda^{(1)} = \pi^2(1/b^2 + 1/d^2)$, $\lambda^{(k)} \in \{\mu^{(i)} + \theta^{(j)}\}_{i,j=1}^{\infty}$, то получим множество собственных значений $\lambda^{(k)}$ и собственных функций $v^{(k)}(x_2,x_3)$, являющихся решениями задачи Штурма – Лиувилля (7.1.31).

Обращаемся к представлению решения u задачи (7.1.28) – (7.1.29) в виде ряда (7.1.30). Подставляя его в уравнения (7.1.28) и условия (7.1.29), разлагая при этом функции f, $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ в ряд Фурье по системе собственных функций $v^{(k)}$, получим для каждого $k \in \mathbb{N}$ граничные задачи дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2T^{(k)}}{\mathrm{d}x_1^2} - \lambda^{(k)}T^{(k)} = f^{(k)}(x_1)$$

и условий

$$T^{(k)}(0) = \varphi^{(0k)}, \quad T^{(k)}(a) = \varphi^{(1k)},$$

$f^{(k)}, \varphi^{(0k)}$ и $\varphi^{(1k)}$ – коэффициенты Фурье функций $f, \varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$.

В заключении этого параграфа и всех предыдущих п. 7.1 хотелось бы отметить, что по этой схеме можно рассматривать без больших изменений граничные задачи для любого n - мерного параллелепипеда пространства $\mathbb{R}^n$ как для условий Дирихле и Неймана, так и для более общих граничных условий разного рода.

7.2. Специальные функции

В параграфе 7.1 рассмотрены методом Фурье простейшие граничные задачи для уравнения Пуассона, заданного в прямоугольнике или параллелепипеде. Но все это были простейшие задачи. Полными системами собственных функций, по которым велось отыскание решения в виде ряда, были системы из тригонометрических функций. Однако при решении других задач математической физики методом Фурье далеко не всегда удается обойтись запасом этих функций. Уже при решении простейших задач хотя бы для уравнения Пуассона, заданного в цилиндрической области, где в основании круг или шар, появляются совсем другие собственные функции под названием специальные. Многие из них достаточно хорошо изучены. Специальные функции встречаются во многих других разделах математической физики. С помощью них построены многие численные методы решения граничных задач и результаты представлены во многие пакеты, используемые при моделировании физических процессов. Поэтому изучение специальных функций представляет интерес со многих точек зрения.

Специальные функции представляют собой решения на собственные значения и собственные функции граничных задач для дифференциальных уравнений. Многие классы из них можно рассматривать как решения линейного дифференциального уравнения второго порядка от одной независимой переменной при соответствующих граничных условиях.

7.2.1. Уравнение теории специальных функций

Относительно функции $v : \mathbb{R} \supset (a,b) \ni x \to v(x) \in \mathbb{R}$ уравнение специальных функций может быть записано в виде

$$\mathscr{L}v \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big) - q(x)v + \lambda\rho(x)v = 0, \quad x \in (a,b), \tag{7.2.1}$$

где $k(x) \geqslant 0$ и $q(x) \geqslant 0$.

В параграфе 7.1 рассмотрены простейшие граничные задачи для уравнения (7.2.1) при $k(x) \equiv 1$, $\rho(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $a = 0$ и граничных условиях $v(0) = v(b) = 0$, или $v'(0) = v'(b) = 0$, или других условиях, которые определяют тригонометрические функции.

В дальнейшем уравнение (7.2.1) будем рассматривать для других более сложных функций k, q и ρ. Здесь коэффициент k может обращаться в нуль. Оказывается, что точка, в которой коэффициент при старшей производной уравнения (7.2.1) вырождается в нуль, является особой.

Пусть в точке a $k(a) = 0$, а для остальных $x \in (a,b)$ $k(x) > 0$. Предположим, что $x = a$ является нулем функции k первого порядка, т. е. существует непрерывная функция $\varphi : [a,b] \ni x \to \varphi(x) \in \mathbb{R}$, что

$$k(x) = (x-a)\varphi(x), \quad \varphi(a) \neq 0. \tag{7.2.2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 7.2.1. *Пусть $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ —два линейно независимые решения уравнения* (7.2.1) *и выполняется условие* (7.2.2). *Если $v^{(1)}(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$, то $v^{(2)}(x)$ обращается в бесконечность при $x = a$.*

Доказательство. Поскольку линейное уравнение (7.2.1) второго порядка, то оно имеет два линейно независимые решения $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$.

Рассмотрим выражение

$$v^{(2)}\mathscr{L}v^{(1)} - v^{(1)}\mathscr{L}v^{(2)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[k\Big(v^{(2)}\frac{\mathrm{d}v^{(1)}}{\mathrm{d}x} - v^{(1)}\frac{\mathrm{d}v^{(2)}}{\mathrm{d}x}\Big)\Big] = 0.$$

Отсюда следует, что определитель Вронского W функций $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ определяется следующим образом:

$$W(x) = \Big(v^{(1)}\frac{\mathrm{d}v^{(2)}}{\mathrm{d}x} - v^{(2)}\frac{\mathrm{d}v^{(1)}}{\mathrm{d}x}\Big)(x) = \frac{C}{k(x)}, \tag{7.2.3}$$

где C — не равная нулю константа при $x > a$.

Из равенства (7.2.3) следует, что функции $v^{(i)}$ $(i = 1,2)$ в некоторой окрестности точки a не равны нулю. Пусть функция $v^{(1)} \neq 0$ для всех $x \in (a, x^{(0)}]$. Тогда из (7.2.3) имеем равенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{v^{(2)}}{v^{(1)}}\Big)(x) = \frac{C}{k(x)\big(v^{(1)}(x)\big)^2},$$

или

$$v^{(2)}(x) = v^{(1)}(x)\Big[\int\limits_{x^{(0)}}^{x} \frac{C}{k(y)\big(v^{(1)}(y)\big)^2}\,\mathrm{d}y + C^{(0)}\Big], a < x \leqslant x^{(0)},$$

где постоянная $C^{(0)}$ зависит от выбора точки $x^{(0)}$.

Предположим, что функция $v^{(1)}$ является конечной в точке $x = a$. Она может быть представлена в виде $v^{(1)} = (x-a)^\alpha w(x)$, где $\alpha \geqslant 0$, w — непрерывная функция и $w(a) \neq 0$). В силу непрерывности w выберем точку $x^{(0)}$ так, чтобы $w(x) \neq 0$ при $x \in (a, x^{(0)}]$. Тогда

$$v^{(2)}(x) = (x-a)^\alpha w(x)\Big\{C^{(0)} - \int\limits_x^{x^{(0)}} \frac{C}{(y-a)^{2\alpha+1}\varphi(y)\big(\omega(y)\big)^2}\,\mathrm{d}y\Big\},$$

$x \in (a, x^{(0)}]$. В силу теоремы о среднем значении

$$v^{(2)}(x) = (x-a)^\alpha w(x)\Big\{C^{(0)} - \frac{C}{\varphi(\tilde{x})\big(\omega(\tilde{x})\big)^2}\int\limits_x^{x^{(0)}} \frac{\mathrm{d}y}{(y-a)^{2\alpha+1}}\Big\}.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$v^{(2)}(x) = (x-a)^\alpha w(x)\Big\{C^{(0)} + \frac{C\big[(x^{(0)}-a)^{-2\alpha} - (x-a)^{-2\alpha}\big]}{2\alpha\varphi(\tilde{x})\big(\omega(\tilde{x})\big)^2}\Big\}, \alpha > 0,$$

или

$$v^{(2)}(x) = v^{(1)}(x)\left[C^{(0)} - \frac{C}{\varphi(\tilde{x})\big(\omega(\tilde{x})\big)^2}\ln\frac{x^{(0)}-a}{x-a}\right],\ \alpha = 0.$$

Отсюда видно, что в обоих случаях, т. е. при $\alpha > 0$ и $\alpha = 0$ $\lim\limits_{x\to a} v^{(2)}(x) = \pm\infty$. $\otimes$

7.2.2. Цилиндрические функции

Уравнение (7.2.1) при значениях $k(x) = x$, $\rho(x) = x/\lambda$, $q(x) = \nu^2/x$ называется *уравнением Бесселя* или *уравнением цилиндрических функций*, т. е. уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big) + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)v = 0. \tag{7.2.4}$$

Любое ненулевое решение уравнения Бесселя (7.2.4) называется *цилиндрической функцией*.

Напомним некоторые свойства гамма - функции Γ, через которые выражаются цилиндрические функции. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $Re\, z > 0$. Тогда

$$\Gamma : \mathbb{C} \ni z \to \Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t.$$

Некоторые свойства гамма - функции:

1. $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. Если $n \in \mathbb{N}$, то $\Gamma(n+1) = n!$.
4. $\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \pi / \sin \pi z$.
5. $\Gamma(z) = \dfrac{1}{e^{i\pi z} - 1} \int\limits_\gamma e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t$, где $t \in \mathbb{C}$, γ — любой контур комплексной плоскости переменных t, обходящий точку $t = 0$ против часовой стрелки и концы которого уходят на бесконечность вдоль положительной вещественной оси. Этот интеграл называется интегралом Римана — Ханкеля. Заметим, что интеграл Римана — Ханкеля определяет функцию Γ на всей комплексной плоскости переменных $z \in \mathbb{C}$ и при $z = -n, n \in \tilde{\mathbb{N}}$, имеет полюсы.

Согласно лемме 7.2.1 уравнение Бесселя (7.2.4) имеет особую точку $x = 0$. Поэтому его решение v можно искать в виде степенного ряда

$$v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^{(m)} x^{\sigma+m}, \tag{7.2.5}$$

где $a^{(0)} \neq 0$, σ — некоторая постоянная и $\sigma \in \mathbb{R}$. Этот метод называется *методом Фробениуса*. В силу линейной независимости степенных функций после подстановки ряда (7.2.5) в уравнение (7.2.4) сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x. В результате будем иметь следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
&x^\sigma : a^{(0)}(\sigma^2 - \nu^2) = 0,\\
&x^{\sigma+1} : a^{(1)}\big[(\sigma+1)^2 - \nu^2\big] = 0,\\
&x^{\sigma+2} : a^{(2)}\big[(\sigma+2)^2 - \nu^2\big] + a^{(0)} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&x^{\sigma+m} : a^{(m)}\big[(\sigma+m)^2 - \nu^2\big] + a^{(m-2)} = 0,\ m = 3{,}4,\dots .
\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Из первых двух уравнений системы (7.2.6) полагаем $\sigma = \pm\nu$, $a^{(1)} = 0$. Продолжая вычисления дальше из рекуррентных соотношений получим, что все нечетные коэффициенты $a^{(m)} = 0$, $m = 1, 3, 5, \dots$.

Рассмотрим отдельно два случая $\sigma = \nu$ и $\sigma = -\nu$.

$\sigma = \nu$. Здесь для четных m коэффициенты $a^{(m)}$ вычисляются по формуле

$$a^{(m)} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} a^{(0)}}{2^m (\frac{m}{2})!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+\frac{m}{2})}.$$

Полагаем $a^{(0)} = 1/2^\nu \Gamma(\nu+1)$. Введем обозначение $m = 2j$. Рассмотрим ряд

$$J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+\nu+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2j+\nu}. \qquad (7.2.7)$$

Степенной ряд, что легко устанавливается по признаку Дирихле, сходится абсолютно для любых $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, он представляет собой функцию и называется *функцией Бесселя* $J_\nu(x)$, которая удовлетворяет уравнению (7.2.4), т. е. является частным его решением.

Функция $J_\nu(x)$, определяемая формулой (7.2.7), является функцией от $x \in \mathbb{R}$. Заменяя x на $z \in \mathbb{C}$ продолжаем $J_\nu(x)$ на комплексную плоскость переменной z с разрезом по отрицательной части вещественной оси, так как в в общем случае ν имеется степени z^ν и точка $z = 0$ является точкой ветвления. Полученная функция $\mathbb{C} \ni z \to J_\nu(z) \in \mathbb{C}$ является аналитической в области $-\pi < arg\, z < \pi$ комплексного переменного z.

Если ν — целое число, то функция $J_\nu(z)$ является в этом случае аналитической на всей комплексной плоскости z.

Возвращаемся к системе (7.2.6). Для четных m вычисляем коэффициенты $a^{(m)}$ с помощью рекуррентных соотношений. Если $m = 2j$, то

$$a^{(2j)} = -\frac{a^{(2j-2)}}{2^2 j(j-\nu)}.$$

Выбирая $a^{(0)} = 1/2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)$, получим ряд, соответствующий $\sigma = -\nu$.

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(j-\nu+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2j-\nu}, \qquad (7.2.8)$$

который называется функцией Бесселя порядка $-\nu$ и обозначаются $J_{-\nu}(x)$.

В формуле (7.2.8) начало суммирования по j зависит от ν. Если функция $\Gamma(j-\nu+1)$ не имеет смысла, то для таких j слагаемые в (7.2.8) отсутствуют. Требуем от j, чтобы $j-\nu+1 > 0$, т. е. $j > \nu - 1$.

Если $\nu \in \mathbb{R}$, но $\nu \notin \widetilde{\mathbb{N}}$, то в этом случае точка $x = 0$ функции Бесселя $J_\nu(x)$ (7.2.7) является нулем, а функции $J_{-\nu}(x)$ (7.2.8) – полюсом. В этом случае функции J_ν и $J_{-\nu}$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя (7.2.4).

Если же $\sigma = -\nu$ и $\nu \in \widetilde{\mathbb{N}}$, $\nu = n$, то суммирование в (7.2.8) фактически начинается с n. Сдвигая в (7.2.8) $j - n$ на j, получим формулу

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+n+1)\Gamma(j+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2j+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Последнее равенство указывает на то, что функции J_n и J_{-n} для $n \in \mathbb{N}$ являются линейно зависимыми и не образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя (7.2.4).

Из цилиндрических функций хорошо изученными являются функции Ханкеля первого рода $H_\nu^{(1)}$ и второго рода $H_\nu^{(2)}$. Их можно определить через рекуррентные интегралы функций комплексного переменного следующим образом:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\gamma^{(1)}} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta} \mathrm{d}\zeta, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ H_\nu^{(2)} &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\gamma^{(2)}} e^{-ix\sin\zeta + i\nu\zeta} \mathrm{d}\zeta, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

где $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, $\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}\zeta_1 + i\mathrm{d}\zeta_2$, $\mathbb{R}^+$ – положительная действительная полуось, контуры интегрирования $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ имеют вид, изображенный на рис. 7.1.

Функции Ханкеля $H_\nu^{(i)}$ $(i = 1{,}2)$ могут быть аналитически продолжены с положительной полуоси x на всю комплексную плоскость $z = x + iy$ с разрезом по отрицательной части $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{R}$ вещественной оси.

Функции Ханкеля для положительного индекса $\nu \in \mathbb{R}^+$ и отрицательного индекса $-\nu \in \mathbb{R}^-$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} H_{-\nu}^{(1)}(x) &= e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(x), \\ H_{-\nu}^{(2)}(x) &= e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x), \end{aligned}$$

Они являются *комплексно - сопряженными* функциями.

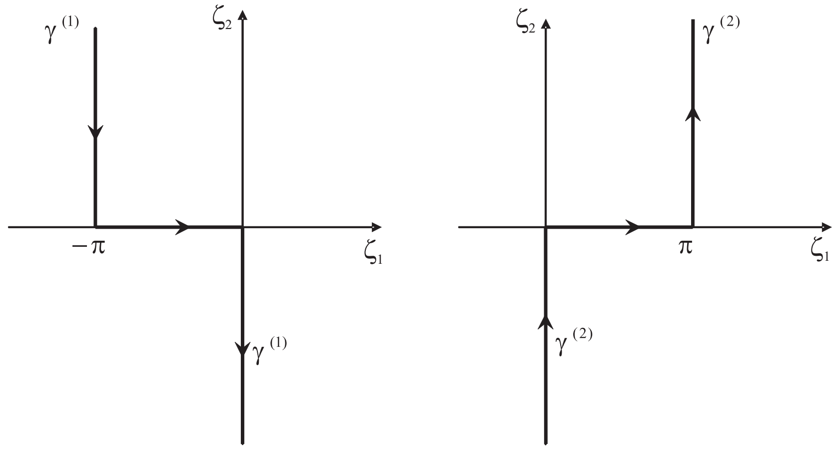

Рис. 7.1

Через функции Ханкеля вводится новая цилиндрическая *функция Неймана* N_ν с помощью формулы

$$N_\nu = \frac{1}{2i}\Big[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\Big], \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{7.2.10}$$

Функции Бесселя, Ханкеля и Неймана взаимосвязаны между собой и справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} &J_\nu(x) = \frac{1}{2}\Big[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\Big], \\ &J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2}\Big[e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x) + e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(x)\Big], \\ &H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ &H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

Все формулы (7.2.11) справедливы и при комплексном аргументе $z = x + iy$ комплексной плоскости z с разрезом по отрицательной части вещественной оси.

Если представленные цилиндрические функции рассмотреть на линейную независимость, то можно доказать, что попарно функции $\{J_\nu, N_\nu\}$ и $\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$ линейно независимы для любого параметра $\nu \in \mathbb{R}^+$ и функции $\{J_\nu, J_{-\nu}\}$ — при нецелых значениях ν.

Изучены некоторые и другие цилиндрические функции (Инфельда, Мокдональда и др.) Рассмотрены асимптотические свойства всех перечисленных цилиндрических функций при $x \to \infty$.

Подробно изложенные доказательства свойств цилиндрических функций следует искать в книгах по специальным функциям. Из приведенного списка литературы доказательства многих свойств специальных функций можно найти в книгах [37], [41].

7.2.3. Полиномы Лежандра

В уравнении специальных функций полагаем $k(x) = 1 - x^2$, $\rho = 1$, $q(x) = 0$, $a = -1$, $b = 1$. При таких значениях коэффициентов k,ρ и q уравнение (7.2.1) запишется в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\big(1 - x^2\big)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big] + \lambda v = 0, \quad x \in [-1{,}1]. \tag{7.2.12}$$

Уравнение (7.2.12) называется *уравнением Лежандра*. Так как коэффициент $k(x) = 1 - x^2$ обращается в нуль при $x = \pm 1$, то (7.2.12) может иметь решения, которые обращаются в бесконечность согласно лемме 7.2.1 в точках $x = \pm 1$. Такие решения исключаем. В результате этого требования появляются дополнительные условия на собственные функции уравнения

$$|v(1)| < \infty, \quad |v(-1)| < \infty. \tag{7.2.13}$$

В силу теоремы Вейерштрасса система полиномов $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ является полной в пространстве непрерывных функций $C[a{,}b]$ или $L_2[a{,}b]$. Поэтому решения задачи Штурма – Лиувилля (7.2.12) – (7.2.13) представляют интерес в виде полиномов. Как и в случае цилиндрических функций решение этой задачи можно искать в виде ряда

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)} x^k. \tag{7.2.14}$$

по степеням x. Далее функцию (7.2.14) следует подставить в уравнение (7.2.12) и получить рекуррентные соотношения для коэффициентов $C^{(k)}$, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменного x. Решения задачи (7.2.12) – (7.2.13) вида (7.2.14) получаются только при $\lambda = n(n + 1), n \in \widetilde{\mathbb{N}}$, и имеют следующий вид

$$v(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n. \tag{7.2.15}$$

Формула (7.2.15) называется *формулой Родрига*, а сами полиномы $P_n(x)$ – *полиномами Лежандра*.

Формулу Родрига (7.2.15) через представление (7.2.14) выводить не будем, а несколько позже получим ее другим путем и, в то же время , докажем дополнительно некоторые свойства для системы $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Решая задачу Штурма – Лиувилля (7.2.12) – (7.2.13) мы преследуем еще цель, чтобы полученная система собственных функций была ортогональной и замкнутой (полной), т. е. любая функция из $C[-1,1]$ или $L_2(-1,1)$ разлагалась по этой системе в ряд Фурье.

Обозначим через p_n полином с постоянными коэффициентами степени n. Это означает следующее: если

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)} x^k,$$

то $p^{(n)} \neq 0$. Предположим, что система $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ полиномов p_n на отрезке $[-1,1]$ является ортогональной, т. е.

$$\int_{-1}^{1} p_n(x) p_m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{если } n \neq m. \tag{7.2.16}$$

Свойство 7.2.1. Если существует система $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ полиномов p_n, удовлетворяющих условию (7.2.16), то подсистема $\{p_k\}_{k=0}^{n}$ является полной относительно множества всех полиномов степени не больше n и для любого полинома q_m степени $m < n$ выполняется равенство

$$\int_{-1}^{1} p_n(x) q_m(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{7.2.17}$$

Доказательство. Системы $\{x^k\}_{k=0}^{n}$ полиномов x^k и $\{p_k\}_{k=0}^{n}$ эквивалентны в том смысле, что любой полином $p_k(x)$ разлагается по степеням x^j и обратно, решая алгебраическую систему, показывается, что $x^k (k \leqslant n)$ можно разложить по системе $\{p_k(x)\}_{k=0}^{n}$ полиномов p_k.

Равенство (7.2.17) следует из того, что полином q_m степени $m < n$ можно разложить по системе полиномов $\{p_k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ и применить равенство (7.2.16). $\otimes$

Теорема 7.2.1. *Каждый полином p_n из системы $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональных полиномов* (7.2.16) *имеет n простых нулей в интервале* $(-1,1)$.

Доказательство. Пусть n — произвольное фиксированное целое положительное число. В силу (7.2.16)

$$\int\limits_{-1}^{1} p_n(x)p_0(x)\,\mathrm{d}x = p_0\int\limits_{-1}^{1} p_n(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{7.2.18}$$

Из (7.2.18) следует, что $p_n(x)$ меняет знак и, следовательно, имеет корни $x^{(1)},\ldots,x^{(k)}$, т. е.

$$p_n(x) = (x - x^{(1)})^{\alpha^{(1)}}\ldots(x - x^{(k)})^{\alpha^{(k)}}\varphi(x),$$

где $\alpha^{(j)} \in \mathbb{N}$, $j = 1,\ldots,k$, φ — полином, который не меняет знак на отрезке $[-1,1]$.

Все степени $\alpha^{(j)} = 1$, $j = 1,\ldots,k$. Действительно, если это не так, то $p_n(x)$ умножим на полином $r_k(x) = (x - x^{(1)})^{\beta^{(1)}}\ldots(x - x^{(k)})^{\beta^{(k)}}$ и проинтегрируем по отрезку $[-1,1]$, где $\alpha^{(j)} + \beta^{(j)}$ — четные числа, $j = 1,\ldots,k$, $\beta^{(j)} \leqslant \alpha^{(j)}$ и $\beta^{(j)} = 0$, если $\alpha^{(j)}$ — четное число, $\beta^{(j)} = 1$, если $\alpha^{(j)}$ — нечетное число. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} p_n(x)r_k(x)\,\mathrm{d}x \neq 0, \tag{7.2.19}$$

что противоречит утверждению свойства 7.2.1. Таким образом, $\alpha^{(j)} = \beta^{(j)} = 1$, $j = 1,\ldots,k$.

Покажем, что $k = n$. Предположим, что $k < n$. Опять рассматриваем скалярное произведение p_n и r_n в $L_2(-1,1)$. В силу свойства 7.2.1

$$\int\limits_{-1}^{1} p_n(x)r_n(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

что противоречит неравенству (7.2.19).

Следовательно $k = n$. ⊗

Рассмотрим производные $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_n(x) = p_n'(x)$ полиномов p_n и систему их $\{p_n'\}_{n=0}^{\infty}$.

Свойство 7.2.2. Система $\{p_n'\}_{n=0}^{\infty}$ является ортогональной на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1 - x^2)$.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение

$$I(p') = \int_{-1}^{1} p'_n(x) p'_m(x)(1-x^2)\,\mathrm{d}x, \quad n \neq m. \tag{7.2.20}$$

Пусть $m < n$. Интегрируя по частям соотношение (7.2.20), запишем его в виде

$$I(p') = -\int_{-1}^{1} p_n(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[p'_m(x)(1-x^2)\Big]\,\mathrm{d}x.$$

Выражение $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[p'_m(x)(1-x^2)\Big]$ представляет собой полином степени m. В силу свойства 7.2.1

$$I(p') = 0.$$

⊗

Замечание 7.2.1. Методом математической индукции можно показать, продолжая дальше свойства 7.2.1, 7.2.2 для производных более высокого порядка, что k - ые производные ортогональных полиномов образуют на отрезке $[-1{,}1]$ систему ортогональных полиномов с весом $\rho^{(k)}(x) = (1-x^2)^k$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} p_n(x) \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} p_m(x) (1-x^2)^k\,\mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m.$$

Функцию $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m)$ разложим по системе $\{p'_k(x)\}_{k=0}^{m}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m) = \sum_{j=0}^{m} a^{(j)} p'_j(x).$$

В силу свойства 7.2.2 для $m < n$ будем иметь равенство

$$\int_{-1}^{1} p'_n(x)(x^m)'(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Интегрируя левую часть последнего равенства по частям, получим

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[p'_n(x)(1-x^2)\Big] x^m\,\mathrm{d}x = 0 \tag{7.2.21}$$

для любого $m < n, m \in \widetilde{\mathbb{N}}$. Введем обозначение

$$q^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[p_n'(x)(1-x^2)\Big] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}p_n(x)(1-x^2) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_n(x).$$

Разложим полином $q^{(n)}(x)$ по системе $\{p_k(x)\}_{k=0}^n$,

$$q^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} b^{(k)} p_k(x).$$

В силу этого разложения и равенства (7.2.21) имеем

$$0 = \int\limits_{-1}^{1} q^{(n)}(x)p_m(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} b^{(k)} \int\limits_{-1}^{1} p_k(x)p_m(x)\,\mathrm{d}x = b^{(m)} \int\limits_{-1}^{1} p_m^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Отсюда получаем $b^{(m)} = 0$ для всех $m = 0,1,\ldots,n-1$. Следовательно $q^{(n)}(x) = b^{(n)}p_n(x)$. Если обозначить $b^{(n)} = -\lambda^{(n)}$, то для p_n получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[p_n'(x)(1-x^2)\Big] + \lambda^{(n)}p_n(x) = 0, \qquad (7.2.22)$$

т. е. уравнение Лежандра (7.2.12).

А теперь функцию $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{m-1}$ для $m < n$ разложим по системе $\left\{\dfrac{\mathrm{d}^2 p_k(x)}{\mathrm{d}x^2}\right\}_{k=0}^{m}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{m-1} = \sum_{j=0}^{m} a^{(j)}\frac{\mathrm{d}^2 p_j(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

В силу замечания 7.2.1 будем иметь равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^2 p_n(x)}{\mathrm{d}x^2}(1-x^2)^2\frac{\mathrm{d}x^{m-1}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = 0$$

для любого $m < n$ и $m \in \mathbb{N}$. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{-1}^{1} q^{(n)}x^{m-1}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad (7.2.23)$$

где

$$q^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^2\frac{\mathrm{d}^2 p_n(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big] = \sum_{k=0}^{n} b^{(k)}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}p_k(x)}{\mathrm{d}x}. \qquad (7.2.24)$$

В силу равенства (7.2.23) и ортогональности полиномов $\mathrm{d}p_k/\mathrm{d}x$ с весом $(1-x^2)$ как и в предыдущем случае получим $b^{(k)} = 0$ для всех $k = 0,1,\dots n-1$. Для $k = n$ имеем $q^{(n)} = b^{(n)}(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}p_n(x)}{\mathrm{d}x}$. Вводя обозначение $\lambda^{(n1)} = -b^{(n)}$, где $b^{(n)}$ из (7.2.24), получим уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^2\frac{\mathrm{d}^2p_n(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big] + \lambda^{(n1)}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}p_n(x)}{\mathrm{d}x} = 0. \qquad (7.2.25)$$

Продолжая эти рассуждения с учетом замечания 7.2.1 можно доказать, что для любого $m = 0,1,\dots,n-1$ выполняется равенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^{m+1}\frac{\mathrm{d}^{m+1}p_n(x)}{\mathrm{d}x^{m+1}}\Big] + \lambda^{(nm)}(1-x^2)^m\frac{\mathrm{d}^m p_n(x)}{\mathrm{d}x^m} = 0. \qquad (7.2.26)$$

для любого ортогонального полинома p_n, $n = 0,1,\dots$, где $\lambda^{(n0)} = \lambda^{(n)}$.

В (7.2.26) приравнивая коэффициенты при старших производных, получим уравнение для $\lambda^{(nm)}$

$$(-1)^{m+1}\big[(2m+2)n(n-1)\dots(n-m)+n(n-1)\dots(n-m)(n-m-1)\big]+$$
$$+(-1)^m\lambda^{(nm)}n(n-1)\dots(n-m+1) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda^{(nm)} = (n-m)\big[2m+2+n-m-1\big] = (n-m)(n+m+1). \qquad (7.2.27)$$

Формула (7.2.26) будет использована для записи полиномов $p_n : \mathbb{R} \supset [-1,1] \ni x \to p_n(x) \in \mathbb{R}$ в явном виде.

Свойство 7.2.3. Элементы p_n системы $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональных полиномов на отрезке $[-1,1]$ степени n являются решениями уравнения Лежандра.

Теорема 7.2.2. *Решениями задачи Штурма – Лиувилля* (7.2.12) – (7.2.13) *являются только ортогональные полиномы на отрезке* $[-1,1]$.

Доказательство. Из свойства 7.2.3 следует, что ортогональные полиномы p_n, $n = 0,1,\dots$, являются решениями уравнения (7.2.12) для некоторых собственных значений $\lambda^{(n)}$ и удовлетворяют условиям (7.2.13).

Докажем, что других линейно независимых решений нет. Действительно, пусть некоторая функция φ для некоторого $\widetilde{\lambda}$ есть решение задачи Штурма – Лиувилля (7.2.12) – (7.2.13), отличная от p_n. Заметим, что $\widetilde{\lambda} \neq \lambda^{(n)}$, $n = 0,1,\ldots$. Действительно, если $\widetilde{\lambda} = \lambda^{(n)}$ для некоторого $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$. Тогда для разности $p_n - \varphi$ будет справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_n - \varphi)\Big] = 0.$$

Интегрируя его легко найти общее решение

$$p_n - \varphi = C \ln \frac{1 + x}{1 - x} + \tilde{C}. \tag{7.2.28}$$

Для разности $p_n - \varphi$ должно также выполняться условие (7.2.13). Из этого условия следует, что в (7.2.28) $C = 0$, т. е. $\varphi = p_n + C$.

Отсюда делаем вывод, если функция φ является решением уравнения (7.2.12) и не принадлежит системе ортогональных полиномов $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, то соответствующее функции φ собственное значение $\widetilde{\lambda}$ не равно ни одному из $\lambda^{(n)}$, $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\lambda^{(n)} \int\limits_{-1}^{1} p_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}x}\Big]\varphi\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1} p_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\Big]\,\mathrm{d}x = \widetilde{\lambda}\int\limits_{-1}^{1} p_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Отсюда следует равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} p_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{7.2.29}$$

т. е. функция φ ортогональна всем полиномам p_n.

Согласно теореме Вейерштрасса система $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полиномов x^n является полной на отрезке $[-1,1]$. Так как система $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ эквивалентны (см. доказательство свойства 7.2.1), то и система $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ также является полной. Следовательно, функцию φ можно разложить в ряд Фурье по этой системе,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)} p_k(x).$$

С другой стороны, в силу равенства (7.2.29)

$$0 = \int_{-1}^{1} p_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)} \int_{-1}^{1} p_n(x)p_k(x)\,\mathrm{d}x = \varphi^{(n)}\|p_n\|^2_{L_2(-1,1)},$$

$n = 0,1,\ldots$. Отсюда следует, что все коэффициенты $\varphi^{(n)}$, $n = 0,1,\ldots$, равны нулю, т. е. $\varphi = 0$. $\otimes$

Собственные значения $\lambda^{(n)}$ задачи Штурма – Лиувилля (7.2.12) – (7.2.13) находятся из формулы (7.2.27) и $\lambda^{(n)} = \lambda^{(n0)} = n(n+1)$.

Теорема 7.2.3. *Полиномы* $p_n(x) = P_n(x)$, *определяемые формулой Родрига* (7.2.15), *являются решением задачи Штурма – Лиувилля* (7.2.12) – (7.2.13) *для* $\lambda = n(n+1)$, $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Согласно теореме 7.2.2 решениями задачи Штурма – Лиувилля (7.2.12) – (7.2.13) являются ортогональные на отрезке $[-1,1]$ полиномы p_n. Согласно только что приведенным рассуждениям установлено, что если p_n являются решениями этой задачи, то собственными значениями будут $\lambda^{(n)} = n(n+1)$.

А теперь найдем явный вид собственных функций p_n. Применяя рекуррентную формулу (7.2.26) относительно производных, находим

$$p_n(x) = \frac{-1}{\lambda^{(n0)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}p_n(x)}{\mathrm{d}x}\Big] = \frac{1}{\lambda^{(n0)}\lambda^{(n1)}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[(1-x^2)^2\frac{\mathrm{d}^2p_n(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big] =$$
$$= \frac{(-1)^m}{A^{(nm)}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\Big[(1-x^2)^m\frac{\mathrm{d}^mp_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\Big] = \frac{}{A^{(nm)}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\Big[(x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^mp_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\Big], \tag{7.2.30}$$

где $A^{(nm)} = \lambda^{(n0)}\ldots\lambda^{(nm-1)} = n(n+1)\ldots(n-m+1)(n+m)$, $m = 1,\ldots,n$. Так как $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}p_n(x) = n!p^{(n)}$, полагаем в формуле (7.2.30) $m = n$. В результате получим

$$p_n(x) = \frac{n!p^{(n)}}{A^{(nn)}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \tag{7.2.31}$$

$p^{(n)}$ – коэффициент полинома $p_n(x)$ при x^n, $A^{(nn)} = 2n!$.

Коэффициенты $p^{(n)}$ полинома $p_n(x)$ выберем таким образом, чтобы система $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ была ортонормированной на отрезке $[-1,1]$. Полином $p_n(x) = p^{(n)}x^n + q^{(n-1)}(x)$, где $q^{(n-1)}(x)$ – полином степени $n-1$.

Тогда

$$\|p_n\|^2_{L_2(-1,1)} = p^{(n)} \int\limits_{-1}^{1} x^n p_n(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} p_n(x) q^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x = p^{(n)} \int\limits_{-1}^{1} x^n p_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Здесь использовано было свойство 7.2.1. Подставляя в это выражение (7.2.31), получим

$$\|p_n\|^2_{L_2(-1,1)} = \left(p^{(n)}\right)^2 \frac{n!}{2n!} \int\limits_{-1}^{1} x^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x.$$

Последний интеграл интегрируем по частям. Тогда

$$\begin{aligned} \|p_n\|^2_{L_2(-1,1)} =& \left(p^{(n)}\right)^2 \frac{n!}{2n!} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[x^n \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\Big]\,\mathrm{d}x - \\ &- \left(p^{(n)}\right)^2 \frac{n!n}{2n!} \int\limits_{-1}^{1} x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = \\ &= -\left(p^{(n)}\right)^2 \frac{n!n}{2n!} \int\limits_{-1}^{1} x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = \\ &= \ldots = (-1)^n \left(p^{(n)}\right)^2 \frac{n!n!}{2n!} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7.2.32}$$

Вычислим интеграл

$$I^{(n)} = \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = x(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - n\int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} 2x^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= -2nI^{(n)} - 2nI^{(n-1)}.$$

Отсюда

$$I^{(n)} = -\frac{2n}{2n+1} I^{(n-1)}.$$

Применяя последнюю формулу n раз рекуррентно для $n-1, n-2$ и т. д., получим

$$I^{(n)} = \frac{(-1)^n 2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3} I^{(0)} = (-1)^n 2 \frac{(2^n)^2 (n!)^2}{(2n+1)!}. \tag{7.2.33}$$

Значения интеграла $I^{(n)}$ из (7.2.33) подставляем в (7.2.32), получим

$$\|p_n\|^2_{L_2(-1,1)} = \left(p^{(n)}\right)^2 \frac{(2^n)^2(n!)^4}{2n!(2n+1)!} \cdot 2 = \left(p^{(n)}\right)^2 \frac{(2^n)^2(n!)^4\,2}{(2n!)^2(2n+1)}.$$

Из последней формулы следует, что если взять

$$p^{(n)} = \frac{(n+1)\ldots 2n}{2^n\,n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}},$$

то система $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ будет ортонормированной и полной на отрезке $[-1,1]$, если же

$$p^{(n)} = \frac{(n+1)\ldots 2n}{2^n\,n!},$$

то из формулы (7.2.31) получим формулу Родрига, т. е.

$$p_n(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

Из (7.2.32) и (7.2.33) следует, что

$$\|P_n\|^2_{L_2(-1,1)} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}.$$

Таким образом, система $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ функций Лежандра P_n, определяемая формулой Родрига (7.2.15), является полной, ортогональной на отрезке $[-1,1]$ системой функций и

$$(P_n, P_m)_{L_2(-1,1)} = \int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases}$$

$\otimes$

Подытоживая все изученные в п.7.2.3 свойства полиномов Лежандра, можно выделить следующее:

- каждый полином Лежандра $P_n(x)$, $n = 1,2\ldots$, имеет ровно n простых нулей, расположенных строго внутри отрезка $[-1,1]$;
- система $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ полиномов Лежандра полна на отрезке $[-1,1]$;
- система полиномов Лежандра на отрезке $[-1,1]$ замкнута;

- система полиномов Лежандра исчерпывает все собственные функции краевой задачи Штурма – Лиувилля (7.2.12) – (7.2.13);
- для системы полиномов Лежандра имеет место теорема разложимости (Стеклова).

Теорема 7.2.4 (Стеклова). *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[-1{,}1]$ *функция* $f : \mathbb{R} \supset [-1{,}1] \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}$ *разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по полиномам Лежандра*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} P_n(x), \tag{7.2.34}$$

где $f^{(n)}$ *– коэффициенты Фурье функции* f *и*

$$f^{(n)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, \mathrm{d}x, \ldots n = 0{,}1, \ldots .$$

Согласно п. 4.5.4, где доказано, что множество C_0^∞ плотно в $L_2(\Omega)$, и согласно теореме Стеклова 7.2.4 или теореме Вейерштрасса, справедливо следующее утверждение, которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 7.2.5. *Всякая функция* $f \in L_2(\Omega)$ *разложима в сходящийся почти всюду ряд по полиномам Лежандра* (7.2.34) *и*

$$\lim_{n^{(0)} \to \infty} \|f - \sum_{n=0}^{n^{(0)}} f^{(n)} P_n\|_{L_2(-1,1)} = 0, \quad n^{(0)} \in \mathbb{N}.$$

Справедливо также и равенство Парсеваля

$$\|f\|^2_{L_2(-1,1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(f^{(n)}\big)^2.$$

7.2.4. Присоединенные функции Лежандра

Присоединенными функциями Лежандра называются функции вида $\mathbb{R} \supset [-1{,}1] \ni x \to P_n^{(m)} \in \mathbb{R}$, где

$$P_n^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_n(x), \tag{7.2.35}$$

P_n — полиномы Лежандра.

Очевидно, при $m > n$ $P_n^{(m)}(x) \equiv 0$, при четных $m \leqslant n$ $P_n^{(m)}$ — полиномы степени n, при нечетных $m \leqslant n$ $P_n^{(m)}$ — иррациональные функции.

Из п.7.2.3 известно, что полиномы $\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_n(x)$ $m = 0,1,\dots,n-1$ являются ортогональными с весом $(1-x^2)^m$ на отрезке $[-1,1]$ и имеют внутри него $n-m$ простых нулей. Из формулы (7.2.35) следует, что эти точки обращают в нуль и присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}$. Кроме того, $P_n^{(m)}$ для $n \in \mathbb{N}$ имеют нули на концах отрезка$[-1,1]$ в точках $x = \pm 1$. При $m = 0$ $P_n^{(0)} = P_n$.

Покажем, что присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}$ удовлетворяют уравнению специальных функций (7.2.1) при $k(x) = (1-x^2)$, $q(x) = m^2/(1-x^2)$, $\rho \equiv 1$, $a = -1$, $b = 1$, $\lambda = n(n+1)$.

Производная первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}P_n^{(m)}}{\mathrm{d}x} = -mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} + (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^{m+1}P_n}{\mathrm{d}x^{m+1}}.$$

Далее,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_n^{(m)}}{\mathrm{d}x}\Big] = m^2x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} -$$

$$-mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^{m+1}P_n}{\mathrm{d}x^{m+1}} - (m+2)x(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^{m+1}P_n}{\mathrm{d}x^{m+1}} +$$

$$+(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1}\frac{\mathrm{d}^{m+2}P_n}{\mathrm{d}x^{m+2}} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\Big[\frac{m^2x^2+mx^2-m}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}\Big] +$$

$$+(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^{m+1}\frac{\mathrm{d}^{m+1}P_n}{\mathrm{d}x^{m+1}}\Big].$$

В силу формулы (7.2.26)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_n^{(m)}}{\mathrm{d}x}\Big] = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{m^2x^2+mx^2-m}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} -$$

$$-(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}(1-x^2)^m(n-m)(n+m+1)\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} = \Big[\frac{m^2}{1-x^2} - n(n+1)\Big]P_n^{(m)},$$

т. е. функции $P_n^{(m)}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_n^{(m)}}{\mathrm{d}x}\Big] + \Big(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)P_n^{(m)} = 0.$$

Таким образом, присоединенные функции $P_n^{(m)}$ для каждого параметра $m = 0,1,\ldots,n$ являются собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_n^{(m)}}{\mathrm{d}x}\Big] + \Big(\lambda^{(n)} - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)P_n^{(m)} = 0. \qquad (7.2.36)$$

$$|P_n^{(m)}(\pm 1)| < \infty. \qquad (7.2.37)$$

Свойство 7.2.4. Присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}$ по индексу n образуют ортогональную систему на отрезке $[-1,1]$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x)P_k^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ \|P_n^{(m)}\|^2_{L_2(-1,1)} \neq 0, & n = k. \end{cases}$$

Доказательство. Ортогональность присоединенных функций Лежандра по нижнему индексу следует из замечания 7.2.1.

Вычислим их норму. Для функции $P_n^{(m)}$

$$\begin{aligned} \|P_n^{(m)}\|^2_{L_2(-1,1)} &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\frac{\mathrm{d}^mP_n}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^mP_n}{\mathrm{d}x^m}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}P_n(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^m\frac{\mathrm{d}^mP_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\Big]\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \qquad (7.2.38)$$

Согласно (7.2.26)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^m\frac{\mathrm{d}^mP_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\Big] = -(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}P_n(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}.$$

Данное выражение подставляем в подынтегральное выражение (7.2.38), получим

$$\|P_n^{(m)}\|^2_{L_2(-1,1)} = (n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}P_n(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\frac{\mathrm{d}^{m-1}P_n(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (n+m)(n-m+1)\|P_n^{(m-1)}\|^2_{L_2(-1,1)}.$$

Интеграл правой части последнего равенства интегрируем опять по частям. После таких m шагов получим равенство

$$\|P_n^{(m)}\|^2_{L_2(-1,1)} = (n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)\ldots$$

$$n(n+1)\|P_n^{(0)}\|^2_{L_2(-1,1)} = \frac{(n+m)!}{n!}\frac{n!}{(n-m)!}\|P_n\|^2_{L_2(-1,1)} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}.$$

$\otimes$

Замечание 7.2.2. (см. [56]). Для присоединенных функций Лежандра справедлива формула ортогональности по верхнему индексу с весом $1/(1-x^2)$:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{(1-x^2)} P_n^{(m)}(x) P_n^{(l)}(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq l.$$

Замечание 7.2.3. По аналогии доказательства сформулированного утверждения в теореме 7.2.2 относительно задачи Штурма – Лиувилля (7.2.12) – (7.2.13) можно показать, что линейно независимых решений задачи Штурма – Лиувилля (7.2.36) – (7.2.37) кроме присоединенных функций Лежандра нет.

Теорема 7.2.6. *Система присоединенных функций Лежандра является замкнутой относительно пространства* $L_2(-1,1)$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы Вейерштрасса относительно полноты полиномов. Здесь любую функцию $f \in L_2(-1,1)$ можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} P_n^{(m)}(x) \tag{7.2.39}$$

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= \frac{1}{\|P_n^{(m)}\|^2_{L_2(-1,1)}} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{(n-m)!(2n+1)}{2(n+m)!} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7.2.40}$$

Из математического анализа известно, что в ряд Фурье можно раскладывать по системе присоединенных функций Лежандра гладкие функции и э то утверждение носит название одной из теорем Стеклова.

Теорема 7.2.7 (Стеклова). *Всякая функция f, дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ и удовлетворяющая граничным условиям $f(-1) = f(1) = 0$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд* (7.2.39) *по присоединенным функциям Лежандра $P_n^{(m)}$ при $m \neq 0$, где коэффициенты Фурье $f^{(n)}$ определяются по формулам* (7.2.40).

7.2.5. Другие специальные функции

1. Полиномы Якоби. Полиномы Якоби являются обобщением полиномов Лежандра. В этом случае уравнение специальных функций (7.2.1) рассматривается при $k(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$, где $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha,\beta > -1$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$. Полиномы Якоби определяются формулой

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\Big]$$

и являются решениями задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{\mathrm{d}P_n^{(\alpha,\beta)}}{\mathrm{d}x}\Big] + \lambda^{(n)}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)},\\
&|P_n^{(\alpha,\beta)}(\pm 1)| < \infty,
\end{aligned}$$

где $x \in (-1,1,)$, $\lambda^{(n)} = n(n+\alpha+\beta+1)$. Полиномы $P_n^{(\alpha,\beta)}$ ортогональны с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_k^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ \|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{L_2(-1,1)} = \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, & n = k, \end{cases}$$

где гамма - функция Γ определена в п. 7.2.2

2. Полиномы Чебышева первого и второго рода. Полиномы Чебышева первого рода определяются через полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}$ при $\alpha = \beta = -1/2$. Они задаются формулой

$$T_n(x) = \frac{n!\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)$$

и

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}T_n(x)T_k(x)=\begin{cases}0, & n\neq k;\\ \frac{\pi}{2}, & n=k\neq 0;\\ \pi, & n=k=0,\end{cases}$$

т. е. полиномы Чебышева T_n образуют ортогональную с весом $1/(1-x^2)^{1/2}$ систему функций на отрезке $[-1,1]$.

Полиномы Чебышева U_n второго рода определяются формулой

$$U_n(x)=\frac{(n+1)!\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x),$$

где $P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ – полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}$ при $\alpha=\beta=1/2$. Между полиномами Чебышева первого и второго рода существует взаимосвязь и

$$U_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_{n+1}(x).$$

Заметим, что полиномы Чебышева широко используются в вычислительной математике, теории аппроксимации функций и других приложениях (см. [36] и другие книги по вычислительной математике и аппроксимации функций).

3. Полиномы Лагерра. Рассматриваем уравнение (7.2.1) для $k(x)=x^{\alpha+1}e^{-x}$, $q(x)\equiv 0$, $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, $a=0, b=\infty$, параметр $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\alpha>-1$. В этом случае получаем задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda x^{\alpha}e^{-x}v(x)=0,\quad 0<x<\infty,\\ |v(0)|<\infty,\ |v(\infty)|<\infty,\ \int\limits_{0}^{\infty}x^{\alpha}e^{-x}v^2(x)\,\mathrm{d}x<\infty.\end{gathered}\tag{7.2.41}$$

Решениями задачи (7.2.41) являются обобщенные полиномы Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right),\tag{7.2.42}$$

которые образуют полную ортогональную с весом $x^{\alpha}e^{-x}$ систему функций на интервале $(0,\infty)$ для собственных значений $\lambda^{(n)}=n$.

При $\alpha=0$ получаем частный случай обобщенных полиномов Лагерра

$$L_n^{(0)}(x)=L_n(x)=\frac{1}{n!}\,e^{x}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n}e^{-x}\right),$$

которые называются полиномами Лагерра. Они также образуют полную ортонормированную с весом e^{-x} систему функций на интервале $(0,\infty)$ при $\lambda^{(n)} = n$,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_k(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{1}{n!k!}\, e^x \,\frac{\mathrm{d}^n(x^n e^{-x})}{\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}^k(x^k e^{-x})}{\mathrm{d}x^k} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ \frac{1}{n!}\,\Gamma(n+1) = 1, & n = k. \end{cases}$$

В приложениях наряду с обобщенными полиномами Лагерра (7.2.42) рассматриваются функции Лагерра

$$l_n^{(\alpha)}(x) = x^{\alpha/2} e^{-x/2} L_n^{(\alpha)}(x), \quad n = 0,1,\ldots, \quad \alpha > -1.$$

Функции Лагерра $l_n^{(\alpha)}$ являются собственными функциями следующей задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[x\frac{\mathrm{d}l^{(\alpha)}(x)}{\mathrm{d}x}\Big] - \Big(\frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x}\Big) l^{(\alpha)}(x) + \lambda l^{(\alpha)}(x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ &|l^{(\alpha)}(0)| < \infty,\ |l^{(\alpha)}(x)| \to 0,\ x \to \infty. \end{aligned} \tag{7.2.43}$$

Уравнение из (7.2.43) получается из (7.2.1) при $k(x) = x$, $q(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{\alpha^2}{4x}$, $\rho(x) \equiv 1$, $a = 0, b = \infty$. Соответствующие собственные значения в (7.2.43)

$$\lambda = n + \frac{\alpha + 1}{2}.$$

Доказывается, что:

- системой функций Лагерра $l_n^{(\alpha)}(x)$, $n = 0.1, \ldots$, исчерпываются все решения задачи Штурма – Лиувилля (7.2.43);
- функции Лагерра квадратично интегрируемы и ортогональны на полупрямой $(0,\infty)$ с весом $\rho(x) = 1$;
- система функций Лагерра является замкнутой относительно пространства $L_2(0,\infty)$ и более гладких функций.

Заметим, что для доказательства полноты системы $\{l_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ функций Лагерра $l_n^{(\alpha)}$, заданных на полупрямой $(0,\infty)$, нельзя уже воспользоваться теоремой Вейерштрасса, справедливой для конечного интервала.

Замечание 7.2.4. Уравнение специальных функций (7.2.41) при $\alpha = 0$ называют еще уравнением Чебышева – Лагерра.

Замечание 7.2.5. Функции Лагерра широко используются в квантовой механике.

4. Полиномы Эрмита. Здесь уравнение (7.2.1) будем рассматривать для функций $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty, b = \infty$, т. е. уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\Big] + \lambda e^{-x^2} v(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{7.2.44}$$

К уравнению (7.2.44) присоединяются условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} v^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \quad v(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0. \tag{7.2.45}$$

Задача (7.2.44) – (7.2.45) имеет собственные значения $\lambda = 2n$ и собственные функции

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\,\frac{\mathrm{d}^n e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^n},$$

которые называются *полиномами Эрмита*.

Система $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ полиномов Эрмита образует ортогональную с весом e^{-x^2} на $\mathbb{R}$ систему функций:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} H_n(x)H_k(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+k}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}^k e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^k}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ \|H_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 2^n n!\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2^n n!\pi^{1/2}, & n = k. \end{cases}$$

Функции

$$h_n(x) = \frac{1}{\|H_n\|_{L_2(\mathbb{R})}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n = 0,1,2\ldots,$$

называются *функциями Эрмита*.

Функции Эрмита являются собственными функциями следующей задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 h(x)}{\mathrm{d}x^2} - x^2 h(x) + \lambda h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &\int\limits_{\mathbb{R}} h^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty. \end{aligned} \tag{7.2.46}$$

Собственными значениями $\lambda^{(n)}$ задачи (7.2.46) являются значения

$$\lambda = \lambda^{(n)} = 2n + 1.$$

Как видно, дифференциальное уравнение задачи (7.2.46) есть уравнение специальных функций (7.2.1) при $k(x) \equiv 1$, $q(x) = x^2$, $\rho(x) \equiv 1$, а $a = -\infty, b = \infty$.

Система $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ функций Эрмита является ортонормированной в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ системой функций:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} h_n(x) h_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\|H_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \|H_k\|_{L_2(\mathbb{R})}} \Big(e^{-x^2} H_m, H_k\Big)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ 1, & n = k. \end{cases}$$

Ортогональность функций Эрмита h_n следует из ортогональности полиномов Эрмита с весом e^{x^2}.

Можно доказать замкнутость и полноту системы функций Эрмита h_n в $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 7.2.8. *Система функций Эрмита $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в подпространстве пространства $L_2(\mathbb{R})$, состоящем из непрерывных функций, заданных на $\mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$\otimes$

Рассмотрим систему полиномов Эрмита $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$. Непосредственно вычисляя, можно выписать первые из них

$$\begin{aligned} &H_0(x) = 1, \\ &H_1(x) = 2x, \\ &H_2(x) = 4x^2 - 2, \\ &H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

С помощью математической индукции можно доказать, что любой полином Эрмита H_n является полиномом степени n и число 2^n является коэффициентом при x^n полинома $H_n(x)$. Отсюда следует: любой полином произвольной степени можно разложить по системе $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ полиномов Эрмита, а значит, и любую функцию из $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ с любой точностью можно аппроксимировать с помощью полиномов Эрмита.

Поскольку система $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональная в $L_2(\mathbb{R})$ с весом e^{x^2}, то функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$ можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} H_n(x),$$

где коэффициенты Фурье

$$f^{(n)} = \frac{1}{2^n\, n!\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$2^n\, n!\sqrt{\pi} = \|H_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Аналогичное утверждение имеет место относительно функций Эрмита.

Теорема 7.2.9. *Система функций Эрмита $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство.

$\otimes$

7.3. Метод Фурье для канонических областей

В п. 7.1 находили методом Фурье решения граничных задач для уравнения Пуассона, заданного в прямоугольнике и параллелепипеде. Решения этих задач выражались через элементарные тригонометрические функции.

В этом параграфе также будут изучаться граничные задачи методом Фурье для уравнения Пуассона, заданного в цилиндрических областях, в основании которых лежит круг, цилиндр, сфера и другие области. При выводе формулы представления решения через собственные функции будут решаться соответствующие задачи Штурма — Лиувилля. Однако здесь они будут более сложными, чем в п. 7.1. В 7.2 изучались разного рода специальные функции, которые непосредственно будут применяться в данном параграфе. Так, задачи Штурма – Лиувилля в случае круга, цилиндра, сферы порождают уравнения, которые приводятся к уравнениям специальных функций. Таким образом, в этом параграфе будет показано, как собственные функции выражаются через специальные функции.

7.3.1. Граничные задачи для уравнения Пуассона в круговом цилиндре

Уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}) \tag{7.3.1}$$

задается в области $Q \in \mathbb{R}$ трех независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$, представляющей собой цилиндр высотой T, у основании которого – круг $\Omega(b)$ радиуса b с центром в начале координат. Пусть x_1 меняется в пределах интервала $(0,T)$, а $\boldsymbol{x}' = (x_2,x_3)$ – в пределах круга $\Omega(b)$. Тогда $Q = (0,T) \times \Omega(b)$.

Наряду с уравнением (7.3.1) задаются граничные условия

$$\begin{aligned} &\Big(\sigma^{(1)}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma^{(2)}u\Big)\Big|_{x_1=0} = \psi^{(0)},\\ &\Big(\sigma^{(3)}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma^{(4)}u\Big)\Big|_{x_1=T} = \psi^{(1)}, \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

$$\Big(\sigma^{(5)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma^{(6)}u\Big)\Big|_{|\boldsymbol{x}'|=b} = 0, \quad x_1 \in (0,T), \tag{7.3.3}$$

где числа $\sigma^{(i)}(i = 1,\dots,6)$ удовлетворяют условию

$$(\sigma^{(i)})^2 + (\sigma^{(i+1)})^2 \neq 0, \quad i = 1,3,5. \tag{7.3.4}$$

ν – единичный вектор внешней относительно Q нормали в точках боковой поверхности $\Gamma = (0,T) \times \partial\Omega(b)$ цилиндра Q.

Для задачи (7.3.1) – (7.3.4) рассматриваем следующую задачу Штурма – Лиувилля:

$$\begin{aligned} &\Delta v + \lambda v = 0,\\ &\Big(\sigma^{(5)}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma^{(6)}v\Big)\Big|_{\partial\Omega(b)} = 0, \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

где v — функция от независимых переменных x_2, x_3. Очевидно, что если $v^{(k)}(\boldsymbol{x}')$ — собственные функции, а их не более чем счетное множество согласно п. 6.4, то решение задачи (7.3.1) – (7.3.4) необходимо искать в виде ряда

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} T^{(k)}(x_1) v^{(k)}(\boldsymbol{x}').$$

Данное представление при этом будет удовлетворять граничному условию (7.3.3).

Рассмотрим сначала задачу (7.3.5). Введем полярную систему координат (r,φ). Это целесообразно сделать потому, что уравнение задачи (7.3.5) задано в круге. В полярной системе координат (r,φ) уравнение $\Delta v + \lambda v = 0$ запишется в виде

$$\Delta w + \lambda w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \lambda w = 0, \tag{7.3.6}$$

где $w(r,\varphi) = v(\boldsymbol{x}')$. В силу однозначности функций v для w появляется условие периодичности

$$w(r,\varphi) = w(r,\varphi + 2\pi) \tag{7.3.7}$$

и условие ограниченности

$$|w(0,\varphi)| < \infty,$$

так как точка $r = 0$ является особой в уравнении (7.3.6). Кроме этого условие (7.3.5) запишется в виде

$$\Big(\sigma^{(5)}\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma^{(6)} w\Big)\Big|_{r=b} = 0. \tag{7.3.8}$$

Как и в случае параллелепипеда, п.7.1, задачу (7.3.6) – (7.3.8) решаем тоже методом Фурье. Функцию $w(r,\varphi)$ ищем в виде произведения двух функций: одной зависящей от r, второй — от φ. Если произведение $w(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ подставить в уравнение (7.3.6), то получим

$$\frac{r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}}{\Phi} = \mu,$$

или уравнения

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) + \lambda r^2 R - \mu R = 0, \quad r \in (0,b), \tag{7.3.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \mu\Phi = 0, \quad \varphi \in [0,2\pi], \tag{7.3.10}$$

с собственными значениями λ и μ. Из условий (7.3.7) – (7.3.8) имеем условия

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \tag{7.3.11}$$

$$\left(\sigma^{(5)}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \sigma^{(6)}R\right)\Big|_{r=b} = 0, \quad |R(0)| < \infty. \tag{7.3.12}$$

Здесь, очевидно, более простой является задача на собственные значения и собственные функции (7.3.10) – (7.3.11). Для этой задачи $\mu^{(k)} = k^2$, $k = 0,1,\ldots$, являются собственными значениями, соответствующие собственным функциями

$$\Phi^{(c,k)}(\varphi) = \cos k\varphi, \quad \Phi^{(s,k)}(\varphi) = \sin k\varphi.$$

При каждом $\mu^{(k)} = k^2$, $k = 0,1,\ldots$, получаем задачу Штурма – Лиувилля (7.3.9) – (7.3.12). В уравнении (7.3.9) делаем замену независимой переменной по формуле $y = r\sqrt{\lambda}$. В результате этой замены уравнение (7.3.9) приводится к уравнению Бесселя k-го порядка

$$y^2\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + y\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}(y^2 - k^2)Y = 0.$$

Как известно (см. п. 7.2), общее решение этого уравнения можно записать через линейно независимые решения – функции Бесселя и Неймана, а именно:

$$Y^{(k)}(y) = c^{(k)}J^{(k)}(y) + d^{(k)}N^{(k)}(y),$$
$$R^{(k)}(r) = c^{(k)}J^{(k)}(\sqrt{\lambda}r) + d^{(k)}N^{(k)}(\sqrt{\lambda}r).$$

Так как $N^{(k)}(\sqrt{\lambda}r)$ стремятся к бесконечности при $r \to 0$, то в силу условия ограниченности из (7.3.12) следует, что $d^{(k)} = 0$, $k = 0,1,\ldots$. Полагаем $c^{(k)} = 1$, $k = 0,1,\ldots$, поскольку собственные функции определяются с точностью до числового множителя.

Таким образом, решения уравнения (7.3.9) для $\mu = k^2$, $k = 0,1,\ldots$, выражаются через функции Бесселя и

$$R^{(k)}(r) = J^{(k)}(\sqrt{\lambda}r).$$

Подставляя $J^{(k)}(\sqrt{\lambda}r)$ в граничное условие (7.3.12), получим уравнение для определения собственных значений λ :

$$\sigma^{(5)}\frac{\mathrm{d}J^{(k)}(\sqrt{\lambda}r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=b}+\sigma^{(6)}J^{(k)}(\sqrt{\lambda}b)=0,$$

или

$$\sigma^{(5)}\sqrt{\lambda}(J^{(k)})'(\sqrt{\lambda}b)+\sigma^{(6)}J^{(k)}(\sqrt{\lambda}b)=0,$$

где штрих обозначает производную функции Бесселя по полному аргументу $y=\sqrt{\lambda}r$.

Пусть $\bar{y}=\sqrt{\lambda}b$. Рассмотрим последнее уравнение в новых обозначениях

$$\sigma^{(5)}\bar{y}(J^{(k)})'(\bar{y})+b\sigma^{(6)}J^{(k)}(\bar{y})=0. \tag{7.3.13}$$

Обозначим через $\bar{y}^{(km)}$ m-ый корень трансцендентного уравнения (7.3.13) при фиксированном $k\in\{0,1,\ldots\}$, которое имеет счетное множество корней. Отсюда решения задачи Штурма – Лиувилля (7.3.9), (7.3.12) будут

$$R^{(km)}(r)=J^{(k)}\Big(\frac{\bar{y}^{(km)}}{b}r\Big),$$

если собственные значения $\lambda=\lambda^{(km)}=(\bar{y}^{(km)})^2/b^2$, где $\bar{y}^{(km)}$ – корни уравнения (7.3.13) для каждого $k=0,1,\ldots$.

Возвращаясь к задаче (7.3.5) будем иметь собственные функции

$$v^{(km)}(\boldsymbol{x}')=w^{(km)}(r,\varphi)=J^{(k)}\Big(\frac{\bar{y}^{(km)}}{b}r\Big)\cdot\begin{cases}\cos k\varphi, & k=0,1,\ldots;\\ \sin k\varphi, & m=1,2\ldots,\end{cases} \tag{7.3.14}$$

где $\bar{y}^{(km)}$ – корни уравнения (7.3.13).

Система функций (7.3.14) является полной и ортогональной с весом r в прямоугольнике $(0,b)\times(0,2\pi)$ относительно независимых переменных r и φ.

Полнота следует из п.6.4, свойств цилиндрических и тригонометрических функций, леммы 7.1.1.

Ортогональность и полнота системы $\{\cos k\varphi,\sin k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ хорошо известна из математического анализа, докажем ортогональность функций $R^{(km)}$ для одинаковых k.

Действительно, пусть $m \neq \tilde{m}$, $\lambda^{(km)} \neq \lambda^{(k\tilde{m})}$ при одних и тех же k. Для соответствующих $R^{(km)}(r)$ и $R^{(k\tilde{m})}(r)$ согласно (7.3.9) имеем дифференциальные уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r\frac{\mathrm{d}R^{(km)}}{\mathrm{d}r}\Big) + \lambda^{(km)} r R^{(km)}(r) - \frac{k^2}{r}R^{(km)}(r) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r\frac{\mathrm{d}R^{(k\tilde{m})}}{\mathrm{d}r}\Big) + \lambda^{(k\tilde{m})} r R^{(k\tilde{m})}(r) - \frac{k^2}{r}R^{(k\tilde{m})}(r) = 0.$$

Умножая соответственно на $R^{(k\tilde{m})}(r)$ и $R^{(km)}(r)$ эти уравнения, а затем вычитая друг из друга полученные соотношения, будем иметь равенства

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big[rR^{(k\tilde{m})}\frac{\mathrm{d}R^{(km)}}{\mathrm{d}r} - rR^{(km)}\frac{\mathrm{d}R^{(k\tilde{m})}}{\mathrm{d}r}\Big] + (\lambda^{(km)} - \lambda^{(k\tilde{m})}) r R^{(km)} R^{(k\tilde{m})} = 0. \tag{7.3.15}$$

Интегрируя (7.3.15) по r от 0 до b, получим

$$\int\limits_0^b rR^{(km)}(r)R^{(k\tilde{m})}(r)\,\mathrm{d}r = 0, \quad m \neq \tilde{m}, \lambda^{(km)} \neq \lambda^{(k\tilde{m})}. \tag{7.3.16}$$

Таким образом, система (7.3.14) является полной и ортогональной с весом r относительно индексов $k = 0,1\ldots,$ $m = 1,2,\ldots,$ и тригонометрических функций $\cos k\varphi \sin k\varphi$, заданная в прямоугольнике $(0,b) \times (0,2\pi)$.

Найдем норму собственных функций (7.3.14)

$$\|w^{(km)}\|^2_{L_2\big((0,b)\times(0,2\pi)\big)} = \int\limits_0^b\int\limits_0^{2\pi}(w^{(km)})^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \Big\|J^{(k)}\Big(\frac{\bar{y}^{(km)}}{b}r\Big)\sqrt{r}\Big\|^2_{L_2(0,b)}\|\Phi^{(k)}\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \|J^{(k)}\|^2_{L_2\big((0,b)\big)}\|\Phi^{(k)}\|^2_{L_2(0,2\pi)}.$$

Норма функций $\Phi^{(k)}$ известна и

$$\|\Phi^{(k)}\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \begin{cases} \pi, & k = 1,2,\ldots; \\ 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

Чтобы вычислить $\|J^{(k)}\|$ сделаем некоторые преобразования для цилиндрических функций. Для любой цилиндрической функции $Z^{(\nu)}(x)$

рассмотрим интеграл

$$I=\int (Z^{(\nu)})^2 x\,\mathrm{d}x=\int \bigl(Z^{(\nu)}(x)\bigr)^2\,\mathrm{d}\bigl(\frac{x^2}{2}\bigr)=\frac{1}{2}x^2\bigl(Z^{(\nu)}\bigr)^2- \\ -\int x^2 Z^{(\nu)}(x)\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x. \tag{7.3.17}$$

Используем уравнение Бесселя

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}Z^{(\nu)}(x)+x\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}(x)}{\mathrm{d}x}+(x^2-k^2)Z^{(\nu)}(x)=0$$

для предыдущего выражения. Из уравнения Бесселя находим

$$x^2Z^{(\nu)}=-x^2\frac{\mathrm{d}^2Z^{(\nu)}}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}(x)}{\mathrm{d}x}+k^2Z^{(\nu)}=-x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(x\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}}{\mathrm{d}x}\bigr)+k^2Z^{(\nu)}.$$

Из последнего выражения и (7.3.17) имеем

$$I=\frac{x^2}{2}\bigl(Z^{(\nu)}\bigr)^2+\int x\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Bigl(x\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}}{\mathrm{d}x}\Bigr)\,\mathrm{d}x-k^2\int Z^{(\nu)}\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x^2}{2}\bigl(Z^{(\nu)}\bigr)^2+\frac{x^2}{2}\Bigl(\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}(x)}{\mathrm{d}x}\Bigr)^2-\frac{k^2}{2}\bigl(Z^{(\nu)}\bigr)^2= \\ =\frac{x^2}{2}\Bigl[\Bigl(\frac{\mathrm{d}Z^{(\nu)}}{\mathrm{d}x}\Bigr)^2(x)+\Bigl(1-\frac{k^2}{x^2}\Bigr)\bigl(Z^{(\nu)}\bigr)^2(x)\Bigr]=\int\bigl(Z^{(\nu)}\bigr)^2x\,\mathrm{d}x. \tag{7.3.18}$$

Полученная формула (7.3.18) позволяет вычислить квадрат нормы функции Бесселя в $L_2(0,b)$ с весом r при наличии соответствующих граничных условий

$$\|J^{(k)}\|=\int\limits_0^b\bigl(J^{(k)}(\sqrt{\lambda}r)\bigr)^2r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{b\sqrt{\lambda}}\bigl(J^{(k)}(\tau)\bigr)^2\tau\,\mathrm{d}\tau= \\ =\frac{b^2}{2}\Bigl[\Bigl(\frac{\mathrm{d}J^{(k)}}{\mathrm{d}\tau}(b\sqrt{\lambda})\Bigr)^2+\Bigl(1-\frac{k^2}{b^2\lambda}\Bigr)\Bigl((J^{(k)}(b\sqrt{\lambda})\Bigr)^2\Bigr]. \tag{7.3.19}$$

Для примера рассмотрим в (7.3.13) условие Дирихле и условие Неймана.

Пример 7.3.1. Условие Дирихле: $\sigma^{(5)} = 0$, $\sigma^{(6)} = 1/b$. Значения $y^{(km)}$ – корни уравнения

$$J^{(k)}(\bar{y}) = 0, \quad \lambda^{(km)} = \frac{(\bar{y}^{(km)})^2}{b^2}.$$

Тогда

$$\|J^{(k)}\|^2 = \int_0^b \left(R^{(km)}\right)^2 r\,\mathrm{d}r = \int_0^b \Big(J^{(k)}\big(\frac{\bar{y}^{(km)}}{b}\,r\big)\Big)^2 r\,\mathrm{d}r = \frac{b^2}{2}\Big(\big(J^{(k)}\big)'(\bar{y}^{(km)})\Big)^2.$$

Пример 7.3.2. Условие Неймана: $\sigma^{(5)} = 1$, $\sigma^{(6)} = 0$. Собственные значения определяются из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}J^{(k)}}{\mathrm{d}\tilde{y}}(\bar{y}) = 0, \quad \lambda^{(km)} = \Big(\frac{\bar{y}^{(km)}}{b}\Big)^2.$$

Следовательно

$$\|J^{(k)}\|^2 = \frac{b^2}{2}\Big(1 - \frac{k^2}{(\bar{y}^{(km)})^2}\Big)\big(\big(J^{(k)}(\bar{y}^{(km)})\big)^2.$$

Возвращаемся к исходной задаче (7.3.1) – (7.3.4). Решение ищем в виде (7.3.6), т. е.

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k,m=0}^{\infty} T^{(km)}(x_1)v^{(km)}(\boldsymbol{x}') = \sum_{k,m=0}^{\infty} T^{(km)}(x_1)w^{(km)}(r,\varphi). \quad (7.3.20)$$

Для этого в уравнении (7.3.1) и условиях (7.3.2) переходим к полярным координатам (r,φ). В результате получим уравнение

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2}\Big)(x_1,r,\varphi) = \tilde{f}(x_1,r,\varphi),\\
&\Big(\sigma^{(1)}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + \sigma^{(2)}\tilde{u}\Big)\Big|_{x_1=0} = \tilde{\psi}^{(0)}(r,\varphi),\\
&\Big(\sigma^{(3)}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + \sigma^{(4)}\tilde{u}\Big)\Big|_{x_1=T} = \tilde{\psi}^{(1)}(r,\varphi),
\end{aligned} \quad (7.3.21)$$

где $\tilde{u}(x_1,r,\varphi) = u(\boldsymbol{x})$, $\tilde{f} = f(\boldsymbol{x})$, $\tilde{\psi}^{(i)} = \psi^{(i)}(\boldsymbol{x}')$, $(i = 1,2)$. Затем в задаче (7.3.21) функции $\tilde{f}$, $\tilde{\psi}^{(i)}$ разлагаем в ряд Фурье по системе $\big\{w^{(km)}\big\}_{\substack{k=0\\m=1}}^{\infty}$

и представление (7.3.20) подставляем в уравнение и условия задачи (7.3.21). При этом следует воспользоваться задачей Штурма — Лиувилля (7.3.5) и последующими результатами для нее. В силу полноты и ортогональности собственных функций $w^{(km)}(r,\varphi)$, $0 < r < b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, получим граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами для определения коэффициентов $T^{(km)}(x_1)$ через коэффициенты Фурье разложений в ряд Фурье функций $\tilde{f}$, $\tilde{\psi}^{(1)}$ и $\tilde{\psi}^{(2)}$.

7.3.2. Сферические функции

В п. 7.2 рассмотрены специальные функции от одного независимого переменного. Они, как мы видели, являются решениями для разных коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения (7.2.1) при наличии особой точки, в которой коэффициент при старшей производной обращается в нуль. Еще вид этих функций зависит от интервала (a,b), на котором задавалось уравнение (7.2.1).

Существуют специальные функции от многих независимых переменных. Определение их зависит от вида задач, решениями которых они являются.

Рассмотрим сферические функции. Эти функции получаются в результате решения задачи Штурма — Лиувилля на единичной сфере $S(0,1)$ с центром в начале координат.

Прежде чем сформулировать эту задачу рассмотрим уравнение Лапласа в шаре радиуса b

$$\Delta u = 0, \quad |\boldsymbol{x}| = \|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^3} \leqslant b. \tag{7.3.22}$$

Здесь u — функция от трех независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$ и $u : \mathbb{R}^3 \supset \Omega(0,b) \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где $\Omega(0,b)$ — шар радиуса b с центром в начале координат. Поскольку уравнение (7.3.22) задано в шаре, то для нахождения его решений предварительно целесообразно оператор Лапласа Δ записать через сферическую систему координат r, θ,φ.

Делаем замену

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$x_3 = r\cos\theta.$$

Тогда уравнение (7.3.22) в сферической системе координат запишется в виде

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial v^2}{\partial\varphi^2} = 0, \quad (7.3.23)$$

где $u(\boldsymbol{x}) = v(r,\theta,\varphi)$, $r \in (0,b)$, $\theta \in (0,\pi)$, $\varphi \in (0,2\pi)$. Решения v уравнения (7.3.23) будем искать в виде произведения $v(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$, где R — функция от одной независимой переменной r, а Y — функция от переменных θ и φ. После подстановки $v = RY$ в уравнение (7.3.23) получим соотношение

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)}{R} = -\frac{\Delta^{(\theta\varphi)}Y}{Y} = \lambda \quad (7.3.24)$$

для любых $r \in (0,b)$, $\theta \in (0,\pi)$, $\varphi \in (0,2\pi)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — числовой параметр,

$$\Delta^{(\theta\varphi)}Y = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Из соотношения (7.3.24) получаем два дифференциальных уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) - \lambda R = 0, \quad (7.3.25)$$

$$\Delta^{(\theta\varphi)}Y = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \quad (7.3.26)$$

Уравнение (7.3.26) имеет особенность при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Поэтому, если искать ограниченные решения (7.3.26), необходимо потребовать условия ограниченности

$$|Y(0,\varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < \infty. \quad (7.3.27)$$

Учитывая однозначность функции v, получим условие периодичности

$$Y(0,\varphi) = Y(\pi,\varphi + 2\pi). \quad (7.3.28)$$

Определение 7.3.1. Нетривиальные решения задачи (7.3.26) – (7.3.28) называются *сферическими функциями*.

Решение задачи (7.3.26) – (7.3.28) будем искать методом Фурье (методом разделения переменных). Пусть Y представимо в виде произведения двух функций $Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Подставляя данное произведение $\Theta\Phi$ в уравнение (7.3.26) и производя разделение переменных, получим

$$\frac{\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big) + \lambda\theta\sin^2\theta\Theta}{\Theta} = -\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = \mu = \mathrm{const}.$$

В результате такой операции получаем два обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Big) + \Big(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\Big)\Theta = 0, \quad \theta\in(0,\pi), \tag{7.3.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \mu\Phi = 0, \quad \varphi\in(0,2\pi). \tag{7.3.30}$$

Из условий (7.3.27) – (7.3.28) имеем условия для функций Φ и Θ

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \tag{7.3.31}$$

$$|\Theta(0)| < \infty, \quad |\Theta(\pi)| < \infty. \tag{7.3.32}$$

Задача (7.3.30) – (7.3.31) имеет линейно независимые нетривиальные периодические решения для $\mu = m^2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$. Поскольку $\cos(-m\varphi) = \cos m\varphi$, $m = 1,2,\ldots$, то условимся, что линейно независимыми решениями задачи (7.3.30) – (7.3.31) являются $\Phi^{(m)}(\varphi)$, где

$$\Phi^{(m)}(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi, & m = 0, -1, -2, \ldots, \\ \sin m\varphi, & m = 1,2,\ldots,. \end{cases}$$

Задачу (7.3.29), (7.3.32) можно свести к ранее изученной в п. п. 7.2.3 – 7.2.4 задаче, если сделать замену $t = \cos\theta$ и ввести обозначения

$\Theta(\theta) = p(t)$. Действительно, $p' = (-\sin\theta)\Theta'$ и уравнение (7.3.29) и условия (7.3.32) через функцию p запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\Big] + \Big(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\Big)p = 0, \\ &|p(\pm 1)| < \infty. \end{aligned} \tag{7.3.33}$$

Задача (7.3.33) есть задача Штурма – Лиувилля для присоединенных функций Лежандра. Согласно п. 7.2.3 и п. 7.2.4 собственные значения этой задачи

$$\lambda = \lambda^{(n)} = n(n+1), \quad n = 0{,}1, \ldots,$$

а собственные функции

$$p(t) = p^{(nm)}(t) = P_n^{(m)}(t), \quad n{,}m = 0{,}1, \ldots, m \leqslant n,$$

т. е. присоединенные функции Лежандра.

Возвращаемся к задаче (7.3.26) – (7.3.28). Решениями ее будут $Y^{(nm)}(\theta{,}\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\Phi^{(m)}(\varphi)$ при $\lambda = \lambda^{(n)} = n(n+1), \quad n = 0, 1, \ldots,$ или

$$Y^{(nm)}(\theta{,}\varphi) = \begin{cases} P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi, & m = 0, -1, \ldots, \\ P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi, & m = 1, \ldots. \end{cases} \tag{7.3.34}$$

Система функций (7.3.34) и есть система сферических функций, заданных на единичной сфере. Заметим, что здесь полагаем $P_n^{(m)}(\cos\theta) = P_n^{(-m)}(\cos\theta)$.

Согласно свойству 7.2.4 и теореме 7.2.6 система присоединенных функций Лежандра $\{P_n^{(m)}(t)\}_{\substack{k=0\\m=0}}^{\infty}$ является ортогональной и полной на интервале $(-1{,}1)$, а система тригонометрических функций $\{\cos m\varphi, \sin m\varphi\}_{m=0}^{\infty}$ – полная и ортогональная система функций на интервале $(0{,}2\pi)$. Тогда в силу леммы 7.1.1 система сферических функций (7.3.34) является полной и ортогональной на единичной сфере $\Sigma : \{0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$. Условие ортогональности означает, что

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^{(nm)}(\theta{,}\varphi)Y^{(\bar{n}\bar{m})}(\theta{,}\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 0,$$

если $n \neq \bar{n}, m \neq \bar{m}$.

Подытоживая выводы, можно сформулировать следующие свойства сферических функций.

Свойство 7.3.1. Система сферических функций, определенная на единичной сфере, является полной.

Заметим, что для каждого n имеется несколько линейно независимых сферических функций, зависящих от m и $-n \leqslant m \leqslant n$.

Свойство 7.3.2. Система сферических функций $Y^{(nm)}(\theta,\varphi) = \{P_n^{(m)}(\cos\theta)\Phi^{(m)}(\varphi)\}_{n=0,m=-n}^{\infty,m=n}$ исчерпывает все собственные функции задачи Штурма – Лиувилля (7.3.26) – (7.3.28) и каждому собственному значению $\lambda^{(n)} = n(n+1)$ соответствует $2n+1$ линейно независимых собственных функций.

Теорема 7.3.1. *Всякая функция $f(\theta,\varphi)$, дважды непрерывно дифференцируемая на единичной сфере, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям*

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f^{(nm)}Y^{(nm)}(\theta,\varphi),$$

где коэффициенты Фурье

$$f^{(nm)} = \frac{1}{\|Y^{(nm)}\|^2_{L_2(\Sigma)}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)Y^{(nm)}(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\|Y^{(nm)}\|^2_{L_2(\Sigma)} = \int_0^{\pi}\sin\theta\big(P_n^{(m)}(\cos\theta)\big)^2\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\sin^2 m\varphi\\ \cos^2 m\varphi\end{array}\right\}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \begin{cases}\pi\frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, & n = 0,1,\ldots, m = 1,\ldots,\\ 2\pi\frac{2}{2n+1}, & n = 0,1\ldots, m = 0.\end{cases}$$

Имеет место аналогичная теорема для функций $f \in L_2(\Sigma)$.

7.3.3. Шаровые функции

Вернемся к уравнению (7.3.22), заданного в шаре $|x| < b$. В п. 7.3.2 мы начали отыскивать его решения методом Фурье. В результате получили задачу Штурма – Лиувилля (7.3.26) – (7.3.28) и уравнение (7.3.25).

Решениями, как уже известно, задачи (7.3.26) – (7.3.28) являются сферические функции $Y^{(nm)}$, если собственные значения $\lambda = \lambda^{(n)} =$

$= n(n+1)$ для $n = 0,1,\ldots$. Для этих же λ рассмотрим уравнения (7.3.25), т. е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) - n(n+1)R = 0. \tag{7.3.35}$$

Уравнение (7.3.35) называется уравнением Эйлера и его решения ищем в виде

$$R(r) = r^{\alpha}. \tag{7.3.36}$$

Подставляя (7.3.36) в уравнение (7.3.35), получим для α уравнение

$$\alpha(\alpha+1) = n(n+1).$$

Решая его, получим два значения $\alpha = n$ и $\alpha = -n-1$.

Таким образом, для уравнения (7.3.22) имеем два семейства линейно независимых решений:

$$\big\{r^n Y^{(nm)}(\theta,\varphi)\big\}_{n=0,\ m=-n}^{\infty\ m=n}, \quad \Big\{\frac{1}{r^{n+1}} Y^{(nm)}(\theta,\varphi)\Big\}_{n=0,\ m=-n}^{\infty\ m=n}. \tag{7.3.37}$$

Определение 7.3.2. Функции из семейств (7.3.37), определяемые с помощью сферических функций и являющиеся решениями уравнения Лапласа (7.3.22), называются *шаровыми функциями*.

Определение 7.3.3. Функция $u : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ называются *гармонической* в некоторой ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, если она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0$$

в Ω и в случае неограниченной области Ω $u(\boldsymbol{x}) \to 0$ при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ порядка $1/|\boldsymbol{x}|$ и является решением уравнения Лапласа.

Для нахождения гармонических функций внутри шара $\Omega(0,b)$ конечного радиуса b, удовлетворяющих на сфере $S(0,b) = \partial\Omega(0,b)$ условиям Дирихле, Неймана и другим условиям ищем их в виде разложения в ряд по первой системе шаровых функций, т. е.

$$u(\boldsymbol{x}) = v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} c^{(nm)} r^n Y^{(nm)}, \tag{7.3.38}$$

удовлетворяющих условию Дирихле

$$v|_{r=b} = f(\theta,\varphi), \tag{7.3.39}$$

или условию Неймана

$$\frac{\partial v}{\partial r}\bigg|_{r=b} = g(\theta,\varphi) \tag{7.3.40}$$

и т. д. Таким образом, с помощью ряда (7.3.38) можно найти решение задачи Дирихле (7.3.22), (7.3.39), задачи Неймана (7.3.22), (7.3.40) и других задач.

Для примера рассмотрим задачу Дирихле (7.3.22), (7.3.39). Функцию $f(\theta,\varphi)$, если она достаточно гладкая, разлагаем в ряд Фурье по полной системе сферических функций $Y^{(nm)}$,

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n,m} f^{(nm)} Y^{(nm)}, \tag{7.3.41}$$

где $f^{(nm)}$ – коэффициенты Фурье. Подставляя (7.3.38) в условие (7.3.39), используя при этом разложение (7.3.41), получим

$$c^{(nm)} = \frac{f^{(nm)}}{b^n}.$$

Подставляя значения коэффициентов $c^{(nm)}$ в (7.3.38), получим решение задачи Дирихле (7.3.22), (7.3.39) в виде следующего ряда

$$u(\boldsymbol{x}) = v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} f^{(nm)} \left(\frac{r}{b}\right)^n Y^{(nm)}.$$

Если уравнение (7.3.22) задано в дополнении $C\Omega(0,b) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega(0,b)}$ к шару $\Omega(0,b)$ и, например, условие Дирихле на сфере (7.3.10), то такая задача называется внешней относительно шара $\Omega(0,b)$ задачей Дирихле. В этом случае гармоническую функцию следует искать в виде разложения по второй системе шаровых функций

$$u(\boldsymbol{x}) = v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} d^{(nm)} \frac{1}{r^n} Y^{(nm)}. \tag{7.3.42}$$

Для определения коэффициентов $d^{(nm)}$ (7.3.42) подставляем в условие (7.3.39), используя разложение в ряд (7.3.41). В результате получим решение

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} f^{(nm)} \left(\frac{b}{r}\right)^n Y^{(nm)}, \quad \boldsymbol{x} \in C\Omega(0,b),$$

задачи (7.3.22), (7.3.39) для внешней задачи Дирихле.

Если надо найти гармоническую функцию между двумя концентрическими сферами, т. е. в области $\Omega = \Omega(0,b)\backslash\overline{\Omega(0,a)}$, где радиус b больше радиуса $a > 0$, то здесь следует искать решение в виде разложения по обеим системам шаровых функций,

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big(c^{(nm)} r^n + \frac{d^{(nm)}}{r^n} \Big) Y^{(nm)}.$$

Для определения коэффициентов $c^{(nm)}$ и $d^{(nm)}$ используются граничные условия, заданные на обеих сферах радиусов a и b.

7.3.4. Задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в шаре

Здесь задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа отыскания собственных значений и собственных функций, определенных в шаре $\Omega(0,b) \subset \mathbb{R}^3$, будем рассматривать без привязки к конкретной задачи для эллиптических уравнений, хотя таких примеров много. Результат этой задачи будем использовать при решении методом Фурье смешанных задач для нестационарных уравнений.

Постановка рассматриваемой задачи следующая: найти не тождественно равные нулю в шаре радиуса b с центром в начале координат функции $v : \mathbb{R}^3 \supset \Omega(0,b) \ni \boldsymbol{x} \to v(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ и собственные значения λ, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega(0,b), \tag{7.3.43}$$

и однородным граничным условиям

$$\Big(\sigma^{(1)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma^{(0)} u \Big)\Big|_{\partial\Omega(0,b)} = 0. \tag{7.3.44}$$

Для замены независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$ вводим сферическую систему координат

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ x_2 &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ x_3 &= r \cos\theta, \end{aligned} \tag{7.3.45}$$

где $r \in (0,b)$, $\theta \in (0,\pi)$, $\varphi \in (0,2\pi)$.Для функции $u(\boldsymbol{x}) = v(r,\theta,\varphi)$ задача Штурма – Лиувилля (7.3.43) – (7.3.44) через новые независимые переменные (7.3.45) записывается в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0, \quad (7.3.46)$$

$$\begin{gathered}\Big(\sigma^{(1)}\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}} + \sigma^{(0)}v\Big)\Big|_{r=b} = 0, \quad |v(0,\theta,\varphi)| < \infty,\\ |v(r,0,\varphi)| < \infty,\ |v(r,\pi,\varphi)| < \infty,\ v(r,\theta,\varphi) = v(r,\theta,\varphi+2\pi).\end{gathered} \quad (7.3.47)$$

Как и раньше, решение уравнения (7.3.46) ищем в виде произведения $v = R(r)Y(\theta,\varphi)$. В результате деления переменных получаем два дифференциальные уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big) + \lambda r^2 R - \mu R = 0, \quad \boldsymbol{x} \in (0,b), \quad (7.3.48)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \mu Y = 0, \quad (7.3.49)$$

где $(\theta,\varphi) \in (0,\pi)\times[0,2\pi]$, и условия

$$\Big(\sigma^{(0)}R + \sigma^{(1)}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\Big)\Big|_{r=b} = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad (7.3.50)$$

$$|Y(0,\varphi)| < \infty,\ |Y(\pi,\varphi)| < \infty,\ Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi). \quad (7.3.51)$$

Задача Штурма – Лиувилля (7.3.49), (7.3.51) является задачей нахождения сферических функций $Y^{(nm)}$ (см п. 7.3.2), если собственные значения $\mu = = \mu^{(n)} = n(n+1)$, $n = 0,1,\ldots$, $m = 0,\pm 1,\ldots,\pm n$.

Для каждого числа $\mu^{(n)} = n(n+1)$ имеем задачу Штурма – Лиувилля (7.3.48), (7.3.50). Уравнение (7.3.48) преобразуем к уравнению Бесселя. Делаем замену независимой переменной $\sqrt{r}R(r) = \rho(r)$. Тогда для функции ρ получаем уравнение

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r} + \lambda r^2\rho - \Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2\rho = 0,$$

или

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\Big) + \Big[\lambda - \frac{1}{r^2}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2\Big]\rho = 0.$$

Теперь еще раз делаем замену $\sqrt{\lambda}r = z$. Тогда для функции $Z(z) = \rho(r)$ получаем уравнение Бесселя

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big(z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\Big) + \Big[1 - \frac{1}{z^2}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2\Big]Z = 0. \qquad (7.3.52)$$

Общее решение уравнения (7.3.52), как известно, можно записать через функции Бесселя и Неймана,

$$Z(z) = c^{(1)}J_{n+\frac{1}{2}}(z) + c^{(2)}N_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

Так как $N_{n+\frac{1}{2}}(0) = \infty$, то в силу второго условия из (7.3.50) получаем $c^{(2)} = 0$, а $c^{(1)} = 1$. Таким образом,

$$R(r) = \frac{\rho(r)}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}}\,Z(z) = \frac{1}{\sqrt{r}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{r}}\,J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r) - \frac{1}{r^{3/2}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$

Собственные значения $\lambda^{(k)}$ находим из первого условия из (7.3.50), т. е. из уравнения

$$\Big(\sigma^{(0)} - \frac{\sigma^{(1)}}{2b}\Big)J_{n+\frac{1}{2}}(\tau) + \sigma^{(1)}\sqrt{\lambda}\,J'_{n+\frac{1}{2}}(\tau) = 0, \quad \tau = \sqrt{\lambda}b. \qquad (7.3.53)$$

Обозначим через $\tau^{(kn)}$, $k = 1{,}2,\ldots$, корни уравнения (7.3.53), где $J'_{n+1/2}$ — производная первого порядка функции $J_{n+1/2}$. Тогда собственные функции задачи (7.3.48), (7.3.50) будут

$$R^{(kn)}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\,J_{n+\frac{1}{2}}\Big(\frac{\tau^{(kn)}}{b}r\Big),$$

а собственные функции задачи (7.3.43) – (7.3.44)

$$u^{(knm)}(\boldsymbol{x}) = v^{(knm)}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\,J_{n+\frac{1}{2}}\Big(\frac{\tau^{(kn)}}{b}r\Big)Y^{(nm)}(\theta,\varphi), \qquad (7.3.54)$$

$k = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, \ldots, m = 0, \pm1, \ldots, \pm n$, а собственные значения

$$\lambda^{(kn)} = \Big(\frac{\tau^{(kn)}}{b}\Big)^2,$$

где $\tau^{(kn)}$ – корни уравнения (7.3.53).

Так как система сферических функций $\big\{Y^{(nm)}(\theta,\varphi)\big\}_{n=0,m=-n}^{\infty\,m=n}$ является ортогональной по n и m с весом $\sin\theta$ (см. п. 7.3.2), то из формулы (7.3.54) следует, что для каждого собственного числа $\lambda^{(kn)}$ соответствует $2n+1$ собственных функций $u^{(knm)}$ задачи Штурма – Лиувилля (7.3.43) – (7.3.44).

Найдем норму собственных функций в $L_2\big(\Omega(0,b)\big)$.

$$\begin{aligned}
&\|u^{(knm)}\|_{L_2\left(\Omega(0,b)\right)} = \int\limits_{\Omega(0,b)} \left(u^{(knm)}\right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&= \int\limits_0^b\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(v^{(knm)}(r,\theta,\varphi)\right)^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \\
&= \left\|\frac{r}{\sqrt{r}}J_{n+\frac12}\right\|^2_{L_2(0,b)}\|Y^{(nm)}\|,
\end{aligned}\tag{7.3.55}$$

где $\|Y^{(nm)}\|$ определяется формулой в формулировке теоремы 7.3.1. В (7.3.55) под интегралом присутствует множитель $r^2\sin\theta$. Это якобиан замены (7.3.45). Этот множитель можно рассматривать как вес ортогональности и нормы цилиндрических функций Бесселя и сферических функций.

Согласно формуле (7.3.19)

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{r}{\sqrt{r}}J_{n+\frac12}\right\|^2_{L_2(0,b)} = \left\|\sqrt{r}J_{n+\frac12}\right\|^2_{L_2(0,b)} = \int\limits_0^b rJ^2_{n+\frac12}(\sqrt{\lambda}r) = \\
&= \frac{b^2}{2}\left[\left(J'_{n+\frac12}(\sqrt{\lambda}b)\right)^2 + \left(1-\frac{(n+1/2)^2}{b^2\lambda}\right)\left(J_{n+\frac12}(\sqrt{\lambda}b)\right)^2\right].
\end{aligned}\tag{7.3.56}$$

Рассмотрим отдельно норму $\left\|\sqrt{r}J_{n+\frac12}\right\|^2_{L_2(0,b)}$ для условий Дирихле, Неймана и условия третьего рода.

1. *Условие* (7.3.44) *Дирихле,* $\sigma^{(0)}=1$, $\sigma^{(1)}=0$. Собственные значения определяются уравнением

$$J_{n+\frac12}(\tau)=0,\quad \lambda^{(kn)} = \left(\frac{\tau^{(kn)}}{b}\right)^2.$$

Отсюда и из (7.3.19)

$$\left\|\sqrt{r}J_{n+\frac12}\right\|^2_{L_2(0,b)} = \frac{b^2}{2}\left(J'_{n+\frac12}(\tau^{(kn)})\right)^2.$$

2. *Условие* (7.3.44) *Неймана,* $\sigma^{(0)} = 0$, $\sigma^{(1)} = 1$. Собственные значения определяются уравнением

$$\tau J'_{n+\frac{1}{2}}(\tau) - \frac{1}{2} J_{n+\frac{1}{2}}(\tau) = 0, \quad \lambda^{(kn)} = \Big(\frac{\tau^{(kn)}}{b}\Big)^2.$$

Следовательно

$$\Big\|\sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}\Big\|^2_{L_2(0,b)} = \frac{b^2}{2}\Big[1 - \frac{n(n+1)}{(\tau^{(kn)})^2}\Big]\Big(J_{n+\frac{1}{2}}(\tau^{(kn)})\Big)^2.$$

3. *Условие* (7.3.44) *третьего рода,* $\sigma^{(0)} \neq 0$, $\sigma^{(1)} = 1$. Собственные значения определяются уравнением

$$\tau J'_{n+\frac{1}{2}}(\tau) + \big(b\sigma^{(0)} - \frac{1}{2}\big) J_{n+\frac{1}{2}}(\tau) = 0, \quad \lambda^{(kn)} = \Big(\frac{\tau^{(kn)}}{b}\Big)^2.$$

В этом случае квадрат нормы можно представить по формуле

$$\Big\|\sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}\Big\|^2_{L_2(0,b)} = \frac{b^2}{2}\Big[1 - \frac{n(n+1) + b\sigma^{(0)}(1 - b\sigma^{(0)})}{(\tau^{(kn)})^2}\Big]\Big(J_{n+\frac{1}{2}}(\tau^{(kn)})\Big)^2$$

или

$$\Big\|\sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}\Big\|^2_{L_2(0,b)} = \frac{b^2}{2}\Big[1 + 4\frac{(\tau^{(kn)})^2 - (n+1/2)^2}{(1 - 2b\sigma^{(0)})^2}\Big]\Big(J'_{n+\frac{1}{2}}(\tau^{(kn)})\Big)^2.$$

7.4. Метод Грина

В этом параграфе будут рассматриваться граничные задачи в основном для уравнения Пуассона или уравнения Лапласа. Метод Грина предполагает нахождения решения через функцию Грина, построение функции Грина.

7.4.1. Формулы Грина

В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, рассмотрим область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, для которой справедлива формула Остроградского (1.9.13). Пусть функции $u, v : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}), v(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ заданы в Ω. Предположим, что $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, где $\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω.

Рассмотрим в Ω эллиптический оператор $A : u \to Au$, который определяется формулой

$$Au(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\Big) + a^{(0)}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) \tag{7.4.1}$$

и условием

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\xi_i\xi_j \geqslant c^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2 = c^{(0)}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{7.4.2}$$

для любого элемента $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, где коэффициенты $a^{(ij)} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $a^{(0)} \in C(\Omega)$, $a^{(ij)} = a^{(ji)}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Если $a^{(ij)} = \delta^{(ij)} \in \{0, i \neq j; 1, i = j\}$, $a^{(0)} = 0$, то $A = \Delta$, Δ – оператор Лапласа.

Теорема 7.4.1. *Пусть выполняются перечисленные выше условия относительно функций u,v, коэффициентов оператора A и границы $\partial\Omega$. Для функций u,v и оператора A справедливы формулы Грина*

$$\int\limits_{\Omega} Au\, v\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} v\, \mathrm{d}s - \int\limits_{\Omega} \mathcal{A}(u,v)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{7.4.3}$$

$$\int\limits_{\Omega}\big(Au\, v - u\, Av\big)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial u}{\partial N}\, v - u\frac{\partial v}{\partial N}\Big)\mathrm{d}s, \tag{7.4.4}$$

где $\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i\Big|_{\partial\Omega}$ – производная по конормали, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали в точках $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$,

$$\mathcal{A}(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - a^{(0)}uv.$$

Доказательство. Пусть $\Omega^{(\varepsilon)}$ – подобласть области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega^{(\varepsilon)}$ и такова, что $\overline{\Omega^{(\varepsilon)}} \subset \Omega$ и расстояние от границы $\partial\Omega$ до $\Omega^{(\varepsilon)}$ не превышает числа $\varepsilon > 0$, где расстояние

$$d(\partial\Omega,\Omega^{(\varepsilon)}) = \inf_{\substack{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\\ \boldsymbol{y}\in\Omega^{(\varepsilon)}}} |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \inf_{\substack{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\\ \boldsymbol{y}\in\Omega^{(\varepsilon)}}} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Рассмотрим выражение $(Au,v)_{L_2(\Omega^{(\varepsilon)})}$, которое проинтегрируем по частям, используя формулу Остроградского. Здесь в качестве вектора $\boldsymbol{r} = \big(r_1(\boldsymbol{x}), \ldots, r_n(\boldsymbol{x})\big)$ возьмем вектор $\boldsymbol{r} = \Big(v \sum\limits_{j=1}^{n} a^{(1j)} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ldots, v \sum\limits_{j=1}^{n} a^{(nj)} \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)$. Тогда в силу формулы (1.9.13)

$$\big(Au,v\big)_{L_2(\Omega^{(\varepsilon)})} = \int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \operatorname{div} \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \mathcal{A}(u,v)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$= \int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \operatorname{div}\Big(v \sum_{j=1}^{n} a^{(1j)} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ldots, v \sum_{j=1}^{n} a^{(nj)} \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \mathcal{A}(u,v)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega^{(\varepsilon)}} (\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}s - \int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \mathcal{A}(u,v)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega^{(\partial\varepsilon)}} v\Big(\sum_{j=1}^{n} a^{(1j)} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, \nu_1 + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a^{(nj)} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, \nu_n\Big)\, \mathrm{d}s -$$

$$- \int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \mathcal{A}(u,v)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega^{(\varepsilon)}} \frac{\partial u}{\partial N}\, v\, \mathrm{d}s - \int\limits_{\partial\Omega^{(\varepsilon)}} \mathcal{A}(u,v)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

В последнем соотношении переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$. В пределе получим формулу (7.4.3), которая называется *первой формулой Грина* для оператора A.

Напишем первую формулу Грина для оператора A, примененного к функции v, т. е.

$$\big(u,Av\big)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial N}\, u\, \mathrm{d}s - \int\limits_{\Omega} \mathcal{A}(u,v)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{7.4.5}$$

Вычитая из равенства (7.4.3) соотношение (7.4.5), получим равенство (7.4.4), которое называется *второй формулой Грина* для оператора A. ⊗

Замечание 7.4.1. При доказательстве теоремы 7.4.1 не использовалось условие (7.4.2).

Из (7.4.3) – (7.4.4) в частном случае, когда оператор A есть оператор Лапласа, имеем следующие формулы Грина:

$$(\Delta u,v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, v\, \mathrm{d}s - \int\limits_{\Omega} (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{7.4.6}$$

$$(\Delta u,v)_{L_2(\Omega)} - (u,\Delta v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, v - u\, \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)\, \mathrm{d}s. \tag{7.4.7}$$

7.4.2. Гармонические функции и интегральное представление функций из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

Понятие гармонических функций определяется через уравнение Лапласа. Сначала рассмотрим ограниченную в $\mathbb{R}^n$ область Ω.

Определение 7.4.1. Функция $u \in C^2(\Omega)$ называется *гармонической в ограниченной области* $\Omega \in \mathbb{R}^n$, если она в этой области удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{7.4.8}$$

Если область неограниченная, то кроме требования выполнения уравнения Лапласа, требуется поведение функции на бесконечности.

Определение 7.4.2. Функция $u \in C^2(\Omega)$ называется *гармонической в неограниченной области* $\Omega \in \mathbb{R}^n$, если она в этой области удовлетворяет уравнению (7.4.8) и на бесконечности имеет порядок $O\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\Big)$.

Рассмотрим примеры гармонических функций, которые в дальнейшем будем часто использовать.

Пусть $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ и $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^n} = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\Big)^{1/2}$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_n)$. Тогда функции $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}$ при $n > 2$ и $\ln(1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$ для $n = 2$ будут гармоническими как по переменным $\boldsymbol{x}$ в области $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{y}\}$, так и по переменным $\boldsymbol{y}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x}\}$. Проверим, что это утверждение является верным.

1. $n > 2, n \in \mathbb{N}$. Производная

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\bigg) = -\frac{2(n-2)(x_i-y_i)}{2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n} = -\frac{(n-2)(x_i-y_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}.$$

Вычисляя по x_i вторую производную, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\bigg(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\bigg) = -\frac{(n-2)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n - n(n-2)(x_i-y_i)^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2n}} =$$

$$= \frac{-(n-2)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n} + \frac{n(n-2)(x_i-y_i)^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n+2}}.$$

Отсюда видно, что

$$\Delta\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(2-n)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n}} + \frac{n(n-2)(x_i-y_i)^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n+2}}\right) = 0, \quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}.$$

В силу симметрии $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ оператор Лапласа по переменным $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_n)$

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right) = 0.$$

2. $n=2$. В этом случае рассматриваем функцию $\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$. Вычисляя производные, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) = \frac{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|(x_i-y_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3} = -\frac{x_i-y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}, i=1,2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) = \frac{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2+2(x_i-y_i)^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^4}.$$

Отсюда

$$\Delta\left(\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2+2(x_i-y_i)^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^4}\right) = 0,$$

$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{y}\}$. Вычисляя аналогично производные по y_i, получим

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}\left(\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = 0, \quad \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{x}\}.$$

Пусть область Ω из $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, для которой справедлива формула Остроградского. В Ω рассмотрим функцию $u:\Omega\ni\boldsymbol{x}\to u(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}$ из класса $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. В Ω рассмотрим произвольную точку $\boldsymbol{x}$ и шар $\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ с центром в этой точке радиуса ε. Число $\varepsilon>0$ возьмем достаточно малым, чтобы замыкание $\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)}$ шара $\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ полностью содержалось в Ω.

В области $\Omega^{(\varepsilon)} = \Omega \setminus \overline{\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)}$ рассмотрим вторую формулу Грина (7.4.7). Отметим, что здесь границей $\partial\Omega^{(\varepsilon)}$ области $\Omega^{(\varepsilon)}$ является объединение $\partial\Omega$ и $S(\boldsymbol{x},\varepsilon)$, $\partial\Omega^{(\varepsilon)} = \partial\Omega \cup S(\boldsymbol{x},\varepsilon)$, где $S(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ – сфера с центром в точке $\boldsymbol{x}$ радиуса ε, представляющая границу шара $\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. Итак, согласно (7.4.7)

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \big(\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v\big)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\ = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, v - u\, \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s + \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, v - u\, \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s.\end{gathered} \tag{7.4.9}$$

В соотношении (7.4.9) полагаем

$$v(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}, & n > 2, \\ \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, & n = 2, \end{cases} \tag{7.4.10}$$

где $\boldsymbol{x}$ – точка, являющаяся центром шара $\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. Так как $\boldsymbol{x} \notin \Omega^{(\varepsilon)}$, то функция v, выбранная по формуле (7.4.10), является гармонической и

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{y}) = 0. \tag{7.4.11}$$

Далее рассмотрим в (7.4.9) интеграл по сфере $S(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. Пусть $n > 2$. Здесь нормаль $\boldsymbol{\nu}$, будучи внешней по отношению к области $\Omega^{(\varepsilon)}$ в точках сферы $S(\boldsymbol{x},\varepsilon) = S^{(\varepsilon)}$ направлена к ее центру $\boldsymbol{x}$. Поэтому

$$\begin{aligned} & v(\boldsymbol{y})\big|_{\boldsymbol{y}\in S^{(\varepsilon)}} = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}, \\ & \frac{\partial v(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\boldsymbol{y}\in S^{(\varepsilon)}} = -\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r^{n-2}}\Big)\Big|_{r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\varepsilon} = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}. \end{aligned} \tag{7.4.12}$$

Воспользуемся известной формулой перехода от элемента $\mathrm{d}S^{(\varepsilon)}$ сферы радиуса ε к элементу $\mathrm{d}S^{(1)}$ сферы радиуса единица,

$$\mathrm{d}S^{(\varepsilon)} = \varepsilon^{n-1}\mathrm{d}S^{(1)}. \tag{7.4.13}$$

В силу формул (7.4.12) и (7.4.13) равенство (7.4.9) запишется в виде

$$\int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \big(\Delta u \cdot v\big)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} - u\, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big)\Big](\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int\limits_{S^{(\varepsilon)}}\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s-\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S^{(\varepsilon)}}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s.$$

В последнем интеграле последнего равенства делаем замену $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{z}$. В результате этой замены, если $\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x},\varepsilon)$, то $\boldsymbol{z}\in S(\boldsymbol{x},1)$ и в силу (7.4.13)

$$\int\limits_{S^{(\varepsilon)}}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s=\varepsilon^{n-1}\int\limits_{S(0,1)}u(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}s.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}}\Delta u\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=$$
$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}-u(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big)\right]\mathrm{d}s+ \tag{7.4.14}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int\limits_{S(\boldsymbol{x},\varepsilon)}\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s-(n-2)\int\limits_{S(0,1)}u(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}s.$$

В силу предположения $u\in C^2\big(\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)}\big)$. Поэтому $\left|\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\right|\leqslant c^{(1)}<\infty$ и $\left|\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right|\leqslant c^{(2)}<\infty$ для любого элемента $\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. Следовательно,

$$\Big|\int\limits_{S(x,\varepsilon)}\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\mathrm{d}s\Big|\leqslant c^{(2)}\frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}}\int\limits_{S(0,1)}\mathrm{d}s=\varepsilon c^{(2)}|S(0,1)|, \tag{7.4.15}$$

где $|S(0,1)|=|S^{(1)}|$ — площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Переходим к пределу в (7.4.14) при $\varepsilon\to 0$ с учетом оценки (7.4.15). В результате имеем

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}-u(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big)\right]\mathrm{d}s-$$
$$-\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\int\limits_{\Omega}\Delta u(\boldsymbol{y})\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},\quad n>2. \tag{7.4.16}$$

Аналогично, проводя рассуждения для $n=2$ и $v(\boldsymbol{y})=\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$, из второй формулы Грина (7.4.7) получим интегральное представление

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)-u(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big(\ln\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\Big)\Big)\right]\mathrm{d}s-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \Delta u(\boldsymbol{y}) \ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{7.4.17}$$

Если функция u является гармонической и $u \in C^1(\overline{\Omega})$, то формулы интегрального представления (7.4.16) и (7.4.17) несколько упрощаются и имеют вид

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|} \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right)\right] \mathrm{d}s, & n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\left(\ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)\right)\right] \mathrm{d}s, & n = 2. \end{cases} \tag{7.4.18}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 7.4.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3,\ldots$, *с кусочно гладкой границей. Тогда для любой функции* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *справедливо интегральное представление* (7.4.16) *для* $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$, *и* (7.4.17) *для* $n = 2$, *где* $\boldsymbol{x}$ *— любая точка из области* Ω.

Теорема 7.4.3. *Любая гармоническая функция, заданная в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *принадлежит классу* $C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Пусть функция $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ является гармонической согласно определениям 7.4.1 и 7.4.2 в области Ω. Покажем, что для любой точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$ функция uимеет производную $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u$ любого порядка $\boldsymbol{\alpha} \in \widetilde{\mathbb{N}}^n$.

Поскольку Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то для любой ее точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$ найдется подобласть $\Omega' \subset \Omega$, например, шар с центром в точке $\boldsymbol{x}$, с достаточно гладкой границей, для которой замыкание $\overline{\Omega'} \supset \Omega$. Так как $u \in C^2(\Omega)$, то и $u \in C^2(\overline{\Omega'})$. Согласно теореме 7.4.2

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|} \int\limits_{\partial\Omega'} \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right)\right] \mathrm{d}s, n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega'} \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)\right] \mathrm{d}s, n = 2. \end{cases} \tag{7.4.19}$$

Из формулы (7.4.19) видно, что подынтегральные функции особенностей не имеют, так как интегрирование ведется по границе $\partial\Omega'$, которой $\boldsymbol{x}$ не принадлежит. Оператор $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}$ производной $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u$ можно поднести под знак интеграла и дифференцировать подынтегральные функции по $\boldsymbol{x}$ как по параметру сколько угодно раз. $\otimes$

Теорема 7.4.4. *Пусть функция u является гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^1(\overline{\Omega})$ и граница $\partial\Omega$ области Ω является кусочно-гладкой, для которой справедлива формула Остроградского (1.9.13). Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \mathrm{d}s = 0, \tag{7.4.20}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней относительно Ω нормали почти всюду на $\partial\Omega$.

Доказательство. Рассмотрим вторую формулу Грина (7.4.7) для функции u и $v \equiv 1$. В силу условий теоремы и того, что $v \equiv 1$, имеем $\Delta u = \Delta v = 0$, если $\boldsymbol{x} \in \Omega$, и $\partial v/\partial \boldsymbol{\nu} = 0$, если $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Учитывая все это в формуле Грина (7.4.7) получаем доказываемое равенство (7.4.20). $\otimes$

Теорема 7.4.5 (теорема о среднем). *Пусть в некотором шаре $\Omega(\boldsymbol{x},\rho)$ из пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\boldsymbol{x}$ радиуса ρ задана гармоническая функция u и $u \in C(\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\rho)})$. Тогда значение $u(\boldsymbol{x})$ функции u в точке $\boldsymbol{x}$ равно среднему арифметическому значений $u(\boldsymbol{y})$ на сфере $S(\boldsymbol{x},\rho)$ заданного шара*

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^{n-1}|S^{(1)}|} \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho)} u(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, & n > 2, \\ \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho)} u(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s, & n = 2. \end{cases} \tag{7.4.21}$$

Доказательство. Пусть $\rho' < \rho$. Тогда функция $u \in C^2(\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\rho')})$ и $\Delta u = 0$ в $\Omega(\boldsymbol{x},\rho')$, так как $\Omega(\boldsymbol{x},\rho') \subset \Omega(\boldsymbol{x},\rho)$. Согласно (7.4.19)

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|} \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho')} \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \frac{1}{(\rho')^{n-2}} - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left(\frac{1}{\rho'^{n-2}(\boldsymbol{y})} \right) \right] \mathrm{d}s, n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho')} \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln \frac{1}{\rho'} - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln \left(\frac{1}{\rho'(\boldsymbol{y})} \right) \right] \mathrm{d}s, n = 2. \end{cases} \tag{7.4.22}$$

В силу теоремы 7.4.4 (формулы (7.4.20)) представление (7.4.22) можно записать в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|} \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho')} u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left(\frac{1}{(\rho')}\right)^{n-2} \mathrm{d}s, & n > 2, \\ -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho')} u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln\left(\frac{1}{\rho'(\boldsymbol{y})}\right) \mathrm{d}s, & n = 2. \end{cases} \tag{7.4.23}$$

Заметим, что в формулах (7.4.23) для любых $\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{y}} \in S(\boldsymbol{x},\rho')$ по модулю $\rho'(\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{y}}| = \rho'(\bar{\boldsymbol{y}})$. Но если $\rho'(\boldsymbol{y})$ рассматривать как радиус-вектор от точки $\boldsymbol{x}$ до точки $\bar{\boldsymbol{y}} \in S(\boldsymbol{x},\rho')$, направление $\rho'(\boldsymbol{y})$ совпадает с вектором $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})$ внешней нормали. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big(\frac{1}{(\rho')}\Big)^{n-2}\Big|_{\bar{\boldsymbol{y}}\in S(\boldsymbol{x},\rho')} = \frac{\partial}{\partial \rho'}\Big(\frac{1}{\rho'}\Big)^{n-2} = \frac{2-n}{(\rho')^{n-1}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln\Big(\frac{1}{\rho'}\Big)\Big|_{\bar{\boldsymbol{y}}\in S(\boldsymbol{x},\rho')} = \frac{\partial}{\partial \rho'} \ln \frac{1}{\rho'}(\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{\rho'}.$$

Подставляя последние выражения в (7.4.23), получим формулу (7.4.21) для сферы $S(\boldsymbol{x},\rho')$ и ее радиуса ρ'. Затем переходим к пределу при $\rho' \to \rho$, в результате которого следует доказываемые представления (7.4.21). $\otimes$

Справедлива и обратная теорема по отношению к предыдущей теореме 7.4.5

Теорема 7.4.6 (обратная теорема о среднем). *Пусть* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *и функция* $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $C(\Omega)$. *Если для любого шара* $\Omega(\boldsymbol{x},\rho)$ *радиуса* ρ *с центром в точке* $\boldsymbol{x} \in \Omega$, *где* $\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\rho)} \subset \Omega$, *справедлива формула* (7.4.21), *то* $\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0$ *для любой точки* $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и шар $\Omega(\boldsymbol{x},\delta)$ некоторого радиуса $\delta > 0$, где $\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\delta)} \subset \Omega$.

Для упрощения записи доказательство будем проводить для случая $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$. Для $\rho = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leqslant \delta$ согласно условию теоремы справедливо представление (7.4.21)

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\rho^{n-1}|S^{(1)}|} \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho)} u(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s. \tag{7.4.24}$$

Воспользуемся из п. 4.5.5определенной там функцией $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которой $\omega(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ и $\omega(\boldsymbol{x}) = 0$ для $\|x\| \geqslant 1$. Обозначим через ω_δ функцию, определенную формулой $\omega_\delta : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{y} \to \omega_\delta(\rho) \in \mathbb{R}$, где

$$\omega_\delta(\rho) = \frac{1}{\delta^n}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta}\Big), \quad \rho = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

Равенство (7.4.24) умножим на $\rho^{n-1}\omega_\delta(\rho)$ и проинтегрируем по ρ от нуля до δ. В результате получим

$$u(\boldsymbol{x})\int\limits_0^\delta \rho^{n-1}\omega_\delta(\rho)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{|S^{(1)}|}\int\limits_0^\delta \omega_\delta(\rho)\,\mathrm{d}\rho \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{|S^{(1)}|}\int\limits_0^\delta \int\limits_{S(\boldsymbol{x},\rho)} \omega_\delta(\rho)u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{|S^{(1)}|}\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta} \frac{1}{\delta^n}\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\delta}\Big)u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} =$$

$$= \frac{1}{|S^{(1)}|}J_\delta u(\boldsymbol{x}). \tag{7.4.25}$$

В (7.4.25) полагаем $u(\boldsymbol{x}) \equiv 1$, для которой очевидно справедливо представление (7.4.24). Из (7.4.25) имеем

$$\int\limits_0^\delta \rho^{n-1}\omega_\delta(\rho)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{|S^{(1)}|}. \tag{7.4.26}$$

В силу (7.4.26) из (7.4.25) следует, что функция $u = J_\delta u$. В силу свойств операторов осреднения Соболева $J_\delta u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, т. е. и $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Покажем теперь, что $\Delta u = 0$ для $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Относительно шара $\Omega(\boldsymbol{x},\delta)$запишем интегральное представление (7.4.16) и воспользуемся условием теоремы, т. е. формулой (7.4.21)

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\int\limits_{S(\boldsymbol{x},\delta)}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}} - u(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big)\right]\mathrm{d}s -$$

$$-\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Delta u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} =$$

$$= \frac{(n-2)}{(n-2)|S^{(1)}|\delta^{n-1}}\int\limits_{S(\boldsymbol{x},\delta)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s +$$

$$+\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\left\{\int\limits_{S(\boldsymbol{x},\delta)}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s-\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Delta u(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right\}=$$

$$=u(\boldsymbol{x})+\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\left\{\int\limits_{S(\boldsymbol{x},\delta)}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Delta u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right\}.$$

Отсюда получим равенство

$$\frac{1}{\delta^{n-2}}\int\limits_{S(\boldsymbol{x},\delta)}\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s=\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Delta u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{7.4.27}$$

Из второй формулы Грина (7.4.7) при $v\equiv 1$ следует соотношение

$$\int\limits_{S(\boldsymbol{x},\delta)}\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s=\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta}\Delta u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{7.4.28}$$

Из (7.4.27) в силу (7.4.28) имеем

$$\begin{aligned}0&=\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta}\Delta u(\boldsymbol{y})\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}-\frac{1}{\delta^{n-2}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\\&=\Delta u(\bar{\boldsymbol{y}})\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}-\frac{1}{\delta^{n-2}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{y}.\end{aligned} \tag{7.4.29}$$

В (7.4.29) была использована теорема о среднем, так функция $\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}-\dfrac{1}{\delta^{n-2}}$ является неотрицательной и не тождественно равной нулю для всех $\boldsymbol{y}\in\Omega(\boldsymbol{x},\delta)$. В силу сказанного

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}-\frac{1}{\delta^{n-2}}\right)\mathrm{d}y\neq 0.$$

Следовательно, в равенстве (7.4.29) равно нулю функция $\Delta u(\bar{\boldsymbol{y}})=0$. При $\delta\to 0$ $\bar{\boldsymbol{y}}\to\boldsymbol{x}$. Устремляя δ к нулю $\bar{\boldsymbol{y}}\to\boldsymbol{x}$ и $\Delta u(\boldsymbol{x})=0$.

Аналогично проводится доказательство и в случае $n=2$, где вместо функции $\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}$ берется функция $\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ и соответствующие представления и формулу для этого случая. $\otimes$

Следствие 7.4.1. Если выполняются условия теоремы 7.4.6 для функции u и Ω является ограниченной областью, то u — гармоническая функция.

Теорема 7.4.7. *Если функция u, гармоническая в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, достигает минимума или максимума во внутренней точке области Ω, то такая функция u является постоянной.*

Доказательство. Пусть точка $\boldsymbol{z} \in \overline{\Omega}$, в которой $u(\boldsymbol{z}) = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}} u(\boldsymbol{x})$. Предположим, что $\boldsymbol{z}$ является внутренней точкой. Следовательно, существует шар $\Omega(\boldsymbol{z},\rho)$ некоторого радиуса ρ с центром в этой точке $\boldsymbol{z}$, где $\overline{\Omega(\boldsymbol{z},\rho)} \subset \Omega$. Если u — гармоническая в Ω, то она является гармонической в $\Omega(\boldsymbol{z},\rho)$ и $u \in C(\overline{\Omega(\boldsymbol{z},\rho)})$. Согласно утверждению теоремы 7.4.5

$$u(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{|S^{(\rho)}|} \int\limits_{S(\boldsymbol{z},\rho)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s, \tag{7.4.30}$$

где $|S^{(\rho)}|$ — площадь сферы радиуса ρ и $|S^{(\rho)}| = \rho^{n-1}|S^{(1)}|$, $|S^{(1)}|$ — площадь единичной сферы. Пусть точка $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{z},\rho)$, где $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{z})$.

Согласно предположению, что в точке $\boldsymbol{z}$ функция u принимает максимальное значение, то $u(\boldsymbol{y}) \leqslant u(\boldsymbol{z})$ для любого элемента $\boldsymbol{y} \in S(\boldsymbol{z},\rho)$. В силу непрерывности функции u существует окрестность $S'(\boldsymbol{z},\rho)$ точки $\boldsymbol{x}$ на сфере $S(\boldsymbol{z},\rho)$, для всех точек $\boldsymbol{y} \in S'(\boldsymbol{z},\rho)$ которой $u(\boldsymbol{y}) < u(\boldsymbol{z})$. В связи с этим интеграл (7.4.30) разобьем на сумму двух интегралов

$$u(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{|S^{(\rho)}|} \left(\int\limits_{S'(\boldsymbol{z},\rho)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int\limits_{S''(\boldsymbol{z},\rho)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \right), \tag{7.4.31}$$

$S''(\boldsymbol{z},\rho) = S(\boldsymbol{z},\rho) \setminus S'(\boldsymbol{z},\rho)$. Так как $u(\boldsymbol{y}) < u(\boldsymbol{z})$ на $S'(\boldsymbol{z},\rho)$, то из формулы (7.4.31) следует оценка и неравенство

$$u(\boldsymbol{z}) < \frac{1}{|S^{(\rho)}|} u(\boldsymbol{z}) \left(|S'(\boldsymbol{z},\rho)| + |S''(\boldsymbol{z},\rho)| \right) = u(\boldsymbol{z}),$$

где $|S'(\boldsymbol{z},\rho)|$, $|S''(\boldsymbol{z},\rho)|$ — площади частей $S'(\boldsymbol{z},\rho)$ и $S''(\boldsymbol{z},\rho)$ сферы $S(\boldsymbol{z},\rho)$. Противоречие $u(\boldsymbol{z}) < u(\boldsymbol{z})$ указывает на то, что неверным было предположение $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{z},\rho)$. Следовательно, $u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{z})$ для любого элемента $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{z},\rho)$.

Эти рассуждения справедливы для любой сферы $S(\boldsymbol{z},r)$, где $r \in (0,\rho)$. Следовательно, $u(\boldsymbol{x}) \equiv u(\boldsymbol{z})$ для любой точки $\boldsymbol{x}$ из замыкания $\overline{\Omega(\boldsymbol{z},\rho)}$ шара $\Omega(\boldsymbol{z},\rho)$ радиуса ρ с центром в точке $\boldsymbol{z}$.

Берем теперь любую точку $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и соединяем ее линией γ с точкой $\boldsymbol{z}$ таким образом, чтобы $\gamma \subset \Omega$. Далее двигаемся от $\boldsymbol{z}$ по линии γ к точке $\boldsymbol{x}$ и показываем тождественное совпадение $u(\boldsymbol{x}) \equiv u(\boldsymbol{z}^{(i)}) = u(\boldsymbol{z})$ для любых $\boldsymbol{y}$ из пересекающихся между собой замкнутых шаров $\overline{\Omega(\boldsymbol{z}^{(i)},\rho^{(i)})}$ с центром в точках $\boldsymbol{z}^{(i)} \in \gamma$ и радиусов $\rho^{(i)}$, выбранных таким образом, что $\overline{\Omega(\boldsymbol{z}^{(i)},\rho^{(i)})} \subset \Omega$ (см. рис. 7.2). Поскольку Ω ограниченная область, то, очевидно, за конечное число шагов $n^{(0)}$ $(i = 1,\ldots,n^{(0)})$ цепочка замкнутых шаров захватит во внутрь и точку $\boldsymbol{x}$. Тем самым будет показано

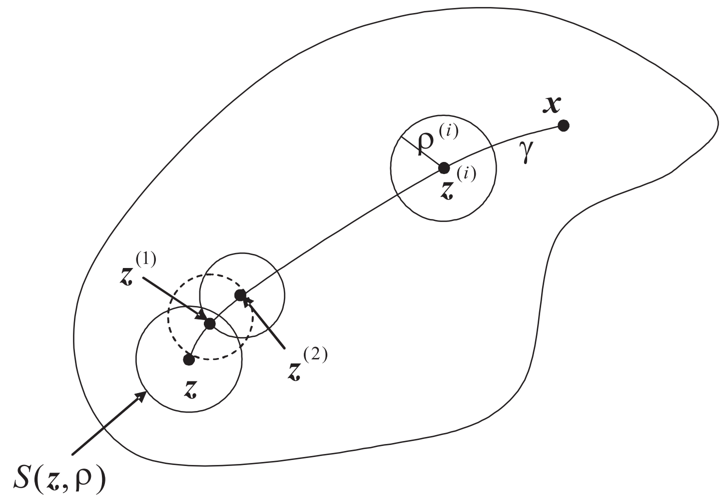

Рис. 7.2

$u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{z})$. И это справедливо для любого $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

В случае минимума рассматриваем функцию $-u$ и приходим к предыдущему случаю или, повторяя рассуждения, проводим непосредственно доказательство. $\otimes$

Следствие 7.4.2. Если $\Delta u = 0$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $u \in C(\overline{\Omega})$, то функция $u : \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на границе $\partial\Omega$ области Ω.

7.4.3. Единственность задач Дирихле для уравнения Пуассона

В шестой главе рассмотрены граничные задачи для эллиптических уравнений второго порядка, заданных в ограниченных областях. Функциональными методами доказано существование обобщенных решений и исследован вопрос их единственности. В некоторых случаях эти методы можно модифицировать и для неограниченных областей. Для неограниченных областей исследования являются сложными.

Результаты предыдущего параграфа 7.4.2 позволяют доказать существование и исследовать вопрос единственности решений граничных задач для уравнений Пуассона и Лапласа и для неограниченных областей в случае классических решений.

Под *классическим решением граничной задачи* понимается функция, которая имеет все производные, определяемые предельными отношениями, дифференциального оператора уравнения и операторов граничных условий в каждой точке области задания уравнения и граничных условий.

В математической физике определяются внутренняя и внешняя задачи Дирихле. Пусть Ω − ограниченная область n - мерного евклидова пространства. Внутренней задачей Дирихле для уравнения Пуассона относительно области Ω называется задача:

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{7.4.32}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{7.4.33}$$

Внешней задачей Дирихле относительно ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ для уравнения Пуассона называется задача, для которой искомая функция u и уравнение (7.4.32) задаются во внешней относительно Ω области $C\overline{\Omega} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ и на границе $\partial C\overline{\Omega} = \partial\Omega$ − условие Дирихле (7.4.33). Во всех других случаях будем называть задачей Дирихле для неограниченных областей.

1. Внутренняя задача Дирихле. Для внутренней задачи Дирихле (7.4.32) − (7.4.33) ее классическое решение $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, если оно существует, то оно единственно.

Доказательство проводится методом противного предположения существования двух решений $u^{(i)}$ $(i = 1{,}2)$, используя линейность задачи. Пусть функции $u^{(i)}$ удовлетворяют уравнению (7.4.32) и условию (7.4.33). Полученные уравнения, вычитая друг из друга, в силу линейности уравнения Пуассона и условия Дирихле для разности $\tilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)}$ получим уравнение Лапласа

$$\Delta\tilde{u} = 0 \tag{7.4.34}$$

и однородное условие Дирихле

$$\tilde{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7.4.35}$$

В силу следствия 7.4.2 $\tilde{u} = 0$ в Ω, т. е. $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$, если $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Тем самым доказали единственность классического решения задачи Дирихле.

2. Внешняя задача Дирихле. В случае внешней задачи Дирихле предполагаем, что решение на бесконечности ведет себя как функция $1/|\boldsymbol{x}|^{n-2} = 1/\|\boldsymbol{x}\|^{n-2}_{\mathbb{R}^n}$, т. е. существует такая константа $c > 0$, для которой значения $u(\boldsymbol{x})$ решения u удовлетворяют неравенству

$$\|u(\boldsymbol{x})\| \leqslant c\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \tag{7.4.36}$$

Как и в случае внутренней задачи для внешней задачи предполагаем существование двух классических решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$. Для их разности $\tilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)}$ путем вычитания получаем однородную внешнюю задачу

$$\begin{gathered} \Delta\tilde{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ \tilde{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{7.4.37}$$

В силу (7.4.36) для разности $\tilde{u}$ справедлива оценка

$$\|\tilde{u}\| \leqslant 2c\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \tag{7.4.38}$$

Рассмотрим два случая: $n > 2$ и $n = 2$. Для $n > 2$ и произвольной точки $\boldsymbol{x} \in C\overline{\Omega}$ возьмем шар $\Omega(0,\rho)$ с центром в начале координат достаточно большого радиуса ρ, для которого $\Omega \subset \Omega(0,\rho)$ и $\boldsymbol{x} \in \Omega(0,\rho)$. Для области $\Omega(0,\rho) \setminus \overline{\Omega}$ относительно функции $\tilde{u}$ справедлива задача Дирихле

$$\begin{gathered} \Delta\tilde{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega(0,\rho) \setminus \overline{\Omega}, \\ \tilde{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\tilde{u}|_{|\tilde{\boldsymbol{x}}|=\rho} \leqslant 2c\,\frac{1}{\rho^{n-2}}. \end{gathered}$$

Отсюда согласно следствию 7.4.2 для любой точки $\boldsymbol{x} \in \Omega(0,\rho) \setminus \overline{\Omega}$

$$|\tilde{u}(\boldsymbol{x})| \leqslant 2c\,\frac{1}{\rho^{n-2}}.$$

Но $2c/\rho^{n-2} \to 0$ при $\rho \to \infty$ и $n > 2$. Так как шар $\Omega(0,\rho)$ можно выбрать сколь угодно большого радиуса ρ, то отсюда делаем заключение, что $\tilde{u} = 0$ в данной выбранной точке $\boldsymbol{x}$. Поскольку эти рассуждения справедливы для любого $\boldsymbol{x} \in C\overline{\Omega}$, то $\tilde{u} \equiv 0$ в $C\overline{\Omega}$, $u^{(1)} = u^{(2)}$.

Пусть теперь $n = 2$ и $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in C\overline{\Omega}$. Плоскость $\mathbb{R}^2$ рассматриваем как плоскость $\mathbb{C}$ комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$, на которой определены две области Ω и $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Рассмотрим конформное отображение

$$\xi : \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \ni z \to \xi(z) = y_1(\boldsymbol{x}) + iy_2(\boldsymbol{x}) \in \Omega, \tag{7.4.39}$$

которое границу $\partial\Omega$ область $C\overline{\Omega}$ переводит в ту же поверхность $\partial\Omega$ — границу области Ω, т. е.

$$\xi : \partial\Omega \ni z \to \xi(z) \in \partial\Omega. \tag{7.4.40}$$

Согласно свойствам конформного отображения действительная и мнимая части удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta y_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, 2,\ \boldsymbol{x} \in C\overline{\Omega}, \tag{7.4.41}$$

и существует обратное конформное отображение

$$z : \Omega \ni \xi \to z(\xi) = x_1(\boldsymbol{y}) + ix_2(\boldsymbol{y}) \in C\overline{\Omega},$$

где $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2) \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$. Следовательно, функцию $\tilde{u}$ — решение задачи (7.4.37) рассматриваем как сложную функцию и $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}\big(x_1(\boldsymbol{y}), x_2(\boldsymbol{y})\big) = v(\boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x} \in C\overline{\Omega}$, а $\boldsymbol{y} \in \Omega$ и связаны конформным отображением ξ с помощью (7.4.39).

Рассмотрим значение оператора Лапласа Δ от функции v,

$$\Delta v(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2},\ \ \boldsymbol{y} \in \Omega,$$

Проводя вычисления, получим

$$\frac{\partial v}{\partial y_i} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i},\ i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_i}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial y_i}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_i}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial y_i^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}\frac{\partial^2 x_2}{\partial y_i^2}.$$

Отсюда

$$\Delta v(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2}\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2}\left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)^2\right](\boldsymbol{y}) +$$

$$+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}\Delta x_1(\boldsymbol{y}) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}\Delta x_2(\boldsymbol{y}) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right).$$

Так как $z : \Omega \ni \xi \to z(\xi) \in C\overline{\Omega}$ – конформное отображение, то в силу условий Даламбера-Эйлера

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \ \ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial y_1}$$

и уравнений (7.4.41)

$$\Delta v(\boldsymbol{y}) = \Delta \tilde{u}(\boldsymbol{x})\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)^2\right].$$

Отсюда, из задачи (7.4.37) и отображения (7.4.39) – (7.4.40) имеем для функции $v : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \ni \boldsymbol{y} \to v(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ задачу

$$\begin{aligned} &\Delta v(\boldsymbol{y}) = 0, \ \boldsymbol{y} \in \Omega, \\ &v\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \boldsymbol{y} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

В силу следствия 4.7.2, так как область Ω является ограниченной областью, $v(\boldsymbol{y}) \equiv 0, \boldsymbol{y} \in \Omega$ или $v(\boldsymbol{y}) = \tilde{u}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in C\overline{\Omega}$.

Тем самым доказана единственность классического решения задачи Пуассона (7.4.32) – (7.4.33), т. е. следующая теорема.

Теорема 7.4.8. *Как внутренняя, так и внешняя задачи Дирихле для уравнения Пуассона могут иметь не более одного классического решения, удовлетворяющего условию* (7.4.36) *в случае внешней задачи.*

Замечание 7.4.2. Теорема 7.4.8 справедлива и для задачи Дирихле в случае любой неограниченной области, если решение удовлетворяет условию (7.4.36), а граница области представляет собой кусочно-гладкую линию. Заметим, что при доказательстве теоремы 7.4.8 для этого случая при $n = 2$ можно брать в качестве конформного отображения ξ — отображения рассматриваемой области на любую ограниченную область. Такой ограниченной областью можно рассматривать единичный круг комплексной плоскости с центром в начале координат. Это позволяет сделать теорема Римана из теории функций комплексного переменного.

7.4.4. Метод Грина для задачи Дирихле

Суть метода Грина состоит в том, что с помощью представления функции согласно теореме 7.4.2 решение выражается через функцию Грина, а функцию Грина во многих конкретных случаях можно построить в явном виде. Таким образом, решение задачи можно записать в аналитической форме с помощью формулы.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{7.4.42}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{7.4.43}$$

Решение задачи (7.4.42)–(7.4.43) будем искать через представление из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ по формулам (7.4.16) ($n > 2$) и (7.4.17) ($n = 2$), используя уравнение (7.4.42) и граничное условие (7.4.43)

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|} \Big\{ \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \\ -\varphi(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} \Big) \Big] \, \mathrm{d}s - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} f(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \Big\}, & n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - \\ -\varphi(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \Big] \, \mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y}, & n = 2. \end{cases} \tag{7.4.44}$$

Как видно из формулы (7.4.44) ее нельзя принять за решение задачи (7.4.42)–(7.4.43), так как из ее условий не определено значение производной $\partial u / \partial \boldsymbol{\nu}$ на $\partial\Omega$. Для этого введем вспомогательную функцию $g : \Omega \times \Omega \ni (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \text{ для любых } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \Omega,$$

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_i^2} = 0, \Delta_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0.$$

Для искомого решения u задачи (7.4.42) – (7.4.43) и функции g запишем вторую формулу Грина для оператора Лапласа (7.4.7)

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \varphi(\boldsymbol{y})\frac{\partial g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]\mathrm{d}s. \tag{7.4.45}$$

Формулу (7.4.44) с учетом равенства (7.4.45) можно записать в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = -\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \varphi(\boldsymbol{y})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]\mathrm{d}s, \tag{7.4.46}$$

где

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\,\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}, & n>2,\\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, & n=2. \end{cases} \tag{7.4.47}$$

Выберем функцию g так, чтобы значения $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ для любой точки $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$. В силу этого требования и формулы (7.4.46) решение задачи Дирихле (7.4.42) – (7.4.43) через функцию G и ее значения $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ представляется формулой

$$u(\boldsymbol{x}) = -\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} - \int\limits_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s, \tag{7.4.48}$$

Определение 7.4.3. Функция $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \supset \Omega\times\Omega \ni (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to$ $\to G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ называется *функцией Грина задачи Дирихле* (7.4.42) – (7.4.43) для уравнения Пуассона, если она удовлетворяет следующим условиям:

G.1 представима в виде (7.4.47);

G.2 симметрична относительно независимых переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, т. е. $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \Omega$;

G.3 $\Delta_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Delta_{\boldsymbol{y}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$;

G.4 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big|_{\boldsymbol{y}\in\partial\Omega} = G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big|_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} = 0$;

G.5 удовлетворяет условию регулярности (7.4.36) относительно переменных $\boldsymbol{x}$ и переменных $\boldsymbol{y}$ в случае неограниченных областей Ω.

7.4.5. Метод Грина для задачи Неймана

Решение задачи Неймана методом Грина как и для задачи Дирихле находится через функцию Грина для этой задачи с помощью представления функций согласно теореме 7.4.2.

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона

$$\begin{gathered}\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.\end{gathered} \tag{7.4.49}$$

Согласно формулам (7.4.16) и (7.4.17) решение задачи (7.4.49) можно записать в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\Big\{\int\limits_{\partial\Omega}\Big[\psi(\boldsymbol{y})\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} - u(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big)\Big]\,\mathrm{d}s-\\ -\int\limits_{\Omega}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\Big\}, & n > 2,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\Big[\psi(\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - u(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\Big]\,\mathrm{d}s-\\ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega}f(\boldsymbol{y})\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, & n = 2.\end{cases} \tag{7.4.50}$$

Через вторую формулу Грина (7.4.7) для оператора Лапласа

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int\limits_{\partial\Omega}\Big[\psi(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y})\frac{\partial g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big]\,\mathrm{d}s, \tag{7.4.51}$$

где $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, функция g как по переменным $\boldsymbol{x}$ так и по переменным $\boldsymbol{y}$ является гармонической. С помощью формул (7.4.50) и (7.4.51) вводится понятие функции Грина для задачи Неймана (7.4.49).

Определение 7.4.4. Функция $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \supset \Omega \times \Omega \ni (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to$ $\to G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ называется *функцией Грина задачи Неймана* (7.4.49) для оператора Лапласа, если она удовлетворяет условиям **G.1**, **G.2**, **G.3**, **G.5** из определения 7.4.3 и вместо условия **G.4** должно выполняться граничное условие

G.4(N) $$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}}\Big|_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} = \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\Big|_{\boldsymbol{y}\in\partial\Omega} = 0.$$

В этом случае решение задачи Неймана (7.4.49) через функцию Грина G (определение 7.4.4) представляется формулой

$$u(\boldsymbol{x}) = -\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} - \int\limits_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s. \tag{7.4.52}$$

Замечание 7.4.3. Для других граничных задач функция Грина для оператора Лапласа (уравнение Пуассона) вводится аналогично исходя из интегрального представления значения функции (7.4.16) и (7.4.17) и второй формулы Грина (7.4.7) фактически повторением этого параграфа 7.4.5 и предыдущего 7.4.4

7.4.6. Построение функции Грина для задачи Дирихле уравнения Пуассона

Из п. 7.4.4 следует, что решение задачи Дирихле (7.4.42) – (7.4.43) через функцию Грина (определение 7.4.3), функции f правой части уравнения (7.4.42) и φ граничного условия (7.4.43) записывается в виде формулы (7.4.48). Отыскание решения граничных задач методом Грина сводится к отысканию или построению соответствующей функции Грина.

1. $n = 2$. Рассмотрим случай, когда задача Дирихле (7.4.42) – (7.4.43) рассматривается на плоскости $\mathbb{R}^2$. Точки $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)$ будем рассматривать как точки $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = y_1 + iy_2$, $i = \sqrt{-1}$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема 7.4.9. *Пусть $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$. Предположим, что отображение $h : \mathbb{C} \supset \Omega \ni \zeta \to h(z,\zeta) \subset \mathbb{C}$ относительно переменного ζ является конформным отображением области $\Omega \subset \mathbb{C}$ на круг радиуса единица с центром в начале координат и такое, что z переходит в центр круга, а граница $\partial\Omega$ области Ω – в окружность этого круга. Тогда функция Грина G определяется через ее значение по формуле*

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|h(z,\zeta)|},$$

где $|h(z,\zeta)|^2 = \big(Re\,h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)^2 + \big(Im\,h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)^2$, $Re\,h$ и $Im\,h$ – действительная и мнимая части значений отображения h.

Доказательство. Существование описанного в условиях теоремы конформного отображения h следует из теоремы Римана теории функций комплексного переменного.

Покажем, что выполняются все свойства функции Грина согласно определению 7.4.3.

Согласно построению конформного отображения h точка $z = x_1 + ix_2$ переходит в нуль, т. е. $h(z,z) = 0$. Другие точки $\zeta \in \overline{\Omega}$ значения $h(z,\zeta)$ не обращают в нуль согласно определению конформного отображения. Поэтому

$$h(z,\zeta) = (\zeta - z)^{\alpha}\tilde{h}(z,\zeta), \tag{7.4.53}$$

где $\tilde{h}(z,\zeta) \neq 0$ для любого переменного элемента $\zeta \in \overline{\Omega}$.

Так как h — конформное отображение, то в (7.4.53) $\alpha = 1$. Поэтому $|h(z,\zeta)| = |\zeta - z||\tilde{h}(z,\zeta)| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||\tilde{h}(z,\zeta)|$ и

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|h(z,\xi)|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\tilde{h}(z,\zeta)|}. \tag{7.4.54}$$

Покажем, что $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\tilde{h}(z,\zeta)|} = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и функция G, представленная формулой (7.4.54), удовлетворяет всем условиям определения 7.4.3.

Из определения h следует симметричность значений $h(z,\zeta) = h(\zeta,z)$. Следовательно и $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ из (7.4.54).

Так как $\zeta \in \partial\Omega$ переходит в точки единичной окружности, то для таких ζ $|h(z,\zeta)| = 1$. Поэтому для $\zeta \in \partial\Omega$ функция Грина $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln 1 = 0$, или $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Проверим, что функция g из (7.4.54) является гармонической, непосредственно вычисляя ее производные. Итак,

$$2\pi\frac{\partial g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_i} = |\tilde{h}|\Big(-\frac{1}{|\tilde{h}|^2}\Big)\frac{2Re\,\tilde{h}\frac{\partial Re\,\tilde{h}}{\partial y_i} + 2Im\,\tilde{h}\frac{\partial Im\,\tilde{h}}{\partial y_i}}{2|\tilde{h}|}, \quad i = 1,2,$$

где

$$\tilde{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = Re\,\tilde{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + iIm\,\tilde{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$|\tilde{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| = \Big\{\Big(Re\,\tilde{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big)^2 + \Big(Im\,\tilde{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big)^2\Big\}^{1/2}.$$

Вычисляя вторые производные, получим

$$2\pi\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_i^2}=\frac{2}{|\tilde{h}|^3}\frac{2\Big(Re\,\tilde{h}\frac{\partial Re\,\tilde{h}}{\partial y_i}+Im\,\tilde{h}\frac{\partial Im\,\tilde{h}}{\partial y_i}\Big)^2}{2|\tilde{h}|}-$$
$$-\frac{1}{|\tilde{h}|^2}\Big[\Big(\frac{\partial Re\,\tilde{h}}{\partial y_i}\Big)^2+\Big(\frac{\partial Im\,\tilde{h}}{\partial y_i}\Big)^2+Re\,\tilde{h}\frac{\partial^2 Re\,\tilde{h}}{\partial y_i^2}+Im\,\tilde{h}\frac{\partial^2 Im\,\tilde{h}}{\partial y_i^2}\Big], \qquad (7.4.55)$$

$i=1,2$. В (7.4.55) используем условия Даламбера-Эйлера

$$\frac{\partial Re\,\tilde{h}}{\partial y_1}=\frac{\partial Im\,\tilde{h}}{\partial y_2},\quad \frac{\partial Re\,\tilde{h}}{\partial y_2}=-\frac{\partial Im\,\tilde{h}}{\partial y_1},$$

гармонических функций $Re\,\tilde{h}$ и $Im\,\tilde{h}$, т. е.

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}Re\,\tilde{h}=\frac{\partial^2 Re\,\tilde{h}}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 Re\,\tilde{h}}{\partial y_2^2}=0, \Delta_{\boldsymbol{y}}Im\,\tilde{h}=\frac{\partial^2 Im\,\tilde{h}}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 Im\,\tilde{h}}{\partial y_2^2}=0. \qquad (7.4.56)$$

Суммируя выражения (7.4.55) по $i=1,2$ с учетом (7.4.56), получим

$$2\pi\Delta_{\boldsymbol{y}}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\Delta_{\boldsymbol{y}}\ln\frac{1}{|\tilde{h}(z,\zeta)|}=0.$$

$\otimes$

Примеры

Пример 7.4.1. В $\mathbb{R}^2$ в качестве области Ω возьмем полуплоскость $\Omega=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2|\,y_2>0\}$, которая представлена на рис. 7.3.

Область Ω рассматриваем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменных $\zeta=y_1+iy_2$. Если точка $z=x_1+ix_2$, то сопряженная ей $\bar{z}=x_1-ix_2$ соответствует точке $\boldsymbol{x}^\star=(x_1,-x_2)$.

Согласно теореме 7.4.8 отображение $h:\zeta\to h(z,\zeta)$ область Ω переводит на единичный круг комплексной плоскости переменных $h(z,\zeta)=$ $=Re\,h+iIm\,h$. Из теории функций комплексного переменного известно, конформное отображение следует искать в виде дробно-линейного отображения, где z переходит в нуль, а $\bar{z}$ — в бесконечно удаленную точку. Таким отображением может быть $h:\zeta\to h(z,\zeta)=\dfrac{\zeta-z}{\zeta-\bar{z}}$.

Следовательно, для представленной области Ω, представляющей собой полуплоскость, функция Грина

$$G:\Omega\times\Omega\ni(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\zeta-\bar{z}|}{|\zeta-z|}=$$

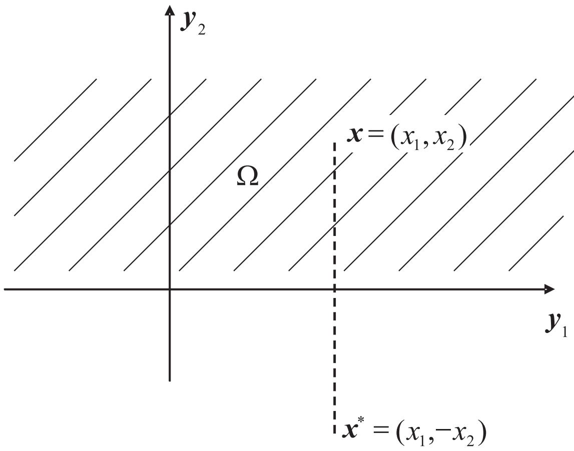

Рис. 7.3

$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\zeta - z|} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\zeta - \bar{z}|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2\right]^{1/2}}.$$

Пример 7.4.2. В качестве Ω возьмем круг с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ радиуса R (см. рис. 7.4).

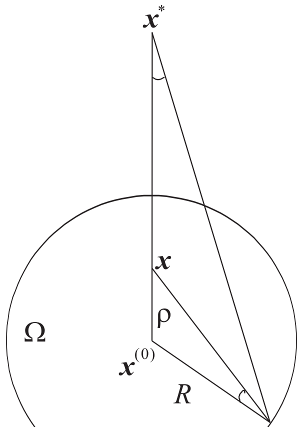

Рис. 7.4

Для каждой точки $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ существует сопряженная относительно окружности $\partial\Omega$ точка $\boldsymbol{x}^\star$. Точка $\boldsymbol{x}^\star$ лежит вне круга Ω на продолжении луча $\boldsymbol{x}^{(0)}\boldsymbol{x}$ и $\rho\rho^\star = R^2$, где $\rho = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)}|$, $\rho^\star = |\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{x}^{(0)}|$. Из равенства $\rho\rho^\star = R^2$ следует $\rho/R = R/\rho^\star$ и

$$x_i^\star = x_i^{(0)} + \frac{R^2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)}|^2}(x_i - x_i^{(0)}), \quad i = 1{,}2.$$

Согласно свойствам дробно-линейной функции функцию h следует искать в виде

$$h(z,\zeta) = a\frac{\zeta - z}{\zeta - z^\star}. \tag{7.4.57}$$

Так как точка $x_1 + ix_2$ с помощью h переводится в нуль, то $z^\star = x_1^\star + ix_2^\star$ должна переходить в бесконечно удаленную точку. Число $a = a_1 + ia_2$ определяется из условия

$$|h(z,\zeta)| = |a|\frac{|\zeta - z|}{|\zeta - z^\star|} = |a|\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|} = 1,$$

если $\zeta = y_1 + iy_2$ или точка $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)$ находится на окружности $\partial\Omega$. В этом случае, если $\zeta \in \partial\Omega$, то $|z^{(0)} - \zeta| = |\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{y}| = R$. Из условия $\rho\rho^\star = R^2$ следует, что треугольник $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{(0)}\boldsymbol{y}$ подобен треугольнику $\boldsymbol{x}^{(0)}\boldsymbol{x}^\star\boldsymbol{y}$. Отсюда, из пропорциональности сторон, получаем

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho^\star} = \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|}.$$

Таким образом, для $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$

$$|h| = |a|\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|} = |a|\frac{\rho}{R} = 1,$$

или $|a| = R/\rho$. В частности, можно выбрать $a = R/\rho$. Искомое конформное отображение (7.4.57) может быть выбрано в виде

$$h(z,\zeta) = \frac{R}{\rho}\frac{|\zeta - z|}{|\zeta - z^\star|}.$$

Функция Грина G определяется формулой

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho}\frac{1}{|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|}, \tag{7.4.58}$$

где $\rho = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(0)|$.

Пример 7.4.3. Область Ω представляет собой внешность круга радиуса R с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega(\boldsymbol{x}^{(0)},R)}$. В этом случае тоже $h(z,\zeta) = a\dfrac{\zeta - z}{\zeta - z^\star}$. Только здесь по сравнению с примером 7.4.2 $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^\star$ поменялись ролями (см. рис. 7.5), где $z = x_1 + ix_2$, $z^\star = x_1^\star + ix_2^\star$. Комплексное число a определяется из условия $|h| = 1$. Если $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$, то $|\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{y}| = R$. Функция Грина для внешности круга радиуса R с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ определяется также формулой (7.4.58), где $\boldsymbol{x}$ находится вне круга, а $\boldsymbol{x}^\star$ является сопряженной и находится на отрезке $\boldsymbol{x}^{(0)}\boldsymbol{x}$ и $\rho\rho^\star = R^2$, где $\rho = |\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}|$, $\rho^\star = |\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^\star|$, (см. рис. 7.5).

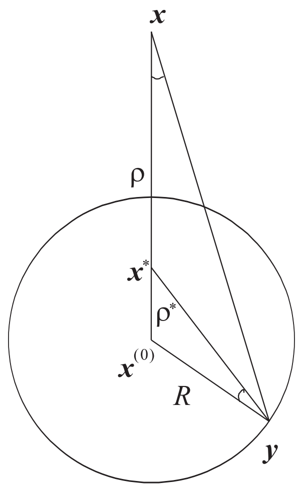

Рис. 7.5

2. $n \geqslant 3$. Для $n = 3$ функция Грина G имеет вид $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} + g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Придавая физический смысл, слагаемое $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}$ можно рассматривать как потенциал в точке $\boldsymbol{y}$ пространства $\mathbb{R}^3$, создаваемый зарядом величины $1/4\pi$, помещенным в точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Поэтому, следуя этой логике, величина $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ является также потенциалом в точке $\boldsymbol{y}$ каких-то зарядов. При этом, эти заряды необходимо выбирать определенной величины и размещать их в нужных точках, связанных с $\boldsymbol{x}$, таким образом, чтобы суммарная величина потенциала $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} + g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ равнялась нулю для любой точки $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ и любых $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Решения этой задачи в общем случае по сравнению с $n = 2$ нет, но в некоторых частных случаях для конкретных областей подход интерпретации физических потенциалов удается осуществить.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 7.4.4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и $\Omega = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 | \, y_3 > 0\}$, т. е. Ω – полупространство трехмерного евклидова пространства относительно третьей координаты выбранной декартовой системы координат, рис. 7.6.

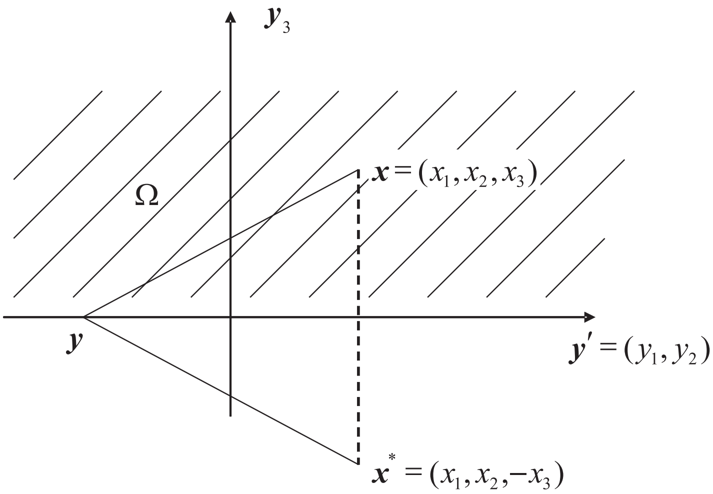

Рис. 7.6

Рассмотрим произвольную точку $\boldsymbol{x} \in \Omega$. В ней помещаем положительный заряд величиной $1/4\pi$. Из простых геометрических построений видно, что расстояния $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ и $|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|$ равны для любой точки $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,0) \in \partial\Omega = \{\boldsymbol{y} \in \overline{\Omega} | \, y_3 = 0\}$, где $\boldsymbol{x}^\star$ – симметричная относительно границы $\partial\Omega$ области Ω по отношению к $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^\star = (x_1,x_2, - x_3)$,если $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$. Поэтому если в точке $\boldsymbol{x}$ размещен заряд величиной $1/4\pi$, то в точку $\boldsymbol{x}^\star$ следует поместить заряд $-1/4\pi$. Тогда функция Грина для полупространства будет

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|}, \tag{7.4.59}$$

т. е. $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\dfrac{1}{4\pi} \frac{1}{|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|}$. Очевидно, что так определенная функция Грина по формуле (7.4.59) удовлетворяет всем условиям **G.1** – **G.5** определения 7.4.3.

Пример 7.4.5. Пусть Ω — полупространство n - мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, относительно y_n, $\Omega = \{\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n |\, y_n > 0\}$. Можно убедиться, что функция $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \supset \Omega \times \Omega \ni (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} - \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\frac{1}{|\boldsymbol{x}^\star-\boldsymbol{y}|^{n-2}},$$

является функцией Грина согласно определения 7.4.3, где $\boldsymbol{x}^\star = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$, если $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$.

Пример 7.4.6. Пусть $n = 3$. В качестве области Ω возьмем шар с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$ радиуса R. Оказывается, что в этом случае как и в примере 7.4.2 достаточно взять одну точку $\boldsymbol{x}^\star$, которая является сопряженной по отношению к $\boldsymbol{x}$ относительно сферы $S^{(R)}$ радиуса R с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$, т. е.

$$x_i^\star = x_i^{(0)} + \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}|^2}\left(x_i - x_i^{(0)}\right), \quad i = 1,2,3, \tag{7.4.60}$$

в которую следует поместить заряд $-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{R}{\rho}$, $\rho = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)}|$, чтобы нейтрализовать потенциал $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ на всей на всей сфере $S^{(R)} = \partial\Omega$.

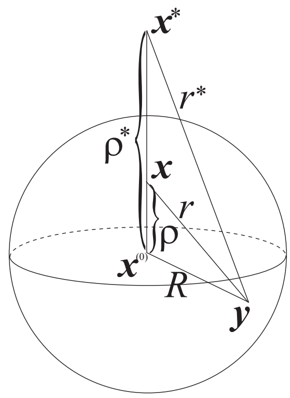

Рис. 7.7

Из рис. 7.7 видно, что точки $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^\star$, $\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\boldsymbol{y}$ лежат в одной плоскости и из определения точки $\boldsymbol{x}^\star$, $\rho\rho^\star = R^2$ и (7.4.60), $\rho^\star = |\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{x}^{(0)}|$, следует, что треугольники $\boldsymbol{x}^{(0)}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}^{(0)}\boldsymbol{x}^{\star}\boldsymbol{y}$ подобны, если $\boldsymbol{y} \in S^{(R)} = \partial\Omega$. Так как

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} + \frac{q}{4\pi|\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|}$$

и, если $\boldsymbol{y} \in S^{(R)}$, $\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} + \dfrac{q}{4\pi|\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|} = 0$. Отсюда $g = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{|\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$. Из подобия треугольников $\dfrac{\rho}{R} = \dfrac{R}{\rho^{\star}} = \dfrac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|}$. Таким образом, $g = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{R}{\rho}$ и

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - \frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho}\frac{1}{|\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|}.$$

Пример 7.4.7. В общем случае размерности $n \geqslant 3$ пространства $\mathbb{R}^n$ рассмотрим шар $\Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big)$ центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$ радиуса R в качестве области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функция Грина строится аналогично и

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} - \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}. \tag{7.4.61}$$

Действительно,

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} + \frac{q}{|\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}. \tag{7.4.62}$$

Если $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega = S^{(R)}$, то

$$\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} + \frac{q}{|\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} = 0.$$

Отсюда

$$q = -\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\left(\frac{r^{\star}}{r}\right)^{n-2} = -\frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2},$$

$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, $r^{\star} = |\boldsymbol{x}^{\star}-\boldsymbol{y}|$, $\rho = |\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}|$. Подставляя последнее выражение в (7.4.62), получим формулу значений функции Грина в виде (7.4.61).

Пример 7.4.8. В качестве области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, возьмем внешность $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big)}$ шара $\Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big)$ радиуса R с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)} \ldots ,x_n^{(0)})$. В этом случае, видно из предыдущих рассуждений, функция Грина G определяется формулой (7.4.61). Только здесь обозначения $\rho,r,r^\star$ имеют другой смысл: точка $\boldsymbol{x}$ является внешней по отношению к шару $\Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big)$, $\boldsymbol{x}^\star$ — внутренняя, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^\star$ являются сопряженными точками по отношению друг к другу относительно границы $\partial\Omega = S^{(R)}$ — сферы радиуса R с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

Замечание 7.4.4. На основе идеи потенциалов и сопряженных точек можно построить функцию Грина для многих других областей, граница которых представляет собой части гиперповерхностей и сфер разных радиусов.

7.4.7. Интеграл Пуассона для круга и шара

Используя формулы функции Грина можно получить формулы решений задачи Дирихле для определенных областей.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге ($n = 2$) и шаре $\Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big)$ ($n \geqslant 3$) с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)} \ldots ,x_n^{(0)})$ радиуса R, т. е. задачу

$$\Delta u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big), \tag{7.4.63}$$

$$u\big|_{S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \partial\Omega. \tag{7.4.64}$$

Формулу решения задачи (7.4.63) – (7.4.64) выводим не только ради упражнения, но она будет использована при изучении единственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Согласно формуле (7.4.48) решение задачи (7.4.63) – (7.4.64) через функцию Грина G записывается в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = -\int\limits_{S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})} \varphi(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}. \tag{7.4.65}$$

Для $n = 2$ функция Грина G определяется формулой (7.4.58), а для $n \geqslant 3$ — формулой (7.4.61). Эти два случая рассмотрим отдельно.

Пусть $n = 2$. Тогда

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho} \frac{1}{|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|},$$

где $\rho = |\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star)$, $x_i^\star = x_i^{(0)} + \dfrac{R^2}{\rho^2}(x_i - x_i^{(0)})$, $i = 1,2$. Как уже известно из свойств функции Грина для $\boldsymbol{y} \in S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})$ имеем $|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}| = \dfrac{R}{\rho}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. Для сокращенной записи введем еще обозначения: $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, $r^\star = |\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|$. Вычислим производную $\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial \boldsymbol{\nu}$ по вектору внешней нормали $\boldsymbol{\nu}$ в точках $\boldsymbol{y} \in S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})$. Итак,

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{2\pi} r\Big(-\frac{1}{r^2}\Big)\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{1}{2\pi}\frac{\rho r^\star}{R}\Big(-\frac{R}{\rho r^{\star 2}}\Big)\frac{\partial r^\star}{\partial \boldsymbol{\nu}}, \ \boldsymbol{y} \in S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)}), \tag{7.4.66}$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial r}{\partial y_i}\nu_i = \sum_{i=1}^{2}\frac{y_i - x_i}{r}\,\frac{y_i - x_i^{(0)}}{R} = \frac{1}{rR}\sum_{i=1}^{2}\big(y_i^2 - x_i y_i - y_i x_i^{(0)} + x_i x_i^{(0)}\big),$$

$$\frac{\partial r^\star}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \sum_{i=1}^{2}\frac{y_i - x_i^\star}{r^\star}\,\frac{y_i - x_i^{(0)}}{R} = \frac{\rho}{rR^2}\sum_{i=1}^{2}\Big[(y_i - x_i^{(0)})^2 - \frac{R^2}{\rho^2}(x_i - x_i^{(0)})(y_i - x_i^{(0)})\Big] =$$

$$= \frac{\rho}{r} - \frac{1}{r\rho}\big(x_i y_i - y_i x_i^{(0)} - x_i x_i^{(0)} + (x_i^{(0)})^2\big).$$

Подставляя последнее выражение в (7.4.66) и производя вычисления, получим

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\rho^2}{Rr^2} - \frac{1}{Rr^2}\sum_{i=1}^{2}\big(x_i y_i - y_i x_i^{(0)} - x_i x_i^{(0)} + (x_i^{(0)})^2 +$$

$$+ y_i^2 - x_i y_i - y_i x_i^{(0)} + x_i x_i^{(0)}\big)\Big] = \frac{1}{2\pi}\frac{\rho^2 - R^2}{Rr^2}.$$

Подставляя значение производной $\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial \boldsymbol{\nu}$ функции Грина G в (7.4.65), получим формулу решения задачи (7.4.63) – (7.4.64) для случая $n = 2$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})}\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2}\varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})}\frac{R^2 - |\boldsymbol{x}^{(0)}) - \boldsymbol{x}|^2}{R|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}\varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2 - \rho^2}{r^2}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

где θ — угол поворота в радианном измерении.

Пусть $n \geqslant 3$ и

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} - \frac{1}{(n-2)|S^{(1)}|}\Big(\frac{R}{\rho}\Big)^{n-2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}^\star-\boldsymbol{y}|^{n-2}}, \tag{7.4.67}$$

$x_i^\star = x_i^{(0)} + \frac{R^2}{\rho^2}(x_i - x_i^{(0)})$, $\rho = |\boldsymbol{x}^{(0)}) - \boldsymbol{x}|$, $i = 1,2,\ldots,n$, $r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, $r^\star = |\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}|$, $r^\star = Rr/\rho$. Как и для $n = 2$ вычисляем производную $\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial\boldsymbol{\nu}$ выражения (7.4.67), если $\boldsymbol{y} \in S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})$,

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \frac{n-2}{(n-2)|S^{(1)}|}\Big[-\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial r}{\partial\boldsymbol{\nu}} + \Big(\frac{R}{\rho}\Big)^{n-2}\frac{1}{(r^\star)^{n-1}}\frac{\partial r^\star}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big],$$

$$\frac{\partial r}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{Rr}\sum_{i=1}^{n}\big(y_i^2 - x_iy_i - y_ix_i^{(0)} + x_ix_i^{(0)}\big),$$

$$\frac{\partial r^\star}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \frac{\rho}{r} - \frac{1}{r\rho}\big(x_iy_i - y_ix_i^{(0)} - x_ix_i^{(0)} + (x_i^{(0)})^2\big).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{|S^{(1)}|}\Big(\frac{R}{\rho}\Big)^{n-2}\frac{\rho^{n-1}}{R^{n-1}r^{n-1}}\frac{\rho}{r} - \frac{1}{|S^{(1)}|}\frac{1}{Rr^n}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}\big(x_iy_i - y_ix_i^{(0)} - x_ix_i^{(0)} + (x_i^{(0)})^2 + y_i^2 - x_iy_i - y_ix_i^{(0)} + x_ix_i^{(0)}\big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{R|S^{(1)}|}\frac{\rho^2 - R^2}{r^n}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (7.4.65), получим решение задачи (7.4.63) – (7.4.64) для $n \geqslant 3$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{R|S^{(1)}|}\int\limits_{S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})}\frac{R^2-\rho^2}{r^n}\,\varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}, \tag{7.4.68}$$

запись которого совпадает с формулой и для $n = 2$. Поэтому формула (7.4.68) есть решение задачи (7.4.63) – (7.4.64) для всех $n = 2,3,\ldots$.

Рассмотрим внешнюю относительно шара $\Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big)$ радиуса R с центром в точке $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big)}, \tag{7.4.69}$$

$$u\Big|_{S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})} = \varphi(\boldsymbol{y}). \tag{7.4.70}$$

В этом случае функция Грина имеет вид (7.4.58) ($n = 2$) и (7.4.61) ($n \geqslant 3$). Вычисление производной $\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/\partial \boldsymbol{\nu}$ остается прежним как и в случае внутренней задачи Дирихле для шара $\Omega\big(\boldsymbol{x}^{(0)},R\big)$ за исключением направляющих косинусов $\nu_i = \dfrac{x_i^{(0)} - y_i}{R}$, так как здесь внешняя нормаль $\boldsymbol{\nu}$ направлена в обратную сторону к точке $\boldsymbol{x}^{(0)}$. В результате вычислений получим решение задачи (7.4.69) – (7.4.70) в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{R|S^{(1)}|} \int\limits_{S^{(R)}(\boldsymbol{x}^{(0)})} \frac{\rho^2 - R^2}{r^n} \varphi(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}, \quad n \geqslant 2 \tag{7.4.71}$$

и

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} \varphi(\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

для $n = 2$ через угол поворота θ, где $\rho = |\boldsymbol{x}^{(0)}) - \boldsymbol{x}|$, $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. Формула (7.4.68) называется формулой Пуассона для круга ($n = 2$) и шара ($n \geqslant 3$), а формула (7.4.71) – формула Пуассона для внешности круга ($n = 2$) или шара ($n \geqslant 3$).

7.4.8. О единственности решений внутренней задачи Неймана

В ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим внутреннюю задачу Неймана

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{7.4.72}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{7.4.73}$$

Если функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $f \in C(\Omega)$, $\psi \in C(\partial\Omega)$, то уравнение (7.4.72) и условие (7.4.73) можно рассматривать для каждой точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$.

Можно требования относительно гладкости функции u уменьшить и ограничиться тем, что $u \in C^2(\Omega)$, а условия (7.4.73) рассматривать как предельные значения, если для каждого $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ существует предел

$$\lim_{\Omega \ni \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}} \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega} = \psi(\boldsymbol{x}). \tag{7.4.74}$$

Предположим, что мы имеем условие Неймана в смысле (7.4.74), т. е. задачу (7.4.72), (7.4.74). В этом случае рассмотрим подобласть $\Omega^{(\varepsilon)} \subset \Omega$ области Ω с границей $\partial\Omega^{(\varepsilon)}$, $\overline{\Omega^{(\varepsilon)}} \subset \Omega$, $\overline{\Omega^{(\varepsilon)}}$ – замыкание области $\Omega^{(\varepsilon)}$, поверхность $\partial\Omega^{(\varepsilon)}$ находится от $\partial\Omega$ на расстоянии ε, т. е.

$$\inf |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \varepsilon.$$

Так как $u \in C^2(\Omega)$, то $u \in C^2(\overline{\Omega^{(\varepsilon)}})$. Для таких функций u и $v \equiv 1$, области $\Omega^{(\varepsilon)}$ и оператора Лапласа рассмотрим вторую формулу Грина (7.4.7). В результате получим с учетом уравнения (7.4.72) равенство

$$\int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega^{(\varepsilon)}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}s. \tag{7.4.75}$$

В (7.4.75) переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$. В силу (7.4.74) в пределе получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int\limits_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = 0. \tag{7.4.76}$$

В результате мы доказали следующую теорему.

Теорема 7.4.10. *Для того, чтобы существовало классическое решение задачи Неймана* (7.4.72), (7.4.74) *необходимо, чтобы выполнялось относительно функций f и ψ условие* (7.4.76).

В случае обобщенного решения внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона доказано, что условие (7.4.76) является необходимым и достаточным (см. теорему 6.2.1). В следующей главе будет доказано, что условие (7.4.76) является и достаточным для существования классического решения задачи (7.4.72), (7.4.74).

Теорема 7.4.11. *Если u – решение задачи* (7.4.72), (7.4.74)*, то функция $u + c : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) + c \in \mathbb{R}$ является также решением этой задачи, где c – произвольная константа из $\mathbb{R}$.*

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Действительно,

$$\Delta(u+c) = \Delta u + \Delta c = \Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

$$\frac{\partial(u+c)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega^{(\varepsilon)}} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega^{(\varepsilon)}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Теорема 7.4.12. *Два решения задачи* (7.4.72), (7.4.74) *могут отличаться друг от друга только на константу.*

Доказательство. Пусть $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ — два решения задачи (7.4.72), (7.4.74). Тогда для разности $\tilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)}$ имеем однородную задачу

$$\begin{gathered} \Delta\tilde{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \lim_{\Omega\ni\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}} \frac{\partial\tilde{u}(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big|_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{7.4.77}$$

Для функции $\tilde{u}$ и оператора Лапласа в $\Omega^{(\varepsilon)}$ рассмотрим первую формулу Грина (7.4.6), т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega^{(\varepsilon)}} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,v\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \Delta\tilde{u}\,v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{7.4.78}$$

В (7.4.78) полагаем $v = \tilde{u}$. Отсюда, в силу условий (7.4.77) после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\Big)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$

или

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i} \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, \ \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Следовательно, $\tilde{u} \equiv \mathrm{const}$. ⊗

7.4.9. О единственности решений внешней задачи Неймана

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, для которой справедлива формула Остроградского,

$n \geqslant 2$. В дополнении $C\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in C\Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega = \partial C\overline{\Omega},$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль в точках границы $\partial\Omega$, внешняя относительно области $C\Omega$.

Теорема 7.4.13. *Пусть $u : \mathbb{R}^n \supset C\Omega \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ — гармоническая функция в $C\Omega$. Тогда для производных первого порядка справедливы оценки*

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big| \leqslant \frac{c}{|\boldsymbol{x}|^{n-1}},\ n \geqslant 3,\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{7.4.79}$$

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big| \leqslant \frac{c}{|\boldsymbol{x}|^{2}},\ n = 2,\ i = 1,2, \tag{7.4.80}$$

где постоянная c не зависит от $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Доказательство. Поскольку Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^n$, то существует радиус $R > 0$, для которого $\Omega \subset \Omega(0,R)$, где $\Omega(0,R)$ — шар радиуса R с центром в начале координат. Для $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega(0,R)}$ в силу (7.4.71) (см. п. 7.4.7)

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|S^{(1)}|}\int\limits_{S^{(R)}} \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^n} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s, \tag{7.4.81}$$

где $\rho = |\boldsymbol{x}|$, $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, $n \geqslant 2$. Вычисляем производную функции u, представленной формулой (7.4.81),

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{|S^{(1)}|}\int\limits_{S^{(R)}} u(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|^2 - R^2}{R|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^n}\Big)\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{7.4.82}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|^2 - R^2}{R|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^n}\Big) = 2|\boldsymbol{x}|\frac{\partial|\boldsymbol{x}|}{\partial x_i}\frac{1}{R|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^n} - \tag{7.4.83}$$
$$-\frac{n\big(|\boldsymbol{x}|^2 - R^2\big)}{R|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n+1}}\frac{\partial\big(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|\big)}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{R|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^n} - \frac{n\big(|\boldsymbol{x}|^2 - R^2\big)(x_i - y_i)}{R|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n+1}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}.$$

При достаточно больших $|x| > 2R$, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \geqslant |\boldsymbol{x}| - R > \frac{|\boldsymbol{x}|}{2}$. Поэтому

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|^2 - R^2}{R|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\Big)\right| \leqslant \frac{c}{|\boldsymbol{x}|^{n-1}}, i = 1,\ldots,n, \quad n \geqslant 2. \tag{7.4.84}$$

Из соотношений (7.4.81) – (7.4.84) следует доказываемая оценка (7.4.79).

Так как $|\boldsymbol{x}|^2 - R^2 = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x_i - y_i)$, то при $n = 2$ из (7.4.83) можно получить более точную оценку

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|^2 - R^2}{R|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\Big)\right| \leqslant \frac{c}{|x|^2}, i = 1,2, n = 2. \tag{7.4.85}$$

Из соотношений (7.4.81) – (7.4.83) и оценки (7.4.85) следует доказываемое неравенство (7.4.80). $\otimes$

Теорема 7.4.14. *При $n \geqslant 3$ внешняя задача Неймана для уравнения Пуассона имеет не более одного решения в классе регулярных функций, удовлетворяющих неравенству* (7.4.36)*, а при $n = 2$ решение определяется с точностью до константы.*

Доказательство. Для разности $\tilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)}$ двух решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ внешней задачи Неймана для уравнения Пуассона и условия (7.4.36) имеем однородную задачу

$$\begin{aligned} &\Delta\tilde{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,\\ &\frac{\partial \tilde{u}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{7.4.86}$$

и выполняется для $\tilde{u}$ оценка (7.4.38).

Обозначим через $\Omega^{(\varepsilon)}$ область $\mathbb{R}^n$, для которой $\overline{\Omega} \subset \Omega^{(\varepsilon)}$ и граница $\partial\Omega^{(\varepsilon)}$ расположена от $\partial\Omega$ на расстоянии ε. Область $\Omega^{(\varepsilon)}$ поместим в шар $\Omega(0,R)$ с центром в начале координат достаточно большого радиуса R (см. рис. 7.8). Пусть $\widetilde{\Omega}^{(\varepsilon)} = \Omega(0,R) \setminus \overline{\Omega^{(\varepsilon)}}$. В замыкании $\overline{\widetilde{\Omega}^{(\varepsilon)}}$ области $\widetilde{\Omega}^{(\varepsilon)}$ функция $\tilde{u}$ принадлежит классу $C^2(\overline{\widetilde{\Omega}^{(\varepsilon)}})$.

Относительно области $\widetilde{\Omega}^{(\varepsilon)}$ рассматриваем первую формулу Грина (7.4.6) для функции $\tilde{u}$ и $v = \tilde{u}$. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} \Delta\tilde{u}\,\tilde{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\widetilde{\Omega}^{(\varepsilon)}}\Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\Big)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega^{(\varepsilon)}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\tilde{u}\,\mathrm{d}s + \int\limits_{S^{(R)}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\tilde{u}\,\mathrm{d}s. \tag{7.4.87}$$

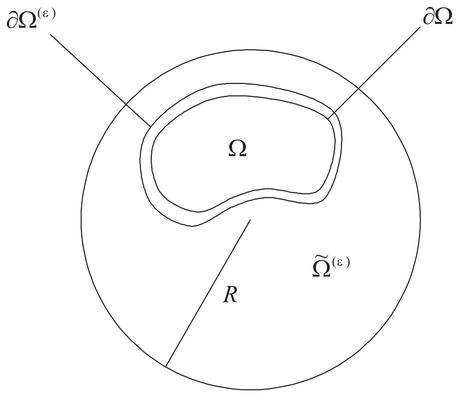

Рис. 7.8

В равенстве (7.4.87) переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$. В силу задачи (7.4.86) из (7.4.87) получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,R)\setminus\overline{\Omega}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{S^{(R)}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \tilde{u}\, \mathrm{d}s. \tag{7.4.88}$$

Для оценки правой части равенства (7.4.88) воспользуемся (7.4.38) и (7.4.79). В результате получим новую оценку

$$\left|\int\limits_{S^{(R)}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \tilde{u}\, \mathrm{d}s\right| \leqslant 4c^2 \frac{|S^{(R)}|}{R^{2n-3}} = 4c^2 \frac{R^{n-1}|S^{(1)}|}{R^{2n-3}} = 4c^2 \frac{|S^{(1)}|}{R^{n-2}}. \tag{7.4.89}$$

Правая часть (7.4.89) стремится к нулю при $R \to \infty$. Переходя к пределу при $R \to \infty$ в (7.4.88) с учетом оценки (7.4.89), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{C\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$

т. е. $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \equiv 0$ для $i = 1, \ldots, n$ или $\tilde{u} = \mathrm{const}$. А так как

$$|\tilde{u}| \leqslant 2c \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}, \quad \boldsymbol{x} \in C\Omega,$$

то отсюда следует, что $\tilde{u} \equiv 0$ в $C\Omega$ для $n \geqslant 3$.

Для случая $n = 2$ следует воспользоваться неравенством (7.4.38) и (7.4.80), получим

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \equiv 0 \ \text{ в } \ C\Omega,$$

так как
$$\left|\int\limits_{S^{(R)}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \tilde{u}\, \mathrm{d}s\right| \leqslant 4c^2 \frac{2\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$
это означает, что $\tilde{u} \equiv \mathrm{const}$ в $C\Omega$ для $n = 2$. $\otimes$

Замечание 7.4.5. Для задач Дирихле и Неймана в случае неограниченных областей относительно единственности их решений справедливы аналогичные теоремы как и для внешних задач. Доказательства являются фактически повторением доказательств соответствующих теорем для внешних задач.

7.5. Метод потенциалов

При построении функции Грина для $n = 3$ в п. 7.4.6 встречалось объяснение ее физического смысла через понятие потенциала, размещенного в точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ньютоновского заряда q. Этот потенциал в точке определяется величиной $\dfrac{q}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}$. Это же выражение можно рассматривать и как потенциал в точке $\boldsymbol{x}$, создаваемый зарядом q, помещенным в точке $\boldsymbol{y}$. Если зарядов несколько $q^{(1)}, \ldots, q^{(m)}$, расположенные в точках $\boldsymbol{y}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(m)}$ соответственно, то их суммарный потенциал V в точке $\boldsymbol{x}$ определяется суммой
$$V(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{q^{(i)}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^{(i)}|}.$$

Если же заряды расположены не точечно, а во всей области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с некоторой плотностью $\rho : \Omega \ni \boldsymbol{y} \to \rho(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$, то тогда суммарный потенциал в точке $\boldsymbol{x}$ таких зарядов будет определяться через интеграл как предельное значение частичных сумм
$$V(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Omega} \rho(\boldsymbol{y}) \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}. \qquad (7.5.1)$$

Такие потенциалы (7.5.1) называются *объемными потенциалами* в точках $\boldsymbol{x}$ зарядов, расположенных в области Ω.

Если же заряды расположены на некоторой поверхности Γ с некоторой плотностью $\sigma(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in \Gamma$, то суммарный потенциал определяется через поверхностный интеграл

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}. \tag{7.5.2}$$

и называются *потенциалом простого слоя*.

Имеется понятие потенциала двойного слоя. Пусть расположены на малом расстоянии $|\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}|$ две поверхности $\Gamma(\boldsymbol{y})$ и $\widetilde{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{y}})$ с распределенными источниками (зарядами), плотность которых соответственно равна $\sigma(\boldsymbol{y})$ и $-\sigma(\tilde{\boldsymbol{y}})$. Эти источники распределены таким образом, что для элементов соответствующей площади справедливо равенство

$$\sigma(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_{\boldsymbol{y}} = -\sigma(\tilde{\boldsymbol{y}})\mathrm{d}\widetilde{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{y}}).$$

Тогда потенциал, созданный этими слоями, равен

$$\int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} - \int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \sigma(\tilde{\boldsymbol{y}}) \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{y}}|}\, \mathrm{d}\widetilde{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{y}}) \cong$$

$$\cong \int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}| \Big\{ \frac{1}{|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}|} \Big[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{y}}|} \Big] \Big\} \mathrm{d}\Gamma(\tilde{\boldsymbol{y}}) \to$$

$$\to \int\limits_{\Gamma} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \Big) \mathrm{d}\Gamma(\tilde{\boldsymbol{y}}).$$

Здесь полагаем $\sigma(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}| = \mu(\boldsymbol{y})$ при $\tilde{\boldsymbol{y}} \to \boldsymbol{y}$, $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ – производная по нормали $\boldsymbol{\nu}$ в точках $\boldsymbol{y} \in \Gamma$. Представление

$$\mathscr{W}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \Big) \mathrm{d}\Gamma(\tilde{\boldsymbol{y}}). \tag{7.5.3}$$

называется *потенциалом двойного слоя* диполей плотности $\mu(\boldsymbol{y})$, расположенных на поверхности Γ.

Если обратиться к интегральному представлению (7.4.16) при $n = 3$, то его слагаемые представляют собой объемный потенциал по области Ω и потенциалы простого и двойного слоя по границе $\partial\Omega$. Для гармонических функций в представлении (7.4.18) присутствуют только потенциалы простого и двойного слоя.

7.5.1. Потенциалы простого и двойного слоя

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется кусочно-гладкая гиперповерхность Γ. Выражение поверхностного потенциала

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y}) \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}s, & n \geqslant 3, \\ \int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y}) \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}s, & n = 2, \end{cases} \tag{7.5.4}$$

называется потенциалом простого слоя в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, где значение $\sigma(\boldsymbol{y})$ функции $\sigma : \Gamma \ni \boldsymbol{y} \to \sigma(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ называется плотностью потенциала $\mathscr{V} : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \to \mathscr{V}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, заданной на поверхности Γ.

Функция

$$\mathscr{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \int\limits_{\Gamma} \mu(\boldsymbol{y}) \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big(\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big)\mathrm{d}s, & n \geqslant 3, \\ \int\limits_{\Gamma} \mu(\boldsymbol{y}) \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}s, & n = 2, \end{cases} \tag{7.5.5}$$

называется *потенциалом двойного слоя* с заданной плотностью $\mu : \Gamma \ni \boldsymbol{y} \to \mu(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали в точках $\boldsymbol{y} \in \Gamma$.

Из формул (7.5.4) и (7.5.5) видно, что для $\boldsymbol{x} \notin \Gamma$ функция $\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ не имеет особенностей. Поэтому потенциалы простого и двойного слоя представляют собой гладкие функции для таких же $\boldsymbol{x}$.

Сформулируем в виде теоремы почти очевидное свойство потенциалов простого и двойного слоя.

Теорема 7.5.1. *В любой области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega} \cap \overline{\Gamma} = \emptyset$, *функции* $\mathscr{V}$ *и* $\mathscr{W}$ *потенциалов простого и двойного слоя* (7.5.4) *и* (7.5.5) *являются гармоническими функциями,* $\emptyset$ *— пустое множество,* $\overline{\Omega}$ *и* $\overline{\Gamma}$ *— замыкания* Ω *и* Γ.

Доказательство. Для сокращения записи введем обозначение ядра потенциала простого слоя следующим образом:

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} & n \geqslant 3, \\ \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, & n = 2, \end{cases}$$

В п. 7.4.2 показано, что ядро $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ является гармонической функцией как по переменным $\boldsymbol{x}$, так и по переменным $\boldsymbol{y}$, если $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$.

Рассмотрим значение оператора Лапласа от функции $\mathscr{V}$,

$$\Delta\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y})\Delta_{\boldsymbol{x}}\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = 0,$$

Аналогично,

$$\Delta\mathscr{W}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\boldsymbol{y})\Delta_{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Delta_{\boldsymbol{x}}\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = 0.$$

$\otimes$

Если $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, то для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ функция $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ имеет особенность. В этом случае потенциалы простого и двойного слоя следует рассматривать как интегральные операторы, ядра которых $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и $\partial/\partial\boldsymbol{\nu}\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ имеют особенность. Эта особенность, как видно из $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, является слабой особенностью.

Согласно теореме 7.5.1 функции $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ являются гармоническими для любой точки $\boldsymbol{x} \notin \overline{\Gamma}$. Это свойство будет использовано для отыскания решений в виде потенциалов простого и двойного слоя задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Однако для этих задач должны выполняться граничные условия на границе рассматриваемой области. В точках границы ядра искомых потенциалов будут иметь особенность. Поэтому необходимо рассмотреть свойства и поведение потенциалов простого и двойного слоя, когда $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ и пересекает ее.

Свойства интегральных операторов (7.5.4) и (7.5.5) зависят также от гладкости поверхности Γ. Они справедливы, например, если Γ является поверхностью Ляпунова.

Определение 7.5.1. Гиперповерхность Γ называется *поверхностью Ляпунова*, если она удовлетворяет следующим условиям:

L 1. В каждой точке поверхности Γ существует нормаль.

L 2. Для любых точек $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \Gamma$ векторов нормалей $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}$ и $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}$ выполняется условие

$$\theta \leqslant L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{\alpha},$$

де θ — угол между векторами $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}$ и $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}$, L и α — некоторые положительные постоянные, одни и те же для всех точек Γ, см. рис. 7.9.

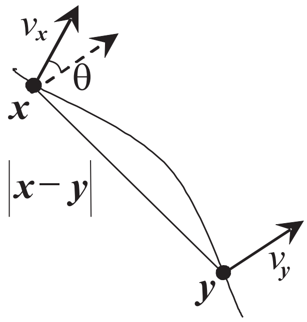

Рис. 7.9

Предполагается, что векторы $\boldsymbol{\nu_x}$ и $\boldsymbol{\nu_y}$ находятся по одну сторону от поверхности Г. Это означает, что непрерывно передвигая их по Г до совпадения точек $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ векторы $\boldsymbol{\nu_x}$ и $\boldsymbol{\nu_y}$ тоже совпадут по направлению.

Ядром потенциала простого слоя $\mathscr{V}$ является функция $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, потенциала двойного слоя $\mathscr{W}$ – функция $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Как известно, производная $\partial/\partial\boldsymbol{\nu_y}$ особенность $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ увеличивает. Поэтому функция $\mathscr{V}$ является более гладкой по сравнению с $\mathscr{W}$. Согласно теореме 7.5.1 $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ в областях пространства $\mathbb{R}^n$, находящихся вне гиперповерхности Г, являются непрерывными функциями и даже гармоническими. При определенных условиях потенциал простого слоя $\mathscr{V}$ представляет собой непрерывную функцию во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\mathscr{W}$ – непрерывная функция на всей гиперповерхности Г.

Если гиперповерхность Г удовлетворяет условиям $L1.$ и $L2.$ определения 7.5.1, то будем говорить, что она является *поверхностью класса L.*

Лемма 7.5.1. *Если Г – ограниченное замкнутое множество и поверхность класса L, то интеграл $\mathscr{W}$ с плотностью $\mu \equiv 1$ принадлежит классу $C(\Gamma)$ и, следовательно, существует такая константа $c < +\infty$, для которой*

$$|\mathscr{W}(\boldsymbol{x})| = \left|\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant c, \quad n \geqslant 3, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{7.5.6}$$

$$|\mathscr{W}(\boldsymbol{x})| = \left|\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant c, \quad n = 2, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{7.5.7}$$

Доказательство. Пусть $n > 2$. Вычислим производную

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right) &= -(n-2)\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-1}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \\ &= -(n-2)\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k-x_k}{|x-\boldsymbol{y}|}\nu_k.\end{aligned} \tag{7.5.8}$$

В выражении (7.5.8) введем вектор $\boldsymbol{r}$ с началом в точке $\boldsymbol{y} \in \Gamma$, который направлен в точку $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Тогда $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ и

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|^{n-2}}\right) =\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right) &= -(n-2)\frac{1}{r^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\cos(\boldsymbol{r},y_k)\nu_k = \\ &= -(n-2)\frac{1}{r^{n-1}}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu}),\end{aligned}$$

где $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$. Последнее соотношение представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = -(n-2)\frac{1}{r^{n-1-\alpha/2}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})}{r^{\alpha/2}}, \tag{7.5.9}$$

где α из определения 7.5.1. В (7.5.9) в силу условия L1 (определение 7.5.1) функция $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})$ является непрерывной на Γ как по переменным $\boldsymbol{x}$, так и по переменным $\boldsymbol{y}$. Следовательно, и функция $r^{-\alpha/2}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})$ также является непрерывной на Γ для $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$. Заметим, что, согласно определению 7.5.1, $r^{-\alpha/2}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu}) \to 0$ при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$. Доопределяя функцию $r^{-\alpha/2}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})$ нулем при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, получим непрерывную функцию на Γ.

Так как $n-1-\alpha/2 < n-1$, то потенциал двойного слоя $\mathscr{W}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}$ представляет собой интегральный оператор со слабой особенностью, который непрерывную на Γ функцию $r^{-\alpha/2}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu})$ переводит в непрерывную, $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Это следует из свойств интегральных операторов со слабой особенностью и теоремы Арцела. Отсюда следует и оценка (7.5.6) для $n \geqslant 3$, так как Γ — ограниченное замкнутое множество.

Если $n = 2$, то

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{r}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu}).$$

Отсюда следует в силу теоремы Арцела, что функция $\mathscr{W}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}s$ является на Γ непрерывной и справедлива оценка (7.5.7). $\otimes$

Свойством непрерывной функции обладает потенциал двойного слоя и в случае, когда присутствует плотность μ, обладающая достаточной гладкостью. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.5.2. *Если* Γ *— поверхность класса* L *и представляет собой ограниченное замкнутое множество, плотность* μ *— непрерывная функция, заданная на* Γ*, то потенциал двойного слоя* (7.5.5) *является непрерывной функцией на* Γ.

Доказательство теоремы 7.5.2 является фактически повторением доказательства леммы 7.5.1.

Если переменные $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ потенциала двойного слоя (7.5.5) изменяются только на гиперповерхности Γ, то в этом случае значения его называются *прямыми значениями* $\mathscr{W}^{(0)}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Gamma$.

Потенциал простого слоя (7.5.4) обладает такими же свойствами тоже. Поскольку его ядро имеет меньшую особенность, то он представляет собой более гладкую функцию.

Теорема 7.5.3. *Пусть* Γ *— поверхность класса* L *и представляет собой замкнутое множество, плотность* σ *в* (7.5.4) *— измеримая и ограниченная функция. Тогда потенциал простого слоя* (7.5.4) *— непрерывная функция во всем пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Если $\boldsymbol{x} \notin \Gamma$, то, очевидно, ядро $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ потенциала простого слоя в этом случае не имеет особенности и является непрерывной функцией. Следовательно и $\mathscr{V}$ — непрерывная функция в $\mathbb{R}^n \backslash \Gamma$.

Пусть $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Сначала покажем, что интегралы (7.5.4) сходятся. Поверхность Γ разобьем на две части. Одна из них Γ', которая находится внутри сферы $S^{(\rho)}(\boldsymbol{x})$ радиуса ρ с центром в точке $\boldsymbol{x}$. Вторая часть $\Gamma'' = \Gamma \backslash \Gamma'$. В этом случае

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y}) \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma \backslash \Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y}) \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s.$$

Очевидно, что при интегрировании по $\Gamma \backslash \Gamma'$ ядро $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ не имеет особенностей и, следовательно, интеграл

$$\int\limits_{\Gamma''} \sigma(\boldsymbol{y}) \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s$$

существует.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y})\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s$ для $n \geqslant 3$, т. е.

$$\int\limits_{\Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\mathrm{d}s = \int\limits_{\Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{1}{r^{n-2}}\mathrm{d}s = \int\limits_{\widetilde{\Gamma}'} \sigma(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}))\frac{\mathrm{d}\xi_1\ldots\mathrm{d}\xi_{n-1}}{\tilde{r}^{n-2}\cos(\boldsymbol{\nu},\xi_n)}.$$

Здесь $\widetilde{\Gamma}'$ — проекция Γ' на касательную гиперплоскость к гиперповерхности Γ, проходящую через точку $\boldsymbol{x}$, $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые переменные локальной декартовой системы с началом координат в точке $\boldsymbol{x}$, где ось независимой переменной ξ_n является перпендикулярной прямой к гиперповерхности Γ, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали в точках гиперповерхности Γ', $\cos(\boldsymbol{\nu},\xi_n)$ — косинус угла между вектором $\boldsymbol{\nu}$ и осью переменных ξ_n, $\tilde{r}$ — проекция r и $\tilde{r} = |\boldsymbol{x} - (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},0)|$. Так как σ — ограниченная функция, Γ — поверхность класса L, при достаточно малом выборе радиуса ρ $|\sigma(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}))/\cos(\boldsymbol{\nu},\xi_n)| \leqslant c \equiv \mathrm{const}$. Следовательно

$$\left|\int\limits_{\Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{1}{r^{n-2}}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant c\int\limits_{\widetilde{\Gamma}'} \frac{1}{r^{n-2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}' \leqslant \tilde{c},$$

т. е. интеграл $\int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}s$ существует, $n \geqslant 3$. Аналогично доказывается существование и интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y})\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}s$$

для $n = 2$.

Докажем теперь, что в любой точке $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ потенциал (7.5.4) является непрерывной функцией. Пусть $\boldsymbol{z}$ — произвольная точка пространства $\mathbb{R}^n$, для которой $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}| < \delta$. Интеграл (7.5.4) разобьем на два слагаемых

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y})\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y})\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = \mathscr{V}'(\boldsymbol{x}) + \mathscr{V}''(\boldsymbol{x}),$$

где точки $\boldsymbol{y}$ из Γ' принадлежат шару с центром в точке $\boldsymbol{x}$ радиуса ρ, т. е. $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leqslant \rho$ для всех $\boldsymbol{y} \in \Gamma'$. Рассмотрим разность $\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) - \mathscr{V}(\boldsymbol{z})$, для которой справедливо неравенство

$$|\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) - \mathscr{V}(\boldsymbol{z})| \leqslant |\mathscr{V}'(\boldsymbol{x})| + |\mathscr{V}'(\boldsymbol{z})| + |\mathscr{V}''(\boldsymbol{x}) - \mathscr{V}''(\boldsymbol{z})|.$$

Согласно лемме 4.5.2 при достаточно малом радиусе ρ

$$|\mathscr{V}'(\boldsymbol{x})|,|\mathscr{V}'(\boldsymbol{z})| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.5.10}$$

В интегралах $\mathscr{V}''(\boldsymbol{x})$ и $\mathscr{V}''(\boldsymbol{z})$ функции $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ являются непрерывными. Следовательно, $|\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})| \leqslant \tilde{\varepsilon}$ для любой точки $\boldsymbol{y} \in \Gamma\backslash\Gamma'$, если $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}| < \delta$. За счет выбора числа $\tilde{\varepsilon} > 0$ через δ (см. лемму 4.5.1)

$$|\mathscr{V}''(\boldsymbol{x}) - \mathscr{V}''(\boldsymbol{z})| = \left|\int\limits_{\Gamma\backslash\Gamma'} \sigma(\boldsymbol{y})(\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.5.11}$$

В силу неравенств (7.5.10) и (7.5.11)

$$|\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) - \mathscr{V}(\boldsymbol{z})| \leqslant \varepsilon \tag{7.5.12}$$

как только $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}| < \delta$. Таким образом неравенство (7.5.12) есть критерий непрерывности потенциала простого слоя (7.5.4) и для любой точки $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. $\otimes$

Из теоремы 7.5.3 следует, что при пересечении гиперповерхности Γ, где ядро потенциала простого слоя имеет особенность, потенциал изменяется непрерывно (является гладкой функцией). Возникает вопрос: как ведет себя потенциал двойного слоя при пересечении гиперповерхности Γ. Так как ядро потенциала двойного слоя имеет большую особенность по сравнению с ядром потенциала простого слоя, то при переходе через Γ потенциал двойного слоя терпит разрыв, связанный с плотностью μ. Сформулируем и докажем это свойство.

В подынтегральной функции интеграла двойного слоя единичный вектор нормали $\boldsymbol{\nu}$, по которому вычисляется производная $\partial/\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, можно выбрать как по одну сторону от Γ, так и по другую. От этого зависят предельные значения потенциала двойного слоя. Пусть Γ является границей некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (не обязательно ограниченной). Тогда в потенциале двойного слоя $\boldsymbol{\nu}$ является внешней относительно Ω нормалью к гиперповерхности Γ.

Лемма 7.5.2 (Интеграл Гаусса). *Если гиперповерхность Γ является гиперповерхностью класса L, то для $\mu \equiv 1$ потенциал двойного слоя определяется формулой*

$$\mathscr{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -(n-2)|S^{(1)}|, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ -\frac{(n-2)}{2}|S^{(1)}|, & \boldsymbol{x} \in \Gamma, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega}, \end{cases} \tag{7.5.13}$$

где $|S^{(1)}|$ — площадь единичной сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, при $n = 2$ вместо $n - 2$ берется значение, равное 1, $\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Опишем вокруг этой точки сферу $S^{(\varepsilon)}$ радиуса ε. Поскольку Ω — открытое множество, то за счет достаточно малого радиуса ε для любой точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$ всегда можно выбрать сферу $S^{(\varepsilon)}$, которая полностью содержится в Ω. В области $\Omega\backslash\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)}$ функция $\mathscr{P}(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})$ относительно $\boldsymbol{y}$ является гармонической, где $\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)}$ — замыкание шара $\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке $\boldsymbol{x}$. Границей $\partial(\Omega\backslash\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)})$ области $\Omega\backslash\overline{\Omega(\boldsymbol{x},\varepsilon)}$ является объединение $\Gamma \cup S^{(\varepsilon)}$ гиперповерхности Γ и сферы $S^{(\varepsilon)}$. Согласно теореме 7.4.4

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s + \int\limits_{S^{(\varepsilon)}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = 0. \tag{7.5.14}$$

Но на $S^{(\varepsilon)}$ нормаль $\boldsymbol{\nu_y}$ направлена против радиуса r. Отсюда для $n \geqslant 3$

$$\int\limits_{S^{(\varepsilon)}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = -\int\limits_{S^{(\varepsilon)}} \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}\,\mathrm{d}s = (n-2)\int\limits_{S^{(\varepsilon)}} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\,\mathrm{d}s =$$
$$= (n-2)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}|S^{(\varepsilon)}| = (n-2)|S^{(1)}|,$$

для $n = 2$

$$\int\limits_{S^{(\varepsilon)}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = -\int\limits_{S^{(\varepsilon)}} \frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S^{(\varepsilon)}} \mathrm{d}s = \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} = 2\pi = |S^{(1)}|.$$

Из равенства (7.5.14) и последних соотношений следует формула (7.5.13) для $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Пусть $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Около точки $\boldsymbol{x}$ опять строим сферу $S^{(\varepsilon)}$ радиуса ε с центром в точке $\boldsymbol{x}$. Часть Γ, которая находится вне сферы $S^{(\varepsilon)}$ обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ (см. рис. 7.10). Часть сферы $S^{(\varepsilon)}$, которая находится в Ω, обозначим через $\widetilde{S}^{(\varepsilon)}$. Подобласть области Ω с границей $\widetilde{\Gamma} \cup \widetilde{S}^{(\varepsilon)} = \partial\widetilde{\Omega}$ обозначим через $\widetilde{\Omega}$.

Опять в силу теоремы 7.4.4

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}s + \int\limits_{\widetilde{S}^{(\varepsilon)}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}s = 0. \tag{7.5.15}$$

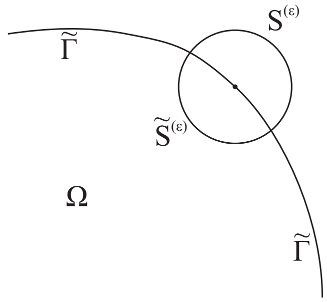

Рис. 7.10

Вычисляя интеграл $\int\limits_{\widetilde{S}^{(\varepsilon)}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s$, получим

$$\int\limits_{\widetilde{S}^{(\varepsilon)}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = \frac{C(\varepsilon)}{2}|\widetilde{S}^{(\varepsilon)}|,$$

где

$$C(\varepsilon) = \begin{cases} (n-2)/\varepsilon^{n-1}, & n \geqslant 3, \\ 1/\varepsilon, & n = 2. \end{cases}$$

Переходим к пределу в (7.5.15) при $\varepsilon \to 0$. Так как Γ — гиперповерхность класса L, в пределе получим (7.5.13) для $\boldsymbol{x} \in \Gamma$.

Если $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$, то функция $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ является гармонической функцией относительно $\boldsymbol{y}$ в области Ω. Отсюда в силу теоремы 7.4.4 сразу следует формула (7.5.13) для $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$. $\otimes$

В каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ рассматривается предельное значение $\mathscr{W}^+(\boldsymbol{x})$ потенциала двойного слоя с одной стороны Γ и $\mathscr{W}^-(\boldsymbol{x})$ — предельное значение с другой стороны Γ и прямое значение $\mathscr{W}^{(0)}(\boldsymbol{x})$ функции $\mathscr{W}$. Более подробно это означает следующее.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, которой Γ является границей или частью ее. Обозначим через $C\Omega$ — дополнение к Ω, т. е. $C\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω. Тогда $\Gamma \subset \overline{\Omega} \cap \overline{C\Omega}$.

Единичные векторы $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}$ в точках $\boldsymbol{y}$ гиперповерхности Γ являются внешними относительно области Ω. По этим векторам берутся производные $\partial/\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ в подынтегральном выражении потенциала двойного слоя. Теперь обозначим через $\mathscr{W}^+(\boldsymbol{x})$ предельное из области Ω значение функции $\mathscr{W}$ в точке $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, т. е.

$$\mathscr{W}^+(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \in \Omega}} \mathscr{W}(\boldsymbol{z}),$$

см. рис. 7.11. Аналогично, пусть $\boldsymbol{z} \in C\Omega$. Тогда

$$\mathscr{W}^-(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{z}\in C\Omega}} \mathscr{W}(\boldsymbol{z}).$$

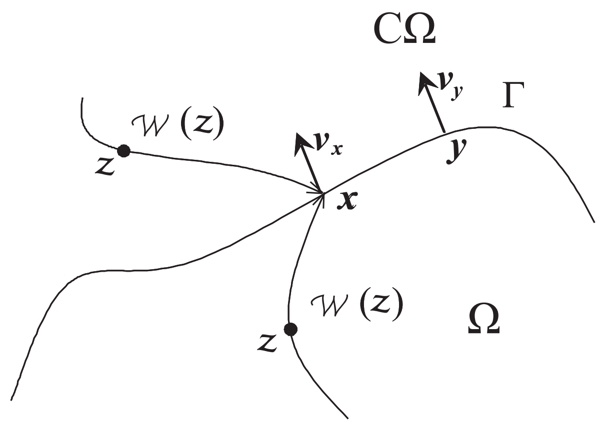

Рис. 7.11

Теорема 7.5.4. *Пусть* Γ *— поверхность класса* L *и* $\mu \in C(\overline{\Gamma})$. *Тогда*

$$\mathscr{W}^+(\boldsymbol{x}) = -\frac{(n-2)|S^{(1)}|}{2}\mu(\boldsymbol{x}) + \mathscr{W}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{7.5.16}$$

$$\mathscr{W}^-(\boldsymbol{x}) = \frac{(n-2)|S^{(1)}|}{2}\mu(\boldsymbol{x}) + \mathscr{W}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{7.5.17}$$

где $\frac{(n-2)|S^{(1)}|}{2} = \pi$ *при* $n = 2$, $\overline{\Gamma}$ *— замыкание множества* Γ, $|S^{(1)}|$ *— площадь сферы единичного радиуса,* $n = 2{,}3{,}4,\ldots$.

Доказательство. Рассмотрим значение $\mathscr{W}(\boldsymbol{z})$ потенциала двойного слоя, которое представим в виде

$$\mathscr{W}(\boldsymbol{z}) = \widetilde{\mathscr{W}}(\boldsymbol{z}) + \mu(\boldsymbol{x})\mathscr{W}^1(\boldsymbol{z}), \tag{7.5.18}$$

где

$$\widetilde{\mathscr{W}}(\boldsymbol{z}) = \int\limits_{\Gamma} [\mu(\boldsymbol{y}) - \mu(\boldsymbol{x})] \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s,$$

$$\mathscr{W}^1(\boldsymbol{z}) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s,$$

$\boldsymbol{x}$ — точка, принадлежащая Γ, для которой хотим доказать формулу (7.5.16). $\widetilde{\mathscr{W}}$ — потенциал двойного слоя, плотность которого $\tilde{\mu}(\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{y}) - \mu(\boldsymbol{x})$ обращается в ноль в точке $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. В связи с этим докажем, что функция $\widetilde{\mathscr{W}}$ является непрерывной в точке $\boldsymbol{x}$.

Непрерывность $\widetilde{\mathscr{W}}$ будем доказывать путем проверки определения непрерывных функций. Пусть $\Omega(\boldsymbol{x},\delta)$ — шар с центром в точке $\boldsymbol{x}$ достаточно малого радиуса δ. Шар $\Omega(\boldsymbol{x},\delta)$ разделит Γ на две части Γ' и Γ'', т. е. $\Gamma' \subset \Omega(\boldsymbol{x},\delta)$ и $\Gamma'' \notin \Omega(\boldsymbol{x},\delta)$. Пусть $\widetilde{\mathscr{W}}^0(\boldsymbol{x})$ — прямое значение потенциала двойного слоя $\widetilde{\mathscr{W}}$ в точке $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Тогда

$$|\widetilde{\mathscr{W}}(\boldsymbol{z}) - \widetilde{\mathscr{W}}^0(\boldsymbol{x})| \leqslant |\widetilde{\mathscr{W}}'(\boldsymbol{z})| + |\widetilde{\mathscr{W}}'^0(\boldsymbol{x})| + |\widetilde{\mathscr{W}}''(\boldsymbol{z}) - \widetilde{\mathscr{W}}''^0(\boldsymbol{x})|, \quad (7.5.19)$$

где

$$\widetilde{\mathscr{W}}'(\boldsymbol{z}) = \int\limits_{\Gamma'} \tilde{\mu}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}}\, \mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s,$$

$$\widetilde{\mathscr{W}}''(\boldsymbol{z}) = \int\limits_{\Gamma''} \tilde{\mu}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}}\, \mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s.$$

Поскольку $\Gamma' \subset \Omega(\boldsymbol{x},\delta)$, то для достаточно малого δ $|\tilde{\mu}(\boldsymbol{y})| < c^{(1)}\delta$ для $\boldsymbol{y} \in \Gamma'$. Тогда, оценивая интегралы на основании лемм 7.5.1 и 7.5.2,

$$|\widetilde{\mathscr{W}}'(\boldsymbol{z})|, |\widetilde{\mathscr{W}}'^0(\boldsymbol{x})| \leqslant c^{(1)}\delta \left(\left| \int\limits_{\Gamma'} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s \right|, \left| \int\limits_{\Gamma'} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s \right| \right) \leqslant$$

$$\leqslant c^{(1)}\delta \left(\left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s \right|, \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s \right| \right) \leqslant c^{(1)} c\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как в интегральных выражениях $\widetilde{\mathscr{W}}''(\boldsymbol{z})$ и $\widetilde{\mathscr{W}}''^0(\boldsymbol{x})$ интегрирование ведется по части Γ'', исключающей особенность ядер $\mathscr{P}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$ и $\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, то из непрерывности функции $\widetilde{\mathscr{W}}''$ при достаточно малом $\tilde{\delta}$

$$|\widetilde{\mathscr{W}}''(\boldsymbol{z}) - \widetilde{\mathscr{W}}''(\boldsymbol{x})| < \frac{\varepsilon}{3},$$

если $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| < \tilde{\delta}$. Из последних двух неравенств и соотношения (7.5.19) следует оценка

$$|\widetilde{\mathscr{W}}(\boldsymbol{z}) - \widetilde{\mathscr{W}}^0(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$ как только точка $\boldsymbol{z}$ близка к точке $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, т. е. доказали непрерывность функции $\widetilde{\mathscr{W}}$ в точке $\boldsymbol{x}$. Отсюда имеем

$$\lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}} \widetilde{\mathscr{W}}(\boldsymbol{z}) = \widetilde{\mathscr{W}}^0(\boldsymbol{x}) = \mathscr{W}^0(\boldsymbol{x}) + \frac{(n-2)}{2}|S^{(1)}|\mu(\boldsymbol{x}). \tag{7.5.20}$$

Переходим к пределу в равенстве (7.5.18) при $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{x}$. Отсюда в силу (7.5.20) и леммы 7.5.2 получим

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{z}\in\Omega}} \mathscr{W}(\boldsymbol{z}) = \mathscr{W}^+(\boldsymbol{x}) = \frac{(n-2)}{2}|S^{(1)}|\mu(\boldsymbol{x}) - (n-2)|S^{(1)}|\mu(\boldsymbol{x}) + \mathscr{W}^0(\boldsymbol{x}) = \\ = -\frac{(n-2)}{2}|S^{(1)}|\mu(\boldsymbol{x}) + \mathscr{W}^0(\boldsymbol{x}),$$

т. е. соотношение (7.5.16), где $(n-2)|S^{(1)}| = 2\pi$ при $n = 2$.

Аналогично получается и соотношение (7.5.17). $\otimes$

Следствие 7.5.1. Вычитая из равенства (7.5.16) равенство (7.5.17), получим формулу о скачке предельных соотношений на Γ потенциала двойного слоя через плотность μ

$$\mathscr{W}^+(\boldsymbol{x}) - \mathscr{W}^-(\boldsymbol{x}) = -(n-2)|S^{(1)}|\mu(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{7.5.21}$$

Согласно теореме 7.5.3, если плотность σ потенциала простого слоя — измеримая и ограниченная функция, то потенциал простого слоя $\mathscr{V}$ из класса непрерывных функций $C(\mathbb{R}^n)$.

В силу теоремы 7.5.1 в точках $\boldsymbol{x}$, не принадлежащих гиперповерхности Γ, с помощью которой определен потенциал простого слоя (7.5.2), существуют производные, в том числе, и все производные первого порядка функции $\mathscr{V}$. При переходе через гиперповерхность Γ производные первого порядка потенциала простого слоя терпят разрыв аналогично тому, как это свойство проявляется у самого потенциала двойного слоя $\mathscr{W}$ в виде соотношений (7.5.16), (7.5.17) и (7.5.21).

Обозначим через $\mathscr{N}$ векторное поле единичных векторов $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = (\nu_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \nu_n(\boldsymbol{x}))$ во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, в котором векторы $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ в точках $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ совпадают с единичными векторами нормалей относительно Γ. Кроме того, если Γ является границей или частью границы области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то векторы $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ в точках $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ являются внешними относительно Ω. Предполагается, что векторное поле $\mathscr{N}$ является непрерывным, т. е. функции ν_i из класса $C(\mathbb{R}^n)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Если задано векторное поле $\mathscr{N}$, то для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, если на Γ задана плотность σ, можно рассматривать потенциал простого слоя (7.5.2) и его производные

$$\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu_x}}\right)(\,x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_x}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s, \quad \boldsymbol{\nu_x} \in \mathscr{N}.$$

Вычисляя производные, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_x}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} (n-2)\frac{1}{r^{n-1}} \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu_x}), & n > 2, \\ \frac{1}{r} \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu_x}), & n = 2, \end{cases} \tag{7.5.22}$$

где $r = |\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|$. А теперь (7.5.22) сравним с производными

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu_y}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} -(n-2)\frac{1}{r^{n-1}} \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu_y}), & n > 2, \\ -\frac{1}{r} \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu_y}), & n = 2, \end{cases} \tag{7.5.23}$$

$\boldsymbol{\nu_x} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{N}$, $\boldsymbol{\nu_y} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in \Gamma$. Похожим образом, как это делалось для потенциала двойного слоя, для $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ можно рассматривать прямое значение производной $\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu_x}}\right)^0(\boldsymbol{x})$, предельное значение ее на Γ изнутри области Ω $\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu_x}}\right)^+(\boldsymbol{x})$, и предельное значение извне $C\Omega$ области Ω $\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu_x}}\right)^-(\boldsymbol{x})$.

Аналогично теореме 7.5.4 можно доказать теорему о скачке для производных $\partial\mathscr{V}/\partial\boldsymbol{\nu_x}$ для потенциала простого слоя.

Теорема 7.5.5. *Если Γ является гиперповерхностью класса L и плотность $\sigma \in C(\overline{\Gamma})$, то тогда для производных потенциала простого слоя справедливы соотношения*

$$\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^+(\boldsymbol{x}) = \frac{(n-2)|S^{(1)}|}{2}\sigma(\boldsymbol{x}) + \left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{7.5.24}$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^-(\boldsymbol{x}) = -\frac{(n-2)|S^{(1)}|}{2}\sigma(\boldsymbol{x}) + \left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{7.5.25}$$

и $\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^0 \in C(\Gamma)$, где $\frac{n-2}{2}|S^{(1)}| = \pi$ при $n = 2$, $|S^{(1)}|$ — площадь единичной сферы.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 7.5.4 без существенных изменений.

Следствие 7.5.2. Вычитая (7.5.25) из (7.5.24) получим для предельных значений на Γ производных потенциала простого слоя формулу о скачке через плотность σ

$$\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^{+}(\boldsymbol{x}) - \left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^{-}(\boldsymbol{x}) = (n-2)|S^{(1)}|\sigma(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma.$$

7.5.2. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям

Согласно теореме 7.5.1 потенциалы простого и двойного слоя в областях, непересекающихся с Γ, удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа можно искать в виде (7.5.5) и (7.5.4) с некоторыми плотностями μ и σ, при которых выполняются граничные условия.

Запишем еще раз постановку рассматриваемых задач и введем для них сокращенные обозначения.

Пусть Ω — ограниченная область n - мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса L. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа следующая:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \end{array}\right\} D^{+} \tag{7.5.26}$$

Задачу (7.5.26) будем сокращенно обозначать через D^{+}.

Внешняя задача Дирихле отличается от D^{+} тем, что уравнение Лапласа задается во внешности $C\overline{\Omega} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, т. е.

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0, & \boldsymbol{x} \in C\overline{\Omega}, \\ u\big|_{\partial C\overline{\Omega}} = \varphi(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \partial C\overline{\Omega}. \end{array}\right\} D^{-} \tag{7.5.27}$$

Задача Неймана отличается от задачи Дирихле тем, что на границе рассматриваемых областей вместо искомой функции задается значение производной по внешней нормали в точках границы. Итак,

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{array}\right\} N^{+} \tag{7.5.28}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta u = 0, & \boldsymbol{x} \in C\overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\partial C\overline{\Omega}} = \psi(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \partial C\overline{\Omega}.\end{array}\right\} N^- \tag{7.5.29}$$

В граничном условии внутренней задачи Неймана N^+ (7.5.28) единичная нормаль $\boldsymbol{\nu}$ является внешней по отношению к области Ω, а в условии N^- (7.5.29) $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль по отношению к области $C\overline{\Omega}$.

Решения задач D^+ и D^- ищем в виде потенциала двойного слоя

$$\begin{gathered} u(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} \Big) \, \mathrm{d}s, \quad n \geqslant 3, \\ u(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \, \mathrm{d}s, \quad n = 2, \end{gathered} \tag{7.5.30}$$

где плотности μ следует определить из граничных условий. Поскольку функция вида (7.5.30) согласно теореме 7.5.1 удовлетворяет уравнению Лапласа в Ω и в $C\overline{\Omega}$, то для таких функций надо выбрать для каждой задачи плотности μ так, чтобы выполнялись на $\partial\Omega$ граничные условия.

Удовлетворяя граничным условиям задач (7.5.26) и (7.5.27) в силу соотношений (7.5.16) и (7.5.17) теоремы 7.5.4, получим интегральные уравнения относительно плотности μ

$$\begin{gathered} D^+ : \mu(\boldsymbol{x}) - \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|} \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} \Big) \, \mathrm{d}s = \\ = -\frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|} \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \ n \geqslant 3, \end{gathered} \tag{7.5.31}$$

$$\begin{gathered} D^- : \mu(\boldsymbol{x}) + \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|} \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\boldsymbol{y}}} \Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} \Big) \, \mathrm{d}s = \\ = \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|} \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \ n \geqslant 3. \end{gathered} \tag{7.5.32}$$

В случае $n = 2$

$$\begin{gathered} D^+ : \mu(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\boldsymbol{y}}} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \, \mathrm{d}s = \\ = -\frac{1}{\pi} \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{7.5.33}$$

$$D^- : \mu(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\nu_{\boldsymbol{y}}}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}s = \\ = \frac{1}{\pi}\,\varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega, \tag{7.5.34}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu_{\boldsymbol{y}}}\Big(\cdot\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial y_i}\Big(\cdot\Big)\cos(\boldsymbol{\nu},y_i)$.

Решения задач N^+ и N^- ищем в виде потенциала простого слоя с плотностью σ, используя свойство (7.5.24) для N^+ и (7.5.25) – для задачи N^-:

$$u(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega}\sigma(\boldsymbol{y})\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}s, \quad n\geqslant 3, \\ u(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega}\sigma(\boldsymbol{y})\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}s, \quad n=2. \tag{7.5.35}$$

Поскольку функции (7.5.35) являются гармоническими в областях Ω и $C\overline{\Omega}$, то необходимо выбрать σ так, чтобы выполнялись граничные условия задач (7.5.28) и (7.5.29). В силу свойства (7.5.24) потенциала простого слоя для σ в случае задачи N^+ получаем интегральные уравнения

$$N^+ : \sigma(\boldsymbol{x}) + \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\nu_{\boldsymbol{x}}}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big)\,\mathrm{d}s = \\ = \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}\psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ n\geqslant 3, \tag{7.5.36}$$

$$N^+ : \sigma(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\nu_{\boldsymbol{x}}}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}s = \\ = \frac{1}{\pi}\,\psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ n=2. \tag{7.5.37}$$

Аналогично, используя свойство (7.5.25) потенциала простого слоя, получим для задачи N^- интегральные уравнения

$$N^- : \sigma(\boldsymbol{x}) - \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\nu_{\boldsymbol{x}}}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\Big)\,\mathrm{d}s = \\ = -\frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}\psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ n\geqslant 3, \tag{7.5.38}$$

$$
\begin{aligned}
N^- : \sigma(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\boldsymbol{x}}} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \, \mathrm{d}s = \\
= \frac{1}{\pi} \psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \ n = 2,
\end{aligned}
\tag{7.5.39}
$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \nu_{\boldsymbol{x}}}\Big(\cdot\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\cdot\Big) \cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)$.

7.5.3. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа

Из предыдущего параграфа следует, что доказательство разрешимости задач Дирихле и Неймана (7.5.26) – (7.5.29) свелось к исследованию на разрешимость соответствующих интегральных уравнений (7.5.31) – (7.5.34), (7.5.36) – (7.5.39).

Если гиперповерхность $\partial\Omega$ является поверхностью класса L (определение 7.5.1), то ядра операторов этих интегральных уравнений имеют слабую особенность, а сами интегральные операторы являются вполне непрерывными в $L_2(\partial\Omega)$ (см. доказательство леммы 7.5.1). Таким образом, интегральные уравнения (7.5.31) – (7.5.34), (7.5.36) – (7.5.39) являются линейными уравнениями второго рода с вполне непрерывными операторами. Поэтому к ним применима альтернатива Фредгольма из теории вполне непрерывных операторов.

Интегральные уравнения, соответствующие задачам D^+ и N^-, D^- и N^+ являются попарно сопряженными. Это следует из вида этих уравнений и из того, что интегральные операторы являются попарно сопряженными относительно скалярного произведения в $L_2(\partial\Omega)$, а именно:

$$
\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{x}) \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} \, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}} = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}},
$$

где

$$
\mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}, & n \geqslant 3, \\ \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, & n = 2, \end{cases}
$$

$\sigma,\mu \in L_2(\partial\Omega)$, обозначения $\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}$ и $\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}}$ подчеркивают, что интегрирование ведется по $\partial\Omega$ относительно изменяющихся на $\partial\Omega$ независимых переменных соответственно $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$.

Разрешимость интегральных уравнений (7.5.31) – (7.5.34), (7.5.36) – (7.5.39) еще зависит и от размерности $n \geqslant 3$ и $n = 2$. Поэтому исследовать их необходимо отдельно от этих случаев ($n \geqslant 3$, $n = 2$).

Лемма 7.5.3. *Если гиперповерхность* Γ *класса* L *является границей ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *и заданный в* Ω *потенциал простого слоя* $\mathscr{V}^0$ *тождественно равен нулю,*

$$\mathscr{V}^0(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \sigma^{(0)}(\boldsymbol{y}) \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} \equiv 0, \tag{7.5.40}$$

то плотность

$$\sigma^{(0)}(\boldsymbol{y}) \equiv 0, \quad \boldsymbol{y} \in \Gamma = \partial\Omega. \tag{7.5.41}$$

Доказательство. Согласно теореме 7.5.3

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{7.5.42}$$

В области $C\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ функция $\mathscr{V}^{(0)}$ является гармонической, т. е.

$$\Delta\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in C\Omega. \tag{7.5.43}$$

В силу единственности внешней задачи Дирихле (7.5.42), (7.5.43) (теорема 7.4.8) потенциал простого слоя

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \quad \boldsymbol{x} \in C\Omega. \tag{7.5.44}$$

Из равенства (7.5.40) предельное значение

$$\left(\frac{\partial\mathscr{V}^{(0)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)^+ = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{7.5.45}$$

Аналогично, из (7.5.44) предельное значение

$$\left(\frac{\partial\mathscr{V}^{(0)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)^- \equiv 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma \tag{7.5.46}$$

производной изнутри области $C\Omega$. Из равенств (7.5.45), (7.5.46) и следствия 7.5.2 получаем доказываемое соотношение (7.5.41). $\otimes$

Теорема 7.5.6. *Если гиперповерхность $\partial\Omega$ класса L, то для внешней задачи Дирихле D^- для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции φ существует единственное классическое решение.*

Для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции ψ существует классическое решение внутренней задачи Неймана N^+ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0, \tag{7.5.47}$$

при этом оно определяется с точностью до постоянной.

Доказательство. Рассмотрим интегральные уравнения (7.5.32), (7.5.34) и сопряженные к ним уравнения (7.5.36) и (7.5.37), соответствующие задачам D^- и N^+. Проведем исследования этих уравнений с точки зрения альтернативы Фредгольма.

Согласно лемме 7.5.2 однородные уравнения (7.5.32) и (7.5.34) имеют нетривиальное решение $\mu^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv 1$, $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Следовательно, числа $-\frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}$ для уравнения (7.5.32) и число $-1/\pi$ для уравнения (7.5.34) являются характеристическими интегрального уравнения

$$\mu^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \lambda \int\limits_{\partial\Omega} \mu^{(0)}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{7.5.48}$$

Согласно альтернативе Фредгольма эти же числа являются характеристическими и для сопряженного уравнения

$$\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \lambda \int\limits_{\partial\Omega} \sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0, \tag{7.5.49}$$

соответствующего задаче N^+. Уравнение (7.5.49) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение $\sigma^{(0)}$ при $\lambda^{(0)} = -\frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}$ при $n \geqslant 3$ и $\lambda^{(0)} = -1/\pi$ при $n = 2$.

Покажем, что уравнение (7.5.49) не имеет при $\lambda^{(0)}$ других нетривиальных линейно независимых решений с решением $\sigma^{(0)}$. Составим потенциал простого слоя с плотностью $\sigma^{(0)}$

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma^{(0)}(\boldsymbol{y}) \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}. \tag{7.5.50}$$

Функция (7.5.50) в Ω является гармонической. Согласно теореме 7.4.12 о единственности внутренней задачи Неймана N^+

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv c^{(0)} = \mathrm{const}. \tag{7.5.51}$$

Заметим, что $c^{(0)} \neq 0$. В противном случае при $c^{(0)} = 0$ мы получили бы, что

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \text{ в } \Omega.$$

Отсюда в силу леммы 7.5.3 имели бы $\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Это противоречит тому, что решение $\sigma^{(0)}$ является тривиальным.

Предположим, что уравнение (7.5.49) при $\lambda = \lambda^{(0)}$ имеет еще нетривиальное решение $\sigma^{(1)}$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что потенциал простого слоя

$$\mathscr{V}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma^{(1)}(\boldsymbol{y}) \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} \equiv c^{(1)} \neq 0.$$

Полагаем

$$\sigma^{(2)} = c^{(1)}\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}) - c^{(0)}\sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Очевидно, $\sigma^{(2)}$ есть решение уравнения (7.5.49) для $\lambda = \lambda^{(0)}$. Потенциал простого слоя, соответствующий плотности $\sigma^{(2)}$, имеет вид

$$\mathscr{V}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma^{(2)}(\boldsymbol{y}) \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = c^{(1)}\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) - c^{(0)}\mathscr{V}^{(1)}(\boldsymbol{x}) =$$
$$= c^{(1)}c^{(0)} - c^{(0)}c^{(1)} \equiv 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Согласно лемме 7.5.3

$$\sigma^{(2)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \text{ для } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Отсюда имеем

$$\sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{c^{(1)}}{c^{(0)}}\, \sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}).$$

Таким образом, уравнение (7.5.49) имеет только одно линейно независимое нетривиальное решение $\sigma^{(0)}$. Согласно альтернативе Фредгольма уравнение (7.5.48) при $\lambda = \lambda^{(0)}$ имеет единственное линейно независимое решение $\mu^{(0)} \equiv 1$. Отсюда и в силу опять альтернативы Фредгольма уравнения (7.5.36) и (7.5.37) разрешимы тогда и только тогда, когда для ψ выполняется условие (7.5.47). Это условие является достаточным и классическое решение внутренней задачи Неймана N^+ при непрерывной функции ψ в этом случае определяется в виде потенциала простого слоя через плотность σ, которая получается в результате решения уравнений (7.5.36) и (7.5.37).

Из теоремы 7.4.10 следует, что условие (7.5.47) является и необходимым.

Согласно теореме 7.4.11 классическое решение внутренней задачи Неймана N^+ определяется с точностью до постоянной.

Переходим к рассмотрению внешней задачи Дирихле D^-. Решение ее искали в виде потенциала двойного слоя (7.5.30). Для отыскания плотности μ этого потенциала задачу D^- свели к решению интегральных уравнений (7.5.32) и (7.5.34). Согласно альтернативе Фредгольма эти уравнения разрешимы тогда и только тогда, когда выполняется для функции φ условие ортогональности

$$(\varphi.\sigma^{(0)})_{L_2(\partial\Omega)} = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(\boldsymbol{y})\sigma^{(0)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0. \tag{7.5.52}$$

В этом случае существует классическое решение задачи D^- в виде потенциала двойного слоя, убывающая на бесконечности как $1/|\boldsymbol{x}|^{n-1}$. Если условие (7.5.52) не выполняется, то уравнения (7.5.32), (7.5.34) не имеют решения. Следовательно, нет решения задачи D^- в виде потенциала двойного слоя. Это утверждение не согласуется с теоремой 7.4.8 о единственности решения задачи D^-. Но это не означает, что задача D^- не имеет решения, если условие (7.5.52) нарушено. В этом случае решение задачи D^- следует искать в другом виде в отличие от потенциала двойного слоя.

В выражении (7.5.5) изменим ядро и решение задачи D^- будем искать в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y})\widetilde{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}, \tag{7.5.53}$$

где

$$\widetilde{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathscr{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}, \quad n \geqslant 2,$$

$n-2=0$ при $n=2$. В (7.5.53) плотность σ — непрерывная функция на $\partial\Omega$, $\widetilde{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — гармоническая функция в $C\Omega$. Следовательно, для u из (7.5.53)

$$\Delta u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in C\Omega.$$

Повторяя рассуждения, которые были проведены для потенциала двойного слоя в случае задачи D^-, для определения функции μ выражения (7.5.53) и граничного условия задачи (7.5.27) получим интегральное уравнение

$$\mu(\boldsymbol{x}) + \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}\int\limits_{\partial\Omega}\mu(\boldsymbol{y})\widetilde{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}\varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega, \tag{7.5.54}$$

где в (7.5.54) обозначение $n-2=1$ при $n=2$. Ядро $\widetilde{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ имеет слабую особенность при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. Рассмотрим однородное уравнение (7.5.54), т. е. уравнение

$$\mu^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}\int\limits_{\partial\Omega}\mu^{(0)}(\boldsymbol{y})\widetilde{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0. \tag{7.5.55}$$

Уравнение (7.5.55) имеет решение $\mu^{(0)}\in L_2(\partial\Omega)$. Нетрудно показать, что $\mu^{(0)}$ — непрерывная функция на $\partial\Omega$. Через плотность $\mu^{(0)}$ по формуле (7.5.53) строим решение

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega}\mu^{(0)}(\boldsymbol{y})\widetilde{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}, \tag{7.5.56}$$

которое является решением задачи D^- с однородным граничным условием. Согласно теореме 7.4.8 о единственности решения задачи D^-

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \quad \boldsymbol{x}\in C\Omega.$$

Уравнение (7.5.56) умножаем на $|\boldsymbol{x}|^{n-2}$ и переходим к пределу при $|\boldsymbol{x}|\to\to\infty$. В результате получим

$$\int\limits_{\partial\Omega}\mu^{(0)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0, \tag{7.5.57}$$

В силу этого соотношения уравнение (7.5.55) упрощается и получаем уравнение (7.5.48) для $\lambda=-2/(n-2)|S^{(1)}|$. Как было показано раньше, решением уравнения (7.5.48) в общем виде является любая константа,

$$\mu^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv c^{(0)}.$$

Подставляя это значение в (7.5.57), получим

$$c^{(0)}\int\limits_{\partial\Omega}\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = c^{(0)}|\partial\Omega| = 0.$$

Из последнего соотношения следует только тривиальное решение $\mu^{(0)}(\boldsymbol{x})\equiv 0$ уравнения (7.5.55). Согласно альтернативе Фредгольма, это дает возможность утверждать, что внешняя задача Дирихле D^- имеет классическое решение в виде (7.5.53) для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции φ. $\otimes$

Теорема 7.5.7. *Если гиперповерхность $\partial\Omega$ класса L, то для задачи Дирихле D^+ для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции φ существует классическое решение в виде потенциала двойного слоя.*

Для $n \geqslant 3$ непрерывной на $\partial\Omega$ функции ψ существует единственное классическое решение в виде потенциала простого слоя внешней задачи Неймана N^-. При $n = 2$ классическое решение задачи N^- существует тогда и только тогда, если

$$\int_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0, \tag{7.5.58}$$

при этом оно определяется с точностью до константы.

Доказательство. Рассмотрим интегральные уравнения (7.5.31) и (7.5.38), которые являются сопряженными по отношению друг к другу. Рассмотрим однородное уравнение (7.5.38), т. е. уравнение

$$\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \frac{2}{(n-2)|S^{(1)}|}\int_{\partial\Omega} \sigma^{(0)}(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\,x}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right)\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0. \tag{7.5.59}$$

Из теории интегральных уравнений со слабой особенностью существует некоторое решение $\sigma^{(0)} \in L_2(\partial\Omega)$ уравнения (7.5.59). Оно будет и непрерывной функцией на $\partial\Omega$. Через $\sigma^{(0)}$ строим потенциал простого слоя

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \sigma^{(0)}(\boldsymbol{y})\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}.$$

Для функции $\mathscr{V}^{(0)}$

$$\Delta\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in C\Omega. \tag{7.5.60}$$

Уравнение (7.5.59) означает, что

$$\left(\frac{\partial\mathscr{V}^{(0)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)^{-}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{7.5.61}$$

Задача (7.5.60)), (7.5.61) в $C\Omega$ имеет решение $\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$. Это следует из теоремы 7.4.14 о единственности внешней задачи Неймана для $n \geqslant 3$.

В силу непрерывности потенциала простого слоя (теорема 7.5.3)

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{7.5.62}$$

Уравнение Лапласа (7.5.60) имеет место и для области Ω. Отсюда и условия (7.5.62) в силу теоремы 7.4.8 о единственности внутренней задачи Дирихле

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial \mathscr{V}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^{+}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{7.5.63}$$

Из соотношений (7.5.61), (7.5.63) и следствия 7.5.2 определяется функция $\sigma^{(0)}$ и

$$\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Согласно альтернативе Фредгольма имеет только нулевой решение и однородное уравнение (7.5.31). Это означает, что уравнения (7.5.31) и (7.5.38) имеют единственные непрерывные решения для любых непрерывных функций φ и ψ, заданных на Ω. Следовательно, при этих функциях существуют единственные классические решения в виде соответствующих потенциалов задач D^+ и N^- для $n \geqslant 3$.

Рассмотрим теперь уравнения (7.5.33) и (7.5.39), соответствующие задачам D^+ и N^- для $n = 2$. Докажем выполнение условия (7.5.58), которое является необходимым и достаточным для разрешимости задачи N^- для $n = 2$.

Рассмотрим шар $\Omega(0,R)$ с центром в начале координат достаточно большого радиуса R, для которого $\Omega \subset \Omega(0,R)$. Для решения u задачи N^- запишем вторую формулу Грина (7.4.7) для $v \equiv 1$ относительно области $C\Omega^R = C\Omega \cap \Omega(0,R)$. Здесь границей $\partial(C\Omega^R)$ области $C\Omega^R$ является линия $\partial\Omega$ и окружность S^R радиуса R с центром в начале координат. Формула (7.4.7) в данном случае запишется в виде

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} + \int\limits_{S^R} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0,$$

или

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} + \int\limits_{S^R} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0. \tag{7.5.64}$$

Второе слагаемое левой части (7.5.64) согласно теореме 7.4.13 стремится к нулю при $R \to \infty$. Переходя в (7.5.64) при $R \to \infty$ получим условие (7.5.58), которое является необходимым для разрешимости задачи N^- в случае $n = 2$.

Докажем разрешимость уравнений (7.5.33) и (7.5.39) для любых непрерывных на $\partial\Omega$ функций φ и ψ. Пусть однородное уравнение

$$\nu^{(0)}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega} \nu^{(0)}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, \mathrm{d}s_{\,y} = 0 \tag{7.5.65}$$

имеет какое-либо решение $\nu^{(0)} \in L_2(\partial\Omega)$. То, что уравнение (7.5.65) разрешимо, следует из теории интегральных уравнений с ядром со слабой особенностью. Составляем с плотностью $\nu^{(0)}$ потенциал простого слоя

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \nu^{(0)}(\boldsymbol{y}) \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}. \tag{7.5.66}$$

Функция (7.5.66) в $C\Omega$ является гармонической и, согласно (7.5.65), удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на $\partial\Omega$. По теореме 7.4.14 о единственности задачи N^- при $n = 2$

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv c^{(0)} = \mathrm{const}.$$

В силу теоремы 7.5.3 $\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv c^{(0)}$ и на $\partial\Omega$. Функция (7.5.66), легко проверить, является гармонической и в области Ω. На основании теоремы 7.4.7 о минимуме и максимуме делаем заключение, что

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}) \equiv c^{(0)}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Очевидно

$$\left(\frac{\mathscr{V}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^{+}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\mathscr{V}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^{-}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Согласно следствию 7.5.2 $\nu^{(0)} \equiv 0$ на $\partial\Omega$, т. е. уравнение (7.5.65) имеет только нулевое решение.

Согласно альтернативе Фредгольма и однородное уравнение уравнения (7.5.33) также имеет только нулевое решение. Следовательно, уравнения (7.5.33) и (7.5.39) всегда разрешимы для любых

$\varphi,\psi \in L_2(\partial\Omega)$, в том числе и для непрерывных. Решения этих уравнений будут представлять собой непрерывные функции.

Таким образом, для задачи D^+ при $n = 2$ существует единственное классическое решение в виде потенциала двойного слоя.

В случае задачи N^-, $n = 2$, нам надо доказать, что ее решение в виде потенциала простого слоя

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y}) \ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}, \tag{7.5.67}$$

определяемое через решение уравнения (7.5.39) σ является ограниченной функцией на бесконечности, т. е. при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$.

Проинтегрируем уравнение (7.5.39) по линии $\partial\Omega$. Учитывая условие (7.5.58), в результате получим

$$\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{x})\ ds_{\boldsymbol{y}} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}} \ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}} = 0. \tag{7.5.68}$$

Для двойного интеграла уравнения (7.5.68) в силу утверждения леммы 7.5.2 (второго интеграла из (7.5.13)) получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}} \ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}} = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y}) \left\{\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}} \ln\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) \mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}}\right\} \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = -\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}.\end{gathered} \tag{7.5.69}$$

Из (7.5.68) и (7.5.69) следует, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}} = 0. \tag{7.5.70}$$

Равенство (7.5.70) умножаем на $\ln|\boldsymbol{x}|$ и результат складываем с (7.5.67). В результате этого получим, что потенциал простого слоя при выполнении условия (7.5.58) представим в виде

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y}) \ln\frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, \mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}. \tag{7.5.71}$$

Видно, что интеграл (7.5.71) при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ ограничен. Кроме этого, мы доказали, что условие (7.5.58) является и достаточным для того, чтобы классическое решение задачи N^- при $n = 2$ существовало в виде потенциала простого слоя (7.5.71). $\otimes$

7.5.4. Другие применения метода потенциала

В п. 3.13при рассмотрении электромагнитных полей, которые изменяются гармонически во времени, для описания электромагнитного поля получено уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3). \tag{7.5.72}$$

К этому уравнению приводят многие физические явления при их изучении. Для уравнения (7.5.72) рассматриваются граничные задачи в ограниченных и неограниченных областях.

Классические внутренние задачи для уравнения (7.5.72) состоят в том, что уравнение (7.5.72) задается относительно искомой функции u в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, а на границе $\partial\Omega$ – граничные условия

$$\Big(h^{(1)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + h^{(2)}u\Big)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{7.5.73}$$

Если $h^{(1)} \equiv 0$, $h^{(2)} \equiv 1$, то мы имеем задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца, если наоборот $h^{(1)} \equiv 1$, $h^{(2)} \equiv 0$ – задачу Неймана, при других значениях коэффициентов $h^{(i)}$, $i = 1,2$, имеем другие смешанные задачи.

Единственность решения граничных задач зависит от параметра $k^2 > 0$. Если k^2 является собственным значением для оператора Лапласа, то единственность нарушается. Задача (7.5.72) – (7.5.73) в этом случае имеет не единственное решение при некоторых условиях, связанных с собственными функциями. В этом случае наблюдаем "резонансное"явление.

Если же k^2 не является собственным значением оператора Лапласа при однородных граничных условиях (7.5.73), то в этом случае неоднородная задача (7.5.72) – (7.5.73) имеет единственное решение при достаточно гладких функциях f и φ.

Если рассматриваются внешние граничные задачи или в случае неограниченных областей, то на бесконечности решения должны удовлетворять *принципу излучения*

$$\begin{aligned} &u = O\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\Big), \quad \frac{\partial u}{\partial r} + iku = O\Big(\frac{1}{r}\Big),\ n = 3, \\ &u = O\Big(\frac{1}{\sqrt{r}}\Big), \quad \frac{\partial u}{\partial r} + iku = O\Big(\frac{1}{\sqrt{r}}\Big),\ n = 2. \end{aligned} \tag{7.5.74}$$

Можно рассматривать уравнение (7.5.72) во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2{,}3$, и условия излучения (7.5.74). В этом случае для такой задачи справедлива теорема единственности решения.

Предположим, что уравнение (7.5.72) является однородным, т. е. рассматривается уравнение Гельмгольца вида

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3). \tag{7.5.75}$$

Для изучения и отыскания граничных задач в случае уравнения (7.5.75) вводятся соответствующие потенциалы.

Обозначим через r расстояние между переменной точкой $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ и точкой $\boldsymbol{x}$, в которой задается значение функции (потенциала), т. е. $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. Совершенно аналогично теории ньютонова потенциала в случае уравнения Лапласа для нахождения решений задач Дирихле и Неймана уравнения Гельмгольца (7.5.75) вводятся потенциалы простого и двойного слоя вида:

$$\begin{gathered}
\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{e^{-ikr}}{r}\,\mathrm{d}s, \quad n = 3 \\
\mathscr{W}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \Big(\frac{e^{-ikr}}{r}\Big)\,\mathrm{d}s, \quad n = 3.
\end{gathered} \tag{7.5.76}$$

На $\partial\Omega$ справедливы аналогичные теоремы 7.5.4 и 7.5.5 для потенциалов (7.5.76). Для соответствующих предельных значений справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
\mathscr{W}^+(\boldsymbol{x}) &= -2\pi\mu(\boldsymbol{x}) + \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \Big(\frac{e^{-ikr}}{r}\Big)\,\mathrm{d}s, \\
\mathscr{W}^-(\boldsymbol{x}) &= 2\pi\mu(\boldsymbol{x}) + \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \Big(\frac{e^{-ikr}}{r}\Big)\,\mathrm{d}s, \\
\Big(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}}\Big)^+(\boldsymbol{x}) &= 2\pi\sigma(\boldsymbol{x}) + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}} \Big(\frac{e^{-ikr}}{r}\Big)\,\mathrm{d}s, \\
\Big(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}}\Big)^-(\boldsymbol{x}) &= -2\pi\sigma(\boldsymbol{x}) + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}} \Big(\frac{e^{-ikr}}{r}\Big)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{7.5.77}$$

$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$.

В плоском случае $n = 2$ потенциалы простого и двойного слоя выражаются через вторую функция Ханкеля $H_0^{(2)}$ и имеют вид

$$\begin{aligned} \mathscr{V}(\boldsymbol{x}) &= \int_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr)\,\mathrm{d}s, \\ \mathscr{W}(\boldsymbol{x}) &= \int_{\partial\Omega} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \Big[\frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr)\Big]\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{7.5.78}$$

Для предельных значений потенциалов (7.5.78) при переходе через контур $\partial\Omega$ имеет место аналогичное соотношение типа (7.5.77).

С помощью потенциалов (7.5.76) и (7.5.78) задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца сводятся к интегральным уравнениям второго рода для отыскания плотностей σ и μ, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Для исследования граничных задач однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} - a^2 \Delta u = 0 \tag{7.5.79}$$

вводятся тепловые потенциалы, где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2 u / \partial x_i^2$. Выражения этих потенциалов определяются фундаментальным решением уравнения (7.5.79) или выражениями формулы Пуассона (7.4.46) решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

7.5.5. О методе граничных элементов

Метод граничных элементов является важным альтернативным методом по отношению к существующим широко используемым методам численного решения задач математической физики: методу конечных разностей и методу конечных элементов. Одной из наиболее важных областей его применения является решение задач диффузии, движения жидкости, течения в пористой среде, электростатики, некоторых других задач сплошной среды и многие другие задачи, в которых используется теория потенциалов и при моделировании уравнение Лапласа или Пуассона.

Суть метода состоит, как было видно выше, в преобразовании дифференциального уравнения с частными производными, описывающего поведение искомой функции внутри и на границе области, в интегральное уравнение на границе, а затем в отыскании численного решения этого уравнения.

Впервые интегральные уравнения были использованы для формулирования фундаментальных краевых задач теории потенциала в 1903 году Фредгольмом. Из-за трудности нахождения аналитических решений раньше применение интегральных уравнений ограничивалось в основном теоретическим исследованием вопросов существования и единственности решения задач математической физики. Однако с появлением ЭВМ появилась возможность численного решения интегральных уравнений. Этот подход, как правило, состоит из следующих этапов:

- граница разбивается в ряд элементов, внутри которых предполагается, что потенциал и его нормальная производная изменяются в соответствии с выбранными интерполирующими функциями. Эти элементы можно образовать с помощью прямых линий, круговых дуг, парабол и др.;
- используется метод коллокаций, согласно которому для отдельных узловых точек, распределенных внутри каждого элемента, записывается дискретная форма уравнения, связывающего значение потенциала и его нормальной производной в каждом узле;
- интегралы по каждому элементу вычисляются с помощью одной из схем численного интегрирования;
- путем наложения заданных граничных условий получается система линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена прямым либо итерационным методом, в результате чего получаем неизвестные функции на границе.

8. Смешанные задачи

В п 3.7.5 записаны гиперболические и параболические уравнения, которые являются обобщением волнового уравнения и уравнения теплопроводности. В этой главе для названных уравнений рассмотрим смешанные задачи и докажем теоремы существования и единственности решений. Построим классические решения для смешанных задач уравнения колебания струны.

8.1. Смешанные задачи для гиперболического уравнения

В цилиндрической области $Q = (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0,x_1,\dots,x_n)$ относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^{n+1} \supset Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\mathscr{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - A^{(0)}u + A^{(1)}u = f(\boldsymbol{x}), \tag{8.1.1}$$

где

$$A^{(0)}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big),\ A^{(1)}u = \sum_{i=0}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + a^{(00)}(\boldsymbol{x})u,$$

$a^{(ij)} = a^{(ji)}$ для всех $i,j = 1,\dots,n$. Здесь $x_0 \in (0,T)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$. Предположим, что коэффициенты $a^{(ij)} \in C^1(\overline{Q})$, $i,j = 1,\dots,n$, $a^{(i)} \in C(\overline{Q})$, $i = 0,\dots,n$, $a^{(00)} \in C(\overline{Q})$, $0 < T < +\infty$, Ω – ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Предположим еще, что коэффициенты $a^{(ij)}$ в совокупности являются элементами матрицы положительной квадратичной формы, т. е. выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant c^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{8.1.2}$$

равномерно для $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$ для некоторой константы $c^{(0)} > 0$ и любого вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $c^{(0)} \in \mathbb{R}$.

При выполнении условия (8.1.2) уравнение (8.1.1) является гиперболическим относительно направления $\boldsymbol{\zeta} = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

К уравнению (8.1.1) присоединяются начальные условия

$$l_0 u \equiv u\big|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'),\ l_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'),\ \boldsymbol{x}' \in \Omega, \tag{8.1.3}$$

и граничные условия, которые запишем в общем виде

$$\Big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial N}\Big)\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{8.1.4}$$

где $\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\Gamma} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j\Big|_{\Gamma}$, $\Gamma = (0,T) \times \partial\Omega$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$ – вектор единичной внешней относительно Q нормали. Очевидно, если для вектора $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, то $\boldsymbol{\nu} = (0,\nu_1,\ldots,\nu_n)$. Коэффициенты $\sigma^{(i)}$, $i = 0,1$, граничных условий таковы, что $\Big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})\Big)^2 + \Big(\sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\Big)^2 \neq 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Если $\sigma^{(0)} \equiv 1$, $\sigma^{(1)} \equiv 0$ – имеем первую смешанную задачу, если $\sigma^{(0)} \equiv 0$, $\sigma^{(1)} \equiv 1$ – вторую смешанную задачу.

Если $a^{(ij)} = a^2\delta^{ij}$ и $a^{(i)} \equiv a^{(00)} \equiv 0$ для всех $i = 0,1,\ldots,n$, то уравнение (8.1.1) будет волновым уравнением, где δ^{ij} – символ Кронекера.

8.1.1. Сильное решение смешанных задач для гиперболического уравнения

Сильное решение смешанных задач (8.1.1)–(8.1.4) является во многом повторением сильного решения задачи Коши для уравнения (8.1.1) (см. п. 4.7). Поэтому здесь ограничимся кратким изложением.

Задачи (8.1.1) – (8.1.4) представим в операторном виде. Для этого введем оператор $\mathscr{L}$, который на функцию $u \in C^2(\overline{Q})$ действует по правилу

$$\boldsymbol{L}u = \big(\mathscr{L}u, l_0u, l_1u\big).$$

Обозначим через $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ область определения оператора $\boldsymbol{L}$ и $\mathscr{D}(\boldsymbol{L}) = \{u \in C^2(\overline{Q}) \mid u$ удовлетворяет граничному условию (8.1.4)$\}$.

Задачу (8.1.1) – (8.1.4) рассматриваем как операторное уравнение

$$\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{F} = \big(f(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x}'), \psi(\boldsymbol{x}')\big). \tag{8.1.5}$$

Для изучения сильного решения смешанных задач (8.1.1) – (8.1.4) введем необходимые пространства. Обозначим через B банахово пространство, получаемое замыканием множества $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ по норме

$$\|u\|_B = \sup_{0 \leqslant x_0 \leqslant T}\Big(\sum_{i=0}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\Big)(x_0).$$

Обозначим через $H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ подпространство гильбертова пространства $H^1(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют условию (8.1.4). То что элемент $v \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет условию (8.1.4) в тех точках $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, если $\sigma^{(1)} = 0$. В случае первой смешанной задачи элементы $v \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ удовлетворяют условию (8.1.4) на всей границе Γ и здесь $H^1_{\text{гр}}(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (см. п. 6.1). Если функция $v \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ в случае второй смешанной задачи, то для таких функций (8.1.4) не имеет смысла и $H^1_{\text{гр}}(\Omega) = H^1(\Omega)$. В других случаях $v \in H^1_{\text{гр}}(\Omega)$ может удовлетворять граничному условию (8.1.4) на части границы Γ.

Обозначим через H гильбертово пространство $L_2(Q) \times H^1_{\text{гр}}(\Omega) \times$ $\times L_2(\Omega)$ элементов $\boldsymbol{v} = (v(\boldsymbol{x}), v^{(0)}(\boldsymbol{x}'), v^{(1)}(\boldsymbol{x}'))$, где норма определяется выражением

$$\|\boldsymbol{v}\|_H = \|v\|_{L_2(Q)} + \|v^{(0)}\|_{H^1_{\text{гр}}(\Omega)} + \|v^{(1)}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Операторное уравнение (8.1.5) рассматриваем из B в H с областью определения $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$.

Для простоты изложения будем рассматривать граничные условия (8.1.4), соответствующие первой и второй смешанным задачам

$$u\big|_\Gamma = 0, \tag{8.1.6}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_\Gamma = 0. \tag{8.1.7}$$

В общем случае технически доказательство усложняется.

Теорема 8.1.1. *Для любой функции $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$, когда оператор $\boldsymbol{L}$ первой смешанной задачи* (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.6) *или второй смешанной задачи* (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.7)*, справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_B \leqslant c\|\boldsymbol{L}u\|_H, \tag{8.1.8}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от u.

Доказательство данной теоремы является фактически повторением доказательства теоремы 4.7.3. Отличие лишь в том, что здесь для оценок используются условия (8.1.6) и (8.1.7).

Рассмотрим выражение $2\mathscr{L}u\partial u/\partial x_0$, которое представляется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
2\mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big) + \\
+ \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \mathcal{A}^{(1)}(u,u),
\end{aligned}
\tag{8.1.9}
$$

$$
\mathcal{A}^{(1)}(u,u) = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{(ij)}(\boldsymbol{x})}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2A^{(1)}u\frac{\partial u}{\partial x_0}.
$$

Обозначим через $Q^{(\tau)}$ подобласть области Q, где $Q^{(\tau)} = (0,\tau)\times\Omega$, $0 < \tau \leqslant T$, $\Gamma^{(\tau)} = (0,\tau)\times\partial\Omega$, $\Omega^{(\tau)} = \{\boldsymbol{x}\in Q|\, x_0 = \tau\}$. Проинтегрируем (8.1.9) по области $Q^{(\tau)}$. В результате получим соотношение (4.7.28). Здесь в данном случае выражение

$$
\int\limits_{\Gamma^{(\tau)}}\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_0}\nu_i\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\Gamma^{(\tau)}}\frac{\partial u}{\partial N}\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}s = 0
$$

в силу граничного условия (8.1.6) или (8.1.7). Далее рассуждения и получение энергетического неравенства (8.1.8) является фактически повторением доказательства теоремы 4.7.3.

Следствие 8.1.1. Решения задач (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.6) и (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.7) являются единственными в классе функций $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$.

Теорема 8.1.2. *Операторы* $\boldsymbol{L}$ *задач* (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.6) *и* (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.7) *как операторы из соответствующих пространств B в пространства H допускают замыкания* $\overline{\boldsymbol{L}}$ *и справедливы энергетические неравенства*

$$
\|u\|_B \leqslant c\|\overline{\boldsymbol{L}}u\|_H,
$$

для любых элементов $u\in\mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$, *где постоянная c та же, что и в неравенстве* (8.1.8).

Для доказательства теоремы 8.1.2 следует воспользоваться доказательством леммы 4.7.2 и теоремы 4.7.4.

Определение 8.1.1. Решения операторного уравнения

$$\overline{\boldsymbol{L}}u = \boldsymbol{F}, \quad u \in \mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$$

будем называть *сильными решениями* задач (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.6) или (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.7) в зависимости от того, какое из граничных условий (8.1.6) или (8.1.7) входят в область определения $\mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$ соответствующего оператора $\overline{\boldsymbol{L}}$.

Теорема 8.1.3. *Пусть коэффициенты* $a^{(ij)} \in C^1(\overline{Q})$, $i,j = 1,\ldots,n$, $a^{(00)}, a^{(i)} \in C(\overline{Q})$, $i = 0,\ldots,n$ *уравнения* (8.1.1). *Тогда для любых функций* $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *и* $\psi \in L_2(\Omega)$ *существует и единственно сильное решение* u *первой смешанной задачи* (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.6) *и справедлива оценка*

$$\|u\|_B \leqslant c\big(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)}\big),$$

где постоянная $c > 0$ *из неравенства* (8.1.8).

Теорема 8.1.4. *Пусть коэффициенты уравнения* (8.1.1) *удовлетворяют условиям гладкости, указанным в теореме 8.1.3. Тогда для любых функций* $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ *и* $\psi \in L_2(\Omega)$ *существует единственное сильное решение* $u \in \mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$ *задачи* (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.7) *и справедлива оценка*

$$\|u\|_B \leqslant c\big(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)}\big),$$

где постоянная $c > 0$ *из неравенства* (8.1.8).

Доказательства теорем 8.1.3 и 8.1.4 являются фактически повторением доказательства теоремы 4.7.6 без существенных изменений.

8.1.2. Метод Фурье для смешанных задач для гиперболического уравнения

Метод Фурье, как уже известно (см. п. 7.1), состоит в том, что решение ищется в виде разложения по системе собственных функций соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. В разложении собственные функции зависят от одних независимых переменных, а коэффициенты разложения – от других независимых переменных. Кроме того, задача

Штурма – Лиувилля рассматривалась для эллиптических операторов (6.4, 7.2, 7.3).

Рассмотрим смешанные задачи (8.1.1) – (8.1.4). В общем виде уравнения (8.1.1), когда коэффициенты его представляют собой функции от всех независимых переменных, разделить независимые переменные не представляется возможным. Поэтому в уравнении (8.1.1) предположим, что коэффициенты $a^{(ij)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a^{(i)}$, $i = 0, \ldots, n$, $a^{(00)}$ есть функции только от $\boldsymbol{x}'$ независимых переменных. В граничном условии функции $\sigma^{(i)}$, $i = 0, 1$, также не зависят от x_0.

Решение задачи (8.1.1) – (8.1.4) ищем в виде ряда

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)}(x_0) v^{(k)}(\boldsymbol{x}'), \tag{8.1.10}$$

где $v^{(k)}$ – собственные функции задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{gathered} A^{(0)}v - A^{(1)}v + \lambda v = 0, \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega, \\ \Big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}')v + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial v}{\partial N}\Big)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \boldsymbol{x}' \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{8.1.11}$$

λ – собственные значения.

Задача (8.1.11) изучалась в параграфах 6.4, 7.2, 7.3 для некоторых частных случаев операторов $A^{(0)}$ и $A^{(1)}$, граничных условий и конкретных областей. Предположим, что для задачи (8.1.11) существуют счетное множество значений $\lambda^{(k)}$ и собственных функций $v^{(k)}$. Кроме того, система $\{v^{(k)}(\boldsymbol{x}')\}_{k=1}^{\infty}$ предполагается полной в $L_2(\Omega)$ и ортонормированной, т. е.

$$\left(v^{(k)}, v^{(m)}\right)_{L_2(\Omega)} = \begin{cases} 0 & k \neq m, \\ 1 & k = m. \end{cases}$$

Функции f,φ,ψ разлагаются в ряд Фурье по системе $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(\boldsymbol{x}_0) v^{(k)}(\boldsymbol{x}'),$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}') = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)} v^{(k)}(\boldsymbol{x}'),$$

$$\psi(\boldsymbol{x}') = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{(k)} v^{(k)}(\boldsymbol{x}'),$$

где $f^{(k)}(\boldsymbol{x}_0), \varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$ – коэффициенты Фурье функций f, φ и ψ соответственно. Функцию u, представленную в виде ряда (8.1.10), подставляем в уравнение (8.1.1) и начальные условия (8.1.3). В силу полноты и ортогональности в $L_2(\Omega)$ системы $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций для коэффициентов $T^{(k)}$ получим задачу Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_0^2} T^{(k)} + \lambda^{(k)} T^{(k)} = f^{(k)}(\boldsymbol{x}_0),\\
&T^{(k)}(0) = \varphi^{(k)},\\
&\frac{\mathrm{d}T^{(k)}(0)}{\mathrm{d}x_0} = \psi^{(k)}.
\end{aligned} \tag{8.1.12}$$

Решая задачу (8.1.12), найдем коэффициенты $T^{(k)}$. После подстановки их в (8.1.10) получим решение исходной задачи, представленной в виде уравнения (8.1.1), начальных условий (8.1.3) и граничных условий (8.1.4).

Рассмотрим частный случай задачи (8.1.1) – (8.1.4), когда оператор $A^{(1)} = 0$ и задано граничное условие (8.1.6). Согласно параграфу 6.4.5 соответствующая задача Штурма – Лиувилля (8.1.11) будет иметь собственные значения $\lambda^{(k)} > 0$, $k = 1, \ldots$. В этом случае коэффициенты $T^{(k)}$ можно выписать в явном виде и

$$T^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)} \cos\left(\sqrt{\lambda^{(k)}} x_0\right) + \frac{\psi^{(k)}}{\sqrt{\lambda^{(k)}}} \sin\left(\sqrt{\lambda^{(k)}} x_0\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda^{(k)}}} \int_0^{x_0} f^{(k)}(\tau) \sin\left(\sqrt{\lambda^{(k)}}(x_0 - \tau)\right) \mathrm{d}\tau.$$

Таким образом, решение задачи (8.1.1) – (8.1.3), (8.1.6) при $A^{(1)} = 0$ запишется в виде

$$\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[&\varphi^{(k)} \cos\left(\sqrt{\lambda^{(k)}} x_0\right) + \frac{\psi^{(k)}}{\sqrt{\lambda^{(k)}}} \sin\left(\sqrt{\lambda^{(k)}} x_0\right) + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda^{(k)}}} \int_0^{x_0} f^{(k)}(\tau) \sin\left(\sqrt{\lambda^{(k)}}(x_0 - \tau)\right) \mathrm{d}\tau \Bigg] v^{(k)}(\boldsymbol{x}').
\end{aligned} \tag{8.1.13}$$

Решение первой смешанной задачи при $A^{(1)} = 0$, представленное формулой (8.1.13), является формальным. Чтобы убедиться, что это действительно является решением, необходимо доказать сходимость полученного ряда к какой - нибудь функции. Для примера в следующем параграфе рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения колебания струны и покажем сходимость ряда, полученного методом Фурье.

8.1.3. Обоснование метода Фурье для классического решения первой смешанной задачи уравнения колебания струны

Рассмотрим постановку задачи, которая является одномерной. Здесь $\Omega = (0,l)$, $0 < l < +\infty$, область $Q = (0,T) \times (0,l)$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_0,x_1)$. В Q задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = f(\boldsymbol{x}). \tag{8.1.14}$$

К уравнению (8.1.14) присоединяются начальные условия

$$\begin{aligned} &u\Big|_{x_0=0} = \varphi(x_1), \\ &\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(x_1), \end{aligned} \tag{8.1.15}$$

и однородные граничные условия

$$u\Big|_{x_1=0} = u\Big|_{x_1=l} = 0. \tag{8.1.16}$$

Соответствующая задача Штурма – Лиувилля следующая: найти решения v уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x_1^2} + \lambda v = 0, \quad x_1 \in (0,l), \tag{8.1.17}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$v(0) = v(l) = 0 \tag{8.1.18}$$

при некоторых собственных значениях λ. Решая задачу (8.1.17) – (8.1.18), найдем собственные значения $\lambda^{(k)} = \Big(k\pi/l\Big)^2$, $k = 1, \ldots,$ и собственные функции

$$v^{(k)}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x_1, \tag{8.1.19}$$

которые образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0,l)$.

Решение задачи (8.1.14) – (8.1.16) запишем в виде

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\varphi^{(k)}\cos\big(a\sqrt{\lambda^{(k)}}x_0\big) + \frac{\psi^{(k)}}{a\sqrt{\lambda^{(k)}}}\sin\big(a\sqrt{\lambda^{(k)}}x_0\big)+ \\ +\frac{1}{a\sqrt{\lambda^{(k)}}}\int_0^{x_0} f^{(k)}(\tau)\sin\big(a\sqrt{\lambda^{(k)}}(x_0-\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\Big]\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x_1, \end{aligned} \tag{8.1.20}$$

где $f^{(k)}(x_0)$,$\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$ – коэффициенты Фурье функций f,φ и ψ разложения в ряд Фурье по системе (8.1.19).

Теорема 8.1.5. *Пусть выполняются условия*

(i) $\varphi \in H^3(0,l)$,$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$;

(ii) $\psi \in H^2(0,l)$,$\psi(0) = \psi(l) = 0$;

(iii) *отображение по переменному* x_0 $f\ :\ [0,T] \in x_0 \to f(\boldsymbol{x}) \in \in H^2(0,l)$ *непрерывно и* $f(x_0,0) = f(x_0,l) = 0$.

Тогда ряд (8.1.20) *и ряды, полученные из него в результате почленного дифференцирования по* x_0 *и* x_1 *до второго порядка включительно сходятся равномерно и абсолютно в замкнутом прямоугольнике* $\overline{Q} = [0,T] \times [0,l]$.

Доказательство. Отметим, что в формулировке теоремы введено обозначение $\varphi''(0) = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x_1^2\varphi(x_1)\big|_{x_1=0}$. В дальнейшем будем обозначать

$$\big(v^{(k)}\big)' = \frac{\mathrm{d}v^{(k)}(x_1)}{\mathrm{d}x_1}, \big(v^{(k)}\big)'' = \frac{\mathrm{d}^2v^{(k)}(x_1)}{\mathrm{d}x_1^2}, \ldots .$$

Сначала докажем сходимость рядов, составленных из собственных значений $\lambda^{(k)} = \big(k\pi/l\big)^2$ и собственных функций $v^{(k)}$ (8.1.19):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\big(v^{(k)}(x_1)\big)^2}{\lambda^{(k)}} < \infty, \tag{8.1.21}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Big(\big(v^{(k)}(x_1)\big)'\Big)^2}{\big(\lambda^{(k)}\big)^2} < \infty, \tag{8.1.22}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\left(v^{(k)}(x_1)\right)''\right)^2}{\left(\lambda^{(k)}\right)^3} < \infty. \tag{8.1.23}$$

Сходимость рядов (8.1.21) – (8.1.23) следует из того, что тригонометрические функции синусов и косинусов ограничены и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходится.

Запишем частную сумму ряда (8.1.20)

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{N} \Big[\varphi^{(k)} \cos\left(a\sqrt{\lambda^{(k)}}x_0\right) + \frac{\psi^{(k)}}{a\sqrt{\lambda^{(k)}}} \sin\left(a\sqrt{\lambda^{(k)}}x_0\right) +$$

$$+ \frac{1}{a\sqrt{\lambda^{(k)}}} \int\limits_0^{x_0} f^{(k)}(\tau) \sin\left(a\sqrt{\lambda^{(k)}}(x_0 - \tau\right) \mathrm{d}\tau\Big] v^{(k)}(x_1).$$

На основании неравенства Коши – Буняковского в $\mathbb{R}^N$ и в $L_2(0,l)$ функция $u^{(N)}$ и ее производные оцениваются следующим образом:

$$\left(u^{(N)}(\boldsymbol{x})\right)^2 \leqslant c \sum_{k=1}^{N} \frac{\left(v^{(k)}\right)^2}{\lambda^{(k)}} \sum_{k=1}^{N} \Big[\lambda^{(k)}\left(\varphi^{(k)}\right)^2 + \left(\psi^{(k)}\right)^2 + T\int\limits_0^T \left(f^{(k)}(\tau)\right)^2 \mathrm{d}\tau\Big],$$

$$\left(\frac{\partial u^{(N)}}{\partial x_0}\right)^2 \leqslant c \sum_{k=1}^{N} \frac{\left(v^{(k)}\right)^2}{\lambda^{(k)}} \sum_{k=1}^{N} \Big[(\lambda^{(k)})^2\left(\varphi^{(k)}\right)^2 + \lambda^{(k)}\left(\psi^{(k)}\right)^2 +$$

$$+ T\lambda^{(k)} \int\limits_0^T \left(f^{(k)}(\tau)\right)^2 \mathrm{d}\tau\Big],$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u^{(N)}}{\partial x_0^2}\right)^2 \leqslant c \sum_{k=1}^{N} \frac{\left(v^{(k)}\right)^2}{\lambda^{(k)}} \sum_{k=1}^{N} \Big[(\lambda^{(k)})^3\left(\varphi^{(k)}\right)^2 + (\lambda^{(k)})^2\left(\psi^{(k)}\right)^2 + \\ + T(\lambda^{(k)})^2 \int\limits_0^T \left(f^{(k)}(\tau)\right)^2 \mathrm{d}\tau + \lambda^{(k)}\left(f^{(k)}(\tau)\right)^2\Big],\end{gathered} \tag{8.1.24}$$

$$\left(\frac{\partial u^{(N)}}{\partial x_1}\right)^2 \leqslant c \sum_{k=1}^{N} \frac{\left((v^{(k)})'\right)^2}{(\lambda^{(k)})^2} \sum_{k=1}^{N} \Big[(\lambda^{(k)})^2\left(\varphi^{(k)}\right)^2 +$$

$$+\lambda^{(k)}\big(\psi^{(k)}\big)^2+T\lambda^{(k)}\int\limits_0^T\big(f^{(k)}(\tau)\big)^2\,\mathrm{d}\tau\Big],$$

$$\Big(\frac{\partial^2 u^{(N)}}{\partial x_1^2}\Big)^2\leqslant c\sum_{k=1}^{N}\frac{\big((v^{(k)})''\big)^2}{(\lambda^{(k)})^3}\sum_{k=1}^{N}\Big[(\lambda^{(k)})^3\big(\varphi^{(k)}\big)^2+\big(\lambda^{(k)}\big)^2\big(\psi^{(k)}\big)^2+$$

$$+T\big(\lambda^{(k)}\big)^2\int\limits_0^T\big(f^{(k)}(\tau)\big)^2\,\mathrm{d}\tau\Big],$$

где $c = \max\{3,3/a^2,3a^2,3a^4\}$. Функции $u^{(N)}$ и ее производные $\partial^p u^{(N)}/\partial x_i^p$, $p = 1,2$, $i = 0,1$, представляют собой непрерывные функции на компактном множестве $\overline{Q} = [0,T]\times[0,l]$. Если покажем, что при $N\to\infty$ они сходятся равномерно на $\overline{Q}$, то их предельные функции будут также непрерывными на $\overline{Q}$.

Из оценок (8.1.24) следует, что для доказательства равномерной на $\overline{Q}$ сходимости $u^{(N)}$ и ее производных первого и второго порядков при $N\to\infty$ достаточно доказать равномерную сходимость рядов (8.1.21) – (8.1.23), ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(k)}\big(f^{(k)}(x_0)\big)^2 \tag{8.1.25}$$

и сходимость числовых рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda^{(k)})^p\big(\varphi^{(k)}\big)^2,\quad p=1,2,3, \tag{8.1.26}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda^{(k)})^p\big(\psi^{(k)}\big)^2,\quad p=0,1,2, \tag{8.1.27}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda^{(k)})^p\int\limits_0^T\big(f^{(k)}(\tau)\big)^2\,\mathrm{d}\tau,\quad p=0,1,2. \tag{8.1.28}$$

Ряды (8.1.21) – (8.1.23) сходятся равномерно на отрезке $[0,l]$, так как, уже было сказано, функции синусов и косинусов ограничены и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2$ сходится.

При $k\to\infty$ $\lambda^{(k)}\to\infty$. Поэтому для сходимости всех рядов (8.1.26) достаточно доказать сходимость ряда при $p = 3$, для рядов (8.1.27) и (8.1.28) – при $p=2$.

По условию теоремы 8.1.5 функция ψ принадлежит гильбертову пространству $H^2(0,l)$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Отсюда скалярное произведение

$$\big(\psi'',v^{(k)}\big)_{L_2(0,l)} = -\big(\psi',(v^{(k)})'\big)_{L_2(0,l)} = \big(\psi, (v^{(k)})''\big)_{L_2(0,l)} = -\lambda^{(k)}\psi^{(k)}. \tag{8.1.29}$$

В силу равенства Парсеваля и (8.1.29)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda^{(k)})^2\big(\psi^{(k)}\big)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\big(\psi'',v^{(k)}\big)^2_{L_2(0,l)} = \|\psi''\|^2_{L_2(0,l)} < \infty.$$

Таким образом доказана сходимость числового ряда из (8.1.27) при $p = 2$.

Аналогично, согласно условию (iii) теоремы 8.1.5 для каждого $x_0 \in [0,T]$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda^{(k)})^2\big(f^{(k)}(x_0)\big)^2 = \Big\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big\|^2_{L_2(0,l)}(x_0). \tag{8.1.30}$$

Так как отображение $[0,T] \ni x_0 \to f(\boldsymbol{x}) \in H^2(0,l)$ непрерывно, то правая часть равенства (8.1.30) равномерно по $x_0 \in [0,T]$ ограничена. Следовательно, левая часть его представляет собой равномерно сходящийся ряд, т. е. (8.1.25). Интегрируя равенство (8.1.30) по x_0 в пределах промежутка $(0,T)$ получим сходящийся числовой ряд из (8.1.28) для $p = 2$.

Осталось доказать сходимость рядов (8.1.26), а фактически, сходимость ряда для $p = 3$. Из условия (i) функция $\varphi \in H^3(0,l)$. Рассмотрим функцию $\varphi''' + \sum_{k=1}^{N}\lambda^{(k)}\varphi^{(k)}(v^{(k)})'$. Для нее справедливы следующие преобразования:

$$0 \leqslant \Big\|\varphi''' + \sum_{k=1}^{N}\lambda^{(k)}\varphi^{(k)}(v^{(k)})'\Big\|^2_{L_2(0,l)} =$$

$$= \Big(\varphi''' + \sum_{k=1}^{N}\lambda^{(k)}\varphi^{(k)}(v^{(k)})', \varphi''' + \sum_{k=1}^{N}\lambda^{(k)}\varphi^{(k)}(v^{(k)})'\Big)_{L_2(0,l)} =$$

$$= \|\varphi'''\|^2_{L_2(0,l)} + 2\sum_{k=1}^{N}\lambda^{(k)}\varphi^{(k)}\big(\varphi''',(v^{(k)})'\big)_{L_2(0,l)} +$$

$$+ \sum_{k,j=1}^{N}\lambda^{(k)}\lambda^{(j)}\varphi^{(k)}\varphi^{(j)}\big((v^{(k)})',(v^{(j)})'\big)_{L_2(0,l)} =$$

$$= \|\varphi'''\|^2_{L_2(0,l)} + 2\sum_{k=1}^{N}(\lambda^{(k)})^2\varphi^{(k)}\big(\varphi'',(v^{(k)})\big)_{L_2(0,l)} + \tag{8.1.31}$$

$$+\sum_{k,j=1}^{N}\lambda^{(k)}\lambda^{(j)}\varphi^{(k)}\varphi^{(j)}\big((v^{(k)}),\lambda^{(j)}v^{(j)})\big)_{L_2(0,l)} =$$

$$= \|\varphi'''\|^2_{L_2(0,l)} - 2\sum_{k=1}^{N}(\lambda^{(k)})^3(\varphi^{(k)})^2 + \sum_{k=1}^{N}(\lambda^{(k)})^3(\varphi^{(k)})^2.$$

Из (8.1.31) имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{N}(\lambda^{(k)})^3(\varphi^{(k)})^2 \leqslant \|\varphi'''\|^2_{L_2(0,l)} < \infty \tag{8.1.32}$$

для любого $N \in \mathbb{N}$. Переходя в (8.1.32) к пределу при $N \to \infty$, получим доказываемую сходимость ряда (8.1.26) для $p = 3$. $\otimes$

Следствие 8.1.2. Формула (8.1.20) как решение задачи (8.1.14) – (8.1.16) при выполнении условий теоремы 8.1.5 представляет собой функцию $u \in C^2(\overline{Q})$, так как она и ее производные первого и второго порядков представляют собой предел равномерно сходящихся на $\overline{Q}$ последовательностей непрерывных функций $\partial^p u^{(N)}/\partial x_i^p$, $p = 0,1,2$; $i = 0,1$.

8.1.4. Метод Фурье для смешанных задач для волнового уравнения в случае шара

В п. 7.3.4 рассмотрена задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в шаре. Через специальные функции выписаны собственные значения и собственные функции этой задачи для трех видов граничных условий. Полученные результаты можно использовать для представления решений в виде ряда методом Фуре смешанных задач в случае волнового уравнения, когда областью, в которой задается уравнение и функции, является цилиндрическая область с основанием шар.

Постановка рассматриваемых задач. Пусть $\Omega(0,b)$ – шар независимых переменных $x' = (x_1, x_2, x_3)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ радиуса b с центром в начале координат. В цилиндрической области $Q = (0,\infty) \times \Omega(0,b)$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x') = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ рассматривается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q, \tag{8.1.33}$$

относительно функции $u : \mathbb{R}^4 \supset Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, число $a^2 \in \mathbb{R}$ и $a^2 > 0$, $f : Q \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ – заданная функция.

К уравнению (8.1.33) присоединяются начальные условия

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'),\ \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega(0,b), \tag{8.1.34}$$

и на боковой поверхности $\Gamma = (0,\infty) \times \partial\Omega(0,b) = (0,\infty) \times S(0,b)$ записанные в общем виде для трех смешанных задач граничные условия

$$\left(\sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}')u\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{8.1.35}$$

где $\left(\sigma^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma^{(1)}\right)^2 \geqslant c^{(0)} > 0$, $S(0,b)$ – сфера радиуса b с центром в начале координат.

Согласно формуле (8.1.10) решение задачи (8.1.33) – (8.1.35) представляется в виде ряда

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)}(x_0)v^{(k)}(\boldsymbol{x}'), \tag{8.1.36}$$

где $v^{(k)}(\boldsymbol{x}')$ – собственные функции задачи Штурма - Лиувилля (7.3.43) – (7.3.44), которая получается из рассматриваемой задачи (8.1.33) – (8.1.35) в результате деления переменных. Коэффициенты $T^{(k)}$ ряда (8.1.36) представляют решения задачи Коши (8.1.12).

Таким образом, решение u задачи (8.1.33) – (8.1.35), определяемое методом Фурье, задается формулой (8.1.13), где собственные значения $\lambda^{(k)}$ и собственные функции $v^{(k)}$ найдены в п. 7.3.4 через цилиндрические и сферические функции в явном виде в результате решения задачи (7.4.43) – (7.4.44).

8.1.5. Метод характеристик

В п. 4.2 доказана формула Даламбера – решение задачи Коши для однородного уравнения колебания струны. Метод получения формулы Даламбера можно называть методом характеристик, который используется для замены независимых переменных.

Метод характеристик позволяет записать решение смешанных задач для уравнения колебания струны в явном аналитическом виде. Рассмотрим первую смешанную задачу.

Перейдем к постановке задачи. Рассмотрим струну длины l, концы которой двигаются по заданным законам $\mu^{(1)}(x_0)$ и $\mu^{(2)}(x_0)$ в зависимости от временной переменной $x_0 > 0$. Задача малых колебаний однородной струны сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = f(x_0, x_1), \quad x_0 > 0, \ \ x_1 \in \Omega = (0, l), \tag{8.1.37}$$

при начальных условиях

$$u|_{x_0=0} = \varphi(x_1), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = \psi(x_1), \ \ x_1 \in \Omega, \tag{8.1.38}$$

и граничных условиях

$$u|_{x_1=0} = \mu^{(1)}(x_0), \quad u|_{x_1=l} = \mu^{(2)}(x_0), \ \ x_0 > 0. \tag{8.1.39}$$

Таким образом, относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^2 \supset \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni (x_0, x_1) \to u(x_0, x_1)$ в полуполосе $Q = [0,\infty) \times \Omega$ будем рассматривать первую смешанную задачу (8.1.37)–(8.1.39) с неоднородными граничными условиями (8.1.39), где $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Сначала остановимся на решении смешанной задачи (8.1.37)–(8.1.39) для соответствующего однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \quad x_0 > 0, \ x_1 \in \Omega. \tag{8.1.40}$$

Общее решение уравнения (8.1.40) представлено формулой (4.2.7). С помощью характеристик общее решение запишем в другом виде.

Лемма 8.1.1. *Общее решение уравнения* (8.1.40) *из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций* $C^2(\mathbb{R}^2)$ *представляется в виде суммы*

$$u(x_0,x_1) = f(x_1 - ax_0 + C) + g(x_1 + ax_0 + \tilde{C}) \tag{8.1.41}$$

любых двух функций f и g из $C^2(\mathbb{R}^2)$ от аргументов $x_1 - ax_0 + C$ и $x_1 + ax_0 + \tilde{C}$ соответственно, где C и $\tilde{C}$ – произвольные константы из $\mathbb{R}$.

Доказательство. Как известно, семейство линий $\Phi(x_0,x_1) = const$ является характеристиками уравнения (8.1.40), если функция Φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)^2 = 0. \tag{8.1.42}$$

Так как полный дифференциал $d\Phi = 0$, то уравнение (8.1.42) равносильно дифференциальному уравнению

$$\left(dx_1\right)^2 - a^2\left(dx_0\right)^2 = 0.$$

Его решениями являются семейства линий

$$x_1 - ax_0 + C = 0,$$
$$x_1 + ax_0 + \tilde{C} = 0.$$

Делая замену независимых переменных x_0, x_1 через новые переменные ξ, η по формулам

$$\xi = x_1 - ax_0 + C,$$
$$\eta = x_1 + ax_0 + \tilde{C},$$

уравнение (8.1.40) приводится ко второму каноническому виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 0, \qquad (8.1.43)$$

где $u(x_0,x_1) = v(\xi,\eta)$. Общее решение уравнения (8.1.43) представляется в виде

$$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta). \qquad (8.1.44)$$

Возвращаясь к старым независимым переменным x_0, x_1, из (8.1.44) получаем общее решение $u(x_0,x_1)$ в виде (8.1.41). Лемма 8.1.1 доказана. $\otimes$

Из леммы 8.1.1 следует, что для нахождения решения задачи (8.1.38)–(8.1.40) в (8.1.41) функции f и g следует определить дополнительно таким образом, чтобы решение u уравнения (8.1.40) удовлетворяло бы условиям (8.1.38) и (8.1.39).

Для этого полуполосу Q разобьем на прямоугольники $Q^{(k)} = \left(\frac{kl}{a}, \frac{(k+1)l}{a}\right) \times (0,l)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Очевидно, что $\overline{Q} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \overline{Q^{(k)}}$, где $\overline{Q}$ и $\overline{Q^{(k)}}$ — замыкания соответствующих областей Q и $Q^{(k)}$. В $Q^{(k)}$ рассмотрим смешанную задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \quad (x_0,x_1) \in Q^{(k)},\\
&u|_{x_0=\frac{kl}{a}} = \varphi^{(k)}(x_1), \quad \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=\frac{kl}{a}} = \psi^{(k)}(x_1), \ \ x_1 \in \Omega,\\
&u|_{x_1=0} = \mu^{(1)}(x_0), \quad u|_{x_1=l} = \mu^{(2)}(x_0), \ \ x_0 \in \left(\frac{kl}{a}, \frac{(k+1)l}{a}\right).
\end{aligned} \qquad (8.1.45)$$

Заметим, что начальные условия задачи (8.1.45) при $k = 0$ совпадают с условиями (8.1.39), т. е. $\varphi^{(0)}(x_1) = \varphi(x_1)$, $\psi^{(0)}(x_1) = \psi(x_1)$. Для других k функции $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$ определяются в результате решения задачи (8.1.45) в прямоугольнике $Q^{(k-1)}$. Найдем решение задачи (8.1.45) в общем случае для каждого $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, предполагая, что функции $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ в начальных условиях заданы. Для этого воспользуемся представлением (8.1.41) при $C = kl$ и $\tilde{C} = -(k+1)l$, т. е. решение задачи (8.1.45) ищем в виде

$$u(x_0,x_1) = f\Big(x_1 - ax_0 + kl\Big) + g\Big(l - x_1 - ax_0 + kl\Big). \tag{8.1.46}$$

Из леммы 8.1.1 следует, что функция (8.1.46) при условии, что f и g из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$, является решением однородного волнового уравнения задачи (8.1.45) в области $Q^{(k)}$. Нетрудно заметить: если $(x_0,x_1) \in \overline{Q^{(k)}}$, то $-l \leqslant x_1 - ax_0 + kl, l - x_1 - ax_0 + kl \leqslant l$. Пытаясь определить функции f и g, удовлетворяющие начальным и граничным условиям задачи (8.1.45), решение в виде одного аналитического выражения не получим. В зависимости от точек $(x_0,x_1) \in Q^{(k)}$ выражения $x_1 - ax_0 + kl$ и $l - x_1 - ax_0 + kl$ принимают как отрицательные значения, так и положительные. В связи с этим разобьем область $Q^{(k)}$ (см. рис. 8.1) на подобласти $Q_m^{(k)}$, $m = 1, 2, 3, 4$, где $Q_m^{(k)} \cap Q_{\tilde{m}}^{(k)} = \emptyset$, $m \neq \tilde{m}$, $\overline{Q^{(k)}} = \bigcup\limits_{m=1}^{4} \overline{Q_m^{(k)}}$, $\emptyset$ — пустое множество и

$$Q_1^{(k)} = \Big\{(x_0,x_1) :\ \frac{kl}{a} < x_0 < \frac{kl}{a} + \frac{x_1}{a},\ 0 < x_1 \leqslant \frac{l}{2}\Big\} \cup$$

$$\cup \Big\{(x_0,x_1) : \frac{kl}{a} < x_0 < \frac{(k+1)l}{a} - \frac{x_1}{a},\ \frac{l}{2} < x_1 < l\Big\},$$

$$Q_2^{(k)} = \Big\{(x_0,x_1) :\ \frac{kl}{a} + \frac{x_1}{a} < x_0 < \frac{(k+1)l}{a} - \frac{x_1}{a},\ 0 < x_1 < \frac{l}{2}\Big\},$$

$$Q_3^{(k)} = \Big\{(x_0,x_1) : \frac{(k+1)l}{a} - \frac{x_1}{a} < x_0 < \frac{kl}{a} + \frac{x_1}{a},\ \frac{l}{2} < x_1 < l\Big\},$$

$$Q_4^{(k)} = \Big\{(x_0,x_1) : \frac{(k+1)l}{a} - \frac{x_1}{a} < x_0 < \frac{(k+1)l}{a},\ 0 < x_1 \leqslant \frac{l}{2}\Big\} \cup$$

$$\cup \Big\{(x_0,x_1) : \frac{kl}{a} + \frac{x_1}{a} < x_0 < \frac{(k+1)l}{a},\ \frac{l}{2} < x_1 < l\Big\}.$$

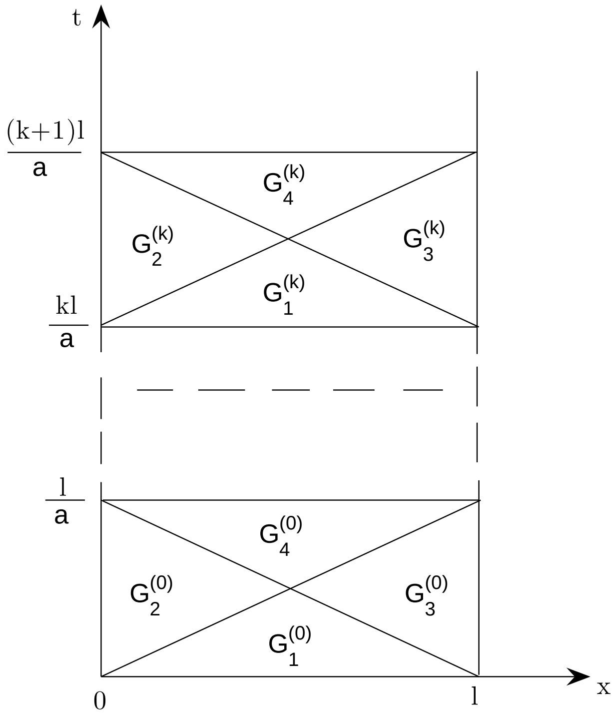

Рис. 8.1. Разбиение области Q

В каждой из подобластей $Q_m^{(k)}$ $(m = 1, 2, 3, 4)$ области $Q^{(k)}$ определяем значения функций f и g согласно формуле (8.1.46). Для этого используем условия Коши и граничные условия задачи (8.1.45).

Для области $(x_0,x_1) \in Q_1^{(k)}$ аргументы $x_1 - ax_0 + kl, l - x_1 - ax_0 + kl$ функций f и g принадлежат интервалу $(0,l)$. Здесь значения f и g определяем из условий Коши, т. е.

$$\begin{aligned} &u\big|_{x_0=\frac{kl}{a}} = f(x_1) + g(l - x_1) = \varphi^{(k)}(x_1), \quad x_1 \in (0,l), \\ &\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=\frac{kl}{a}} = -af'(x_1) - ag'(l - x_1) = \psi^{(k)}(x_1), \quad x_1 \in (0,l). \end{aligned} \tag{8.1.47}$$

Решая систему (8.1.47), получим

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(x_1) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x_1} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi + C, \quad x_1 \in (0,l), \\ g(x_1) &= \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(l - x_1) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{l-x_1} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi - C, \quad x_1 \in (0,l), \end{aligned} \tag{8.1.48}$$

где C — произвольная константа из множества действительных чисел. Из соотношений (8.1.46) и (8.1.48) получаем решение задачи (8.1.45) для $(x_0,x_1) \in Q_1^{(k)}$, определяемое формулой

$$u(x_0,x_1) = \frac{\varphi^{(k)}\bigl(x_1 - ax_0 + kl\bigr) + \varphi^{(k)}\bigl(x_1 + ax_0 - kl\bigr)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1-ax_0+kl}^{x_1+ax_0-kl} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi. \quad (8.1.49)$$

Определим значения функций f и g в подобласти $Q_2^{(k)}$. Если $(x_0,x_1) \in Q_2^{(k)}$, то $x_1 - ax_0 + kl \in (-l,0)$, $l - x_1 - ax_0 + kl \in (0,l)$. Для определения функции f на интервале $(-l,0)$ используем граничное условие при $x_1 = 0$ задачи (8.1.45). Применяя условие к решению (8.1.46), получим равенство

$$u\Big|_{x_1=0} = f(-ax_0 + kl) + g(l - ax_0 + kl) = \mu^{(1)}(x_0). \quad (8.1.50)$$

Делая замену $y = -ax_0 + kl$ в соотношении (8.1.50), будем иметь

$$f(y) + g(l + y) = \mu^{(1)}\Bigl(\frac{kl - y}{a}\Bigr). \quad (8.1.51)$$

Так как в задаче (8.1.45) $x_0 \in \Bigl(\frac{kl}{a}, \frac{(k+1)l}{a}\Bigr)$, то $y \in (-l,0), l + y \in (0,l)$. Следовательно, значение $g(l + y)$ функции g берем из (8.1.48). Тогда

$$f(y) = \mu^{(1)}\Bigl(\frac{kl - y}{a}\Bigr) - \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(-y) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-y} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi + C, \quad y \in (-l,0). \quad (8.1.52)$$

Таким образом, решение задачи (8.1.45) для $(x_0,x_1) \in Q_2^{(k)}$ запишется в виде

$$u(x_0,x_1) = \frac{\varphi^{(k)}\bigl(x_1 + ax_0 - kl\bigr) - \varphi^{(k)}\bigl(-x_1 + ax_0 - kl\bigr)}{2} + \\ + \mu^{(1)}\Bigl(x_0 - \frac{x_1}{a}\Bigr) + \frac{1}{2a}\int\limits_{-x_1+ax_0-kl}^{x_1+ax_0-kl} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi, \quad (x_0,x_1) \in Q_2^{(k)}. \quad (8.1.53)$$

Аналогично, если $(x_0,x_1) \in Q_3^{(k)}$, то $x_1 - ax_0 + kl \in (0,l)$, $l - x_1 - ax_0 + kl \in (-l,0)$. В этом случае значения функции f для $x_1 - ax_0 + kl$ определяем с помощью выражения из (8.1.48), а значение функции g

для $l - x_1 - ax_0 + kl \in (-l{,}0)$ находим с помощью граничного условия при $x_1 = l$ задачи (8.1.45). Удовлетворяя функцию $u(x_0{,}x_1)$ из (8.1.46) этому условию, получим

$$u\Big|_{x_1=l} = f(l - ax_0 + kl) + g(-ax_0 + kl) = \mu^{(2)}(x_0).$$

В последнем равенстве делаем замену $kl - ax_0 = z$. Тогда

$$f(l+z) + g(z) = \mu^{(2)}\Big(\frac{kl - z}{a}\Big), \tag{8.1.54}$$

где $z \in (-l{,}0)$, $l + z \in (0{,}l)$, $\frac{kl-z}{a} \in \Big(\frac{kl}{a}, \frac{(k+1)l}{a}\Big)$. Из (8.1.54) и (8.1.48) будем иметь

$$g(z) = \mu^{(2)}\Big(\frac{kl - z}{a}\Big) - \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(l+z) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{l+z} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi - C, \quad z \in (-l{,}0). \tag{8.1.55}$$

Следовательно, решение задачи (8.1.45) для $(x_0{,}x_1) \in Q_3^{(k)}$ запишется в виде

$$u(x_0{,}x_1) = \frac{\varphi^{(k)}\big(x_1 - ax_0 + kl\big) - \varphi^{(k)}\big(l - x_1 - ax_0 + (k+1)l\big)}{2} + \\ + \mu^{(2)}\Big(x_0 + \frac{x_1 - l}{a}\Big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1 - ax_0 + kl}^{l - x_1 - ax_0 + (k+1)l} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi, \quad (x_0{,}x_1) \in Q_3^{(k)}. \tag{8.1.56}$$

И, наконец, определим решение задачи (8.1.45) в области $Q_4^{(k)}$. Здесь, если $(x_0{,}x_1) \in Q_4^{(k)}$, то $x_1 - ax_0 + kl, l - x_1 - ax_0 + kl \in (-l{,}0)$. Поэтому, для записи решения в виде формулы воспользуемся представлением значения функции f по формуле (8.1.52), а функции g — по формуле (8.1.55). В результате получим решение

$$u(x_0{,}x_1) = -\frac{\varphi^{(k)}\big(l - x_1 - ax_0 + (k+1)l\big) + \varphi^{(k)}\big(-x_1 + ax_0 - kl\big)}{2} + \\ + \mu^{(1)}\Big(x_0 - \frac{x_1}{a}\Big) + \mu^{(2)}\Big(x_0 + \frac{x_1 - l}{a}\Big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{-x_1 + ax_0 - kl}^{l - x_1 - ax_0 - (k+1)l} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi, \\ (x_0{,}x_1) \in Q_4^{(k)}. \tag{8.1.57}$$

Таким образом, мы получили решение $u(x_0,x_1)$ задачи (8.1.45) в подобластях $Q_m^{(k)}$ $(m = 1,2,3,4)$ области $Q^{(k)}$, которое определяется формулами (8.1.49), (8.1.53), (8.1.56) и (8.1.57). Этими формулами определяется и решение задачи (8.1.38)–(8.1.40) в подобласти $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{4} Q_m^{(k)}$ области Q, если известны $\varphi^{(k)}(x_1)$ и $\psi^{(k)}(x_1)$ для $x_1 \in [0,l]$ и $k = 0,1,2,\ldots$. Функции $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ с помощью формулы (8.1.57) можно определить через $\varphi,\psi,\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$. Действительно, при $k = 0$ $\varphi^{(k)}(x_1) = \varphi(x_1)$, $\psi^{(k)}(x_1) = \psi(x_1)$, $x_1 \in [0,l]$. Для $k = 1$, воспользовавшись формулой (8.1.57) и полагая в ней $k = 0$ и $x_0 = l/a$, вычислим значение функции u, т. е.

$$u\Big(\frac{l}{a},x_1\Big) = \varphi^{(1)}(x_1) = -\psi(l-x_1) + \mu^{(1)}\Big(\frac{l-x_1}{a}\Big) + \mu^{(2)}\Big(\frac{x_1}{a}\Big).$$

В (8.1.57), вычисляя частную производную $\partial u(x_0,x_1)/\partial x_0$ и полагая в ее выражении $k = 0$ и $x_0 = l/a$, получим

$$\frac{\partial u(x_0,x_1)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=\frac{l}{a}} = \psi^{(1)}(x_1) = -\varphi(l-x_1) + {\mu^{(1)}}'\Big(\frac{l-x_1}{a}\Big) + {\mu^{(2)}}'\Big(\frac{x_1}{a}\Big),$$

где ${\mu^{(1)}}'\Big(\frac{l-x_1}{a}\Big)$ и ${\mu^{(2)}}'\Big(\frac{x_1}{a}\Big)$ – значения производных первого порядка функций $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ в точках $(l-x_1)/a$ и x_1/a соответственно. Повторяя данный процесс нужное количество раз, получим для $k = 2n$, $n = 1,2,\ldots$

$$\varphi^{(k)}(x_1) = \varphi(x_1) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\mu^{(1)}\left(\frac{(-1)^{i-1}x_1 + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\,i\Big|\Big)l}{a}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\mu^{(2)}\left(\frac{(-1)^{i}x_1 + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\,(i-1)\Big|\Big)l}{a}\right), \qquad (8.1.58)$$

$$\psi^{(k)}(x_1) = \psi(x_1) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i{\mu^{(1)}}'\left(\frac{(-1)^{i-1}x_1 + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\,i\Big|\Big)l}{a}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}(-1)^i{\mu^{(2)}}'\left(\frac{(-1)^{i}x_1 + \Big(i - \Big|\sin\frac{\pi}{2}\,(i-1)\Big|\Big)l}{a}\right). \qquad (8.1.59)$$

Для $k = 2n+1,\ n = 0,1,\dots$

$$\varphi^{(k)}(x_1) = -\varphi(-x_1+l)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mu^{(1)}\left(\frac{(-1)^i x_1 + \left(i - \left|\sin\frac{\pi}{2}(i-1)\right|\right)l}{a}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mu^{(2)}\left(\frac{(-1)^{i-1} x_1 + \left(i - \left|\sin\frac{\pi}{2}i\right|\right)l}{a}\right), \tag{8.1.60}$$

$$\psi^{(k)}(x_1) = -\psi(-x_1+l)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mu^{(1)'}\left(\frac{(-1)^i x_1 + \left(i - \left|\sin\frac{\pi}{2}(i-1)\right|\right)l}{a}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mu^{(2)'}\left(\frac{(-1)^{i-1} x_1 + \left(i - \left|\sin\frac{\pi}{2}i\right|\right)l}{a}\right). \tag{8.1.61}$$

Из формул (8.1.58)–(8.1.61) следует, что если $\varphi \in C^2[0,l]$, $\psi \in C^1[0,l]$, $\mu^{(i)} \in C^2[0,\infty)$, $i = 1,2$, то функции $\varphi^{(k)} \in C^2[0,l]$, $\psi^{(k)} \in C^1[0,l]$ всех $k = 0,1,2,\dots$.

Лемма 8.1.2. *Предположим, что функции $\varphi \in C^2[0,l]$, $\psi \in C^1[0,l]$, $\mu^{(i)} \in C^2[0,\infty)$, $i = 1,2$, и выполняются условия согласования*

$$\varphi^{(k)}(0) = \mu^{(1)}\Big(\frac{kl}{a}\Big),\ \psi^{(k)}(0) = \mu^{(1)'}\Big(\frac{kl}{a}\Big), \tag{8.1.62}$$

$$a^2\varphi^{(k)''}(0) = \mu^{(1)''}\Big(\frac{kl}{a}\Big). \tag{8.1.63}$$

$$\varphi^{(k)}(l) = \mu^{(2)}\Big(\frac{kl}{a}\Big),\ \psi^{(k)}(l) = \mu^{(2)'}\Big(\frac{kl}{a}\Big), \tag{8.1.64}$$

$$a^2\varphi^{(k)''}(l) = \mu^{(2)''}\Big(\frac{kl}{a}\Big). \tag{8.1.65}$$

Тогда в классе функций $C^2(\overline{Q^{(k)}})$ существует единственное классическое решение и задачи (8.1.45), *определяемое формулами* (8.1.49), (8.1.53), (8.1.56) *и* (8.1.57).

Доказательство. Из предыдущих рассуждений уже следует, что если $\varphi \in C^2[0,l]$, $\psi \in C^1[0,l]$, $\mu^{(i)} \in C^2[0,\infty)$, $i = 1,2$, то функции $\varphi^{(k)} \in C^2[0,l]$, $\psi^{(k)} \in C^1[0,l]$ для любого $k \in \{0,1,2,\ldots\}$. Решения, определяемые формулами (8.1.49), (8.1.53), (8.1.56) и (8.1.57) задачи (8.1.45), принадлежат $C^2\big(\overline{Q_m^{(k)}}\big)$, $m = 1,2,3,4$. Но нам надо доказать, что решение u, определяемое этими формулами, принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(k)}})$. Для этого потребуем, чтобы функции и их производные до второго порядка включительно, совпадали на всех отрезках $x_0 = kl/a$, $k = 0,1,2,\ldots$ и отрезках, разделяющих прямоугольник $Q^{(k)}$ на подобласти $Q_m^{(k)}$ для всех $m = 1,2,3,4$; $k = 0,1,2,\ldots$.

Обозначим через $u^{(m)}(x_0,x_1)$ решение в области $Q_m^{(k)}$, $m = 1,2,3,4$. Рассмотрим области $Q_1^{(k)}$ и $Q_2^{(k)}$. Они соединены между собой характеристикой $x_1 - ax_0 + kl = 0$. Вычислим решения, определяемые формулами (8.1.49) и (8.1.50), на этой характеристике

$$u^{(1)}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{\varphi^{(k)}\big(0\big) + \varphi^{(k)}\big(2ax_0 - 2kl\big)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2ax_0-2kl} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi,$$

$$u^{(2)}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{\varphi^{(k)}\big(2ax_0 - 2kl\big) - \varphi^{(k)}\big(0\big)}{2} + \mu^{(1)}\Big(\frac{kl}{a}\Big) + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2ax_0-2kl} \psi^{(k)}(\xi)\,d\xi.$$

Приравнивая $u^{(1)}(x_0,ax_0-kl)$ и $u^{(2)}(x_0,ax_0-kl)$, получим первое условие согласования из (8.1.62). Далее вычислим производные по переменной x_0 на рассматриваемой характеристике

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_0}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{-a\varphi^{(k)'}\big(0\big) + a\varphi^{(k)'}\big(2ax_0 - 2kl\big)}{2} + \\ + \frac{\psi^{(k)}(2ax_0 - 2kl) + \psi^{(k)}(0)}{2},$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_0}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{a\varphi^{(k)'}\big(2ax_0 - 2kl\big) - a\varphi^{(k)'}\big(0\big)}{2} + \mu^{(1)'}\Big(\frac{kl}{a}\Big) + \\ + \frac{\psi^{(k)}(2ax_0 - 2kl) - \psi^{(k)}(0)}{2}.$$

Поскольку должно выполняться равенство $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_0}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_0}(x_0,ax_0 - kl)$, то

$$\psi^{(k)}\big(0\big) = \mu^{(1)'}\Big(\frac{kl}{a}\Big),$$

т. е. получим второе условие из (8.1.62). Вычислим и приравняем вторые производные по переменной x_0

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_0^2}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{a^2\varphi^{(k)'}\big(0\big) + a^2\varphi^{(k)'}\big(2ax_0 - 2kl\big)}{2}+$$

$$+\frac{a\psi^{(k)'}(2ax_0 - 2kl) - a\psi^{(k)'}(0)}{2},$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_0^2}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{a^2\varphi^{(k)'}\big(2ax_0 - 2kl\big) - a^2\varphi^{(k)'}\big(0\big)}{2} + \mu^{(1)''}\Big(\frac{kl}{a}\Big)+$$

$$+\frac{a\psi^{(k)'}(2ax_0 - 2kl) - a\psi^{(k)'}(0)}{2},$$

получим условие согласования (8.1.63).

Перейдем к рассмотрению производных по переменной x_1

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{\varphi^{(k)'}\big(0\big) + \varphi^{(k)'}\big(2ax_0 - 2kl\big)}{2}+$$

$$+\frac{\psi^{(k)}(2ax_0 - 2kl) - \psi^{(k)}(0)}{2a},$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{a\varphi^{(k)'}\big(2ax_0 - 2kl\big) + \varphi^{(k)'}\big(0\big)}{2} - \frac{1}{a}\mu^{(1)'}\Big(\frac{kl}{a}\Big)+$$

$$+\frac{\psi^{(k)}(2ax_0 - 2kl) + \psi^{(k)}(0)}{2a},$$

откуда имеем второе условие согласования из (8.1.62). Далее

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1^2}(x_0,ax_0 - kl) = \frac{\varphi^{(k)''}\big(0\big) + \varphi^{(k)''}\big(2ax_0 - 2kl\big)}{2}+$$

$$+\frac{\psi^{(k)'}(2ax_0 - 2kl) - \psi^{(k)'}(0)}{2a},$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1^2}(x_0,ax_0-kl)=\frac{\varphi^{(k)''}\big(2ax_0-2kl\big)-\varphi^{(k)''}\big(0\big)}{2}+\frac{1}{a^2}\mu^{(1)''}\Big(\frac{kl}{a}\Big)+$$
$$+\frac{\psi^{(k)'}(2ax_0-2kl)-\psi^{(k)'}(0)}{2a},$$

тогда получаем опять условие (8.1.63).

Аналогично получаются условия согласования (8.1.64) и (8.1.65), если потребовать непрерывность функций, определяемых формулами (8.1.49) и (8.1.56) а также их производных до второго порядка включительно при переходе из области $Q_1^{(k)}$ в область $Q_3^{(k)}$ через характеристику $l-x_1-ax_0+kl=0$. Здесь

$$u^{(1)}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{\varphi^{(k)}\big(l-2ax_0+2kl\big)+\varphi^{(k)}\big(l\big)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{l}^{l-2ax_0+2kl}\psi^{(k)}(\xi)\,d\xi,$$

$$u^{(3)}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{\varphi^{(k)}\big(l-2ax_0+2kl\big)-\varphi^{(k)}\big(l\big)}{2}+\mu^{(2)}\Big(\frac{kl}{a}\Big)+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{l}^{l-2ax_0+2kl}\psi^{(k)}(\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_0}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{-a\varphi^{(k)'}\big(l-2ax_0+2kl\big)+a\varphi^{(k)'}\big(l\big)}{2}+$$
$$+\frac{\psi^{(k)}(l)+\psi^{(k)}(l-2ax_0+2kl)}{2},$$

$$\frac{\partial u^{(3)}}{\partial x_0}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{-a\varphi^{(k)'}\big(l-2ax_0+2kl\big)+a\varphi^{(k)}\big(l\big)}{2}+\mu^{(2)'}\Big(\frac{kl}{a}\Big)+$$
$$+\frac{-\psi^{(k)}(l)+\psi^{(k)}(l-2ax_0+2kl)}{2},$$

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_0^2}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{a^2\varphi^{(k)''}\big(l-2ax_0+2kl\big)+a^2\varphi^{(k)''}\big(l\big)}{2}+$$
$$+\frac{a\psi^{(k)'}(l)-a\psi^{(k)'}(l-2ax_0+2kl)}{2},$$

$$\frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_0^2}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{a^2\varphi^{(k)''}\big(l-2ax_0+2kl\big)-a^2\varphi^{(k)''}\big(l\big)}{2}+$$

$$+\mu^{(2)''}\Big(\frac{kl}{a}\Big)+\frac{a\psi^{(k)'}(l)-a\psi^{(k)'}(l-2ax_0+2kl)}{2},$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{\varphi^{(k)'}\big(l-2ax_0+2kl\big)+\varphi^{(k)'}\big(l\big)}{2}+$$

$$+\frac{\psi^{(k)}(l)-\psi^{(k)}(l-2ax_0+2kl)}{2a},$$

$$\frac{\partial u^{(3)}}{\partial x_1}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{\varphi^{(k)'}\big(l-2ax_0+2kl\big)+\varphi^{(k)}\big(l\big)}{2}+\frac{1}{a}\mu^{(2)'}\Big(\frac{kl}{a}\Big)-$$

$$-\frac{\psi^{(k)}(l)+\psi^{(k)}(l-2ax_0+2kl)}{2a},$$

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1^2}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{\varphi^{(k)''}\big(l-2ax_0+2kl\big)+\varphi^{(k)''}\big(l\big)}{2}+$$

$$+\frac{\psi^{(k)'}(l)-\psi^{(k)'}(l-2ax_0+2kl)}{2a},$$

$$\frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_1^2}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{\varphi^{(k)''}\big(l-2ax_0+2kl\big)-\varphi^{(k)''}\big(l\big)}{2}+\frac{1}{a^2}\mu^{(2)''}\Big(\frac{kl}{a}\Big)+$$

$$+\frac{\psi^{(k)'}(l)-\psi^{(k)'}(l-2ax_0+2kl)}{2a}.$$

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_0\partial x_1}(x_0,l-ax_0+kl)=\frac{a\varphi^{(k)''}\big(l\big)-a\varphi^{(k)''}\big(l-2ax_0+2kl\big)}{4}+$$

$$+\frac{\psi^{(k)'}(l)+\psi^{(k)'}(l-2ax_0+2kl)}{4},$$

$$\frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_0\partial x_1}(x_0,l-ax_0+kl)=-a\varphi^{(k)''}\big(l\big)-a\varphi^{(k)''}\big(l-2ax_0+2kl\big)+$$

$$+\frac{2}{a}\mu^{(2)''}\Big(\frac{kl}{a}\Big)+\psi^{(k)'}(l)+\psi^{(k)'}(l-2ax_0+2kl).$$

Откуда и следуют условия согласования (8.1.64) и (8.1.65).

Единственность решения доказывается путем предположения двух решений для одних и тех же заданных функций. В силу линейности задачи (8.1.45) для разности этих решений получим однородное уравнение, однородные начальные и граничные условия. Отсюда будет следовать, что разность тождественно равна нулю в $Q^{(k)}$.

Тем самым лемма 8.1.2 доказана. $\otimes$

Лемма 8.1.3. *Предположим, что выполняются условия леммы 8.1.2. Тогда выполняются условия согласования* (8.1.62)–(8.1.65) *для* $k+1$ *и существует единственное классическое решение* u *из класса* $C^2(\overline{(Q^{(k)})} \cup \overline{Q^{(k+1)}})$.

Доказательство. Из леммы 8.1.2 вытекает, что в области $Q^{(k)}$ решение $u(x_0,x_1)$ из класса $C^2\overline{Q^{(k)}}$, поэтому на нижнем основании прямоугольника $Q^{(k+1)}$ можно рассмотреть решение $u^{(4)}(x_0,x_1)$, определяемое формулой (8.1.57), и его производную по x_0 в точке $\left(\frac{(k+1)l}{a},0\right)$. Получим

$$u^{(4)}\Big(\frac{(k+1)l}{a},0\Big) = \varphi^{(k+1)}(0),$$

$\varphi^{(k+1)}$ – предельное значение решения из области $Q^{(k)}$ при $x_0 = \frac{(k+1)l}{a}$. С другой стороны, в этой точке выполняется граничное условие, поэтому

$$u^{(4)}\Big(\frac{(k+1)l}{a},0\Big) = \mu^{(1)}\Big(\frac{(k+1)l}{a}\Big).$$

Это означает, что выполняется условие согласования вида

$$\varphi^{(k+1)}(0) = \mu^{(1)}\Big(\frac{(k+1)l}{a}\Big).$$

Это аналог условия согласования (8.1.62). Рассматривая первую производную по переменной x_0, получим условие

$$\psi^{(k+1)}(0) = \mu^{(1)'}\Big(\frac{(k+1)l}{a}\Big).$$

Из уравнения (8.1.40) имеем условие согласования для вторых производных

$$a^2\varphi^{(k+1)''}(0) = \mu^{(1)''}\Big(\frac{(k+1)l}{a}\Big).$$

Точно также можно рассмотреть точку $\left(\frac{(k+1)l}{a}\right), l\big)$. Получим

$$\varphi^{(k+1)}(l) = \mu^{(2)}\Big(\frac{(k+1)l}{a}\Big), \ \psi^{(k+1)}(l) = \mu^{(2)'}\Big(\frac{(k+1)l}{a}\Big),$$

$$a^2\varphi^{(k+1)''}(l) = \mu^{(2)''}\Big(\frac{(k+1)l}{a}\Big).$$

Проведенные рассуждения показывают, что $u \in C^1(\overline{Q^{(k)}} \cup \overline{Q^{(k+1)}})$. Чтобы доказать принадлежность классу C^2, нужно показать непрерывность $\partial^2 u/\partial x_0^2$. Итак,

$$\frac{\partial^2 u^{(4)}}{\partial x_0^2}\Big|_{x_0=\frac{(k+1)l}{a}} = \mu^{(1)''}\Big(\frac{(k+1)l - x_1}{a}\Big) + \mu^{(2)''}\Big(\frac{kl + x_1}{a}\Big) - a^2\varphi^{(k)''}(l - x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_0^2}\Big|_{x_0=\frac{(k+1)l}{a}} = a^2\varphi^{(k+1)''}(x_1).$$

Следовательно, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\mu^{(1)''}\Big(\frac{(k+1)l - x_1}{a}\Big) + \mu^{(2)''}\Big(\frac{kl + x_1}{a}\Big) = a^2\Big(\varphi^{(k)''}(l - x_1) + \varphi^{(k+1)''}(x_1)\Big).$$

Последнее равенство проверяется путем вычисления в правой части его производных, используя при этом выражения (8.1.58) и (8.1.60). Таким образом, получаем, что

$$\frac{\partial^2 u^{(4)}}{\partial x_0^2}\Big|_{x_0=\frac{(k+1)l}{a}} = \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_0^2}\Big|_{x_0=\frac{(k+1)l}{a}}.$$

Лемма 8.1.3 доказана. $\otimes$

Теорема 8.1.6. *Предположим, что функции* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu^{(i)} \in C^2[0,\infty)$, $i = 1, 2$, *и выполняются для них условия согласования*

$$\varphi(0) = \mu^{(1)}(0), \quad \psi(0) = \mu^{(1)'}(0), \quad a^2\varphi''(0) = \mu^{(1)''}(0).$$

$$\varphi(l) = \mu^{(2)}(0), \quad \psi(l) = \mu^{(2)'}(0), \quad a^2\varphi''(l) = \mu^{(2)''}(0).$$

Тогда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение и задачи* (8.1.38)–(8.1.40)*, определяемое формулами* (8.1.49)*,* (8.1.53)*,* (8.1.56) *и* (8.1.57).

Доказательство. При выполнении этих условий согласно лемме 8.1.2 существует единственное классическое решение из класса $C^2\big(\overline{Q^{(0)}}\big)$. В силу леммы 8.1.3 выполняются условия согласования (8.1.62)–(8.1.65) при $x_0 = \frac{l}{a}$ и существует единственное классическое решение из класса $C^2\big(\overline{Q^{(0)} \cup Q^{(1)}}\big)$. Далее, в силу леммы 8.1.3 выполняются условия согласования для $x_0 = \frac{2l}{a}$ и строим решение $u \in C^2\big(\overline{Q^{(0)} \cup Q^{(1)} \cup Q^{(2)}}\big)$. Продолжая эти рассуждения далее по индукции, можно показать, что существует единственное решение $u \in C^2\Big(\overline{\bigcup\limits_{s=0}^{k} Q^{(s)}}\Big)$ для любого k. А это фактически означает, что существует единственное классическое решение $u \in C^2(\overline{Q})$ задачи (8.1.38)–(8.1.40), определяемое формулами (8.1.49), (8.1.53), (8.1.56) и (8.1.57). $\otimes$

Рассмотрим теперь задачу (8.1.37)–(8.1.39). Решение ее можно представить в виде суммы двух функций $u = \tilde{u} + v$, где $\tilde{u}$ – решение задачи (8.1.38)–(8.1.40), а v – решение уравнения (8.1.37), удовлетворяющее однородным условиям

$$\begin{gathered} v|_{x_0=0} = \frac{\partial v}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = 0, \quad x_1 \in \Omega, \\ v|_{x_1=0} = v|_{x_1=l} = 0, \quad x_0 > 0. \end{gathered} \tag{8.1.66}$$

Следуя методу Дюамеля (п. 4.4), функцию v можно определить через функцию $w(x_0,\tau,x_1)$ по формуле

$$v(x_0,x_1) = \int\limits_0^{x_0} w(x_0 - \tau,\tau,x_1)\, d\tau, \tag{8.1.67}$$

где $w : [0,\infty) \times [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni (x_0,\tau,x_1) \to w(x_0,\tau,x_1) \in \mathbb{R}$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 w(x_0,\tau,x_1)}{\partial x_0^2} - a^2\frac{\partial^2 w(x_0,\tau,x_1)}{\partial x_1^2} = 0, \quad x_0,\tau \in [0,\infty),\ x_1 \in \overline{\Omega}, \tag{8.1.68}$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$w|_{x_0=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = f(\tau, x_1),\ \tau \in [0,\infty),\ x_1 \in \overline{\Omega}, \tag{8.1.69}$$

и граничным условиям

$$w|_{x_1=0} = 0, \quad w|_{x_1=l} = 0. \tag{8.1.70}$$

Решение задач (8.1.68)–(8.1.70) можно найти с помощью формул (8.1.49), (8.1.53), (8.1.56) и (8.1.57). Заметим, что при этом должны выполняться условия согласования теоремы 8.1.6. В данном случае они имеют вид

$$f(x_0, 0) = f(x_0,l) = 0, \quad x_0 \geqslant 0. \tag{8.1.71}$$

Вид условий согласования определился методом решения задачи. Таким образом, через w решение v задачи (8.1.37), (8.1.66) определяется формулой (8.1.67). Имеет место следующая теорема.

Теорема 8.1.7. *Предположим, что функции* $f \in C^2(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu^{(i)} \in C^2[0,\infty)$, $i = 1,2$, *и выполняются условия согласования* (8.1.62)–(8.1.65), (8.1.71). *Тогда в классе функций* $C^2(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение* $u = \tilde{u} + v$ *из этого класса, где* $\tilde{u}$ – *определяется формулами* (8.1.49), (8.1.53), (8.1.56) *и* (8.1.57), *а* v – *формулой* (8.1.67).

8.2. Смешанные задачи для параболических уравнений

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} - a^2 \Delta u = f(\boldsymbol{x}), \tag{8.2.1}$$

как известно, является параболическим уравнением согласно определению 2.7.3. Здесь $\boldsymbol{x} = (x_0,\boldsymbol{x}') = (x_0,x_1,\ldots,x_n)$, $u,f : \mathbb{R}^{n+1} \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n$, a^2 – положительная константа. В п. 3.7 дана постановка задач для уравнения (8.2.1), в том числе и смешанных задач. Смешанные задачи для (8.2.1) в цилиндрической области можно описать следующим образом.

Пусть $Q = (0,T) \times \Omega$ – цилиндрическая в $\mathbb{R}^{n+1}$ область изменения независимых переменных $x_0 \in (0,T)$ и $\boldsymbol{x}' \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Уравнение (8.2.1) относительно искомой функции u рассматриваем в области Q. К уравнению (8.2.1) присоединяем начальное условие

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega, \tag{8.2.2}$$

заданное на нижнем основании $\Omega^{(0)} = \{\boldsymbol{x} \in \overline{Q} | \, x_0 = 0\}$ области Q и граничные условия, записанные одной формулой

$$\left(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\Big|_{\Gamma} = \mu(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{8.2.3}$$

где $\sigma^{(0)}, \sigma^{(1)}, \mu$ — заданные на Γ функции, $\Gamma = (0,T) \times \partial\Omega$ — боковая граница области $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя относительно Q единичная нормаль в точках $\boldsymbol{x} \in \Gamma$.

В п. 3.7.5 по сравнению с уравнением теплопроводности (8.2.1) записано более общее уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_0} - Au + A^{(2)}u = f(\boldsymbol{x}) \tag{8.2.4}$$

относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^{n+1} \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big), A^{(2)}u = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + b^{(0)}u.$$

Если коэффициенты $a^{(ij)}$ таковы, что характеристический полином

$$A^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j$$

представляет равномерно относительно $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$ положительную квадратичную форму, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geqslant c^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad c^{(0)} \in \mathbb{R}, \ \ c^{(0)} > 0, \tag{8.2.5}$$

то уравнение (8.2.4) в этом случае является параболическим согласно определению 2.7.3.

Постановка смешанных задач для параболического уравнения (8.2.4), как и для уравнения (8.2.1) состоит в следующем. Найти решение u в области Q уравнения (8.2.4)

$$\mathscr{L}u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q, \tag{8.2.6}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$l_0 u \equiv u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^{(0)}, \tag{8.2.7}$$

граничному условию

$$\Big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big)\Big|_{\Gamma} = \mu(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \tag{8.2.8}$$

в предположении, что выполняется условие (8.2.5). Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big|_{\Gamma} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\nu_i\Big|_{\Gamma},$$

$\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_n)$.

8.2.1. Сильное решение смешанных задач (8.2.6)– (8.2.8)

Рассмотрим первую смешанную задачу с однородным граничным условием

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{8.2.9}$$

В п. 4.7 рассмотрено сильное решение задачи Коши для гиперболического уравнения и в п. 8.1.1 – сильное решение для смешанных задач для этого уравнения. В случае параболического уравнения сильное решение вводится по той же схеме путем расширения до замкнутого оператора оператора исходной задачи, чтобы значения замыкания заполнили некоторое функциональное пространство.

Задачу (8.2.6), (8.2.7), (8.2.9) запишем в операторном виде

$$\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L}), \tag{8.2.10}$$

с областью определения $\mathscr{D}(\boldsymbol{L}) = \{u \in C^2(\overline{Q})|\ u$ удовлетворяет условию (8.2.9) $\}$ оператора $\boldsymbol{L}$, где $\boldsymbol{L}u = (\mathscr{L}u, l_0 u)$, $\boldsymbol{F} = \big(f(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x}')\big)$.

Область определения $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ оператора $\boldsymbol{L}$ уравнения (8.2.10) можно расширить, если ввести в рассмотрение множество $C^{1,2}(\overline{Q})$ вида $C^{1,2}(\overline{Q}) = \big\{u \in C^1(\overline{Q})|\ \partial^2 u/\partial x_i^2 \in C(\overline{Q}), i, j = 1, \ldots, n\big\}$. Тогда область определения $\mathscr{D}(\boldsymbol{L}) = \{u \in C^{1,2}(\overline{Q})|\ u|_{\Gamma} = 0\}$.

Обозначим через $\|\cdot\|_B$ норму функций, значения которой определяется выражением

$$\|u\|_B = \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|_{L_2(Q)} + \sup_{0\leqslant x_0\leqslant T}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\Big)(x_0). \tag{8.2.11}$$

Замыкая множество $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ по норме (8.2.11), получим банахово пространство, которое обозначим через B.

Наряду с пространством B введем другое банахово пространство $\tilde{B}$, которое получаем аналогично путем замыкания множества $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ по норме $\|\cdot\|_{\tilde{B}}$,

$$\|u\|_{\tilde{B}} = \sup_{0\leqslant x_0\leqslant T}\|u\|_{L_2(\Omega)}(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{L_2(Q)}. \tag{8.2.12}$$

Для значений оператора $\boldsymbol{L}$ введем гильбертовы пространства $\boldsymbol{H} = L_2(Q) \times \mathring{H}^1(\Omega)$ и $\tilde{\boldsymbol{H}} = L_2(Q) \times L_2(Q)$, где $\mathring{H}^1(\Omega)$ − пространство квадратично суммируемых функций вместе с квадратично суммируемыми обобщенными производными первого порядка по x_i, $i = 1,\ldots,n$, и обращающихся в нуль на $\partial\Omega$.

Рассмотри оператор $\boldsymbol{L}$ из пространства B в пространство $\boldsymbol{H}$.

Теорема 8.2.1. *Предположим, что коэффициенты уравнения* $a^{(ij)} \in C^1(\overline{Q})$, $a^{(i)},b^{(0)} \in C(\overline{Q})$, $i,j = 1,\ldots,n$. *Для любой функции* $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ *справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_B \leqslant c\|\boldsymbol{L}u\|_{\boldsymbol{H}}, \tag{8.2.13}$$

где постоянная c *не зависит от* u, $c \in \mathbb{R}$ *и* $c > 0$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $2\mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0}$, которое представим следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0} = 2\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)+ \\ +\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + A^{(1)}(u,u), \end{aligned} \tag{8.2.14}$$

где

$$A^{(1)}(u,u) = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_0}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2A^{(2)}u\,\frac{\partial u}{\partial x_0}.$$

Обозначим через $Q^{(\tau)}$ подобласть $Q^{(\tau)} = (0,\tau) \times \Omega$ области Q, предполагая для этого, что $0 < \tau \leqslant T$. Аналогично, $\Gamma^{(\tau)} = (0,\tau) \times \partial\Omega$.

Проинтегрируем равенство (8.2.14) по области $Q^{(\tau)}$. В результате получим

$$\begin{aligned} 2\int\limits_{Q^{(\tau)}}\mathscr{L}u\frac{\partial u}{\partial x_0} =2\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} - 2\int\limits_{\Gamma^{(\tau)}}\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_0}\nu_i\,\mathrm{d}s+ \\ +\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega^{(\tau)}} a^{(ij)}(\tau,\boldsymbol{x}')\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'- \\ -\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega^{(0)}} a^{(ij)}(0,\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial x_i}\,l_0u\frac{\partial}{\partial x_j}\,l_0u\;\mathrm{d}\boldsymbol{x}' + \int\limits_{Q^{(\tau)}} A^{(1)}(u,u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

где сечение $\Omega^{(\tau)} = \{\boldsymbol{x} \in Q |\, x_0 = \tau\}$. В силу условия (8.2.9) $\int\limits_{\Gamma^{(\tau)}} \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_0} \nu_i \, \mathrm{d}s = 0$. Тогда

$$2\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega^{(\tau)}} a^{(ij)}(\tau,\boldsymbol{x}')\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' =$$
$$= 2\Big(\mathscr{L}u,\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)_{L_2(Q^{(\tau)})} + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega^{(0)}} a^{(ij)}(0,\boldsymbol{x}')\frac{\partial l_0 u}{\partial x_i}\,\frac{\partial l_0 u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' - \tag{8.2.16}$$
$$- \int\limits_{Q^{(\tau)}} A^{(1)}(u,u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Для получения энергетического неравенства (8.2.13) левую часть (8.2.16) оценим снизу, а правую часть — сверху. В силу (8.2.5)

$$\int\limits_{\Omega^{(\tau)}} a^{(ij)}(\tau,\boldsymbol{x}')\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \geqslant c^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau). \tag{8.2.17}$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\Big|2\Big(\mathscr{L}u,\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big)_{L_2(Q^{(\tau)})}\Big| \leqslant \varepsilon\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} + c^{(1)}(\varepsilon)\big\|\mathscr{L}u\big\|^2_{L_2(Q)}, \tag{8.2.18}$$

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega^{(0)}} a^{(ij)}(0,\boldsymbol{x}')\frac{\partial l_0 u}{\partial x_i}\,\frac{\partial l_0 u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\Big| \leqslant c^{(2)}\|l_0 u\|^2_{H^1((\Omega)}, \tag{8.2.19}$$

$$\Big|-\int\limits_{Q^{(\tau)}} A^{(1)}(u,u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big| \leqslant \varepsilon\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} +$$
$$+ c^{(3)}(\varepsilon)\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} + \|u\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}\Big). \tag{8.2.20}$$

Чтобы в левую часть нового неравенства ввести слагаемое $\|u\|_{L_2(\Omega)}(\tau)$, рассмотрим выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u^2 = 2\frac{\partial u}{\partial x_0}\,u,$$

которое проинтегрируем по области $Q^{(\tau)}$. В результате получим

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) = 2\Big(\frac{\partial u}{\partial x_0},u\Big)_{L_2(Q^{(\tau)})} + \|l_0 u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} + c^{(4)}(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} + \|l_0 u\|^2_{H^1((\Omega)}. \tag{8.2.21}$$

Из равенства (8.2.16) в силу (8.2.17) – (8.2.21) следует неравенство

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}-3\varepsilon\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}+c^{(0)}(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau)+$$
$$+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau)\leqslant c^{(5)}\Big\|\boldsymbol{L}u\Big\|^2_{\boldsymbol{H}}+c^{(6)}(\varepsilon)\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}+\|u\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}\Big). \tag{8.2.22}$$

В неравенстве (8.2.22), если проанализировать предыдущие рассуждения и оценки, в качестве ε можно брать любое положительное число. Тогда с уменьшением ε $c^{(6)}(\varepsilon)$ увеличивается и $c^{(6)}(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Поэтому, полагаем $\varepsilon\neq 0$, например, $\varepsilon=1/6$. Тогда $c^{(6)}(1/6)<\infty$. В результате из (8.2.22) следует неравенство

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}+w(\tau)\leqslant c^{(7)})\|\boldsymbol{L}u\|^2_{\boldsymbol{H}}+c^{(8)})\int\limits_0^{\tau}w(x_0)\,\mathrm{d}x_0, \tag{8.2.23}$$

где $\tau\in[0,T]$ и

$$w(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(\Omega}+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Применяя к неравенству (8.2.23) неравенство Гронуолла (лемма 4.7.1), получим из (8.2.23) неравенство

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}+\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)(\tau)\leqslant c^{(9)}\|\boldsymbol{L}u\|_{\boldsymbol{H}}$$

для любого $\tau\in[0,T]$. Отсюда следуют неравенства

$$\begin{gathered}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c^{(10)})\|\boldsymbol{L}u\|^2_{\boldsymbol{H}},\\ \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\Big\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)(\tau)\leqslant c^{(10)})\|\boldsymbol{L}u\|^2_{\boldsymbol{H}},\end{gathered} \tag{8.2.24}$$

Из неравенств (8.2.24) легко следует доказываемое неравенство (8.2.13). $\otimes$

Рассмотри теперь оператор $\boldsymbol{L}$ из пространства $\tilde{B}$ в $\tilde{\boldsymbol{H}}$.

Теорема 8.2.2. *При выполнении условий гладкости на коэффициенты уравнения* (8.2.4)*, указанные в теореме 8.2.1, для любой функции $u\in\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_{\tilde{B}}\leqslant c\|\boldsymbol{L}u\|_{\tilde{\boldsymbol{H}}}, \tag{8.2.25}$$

где положительная постоянная c не зависит от u.

Доказательство. Для доказательства неравенства (8.2.15) можно рассматривать выражение $2u\mathscr{L}u$ и интегрировать его после соответствующих преобразований по области $Q^{(\tau)}$. Затем потребуются без существенных изменений рассуждения доказательства теоремы 8.2.1.

Действительно,

$$2\mathscr{L}u \cdot u = \frac{\partial}{\partial x_0} u^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\, u\Big) + \\ +2\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2uA^{(2)}u. \tag{8.2.26}$$

Проинтегрируем равенство (8.2.26) по области $Q^{(\tau)}$. В результате получим

$$2\int\limits_{Q^{(\tau)}} u\,\mathscr{L}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{Q^{(\tau)}} u^2(\tau,\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' - \|l_0u\|^2_{L_2(\Omega)} + \\ +2\int\limits_{Q^{(\tau)}}\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\big(u, A^{(2)}u\big)_{L_2(Q^{(\tau)})}. \tag{8.2.27}$$

Равенство (8.2.27) запишем в виде

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) + 2\int\limits_{Q^{(\tau)}}\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\big(\mathscr{L}u,u\big)_{L_2(Q^{(\tau)})} + \\ + \|l_0u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\big(A^{(2)}u, u\big)_{L_2(Q^{(\tau)})}. \tag{8.2.28}$$

В силу (8.2.5)

$$\int\limits_{Q^{(\tau)}}\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant c^{(0)}\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}. \tag{8.2.29}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь оценки сверху

$$2\Big|\big(\mathscr{L}u,u\big)_{L_2(Q^{(\tau)})}\Big| \leqslant \|\mathscr{L}u\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{L_2(Q^{(\tau)}}, \tag{8.2.30}$$

$$2\Big|\big(A^{(2)}u,u\big)_{L_2(Q^{(\tau)})}\Big| \leqslant \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} + c^{(11)}(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})}. \tag{8.2.31}$$

Неравенства (8.2.28) – (8.2.31) в совокупности порождают неравенство

$$\begin{gathered}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) + (c^{(0)} - \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} \leqslant \\ \leqslant 2\|\boldsymbol{L}u\|^2_{\tilde{\boldsymbol{H}}} + \big(c^{(11)}(\varepsilon) + 1\big) \int\limits_0^{\tau} \|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t)\,\mathrm{d}t,\end{gathered} \tag{8.2.32}$$

где постоянная $c^{(11)}(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Полагаем $\varepsilon = c^{(0)}/2$ в неравенстве (8.2.32) и применяем неравенство Гронуолла. В результате получим неравенство

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) + \frac{c^{(0)}}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big\|^2_{L_2(Q^{(\tau)})} \leqslant e^{\left(c^{(11)(c^{(0)}/2)}+1\right)\tau} 2\|\boldsymbol{L}u\|^2_{\tilde{\boldsymbol{H}}},$$

из которого легко следует доказываемое энергетического неравенство (8.2.25) для любой функции $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$. $\otimes$

Согласно п. 4.7.4 введем сильное решение задачи (8.2.6), (8.2.7) и (8.2.9). Поскольку мы доказали для этой задачи два энергетические неравенства (теоремы 8.2.1 и 8.2.2), то для нее можно ввести двумя способами сильные решения путем замыкания ее операторов $\boldsymbol{L} : B \to \boldsymbol{H}$ и $\tilde{\boldsymbol{L}} : \tilde{B} \to \tilde{\boldsymbol{H}}$.

Лемма 8.2.1. *Оператор* $\boldsymbol{L}$ *операторного уравнения* (8.2.10) *допускает замыкание* $\overline{\boldsymbol{L}}$ *как оператор, действующий из банахова пространства* B *в гильбертово пространство* $\boldsymbol{H}$.

Доказательство. Согласно определению 4.7.5 рассмотри последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ функций $u^{(k)}$ из области определения $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ оператора $\boldsymbol{L}$, сходящуюся к нулю по норме (8.2.11) пространства B при $k \to \infty$.

Так как $\|l_0 u^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u^{(k)}\|^2_B$, то отсюда следует, что $\|l_0 u^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Теперь покажем, что $\mathscr{L}u^{(k)} \to 0$ в $L_2(\Omega)$ при $k \to \infty$. Для этого рассматриваем скалярное произведение $\big(\mathscr{L}u^{(k)}u,v\big)_{L_2(Q)}$ для любой функции v из множества $C_0^{\infty}(Q)$ бесконечно дифференцируемых в Q функций с компактным носителем. Используя формулу Остроградского, интегрируем по частям выражение $\big(\mathscr{L}u^{(k)}u,v\big)_{L_2(Q)}$. В результате получим

$$\big(\mathscr{L}u^{(k)},v\big)_{L_2(Q)} = \Big(u^{(k)},\frac{\partial v}{\partial x_0} - Av\Big)_{L_2(Q)} + \Big(A^{(2)}u^{(k)},v\Big)_{L_2(Q)}. \tag{8.2.33}$$

Из предположения $\|u^{(k)}\|_B \to \infty$ следует, что $\|u^{(k)}\|_{L_2(Q)} \to \infty$ и $\|A^{(2)}u^{(k)}\|_{L_2(Q)} \to \infty$ при $k \to \infty$. Отсюда и (8.2.33) вытекает, что $\big(\mathscr{L}u^{(k)}u,v\big)_{L_2(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку множество $C_0^\infty(Q)$ плотно в $L_2(Q)$ (п. 4.5.5), то $\mathscr{L}u^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$. $\otimes$

Лемма 8.2.2. *Оператор* $\boldsymbol{L}$ *операторного уравнения* (8.2.10) *допускает замыкание* $\tilde{\overline{\boldsymbol{L}}}$ *как оператор, действующий из банахова пространства* $\tilde{B}$ *в гильбертово пространство* $\tilde{\boldsymbol{H}}$.

Доказательство. Доказательство этой леммы есть фактически повторение доказательства леммы 8.2.1, где вместо норм пространств B и $\boldsymbol{H}$ берем нормы пространств $\tilde{B}$ и $\tilde{\boldsymbol{H}}$. $\otimes$

Определение 8.2.1. Решение операторного уравнения

$$\overline{\boldsymbol{L}}u = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{F} = \big(f(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x}')\big), \tag{8.2.34}$$

называется *сильным решением задачи* (8.2.6), (8.2.7) и (8.2.9), где $\overline{\boldsymbol{L}} : B \to \boldsymbol{H}$.

Определение 8.2.2. Решение операторного уравнения

$$\tilde{\overline{\boldsymbol{L}}}u = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{F} = \big(f(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x}')\big), \tag{8.2.35}$$

называется также *сильным решением задачи* (8.2.6), (8.2.7), (8.2.9), где $\tilde{\overline{\boldsymbol{L}}} : \tilde{B} \to \tilde{\boldsymbol{H}}$.

Теорема 8.2.3. *При выполнении условий гладкости, требуемые в теореме 8.2.1 от коэффициентов уравнения* (8.2.4)*, для любой функции* $u \in \mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$ *справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_B \leqslant c\|\overline{\boldsymbol{L}}\|_{\boldsymbol{H}}, \tag{8.2.36}$$

где положительная постоянная c *не зависит от* $u \in \mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$.

Аналогично, для любой функции $u \in \mathscr{D}(\tilde{\overline{\boldsymbol{L}}})$ *справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_{\tilde{B}} \leqslant c\|\tilde{\overline{\boldsymbol{L}}}\|_{\tilde{\boldsymbol{H}}}, \tag{8.2.37}$$

Доказательство. Неравенство (8.2.36) следует из энергетического неравенства (8.2.13) путем предельного перехода. Действительно, если $u \in \mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$, то существует последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ из элементов $u^{(k)} \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$, где, согласно определению замыкания $\overline{\boldsymbol{L}}$ оператора $\boldsymbol{L}$, $\|u^{(k)} - u\|_B \to 0$ при $k \to \infty$ и $\|Lu^{(k)} - Lu\|_{\boldsymbol{H}} \to 0$ при $k \to \infty$. Для элементов $u^{(k)} \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ записываем энергетическое неравенство (8.2.13), т. е.

$$\|u^{(k)}\|_{\tilde{B}} \leqslant c\|\boldsymbol{L}u^{(k)}\|_B, \tag{8.2.38}$$

и переходим к пределу при $k \to \infty$. Так как

$$\Big|\|u^{(k)}\|_B - \|u\|_B\Big| \leqslant \|u^{(k)} - u\|_B$$

и

$$\Big|\|\boldsymbol{L}u^{(k)}\|_{\boldsymbol{H}} - \|\overline{\boldsymbol{L}}u\|_{\boldsymbol{H}}\Big| \leqslant \|\boldsymbol{L}u^{(k)} - \overline{\boldsymbol{L}}u\|_{\boldsymbol{H}},$$

то из (8.2.38) в пределе при $k \to \infty$ получим неравенство (8.2.36) для этой же константы $c > 0$, что и в неравенстве (8.2.13).

Эти рассуждения справедливы для любого элемента $u \in \mathscr{D}(\overline{\boldsymbol{L}})$.

Энергетическое неравенство доказывается аналогично путем предельного перехода в неравенстве (8.2.25) для последовательностей $u^{(k)} \to u$ в $\tilde{B}$ при $k \to \infty$, где $u^{(k)} \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$, а $u \in \mathscr{D}(\tilde{\overline{\boldsymbol{L}}})$. ⊗

Следствие 8.2.1. Из энергетических неравенств (8.2.36) и (8.2.37) следует единственность сильных решений задачи (8.2.6), (8.2.7), (8.2.9) (определения 8.2.1 и 8.2.2), если они существуют.

Доказательство проводится из предположения, что существуют два решения. Тогда для их разности получаем однородное уравнение. Из этого уравнения и энергетического неравенства для замыкания оператора $\boldsymbol{L}$ следует, что эти решения совпадают по норме пространства B или $\tilde{B}$.

Обозначим через $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$ подмножество множества $\mathscr{D}(\boldsymbol{L})$, элементы которого обращаются в нуль при $x_0 = 0$.

Лемма 8.2.3. *Пусть выполняются условия гладкости коэффициентов уравнения* (8.2.4)*, сформулированные в теореме 8.2.1. Если для некоторого элемента $v \in L_2(Q)$ выполняется равенство*

$$\big(\mathscr{L}u,v\big)_{L_2(Q)} = 0 \tag{8.2.39}$$

для любого $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$, *то* $v = 0$ *по норме пространства* $L_2(Q)$.

Доказательство. Доказательство будет проведено по схеме доказательства аналогичного утверждения, сформулированного в лемме 4.7.3 (см. п. 4.7.7).

В равенстве (8.2.39) функция u — произвольная функция из множества $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$. В частности, если $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$, то и $J_{(k)}u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$ тоже, где $J_{(k)}$ — оператор осреднения с переменным шагом (4.7.61). При таком выборе левую часть равенства (8.2.39) можно представить в виде

$$\Big(\mathscr{L} J_{(k)} u, v\Big)_{L_2(Q)} = \Big(J_{(k)} \mathscr{L} u, v\Big)_{L_2(Q)} + \Big(\mathscr{L} J_{(k)} u - J_{(k)} \mathscr{L} u, v\Big)_{L_2(Q)} =$$

$$= \Big(\mathscr{L} u, J^{\star}_{(k)} v\Big)_{L_2(Q)} + \Big(K u, v\Big)_{L_2(Q)}, \tag{8.2.40}$$

где $J^{\star}_{(k)}$ — сопряженный оператор (4.7.62) по отношении к оператору $J_{(k)}$. Коммутатор $K = \mathscr{L} J_{(k)} - J_{(k)} \mathscr{L}$ распишем более подробно, т. е.

$$Ku = \Big(\frac{\partial}{\partial x_0} - A + A^{(2)}\Big) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) J_{\delta_{(mk)}} u -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) J_{\delta_{(mk)}} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_0} - Au + A^{(2)} u\Big) = K^{(0)} u + \sum_{i=1}^{n} K^{(i)} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

где

$$K^{(0)} u = \sum_{m=0}^{\infty} \Bigg[\frac{\partial \psi_{(m)}}{\partial x_0} J_{\delta_{(mk)}} u - \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg\{ \frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_{(m)}}{\partial x_j} J_{\delta_{(mk)}} u + a^{(ij)} \frac{\partial^2 \psi_{(m)}}{\partial x_i \partial x_j} J_{\delta_{(mk)}} u -$$

$$- \psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \delta_{(mk)}^{-n-1} \int_Q \frac{\partial}{\partial z_i} \Big[\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big) \Big(\frac{a^{(ij)}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} - \frac{a^{(ij)}(\boldsymbol{z})}{\partial z_j}\Big)\Big] u(\boldsymbol{z})\, \mathrm{d}\boldsymbol{z} \Bigg\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Bigg[a^{(i)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \psi_{(m)}}{\partial x_i} J_{\delta_{(mk)}} u - \psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \delta_{(mk)}^{-n-1} \int_Q \frac{\partial}{\partial z_i} \Big[\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big) \times$$

$$\times \Big(a^{(i)}(\boldsymbol{x}) - a^{(i)}(\boldsymbol{z})\Big)\Big] u(\boldsymbol{z})\, \mathrm{d}\boldsymbol{z}\Bigg] + \psi_{(m)}(\boldsymbol{x}) \delta_{(mk)}^{-n-1} \int_Q \Big[\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big) \times$$

$$\times \Big(b^{(0)}(\boldsymbol{x}) - b^{(0)}(\boldsymbol{z})\Big)\Big] u(\boldsymbol{z})\, \mathrm{d}\boldsymbol{z},$$

$$K^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\left\{\psi_{(m)}(\boldsymbol{x})\delta_{(mk)}^{-n-1}\int\limits_{Q}\frac{\partial}{\partial z_j}\Big[\omega\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}}{\delta_{(mk)}}\Big)\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x})-a^{(ij)}(\boldsymbol{z})\Big)\Big]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial u(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}-2a^{(ij)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi_{(m)}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\,J_{\delta_{(mk)}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Возвращаемся к равенству (8.2.40). Путем интегрирования по частям левой части его, получим новое соотношение

$$\begin{gathered}\Big(u,\mathscr{L}'J^{\star}_{(k)}v\Big)_{L_2(Q)}+\Big(u,K^{(0)\star}v\Big)_{L_2(Q)}-\\ -\sum_{i=1}^{n}\Big(u,\frac{\partial}{\partial x_i}K^{(i)\star}v\Big)_{L_2(Q)}+\mathscr{M}(u,v;\partial Q)=0,\end{gathered}\tag{8.2.41}$$

где $\mathscr{L}'$ — формально сопряженный оператор по отношению к оператору $\mathscr{L}$ и

$$\mathscr{L}'\cdot=-\frac{\partial}{\partial x_0}\cdot-A\cdot-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(i)}(\boldsymbol{x})\cdot\Big)+b^{(0)}(\boldsymbol{x})\cdot,$$

$K^{(i)\star}$ $(i=0,\ldots,n)$ — сопряженные операторы по отношению к соответствующим операторам $K^{(i)}$, $\mathscr{M}(u,v;\partial Q)$ — совокупность граничных слагаемых на ∂Q, которые появились в результате интегрирования по частям. Отсюда выделим главную часть $\mathscr{M}^{(0)}$, т. е. $\mathscr{M}(u,v;\partial Q)$ представляем в виде

$$\mathscr{M}(u,v;\partial Q)=\mathscr{M}^{(0)}(u,J^{\star}_{(k)}v;\partial Q)+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\partial Q}uK^{(i)\star}v\nu_i\mathrm{d}s,$$

где

$$\mathscr{M}^{(0)}(u,J^{\star}_{(k)}v;\partial Q)=\int\limits_{\partial Q}\Big[uJ^{\star}_{(k)}v\nu_0-\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}J^{\star}_{(k)}v-u\frac{\partial}{\partial x_j}J^{\star}_{(k)}v\Big)\nu_i\Big]\,\mathrm{d}s.$$

Равенство (8.2.41) выполняется для любых функций $u\in\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$. Поскольку здесь ведется интегрирование по разным областям Q и ∂Q, то равенство (8.2.41) возможно для любых функций $u\in\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$ тогда и только тогда, если

$$\Big(u,\mathscr{L}'J^{\star}_{k}v\Big)_{L_2(Q)}+\Big(u,K^{(0)\star}v\Big)_{L_2(Q)}-\sum_{j=1}^{n}\Big(u,\frac{\partial}{\partial x_i}K^{(i)\star}v\Big)_{L_2(Q)}=0,\tag{8.2.42}$$

$$\mathscr{M}(u,v;\partial Q)=0.\tag{8.2.43}$$

Граница ∂Q состоит из нижнего основания $\Omega^{(0)}$, верхнего основания $\Omega^{(T)}$ и боковой поверхности Γ цилиндрической области Q. Отсюда и из того, что равенство (8.2.43) выполняется для любой функции $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$ функция v должна удовлетворять следующим граничным условиям

$$J^{\star}_{(k)}v\Big|_{\Omega^{(T)}} = J^{\star}_{(k)}v\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{8.2.44}$$

Обращаемся теперь к равенству (8.2.42), которое выполняется для любой функции $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$. Очевидно $C_0^{\infty}(Q) \subset \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$. А множество $C_0^{\infty}(Q)$ согласно свойству 4.5.3 является плотным в $L_2(Q)$. Следовательно и множество $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$ будет плотным множеством в $L_2(Q)$. В силу этого факта и представления (8.2.42) с помощью предельного перехода это равенство расширяем для всех $u \in L_2(Q)$.

Обозначим через $\tilde{Q}^{(\tau)}$ дополнение в Q к множеству $Q^{(\tau)} \cup \Omega^{(T)}$. Боковую часть границы Γ, являющейся боковой поверхностью цилиндрической области $\tilde{Q}^{(\tau)}$ обозначим через $\tilde{\Gamma}^{(\tau)}$. В равенстве (8.2.42) полагаем

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} J^{\star}_{(k)}v(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \tilde{Q}^{(\tau)}, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in Q^{(\tau)}. \end{cases} \tag{8.2.45}$$

После подстановки функции u, выбранной по формуле (8.2.45), в (8.2.42) и интегрирования некоторых слагаемых по частям, учитывая при этом условия (8.2.44), получим равенство

$$\begin{gathered} \|J^{\star}_{(k)}v\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\tilde{Q}^{(\tau)}} a^{(ij)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} J^{\star}_{(k)}v \frac{\partial}{\partial x_j} J^{\star}_{(k)}v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \Big(J^{\star}_{(k)}v, K^{(i)\star}v\Big)_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})} - \Big(J^{\star}_{(k)}v, K^{(0)\star}v\Big)_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})} - \\ - \Big(A^{(2)}J^{\star}_{(k)}v, J^{\star}_{(k)}v\Big)_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})} = \mathcal{A}^{(1)}(v,v). \end{gathered} \tag{8.2.46}$$

Как и при выводе энергетического неравенства (8.2.13) теперь с помощью элементарных неравенств левую часть равенства (8.2.45) оцениваем снизу положительными слагаемыми, а правую часть — сверху. Согласно (8.2.5)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\tilde{Q}^{(\tau)}} a^{(ij)}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} J^{\star}_{(k)}v \frac{\partial}{\partial x_j} J^{\star}_{(k)}v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant c^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \Big\| \frac{\partial}{\partial x_i} J^{\star}_{(k)}v \Big\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})}. \tag{8.2.47}$$

Используя ограниченность в $\overline{\tilde{Q}^{(\tau)}}$ коэффициентов оператора $A^{(2)}$ и неравенство Коши-Буняковского с ε относительно скалярного произведения в $L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})$, получим оценку

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(1)}(v,v) \leqslant \sum_{i=0}^{n}\left\|K^{(i)\star}v\right\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})} + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}J^{\star}_{(k)}v\right\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})} + \\ +\big(c^{(1)} + c^{(2)}(\varepsilon)\big)\|J^{\star}_{(k)}v\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})},\end{aligned} \tag{8.2.48}$$

где положительная функция $c^{(2)}(\varepsilon)$ монотонно возрастают при $\varepsilon \to 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} c^{(2)}(\varepsilon) = +\infty$ и $c^{(2)}(\varepsilon) < \infty$ для $\varepsilon > 0$. Выберем некоторое число $\varepsilon \leqslant c^{(0)}$. При таком выборе ε из равенства (8.2.46) и оценок (8.2.47) и (8.2.48) следует неравенство

$$\|J^{\star}_{(k)}v\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) \leqslant \sum_{i=0}^{n}\left\|K^{(i)\star}v\right\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})} + \big(c^{(1)} + c^{(2)}(c^{(0)})\big)\|J^{\star}_{(k)}v\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})}. \tag{8.2.49}$$

К неравенству (8.2.49) применяем неравенство Гронуолла в виде, сформулированном в лемме 4.7.5. В результате получим неравенство

$$\|J^{\star}_{(k)}v\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) \leqslant e^{[c^{(1)}+c^{(2)}(c^{(0)})](T-\tau)}\sum_{i=0}^{n}\left\|K^{(i)\star}v\right\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})}. \tag{8.2.50}$$

Операторы $K^{(i)\star}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ представляют собой операторы осреднения и для них справедливо свойство **J.4** , т. е. существует константа $c^{(3)}$, для которой

$$\left\|K^{(i)\star}v\right\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})} \leqslant c^{(3)}\|v\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})}, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{8.2.51}$$

Выберем некоторое число $\tau^{(1)} \in (0,T)$, где для $\tau \in [\tau^{(1)},T]$ будем рассматривать неравенства (8.2.50) и (8.2.51). В неравенстве (8.2.51) берем $\tau = \tau^{(1)}$ и из (8.2.50) следует неравенство

$$\|J^{\star}_{(k)}v\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) \leqslant (n+1)e^{[c^{(1)}+c^{(2)}(c^{(0)})](T-\tau^{(1)})}\|v\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau^{(1)})})}. \tag{8.2.52}$$

для $\tau \in [\tau^{(1)},T]$. В неравенстве (8.2.52) правая часть не зависит от τ. Поэтому в левой части его можно перейти к верхней грани по $\tau \in [\tau^{(1)},T]$. Так как

$$\|J^{\star}_{(k)}v\|^2_{L_2(\tilde{Q}^{(\tau)})} \leqslant (T-\tau^{(1)})\sup_{\tau^{(1)}\leqslant\tau\leqslant T}\|J^{\star}_{(k)}v\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau). \tag{8.2.53}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\left\|J^{\star}_{(k)}v\right\|^2_{L_2(\tilde Q^{(\tau)})} = \|v\|_{L_2(\tilde Q^{(\tau)})},$$

то из (8.2.52) имеем неравенство

$$\|v\|^2_{L_2(\tilde Q^{(\tau)})} \leqslant (T-\tau^{(1)})(n+1)e^{[c^{(1)}+c^{(2)}(c^{(0)})](T-\tau^{(1)})}\|v\|^2_{L_2(\tilde Q^{(\tau)})}. \quad (8.2.54)$$

Выберем число $T-\tau^{(1)}$ достаточно малым и таким, чтобы выражение

$$(T-\tau^{(1)})(n+1)e^{[c^{(1)}+c^{(2)}(c^{(0)})](T-\tau^{(1)})}$$

было меньше единицы. В силу такого выбора из (8.2.54) имеем неравенство

$$\|v\|^2_{L_2(\tilde Q^{(\tau)})} \leqslant 0,$$

т. е. $v=0$ в $L_2(\tilde Q^{(\tau)})$.

Теперь вместо области Q берем область $Q^{(\tau^{(1)})} = (0,\tau^{(1)})\times\Omega \subset Q$ и повторяем сначала все рассуждения доказательства относительно этой подобласти. В результате найдется некоторое число $\tau^{(2)} \in (0,\tau^{(1)})$ где $0 \leqslant \tau^{(2)} < \tau^{(1)} < T$, для которого в области $(\tau^{(2)},\tau^{(1)})\times\Omega$, будет доказано, что функция $v=0$.

Таким образом, за конечное число раз m, повторяя эти циклы доказательства, мы покажем, что $v=0$ почти всюду в каждой подобласти $(\tau^{(i)},\tau^{(i-1)})\times\Omega$, $i=1,\dots,m$, где $\tau^{(m)}=0<\tau^{(m-1)}<\ldots<\tau^{(2)}<\tau^{(1)}<\tau^{(0)}=T$. Тем самым будет доказано, что $v=0$ по норме пространства $L_2(Q)$. $\otimes$

При наличии леммы 8.2.3 можно завершить доказательство корректной постановки задачи (8.2.6), (8.2.7), (8.2.9). Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 8.2.4. *Пусть коэффициенты уравнения* (8.2.4) *обладают следующей гладкостью:* $a^{(ij)} \in C^1(\overline{Q})$, $a^{(i)} \in C(\overline{Q})$, $i,j = 1,\dots,n$, $b^{(0)} \in C(\overline{Q})$. *Тогда для любых функций* $f \in L_2(Q)$ *и* $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *существует единственное в смысле определения 8.2.1 сильное решение* u *из пространства* B *задачи* (8.2.6), (8.2.7), (8.2.9) *и справедлива оценка*

$$\|u\|_B \leqslant c\big(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\big), \quad c>0, \qquad (8.2.55)$$

где постоянная c *из неравенства* (8.2.36).

Если $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\Omega)$, то существует единственное в смысле определения 8.2.2 сильное решение $u \in \tilde{B}$ задачи (8.2.6), (8.2.7), (8.2.9) *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{\tilde{B}} \leqslant c\big(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}\big), \quad c > 0, \tag{8.2.56}$$

где постоянная $c > 0$ из неравенства (8.2.37).

Доказательство. Рассмотрим первую часть теоремы, т. е. доказательство существования и единственности сильного решения в смысле определения 8.2.1.

Если $f \in L_2(Q)$, а $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)$, то это означает, что вектор функция $\boldsymbol{F} = (f,\varphi)$ принадлежит гильбертову пространству $\boldsymbol{H} = L_2(Q)\times\mathring{H}^1(\Omega)$. Для доказательства существования сильного решения мы хотим показать, что для произвольно выбранного элемента $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{H}$ существует элемент $u \in B$, для которого

$$\overline{\boldsymbol{L}}u = \boldsymbol{F}.$$

Другими словами, надо показать, что $\mathscr{R}(\overline{\boldsymbol{L}}) = \boldsymbol{H}$, $\mathscr{R}(\overline{\boldsymbol{L}})$ — множество значений оператора $\overline{\boldsymbol{L}}$. Но при наличии энергетического неравенства (8.2.36) согласно теореме 4.7.5 $\mathscr{R}(\overline{\boldsymbol{L}}) = \overline{\mathscr{R}(\boldsymbol{L})}$, где $\boldsymbol{L}$ — оператор нашей рассматриваемой задачи.

Таким образом, доказательство существования сильного решения сводится к доказательству плотности множества значений $\mathscr{R}(\boldsymbol{L})$ оператора $\boldsymbol{L}$ в пространстве $\boldsymbol{H}$. Согласно критерию плотности множества в гильбертовом пространстве это означает, что если для некоторого элемента $\boldsymbol{v} = \big(v(\boldsymbol{x}),v^{(0)}(\boldsymbol{x}')\big) \in \boldsymbol{H}$ выполняется равенство

$$\big(\boldsymbol{L}u,\boldsymbol{v}\big)_{\boldsymbol{H}} = \big(\mathscr{L}u,v\big)_{L_2(Q)} + \big(l_0u,v^{(0)}\big)_{H^1(\Omega)} \tag{8.2.57}$$

для любого элемента $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$, то это может быть тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v} = 0$ по норме пространства $\boldsymbol{H}$.

Пусть в равенстве (8.2.57) u — произвольная функция из $\mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$. Так как в этом случае $l_0u = 0$, то из равенства (8.2.57) получаем равенство (8.2.39) для любой функции $u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$. Согласно лемме 8.2.3 равенство (8.2.39) может быть в том случае, если $v = 0$. Это означает, что множество значений $\mathscr{R}^{(0)}(\mathscr{L}) = \{\mathscr{L}u\,|u \in \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})\}$ оператора $\mathscr{L}$ плотно в $L_2(Q)$. Так как $\mathscr{D}(\boldsymbol{L}) \supset \mathscr{D}^{(0)}(\boldsymbol{L})$, то множество значений $\mathscr{R}(\mathscr{L}) = \{\mathscr{L}u\,|u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})\}$ тем более будет плотным в $L_2(Q)$.

Следовательно, из этих рассуждений вытекает, что в (8.2.57) $v = 0$ и $\left(\mathscr{L}u,v\right)_{L_2(Q)} = 0$.

Таким образом, равенство (8.2.57) преобразовывается в равенство

$$\left(l_0 u,v^{(0)}\right)_{H^1(\Omega)} = 0 \tag{8.2.58}$$

для любой функции $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$. Но множество $\{l_0 u\,|u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})\} \supset C_0^\infty(\Omega)$. А множество $C_0^\infty(\Omega)$ является плотным в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Поэтому и множество $\{l_0 u\,|u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})\} \supset C_0^\infty(\Omega)$ также будет плотным в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Из этих рассуждений следует, что равенство (8.2.58) для любых функций $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{L})$ возможно лишь при $v^{(0)} = 0$ в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Итак, мы доказали плотность множества значений $\mathscr{R}(\boldsymbol{L})$ оператора $\boldsymbol{L}$ в пространстве $\boldsymbol{H}$, т. е. существование сильного решения в смысле определения 8.2.1.

Единственность сильного решения $u \in B$ и оценка (8.2.54) в этом случае следует из теоремы 8.2.3 (см. следствие 8.2.1).

Доказательство второй части утверждения теоремы 8.2.4 в случае сильного решения в смысле определения 8.2.2 проводится аналогично, используя при этом пространства $\tilde{B}$ и $\tilde{\boldsymbol{H}}$ вместо B и $\boldsymbol{H}$. $\otimes$

Аналогично рассматриваются и другие смешанные задачи для параболического уравнения (8.2.4). Сначала доказывается энергетическое неравенства для операторов соответствующих рассматриваемых задач. Энергетическими неравенствами определяются нормы и пространства $B, \boldsymbol{H}$ для каждой задачи отдельно. А затем с помощью операторов осреднения доказывается существование сильного решения задачи.

Из нерассмотренных более простой задачей является вторая смешанная задача с однородным условием, т.е. когда на Γ задается условие

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big|_\Gamma = 0.$$

В случае третье смешанной задачи можно рассматривать условие

$$\left(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x})u + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\right)\Big|_\Gamma = 0$$

для $\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ на Γ. Можно рассматривать смешанные задачи для более общих граничных условиях на боковой гиперповерхности Γ или задачи со смешанными граничными условиями на Γ.

8.2.2. Метод Фурье для смешанных задач параболических уравнений

Схема отыскания решения смешанных задач для параболических уравнений методом Фурье не намного отличается от метода Фурье, который продемонстрирован в п. 8.1.2 при рассмотрении аналогичных смешанных задач в случае гиперболических уравнений.

Здесь методом Фурье решение рассматриваемой смешанной задачи ищется в виде разложения по системе собственных функций соответствующей задачи Штурма-Лиувилля, которая определяется исходной рассматриваемой задачей.

Будем рассматривать смешанные задачи для нахождения их решения методом Фурье, когда коэффициенты уравнения (8.2.4) не зависят от x_0, т. е. уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x_0} - Au \equiv \frac{\partial u}{\partial x_0} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \\ + \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial u}{\partial x_i} + b^{(0)}(\boldsymbol{x}')u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q = (0,\infty \times \Omega).\end{gathered} \tag{8.2.59}$$

К уравнению (8.2.59) присоединяются начальные условия

$$u\Big|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{x}' \in \Omega, \tag{8.2.60}$$

и на боковой поверхности Γ однородные граничные условия

$$\Big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}')u + \sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big)\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{8.2.61}$$

где коэффициенты $\sigma^{(i)}(i = 1,2)$ не зависят от переменного x_0. В уравнении коэффициенты $a^{(ij)} = a^{(ji)}$ и удовлетворяют условию (8.2.5).

Решение задачи (8.2.59) – (8.2.61) ищем в виде ряда

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)}(x_0)v^{(k)}(\boldsymbol{x}'), \tag{8.2.62}$$

где $v^{(k)}$ — собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{gathered}Av^{(k)}+\lambda^{(k)}v^{(k)}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{(ij)}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_j}\Big)-\\ -\sum_{i=1}^{n}a^{(i)}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_i}-b^{(0)}(\boldsymbol{x}')v^{(k)}+\lambda^{(k)}v^{(k)}=0,\quad \boldsymbol{x}'\in\Omega,\\ \Big(\sigma^{(0)}(\boldsymbol{x}')v^{(k)}+\sigma^{(1)}(\boldsymbol{x}')\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\boldsymbol{N}}\Big)\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad \boldsymbol{x}'\in\partial\Omega,\end{gathered}\tag{8.2.63}$$

$\lambda^{(k)}$ — собственные функции.

Задача (8.2.63) изучалась в параграфах 6.4, 7.2, 7.3 для частных случаев. Для отыскания решения в виде ряда (8.2.62) система $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций должна быть полной в $L_2(\Omega)$ и ортонормированной

$$(v^{(k)},v^{(m)})_{L_2(\Omega)}=\begin{cases}0, & k\neq m,\\ 1, & k=m.\end{cases}$$

Если первоначальная система (решения задачи (8.2.63)) не ортонормированная, то ее можно сделать ортонормированной.

Если функции f и φ достаточно гладкие, например, $f\in C(\overline{Q})$, а функция $\varphi\in C(\overline{\Omega})$, то их можно разложить в ряд Фурье по системе $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\begin{gathered}f(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{\infty}f^{(k)}(x_0)v^{(k)}(\boldsymbol{x}'),\\ \varphi(\boldsymbol{x}')=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{(k)}v^{(k)}(\boldsymbol{x}'),\end{gathered}\tag{8.2.64}$$

где $f^{(k)}(x_0)$ и $\varphi^{(k)}$ — коэффициенты Фурье функций f и φ соответственно. Разложение (8.2.62) подставляем в уравнение (8.2.59) и условие (8.2.60). Правые части этих уравнений заменяем разложениями (8.2.64) и учитываем, что $v^{(k)}$ удовлетворяют задаче (8.2.63). В результате получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x_0}-Au=\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\frac{\mathrm{d}T^{(k)}}{\mathrm{d}x_0}v^{(k)}-T^{(k)}Av^{(k)}\bigg)=\\ =\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\frac{\mathrm{d}T^{(k)}}{\mathrm{d}x_0}+\lambda^{(k)}\bigg)v^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}f^{(k)}(x_0)v^{(k)}(\boldsymbol{x}'),\\ u\big|_{x_0=0}=\sum_{k=1}^{\infty}T^{(k)}(0)v^{(k)}(\boldsymbol{x}')=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{(k)}v^{(k)}(\boldsymbol{x}').\end{gathered}\tag{8.2.65}$$

В силу линейной независимости функций $v^{(k)}$ из соотношений (8.2.65) для каждого $k \in \mathbb{N}$ получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}T^{(k)}}{\mathrm{d}x_0} + \lambda^{(k)}T^{(k)} = f^{(k)}(x_0), \quad x_0 > 0, \\ &T^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}. \end{aligned} \tag{8.2.66}$$

Решение задачи (8.2.66) выписывается в явном виде и

$$T^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)}e^{-\lambda^{(k)}x_0} + \int\limits_0^{x_0} e^{\lambda^{(k)}(\tau - x_0)}f^{(k)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Таким образом, решение u задачи (8.2.59)–(8.2.61) можно представить в виде ряда

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\varphi^{(k)}e^{-\lambda^{(k)}x_0} + \int\limits_0^{x_0} e^{-\lambda^{(k)}(\tau - x_0)}f^{(k)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big]v^{(k)}(\boldsymbol{x}'). \tag{8.2.67}$$

Для завершения отыскания решения задачи (8.2.59) – (8.2.61) методом Фурье необходимо показать, что представление (8.2.67) действительно является решением этой задачи, т. е. показать, что ряд (8.2.67) сходится и представляет собой функцию u и ряды, полученные почленным дифференцированием по x_0 первого порядка, по остальным независимым переменным – до второго порядка включительно, также сходятся и представляют собой функции, удовлетворяющие уравнению (8.2.59) и условиям (8.2.60), (8.2.61).

Здесь мы ограничимся только формально найденным решением в виде (8.2.67) задачи (8.2.59) – (8.2.61) без его обоснования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агошков, В.И.* Методы решения задач математической физики/ В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутаев. – М.: Физматлит, 2002.
2. *Арсенин, В.Я.* Методы математической физики и специальные функции/ В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1984.
3. *Бицадзе, А.В.* Уравнения математической физики/ А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1976.
4. *Берс, Л.* Уравнения с частными производными/ Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. – М.: Мир, 1966.
5. *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики/ В.С. Владимиров. – 2- е изд., стер. – М.: МАИК "Наука", 2000.
6. *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики/ В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2003.
7. *Годунов, С.К.* Уравнения математической физики/ С.К. Годунов. – М.: Наука, 1979.
8. *Дезин, А.А.* Общие вопросы теории граничных задач/ А.А. Дезин. – М.: Мир, 1980.
9. *Дьедоне, Ж.* Основы современного анализа/ Ж. Дьедоне. – М.: Мир, 1964.
10. *Зорич, В.А.* Математический анализ/ В.А. Зорич. – 3- е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО. Ч. 1. – 2001. – 658 с., Ч. 2. – 1998. – 787 с.
11. *Ильин, В.А.* Математический анализ/ В.А. Ильин. Часть I. – М.: Наука, 1981.
12. *Ильин, В.А.* Математический анализ/ В.А. Ильин. Часть II. – М.: Наука, 1981.
13. *Кошляков, Н.С.* Уравнения в частных производных математической физики/ Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высш. школа, 1970.
14. *Кудрявцев, Л.Д.* Курс математического анализа: в 3 т. /Л.Д. Кудрявцев. – Изд. 2 - е, перер. и доп. – М.: Высш. школа. – Т.1. – 2003. – 704 с., Т.2. – 1988. – 576 с., Т.3. – 1989. – 352 с.
15. *Курант, Р.* Уравнения с частными производными/ Р. Курант. – М.: Мир, 1964.

16. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления/ Р. Курант. Т.I, II. – М.: Наука, 1970.
17. *Ладыженская, О.А.* Краевые задачи математической физики/ О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.
18. *Лионс, Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения/ Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971.
19. *Марчук, Г.И.* Методы вычислительной математики/ Г.И. Марчук. – М.: Мир, 1980.
20. *Масленникова, В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных/ В.Н. Масленникова. – М.: Изд.-во РУДН, 1997.
21. *Матвеев, Н.Н.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений/ Н.Н. Матвеев. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.
22. *Мизохата, С.* Теория уравнений с частными производными/ С. Мизохата. – М.: Мир, 1977.
23. *Михайлов, В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных/ В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976.
24. *Михлин, С.Г.* Линейные уравнения в частных производных/ С.Г. Михлин. – М.: Высш. школа, 1977.
25. *Михлин, С.Г.* Курс математической физики/ С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1968.
26. *Михлин, С.Г.* Вариационные методы в математической физике/ С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970.
27. *Молчанов, И.Н.* Основы метода конечных элементов/ И.Н. Молчанов, Л.Д. Николенко. – Киев: Наукова думка, 1989.
28. *Никольский, С.М.* Курс математического анализа/ С.М. Никольский. – Изд. 3 - е, перер. и доп. – М.: Наука. Т.1. 1983. – 464 с., Т.2. – 1973.
29. *Петровский, И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными/ И.Г. Петровский. – М.: Наука, 1961.
30. *Пикулин, В.П.* Практический курс по уравнениям математической физики/ В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Изд.-во МЦНМО, 2004.
31. *Положий, Г.Н.* Уравнения математической физики/ Г.Н. Положий. – Минск: Высш. школа, 1964.

32. *Русак, В.Н.* Математическая физика/ В.Н. Русак. – Минск: Дизайн ПРО, 1998.
33. *Сабитов, К.Б.* Уравнения математической физики/ К.Б. Сабитов. – Минск: Высш. школа, 2003.
34. *Самарский, А.А.* Теория разностных схем/ А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989.
35. *Самарский, А.А.* Введение в численные методы/ А.А. Самарский. – М.: Наука, 1987.
36. *Самарский, А.А.* Численные методы/ А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 431 с.
37. *Свешников, А.Г.* Лекции по математической физике/ А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В.Кравцов. – М.: Наука, 2004.
38. *Смирнов, В.И.* Курс высшей математики/ В.И. Смирнов. – Т.IV, ч. 2.– М.: Наука, 1981.
39. *Соболев, С.Л.* Уравнения математической физики/ С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1966.
40. *Степанов, В.В.* Курс дифференциальных уравнений/ В.В. Степанов. – М.: Физматлит, 1959.
41. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики. 7 - е изд./ А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. – М.: Изд-во Московского ун-та: Наука, 2004.
42. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.
43. *Фарлоу, С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров/ С. Фарлоу. – М.: Мир, 1985.
44. *Фихтенгольц, Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб: Лань. Т.1. – 1997. – 608 с., Т.2. – 1997. – 800 с., Т.3. – 1997. – 656 с.
45. *Флетчер, К.* Численные методы на основе метода Галеркина/ К. Флетчер. – М.: Мир, 1988.
46. *Фридман, А.* Уравнения с частными производными параболического типа/ А. Фридман. – М.: Мир, 1968.
47. *Хокин, Р.* Численное моделирование методом частиц/ Р. Хокин, Дж. Иствуд. – М.: Мир, 1987.
48. *Burenkov, V.I.* Sobolev spaces on domains/ V.I. Burenkov. –

Stuttgart – Leipzig: B.G. Teubner, 1998.

49. *Dautray R.* Mathematical analysis and numeral methods for science and technology/ R. Dautray, J.-L. Lions. – Vol. 1. Physical origins and classical methods. – Berlin – Heidelberg – New-York – London – Paris – Tokyo – Hong Kong: Springer-Verlag, 1990.
50. *DiBenedetto, E.* Partial differential equations/ D. Emmanuel. – Boston – Basel – Berlin: Birkhauser, 1995.
51. *Корзюк, В.И.* Уравнения математической физики. Часть 1/ В.И. Корзюк. – Минск, 2007.
52. *Корзюк, В.И.* Уравнения математической физики. Часть 2/ В.И. Корзюк. – Минск, 2008.
53. *Корзюк, В.И.* Уравнения математической физики. Часть 3/ В.И. Корзюк. – Минск, 2008.
54. *Корзюк, В.И.* Уравнения математической физики. Часть 4/ В.И. Корзюк. – Минск, 2008.
55. *Корзюк, В.И.* Уравнения математической физики. Часть 5/ В.И. Корзюк. – Минск, 2008.
56. *Корзюк, В.И.* Уравнения математической физики. Часть 6/ В.И. Корзюк. – Минск, 2008.
57. *Корзюк, В.И.* Уравнения математической физики. Часть 7/ В.И. Корзюк. – Минск, 2009.
58. *Корзюк, В.И.* Уравнения математической физики. Часть 8/ В.И. Корзюк. – Минск, 2009.
59. *Бейтман, Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2/ Г. Бейтман, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1996.

Учебное издание

Корзюк Виктор Иванович

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ : КУРС ЛЕКЦИЙ

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *В. И. Корзюк*

Подписано в печать 00.00.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 0,00. Уч.-изд. л. 2,34. Тираж 120 экз.
Заказ .

Белорусский государственный университет.
Лицензия на осуществление издательской деятельности
№ 02330/0056804 от 02.03.2004.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.

Отпечатано на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.