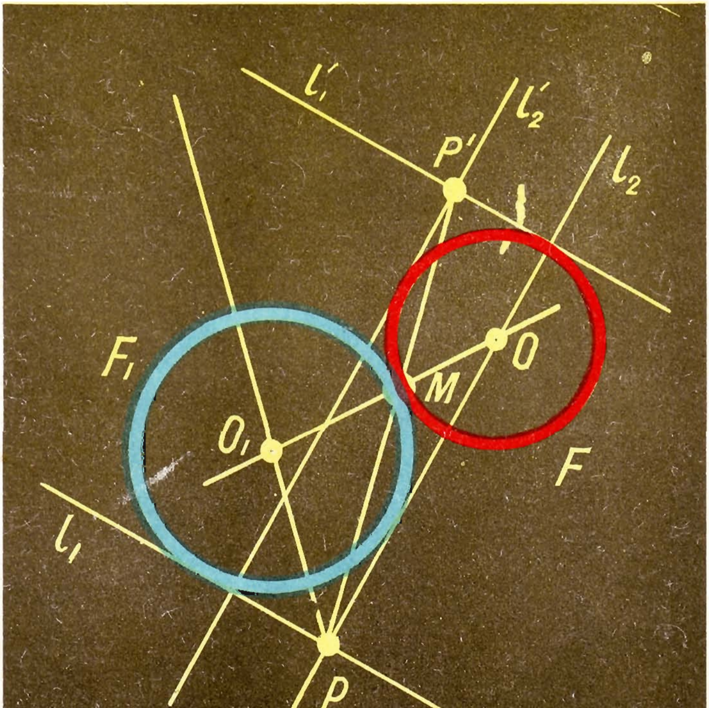
Ю. М. КОЛЯГИН, В. А. ОГАНЕСЯН

УЧИСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ



Ю. М. КОЛЯГИН, В. А. ОГАНЕСЯН

УЧИСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
VII—VIII КЛАССОВ

Москва «Просвещение» 1980

ББК 22.1я72
К62

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент АПН СССР *И. С. Бровиков.*
Учитель математики *Т. К. Шабашов* (г. Ногинск).

Колягин Ю. М., Оганесян В. А.
К62 Учись решать задачи: Пособие для учащихся VII—VIII кл. — М.: Просвещение, 1980 — 96 с.

В книге на подробном разборе решения ряда задач авторы дают полезные советы решающему задачу. Все советы и рекомендации учащимся направлены на выработку у них уверенных навыков решения нестандартных задач.

$К\frac{60601-446}{103(03)-80}$ Инф. письмо 4306020400

ББК 22.1я72
51 075

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Безусловно, верно высказывание о том, что «для того, чтобы научиться решать задачи, нужно решать их». Вместе с тем опыт показывает, что целенаправленное обучение (а значит и самообучение) решению задач, выявление некоторых особенностей поисковой деятельности, связанной с решением незнакомой, нестандартной задачи, способно принести немалую пользу школьнику, пробудить и укрепить его интерес к изучению математики.

В настоящей работе отражен многолетний опыт работы авторов со школьниками, «любящими решать задачи вообще». Представленные здесь вопросы поначалу служили темами занятий математического кружка, а затем оформились в виде своеобразного факультативного курса, основной формой проведения которого являлось, как правило, самостоятельное изучение учащимися разделов курса и решение задач с последующим коллективным обсуждением рассмотренных идей и индивидуально полученных решений на групповых занятиях в классе.

Книга адресуется учащимся VII—VIII классов. Она предназначена именно учащимся, и авторы стремились к тому, чтобы учащиеся могли ее изучать самостоятельно (естественно, под руководством учителя).

Указание данного возрастного уровня школьника, впрочем, весьма условно. Нам приходилось проводить соответствующие занятия и в IV—VI и в X классах. На наш взгляд, рассматриваемые здесь идеи доступны школьникам IV—X классов. Речь может идти лишь о примерах (и задачах, предложенных для решения), иллюстрирующих сказанное; понятно, что эти примеры и задачи должны соответствовать тем знаниям и умениям, которыми владеют школьники данного года обучения. Поэтому при работе с данной книгой в более младших классах можно (и это сделать нетрудно) заменить некоторые задачи.

В конце книги приведены ответы и указания к решению тех задач, которые рассмотрены в каждом параграфе, за исключением задач, составляющих § 13. (Тот, кто умеет решать задачи, как правило, умеет находить способ проверки правильности их решения.) Мы не приводим никакого указателя дополнительной литературы. Основная литература такого рода — это задачи, которые можно найти всюду, начиная от научно-популярных журналов и кончая специальными сборниками задач. Может быть, некоторое исключение составляют известные книги Д. Пойа (Как решать задачу. М., 1961; Математическое открытие. М., 1976), идеи которых во многом созвучны изложенным в данной книге.

На практике оправдала себя следующая методика работы по данному пособию:

1. Материал каждого параграфа книги прорабатывается учащимися — членами математического кружка самостоятельно (в домашних условиях).

2. После (или в процессе) изучения данной темы учащиеся решают соответствующие ей задачи и упражнения.

3. На очередном занятии математического кружка один из учащихся выступает с кратким сообщением по изученному.

4. Каждая из задач, предложенная в данном параграфе для самостоятельного решения, обсуждается коллективом на этом занятии кружка.

5. Учитель подводит итог, в котором обращает внимание учащихся на основную идею, выраженную в данном параграфе, а также на наиболее яркие иллюстрации полезности этой идеи при решении **любых** задач.

6. При необходимости учитель дает указания для дальнейшей самостоятельной работы учащихся по тексту данного пособия.

Понятно, что данные методические рекомендации не исключают других возможных форм работы школьников с данным пособием.

Настоящее издание книги подготовлено на основе ротапринтного издания 1972 года с учетом замечаний и предложений, высказанных в ходе широкой опытной проверки пособия в школах различных территорий РСФСР. Авторы благодарят всех учителей математики, участвовавших в этой работе. Авторы выражают также благодарность аспирантам МОПИ им. Н. К. Крупской Е. Н. Перевощиковой и В. П. Ремянниковой за существенную помощь при подготовке данного издания к печати.

Авторы

§ 1. КАКИЕ ЗАДАЧИ МЫ НЕ УМЕЕМ РЕШАТЬ

Многие из вас **любят решать** задачи, но очень немногие из вас **умеют решать** задачи, — не так ли? Но, может быть, вы мало решаете задач и потому не умеете делать это хорошо? Давайте оценим, хотя бы приближенно, сколько математических задач решаете вы во время обучения в школе. Условимся считать ***задачей*** и текстовую задачу, и уравнение, и вычислительный пример (не будем сейчас обращать внимание на то, трудна задача или легка, сколько времени приходится ее решать или оформлять решение). Итак, допустим, что на уроке вы решаете в среднем 5 задач, а дома (по заданию учителя) — 3. На каждом году обучения в школе вы посещаете 200 уроков математики, и потому получается, что в год вы решаете в среднем 1 600 задач. Ко времени окончания VIII класса вами уже решено 12 800 задач! (Отбросим 800 задач, имея в виду праздники или случаи, когда вы не смогли выполнить домашнее задание, и оставим 12 000 задач!) Можно даже не считать еще 2 000 задач, которые вы решали несамостоятельно или отвлекались на уроке. Итак, вы решили 10 000 задач и не умеете их решать.

Как же научиться решать задачи? Прежде всего уточним, о каких задачах будет идти речь, какие задачи успешно решают почти все учащиеся и какие задачи умеют решать лишь немногие из вас. Ведь очень часто можно услышать от вас: «Эти задачи мы умеем решать, такие задачи мы решали» или «Эти задачи мы не умеем решать, такие задачи мы не решали». Разберемся в этом.

Какие задачи вы решаете успешно? Если решение некоторой задачи учитель объяснил вам в классе (или в учебнике приведено ее решение), то вы, пожалуй, сможете решить задачу, похожую на эту.

Приведем один пример. Пусть учитель показал вам, как решается уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, вывел формулу для решения квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ $\left(x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$, и вы выучили эту формулу наизусть (или имеете ее перед собой). Ясно, что вы сумеете решить такие, например, уравнения, как $x^2 - 10x + 21 = 0$, $x^2 - x + 2 = 0$ и т. п. Не так ли? Такие задачи, ход решения которых вам заранее известен, называют *стандартными* или *шаблонными* (решают их по образцу-шаблону, по принципу «делай так, как показал учитель»). Скажем сразу, о таких задачах мы не будем здесь говорить, такие задачи должны уметь решать **все** (будь только внимателен и помни ход решения).

Но в повседневной жизни, на производстве и в науке сплошь и рядом встречаются задачи, на которые нет готового ответа (или готового способа решения). Многие жизненные задачи нетипичны, неповторимы. Такие задачи часто называют *нестандартными*.

Заметим, что нестандартность задачи во многом зависит от того, решалась ли ранее вами задача, похожая на данную, а не от самого решения задачи. Так, например, если вы не знаете формулы решения квадратного уравнения и никогда ранее не решали квадратные уравнения, то задача решения, например, уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ будет для вас нестандартной (ее можно решить, не используя формулу!); но, решив это уравнение и принявшись за решение следующего, например: $x^2 - 7x + 12 = 0$, вы будете иметь дело уже со стандартной задачей.

Для успешного решения нестандартных задач необходимо прежде всего уметь думать, догадываться. Но этого мало. Нужны, конечно, и знания, и опыт в решении необычных задач; полезно владеть и определенными общими подходами к решению.

Всему этому нужно учиться, и именно этому вам будет помогать данная книга.

Не все нестандартные задачи одинаково трудны. Даже учебные задачи отличаются друг от друга по «степени своей нестандартности».

Так вы часто имеете дело с задачами, ход решения которых вам неизвестен заранее, как они решаются, учитель вам не показывал, но относительно которых указан (или вы сами это установили по тому месту, которое занимает задача в учебнике) тот раздел школьного курса математики, который используется при ее решении. Такова, например, задача к теме «Осевая симметрия»: «Доказать, что медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, конгруэнтны». Задачи, подобные данной, вы решаете уже не так успешно, как стандартные, но все же решаете понемножку (знаете, что при решении этой задачи нужно использовать свойства осевой симметрии; но **какие** из них и **как** это сделать, вам приходится устанавливать самостоятельно).

Наконец, вам встречаются и более трудные задачи (чаще всего среди олимпиадных задач), где и условие вам ясно, и требование (вопрос задачи) понятно. Неясны лишь два момента: а) как решать эту задачу (но это для вас не является неожиданностью!); б) к какому разделу школьного курса математики относится эта задача, какие известные вам теоремы и свойства применяются при ее решении? Многие из вас скажут, что это уже явный подвох! Наш учитель никогда нас так не «подводит»; если бы он так нас «подвел», вот двоек-то было бы! Правда, если вам предложили такую задачу на олимпиаде или вы услыхали о ней от товарища, то и обидеться не на кого и жаловаться некому: дело-то добровольное...

Вот одна из таких «злодейских» задач:

«Имеется 10 мешков с монетами. В девяти мешках монеты настоящие (каждая массой 10 г), а в одном — фальшивые (каждая массой 11 г). Одним взвешиванием установить, в каком мешке фальшивые монеты (можно использовать любые гири)».

Не следует ожидать, что после изучения этой книги вы научитесь решать **любую** нестандартную задачу. Это просто невозможно. Ведь нестандартные задачи в какой-то степени **неповторимы**. Но вы должны значительно **улучшить** свое умение решать такие задачи, а главное, должны научиться **мыслить** и **управлять** своей математической мыслительной деятельностью не только при решении задач, но и при изучении математики в целом, научиться **понимать** силу и красоту математики!

Нам предстоит упорно потрудиться, разобраться во многих вопросах, связанных с решением задач, прежде чем мы добьемся успеха. Посмотрите на эту примерную схему, иллюстрирующую предстоящую нам работу (рис. 1), — не пугает ли она вас? Кто ис

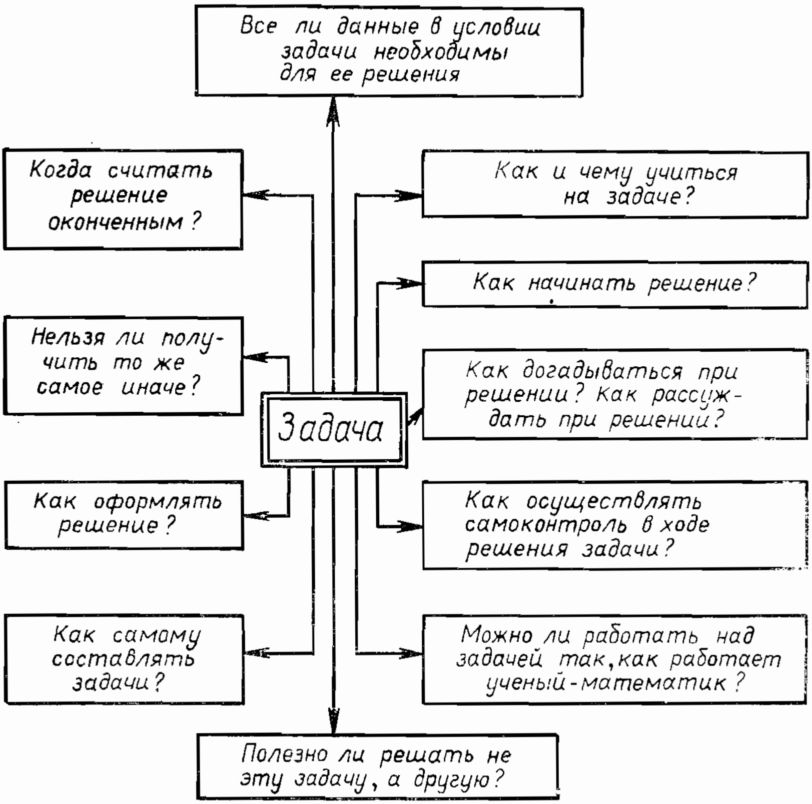


Рис. 1

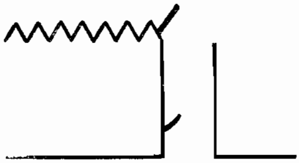


Рис. 2

пугался, еще не поздно отступиться. «А без труда — не вынешь и рыбку из пруда!»

Ну как? Не испугались?

Тогда продолжим путь в Страну задач! Начнем с самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы

1.1. Приведите пример задачи (запишите ее условие), которая является для вас в настоящее время стандартной, нестандартной (по одной задаче каждого вида). Запишите условия этих задач на отдельном листке и сдайте листок учителю.

1.2. Решите приведенные в тексте квадратные уравнения, не используя формулу. Как проверить, правильно ли ваше решение?

1.3. Решите задачу о медианах равнобедренного треугольника.

1.4. Попробуйте свои силы на решении задачи о взвешивании монет. Если вам удастся решить эту задачу, не рассказывайте пока о ее решении товарищу (или подруге), расскажите о решении только учителю.

1.5. Попробуйте дополнить схему вопросов, связанных с решением задач, своими вопросами. Обсудите эти вопросы в классе.

1.6. Приготовьтесь ответить учителю на следующие вопросы:

1) Какие задачи кажутся вам наиболее трудными (арифметические, алгебраические, геометрические или какие-либо другие)?

2) Какие задачи кажутся вам наиболее интересными?

3) Прочитайте еще раз схему вопросов, связанных с решением задач. Какие из этих вопросов кажутся вам самыми важными? Самыми интересными?

1.7. Приведите пример какой-нибудь известной вам **интересной задачи** или **интересного решения** какой-либо задачи. Сумейте ответить на вопрос: «Почему эту задачу (или ее решение) вы считаете интересной?»

1.8. Расскажите, что изображено на рисунке 2. Обсудите ваши ответы в классе. Установите, у кого из вас самое интересное решение этой необычной задачи.

§ 2. УЧИСЬ НА ЗАДАЧЕ

Что значит учиться на задаче? И нужно ли это?

Многие считают, что задача дается для того, чтобы ее решить: найти правильный ответ на вопрос задачи (или установить, что эта задача не имеет решения). Это верно лишь отчасти. Ученый, инженер, экономист, художник и т. д., перед которым поставлена конкретная задача, конечно, должен ее решать — это его **главная** цель. **Вторичной** целью может быть отыскание наиболее общего, красивого, экономичного решения. Если эта задача решена, то в результате ее решения создана какая-то материальная или духовная ценность. Какие же материальные или духовные ценности создаете вы, школьники, при успешном решении задачи?

Для школьника решить данную задачу — не главная цель (как у производственника); главное — научиться чему-то, связанному с изучением математики, узнать и усвоить новые математические факты, овладеть новыми математическими методами, накопить определенный опыт, научиться мыслить. Итак, **главная наша цель — учебная**, и потому каждая задача должна вас обучать чему-либо полезному, новому знанию или умению.

Обнаружить это полезное и новое для вас не так просто. Ведь вы даже не задумываетесь над этим, считая, наверное, что накопление полезных и новых фактов произойдет само собой. Чем же иначе можно объяснить тот факт, что иногда, заглянув в ответ (или получив одобрение учителя), вы считаете свою работу над задачей законченной? Вы даже не отдаете себе отчета в том, как получено ваше решение, что вам нужно было знать, чтобы найти это решение (или что вы не знали, если решение сообщит вам товарищ или учитель).

Согласитесь, что чаще всего вы решаете задачи так, как указано на схеме (рис. 3), или, в лучшем случае, так, как показано на следующей схеме (рис. 4). Не потому ли вы часто не можете решить задачу, даже очень похожую на ту, которую когда-то решали?

Итак, **вы не учитесь на задаче, и в этом одна из причин того, что вы не умеете решать задачи.**

— Ну, хорошо, — скажете вы, — мы поняли, **что** мы не делаем и **что** нужно делать. Но нам до сих пор не ясно: как это делать? Чему учиться на задаче и как? Научите нас!

Ну что ж, попробуем.

Рассмотрим решение какой-либо задачи и посмотрим, чему оно может нас научить.

«Площадь прямоугольника равна a^2. Найти наименьшее значение периметра этого прямоугольника».

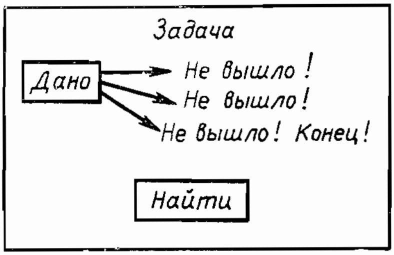


Рис. 3

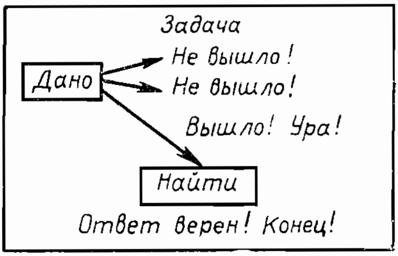


Рис. 4

I способ. Для решения задачи достаточно рассмотреть полупериметр данного прямоугольника. Обозначим длины сторон прямоугольника через x и y, полупериметр через p; запишем задачу символически:

$$(xy = a^2) \Longrightarrow (x + y = p — \text{наименьшее}),\ p?$$

Воспользуемся тождеством $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$; так как $xy = a^2$ и $x + y = p$, то $p^2 = (x - y)^2 + 4a^2$.

Наименьшее значение p^2 достигнет тогда, когда $x - y = 0$, т. е. $x = y$. В этом случае $p^2 = 4a^2$, следовательно, $p = 2a$.

Вывод. Наименьшее значение полупериметра p равно $2a$, когда $x = y$.

II способ. Пусть x — длина стороны прямоугольника. Тогда длина смежной стороны равна $p - x$, а площадь прямоугольника запишется так: $x(p - x) = a^2$, т. е. $xp - x^2 - a^2 = 0$, или $x^2 + a^2 - xp = 0$.

Имеем сумму квадратов двух переменных x^2 и a^2, прибавим к ней $2ax$. Чтобы не изменилась сумма, вычтем это же выражение: $x^2 - 2ax + a^2 + 2ax - xp = 0$, или $(x - a)^2 + x(2a - p) = 0$. Выделили из суммы полный квадрат разности выражений x и a.

Последнее равенство возможно только при $2a - p \leqslant 0$ (так как $(x - a)^2 \geqslant 0$, $x > 0$), т. е. $p \geqslant 2a$.

Очевидно, наименьшее значение p равно $2a$.

III способ. Рассмотрим квадрат со стороной a, тогда площадь его a^2, полупериметр равен $2a$. Если одну из сторон уменьшить на m ($a > m \geqslant 0$), то, чтобы площадь прямоугольника осталась прежней, нужно вторую сторону увеличить на n ($n \geqslant 0$).

По условию задачи площадь прямоугольника равна a^2, т. е. $(a - m)(a + n) = a^2$.

Произведя вычисления, получим: $a(n - m) = mn$; так как $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, то $mn > 0$, $a > 0$.

Следовательно, $n - m > 0$.

Тогда полупериметр прямоугольника будет равен: $p = a - m + a + n = 2a + (n - m)$; так как $n - m > 0$, то $p \geqslant 2a$.

Наименьшее значение p равно $2a$.

IV способ. Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} x + y = p, \\ x - y = q, \end{cases}$$

где q — некоторое число, p — полупериметр.

Решая систему, получим:

$$x = \frac{p+q}{2},\ y = \frac{p-q}{2}.$$

Найдем площадь $\frac{p+q}{2} \cdot \frac{p-q}{2} = a^2$; отсюда $p^2 = 4a^2 + q^2$, и p будет наименьшим, когда $q = 0$, т. е. $x = y$. Следовательно, $p = 2a$.

Пусть мы решили задачу, и даже четырьмя способами.

Чему мы научились, решая эту задачу? Как это установить?

1) Прежде всего отметим, что, решая эту задачу, мы доказали теорему: «Сумма двух положительных переменных, произведение которых есть величина постоянная, принимает наименьшее значение, когда значения переменных равны».

Интересный факт! Значит, задач, связанных с этой теоремой, может быть много и встретиться они могут не раз. Запомним это.

2) Посмотрим на способы решения. На чем они основаны?

а) Решая задачу первым способом, мы воспользовались тождеством $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$. Это и явилось главным средством доказательства.

б) Второй способ основан на выражении одной переменной через другую, выделении полного квадрата (прибавили и вычли одно и то же выражение), нахождении знака одного из двух слагаемых, сумма которых равна 0.

в) Посмотрим, о чем полезном расскажет нам третий способ. Мы воспользовались тем, что стороны прямоугольника, площадь которого есть величина постоянная, находятся в обратно пропорциональной зависимости друг с другом, а также свойством неравенств: если $a > b$, то $a = b + m$, $m > 0$.

Предлагаем самим извлечь все то, что полезно запомнить из четвертого способа решения задачи.

П о д в е д е м и т о г и. Как мы оцениваем учебный характер этой задачи?

1) Мы рассмотрим еще раз задачу и установим, что полезно запомнить **тип задачи**: такие задачи могут нам встретиться не раз.

2) Мы установили, какой прием (способ) был главным инструментом решения (и запомнили этот прием: выделение полного квадрата, использование свойства обратно пропорциональных переменных и т. п.).

3) Мы отметили, что тождества сокращенного умножения нужно хорошо знать, чтобы применять их к решению задач.

4) Мы установили некоторую зависимость между суммой и произведением двух переменных (когда произведение есть величина постоянная).

Естественно, возник вопрос: при каких условиях произведение двух положительных переменных, сумма которых есть величина постоянная, принимает наибольшее значение, т. е. если $x + y = c$, где c — постоянная, то когда $x \cdot y$ достигает наибольшего значения? Попробуйте ответить на этот вопрос.

5) Видим, что теперь мы можем сами составлять аналогичные задачи, например:

1. Множество значений переменной x есть

$$\{-21; -20; -19; \ldots; 17; 18\},$$

множество значений переменной y есть

$$\{-3; -4; \ldots; -13; -14\}.$$

Сколько различных значений может принимать переменная $x + y$? Чему равна сумма наибольшего и наименьшего его значений?

2. Установить, в каком случае площадь прямоугольника со сторонами x и y будет наибольшей.

3. Построить график зависимости площади прямоугольника от длины одной из его сторон. Найти графическим способом стороны прямоугольника, если его периметр равен 12, а площадь наибольшая.

Рассмотрим еще одну задачу:

«Доказать, что $(a^3 - b^3)$ делится на 9, если $(a - b)$ делится на 3, где a и b — натуральные числа».

Неужели на решении такой «сухой» задачи можно чему-то полезному научиться? Прежде чем рассматривать решение, прочитаем условие задачи еще раз. Неинтересно? Нет, пожалуй, интересно, если вдуматься!

Неужели, если взять $a = 198$, $b = 48$ $(a - b = 198 - 48 = 150 \,\vdots\, 3)$*, то $(198^3 - 48^3) \,\vdots\, 9$? Не верится что-то. Не так ли? Может, потрудимся?!

$$198^3 - 48^3 = (198 - 48)(198^2 + 198 \cdot 48 + 48^2).$$

Не хочется считать? Можно взять a и b поменьше.

$$a = 7,\ b = 1:\quad a - b = 6 \,\vdots\, 3,\quad 7^3 - 1^3 = 342 \,\vdots\, 9;$$
$$a = 5,\ b = 2:\quad a - b = 3 \,\vdots\, 3,\quad 5^3 - 2^3 = 117 \,\vdots\, 9.$$

Не стоит проверять больше. Ведь мы докажем это утверждение для любых a и b, таких, что $(a - b) \,\vdots\, 3$.

I способ. Разложим многочлен $a^3 - b^3$ на множители:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + b^2 - 2ab + 3ab) = (a - b)((a - b)^2 + 3ab).$$

Так как $(a - b)$ делится на 3, то и $(a - b)^2 \,\vdots\, 3$, $(a - b)^2 + 3ab$ тоже делится на 3. Значит, $a^3 - b^3$ делится на 9.

II способ. Пусть $a - b = 3k$, причем $k \in N$.

Тогда $a = 3k + b$, и поэтому $a^3 - b^3 = (3k + b)^3 - b^3 = 27k^3 + 27k^2b + 9kb^2 + b^3 - b^3 = 9k(3k^2 + 3kb + b^2)$.

Следовательно, $a^3 - b^3$ делится на 9.

III способ. Представим разность кубов так:

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b).$$

---

* Знак $\vdots$ означает деление без остатка. Например, запись «$12 \,\vdots\, 4$» читается так: «12 делится на 4».

Очевидно, что $(a - b)^3$ делится на 9; $3ab(a - b)$ тоже делится на 9. Следовательно, и заданное число делится на 9.

IV способ. Так как $(a - b) \vdots 3$, то каждое из чисел a и b при делении на 3 дает один и тот же остаток r:

$$a = 3c + r,\ b = 3d + r.$$

Причем r может быть равно 0, 1 или 2. Если $r = 0$, то $a^3 - b^3 = (3c)^3 - (3d)^3$ делится на 9. Это очевидно.

Если $r = 1$, то $a^3 - b^3 = (3c + 1)^3 - (3d + 1)^3 = 27c^3 + 27c^2 + 9c + 1 - 27d^3 - 27d^2 - 9d - 1 = 9(3c^3 + 3c^2 + c - 3d^3 - 3d^2 - d)$.

Следовательно, $a^3 - b^3$ делится на 9.

Если $r = 2$, то $a^3 - b^3 = (3c + 2)^3 - (3d + 2)^3 = 27c^3 + 54c^2 + 36c + 8 - 27d^3 - 54d^2 - 36d - 8 = 9(3c^3 + 6c^2 + 4c - 3d^3 - 6d^2 - 4d)$.

Значит, $a^3 - b^3$ делится на 9.

V способ. Пусть $a - b = 3k$, где $k \in \boldsymbol{N}$. Тогда $(a - b)^3 = 27k^3$, $a^3 - b^3 = 27k^3 + 3ab(a - b)$, $a^3 - b^3 = 27k^3 + 9abk$.

Следовательно, $a^3 - b^3$ делится на 9.

Пусть мы решили эту задачу, и даже пятью способами (правда, здесь ничего не сказано о том, как найдены эти решения, но для нас важно сейчас другое). Чему мы научились, решая эту задачу? Как это установить?

1) Прежде всего отметим, что существуют такие виды чисел, которые делятся на некоторое число при определенных условиях. Наверное, таких видов чисел много. Например, $a^2 - b^2$, по-видимому, будет делиться на 4, если $(a - b) \vdots 2$ и т. д. (Интересный факт!) Значит, таких задач может быть много и встретиться они могут не раз.

2) Посмотрим на первый способ решения. На чем он основан?

а) Он основан на свойстве делимости суммы (если каждое из слагаемых делится на данное число, то и сумма делится на это число) — полезное свойство. (Запомнить!)

б) Он основан на свойстве делимости произведения (если каждый из двух множителей делится на данное число, то произведение делится на квадрат данного числа) — полезный факт. Запомнить его? Нет, лучше запомнить другое: если один из множителей делится на a, другой — на b, третий — на c и т. д., то произведение делится на $a \cdot b \cdot c \dots$. Это свойство полезнее.

в) Наконец, решение возникло потому, что применили разложение многочлена на множители. Это явилось главным средством доказательства. Сделаем вывод: если попадается задача на доказательство делимости какого-либо натурального числа, заданного формулой, разложение на множители может привести к цели.

3) Зачем нужна была числовая проверка? Разве можно было доказать это утверждение на числовом примере? Нет, частный пример ничего не доказывает в математике, но он может убедить нас в том, что задача поставлена правильно (а вдруг ошибка в условии?),

Очевидно, что $(a-b)^3$ делится на 9; $3ab(a-b)$ тоже делится на 9. Следовательно, и заданное число делится на 9.

IV способ. Так как $(a-b) \vdots 3$, то каждое из чисел a и b при делении на 3 дает один и тот же остаток r:

$$a = 3c + r,\ b = 3d + r.$$

Причем r может быть равно 0, 1 или 2. Если $r = 0$, то $a^3 - b^3 = (3c)^3 - (3d)^3$ делится на 9. Это очевидно.

Если $r = 1$, то $a^3 - b^3 = (3c+1)^3 - (3d+1)^3 = 27c^3 + 27c^2 + 9c + 1 - 27d^3 - 27d^2 - 9d - 1 = 9(3c^3 + 3c^2 + c - 3d^3 - 3d^2 - d)$.

Следовательно, $a^3 - b^3$ делится на 9.

Если $r = 2$, то $a^3 - b^3 = (3c+2)^3 - (3d+2)^3 = 27c^3 + 54c^2 + 36c + 8 - 27d^3 - 54d^2 - 36d - 8 = 9(3c^3 + 6c^2 + 4c - 3d^3 - 6d^2 - 4d)$.

Значит, $a^3 - b^3$ делится на 9.

V способ. Пусть $a - b = 3k$, где $k \in \boldsymbol{N}$. Тогда $(a-b)^3 = 27k^3$, $a^3 - b^3 = 27k^3 + 3ab(a-b)$, $a^3 - b^3 = 27k^3 + 9abk$.

Следовательно, $a^3 - b^3$ делится на 9.

Пусть мы решили эту задачу, и даже пятью способами (правда, здесь ничего не сказано о том, как найдены эти решения, но для нас важно сейчас другое). Чему мы научились, решая эту задачу? Как это установить?

1) Прежде всего отметим, что существуют такие виды чисел, которые делятся на некоторое число при определенных условиях. Наверное, таких видов чисел много. Например, $a^2 - b^2$, по-видимому, будет делиться на 4, если $(a-b) \vdots 2$ и т. д. (Интересный факт!) Значит, таких задач может быть много и встретиться они могут не раз.

2) Посмотрим на первый способ решения. На чем он основан?

а) Он основан на свойстве делимости суммы (если каждое из слагаемых делится на данное число, то и сумма делится на это число) — полезное свойство. (Запомнить!)

б) Он основан на свойстве делимости произведения (если каждый из двух множителей делится на данное число, то произведение делится на квадрат данного числа) — полезный факт. Запомнить его? Нет, лучше запомнить другое: если один из множителей делится на a, другой — на b, третий — на c и т. д., то произведение делится на $a \cdot b \cdot c \ldots$. Это свойство полезнее.

в) Наконец, решение возникло потому, что применили разложение многочлена на множители. Это явилось главным средством доказательства. Сделаем вывод: если попадается задача на доказательство делимости какого-либо натурального числа, заданного формулой, разложение на множители может привести к цели.

3) Зачем нужна была числовая проверка? Разве можно было доказать это утверждение на числовом примере? Нет, частный пример ничего не доказывает в математике, но он может убедить нас в том, что задача поставлена правильно (а вдруг ошибка в условии?),

и помочь понять то, что от нас требуется сделать. Итак, доверять частному примеру нельзя, а использовать его при решении полезно.

4) Посмотрим, о чем полезном расскажет нам второй способ решения задачи.

а) Прежде всего полезно знать, что число, кратное трем, можно записать в виде $3k$, где $k \in N$. Полезнее даже не это, а следующее: число, кратное четырем, можно записать в виде $4k$; кратное 5 — в виде $5k$ и т. д.

б) Зачем мы использовали запись числа в виде $3k$? Для того, чтобы использовать подстановку заданного условия в рассматриваемое выражение.

в) Наконец, заметим, что формулу $(a + b)^3$ (в первом случае $a^3 - b^3$) нам нужно было знать хорошо (не напрасно учитель добивался все время от нас запоминания тождеств сокращенного умножения — спасибо ему!).

г) И еще полезное свойство произведения стоит запомнить — если один из сомножителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

5) Из оставшихся способов рассмотрим еще один — четвертый. Что полезного можно извлечь из этого решения?

а) Прежде всего полезно знать то, что если разность двух чисел делится на некоторое данное число, то каждое из этих чисел при делении на данное число дает один и тот же остаток.

б) Все натуральные числа мы можем разбить на отдельные виды в зависимости от их делимости на некоторое число. Здесь числа разбиты на три множества; если бы рассматривалась делимость на 4, то могли бы разбить их на 4 множества (на числа вида $4m$, $4m + 1$, $4m + 2$, $4m + 3$). А сколько получили бы множеств, если рассматривали деление на 13?

в) Зачем мы разбивали множество натуральных чисел на части? Это делалось потому, что a и b могли быть такими, что делились бы на три или не делились. Если бы они делились на 3, все было бы просто; уменьшаемое и вычитаемое $a^3 - b^3$ делятся на 9, значит, и разность делится на 9. А в «неудобных» случаях была проведена проверка (в общем виде!) подстановкой в $a^3 - b^3$ данного вида чисел с вынесением 9 за скобки (применили свойство делимости произведения).

г) Итак, при решении задачи этим способом мы воспользовались таким приемом: разбили все возможные значения на «удобные» и «неудобные» и проверили, верно ли утверждение для каждого случая отдельно. Причем таких случаев оказалось немного (три); если бы в условии была дана делимость на 13, этот способ решения вряд ли оказался бы удобен. Запомним это!

Попробуйте определить, что полезно запомнить из оставшихся способов решения данной задачи.

Снова подведем итоги. Как мы оцениваем учебный характер этой задачи?

1) Мы рассмотрели еще раз саму задачу и установили, что полезно запомнить тип задачи: такие задачи могут нам встретиться не раз.

2) Мы установили, какой прием (способ) был главным инструментом решения (и запомнили этот прием): разложение на множители, разбиение множества чисел на части.

3) Мы установили, какие основные свойства чисел использовались нами при решении.

4) Мы обратили внимание на роль и место частных примеров, иллюстрирующих некоторое утверждение.

5) Мы усмотрели возможность самим составлять ряд аналогичных задач, например:

1. Доказать, что $(a^2 - b^2) \vdots 4$, если $(a - b) \vdots 2$ (более простая!).

2. Доказать, что $(a^4 - b^4) \vdots 16$, если $(a - b) \vdots 4$.

Ну что ж, мы думаем, вы можете сказать, что изучили решения этих двух задач не напрасно. Заметим, что вы не решали задачи сами, а потому не извлекли из них максимум пользы. (Например, не установили, что не знали и не умели, какие испытывали трудности в поиске решения.)

Закончим *первым советом решающему задачу*: **решив задачу, оглянись назад и изучи задачу и найденное решение в целом, установи, что полезно запомнить, а что можно забыть.** (Нужно не только пользоваться своей памятью, но и беречь ее!)

Задания для самостоятельной работы

2.1. Изучите условие и решение следующей задачи. Выявите, чему можно научиться на этой задаче. Что нового вы узнали, прочитав эту задачу и проработав ее решение? Ответьте на вопросы: о чем можно (и нужно) забыть в связи с этой задачей? Что могло бы пригодиться вам из опыта решения задач данного параграфа, если бы вы решали эту задачу сами?

З а д а ч а. Доказать, что всякое нечетное число, неравное единице, есть разность квадратов двух каких-то чисел.

Р е ш е н и е. 1) Нам нужно доказать, что $a = x^2 - y^2$, если $a \neq 1$ и a — нечетное число.

Проиллюстрируем примером эту интересную закономерность $3 = 2^2 - 1^2$; $5 = 3^2 - 2^2$; $7 = 4^2 - 3^2$; ...(основания квадратов установили обычным подбором).

2) Мы знаем, что нечетное число в общем виде можно записать так: $2n + 1$ или $2n - 1$. Нам лучше выбрать запись $2n + 1$. Почему? Итак, нам нужно доказать, что $2n + 1 = x^2 - y^2$, или $x^2 - y^2 = 2n + 1$.

3) Начнем с того, что попробуем $2n + 1$ представить в виде разности или суммы хотя бы одного квадрата и какого-то другого слагаемого. Для этого в числе $2n + 1$ не хватает слагаемого n^2, чтобы

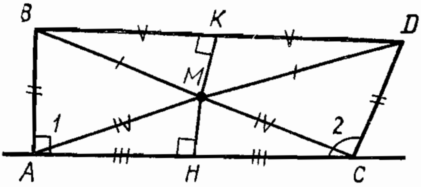


Рис. 5

оно стало квадратом суммы ($2n$ — удвоенное произведение n и 1, 1 — квадрат другого числа).

$$2n + 1 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = (n + 1)^2 - n^2.$$

Задача оказалась уже решенной, утверждение доказано.

Теперь можно даже без помощи догадок установить вид разложения любого нечетного числа на разность двух квадратов, например:

а) $13 = 2 \cdot 6 + 1 = 7^2 - 6^2$ ($n = 6$);
б) $1427 = 2 \cdot 713 + 1 = 714^2 - 713^2$ ($n = 713$).

2.2. Прокомментируйте следующее решение задачи и вывод, который вы сделаете, решив эту задачу.

Построим прямую и два угла (рис. 5): прямой угол ($\angle 1$) и тупой ($\angle 2$) — так, что отрезок прямой AC будет их общей стороной. На двух других сторонах углов отложим конгруэнтные отрезки $[AB]$ и $[CD]$ и соединим точки B и D. Ясно, что $[BD]$ не параллелен $[AC]$.

Через середины $[BD]$ и $[AC]$ проведем к этим отрезкам перпендикуляры до взаимного их пересечения в точке M (ведь $[BD]$ не параллелен $[AC]$).

Треугольник AMC равнобедренный, следовательно, $|AM| = |CM|$; $\angle MAH \cong \angle MCH$; $\triangle BAM \cong \triangle DMC$ (по трем сторонам). Следовательно,

$$\widehat{BAM} = \widehat{DCM}, \tag{1}$$

$$\widehat{MAH} = \widehat{MCH}. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2) почленно, получим: $\widehat{BAH} = \widehat{DCH}$, т. е. $\widehat{1} = \widehat{2}$. Получилось, что величина тупого угла равна величине прямого угла.

Решите каждую из предлагаемых далее задач и установите, чему вы научились в ходе их решения. Обменяйтесь мнениями с товарищами. Посоветуйтесь с учителем.

2.3. Найдите наименьшее значение суммы $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, если x, y — положительные числа и $x + y = 6$.

2.4. Значения переменных x, y, z положительны. $x + y + z = 9$. Найдите наименьшее значение суммы $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Достаточно ли данных, чтобы решить эту задачу?

2.5. Докажите, что произведение любых четырех последовательных целых чисел, увеличенное на единицу, является точным квадратом.

2.6. Докажите, что числа вида $m^3 - m$ делятся на 3, если $m \in N$.

2.7. Понаблюдайте за равенствами

$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 + 2 &= 11, \\ 12 \cdot 9 + 3 &= 111, \\ 123 \cdot 9 + 4 &= 1111, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Как записать в общем виде этот закон, который в них проявляется?

Какую задачу можно сформулировать в связи с этим законом?

2.8. Используя любые учебники или задачники, отыщите «поучительную» (на ваш взгляд) задачу. Оформите решение этой задачи на отдельном листке, укажите, чем интересна данная задача; сдайте работу учителю.

§ 3. КАК НАЧИНАТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

«С чего начать?» — думает каждый, приступая к решению задачи. Это очень важный вопрос в решении. Недаром говорит народная пословица: «Лиха беда — начало».

Мы увидим (да и сами вы убедитесь в этом), что правильное начало решения нестандартной задачи во многом определяет успех в ее решении.

Рассмотрим задачу: «В полной темноте парашютист приземлился в районе болота (в точке D). В каком направлении должен вылететь вертолет из пункта C за парашютистом, если a и b — лучи прожекторов и точка их пересечения D не видна из пункта C» (рис. 6).

Попробуем начать решение. Для этого «переведем» данную задачу на математический язык. Имеем две пересекающиеся прямые, D — точка пересечения. Построить луч CD, если точка D «недоступна».

Изучим внимательно условие задачи.

1) Построить прямую CD нельзя, так как положение точки D неизвестно. Значит, следует искать другие элементы для построения луча.

2) В школе мы обычно строим луч, если имеем дело с углом, треугольником. Для построения луча используем линейку, иногда циркуль.

Приступаем к началу решения. Поискам плана решения задачи должен предшествовать более общий этап решения — выбор **направления поиска.**

Многие неудачи объясняются тем, что начинают решение задачи

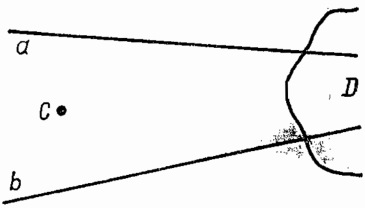


Рис. 6

наугад, на авось, и, хотя решение «лежит рядом», слишком много труда и времени затрачивается на попытки, уводящие в сторону.

Отвлечемся ненадолго. Представим себе темную комнату, из которой вам (с завязанными глазами) требуется найти выход. Посмотрим, как может вести себя человек в такой ситуации.

Один будет «кидаться» из стороны в сторону, наугад и вряд ли скоро найдет дверь; он может найти окно и принять его за дверь (а на каком этаже комната?). Правда, игрою случая, он иногда сразу выскочит в дверь (бывает и такое!), сам не поняв, почему он так быстро нашел выход.

Другой попытается дойти до стены и, ощупывая стену рукой, будет двигаться вдоль стены, пока не дойдет до окна (и установит, что это не дверь), до двери. Это верный путь, хотя не самый короткий.

Третий будет поступать так. Он остановится и подумает над тем, чем он располагает для отыскания выхода (осязание, движение, слух, запах). Затем он прислушается (в стороне, где слышен шум, скорее всего окно или дверь), вдохнет воздух (там, откуда ощутим воздушный поток, окно или дверь; холодный воздух, вероятно, идет из окна, более теплый — от двери в коридор). После такой подготовки он двинется в том направлении, которое ему покажется наиболее обнадеживающим.

Вы узнаете себя в одном из трех людей, когда вы решаете задачу?

Вернемся к решению поставленной выше задачи и будем поступать так, как поступает третий: наметим целесообразное (обнадеживающее) направление поиска.

Можем ли мы ошибиться? Можем, конечно. Но мы сделаем все, чтобы не ошибиться; даже если наши поиски не принесут успеха, это утешит нас. А не встречалась ли нам похожая задача раньше? Если бы это было так, опыт подсказал бы нам, что делать.

Вернемся к решению поставленной задачи. Для построения луча нам необходимо определить его направление. Вспомним, что мы знаем о направлении и способах его задания. Подумаем над тем, можно ли решить эту задачу с помощью преобразований плоскости. Может быть, полезно достроить данную фигуру до треугольника? Какие свойства треугольника нам известны? Отметим для себя следующее.

1) Направление задается лучом или парой точек.

2) Осевая, центральная симметрии, параллельный перенос, гомотетия отображают прямую на параллельную ей прямую.

3) Средняя линия треугольника параллельна основанию, ее длина равна половине длины основания.

4) Биссектрисы треугольника (его медианы или высоты) пересекаются в одной точке.

Рассмотрим перечисленные положения по порядку:

1) слишком общие сведения, не подсказывающие способа решения задачи (все же запомним, что пара точек задает луч);

2) это утверждение полезно обдумать;

3) это полезно обдумать (правда, треугольник не задан, но его нетрудно построить);

4) это положение, наверное, будет полезно для решения задачи (известную точку C можно считать точкой пересечения биссектрис, медиан или высот треугольника).

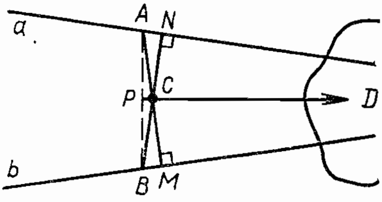


Рис. 7

Какие же линии треугольника могут пересекаться в точке C? Для построения биссектрисы нужно знать величины углов треугольника (они неизвестны); для построения медиан нужно знать длины сторон треугольника или иметь эти стороны построенными (однако вершины треугольника не определены, можно отметить лишь две из них, а третья — «недоступна»). Но из точки C можно опустить перпендикуляры на прямые a и b, а также на третью сторону треугольника, которую можно построить.

Итак, **направление поиска** выбрано разумно, если нам удастся достроить данную фигуру до треугольника (или необходимой его части). По существу у нас созрел **план решения задачи.**

Попытаемся претворить его в жизнь, считая точку C точкой пересечения высот треугольника. До практического построения додуматься нетрудно. Вот оно (рис. 7):

1) $(CN) \perp a$, $(CN) \cap b = B$;
2) $(CM) \perp b$, $(CM) \cap a = A$;
3) $[AB]$;
4) $[CP] \perp [AB]$;
5) $[PC)$ — искомое направление.

Теперь остается только доказать правильность построения (но это вы уже сделаете сами).

Мы решили задачу! Но мы не только решаем задачи, мы учимся на задаче. (Вы не забыли об этом?) Посмотрим еще раз на саму задачу и на найденное нами решение. Ответим себе на следующие вопросы:

1) Какие геометрические знания и умения нам понадобились при ее решении?

2) Какой метод при решении задачи был основным?

3) В чем состояла основная трудность в поиске плана решения задачи?

4) Нельзя ли решить задачу иначе?

Продумаем вместе последний пункт. Мы выбрали направление поиска, учитывая утверждение 4 (см. с. 18). Однако утверждения 2 и 3 мы также признали полезными.

Вернемся к рассмотрению утверждения 2. Из известных нам преобразований гомотетия кажется предпочтительней, так как она задается своим центром и парой соответственных точек

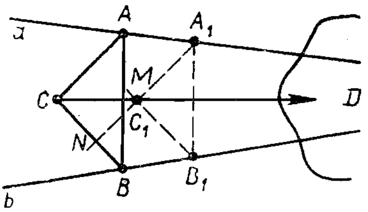


Рис. 8

(в качестве центра гомотетии можно принять недоступную точку D, а пары соответственных точек взять на прямых a и b).

План решения задачи практически готов. Решение задачи может быть таким (рис. 8):

1) Выберем произвольно точки A и B ($A \in a$ и $B \in b$). Пусть $C = (AC) \cap (BC)$.

2) Пусть произвольная точка $A_1 \in a$ — образ точки A при гомотетии с центром D. Проведем $(A_1N) \parallel (AC)$.

3) Построим отрезок AB и проведем через точку A_1 прямую A_1B_1, параллельную прямой AB, где $B_1 \in b$. Точка B_1 — образ точки B при данной гомотетии.

4) Построим $(B_1M) \parallel (BC)$. Пусть $C_1 = (A_1N) \cap (B_1M)$.

5) Так как C_1 — образ точки C при данной гомотетии, то луч CC_1 — искомое направление.

Закончено ли решение этой задачи? Конечно, нет. Необходимо еще доказать, что построение действительно привело к цели, подвести итог после этого решения задачи, посмотреть, нет ли еще какого-либо способа решить эту задачу, и т. д.

Поучимся тому, как начинать решение задачи еще на одном примере.

Рассмотрим задачу: «Построить угол, величина которого равна половине величины данного угла, не проводя биссектрису этого угла».

Попробуем начать решение (рис. 9):

1) Отложим $|OM| = |OH|$ и проведем отрезок MH.

2) Разделим отрезок MH пополам (точкой K) и проведем $[OK) \perp [MH]$.

$\widehat{HOK} = \widehat{MOK} = \frac{1}{2}\widehat{MOH}$, так как медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, одновременно является и биссектрисой угла при вершине.

Как будто бы задача решена? Увы! Здесь нарушено одно из условий задачи: мы все же провели биссектрису данного угла; мы провели медиану (или высоту) OK, но OK есть также и биссектриса, и от того, что, проводя OK, мы не называем OK биссектрисой, суть дела не меняется.

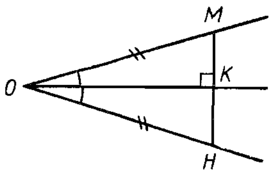


Рис. 9

Итак, мы вернулись к началу. Мы лишний раз убедились в том, что **нужно внимательно изучать условие задачи,** начиная ее решение. «Извлечем урок» из этой ошибки и снова изучим условие. **Изучая условие,** будем стараться

осмыслить его и в целом и в деталях.

1) Проводить луч OK (в любом случае) нельзя, — значит, искомый угол следует строить где-то вне данного.

2) «Построить угол» в школьной геометрии означает построить его при помощи двух инструментов — циркуля и линейки (без делений). Прежде чем строить искомый угол, необходимо вспомнить, как при помощи инструментов строить угол, в частности угол, конгруэнтный данному. Вспомним это (рис. 10) (номерами указан порядок построения).

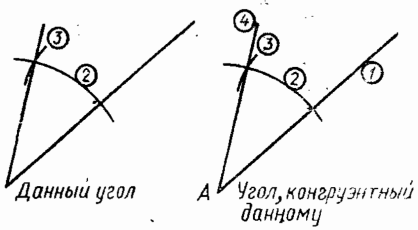


Рис. 10

3) Теперь нам ясно, что требуется от нас условием задачи: величина искомого угла равна половине величины данного; инструменты, которыми можно пользоваться: циркуль и линейка.

Перейдем теперь к планомерному поиску решения задачи.

Что мы знаем об углах и их половинах? Какие известны нам свойства, связывающие два угла? Мы задали хорошие вопросы. Мы на пути к решению! Ответим себе на них:

1) Сумма величин внутренних углов треугольника равна $2d$.

2) Половина величины развернутого угла есть величина прямого угла.

3) Величина внешнего угла треугольника больше величины внутреннего угла, с ним не смежного.

4) Величина внешнего угла треугольника равна сумме величин внутренних углов, с ним не смежных.

5) Величины центральных углов в одном круге равны, если соответствующие им дуги конгруэнтны.

6) Величина вписанного угла измеряется половиной величины дуги, на которую он опирается.

И это еще не все! Пока хватит, пожалуй. Какое из этих свойств больше подходит к нашей ситуации?

1) вряд ли будет полезно (у нас два угла: один новый, один искомый);

2) это слишком очевидно (к тому же данный угол не развернутый);

3) слишком общее сравнение величины углов (одна больше другой);

4) это полезно обдумать (правда, треугольник не задан, но его нетрудно построить);

5) это также полезно обдумать (круг также можно построить);

6) стоп! (Величина вписанного угла измеряется половиной величины дуги, на которую опирается, а центральный — величиной всей дуги!) Интересно!

Итак, можно выбрать шестое **направление** — посмотреть, нельзя ли прийти от данного угла (с «пересадкой» через дугу) к углу

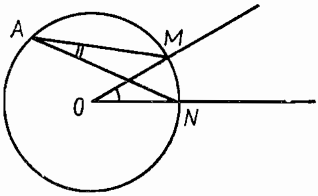


Рис. 11

половинной величины. Но для этого необходимо сделать так, чтобы данный угол был центральным, а искомый — вписанным. Вот и готов **план решения!**

Теперь для решения остался лишь один шаг! А ведь мы только что были в самом его начале! Все оказалось очень просто (рис. 11).

1) Построить циркулем окружность с центром в точке O.

2) Отметить любую точку A на окружности.

3) Соединить точку A с точками пересечения угла и окружности.

Вернемся к намеченным ранее направлениям поиска и попытаемся использовать какое-либо другое (например, свойство внешнего угла треугольника).

Нас интересует угол, величина которого равна половине величины данного. Подумаем над тем, как изменить известное нам свойство внешнего угла в нужном направлении.

О каком треугольнике здесь идет речь? О любом? Есть ли такой треугольник, в котором величина внешнего угла будет вдвое больше величины внутреннего, с ним не смежного? Есть такой треугольник — равнобедренный (рис. 12).

$$\frac{\begin{array}{c}\widehat{1} = \widehat{3} + \widehat{2}\\ \widehat{3} = \widehat{2}\end{array}}{\begin{array}{c}\widehat{1} = 2 \cdot \widehat{3} = 2 \cdot \widehat{2}\\ \widehat{2} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{1} = \widehat{3}.\end{array}}$$

Теперь нетрудно наметить **новый план решения.** К данному углу «построить» равнобедренный треугольник. Новое решение готово (рис. 13):

1) строим угол KOM, смежный с данным углом MON;

2) на лучах OM и OK отложим конгруэнтные отрезки OA и OB;

3) соединим точки A и B; получим: $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$.

Ну что ж, осталось доказать, что и это решение верно. Осталось подвести итог после этого решения. Осталось посмотреть, нет ли

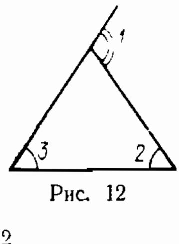


Рис. 12

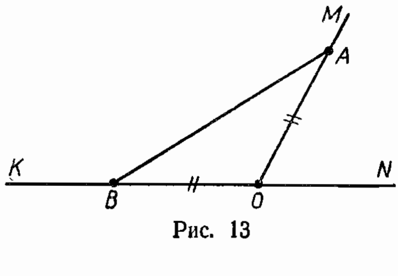


Рис. 13

еще какого-либо способа решить эту задачу. Осталось... (да мало ли, что осталось...). Удивительно, но факт — осталось больше работы (и интересной работы), чем сделано, а задача, между прочим, решена. Вернемся теперь к главной теме нашего разговора: к ответу на вопрос: «Как начинать решение задачи?»

Сформулируем *второй совет решающему задачу.*

Начиная решение задачи:

1) изучи условие задачи — «Хорошо понять вопрос — значит, наполовину ответить на него»;

2) изучи цель, поставленную задачей. Не начинай решение вслепую. Выбери **направления поиска** плана решения, руководствуясь **целью задачи;**

3) при выборе направления поиска плана решения принимай во внимание:

а) то, что ты знаешь о ситуации, отраженной в задаче;

б) то, что ты умеешь и можешь делать в данной ситуации и что нужно делать;

в) то, что известно **вообще** о связи данных и искомого;

г) то, о чем тебе говорит опыт в решении задач, похожих на данную.

Мы видим, что цель задачи выступает как главный ориентир направления поиска решения. Понятно поэтому, что изучению цели следует уделять не меньше внимания, чем изучению условия; полезно детально изучать (анализировать) цель.

Полезность проведения анализа цели особенно отчетливо можно проследить на решении геометрических задач. Пронаблюдайте за поиском плана решения следующей задачи.

З а д а ч а. Даны две прямые и окружность. Построить окружность, касающуюся данных прямых и окружности.

Изучим цель, представим требуемую ситуацию. Предположим, что окружность F_1 — искомая, O_1 — ее центр (рис. 14). Так как F_1 касается данных прямых l_1 и l_2, то O_1 принадлежит биссектрисе угла, стороны которого принадлежат прямым l_1 и l_2. M — точка касания окружностей. Но ведь тогда O и O_1 являются соответственными при гомотетии с центром в точке M. Интересно, а в какую же точку отобразится точка P при этой гомотетии? Оказывается, в точку пересечения касательных к данной окружности F, параллельных данным прямым, следовательно, $M \in PP'$. Тогда план решения нашей задачи ясен.

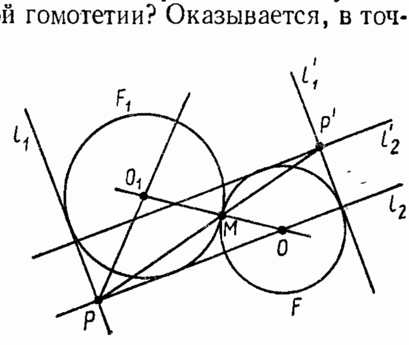


Рис. 14

Проводим к данной окружности касательные, параллельные данным прямым. Прямая, содержащая точку их пересечения P' и данную точку P, пересекает данную окружность в искомой точке касания M.

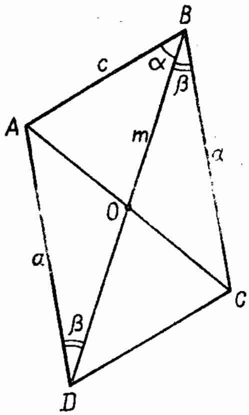


Рис. 15

Центр окружности F_1 есть точка пересечения прямой OM с биссектрисой угла между данными прямыми.

Осталось выяснить, сколько решений имеет эта задача. Подумайте, сколько?

Иногда полезно дополнить, видоизменить требуемую ситуацию, найти новые сочетания данных и неизвестных элементов. Например, задача «Доказать, что медиана треугольника делит угол на части, бо́льшая из которых прилежит к меньшей стороне» моментально решается следующим образом.

В $\triangle ABC$ m — медиана, $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$. Доказать, что $c < a$ (рис. 15). Цель: сравнить длины двух сторон c и a в зависимости от величин углов α и β. Где удобно сравнивать? В треугольнике. Неплохо было бы получить такой треугольник, в котором были бы и углы α и β, и стороны a и c. Это сделать очень просто: пусть $|OD| = |OB|$, тогда $ABCD$ — параллелограмм. Почему? В $\triangle ABD$ против большего угла α лежит и бо́льшая сторона a, т. е. $c < a$.

Итак, анализ цели и связанные с ним видоизменения требуемой ситуации могут значительно облегчить поиски плана решения задачи.

Задания для самостоятельной работы

Внимательно изучите условие задачи, выявите возможные направления поиска ее решения, оцените, какие из них заслуживают внимания и почему. Попытайтесь найти несколько способов решения задачи, действуя в выбранном направлении поиска.

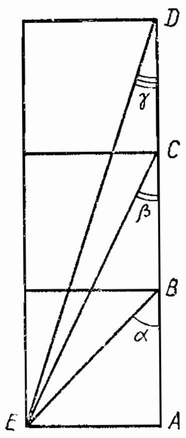


Рис. 16

3.1. В каком направлении должен лететь вертолет, чтобы держать под наблюдением одновременно две дороги?

3.2. При каких значениях a и b уравнение $(x - a)^3 - (x - b)^3 = b^3 - a^3$ имеет единственное решение?

3.3. Населенные пункты A и B разделены двумя каналами, каждый из которых имеет параллельные берега. Где следует построить переправу через эти каналы, чтобы из пункта A в пункт B можно было попасть кратчайшим путем?

3.4. Три квадрата расположены так, как показано на рисунке 16. Точка E соединена с B, C, D. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Начать решение задачи с анализа цели. Видоизменить требуемую ситуацию (сделать дополнительные построения) и этим путем прийти к решению.

3.5. Вычислить возможно проще сумму

$$\frac{6}{5\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 9}+\frac{6}{9\cdot 11}+\frac{6}{11\cdot 13}+\frac{6}{13\cdot 15}+\frac{6}{15\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 19}+\frac{6}{19\cdot 21}.$$

Начать решение задачи с анализа данных. Видоизменить данную ситуацию и этим путем прийти к решению.

§ 4. РЕШАЙ ВМЕСТО ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДРУГУЮ

Не правда ли удивительный совет? Прежде всего «другую» не означает «любую». Мы увидим, что вместо данной задачи бывает полезно решить родственную ей задачу. Давайте разберемся в том, какие «родственники» могут быть у некоторой задачи.

1. З а д а ч а. Найти множество точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых и удаленных на расстояние d от заданной точки O.

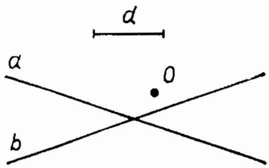


Рис. 17

Разберемся в условии задачи. Данная ситуация — рисунок 17. Требуемая ситуация — рисунок 18.

Из условия этой задачи легко обнаружить, что требуемая ситуация должна удовлетворять двум условиям:

1) искомые точки равноудалены от двух пересекающихся прямых a и b;

2) искомые точки удалены от данной точки O на расстояние d.

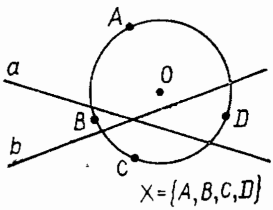


Рис. 18

Теперь нетрудно усмотреть и составить две задачи, родственные данной (назовем их *подзадачами* и обозначим п. з.).

п. з. (1). Построить множество точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

п. з. (2). Построить множество точек, удаленных от данной точки O на расстояние d.

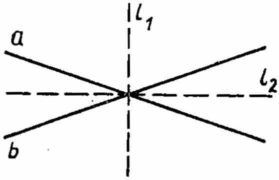


Рис. 19

Каждая из этих подзадач, как и вообще любая задача на нахождение множества точек, обладающих данным свойством, состоит из двух частей. В первой определяют фигуру, состоящую из множества

Рис. 20

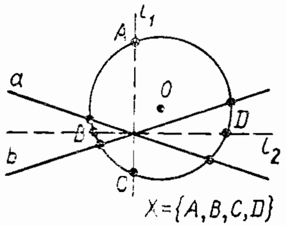


Рис. 21

точек, обладающих данным свойством. Во второй доказывают, что каждая точка построенного множества обладает данным свойством.

Мы ограничимся здесь только первой частью задачи. (Вы же попытайтесь решить вторую.)

Решение п. з. (1). Точки, принадлежащие осям симметрии этих прямых, равноудалены от каждой из них. Мы видим, что искомое множество бесконечно (рис. 19).

Решение п. з. (2). Точки окружности удалены от точки O на расстояние d. Построенное множество бесконечно (рис. 20).

Теперь пора взяться за решение нашей задачи, здесь оба требования должны соблюдаться одновременно. Тогда искомое множество должно состоять как из точек осей симметрии, так и из точек окружности радиуса d. Находим точки их пересечения, это и будет искомое множество. Сколько решений имеет задача? (Не забудьте доказать, что построенное множество точек — искомое) (рис. 21).

Итак, мы познакомились с двумя задачами, составленными из данной — п. з. (1), п. з. (2). Данная задача разделилась на две более простые («дети» данной задачи).

Сформулируем *очередной совет решающему задачу*. **Выявляй для данной задачи ее подзадачи и начинай решение этих задач.**

Измени условие данной задачи, сделай его проще (реши «родственную» более простую задачу). Хорошо представив себе требуемую ситуацию, сделай чертеж, схему. Установи связи между данными и искомыми элементами, несмотря на то что в условии задачи ничего о них не сказано.

2. Если у данной задачи есть задачи-«родственники» типа «детей, братьев и сестер», то нет ли у нее «родственников» типа «родителей»? Рассмотрим задачу.

Задача. Делятся ли числа вида 123 123, 456 456, 130 130, 718 718, 257 257, ... на 13?

Это довольно трудная задача. Многие начинают ее решение с проверки данных чисел на делимость, с изучения каждого данного конкретного числа и, чаще всего, не находят решения. Между тем задача решается просто, если составить и решить задачу более общую, чем данная. Рассмотрев внимательно условие данной задачи, мы обнаружим, что все данные числа имеют вид $\overline{abcabc}$. (Черта указывает на то, что в данном выражении буквы не рассматриваются как множители. Они являются цифрами. Например, запись $\overline{ab}$ означает $10a + b$.)

Теперь можно составить задачу, родственную данной.

п. з. Делятся ли числа вида $\overline{abc\,abc}$ на 13?

Для решения этой задачи достаточно увидеть, что число $\overline{abc\,abc}$ получается умножением числа $\overline{abc}$ на 1001 (попробуйте перемножить эти числа «столбиком»). Если не удалось догадаться, что $\overline{abc\,abc} = 1001 \cdot \overline{abc}$, то можно обнаружить это так:

$$\begin{aligned}\overline{abc\,abc} &= a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = \\ &= 10^2 \cdot 1001 \cdot a + 10 \cdot 1001 \cdot b + 1001 \cdot c = \\ &= 1001\,(100a + 10b + c) = 1001 \cdot \overline{abc}.\end{aligned}$$

Но 1001 делится на 13, и потому произведение 1001 на любое число также разделится на 13.

Данная нам задача является частным случаем этой более общей (и, казалось, более сложной задачи).

Вот теперь мы познакомились с «отцом» или «матерью» данной задачи — с задачей более общей, для которой данная задача лишь частный случай. Очень часто более общая задача решается значительно легче данной конкретной задачи. Это мы видели на примере только что рассмотренной задачи. Приведем еще один пример. Вместо того чтобы решать уравнения типа $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 - 7x + 10 = 0$ различными способами, выгоднее сразу решить уравнение $x^2 + px + q = 0$ (вывести формулу решения), а потом пользоваться найденным решением (формулой) в любых конкретных случаях. В этом лишний раз проявляются сила и могущество математики. Ведь чем менее конкретны данные, а следовательно, и ограничения для решения, тем свободнее выбор пути — способа решения.

Сформулируем *очередной совет решающему задачу*:

Пробуй составлять и решать задачи более общие, чем данная, тогда данная задача будет частным случаем составленной и ее решение будет следовать из решения более общей задачи. Новая родственная задача часто лишь поначалу кажется более трудной. Ведь недаром говорят «клин клином вышибают».

Задания для самостоятельной работы

4.1. Решите обратную задачу: имея частные задачи, составьте основные.

Перед вами известные множества точек (рис. 22). Попробуйте сами составить задачи, комбинируя эти частные задачи.

4.2. Найдите множество точек, равноудаленных от данных четырех точек A, B, C, D (рис. 23).

Составьте к этой задаче родственные задачи типа «детей»; решите каждую из них, а затем найдите решение данной задачи.

4.3. Разрежьте треугольник на такие части, чтобы из получившихся частей можно было сложить прямоугольник.

Составьте к этой задаче родственные задачи типа «сестры —

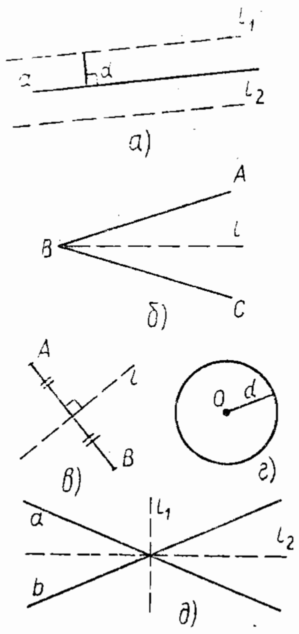


Рис. 22

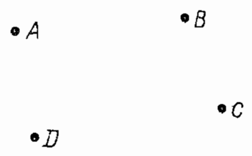


Рис. 23

братья». Решите каждую из составленных задач. Помогли ли эти «родственники» справиться вам с основной задачей?

4.4. Найдите трехзначное число, которое от перестановки начальной цифры в конец числа увеличилось бы в пять раз.

Составьте к этой задаче родственные задачи типа «дети» и типа «родители». Решите их и дайте ответ на вопрос данной задачи. Какую задачу оказалось решить проще?

4.5. При снятии плана местности положение сторожевой вышки было определено следующими наблюдениями: а) вышка находится на одинаковом расстоянии от дороги и от озера; б) озеро видно с этой вышки под прямым углом.

Где расположить на плане эту вышку, если озеро и дорога уже нанесены? Прав ли был наблюдатель, ограничившись такими записями?

4.6. Используя любую литературу, подберите (или составьте самостоятельно) три задачи и к каждой из этих задач подберите родственные задачи различных типов. Работу выполните на отдельном листке и сдайте его учителю.

§ 5. РАССУЖДЕНИЕ ПОМОГАЕТ ДОГАДКЕ

Велика роль догадки при решении нестандартных задач. Но не всякая догадка достоверна. К тому же пользоваться своей догадливостью следует осмотрительно. Относительно догадки можно сказать коротко: «Доверяй, но проверяй». Вот что говорит известный математик Джордж Пойа: «Нужную мысль можно сравнить с вражеским лазутчиком, который стремится проскользнуть в город мимо часового. Поэтому часовому нужно знать хоть какие-то приметы лазутчика, чтобы не останавливать всякого проходящего мимо».

Уподобим догадку лазутчику. Чтобы «выловить» нужную догадку из огромного числа бесполезных мыслей, нужно сопровождать каждую догадку рассуждением и размышлением о степени ее полезности для решения данной задачи. Обратимся к примеру.

Представьте себе, что ваш друг задумал некоторое натуральное число в промежутке от 1 до 1000. Чтобы угадать задуманное число, вы будете спрашивать друга, а тот отвечать на вопрос только словами «да» или «нет». Если передоверить решение этой задачи одной только догадке, то может случиться так, что вы будете довольно долго ее решать (да и скучной будет работа). Может показаться невероятным тот факт, что достаточно всего десяти правильно поставленных вопросов, чтобы наверняка отгадать задуманное число!

В самом деле, пусть задуманное вами число есть 1. Спрашиваем и получаем ответ.

1. Верно ли, что задуманное вами число больше 512? — Нет!
2. Тот же вопрос о 256. — Нет.
3. Тот же вопрос о 128. — Нет.
4. Тот же вопрос о 64. — Нет.
5. Тот же вопрос о 32. — Нет.
6. Тот же вопрос о 16. — Нет.
7. Тот же вопрос о 8. — Нет.
8. Тот же вопрос о 4. — Нет.
9. Тот же вопрос о 2. — Нет.
10. Задумано число 1. — Да.

Рассмотрим теперь такую задачу:

«...И сказал Кащей Ивану-царевичу: «Жить тебе до завтрашнего дня. Утром явишься перед мои очи, задумаю я три цифры — a, b, c. Назовешь ты мне три числа — x, y, z. Выслушаю тебя и скажу, чему равна сумма $ax + by + cz$. Тогда отгадай, какие a, b, c я задумал. Не отгадаешь — голову с плеч долой».

Опечалился Иван-церевич, пошел думу думать. Надо бы ему помочь».

Познакомимся с ходом рассуждения одного вашего товарища, которому пошли на пользу наши советы. Мы попросили его подумать над решением задачи вслух и вели за ним запись его рассуждений. Вот как он размышлял при решении этой задачи:

«Да, задача не из легких, но попробую помочь Ивану-царевичу. Итак, утром Иван-царевич, зная x, y и z и сумму $N = ax + by + cz$, должен будет назвать a, b и c.

Первая трудность. Уравнение с тремя неизвестными решать не умею. Продумаю эту трудность, изменю условие задачи, сделаю его более простым. Пусть $x = y = z$, тогда $a + b + c = \frac{N}{x}$. Пусть $\frac{N}{x} = 5$, но $5 = 2 + 3 + 0 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 3 = 5 + 0 + 0$.

Вторая трудность. Даже маленькие числа могут быть представлены в виде суммы трех слагаемых не единственным образом.

Попробую получить уравнение с двумя неизвестными.

Пусть $x = 0$, тогда $N = by + cz$, отсюда $b = \frac{-cz + N}{y} = -\frac{z}{y}c + \frac{N}{y}$. Увы!

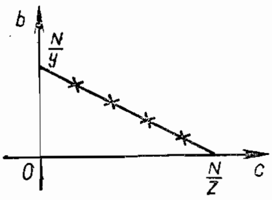


Рис. 24

Третья трудность. Уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений (рис. 24).

Попробую другой путь. Вспомню-ка я «родственников» этой задачи типа «детей». Может быть, они помогут? Пусть Кащей задумал две цифры: a и b, тогда $N = ax + by$. Нет. Ничего нового. Если даже $x = 0$, можно легко найти b, но a может быть любым числом. Вот с одной цифрой все очевидно. Но Кащей не может быть таким добрым. Как же быть с тремя цифрами?

Теперь я как будто зашел в настоящий тупик?! Решение уравнения невозможно, несмотря на все мои усилия.

Попробую еще раз внимательно прочитать условие задачи.

Кащей задумал 3 цифры. Цифры! Любое число состоит из цифр. Нельзя ли сохранить эти цифры в числе — сумме N? Сумма может быть и трехзначным числом.

Стоп! Кажется, нашел! Трехзначное число $\overline{abc}$. Иван-царевич спасен! $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1$.

Значит, $x = 100$, $y = 10$, $z = 1$».

Итак, при решении этой задачи ваш товарищ вел поиск решения по тем направлениям, которые казались ему полезными, а не наугад (молодец!). Проявлял ли он изобретательность? Высказывал ли догадки, строил ли гипотезы? Конечно. Но каждую догадку он подкреплял рассуждениями, и это очень ему помогало решать задачу и прекращать ненужную работу вовремя.

Что еще поучительного было в его работе? В ходе решения данной задачи он часто использовал родственные задачи (причем задачи более простые), легко выяснял на этих более простых задачах и ситуациях то, что ему было нужно. Попробуйте вернуться к изложению хода решения и найти те места, которые подтверждают это.

Очередной совет решающему задачу можно заменить тремя высказываниями Д. Пойа:

«Обдумай цель раньше, чем начать действовать».

«Мудрый меняет свои намерения, дурак никогда».

«Тот, кто не может обдумать все заново, не может мыслить верно».

Задания для самостоятельной работы

Следующие задачи (или хотя бы одну из них) вам нужно не только решить, но и подробно описать свои догадки и рассуждения в процессе решения; обосновать выбор направления в поиске решения задачи (правильного или неправильного). В общем, от вас требуется не только решить задачу, но и описать свои промахи и неудачи, а затем обсудить их всем вместе. Если задачу решить не удастся, у вас останется описание неудач. Это тоже очень важно!

5.1. Найти числовое значение алгебраического выражения $f(x) = x^{333} + x^{33} + x^3 + 1976$, если значение x удовлетворяет условию $x^2 + x + 1 = 0$.

5.2. Поставить вместо многоточия такое натуральное число n, чтобы ответ на следующий вопрос был однозначным: «Сколько прямых проведено на плоскости, если известно, что они пересекаются в ... различных точках?»

5.3. Числа x, y положительны, причем $x + y = 5$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

5.4. Не вычисляя площадей треугольников со сторонами $a_1 = 5$, $b_1 = 5$, $c_1 = 6$, $a_2 = 5$, $b_2 = 5$, $c_2 = 8$, установить, равновелики ли они.

5.5. Доказать, что во всяком треугольнике длина медианы не меньше длины биссектрисы.

§ 6. СОСТАВЛЯЙ СВОИ ЗАДАЧИ

При изучении в школе русского языка вам часто приходится встречаться с двумя видами работы: диктантами и сочинениями. И тот и другой вид учебной деятельности помогает вам лучше, глубже познать родной язык и литературу. Возникает вопрос: не будет ли полезным и при изучении математики выполнять аналогичные работы? На уроках математики вы обычно выполняете задания по решению стандартных задач (чем не диктанты?) и даже пишете, наверное, в последнее время специальные математические диктанты. Но вряд ли вы работаете над математическими сочинениями. А полезно было бы! Что же такое математическое сочинение? Ответим на этот вопрос не сразу; скажем лишь, что самостоятельное составление интересных задач есть простейшее математическое сочинение. Большинству из вас кажется, что задачи могут изобретать лишь «ученые взрослые люди, убеленные сединой», или, в крайнем случае, ваши учителя. Не так ли? Это представление ошибочно! Правда, весьма трудно «сочинять» задачи, если самому не заниматься их решением. Больше того, идеи, реализованные в условии большинства задач, возникают у авторов либо при решении некоторых других задач, либо при вдумчивом изучении теории. И тем и другим вы постоянно занимаетесь. Так почему бы вам не приняться за составление задач? Правда, составлять малоинтересные и легкие задачи (например такую: «У мамы 10 яблок, а у Коли на 2 яблока больше. Сколько всего яблок у мамы и Коли вместе?») нетрудно. Но это и неинтересно, да и пользы от такого сочинительства мало. Если же конструировать сложные или необычные задачи, то это интересно и, главное, это один из верных способов научиться решать задачи.

Итак, будем учиться составлять задачи, посмотрим, как это делается.

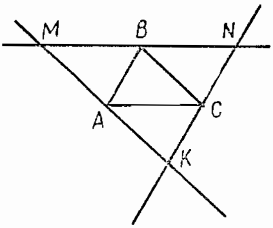


Рис. 25

Рассмотрим следующую задачу: «Построить треугольник по данным серединам его сторон».

Не правда ли интересная задача? Попробуйте-ка десять минут поработать над ней, а потом загляните в решение, которое мы излагаем здесь (заметим, что приводится только решение, а не описание хода решения).

Решение. 1) Соединить три данные точки отрезками прямых и получить треугольник ABC (рис. 25).

2) Провести через вершины A, B, C прямые, соответственно параллельные противоположным сторонам треугольника до взаимного пересечения в точках M, N, K. Полученный треугольник MNK искомый. (Дайте обоснование правильности построения.)

Допустим, мы решили эту задачу, выявили все полезное, что можно извлечь из задачи и ее решения. Работа вроде бы окончена? Да. Но она может быть продолжена, если вы оглянетесь назад еще раз и поразмыслите над этой задачей.

В самом деле, задача необычная — даны не привычные для вас линейные или угловые элементы искомой фигуры, а ее *точечные* элементы. Будет жаль, если такая задача (такие задачи вам вряд ли встречались ранее) останется единственной в своем роде. Не правда ли? Мы сейчас составим еще несколько аналогичных задач, причем несколько только потому, что могли бы составить сколько угодно таких задач. Внимание, начинаем!

В условии этой задачи говорится о построении треугольника по трем данным серединам его сторон. Начнем с того, что будем задавать себе вопросы в связи с этим условием:

1) Почему «треугольник» (а не другую фигуру)?

2) Почему «по серединам сторон» (а не по другим его точкам)?

3) Почему «по трем» (а не по одной, двум)?

4) Почему только «по данным точкам» (а не по сочетанию точечных, линейных и угловых элементов фигуры)?

Ограничимся пока этими четырьмя «почему?». Мы не сможем сразу (да нам и не нужно это сейчас) ответить на все вопросы, на все эти «почему?». Нам нужно только начать отвечать, причем отвечать на вопрос вопросом, начинающимся со слов «А нельзя ли...?». И каждый наш ответ породит новую задачу, связанную с данной. Следите внимательно за возможными ответами на первое «почему?».

1) А нельзя ли построить по данным серединам сторон квадрат?

2) А нельзя ли построить по данным серединам сторон трапецию? И т. д., и т. д.

А вот несколько ответов на второе «почему?».

3) А нельзя ли построить треугольник по двум серединам его сторон?

4) А нельзя ли построить параллелограмм по трем серединам его сторон? И т. д., и т. д.

А теперь нам осталось только переформулировать свои ответы, придав тексту форму условия задачи.

1) Построить квадрат по данным четырем серединам его сторон.

2) Построить трапецию по данным четырем серединам ее сторон.

3) Построить треугольник по данным двум серединам его сторон.

4) Построить параллелограмм по данным трем серединам его сторон.

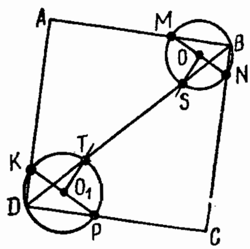


Рис. 26

Как просто составлять задачи! Не так ли? И задачи-то все интересные и необычные. И как их здесь много! Вот сколько «родственников» оказалось у нашей задачи с треугольнике!

Продолжим нашу работу по составлению задач, отправляясь от другой ситуации.

Перед археологами часто возникает вопрос: «Как экономичнее (без лишних затрат времени) провести раскопки сооружения квадратной формы по четырем сохранившимся колоннам (по одной на каждой стороне)?»

По существу перед нами реальная задача. Попробуем «перевести» ее на математический язык. Математически эта задача будет выглядеть так:

«Построить квадрат по четырем точкам, по одной — на каждой стороне квадрата».

Рассмотрим решение этой задачи (рис. 26).

1) Соединим пары точек (M, N) и (K, P) отрезками прямых.

2) Разделим эти отрезки пополам точками O и O_1 и построим окружности $(O, |OM|)$ и $(O_1, |O_1P|)$.

3) Разделим пополам дуги этих окружностей, принадлежащие этому квадрату. Точки деления обозначим T и S соответственно.

4) Построим прямую (ST), пересекающую окружности в точках B и D.

5) Строим искомый квадрат.

Попробуйте обосновать правильность построения.

Кстати, сколько решений имеет эта задача?

Теперь попытаемся составлять новые задачи, внимательно изучая условие и решение данной задачи. У нас уже есть опыт: полезно задавать себе различные вопросы, начинающиеся со слова «почему».

В условии данной задачи говорится о построении квадрата по четырем точкам, принадлежащим его сторонам.

1) Почему «квадрат» (а не другую фигуру)?

2) Почему «по четырем точкам» (а не по трем или двум)?

3) Почему по «точкам, принадлежащим каждой стороне» (а если не каждой, и вообще не на стороне)?

4) Почему только по «данным точкам» (а не по сочетанию точечных, линейных и угловых элементов фигуры)? И т. д.

Проследите внимательно за возможными ответами на первое «почему?».

1) А нельзя ли построить по данным четырем точкам прямоугольник?

2) А нельзя ли построить по данным четырем точкам окружность? И т. д., и т. п.

А вот несколько ответов на второе и третье «почему?».

1) А нельзя ли построить квадрат по трем точкам, одна из которых является его вершиной?

2) А нельзя ли построить окружность по трем точкам?

3) А нельзя ли построить квадрат по двум точкам, принадлежащим двум сторонам и третьей, являющейся центром симметрии квадрата? И т. д., и т. п.

А теперь нам осталось только переформулировать свои ответы, придав тексту форму условия задачи.

1) Построить прямоугольник по четырем точкам (по одной на каждой стороне).

2) Построить окружность по четырем точкам.

3) Построить квадрат по двум точкам, лежащим на двух сторонах квадрата и третьей, являющейся его центром симметрии.

В самом деле, составлять задачи гораздо проще, чем их решать. Не так ли?

Рассмотрим теперь задачу о построении квадрата по трем точкам, одна из которых является его вершиной, а две другие лежат на его сторонах. Ясно, что придется рассмотреть различные случаи расположения точек (рис. 27).

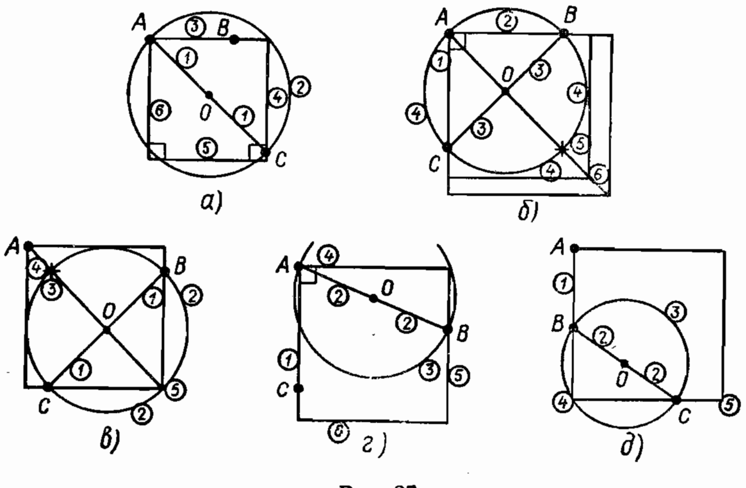


Рис. 27

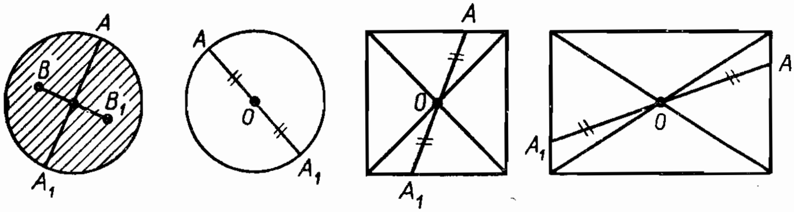


Рис. 28

Укажем цифрами порядок построения. Замечаем, что только во втором случае задача имеет бесконечное множество решений (т. е. существует бесконечное множество квадратов с тремя заданными точками).

Как сформулировать задачу так, чтобы она имела только единственное решение? Отметим для себя, что в третьем случае пара точек взята на сторонах, выходящих из заданной вершины. Значит, исключим этот случай.

Задача должна выглядеть так:

«Построить квадрат по трем точкам, одна из которых является вершиной квадрата, а две другие лежат на двух прямых, не выходящих из указанной вершины». Это уже новая задача.

Посмотрим теперь, как можно составлять задачи, изучая какой-нибудь раздел теории из курса математики. Допустим, мы изучили тему «Центральная симметрия». Мы познакомились с определением, свойствами этого понятия. Изучили ряд теорем, доказываемых с помощью центральной симметрии, научились строить центрально-симметричные точки, отрезки и вообще фигуры, применили свойство центральной симметрии для построения параллельных прямых.

В VII классе из множества геометрических фигур мы выделили такие, которые имеют центр симметрии (например, окружность, круг, параллелограмм, прямоугольник, ромб и квадрат).

Наличие таких фигур должно вас сразу навести на мысль: «А нельзя ли где-нибудь в жизни, на практике использовать это свойство?» Посмотрим на рисунок 28 и попробуем придумать игру, основанную на этом свойстве фигур.

1) Двое по очереди кладут на круглый стол пятикопеечные монеты. Монеты можно класть только на свободные места (так, чтобы они не покрывали друг друга даже отчасти). Сдвигать монеты с места, на которое они положены, нельзя. Предполагается, что каждый имеет достаточное количество монет. Выигравшим считается тот, кто положит монету последним. Как должен класть монету начинающий игру, чтобы выиграть?

2) Видоизменим игру; заставим партнеров выкладывать монеты по окружности, нарисованной на бумаге. Побеждает тот, кто положит монету последним. Выиграет ли начинающий?

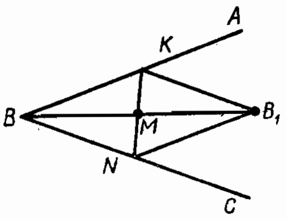


Рис. 29

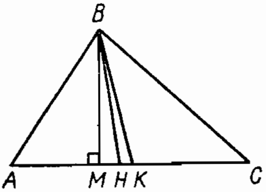


Рис. 30

3) А если партнеры сидят за прямоугольным столом, то как должен класть монету начинающий игру, чтобы выиграть?

Ранее нами была сформулирована задача о построении квадрата по трем точкам, одна из которых является его центром симметрии. Из этой задачи мы можем сформулировать еще одну, используя теорему о центрально-симметричных прямых.

4) Всегда ли можно построить квадрат по трем точкам, две из которых лежат на параллельных прямых, а третья является центром симметрии квадрата?

Интересна и полезна следующая задача:

5) Вписать отрезок KN в угол ABC так, чтобы заданной точкой M этот отрезок делился пополам.

Попробуйте разобраться по рисунку 29, как решается эта задача.

Теперь, наверное, вы сможете составлять свои задачи не хуже авторов учебников? Мы, правда, не очень уверены в том, что вам удастся решить каждую вашу задачу так же легко, как вы ее составили. Но мы надеемся на вас. «Где есть желание, найдется путь», — говорит пословица.

Задания для самостоятельной работы

6.1. Рассмотри треугольник ABC (рис. 30). Пусть $[BM]$, $[BH]$ и $[BK]$ его высота, биссектриса, медиана соответственно. Составьте несколько задач по этой ситуации, попытайтесь их решить.

6.2. Продолжите список вопросов и ответов «А нельзя ли...?» к задаче о построении треугольника по трем серединам его сторон.

6.3. Рассмотрите следующую задачу: «Правильный треугольник срезан по углам так, что получился правильный шестиугольник. Какая часть площади треугольника срезана?» Решите ее и попробуйте составить несколько задач, родственных данной.

6.4. Посмотрите любой раздел учебника этого или прошлого учебного года. Попробуйте составить одну или две задачи (свои собственные). Покажите их учителю для контроля.

§ 7. КАК ОФОРМЛЯТЬ ЗАПИСЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

А нужно ли вообще записывать детально и аккуратно решение задачи, если она уже решена? Не хочется ли вам задать этот вопрос? Чтобы вы могли иметь возможность сами ответить на него, рассмотрим цель и роль записи решения задачи. Согласитесь, что первоначальный вариант решения задачи, возникший у вас на черновике (или «в уме»), еще не является решением, а обычно только планом решения. Как всякий план, он может быть верным или неверным, удачным или менее удачным и т. д. Это происходит при решении нестандартных задач. При решении стандартных задач запись решения сама является автоматизированным процессом решения и обычно никаких возражений не вызывает (не запишешь преобразований исходного уравнения в простейшее, — не найдешь значения неизвестного). Переход от плана к решению — это переход из области догадок в область строгой логики. Все понимают, что решение должно **с неизбежностью** привести от данных к искомому. **И эту «неизбежность» следует выявить, что является неотъемлемой частью полноценного решения.**

Мы теперь знаем, что на задаче мы должны учиться и учиться. Ни производственник, ни писатель не может ограничиться неотделанным, необоснованным решением поставленной перед ним задачи. Сколько раз Л. Н. Толстой переписывал, правил, менял отдельные фразы, места и главы своих произведений! Вы тоже должны учиться «править» и «шлифовать», это для вас главное. Поэтому **оформление плана решения (в записи или речи) должно проводиться до конца.** Не из каждого алмаза получается бриллиант, но ваша задача шлифовать всякие алмазы и получать из них бриллианты; для вас не имеет большого значения ценность полученного бриллианта; для вас важно научиться «обработке алмаза».

Пойдем дальше. Сколько ценного теряется из вашего опыта в процессе обучения в школе! Как часто бывает нужно обратиться к прошлому опыту и использовать его! Но память наша организована так, что забывание является необходимой защитной реакцией мозга, обеспечивающей ему необходимый отдых. Но, увы, наряду с бесполезным исчезает и полезное. Нужно определенное волевое усилие, чтобы не забывать то, что не следует забывать, и мы должны помочь себе в этом. Перо и бумага — первые наши помощники: то полезное, что не следует удерживать в памяти, можно удержать на бумаге. Восстановить это полезное по записи легче, чем вспоминать. Отсюда следует, что **запись решения задачи должна быть четкой, образной и полной.**

Наконец, многие из вас «больны» болезнью под названием «Знаю, но рассказать не могу». Запись решения задачи — хорошее лекарство от этой болезни. **Давайте же не только учиться правильно мыслить, но и правильно говорить и писать—коротко и ясно!**

Рассмотрим несколько способов оформления решения задачи*.

Задача 1. Взяли 6 листков бумаги и некоторые из них разорвали на 7 частей; некоторые из получившихся листков снова разорвали на 7 частей и т. д. несколько раз. Сосчитав общее число получившихся листков бумаги, установили, что их 67. Как показать, что произошла ошибка при подсчете?

* (Для учителя.) Каждую из задач сначала обсудить и решить, а затем уже записать решение так, как здесь указано.

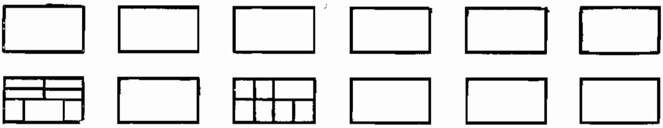


Рис. 31

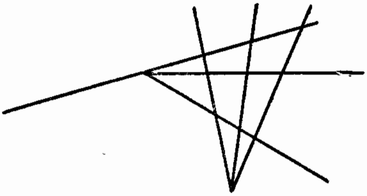


Рис. 32

Р е ш е н и е (первый способ оформления — **связный текст**).

Сначала было 6 листков бумаги. Каждый раз, разрывая листок, мы вместо него получаем 7 листков, увеличивая тем самым общее число листков бумаги на 6. Но тогда, сколько бы листков ни было разорвано, общее число их должно делиться на 6; 67 не делится на 6 — произошла ошибка!

Запись решения этой задачи «связным текстом» не менее экономична, чем другая возможная запись решения, например рисунком.

Второй способ оформления решения — **рисунок** 31.

В условии задачи говорится только о 6 листках бумаги, а если взять их 666? Какой из этих двух способов оформления решения лучше избрать?

З а д а ч а 2. Покажите, что 6 достаточно круглых, неотточенных карандашей можно расположить так, чтобы любые два из них соприкасались друг с другом.

Решение оформлено в виде схематического решения-рисунка (рис. 32).

З а д а ч а 3. Из Москвы в Астрахань каждый день в 12^{00} ч отправлялся теплоход, который находился в пути 4 суток. Из Астрахани в Москву ежедневно в 12^{00} ч также отправлялся теплоход, который находился в пути 5 суток. Сколько теплоходов Астрахань—Москва встречали теплоход, отправлявшийся из Москвы, в течение всего пути?

Решение оформлено в виде схемы (рис. 33).

О т в е т: 10 теплоходов.

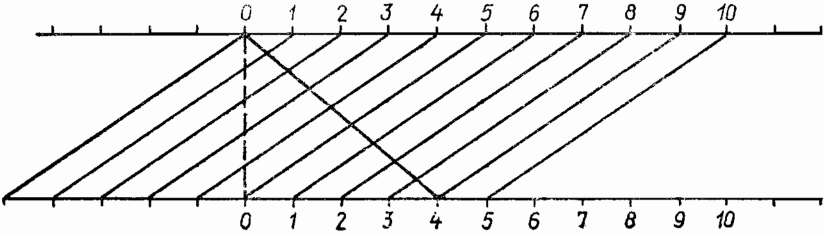


Рис. 33

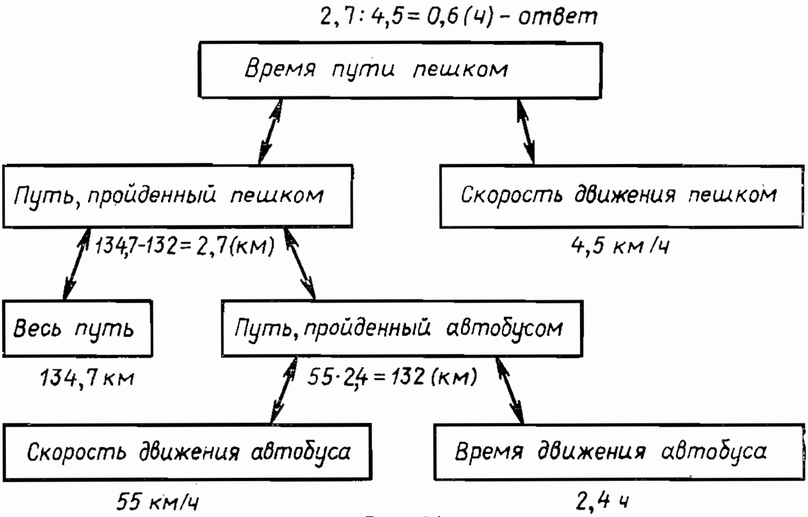


Рис. 34

З а д а ч а 4. Колхознику необходимо прибыть в пункт, находящийся на расстоянии 134,7 км от его дома. 2,4 ч он ехал на автобусе со скоростью 55 км/ч, а остальную часть пути он шел пешком со скоростью 4,5 км/ч. Сколько времени он шел пешком?

Решение этой задачи, оформленное в виде **содержательной схемы** см. на рис. 34.

З а д а ч а 5. По дороге шли два отца, два сына и дедушка с внуком. Сколько человек шло по дороге?

Одно из возможных решений, оформленное **с применением символики,** выглядит так:

$$\{д;\ о\} \cup \{о;\ с\} \cup \{д;\ с\} = \{д;\ о;\ с\}.$$

При объединении множеств с общими элементами каждый элемент берется в множестве-результате только один раз.

Решение той же задачи, оформленное **с помощью особой схемы-графа** см. на рис. 35.

Какие другие решения задачи 5 возможны?

З а д а ч а 6. Ходжа Насреддин расплачивался за ночлег в харчевне с ее хозяином ежедневно одним звеном золотой цепочки из семи одинаковых звеньев. Чтобы не терять лишнее золото при распиливании, хозяин поставил Ходже условие: распилить только одно звено цепочки. Ходжа Насреддин с этим условием согласился и сумел его выполнить. Как он это сделал?

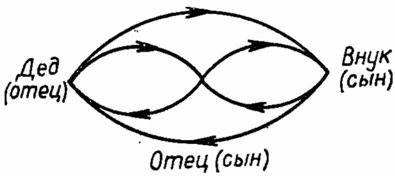


Рис. 35

Решение, оформленное **в виде таблицы:**

Дни	Отдал n-е звено	Получил n-е звено
1	$n=5$	—
2	$n=6;7$	$n=5$
3	$n=5$	—
4	$n=1;\ 2;\ 3;\ 4$	$n=5;\ 6;\ 7$
5	$n=5$	—
6	$n=6;7$	$n=5$
7	$n=5$	—

Мы не ставим своей целью показать все способы оформления записи решения задач, а также те способы, которыми вы обычно пользуетесь на уроках. Мы решили показать вам некоторые новые способы оформления решения. Неправда ли, оформлять запись решения задачи также весьма интересно? И не так это просто — выбрать наиболее удобный способ оформления решения. Сам выбор такого удобного способа оформления решения является интересной задачей. Заметим, что очень часто процесс решения задачи зависит от удачно выбранного способа записи ее решения. Интересно, можете ли вы предложить свой способ записи решения какой-либо задачи? Сообщите о нем учителю.

Задания для самостоятельной работы

Следующие задачи нужно не только решить, но и выбрать самый удобный для этой задачи способ записи ее решения.

7.1. На сосне не более 500 000 иголок. Доказать, что в лесу из 1 000 000 сосен есть не менее двух сосен, чи́сла иголок на которых равны между собой.

7.2. В первом бидоне в 2 раза больше молока, чем во втором. Когда из первого отлили 30 л, а из второго — 20 л, то в первом бидоне осталось в 3 раза больше молока, чем во втором. Сколько литров молока было первоначально в каждом бидоне?

7.3. Трое играли в шашки. Всего сыграли три партии. Сколько партий сыграл каждый?

7.4. Хотят поскорее поджарить три ломтика булки. На сковороде умещается лишь 2 ломтика, причем на поджаривание одной стороны ломтика затрачивается 1 мин. За какое наименьшее время можно поджарить с обеих сторон 3 ломтика булки?

§ 8. ИЗУЧИ САМОГО СЕБЯ

И не только изучи самого себя, но и обучай себя! Вам предстоит выступить в роли учителя самих себя. Что же изучать у самого себя и чему самого себя обучать? Прежде всего, полезно знать свои сильные и слабые стороны. Так, человек, знающий, что у него плохая память, не расстается с записной книжкой (правда, это не лучший выход — лучше развивать свою память), не секрет, что некоторые из вас, особенно те, у которых хорошая память, часто не готовят дома устные задания учителя (и, кстати говоря, напрасно); человек, у которого плохое зрение, носит очки. В общем, всякий разумный человек пользуется своими сильными сторонами и учитывает свои слабые. Почему же это не делать вам? Полезно научиться шире использовать ваши сильные качества и преодолевать слабые систематической тренировкой.

Итак, начнем с изучения самих себя. Для этого будем отвечать на поставленные здесь вопросы (отвечать письменно) и выполнять задания, поставленные тестом (испытательное упражнение). Постепенно заполним своеобразную анкету о себе и покажем ее учителю.

Тест 1

Вопрос 1. Когда вы работаете более успешно (продуктивно) — утром, днем или вечером?

Вопрос 2. В каком случае вы работаете успешнее — в коллективе (с классом, с товарищем или подругой) или в одиночку?

Вопрос 3. Мешает, безразлична или помогает вам работать над домашними заданиями негромко звучащая музыка?

Тест 2

Какова ваша память (хорошая она у вас или плохая)? Какой вид памяти развит у вас сильнее? Одни лучше запоминают, когда слышат, другие — когда видят, третьи обладают моторной памятью (лучше запоминают, когда пишут или читают вслух).

5239	5672	0462
89 765	98 671	12 785
224 896	675 413	651 801
1 267 412	7 841 095	1 082 409
98 615 437	12 435 961	08 761 432
146 769 543	985 241 672	865 218 533
5 649 082 451	1 844 640 902	1 246 507 118
24 167 549 067	06 748 177 620	37 470 827 502
034 427 994 410	036 777 312 064	760 845 267 114

а) Начинайте с первой колонки. Не двигая губами, прочтите верхнее число* так, чтобы на одну цифру уходило не больше секунды. Затем отвернитесь и запишите число. Так перепробуйте одно число за другим. Самое длинное, правильно записанное число определит возможности вашей **зрительной памяти.**

б) Для проверки **моторной памяти** используйте вторую колонку и при чтении цифр беззвучно шевелите губами (отворачивайтесь и записывайте число).

---

* Читайте по цифрам.

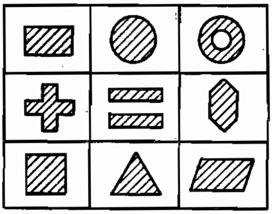


Рис. 36

в) Для проверки **слуховой памяти** используйте третью колонку. Попросите, чтобы вам постепенно прочли эту колонку (цифру за цифрой). Прослушав строчку цифр — записывайте. 4 цифры — память слабая, 7—8 — нормальная, 12 — очень хорошая.

Тест 3

Определите коэффициент вашей памяти.

Посмотрите на рисунок 36 и постарайтесь в течение 30 с хорошенько его запомнить. Затем попытайтесь воспроизвести его на листке бумаги. По результатам опыта можно определить своего рода «коэффициент памяти». Он выразится дробью, в знаменателе которой будет число всех фигур, т. е. 9, а в числителе — число правильно нарисованных фигур.

Тест 4

Как вы справляетесь с большим потоком информации (с обилием так называемых сведений)? Проверьте себя с помощью теста. Дана матрица (рис. 37). Нужно в каждом кружке поставить в центре точку, всего в 180 кружках. Ставить точки надо в следующей последовательности: начинать с первого круга первой строки, затем в первом круге третьей строки, потом во втором круге первой строки и во втором круге третьей строки, пока не заполнятся

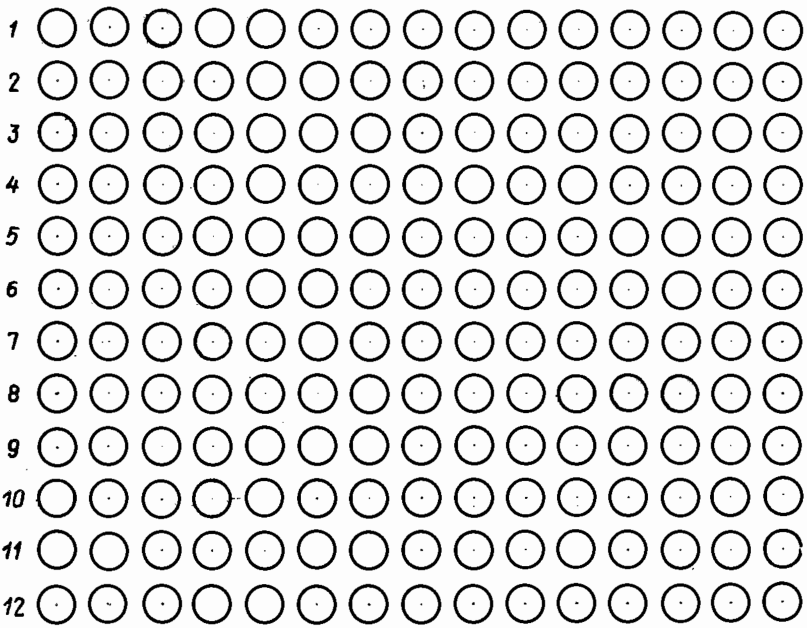


Рис. 37

эти строки. Затем точка ставится в последнем круге второй строки, потом в последнем круге четвертой строки и в предпоследнем круге четвертой строки и так далее до заполнения второй и четвертой строк. Правило, по которому ставятся точки: в четных строках точки ставятся справа налево (2,4; 6,8; 10,12), а в нечетных строках — слева направо (1,3; 5,7; 9,11). Заметьте время заполнения первой таблицы — матрицы T_1.

Теперь перейдем к заполнению второй матрицы (рис. 38). Здесь в круг помещены еще два вида кругов: большой и малый. Если помещен большой круг, то точку ставят в середине его, а если в круг помещен маленький кружок, то точку ставят выше этого кружка. Порядок заполнения второй матрицы тот же, что и в первом случае. Заметьте время T_2, которое вы потратили на эту работу. Подсчитайте общее количество ошибок r, которые вы сделали, и подставьте полученные значения в следующую формулу:

$$C = \frac{n - r}{k(T_2 - T_1)},$$

где C — пропускная способность человека;
n — общее число реакций (в данном случае равное 180);
r — общее количество ошибок;
T_1, T_2 — время заполнения таблиц;
k — коэффициент, зависящий от размера матриц, равный 8 для данного теста.

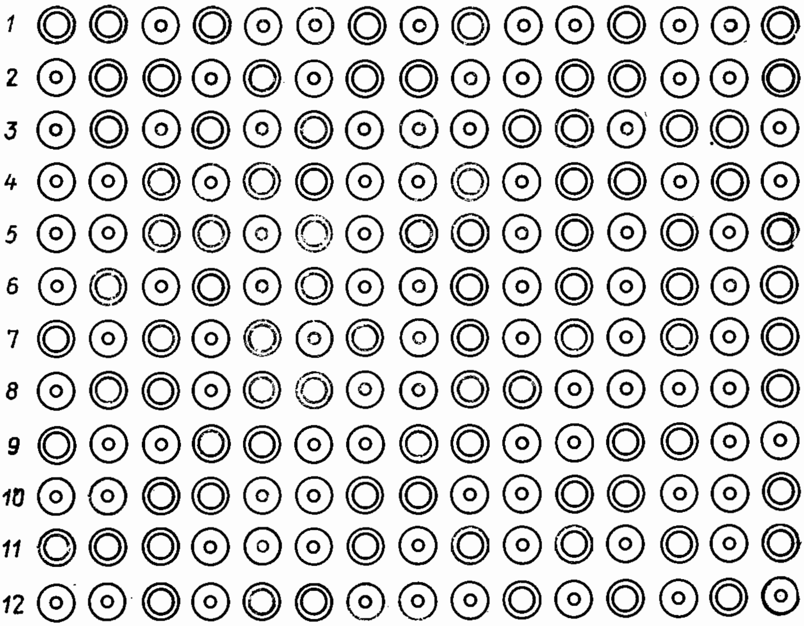


Рис. 38

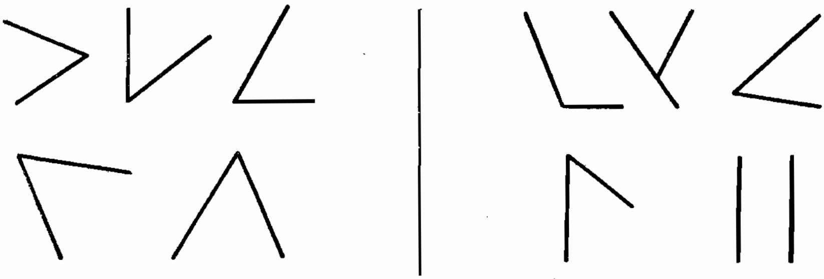


Рис. 39

Если C больше 15 — это хороший результат, 10—14 — нормальный, менее 10 — неважный.

Замечание. Следует, используя пишущую машинку, изготовить заранее обе матрицы, а затем проводить испытание.

Приведем пример выполнения расчета по формуле. Пусть $T_1 = 3{,}5$ мин, $T_2 = 5$ мин, $r = 5$ (столько раз поставлены точки не в том месте, где нужно).

$$C = \frac{180 - 5}{8 \cdot (5-3{,}5)} = 14{,}6.$$

Тест 5

На рисунке 39 изображены два множества геометрических фигур слева и справа от вертикальной черты. Слева — фигуры, имеющие общие признаки, справа — не имеющие этих признаков. Посмотрите на фигуры в течение 30 с, а затем перечислите все признаки, позволяющие отличить фигуры, расположенные слева, от фигур, расположенных справа от вертикальной черты. По тому, сколько признаков человек увидит с первого взгляда, можно судить **о наблюдательности.**

Тест 6

Каков объем* вашего внимания?

Всего одну секунду, но внимательно посмотрите на числа, написанные на рисунке 40. Запомните числа и сложите их, когда закроете рисунок. В каких фигурах записаны эти числа?

Тест 7

Проверьте себя на наблюдательность и умение анализировать по следующему тесту.

Задание 1. Сначала в течение 10 с рассматривайте первую таблицу (рис. 41). Затем, закрыв ее, заполните

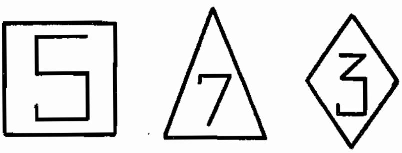


Рис. 40

* Объем внимания — максимальное число не объединенных в группы объектов, которые человек может одновременно и отчетливо воспринять в процессе решения какой-либо задачи.

соответствующими значками пустые клетки второй таблицы (рис. 42). Если задание выполнено без ошибок — оценка «5», если одна ошибка — «4» и т. д.

1	2	3	4	5
Г	Э	+	⊢	∸

Рис. 41

2	1	4	3	5	2	1	3	4	2	1

Рис. 42

З а д а н и е 2. Даны числа, которые требуется сложить. Заметьте время, за которое вы, не проводя письменных вычислений, укажете верно сумму из записанных справа результатов.

Слагаемые

393
4658
3790
67

Сумма

А. 7908
Б. 8608
В. 8908
Г. 8898
Д. Ни одного из этих чисел

Тест 8

Частое использование одного и того же метода при решении задач иногда приводит к привычке, которая становится вредной. У человека вырабатывается склонность к так называемой **психологической инерции**.

Проверьте, есть ли у вас склонность к такой вредной инерции на следующей задаче.

З а д а ч а. Пусть вы имеете три кувшина различной емкости A, B и C л, заполненные водой. Используйте кувшины для переливания x л воды (заполняя их полностью) в большой сосуд D, емкость которого неизвестна.

№ задания	Число литров в кувшине			Перелить x л в кувшин D	Решение	Время
	A	B	C			
1	10	7	5	8	$A-B+C$	
2	20	25	11	6		
3	14	3	2	13		
4	18	10	7	15		
5	11	8	6	9		
6	12	9	7	10		
7	18	23	9	4		
8	13	10	8	11		
9	23	28	14	9		

Заполните таблицу по первому образцу, заметьте время, затраченное на решение. Если вы затратите менее 2 мин — отлично; от 2 до 5 — неплохо, более 5 мин — плохой результат. Кстати, какова формула ответа в последнем случае?

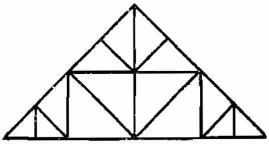


Рис. 43

Тест 9

В каком случае вам успешнее и легче работать над задачей:

а) когда ее элементы представлены на чертеже;

б) когда ее элементы представлены на модели;

в) когда ее элементы представлены на схеме;

г) когда ее элементы представлены символами (цифрами, буквами или другими знаками)?

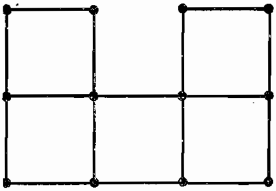


Рис. 44

1	8	7	4
2	3	6	5

Рис. 45

Задания для самостоятельной работы

8.1. В этой задаче требуется от слова **туча** добраться через промежуточные слова до слова **день**, всякий раз заменяя лишь по одной букве. Сколько промежуточных слов вам понадобится?

Постарайтесь выполнить задание кратчайшим путем.

8.2. Сколько треугольников изображено на чертеже (рис. 43)?

8.3. Переложите три спички так, чтобы из пяти квадратов получилось четыре (рис. 44).

8.4. Возьмите прямоугольный лист бумаги, изобразите на нем табличную сетку и пронумеруйте клетки, как указано на рисунке 45. Сложите этот листок по контурам клеток так, чтобы верхняя была 1, а далее клетки шли по порядку номеров.

8.5. Два тела движутся по окружности в одну сторону. Первое тело делает полный оборот по окружности на 2 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 с. За какое время первое тело проходит окружность?

8.6. Вставьте промежуточные числа, если все тройки чисел составлены по одному и тому же правилу:

а) 8 | 5 → 3   13 | 7 → ?

б) 2 10 4
3 17 5
3 ? 4

в) 651 (331) 342
449 (...) 523

8.7. Найдите закономерность в последовательности чисел и замените вопросительный знак числом: 82, 97, 114, 133, ?.

8.8. Поставьте вместо вопросительного знака нужную фигуру из числа фигур, расположенных справа от черты (рис. 46).

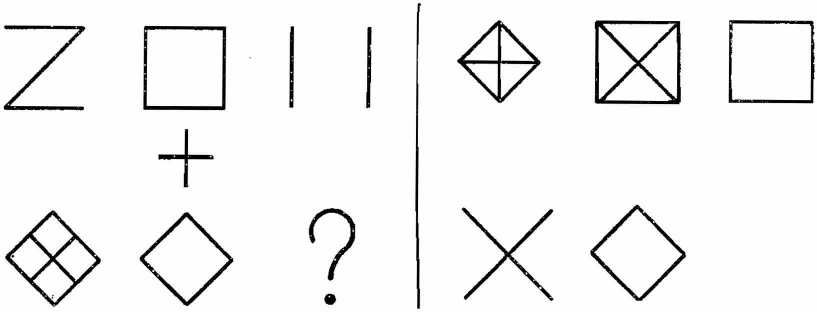


Рис. 46

8.9. Посмотрите на числовые «неожиданности»:

1) $369 = 3 \times 69 + 36 \times 9 - 3 \times 6 \times 9$;

2) $29 + 38 = 67$, $\quad 2 \times 9 + 3 \times 8 = 6 \times 7$;

3) $8^3 = 512$, $\quad 5 + 1 + 2 = 8$;

$17^3 = 4913$, $\quad 4 + 9 + 1 + 3 = 17$.

Найдите еще по одному примеру с этими интересными свойствами. А свои «неожиданности» у вас есть?

Следующие задачи решите устно (быстро, но осторожно!).

8.10. В полдень из Москвы в Тулу выходит автобус с пассажирами. Часом позже из Тулы в Москву выезжает велосипедист и едет по тому же шоссе, но, конечно, значительно медленнее, чем автобус. Когда пассажиры автобуса и велосипедист встретятся, то кто из них будет дальше от Москвы?

8.11. Что дороже: килограмм гривенников или полкилограмма двухгривенных?

8.12. Угол в $1\frac{1^\circ}{2}$ рассматривают в лупу, увеличивающую в 4 раза. Какой величины покажется угол?

8.13. В 6 ч стенные часы пробили 6 ударов. По карманным часам я заметил, что время, прошедшее от первого удара до шестого, равнялось 30 с. Если для того, чтобы пробить 6 раз, часам понадобилось 30 с, то сколько времени понадобится часам для отбоя 12 ударов в полдень?

8.14. Из одной точки вылетели три ласточки. Когда они будут в одной плоскости?

§ 9. КАК МЫ ДУМАЕМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

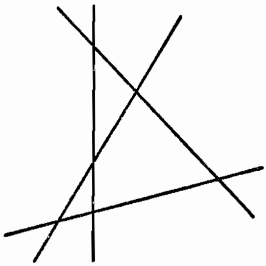
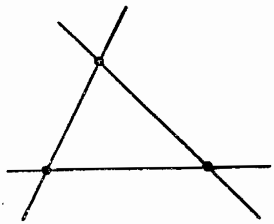
Попытаемся теперь проследить за тем, **как мы думаем**, решая ту или иную задачу; тем самым мы будем учиться правильно мыслить. Итак, будем действовать и одновременно следить за собой. Возьмем какую-нибудь нестандартную задачу и начнем опыт. Нам нужно суметь не только решить эту задачу, но одновременно записать все наши мысли, связанные с попытками ее решения (удачными или неудачными). Когда мы начнем эту работу, то убедимся в том, что это не так легко, как кажется на первый взгляд. Этому тоже нужно учиться.

Вернитесь к § 5, просмотрите еще раз ход рассуждений при решении задачи, которую задал Кащей Ивану-царевичу. Это один из примеров размышления в ходе решения задачи.

Рассмотрим еще пример. Расскажем о том, как один из вас наблюдал за самим собой и сумел не только решить задачу, но и рассказать о том, как он ее решил.

Задача. На плоскости проведено 100 прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разделилась плоскость этими прямыми?

Итак, приступаем к решению и описанию процесса решения. Обозначим буквой n число прямых, буквой m — число частей плоскости.

Ход решения	Замечания
 Рис. 47  Рис. 48	1) Изучаю условие; попытаюсь изобразить хотя бы часть прямых, чтобы представить данную ситуацию (рис. 47). «Никакие две прямые не параллельны», — значит, каждая прямая пересекается со всеми остальными 99-ю. «Никакие три не проходят через одну точку», — значит, каждая прямая будет иметь ровно 99 точек пересечения с другими прямыми. Условие проясняется, но данное число прямых (100) велико, изображать все прямые для подсчета частей плоскости очень долго. Надо искать закономерность (если она есть) увеличения числа частей плоскости в связи с увеличением числа прямых.

Продолжение

Ход решения	Замечания

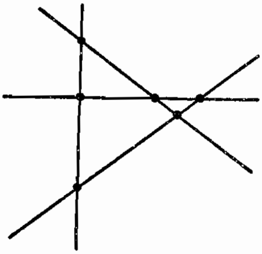


Рис. 49

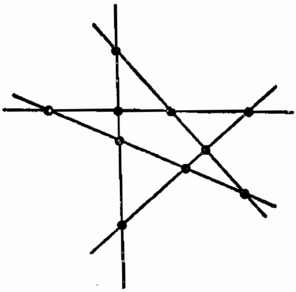


Рис. 50

2) Приступаю к решению задачи, начиная с простейших случаев.

Составляю более простую задачу: «На плоскости проведено 3, 4, 5,... таких прямых...» (рис. 48, 49, 50).

$n = 3$, $m = 7$ (рис. 48),
$n = 4$, $m = 11$ (рис. 49),
$n = 5$, $m = 16$ (рис. 50).
Проверяю себя: $n=4$, — значит, точек пересечения каждой прямой с другими должно быть 3 (рис. 49).

n	3	4	5	6
m	7	11	16	22

$$11 - 7 = 4$$
$$16 - 11 = 5$$
$$22 - 16 = 6$$

3) Составляю таблицу для числа прямых и соответствующего числа частей плоскости.

Замечаю, что каждое значение m отличается от предыдущего на соответствующее значение n.

По всей вероятности, при $n = 100$ соответствующее m будет больше предыдущего на 100.

Как обосновать эту гипотезу?

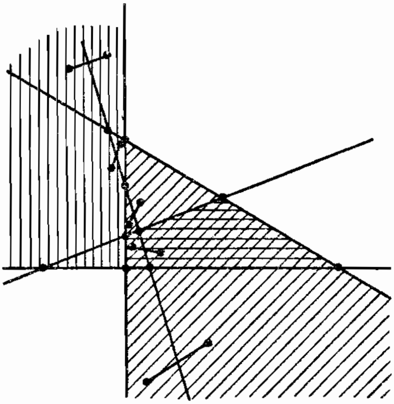
<table>
<tr><th>Ход решения</th><th>Замечания</th></tr>
<tr><td>


Рис. 51

Рис. 52

Рис. 53
</td><td>
4) Рассуждаю: пусть при некотором числе прямых $(n-1)$ число частей плоскости равно m. Если добавить еще одну прямую, то она будет иметь $(n-1)$ точек пересечения с каждой из $(n-1)$ прямых. Эта n-я прямая разделится $(n-1)$ точками на n частей, каждая из которых разбивает одну из имевшихся частей плоскости на две, т. е. к имевшимся m частям добавится еще n частей (рис. 51, 52, 53).

$p=3,\ q=4$ (рис. 52),
где p — число точек,
q — число частей прямой.
$p=4,\ q=5$ (рис. 53).
. . . .
$p=n-1,\ q=n.$

Значит, с добавлением одной прямой число частей плоскости увеличивается на получившееся число прямых.

Это уже интересно!
Закономерность найдена:
$n=7,\ m=22+7=29;$
$n=8,\ m=29+8=37;$
$n=9,\ m=37+9=46;$
$n=10,\ m=46+10=56$
и т. д.
</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{c|l} n & \\ \hline 3 & 7 \\ 4 & +4=11 \\ 5 & \quad +5=16 \\ 6 & \qquad +6=22 \\ 7 & \qquad\quad +7=29 \\ 8 & \qquad\qquad +8=37 \end{array}$$

$$7=1+1+2+3$$
</td><td>
5) Но до $n=100$ все равно долго считать.
Исследую подробнее эту закономерность.
Стоп!
Надо найти сумму:
$7+4+5+6+7+\ldots+99+100.$
Представлю 7 в виде суммы последовательных чисел. Получилось очень красиво:
$1+1+2+3+4+\ldots+99+100.$
</td></tr>
</table>

Ход решения	Замечания
$1+1+2+3+4+\ldots+49+50+$ $+51+\ldots+97+98+99+100=$ $=1+100\cdot 49+50+100=1+$ $+100\cdot 50+50=5051$. Итак, плоскость разделится 100 прямыми на 5051 часть.	6) Вычисляю: $49\begin{cases}1+99=100\\ 2+98=100\\ 3+97=100\\ \ldots\ldots\\ 49+51=100\end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

Для того чтобы вам было легче наблюдать за собой, работу можно организовать так:

а) говорить вслух и записывать;

б) говорить вслух, попросив товарища записывать сказанное вами, не участвуя в работе;

в) если у вас дома есть магнитофон, использовать его!

Для проведения опыта выберите себе любую из трех данных задач (ту, которая вам покажется или более интересной, или более трудной) и решайте ее, ведя запись на листе, разделенном вертикальной линией (слева — процесс решения; справа — ваши замечания). Одну из задач можно решить (и описать подробно) всем классом. Выберите двух секретарей для ведения записи и приступайте.

9.1. Из города A в город B ведут две дороги одинаковой длины: через город X и через город Y. Дорога из X в Y через B короче, чем через город A, и город Y ближе к A, чем к B. Сколько всего различных по длине участков между этими четырьмя городами? Расположить участки дорог между городами в порядке возрастания длины, начиная с самой короткой.

9.2. Найти подмножества A и B множества C, если для любого X — подмножества C выполняется равенство

$$X \cap A = X \cup B.$$

9.3. Доказать, что лучи, проведенные из вершины острого угла параллелограмма через середины противолежащих сторон, разделят диагональ параллелограмма на три равные части.

9.4. В автобусе без кондуктора ехало 25 человек. Хотя у них были монеты только достоинством в 10, 15, 20 копеек, каждый из них расплатился за проезд и получил причитающуюся ему сдачу. Как это было сделано? При каком наименьшем числе пассажиров это можно сделать, если стоимость проезда 5 к.?

Прочтите ваши записи. Уверены, что вам есть чему поучиться. Даже если вам не удалось решить задачу, не огорчайтесь. Неужели нет ничего интересного на правой стороне листа? А на левой? А может, вам пришла в голову новая задача? Запишите ее. Еще раз вчитайтесь в записи своих мыслей, собирая «жемчуг слов»!

Счастливого опыта!

Если будет чем похвастаться, покажите учителю свои записи.

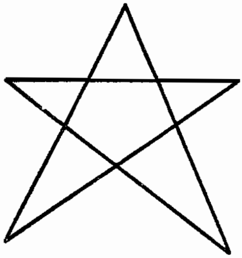


Рис. 54

Если хвастаться нечем, все равно покажите записи учителю.

Быть может, вам понравилась задача о разделении плоскости на части? Тогда попробуйте «на зуб» парочку ее «родственников»:

9.5. На плоскости проведено 100 прямых. На одной из них отмечено 99 точек, на всех остальных—по 2 точки так, что всего получилось 100 отмеченных точек. На сколько частей разделилась плоскость этими прямыми?

9.6. Условие задачи 9.5. Вопрос: «Как провести 101-ю прямую, чтобы число частей, на которые разделилась плоскость 100 прямыми, увеличилось на 100?»

9.7. Вы научились многому. Попытайтесь выполнить первое задание (вариант А) за 40 мин. Если это вам удастся, то второе задание (вариант Б) вы должны суметь выполнить за 30 мин (проверьте).

Вариант А

1. Найти частное $y : x$, если $y : y = y$, а $x \cdot x = x$.
2. Установить, сколько отрезков изображено на рисунке 54.
3. Не вычисляя, установить, верно ли равенство
$121 - (37-23) = 121 + 23 - 37$. Ответ обосновать.
4. До конца суток осталась $\frac{1}{7}$ того времени, которое прошло от начала суток. Сформулировать вопрос задачи и решить ее.
5. В кассе одинаковое число рублевых, трехрублевых и пятирублевых денежных знаков, всего на сумму 90 р. Какая сумма денег представлена трехрублевками?
6. Каким может быть число x во второй тройке чисел

$$12\ (56)\ 16, \qquad 17\ (x)\ 21,$$

если эта тройка чисел составлена по тому же правилу, что и первая?

Вариант Б

1. Найти значение x, если $x < x^2$.
2. Сколько различных квадратов изображено на рисунке 55?

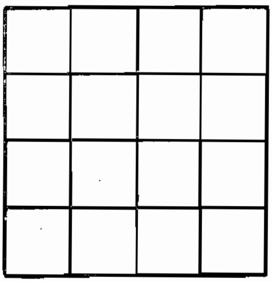


Рис. 55

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых четные?
4. Вопрос задачи сформулирован так: «Сколько матчей будет проведено в этом турнире?» Составьте условие задачи и решите ее.
5. В кассе одинаковое число рублевых, трехрублевых и пятирублевых денежных знаков на сумму большую 20 р., но меньшую 30 р. Какая сумма денег находится в кассе?

6. Каким может быть число x в данной последовательности чисел 1; 8; 16; 25; x, если все числа, начиная со второго, составлены по одному и тому же правилу?

§ 10. ПРОБЛЕМНЫЕ ЗАДАЧИ

Если школьник в процессе своей учебной деятельности обычно работает над решением **задачи**, то ученый в процессе своей научной деятельности обычно работает над решением так называемой **проблемы**, которая также является задачей, но, конечно, более сложной.

Ученый решает задачу, важную для развития науки, техники и народного хозяйства. Учащийся, решая задачу, учится мыслить и понимать основы математики, которые он изучает, в связи с простейшими применениями математики на практике (например, измерение, вычисление). Вместе с тем это не менее важно для развития будущего общества — это первые шаги на пути овладения любой профессией, приносящей пользу обществу.

Итак, работа ученого и учащегося очень похожи: и там и здесь идет познание нового; и там и здесь идет поиск неизвестных путей решения. Нам бы хотелось сделать так, чтобы каждый из вас почувствовал себя в роли ученого, в роли первооткрывателя нового (пусть это новое известно ученым или учителю, но вам-то оно неизвестно!). Пусть вы не открываете новых законов природы, но вы учитесь их открывать.

Будем же в своей учебной работе стараться быть похожими на ученого. Будем учиться решать нестандартные задачи, учиться думать, изобретать новые задачи или новые решения — будем овладевать умением работать творчески!

В этом нам помогут особые задачи, которые мы назовем *проблемными*. Как правило, для таких задач неизвестно не только решение и его обоснование, но и плохо определены либо данные, либо цель, и потому как сама задача, так и ее решение могут быть весьма содержательными и разнообразными. По существу в этом случае мы будем иметь дело не с одной задачей, а с множеством задач.

Часто проблемная задача, хотя и является достаточно простой и определенной, может быть рассмотрена как ядро (ячейка) многих аналогичных задач.

В качестве первого и наиболее простого примера (изучай сложное на простом!) рассмотрим следующую задачу: «Изучить свойства ромба».

Естественно, что эта задача будет проблемной лишь при условии, что свойства ромба не изучались еще на уроках или по учебнику. Здесь четко определено, что дано — ромб. Очень плохо определена цель (но все же она есть) — изучить свойства ромба (какие? сколько? зачем?). Совсем не определено то, как изучать, на что опираться, как обосновать выявленные свойства ромба, т. е. не определено ни решение, ни его возможное обоснование.

В качестве второго примера возьмем известную уже задачу и ее возможные следствия: «Построить треугольник по данным трем серединам его сторон» (см. § 6). Какое множество задач может возникнуть в связи с этой задачей!

Самое важное для нас заключается в том, что проблемные задачи «окружают нас со всех сторон». Они только не сформулированы, не поставлены четко. Прежде всего их нужно обнаружить, «увидеть», а затем сформулировать. Сформулировать такие задачи и отыскать их не так трудно, как кажется на первый взгляд.

Практически, текст почти каждой задачи школьного курса математики можно перефразировать так, чтобы получилась проблемная задача.

Для того чтобы создать серию задач из данной задачи — сделать ее проблемной, нужно лишь поразмыслить и использовать известный вам «метод» под названием «А нельзя ли...?».

Давайте вместе поразмыслим над какой-нибудь задачей, и лучше всего над такой, которая кажется нам совсем обычной, и даже с известным решением. Возьмем, например, задачу: «Сократить дробь $\frac{8a^3+b^3}{8a^3+(2a-b)^3}$».

Отметим сначала то, что мы знаем в связи с этой задачей.

1) Мы знаем, что если числитель и знаменатель имеют общий делитель, то дробь сократима.

2) Мы знаем, что для выделения делителя необходимо разложение на множители, и знаем различные способы разложения.

3) Мы знаем тождества сокращенного умножения.

И т. д.

Что мы можем извлечь из этих знаний? Что можно было бы еще узнать (и интересно было бы узнать) в связи с данной задачей? Какие новые задачи можно было составить самим, отправляясь от данной задачи?

Будем думать вместе и отвечать на эти вопросы последовательно, вопросом на вопрос, используя известный нам метод «А нельзя ли...?».

1) Для начала решим эту задачу:

$$\frac{8a^3+b^3}{8a^3+(2a-b)^3}=\frac{(2a+b)\,(4a^2-2ab+b^2)}{(2a+2a-b)\,(4a^2-2a(2a-b)+(2a-b)^2)}=$$

$$=\frac{(2a+b)\,(4a^2-2ab+b^2)}{(2a+(2a-b))\,(4a^2-2ab+b^2)}=\frac{2a+b}{2a+(2a-b)}.$$

Что же получилось?

$$\frac{(2a)^3+b^3}{(2a)^3+(2a-b)^3}=\frac{2a+b}{2a+(2a-b)}.$$

Любопытно!

Вот вам и нельзя (!) сокращать показатели степеней.

Значит, к известным тождествам можно добавить еще одно:

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}?$$

Или нельзя? Вот и возникла проблемная задача!

2) А нельзя ли найти еще аналогичные любопытные тождества?

Вот вам и новая проблемная задача!

3) При разложении на множители способом вынесения общего множителя за скобки мы пользуемся распределительным законом умножения относительно сложения (или вычитания), т. е. $x(y \pm z) = xy \pm xz$ (справедливо для любых x, y и z).

А нельзя ли получить распределительный «закон» сложения относительно умножения:

$$x + yz = (x + y)(x + z)?$$

При $x + y + z = 1$ получается. Проверим:

$$(x + y)(x + z) = (1 - z)(1 - y) = \\ = 1 - z - y + yz = x + yz.$$

Попробуйте-ка найти еще значения x, y и z, при которых справедлив этот «закон». А нельзя ли таким образом «открыть» новые «законы»?

Опять проблемная задача!

4) Мы знаем тождества сокращенного умножения. А нельзя ли графически их проиллюстрировать?

Попробуем это сделать (рис. 56 и 57). Начнем с самого простого:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + \\ + 2ac + 2bc.$$

Заманчиво!

А нельзя вывести таким образом новые тождества? Например, $(a + b + c + d)^2 = ?$ И т. д.

Опять проблемная задача!

5) Нельзя ли таким же способом проиллюстрировать кубические тождества $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a+b+c)^3 = ?$ И т. д. Новая проблема! При этом, наверное, придется «выходить в пространство» (рассматривать не квадрат со стороной $a + b + c$, а куб с гранью $a + b + c$). А может быть, удастся получить новые тождества?

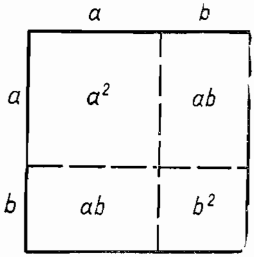


Рис. 56

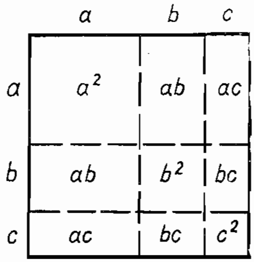


Рис. 57

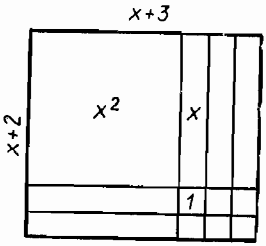


Рис. 58

6) Графическая иллюстрация тождеств сокращенного умножения получается очень хорошо. А нельзя ли использовать этот способ при разложении на множители?

Возьмем самый простой пример: «Разложить на множители $x^2 + 5x + 6$». Изобразим данный трехчлен графически (рис. 58), где

x^2 — это площадь квадрата со стороной x;

x — это площадь прямоугольника со стороной x и 1;

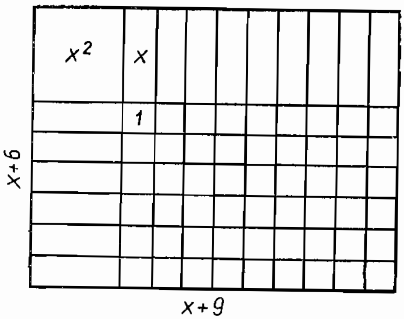


Рис. 59

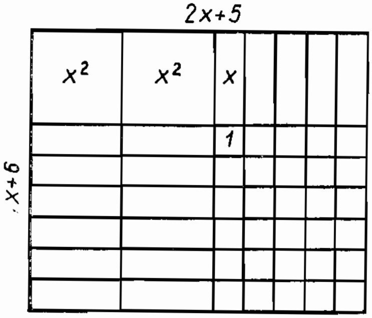


Рис. 60

$5x$ — это 5 таких площадей;

6 — это 6 площадей единичных квадратов.

Итак, данный трехчлен представлен площадью прямоугольника со сторонами $(x+2)$ и $(x+3)$, т. е. $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

Интересно!

Значит, $x^2+15x+54=(x+6)(x+9)$. Используя графическую иллюстрацию (рис. 59), это равенство можно представить как площадь прямоугольника со сторонами $x+6$ и $x+9$.

А если взять трехчлен посложней? Например, $2x^2+17x+30$ (рис. 60)?

Итак, $2x^2+17x+30=(x+6)(2x+5)$.

7) Нельзя ли таким же способом разложить на множители любой квадратный трехчлен?

Новая проблема!

Нельзя ли этот способ распространить на другие задачи на разложение на множители?

Впрочем, пора остановиться.

Надеемся, что мы даже на одном примере показали вам, что «золотые россыпи» задач лежат совсем рядом, нужно лишь обратить внимание на их поиск. Закончим словами Д. Пойа: «Ваш ум подобен сумке. Когда вы думаете, то трясете сумку до тех пор, пока не выловите из нее то, что вам нужно!» Так не ленитесь трясти свою «сумку», друзья!

Задания для самостоятельной работы

10.1. Как можно решать задачу об исследовании свойств ромба?

10.2. Составьте свою задачу, похожую на задачу об исследовании свойств ромба, и решите ее.

10.3. Двое играют в игру: первый называет 2 или 1; второй (прибавляя 1 или 2, по своему желанию) называет 2 или 3, а может быть, 3 или 4 и т. д. (по очереди). Выигрывает тот, кто назовет 10. Как нужно играть, чтобы выиграть наверняка? Какие другие задачи скрыты в данной задаче? Составьте соответствующую серию задач, используя «метод» «А нельзя ли... ?».

10.4. Какой формы лист необходим для склеивания конверта?

Рассмотрите эту ситуацию как проблемную. Составьте серию задач, связанных с данной задачей. По каким направлениям можно это сделать? Назовите их, посоветуйтесь с учителем.

10.5. Во время войны польская эскадрилья получила приказ совершить боевой вылет на немецкие позиции. Подробности приказа находились в конверте, который командир эскадрильи должен был вскрыть между часом и двумя, в тот момент, когда минутная стрелка совместится с часовой. Определите точно этот момент.

Какие другие задачи скрыты в данной задаче? Составьте соответствующую серию задач, используя «метод» «А нельзя ли...?».

10.6. Дана прямая и две точки, лежащие по разные стороны от нее. Постройте треугольник, для которого данные точки были бы основаниями двух высот, а третья высота лежала бы на данной прямой. Рассмотрите эту задачу как проблемную. Составьте серию задач, связанных с данной задачей.

10.7. Вы хотите узнать номер моего телефона, задавая мне вопросы, на которые я буду отвечать только «да» или «нет». Придумайте способ, гарантирующий успех за наименьшее число вопросов (считать, что телефонный номер состоит из произвольных пяти цифр).

Составьте серию задач, связанных с данной задачей. Какие задачи можно составить, если рассматривать эту задачу как проблемную?

§ 11. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Разговор здесь пойдет на ту же тему — «о золотых россыпях задач». Если до сих пор «золотые залежи» мы усматривали в самих задачах (задачи рождали новые задачи), то теперь обратимся к реальному миру, к миру предметов и явлений, которые окружают нас. Начнем с некоторых примеров.

1. Нам нужно уплатить за покупку 19 р. Но у нас имеются только трехрублевые денежные знаки, а у кассира только пятирублевые. Сумеем ли мы расплатиться без дополнительного размена? Нельзя ли установить способ расплатиться, если нам нужно заплатить n р. ($n > 100$) и у кассира имеются деньги только достоинством m р., а у нас — только достоинством k р.? Какое минимальное число денежных знаков должен иметь кассир для того, чтобы произвести расчет?

Это задача для вас. Вам нужно ее решить и усмотреть скрытые в этой задаче другие задачные ситуации. Как можно дальше развить эту проблему? Какие еще вопросы можно поставить?

Сумели ли вы решить эту задачу в общем виде или же справились лишь с ее конкретным вариантом: расплатились за покупку стоимостью 19 р.?

Особенность этой задачи заключается в том, что в ходе ее решения приходится переходить от реальной ситуации к ее математическому описанию, или, как говорят, строить ее математическую модель. Такие задачи часто называют *прикладными*. При решении этих задач особенно ярко просматривается данная В. И. Лениным характеристика познания человеком реального мира: «От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности».

Следуя этому ленинскому положению, очень часто при решении практической задачи удается, внимательно изучив условие задачи (живое созерцание), построить ее математическую модель, на этой модели осуществить решение задачи (перейти к абстрактному мышлению), а затем перевести результат решения на язык исходной ситуации (сделать практический вывод). В этом и состоит могущество математического метода познания природы, широкая прикладная направленность математики.

Уметь решать прикладные задачи — значит уметь применять математику на практике. Это важное умение, которое очень пригодится вам в дальнейшем, когда вы начнете работать (в любой области народного хозяйства).

Давайте вместе рассмотрим решение нескольких прикладных задач, чтобы вы начали учиться самостоятельно применять математику на практике.

Задача. На двух заводах (I и II) ведутся работы по производству автомобилей типа A и B. По ряду причин эта работа выполняется на каждом заводе в течение не более чем 30 ч в неделю. Первый завод производит части для автомобилей типа A за 10 ч и части для типа B — за 5 ч. На втором заводе сборка машин типа A проводится за 5 ч, а типа B — за 10 ч. Прибыль при продаже автомобиля типа A равна 200 условных денежных единиц, а типа B — 300 усл. д. ед. Сколько автомобилей каждого типа следует производить еженедельно для получения максимальной прибыли?

Начнем с изучения условия задачи. Обозначим через x и y число автомобилей типа A и B соответственно, выпускаемых еженедельно. Перенесем данные задачи в следующую таблицу:

	Заводы		Прибыль	Число автомобилей в неделю
	I	II		
Автомобиль типа A	10 ч	5 ч	200	x
Автомобиль типа B	5 ч	10 ч	300	y

По условию время изготовления автомобилей типа A и B должно быть не больше 30 ч в неделю.

Переведем теперь условие задачи на математический язык.

Имеем:
$$\begin{cases} 10x + 5y \leqslant 30, \\ 5x + 10y \leqslant 30, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Заметим, что система неравенств (1) и есть математическая модель данной ситуации. Она показывает, что нужно отыскать такие значения переменных x и y, которые удовлетворяли бы системе (1), т. е. найти пересечение множеств
$M_1 = \{(x, y) / 10x + 5y \leqslant 30\}$ и $M_2 = \{(x, y) / 5x + 10y \leqslant 30\}$.

Заменим систему (1) более простой, ей эквивалентной:
$$\begin{cases} 2x + y \leqslant 6, \\ x + 2y \leqslant 6, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$
и решим ее графически (рис. 61).

Получился четырехугольник $ABCD$. Таким образом, множество всех возможных вариантов числа изделий (x, y) может быть представлено в виде этого четырехугольника. Найдем координаты вершин $ABCD$:
$$A\ (0;\ 0),\ B\ (0;\ 3),\ D\ (3;\ 0),\ C\ (2;\ 2).$$

Теперь осталось выяснить, для каких же пар чисел $(x;\ y)$ — точек этого четырехугольника сумма $(x + y)$ будет наибольшей.

Для этого построим на одном чертеже графики уравнений $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x + y = 3$, $x + y = 4$ с изображением четырехугольника $ABCD$ (рис. 62).

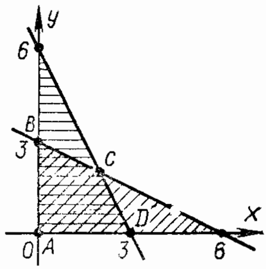


Рис. 61

На рисунке 62 видно, что в точке C (2; 2) сумма $x + y$ имеет наибольшее значение: $2 + 2 = 4$. Для других точек четырехугольника $ABCD$ значение суммы $x + y$ меньше 4 (например, для точек отрезка BD она равна 3).

Практический вывод: а) для получения максимальной прибыли, при данных условиях, необходимо еженедельно изготавливать по 2 автомобиля каждого типа; б) нетрудно рассчитать и прибыль: $200 \cdot 2 + 300 \cdot 2 = 1000$.

Полезно отметить, что, решая эту практическую задачу, мы одновременно сумели решить интересную математическую задачу:

«Найти наибольшее значение выражения $200x + 300y$, если переменные x и y удовлетворяют условию:
$$\begin{cases} 10x + 5y \leqslant 30, \\ 5x + 10y \leqslant 30, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0». \end{cases}$$

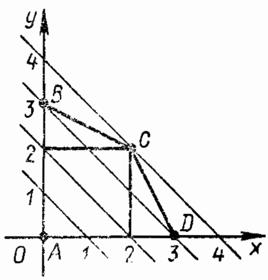


Рис. 62

Таким образом, решение практических задач часто приводит к развитию теории.

Заметим, что в действительности завод выпускает еженедельно значительно большее число автомобилей. Однако для ознакомления с методом решения подобных задач достаточно рассмотреть задачу с намеренно упрощенными данными. Здесь авторы следуют известному принципу «Изучай сложное на простом примере!» и советуют вам, наши читатели, упрощать условия трудных задач, для того чтобы успешнее осмыслить задачу.

Рассмотрим еще одну задачу.

З а д а ч а. Какими правильными конгруэнтными многоугольниками можно сплошь покрыть плоскость (при этом каждый многоугольник находится вне другого, а соседние многоугольники имеют одну общую сторону)?

Рассмотрим решение этой задачи.

а) Пусть некоторыми правильными n-угольниками можно покрыть плоскость. Пусть при этом в одной вершине сходятся m углов.

б) Используя теорему о сумме величин углов многоугольника, запишем, чему равна величина внутреннего угла правильного многоугольника:

$$\frac{2d(n-2)}{n}.$$

в) Так как в одной вершине сходятся m углов, то

$$\frac{2d(n-2)}{n}\cdot m = 360^\circ.$$

г) Преобразуем это равенство, помня, что n, m — натуральные числа, $n > 2$.

$$m = \frac{2n}{n-2}. \qquad (1)$$

д) Чтобы найти значения m и n из (1), выделим из дроби $\frac{2n}{n-2}$ целую часть:

$$\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}\,(n > 2).$$

Уравнение (1) примет вид:

$$m = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

е) Для того чтобы m имело целые положительные значения, необходимо, чтобы дробь $\frac{4}{n-2}$ была целым положительным числом; это возможно, если число $n \in N$ четное и $2 < n \leqslant 6$, т. е. $n = 4$ или $n = 6$, или же n нечетное и равное 3.

ж) П р а к т и ч е с к и й в ы в о д. Плоскость можно покрыть правильными треугольниками, четырехугольниками, шестиугольниками. Поэтому для покрытия полов часто применяют керамические плитки, форма которых является правильным четырехугольником, правильным шестиугольником.

з) Мы рассмотрели вопрос о покрытии поверхности правильными n-угольниками. Можно ли покрыть поверхность неправильными конгруэнтными n-угольниками?

Существует ли такой пятиугольник, которым можно заполнить плоскость?

Тот же вопрос для пятиугольника, никакие две стороны которого непараллельны.

Эти вопросы мы адресуем вам. Ответив на них, вы обнаружите новые возможности покрытия пола различными паркетами или керамической плиткой.

2. Надеемся, вы решили задачу 3 предыдущего параграфа. Итак, как нужно играть на выигрыш? Кто выигрывает — начинающий или его партнер? Вы ответили на эти вопросы? (Приведем ответ: начинающий выигрывает, он называет 1, а затем 4, 7 и 10.) Как составить правила этой игры при счете до 12, до 20? Какую еще аналогичную данной игру можно изобрести и каковы будут ее правила «на выигрыш»? Ответы на эти вопросы у вас уже должны быть.

В жизненной практике часто возникают задачи игрового характера. Таковы, например, многие спортивные задачи, задачи, возникающие в военном деле, и т. д.

Попробуйте свои силы на следующей учебной игровой задаче.

З а д а ч а. Для игры нужен прямоугольный лист бумаги и какие-либо фигуры одинаковой и симметричной формы, например косточки домино. Количество фигур должно быть достаточным, чтобы покрыть весь лист бумаги. Играют двое. По очереди кладут фигуры в любых положениях на любое свободное место листа бумаги до тех пор, пока их класть будет некуда. Передвигать положенные фигуры не разрешается.

Считается выигравшим тот, кто положит предмет последним.

Найти способ ведения игры, при котором начинающий игру обязательно выигрывает.

3. Для многих прикладных задач характерна еще одна особенность. При решении их мы часто бываем ограничены в средствах решения (нередко не оказывается под рукой нужного инструмента или возникает естественное препятствие, которое не дает возможности использовать известный способ решения). С примерами таких задач вы уже познакомились в § 3. Вот еще несколько таких задач (решите их).

З а д а ч а А. Построить биссектрису угла, вершина которого не уместилась на чертеже.

З а д а ч а Б. Используя только циркуль, найти точку касания прямой, проходящей через данную точку A, и данной окружности (O, R).

Задания для самостоятельной работы

Задача 11.1. Долго враждовали между собой рыцари одного древнего королевства. Наконец всем это надоело и обе стороны согласились на перемирие. Когда рыцари из двух враждующих станов собрались за круглым столом, оказалось, что число тех из них, справа от которых сидит враг, равно числу тех, справа от которых сидит друг. Доказать, что число собравшихся за столом делится на 4.

Задача 11.2. Из точки C квадратного бильярда пускаем шарик параллельно диагонали. Найти множество таких точек на бильярде, что если из них пустить одновременно с первым с той же скоростью и в том же направлении второй шарик, то они столкнутся.

Попробуйте решить аналогичную задачу для бильярда прямоугольной формы и подумайте, какие еще другие задачные ситуации скрыты в этой задаче. Как можно дальше развить эту проблему? Какие еще вопросы можно поставить?

Задача 11.3. Известно, что два проводника с током при последовательном включении в цепь имеют сопротивление a Ом, а при параллельном включении — b Ом. Можно ли установить сопротивление каждого проводника, если у нас нет омметра?

Задача 11.4. Можно ли покрыть шашечную доску размером 10×10 плитками размером 4×1?

Задача 11.5. Пользуясь одной линейкой, опустить перпендикуляр из точки A на диаметр данной окружности. (Рассмотреть различные положения точки относительно окружности.)

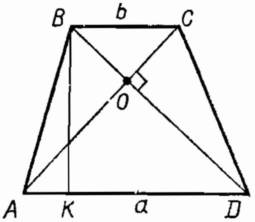
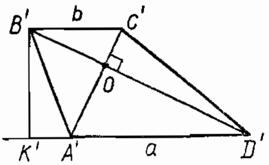
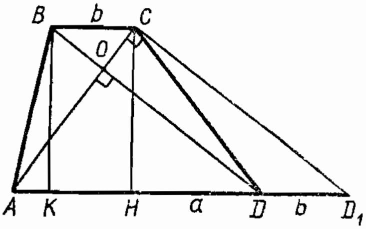
Задача 11.6. Приведите свои примеры задачи (или отыщите в литературе), которые вы отнесли бы к прикладным задачам.

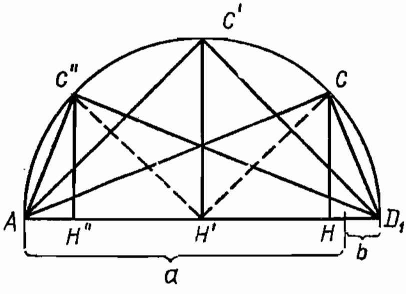
Задача 11.7. Фабрика по выпуску туфель для мальчиков и девочек применяет сырье двух видов, запасы которого ограничены. За 1 ч фабрика может расходовать 100 единиц первого вида сырья и 60 единиц второго. Для изготовления за 1 ч пары туфель для мальчиков необходимо 3 единицы сырья первого вида и 2 — второго; для изготовления пары туфель для девочек расходуется только 2 единицы сырья первого вида. Известно, что каждая пара туфель для мальчиков дает при продаже 5 денежных единиц дохода, а пара туфель для девочек — 3 единицы. Сколько пар туфель для мальчиков и сколько пар туфель для девочек надо изготовить за 1 ч фабрике, чтобы получить наибольшую прибыль?

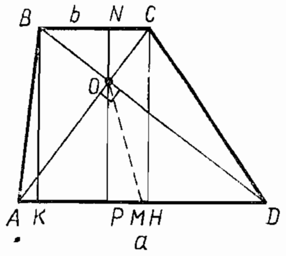
§ 12. КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

Рассмотрим на примере решения одной задачи, как можно использовать данные вам советы.

Задача. Диагонали трапеции с основаниями a и b взаимно перпендикулярны. Какие значения может принимать высота трапеции?

Советы решающему задачу	Решение задачи
1. Начиная решение задачи, необходимо хорошо понять задачу, осмыслить ее условие, изучить задачу в целом и в деталях, иллюстрировать задачу грамотным и четким рисунком или схемой.  Рис. 63  Рис. 64	Начертим произвольную трапецию с взаимно перпендикулярными диагоналями (лучше не равнобедренную и не прямоугольную, чтобы не принять какое-либо частное ее свойство за общее). Основания трапеции $\|AD\| = a, \|BC\| = b$. $[BK]$ — высота трапеции (рис. 63). Очевидно, что трапеция $A'B'C'D'$ тоже удовлетворяет условию задачи (рис. 64). $[B'K']$ — высота этой трапеции. $[BK] \neq [B'K']$. Значит, трапеций по указанным в условии данным можно построить не одну. Высоты этих трапеций будут различны. Какие же значения может принимать высота трапеции, удовлетворяющей указанным свойствам? По всей вероятности, она будет определяться величинами a и b.
2. Изучите цель, поставленную задачей: «Хорошо понять вопрос — значит уже наполовину ответить на него». Не начинайте решение задачи вслепую. Выберите сначала целесообразные направления поиска плана решения задачи, руководствуясь целью задачи. Если это полезно, видоизмените данную ситуацию.  Рис. 65	Для того чтобы убедиться в этом, попробуем найти зависимость $\|BK\|$ от a и b. а) $[BK]$ является высотой в $\triangle ABD$ с основанием a (ничего полезного); б) $[BK]$ является высотой в $\triangle ABC$ с основанием b (аналогичный случай); в) А нельзя ли найти треугольник, в котором были бы и a, и b, и $[BK]$? Попробуем. Выполним параллельный перенос $[BD]$ на $\overrightarrow{BC}$ (рис. 65). Получим: $\|DD_1\| = \|BC\| = b$. В $\triangle ACD_1$ $\|AD_1\| = a + b$, $\|CH\| = \|BK\|$, $\widehat{ACD_1} = \widehat{AOD} = 90°$.

Советы решающему задачу	Решение задачи
Высказывая догадку, старайтесь сразу подкрепить ее рассуждениями. Догадка должна быть правдоподобной.	Итак, в $\triangle ACD_1$ найти зависимость $\mid CH \mid$ от a и b.
3. Решайте вместо одной задачи другую, аналогичную данной. Составляйте задачи, родственные данной (более или менее общую, чем данная задача), и исследуйте эти задачи.  Рис. 66	Сформулируем подзадачу: «Какие значения может принимать высота, опущенная на гипотенузу, если гипотенуза равна $a+b$?» Что нам известно о высоте, опущенной на гипотенузу? а) Высота есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы, на которые она делится основанием высоты. б) В равнобедренном треугольнике высота совпадает с медианой. Это уже интересно! Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине этой гипотенузы, т. е. $\frac{a+b}{2}$. (Медиана есть радиус описанной окружности.) Построим на гипотенузе $a+b$ окружность (рис. 66). Очевидно, высота любого прямоугольного треугольника с гипотенузой $a+b$ будет меньше или равна радиусу описанной окружности, т. е. $\frac{a+b}{2}$. Равенство будет достигаться в случае, когда $\triangle ACD_1$ равнобедренный, т. е. $\mid CD_1 \mid = \mid BD \mid = \mid AC \mid$ $\mid AC \mid = \mid BD \mid$ — равные диагонали имеет равнобедренная трапеция. Значит, для любой трапеции

Советы решающему задачу	Решение задачи
 Рис. 67	$\lvert CH \rvert \leqslant \frac{a+b}{2}$ (равенство для равнобедренной трапеции). Итак, первое «А нельзя ли...?» привело нас к решению задачи «В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, меньше или равна половине гипотенузы». Стоп! У нас ведь есть сразу прямоугольные треугольники без дополнительных преобразований: $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$. Это, пожалуй, будет проще. Высота трапеции складывается из высот $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, т. е. $\lvert CH \rvert = \lvert NO \rvert + \lvert OP \rvert$ (рис. 67). В $\triangle BOC$ $\lvert ON \rvert \leqslant \frac{\lvert BC \rvert}{2} = \frac{b}{2}$. В $\triangle AOD$ $\lvert OP \rvert \leqslant \frac{\lvert AD \rvert}{2} = \frac{a}{2}$; $\lvert CH \rvert = \lvert ON \rvert + \lvert OP \rvert \leqslant \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$.
4. Учитесь «шлифовать» решение задачи, коротко и ясно оформляйте его. Старайтесь правильно мыслить. Обосновывайте каждый шаг в найденном вами решении. Помните, что оформлять решение задачи можно по-разному: в виде связного рассказа, в виде рисунка или схемы, в виде таблицы и т. д. Используйте для сокращения и четкости записи логико-математическую символику. Выбирайте тот способ оформления решения задачи (и ее ус-	Решение. 1) Проведем через точку O $[NP] \cong [BK]$; $\lvert BK \rvert = \lvert NP \rvert = \lvert NO \rvert + \lvert OP \rvert$ (см. рис. 67). 2) В $\triangle AOD$ $[OM]$ — медиана, $\widehat{AOD} = 90^\circ$ (по условию) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert OM \rvert = \frac{\lvert AD \rvert}{2} = \frac{a}{2}$ (радиус описанной окружности). 3) В любом треугольнике высота меньше или равна медиане, проведенной к той же стороне, значит, $\lvert OP \rvert \leqslant \lvert OM \rvert = \frac{a}{2}$.

Советы решающему задачу	Решение задачи
ловия), который вам представляется более удобным.	4) Аналогично 2-му и 3-му шагам решения, в $\triangle BOC$ $\lvert ON\rvert \leqslant \frac{b}{2}$. 5) $\left.\begin{array}{r}\lvert OP\rvert \leqslant \frac{a}{2}\\ \lvert ON\rvert \leqslant \frac{b}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \lvert NP\rvert = \lvert BK\rvert \leqslant \frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}$ (по свойству сложения неравенств).
5. Учитесь на задаче. Решив задачу, просмотрите все решение заново. Изучите решение, проконтролируйте имеющиеся выкладки и обоснование. Установите то, что полезно запомнить, что может пригодиться в дальнейшем.	В решении основной задачи решающую роль сыграла родственная задача. Полезно запомнить, что а) для сравнения линейных величин удобно рассматривать их в одном треугольнике; б) при решении удобно прямоугольный треугольник связывать с описанной (а может быть, и вписанной?) окружностью; в) высота, опущенная на гипотенузу, меньше или равна половине этой гипотенузы; г) высота в трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями меньше или равна полусумме оснований, т. е. средней линии трапеции; д) в равнобедренной трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии.
6. Решение задачи — это ваша небольшая научно-исследовательская работа. Старайтесь при решении задач почувствовать себя	Будет ли данная задачная ситуация проблемной? Может ли данная задача породить новые задачи?

Советы решающему задачу	Решение задачи
в роли ученого. Изобретайте новые решения и новые задачи, овладевая умением работать творчески. Старайтесь подойти к задаче и ее решению с разных сторон. Чаще задавайте себе вопрос: «А нельзя ли...?» или «А что, если так...?».	Прибегнем к «методу» «А нельзя ли...?» или «А что, если так...?». 1) А что, если дана не трапеция, а параллелограмм с взаимно перпендикулярными диагоналями? Можно ли определить, какие значения принимает его высота? 2) А нельзя ли данную задачу переформулировать так: можно ли построить трапецию с взаимно перпендикулярными диагоналями, зная отношение ее оснований? Можно ли считать, что эта задача и данная задача одно и то же? 3) На доске была начерчена равнобедренная трапеция с взаимно перпендикулярными диагоналями. Ее стерли. Осталось 3 точки: точка пересечения диагоналей и концы средней линии трапеции. Можно ли восстановить трапецию? А если трапеция неравнобедренная? А если...?

Подведем итоги изученному в данной книге.

Решение каждой задачи можно разделить на четыре основных этапа: изучение условия и цели задачи, поиск плана решения задачи, оформление найденного решения, критический анализ результата решения задачи и отбор полезной информации.

Сформулируем для вас те полезные советы, которые мы неоднократно старались вам проиллюстрировать на страницах этой книги.

На первом этапе решения задачи полезно действовать так:

1) Начинайте изучение условия задачи с тщательно выполненных наглядных рисунков, чертежей, таблиц или иллюстрированных схем, помогающих осмыслить задачу. Помните, что правильное

графическое представление условия задачи означает четкое, ясное и конкретное представление о всей задачной ситуации в целом.

2) Ясно представьте себе все элементы задачной ситуации, обстоятельно выясните, какие из них заданы, известны, какие из них являются искомыми, неизвестными.

3) Вдумайтесь в смысл каждого слова в тексте задачи (каждого символа, термина), постарайтесь выявить существенные элементы задачи, выделите на рисунке данные и искомые наглядными условными обозначениями. Попытайтесь видоизменить расположение элементов задачи на рисунке или схеме (возможно, это поможет выявить существенное в задаче).

4) Попытайтесь охватить условие задачи в целом, отметить ее особенности, вспомнить, не встречались ли вы раньше с задачей, в чем-либо аналогичной данной.

5) Продумайте, однозначно ли сформулирована задача: не содержит ли условие задачи избыточных, недостающих, противоречащих друг другу данных.

6) Внимательно изучите цель, поставленную задачей, выявите, какие теоретические положения связаны с данной задачей в целом и с некоторыми ее элементами.

7) Предполагая возможность использовать при решении задачи какой-либо из известных вам общих математических методов (метод уравнений, геометрических преобразований, координатный или векторный метод и так далее), постарайтесь выразить элементы задачи на языке соответствующего метода (составить уравнение, выразить данные и искомые в координатной или векторной форме и т. д.).

На этапе составления плана решения (поиска решения задачи) используйте следующие рекомендации:

1) Попытайтесь отнести данную задачу к какому-либо типу (виду) задач, способ решения которых вам известен.

2) Помните, что цель задачи выступает как главный ориентир направления поиска решения. Проанализируйте цель задачи и попытайтесь применить к решению задачи тот или иной знакомый вам метод или прием.

3) Постоянно контролируйте разумность ваших попыток решить задачу, соотнося получаемые частные результаты с условием и целью задачи. Старайтесь ограничивать число пробных действий (мысленных или практических).

4) Попытайтесь видоизменить задачу, переформулировать ее условие, намеренно упростить условие (т. е. составить и попытаться решить задачу, аналогичную данной, но более простую), обобщить условие задачи (составьте задачу более общую, чем данная), заменить понятия, связанные с задачей, их определениями.

5) Расчлените условие задачи на отдельные элементы, постарайтесь составить новую комбинацию этих элементов (быть может, в каком-либо сочетании с другими не рассматриваемыми в задаче элементами).

6) Попробуйте разбить данную задачу на серию вспомогательных задач, последовательное решение которых может составить решение данной задачи; попробуйте составить частные задачи к отдельным элементам данной задачной ситуации, руководствуясь при этом целью основной задачи.

7) Рассмотрите предельные случаи отдельных элементов задачи, посмотрите, как это отразится на основной цели задачи.

8) Подвергните какой-нибудь из элементов задачи определенному изменению, посмотрите, как отображается это изменение на остальных элементах задачи, попытайтесь высказать гипотезу, относящуюся к цели задачи, на основе наблюдаемых результатов изменения ее элементов.

9) Если решить данную задачу не удается, отыщите в учебной (или популярной) литературе задачу, похожую на данную. Изучите внимательно это «готовое» решение и постарайтесь извлечь из него пользу для решения данной задачи.

На этапе практической реализации плана решения задачи во всех его деталях важно обратить внимание на необходимость выбрать такой способ оформления решения, с помощью которого можно было бы зафиксировать решение в краткой и ясной форме, достаточной для того, чтобы иметь возможность (если это понадобится) полностью воспроизвести решение задачи.

Важно также, оформляя детальное решение задачи, одновременно корректировать его правильность соотнесением с условием и целью задачи.

На заключительном этапе процесса решения задачи (на этапе проверки правильности полученного решения, систематизации знаний и опыта) полезно действовать так:

1) Изучите найденное вами решение задачи. Сделайте грубую прикидку правильности результата решения задачи, соотнеся его с ее условием (и здравым смыслом). Проследите обоснованность каждого шага решения задачи. Подумайте, нельзя ли решить задачу другим способом. Помните, что получение того же результата другим способом — лучшая проверка правильности решения.

2) Попытайтесь отыскать способ решения задачи более экономичный, чем найденный, более общий, более изящный и т. п. (новый способ решения задачи часто открывает новый путь решения аналогичных задач, обогащает опыт решающего задачу).

3) Исследуйте особые случаи решения данной задачи; соотнесите результат решения с предельными значениями отдельных ее элементов. Обобщите результаты решения данной задачи, подумайте, при решении каких задач их можно было бы применить.

4) Изучите еще раз саму задачу, способ ее решения и результат. Выявите то полезное, ради чего стоило решать данную задачу (что важно знать, уметь и помнить).

5) Обратите особое внимание на те теоретические положения, особенности задачи и т. д., которые явились ключевыми для отыскания данного (или других) решения задачи.

Задания для самостоятельной работы

Поупражняйтесь в практическом использовании данных вам советов на решении следующих задач.

12.1. В произвольном $\triangle ABC$ проведены высоты, основания которых соединены отрезками прямых. Доказать, что высоты треугольника ABC будут биссектрисами образовавшегося треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 68).

12.2. В треугольнике ABC (рис. 69) проведены высоты $[AK]$ и $[BH]$; O — центр описанного круга. Доказать, что $[OC] \perp [KH]$.

12.3. В каком направлении нужно ударить шайбу (s), чтобы она, стукнувшись о бортик площадки, отлетела в правый дальний угол ворот?

12.4. Чему равно значение выражения $x^{31} - 74x^{30} + 74x^{29} - \ldots + 74x^{17} - 74x^{16} + 73x^{15} + 15$ при $x = 73$?

12.5. При каких натуральных значениях n уравнение (с переменными x и y) $nx^3 + xy - 61n = 0$ имеет единственное решение — натуральное число?

§ 13. ПОПРОБУЙТЕ РЕШИТЬ ЭТИ ЗАДАЧИ

Предложенные здесь задачи различны не только по содержанию, но и по трудности их решения. Впрочем, трудна данная задача или легка, судить может лишь тот, кто решал ее. Может случиться и так, что задача, казавшаяся нам трудной, будет решена кем-то из вас без особого труда (тогда честь и слава вам!). Если учитель предоставил свободу выбора вам, то пользуйтесь этой свободой в полной мере; выбирайте задачу по душе и готовьтесь к бою. (Кто кого? Она — вас или вы ее одолеете?) Задачи расположены здесь без какой-либо определенной системы. Как ни удивительно это звучит, в этом «беспорядке» заложена определенная система обучения решению задач. Продумайте это утверждение. Звездочками отмечены задачи, при решении которых необходимо знать учебный материал по курсу математики IX—X классов. Впрочем, почти для всех этих задач, за исключением стереометрических задач, существуют такие решения, для нахождения которых вам будет достаточно имеющихся у вас знаний (может не хватить опыта и умения). Если нам неизвестны эти решения, то это не значит, что они не могут быть найдены вами. Если условие задачи вам понятно, принимайтесь смело за ее решение. В сомнительных случаях обращай-

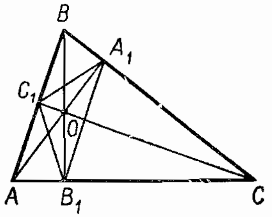


Рис. 68

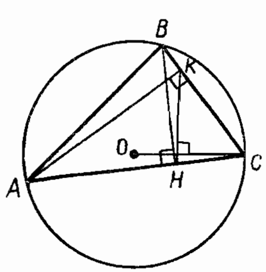


Рис. 69

тесь к учителю. Хотя явно здесь приведено 70 различных задач, но невозможно сосчитать, сколько интересных задач можно составить, видоизменяя условия данных задач или используя «метод» «А нельзя ли...?». Помните об этом и испытайте себя в роли автора новой задачи.

Пожелаем вам удачи!

13.1. Какое четырехзначное число нужно приписать справа к числу 400, чтобы получить число, являющееся полным квадратом?

13.2. Доказать, что три многочлена

$$z_1 = 2x - 3y - 5,$$
$$z_2 = 3x - 4y - 8,$$
$$z_3 = -13x + 18y + 2$$

не могут все вместе иметь положительные значения при одних и тех же значениях x и y.

13.3. Дан треугольник ABC с прямым углом C. M — середина гипотенузы. На $[CM]$, как на диаметре, построена окружность, пересекающая стороны треугольника CB и CA в точках P и K соответственно. Предположим, что точки B и A закреплены, а точка C перемещается в плоскости так, что величина угла ACB остается равной $90°$.

1) Как изменяется отрезок KP?

2) Какие линии описывают точки K и P при движении точки C?

13.4. На оси абсцисс Ox взяты точки A, B, D и E с координатами (2; 0), (8; 0), (4; 0), (—4; 0) соответственно. Пусть точка M принадлежит окружности диаметра DE, но не принадлежит Ox, и пусть точка K — точка пересечения этой окружности с отрезком MB.

Доказать:

1) треугольник OAM подобен треугольнику OBM;

2) точки M, K, O, A принадлежат одной окружности (точка O — начало координат).

13.5. Разложить алгебраическое выражение

$$(y^2 - x^2)^2 - z^2(2x^2 + 2y^2 - z^2)$$

на линейные множители.

13.6. Имеется конечное множество фигур (квадратов, треугольников, кругов). Пара фигур множества зачеркивается и заменяется одной из данных фигур по следующему правилу: (△, ○) = △; (□, ○) = □; (○, ○) = ○, (△, □) = ○; (□, □) = △; (△, △) = □. Доказать, что форма оставшейся фигуры не зависит от порядка выбора пар для очередного зачеркивания. Найти способ наиболее быстрого нахождения формы оставшейся фигуры.

13.7. $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$. Доказать, что других натуральных чисел, удовлетворяющих условию $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^2$ не существует.

13.8. Премировано a участников областной математической олимпиады, b участников городской олимпиады и c участников районной олимпиады. Найти значения a, b, c, если известно, что каждое из этих чисел является простым, а все они связаны соотношением $a + 8 = b(b + c)$.

13.9. Какую линию образует множество центров прямоугольников, вписанных в данный треугольник ABC так, что две вершины каждого прямоугольника лежат на стороне AB, а две другие — на других сторонах треугольника.

13.10. При делении некоторого натурального числа на 45 остаток равен квадрату частного. Установить делимое.

13.11. Известно, что $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Найти: $|\overrightarrow{BC}|$; $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|$; $12|\overrightarrow{AB}| + 12|\overrightarrow{BC}| - 12|\overrightarrow{AC}|$.

13.12. а) Дан произвольный четырехугольник. Докажите, что плоскость можно покрыть без пропусков и наложений четырехугольниками, конгруэнтными данному.

б) Существует ли такой пятиугольник, копиями которого можно замостить плоскость?

в) Тот же вопрос для пятиугольника, никакие две стороны которого не параллельны.

13.13. Найти значения u и v такие, чтобы функция $f(x) = -x^2 + ux + v$ имела при $x = 1$ наибольшее значение, равное 4. Построить график этой функции.

13.14. Найти трехзначное число, равное сумме всех двузначных чисел, которые могут быть образованы цифрами искомого числа.

13.15. Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник. Известно, что $[BC] \parallel [FE] \parallel [AD]$, $[DC] \parallel [AF] \parallel [BE]$ и $[ED] \parallel [BA]$. Доказать векторным методом, что $[CF] \parallel [BA]$.

13.16*. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ обладает весьма интересным свойством $f(f(x)) = x$. Попробуем отыскать другие функции, обладающие этим свойством.

13.17*. Найти функцию, удовлетворяющую условию $f(x) - af\left(\frac{1}{x}\right) = a^x$. Установить области изменения и определения этой функции и построить ее график при $a = 2$.

13.18. Все целые числа произвольным образом разбиты на два множества. Доказать, что хотя бы в одном из этих множеств найдутся три числа такие, что одно из них есть среднее арифметическое двух других.

13.19. Решить графически уравнение $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 6 - x$.

13.20. На плоскости даны 5 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Каждые две из этих точек соединены «красным» или «синим» отрезком; при этом никакие три отрезка не образуют треугольника со сторонами «одного цвета».

Доказать:

1) из каждой точки выходят два «красных» и два «синих» отрезка;

2) «красные» отрезки образуют замкнутую ломаную линию, проходящую через все эти точки.

13.21. Доказать, что число $a = 2 \cdot 7^{4n+1} + 3 \cdot (1 + 7^{4n})$ кратно 10 при всяком целом неотрицательном n.

13.22. Если $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь, то дробь $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ также несократима. Доказать.

13.23. Город расположен на берегу реки; пляж находится на расстоянии s км от города против течения реки. Какое максимальное время нужно затратить для проезда на катере до пляжа и обратно и на ожидание катера, если техническая скорость катера v км/ч, скорость течения реки v_1 км/ч и стоянка катера у пристани не более t мин.?

13.24. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 2 и 4%. Из этого лома получается сплав, содержащий 2,5% никеля. Выразить зависимость (формулой и графиком) между массами лома одного и другого сорта, идущими на приготовление сплава.

13.25. В трапециях с основаниями x и 3 выразить как функцию от x расстояние между серединами диагоналей. Построить график этой функции. Узнать, при каком значении расстояние между серединами диагоналей равно 1.

13.26. $[AB]$ и $[CD]$ — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности. Точка M движется по полуокружности, которая не содержит точки D. Из точки D опущены перпендикуляры $[DE] \perp (MA)$ и $[DP] \perp (MB)$. Какую линию образуют точки пересечения диагоналей четырехугольника $DEMP$ в процессе движения точки M?

13.27*. При каких значениях x дробь $D = \frac{x^2}{2x^2-4x+3}$ принимает экстремальные значения? Найти эти значения дроби D.

13.28. Внутри данного угла отмечены две точки A и B. Построить равнобедренный треугольник так, чтобы вершина его находилась на одной стороне этого угла, основание треугольника — на другой стороне этого угла, а каждая из боковых сторон проходила соответственно через точки A и B.

13.29. Окружность касается извне стороны равностороннего треугольника и «катится» по нему без скольжения. Сколько полных оборотов сделает эта окружность к моменту возвращения в исходную точку, если длина стороны треугольника равна длине окружности? Сколько оборотов сделает при тех же условиях окружность, если она «катится» по сторонам ромба?

13.30. $3 + 1{,}5 = 3 \cdot 1{,}5$. Найти другие числа, обладающие этим свойством.

13.31. Составить из цифр от 0 до 9 пять двузначных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

13.32. Можно ли ходом шахматного коня попасть из левого нижнего угла шахматной доски 8×8 в правый верхний угол, побывав на каждой клетке доски ровно один раз?

13.33. Имеется 12 шаров одинакового диаметра и внешне неотличимых друг от друга. За исключением одного шара масса шаров одинакова. Тремя взвешиваниями на рычажных весах найти этот шар.

13.34. Бактерии имеют такой закон развития: каждая бактерия живет один час и каждые полчаса порождает новую бактерию (всего две бактерии за свою жизнь). Сколько бактерий будет через t ч?

13.35. В городе N имеется 10 000 телефонов с четырехзначными номерами. В центральном районе города — более половины всех телефонов. Доказать, что хотя бы один из номеров центральных телефонов равен сумме номеров двух других центральных телефонов.

13.36. Точка A находится внутри шести окружностей. Доказать, что центр хотя бы одной окружности лежит внутри какой-либо из остальных.

13.37*. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Известно, что высоты треугольника пересекаются на этой окружности. Найти угол при основании треугольника.

13.38. В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, в вершинах его — собаки. Волк может справиться с одной собакой, две собаки справляются с волком. Скорость бега любой собаки равна 1,5 скорости бега волка. Доказать, что у собак существует возможность не выпустить волка за границы поля.

13.39. Даны равенства:

$$29 + 92 = 121$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$47 + 74 = 121$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Как записать в общем виде закон, который в них проявляется? Какую задачу можно сформулировать в связи с этим законом? Найти все двузначные числа, обладающие этим свойством.

13.40. Доказать, что если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M справедливо отношение $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$.

13.41*. На сторонах некоторого четырехугольника построены квадраты. Центры квадратов соединены отрезками; образовался другой четырехугольник. Середины диагоналей исходного и полученного четырехугольников соединены отрезками. Установить вид полученного четырехугольника.

13.42. В круге проведены два радиуса. Построить хорду, делящуюся ими на три равные части.

13.43. Плоскость покрыта сеткой квадратов. Можно ли построить правильный треугольник, вершины которого находились бы в углах этой сетки?

13.44*. Дана треугольная пирамида, у которой плоские углы при вершине прямые. Доказать, что

1) площадь каждой боковой грани есть среднее геометрическое между площадью проекции этой грани на основание пирамиды и площадью основания пирамиды;

2) сумма квадратов площадей боковых граней пирамиды равна квадрату площади ее основания.

13.45*. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - z^3 - xyz = -4, \\ x^3 - y^3 + z^3 - xyz = -8, \\ -x^3 + y^3 + z^3 - xyz = -2. \end{cases}$$

13.46. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 4x + 4y = 0, \\ x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y = 0 \end{cases}$$

и изобразить их в координатной плоскости.

13.47. Доказать двойное неравенство $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (a и b — действительные положительные числа). Какие практические приложения может иметь это неравенство?

13.48*. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые l и l', на которых отмечены отрезки $|AB| = a$ и $|CD| = b$. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ не изменяется при перемещении отрезков AB и CD по прямым l и l'.

13.49*. Сосуд, имеющий форму полушара, наполнен водой, а затем наклонен на угол, равный 45°. Какая часть воды останется в сосуде?

13.50. Доказать, используя векторы, что высоты треугольников (или прямые, которым они принадлежат) пересекаются в одной точке.

13.51. Соединены середины сторон прямоугольника. Определить вид полученной фигуры.

13.52. Построить параллелограмм по серединам четырех его сторон. Можно ли построить ромб по четырем серединам его сторон? Нельзя ли построить ромб по серединам трех его сторон?

13.53*. Тысяча точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено 500 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами которых являются только данные 1500 точек. Сколько получается треугольников?

13.54. Установить, задает ли равенство $|y - 1| = x + 1$ отображение множества

$$X = \{x/x \geqslant 1\}$$

на множество

$$Y = \{y/y \geqslant -3\}.$$

13.55. Длины сторон первого разностороннего треугольника p, k, q, а второго — p', k', q'. Известно, что $\frac{p'}{p} = 3$, $\frac{k'}{k} = 3$, $\frac{q'}{q} \neq 3$. Могут ли эти треугольники быть подобными?

13.56. Вычислить значение выражения $\frac{5y-x}{3x+y} + \frac{2x-y}{3x-y}$, если известно, что $10x^2 - 3y^2 + 5xy = 0$ и $9x^2 - y^2 \neq 0$.

13.57. Составить формулу, определяющую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant c, \\ t - c & \text{при } t \geqslant c. \end{cases}$$

13.58. Перемещение φ не имеет неподвижных точек. Имеет ли неподвижные точки композиция $\varphi \circ \varphi$?

13.59. В прямоугольной системе координат рассматривается прямая, заданная уравнением $ax + by + c = 0$. Найти расстояние от начала координат до этой прямой.

13.60. Пусть $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел.

а) Доказать, что объединение трех множеств

$$M_1 = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 3n, \ldots\}; \; M_2 = \{2, 5, 8, 11, \ldots, 3n - 1, \ldots\}$$
$$\text{и } M_3 = \{4, 7, 10, 13, \ldots, 3n + 1, \ldots\}$$

представляет собой множество всех натуральных чисел, кроме 1.

б) Доказать, что множество всех натуральных чисел (кроме 1), не кратных числу 3, имеет вид

$$M_3 = \{4, 7, 10, 13, \ldots, 3n + 1, \ldots\}.$$

13.61. Привести примеры различных графиков A и B, для которых $A \circ B = B \circ A$.

13.62. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть квадратом натурального числа.

13.63. Для каких натуральных n числа $n^5 + n + 1$ и $n^{11} + n + 1$ являются простыми?

13.64. Даны три множества A_1, A_2, A_3, и для каждого $n \geqslant 4$ определяется множество $A_n = A_{n-1} \cap (A_{n-2} \cup A_{n-3})$. Найти множество A_{10}.

13.65*. Доказать, что в любой компании из шести человек всегда найдется либо трое знакомых друг с другом, либо трое незнакомых друг с другом. (Два члена A и B компании считаются знакомыми друг с другом, если A знаком с B, а B знаком с C.)

13.66*. Из целых чисел от 1 до $3n$ выбрали $n + 2$ каких-то чисел. Доказать, что при $n > 1$ среди выбранных чисел непременно найдутся два таких, разность между которыми больше n, но меньше $2n$.

13.67. Упростите выражение $60\,(61^9 + 61^8 + 61^7 + \ldots + 61^2 + 62) + 1$.

13.68. Доказать, что если $\frac{p}{q} = \frac{q}{k} = \frac{k}{p}$, то $p = q = k$.

13.69. Даны множества

$$A = \{a, b, c, d\}, \; B = \{a, b, 4\}, \; C = \{4, 2, c\}, \; D = \{a, b, 3\},$$
$$E = \{1, b\}.$$

Найти a, b, c, d, зная, что $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $E \subset B$.

13.70. Чему равно значение выражения $a^{17} - 8a^{16} + 8a^{15} - 8a^{14} + \ldots - 8a^2 + 8a + 8$ при $a = 7$?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

§ 1. КАКИЕ ЗАДАЧИ МЫ НЕ УМЕЕМ РЕШАТЬ

1.2. а) $x^2 - 3x - 7x + 21 = x(x-3) - 7(x-3) = (x-3)(x-7)$; $(x-3)(x-7) = 0$, откуда $x = 3$, $x = 7$.

б) $x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$; $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$; $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4}$.

Это уравнение в множестве действительных чисел не имеет решения, т. е. множество корней составляет пустое множество.

1.3. При решении примените свойства осевой симметрии.

1.4. Занумеруем мешки цифрами 1, 2, 3,..., 10. Возьмем из 1-го мешка 1 монету, из 2-го мешка — 2 монеты, из 3-го мешка — 3 монеты и т. д. Выбрано 55 монет. Их масса должна быть равна 550 г (если бы все монеты были настоящими). Но среди монет есть фальшивые, поэтому их истинная масса $m > 550$. Разность $m - 550$ укажет, в каком мешке монеты фальшивые; например, при $m = 553$ г имеем $553 - 550 = 3$ (номер мешка).

1.8. Одно из решений: «Солдат с собакой прошли мимо пролома в заборе».

§ 2. УЧИСЬ НА ЗАДАЧЕ

2.2. Перечертите рисунок 5. Убедитесь в том, что $\triangle MAB$ и $\triangle MCD$ не будут лежать «внутри» четырехугольника $ABCD$.

2.3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$.

Наибольшего значения произведение xy достигает при условии, что $x = y$, если сумма $x + y$ есть величина постоянная.

Из условия $x + y = 6$ следует, что $x = y = 3$. Дробь $\frac{x+y}{xy}$ примет наименьшее значение при постоянном числителе, если знаменатель достигает наибольшего значения, т. е. если $x + y = 6$, то $xy = 9$ и $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

2.4. Теорему, которую мы использовали при решении задачи 3, можно применять и для трех переменных x, y, z:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz}.$$

xyz примет наибольшее значение, если $x = y = z = 3$, так как $x + y + z = 9$.

Таким образом, $\frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 1$.

2.5. Мы знаем, что точный квадрат в разложении дает $A^2 \pm \pm 2AB + B^2$. В рассматриваемой сумме можно предположить $B^2 = 1$, значит, нам надо доказать, что

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = A^2 \pm 2A + 1.$$

Первое слагаемое $A^2 \pm 2A$ представить в виде $A(A \pm 2)$.

Выберем для умножения «удобные» пары множителей: $n(n+3)$ и $(n+1)(n+2)$, чтобы в выражении $A(A \pm 2)$ выделить A:

$$(n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2).$$

Задача решена!

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + \\ + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

2.6. I с п о с о б. Разложим $m^3 - m$ на множители $m^3 - m = = m(m^2 - 1) = m(m-1)(m+1)$.

Расположим числа по порядку: $(m-1)m(m+1)$. Но тогда задача решена: из трех **последовательных** натуральных чисел одно обязательно делится на 3, а значит, делится на 3 и все произведение.

II с п о с о б. Мы знаем, что если число делится на 3, то его можно записать в виде $m = 3k$. Если же число не делится на 3, то при делении может быть в остатке или 1, или 2, тогда число можно записать в виде $m = 3k + 1$ или $m = 3k + 2$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $m = 3k$, тогда

$$m^3 - m = (3k)^3 - 3k = 3^3 \cdot k^3 - 3k = 3 \cdot (3^2 \cdot k^3 - k) \,\vdots\, 3.$$

Рассмотрим второй случай: $m = 3k + 1$, подставим значение m в данное выражение

$$m^3 - m = (3k+1)^3 - (3k+1) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - \\ - 3k - 1 = 27k^3 + 27k^2 + 6k = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k) \,\vdots\, 3.$$

Рассмотрим третий случай: $m = 3k + 2$.

$$(3k+2)^3 - (3k+2) = 27k^3 + 54k^2 + 33k + 6 = \\ = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2) \,\vdots\, 3.$$

2.7. $\overline{123\ldots k} \cdot 9 + (k+1) = \underbrace{\overline{111\ldots1}}_{k+1 \text{ раз}}$*.

Возможные задачи: а) доказать это равенство; б) какие, аналогичные данному, свойства натуральных чисел вам известны и т. п.

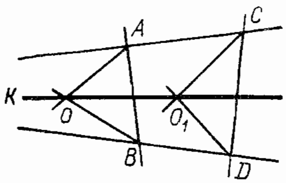


Рис. 70

§ 3. КАК НАЧИНАТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

3.1. I с п о с о б. Провести две произвольные прямые AB и CD, пересекающие стороны угла (рис. 70).

---

* Запись $\overline{111\ldots1}$ объяснена на с. 26.

Построить биссектрисы двух углов в получившихся треугольниках ABK и CDK (K — вершина, которой нет на рисунке).

O и O_1 — точки пересечения биссектрис.

(OO_1) — искомая биссектриса (направление полета). Правильность этого построения докажите самостоятельно.

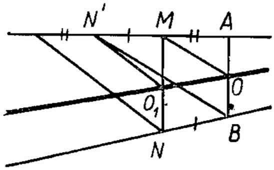


Рис. 71

II способ. 1) $(AB) \parallel (MN)$ (рис. 71);

2) $\frac{|AO|}{|OB|} = \frac{|AM|}{|NB|}$ и $\frac{|MO_1|}{|O_1N|} = \frac{|AM|}{|NB|}$;

3) (OO_1) — биссектриса.

3.2. После очевидных преобразований данное уравнение приводится к виду $x^2(a-b) - x(a-b)(a+b) = 0$.

Если $a = b$, то уравнению удовлетворяет любое число. Если $a \neq b$, то корни уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = a + b$; поэтому корень будет единственным только при $a \neq b$; $a \neq b$ и $a + b = 0$, т. е. при $a = -b \neq 0$.

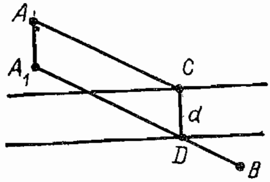


Рис. 72

3.3. Решим сначала частную задачу.

Где следует построить переправу через канал, чтобы пункты A и B были соединены кратчайшим путем?

Допустим, что пункты A и B расположены так, как показано на рисунке 72. Выполним параллельный перенос точки A в направлении $[AA_1)$ на расстояние d (где d — ширина канала). Строим прямую (A_1B), эта прямая пересекает канал в точке D. Строим $[CD]$, перпендикулярный сторонам канала. Путь $ACDB$ искомый.

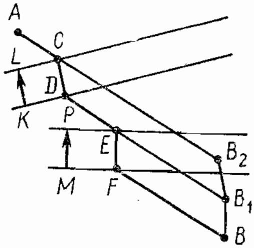


Рис. 73

Теперь решаем искомую задачу (рис. 73).

Строим образ точки B при параллельном переносе, отображающем точку M на точку P, затем образ точки B_1 при параллельном переносе, отображающем K на L. Путь $ACDEFB$ искомый.

3.4. $\widehat{EMD} = 180° - (\beta + (90° - \beta)) = 90°$ (рис. 74).

$|EM| = |MD|$ (как диагонали конгруэнтных прямоугольников), а значит, $\triangle EMD$ прямоугольный и равнобедренный. $\widehat{MDE} = \alpha = 45°$, $\gamma + \beta = \alpha = 45°$. Откуда $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

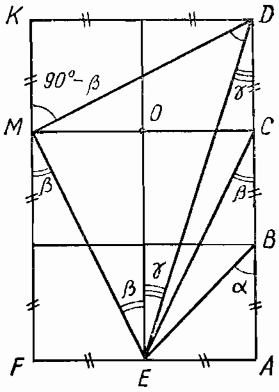


Рис. 74

3.5. $A = 3\cdot\left(\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{7\cdot9}+\frac{2}{9\cdot11}+\ldots+\frac{2}{19\cdot21}\right)=$
$=3\left(\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right)=$
$=3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)=3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{21}\right)=\frac{16}{35}.$

§ 4. РЕШАЙ ВМЕСТО ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДРУГУЮ

4.1. Используя частные задачи (рис. 22), например б) и в), составим следующую задачу: «Найти множество точек, равноудаленных от сторон угла и от концов отрезка, принадлежащего этому углу».

4.2. Частное решение: если точки A, B, C, D расположены так, как показано на рисунке 75, то искомой точкой является точка S (пересечение срединных перпендикуляров к отрезкам $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$).

В общем случае задача не имеет решения.

4.3. См. рис. 76.

4.4. П. з. (типа «дети») — для двузначного числа: $5\,\overline{ab}=\overline{ba}$, откуда $50a+5b=10b+a$, или $49a=5b$. Для самого малого значения $a=1$ и самого большого значения $b=9$ имеем $49=45$. Задача не имеет решения среди двузначных чисел.

П. з. (типа «родители»). Показать, что не существует натурального числа, которое при перестановке начальной цифры его записи в ее конец увеличится в 5 раз.

В самом деле, так как при увеличении числа в 5 раз число цифр его не изменяется, то первая цифра записи этого числа есть 1. Если же 1 станет последней цифрой его записи, то число не может делиться на 5. Утверждение доказано. Более общую задачу оказалось решать легче.

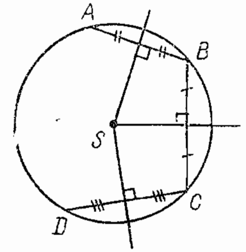


Рис. 75

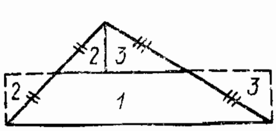


Рис. 76

4.5. Из условия задачи легко обнаружить, что требуемая ситуация должна удовлетворять двум условиям:

1) вышка должна находиться на одинаковом расстоянии от дороги и от озера;

2) озеро должно быть видно с вышки под прямым углом.

Теперь нетрудно составить две подзадачи, родственные данной:

п. з. (1). Построить точку, равноудаленную от двух прямых (дороги и озера);

п. з. (2). Построить точку, из которой данный отрезок (озеро) виден под прямым углом.

Каждая из этих подзадач решается довольно легко.

Решение п. з. (1) — это не что иное, как решение первой задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе. Вспомним: построить прямую, равноудаленную от двух данных (рис. 77).

Сколько решений имеет подзадача 1?

Решение п. з. (2). Искомая точка (вышка) должна находиться на окружности, построенной на данном отрезке (озере), как на диаметре (рис. 78, *а*).

Сколько решений имеет п. з. (2)?

Теперь надо взяться за решение нашей задачи: здесь оба требования должны соблюдаться одновременно. Но тогда искомая точка должна находиться одновременно как на биссектрисе угла, образованного двумя прямыми (озером и дорогой), так и на окружности из п. з. (2). Это может произойти только в случае их взаимного пересечения (рис. 78, *б*).

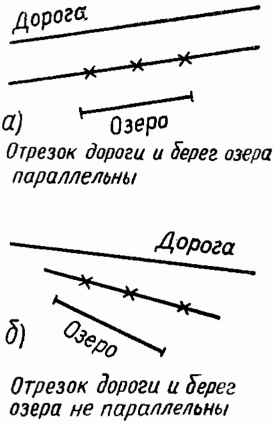


Рис. 77

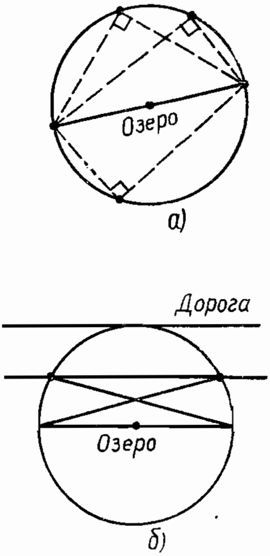


Рис. 78

§ 5. РАССУЖДЕНИЕ ПОМОГАЕТ ДОГАДКЕ

5.1. Из $x^2 + x + 1 = 0$ следует, что $(x^2 + x + 1)(x - 1) = 0$, т. е. $x^3 - 1 = 0$, или $x^3 = 1$. Поэтому $f(x_0) = 1979$ при $x_0^3 = 1$.

5.2. Предположим, точек пересечения две*. Докажем, что прямых будет только три. Действительно, пусть имеется всего две точки пересечения C и D и пусть a и b — прямые, пересекающиеся в точке C, а d — прямая, не проходящая через C (такая прямая есть, иначе все прямые пересекались бы в C).

Прямая d пересекает лишь одну из прямых a, b, скажем a, в точке D, другой прямой b она параллельна (рис. 79, *а*).

Больше нельзя провести ни одной прямой, не увеличивая числа точек пересечения.

Теперь докажем, что на месте многоточия не может стоять число, отличное от 2. Если точка пересечения одна, то прямых может быть любое число: все они проходят через эту точку. Если число точек пересечения $n > 2$, то число прямых определено неоднозначно.

---

* Математические соревнования. Геометрия, БФМШ. М., 1974, вып. 4.

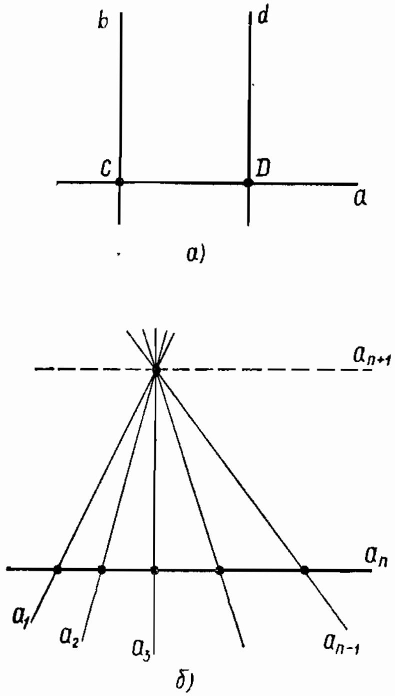


Рис. 79

Например, на рисунке 79, б можно провести прямую a_{n+1} параллельно a_n, а можно не проводить, на число точек пересечения это не влияет.

Ответ: $n = 2$.

5.3. $x = 5 - y$, причем $y \leqslant 5$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5-y} + \frac{1}{y} = \frac{y+5-y}{y(5-y)} = \frac{5}{y(5-y)}.$$

Отсюда $y \neq 5$, $y \neq 0$, $y = 1, 2, 3, 4$. $y = 2$, $x = 3$ или $y = 3$, $x = 2$, тогда

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Рассмотрели случай, когда x, y — натуральные числа.

Если x, y — дробные числа, то выражение $-y^2 + 5y$ имеет максимум при $y = (0 + 5) : 2 = 2{,}5$ равный $-6{,}25 + 12{,}5 = 6{,}25$. Тогда искомое наименьшее значение равно $\frac{500}{625} = \frac{4}{5}$.

5.4. Ключом к решению является догадка о том, что каждый из треугольников состоит из двух одинаковых прямоугольных треугольников, приложенных друг к другу равными катетами двумя способами.

5.5. Если $\widehat{A} = \widehat{B}$, то $|CM| = |CL|$.

Пусть $\widehat{A} < \widehat{B} \Rightarrow \frac{2\widehat{B} + \widehat{C}}{2} > \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 90°$, но $\widehat{MLC} = \widehat{B} + \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{MLC} > 90°$ и $|CM| > |CL|$, т. е. $|CM| \geqslant |CL|$ (рис. 80).

§ 6. СОСТАВЛЯЙ СВОИ ЗАДАЧИ

6.1. Поразмыслим над этой ситуацией.

1) Всегда ли биссектриса угла находится между медианой и высотой?

2) Определяют ли медиана, биссектриса и высота треугольник так, как, например, периметр определяет три его данные стороны?

3) Можно ли вычислить угол между биссектрисой и медианой, биссектрисой и высотой, зная углы треугольника? И т. д.

Остается только перефразировать эти вопросы, оформив текст в виде задач, да еще каких задач! Сделаем это. Впрочем, вы сможете с этим справиться сами. Вот удастся ли вам быстро решить эти задачи, мы не уверены.

6.2. Например: «А нельзя ли построить треугольник, если заданы середины двух его сторон и прямая, которой принадлежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон?»

Р е ш е н и е. Пусть задана прямая l, на которой лежит биссектриса угла B, точка E — середина стороны BC и точка F — середина стороны AC треугольника ABC. Нетрудно указать одну точку, которая заведомо лежит на прямой AB, это точка D, симметричная точке E относительно l. Кроме того, мы знаем и направление прямой AB: она параллельна EF. Построив по этим данным прямую AB, мы последовательно найдем вершины B, C и A. (Искомый треугольник существует тогда и только тогда, когда луч EF пересекает прямую l. При этом условии треугольник определяется единственно.)

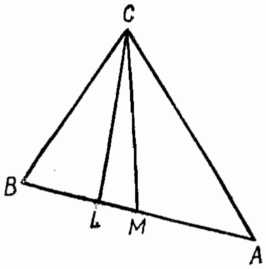


Рис. 80

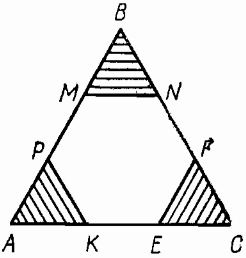


Рис. 81

6.3. 1) Обозначим $|AC| = a$ и $|BN| = a_1$ (рис. 81);

2) $\triangle APK \cong \triangle MBN \cong \triangle EFC$ (треугольники равносторонние); 3) $a_1 = \frac{1}{3}a$; 4) $3S_{\triangle APK} = \frac{3\left(\frac{1}{3}a\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$;

5) $3S_{\triangle APK} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

§ 7. КАК ОФОРМЛЯТЬ ЗАПИСЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

7.1. Предположим, что некоторые из 500 000 сосен имеют попарно различное число иголок. Тогда среди 500 001 сосны всегда найдутся две такие, у которых число иголок одинаково, так как на каждой сосне (по условию) не более 500 000 иголок. Текстовая запись решения весьма удобна.

7.2. Для оформления решения этой задачи и для поисков самого решения удобна запись в виде отрезковой диаграммы (рис. 82).

7.3. Решение и оформление его удобно провести в виде схемы-графа, из которой легко виден ответ на вопрос задачи — каждый игрок сыграл по две партии (рис. 83).

7.4. Составим наглядную схему условия задачи (рис. 84). Из рисунка ясно, что по 2 стороны каждого ломтика — всего 6 сторон; на сковородке умещаются два ломтика, значит, понадобится 3 мин.

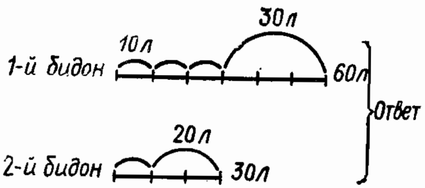


Рис. 82

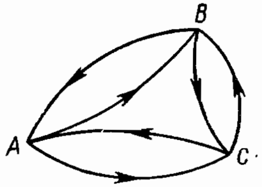


Рис. 83

§ 8. ИЗУЧИ САМОГО СЕБЯ

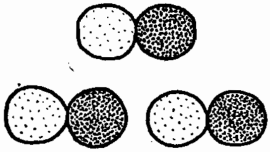


Рис. 84

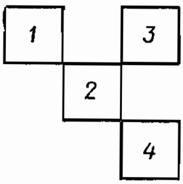


Рис. 85

8.1. Например, туча — куча — кура — кара — пара — парь — гарь — гать — геть— деть — день.

8.2. 29 треугольников.

8.3. См. рис. 85.

8.5. Рассмотрим промежуток времени в T с между двумя последовательными моментами времени, в которые первое тело «догоняет» второе. За это время первое тело сделает a оборотов, второе тело сделает $a - 1$ оборотов (a — не обязательно натуральное). Если первое тело делает один оборот за x с, то второе тело делает один оборот за $(x + 2)$ с.

Тогда $a \cdot x = (a - 1) \cdot (x + 2)$, откуда $a = (x + 2) : 2$. В то же время $x \cdot a = 12$, и потому $x(x + 2) = 24$. Значение $x = -6$ не годится; значение $x = 4$ есть ответ на вопрос задачи.

8.6. а) 6; б) 14; в) $324 = (449 + 523) : 3$.

8.7. 154; разности пар рядом стоящих чисел: 15, 17, 19, 21.

8.8. Искомая фигура X, так как она является составной частью первой из фигур в третьей строке.

8.9. 1) $639 = 6 \cdot 39 + 63 \cdot 9 - 6 \cdot 3 \cdot 9$; $688 = 6 \cdot 88 + 68 \cdot 8 - 6 \cdot 8 \cdot 8$.

2) $18 + 39 = 57$, а $1 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 5 \cdot 7$; $19 + 37 = 56$, а $1 \cdot 9 + 3 \cdot 7 = 5 \cdot 6$.

3) $18^3 = 5832$, а $5 + 8 + 3 + 2 = 18$; аналогично для 26^3, 27^3.

Другие числовые «неожиданности»:

а) $13 \cdot 52 + 13 \cdot 52 = 1352$; б) $20 + 25 = 45$, а $45^2 = 2025$; в) $1827 = 21 \cdot 87$, а $2187 = 27 \cdot 81$.

§ 9. КАК МЫ ДУМАЕМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

9.1. Пусть P и Q — середины двух дорог из A в B (рис. 86). R — точка, делящая пополам кольцевой маршрут YY; a, b, c, d — расстояния $|AX|$, $|BX|$, $|AY|$, $|BY|$.

По условию $c < d$ и город X лежит, очевидно, на участке PRB (иначе XAY короче XBY). Кроме того, по выбору точек P, Q, R участки PR и QY равны и $|RB| = |AY| \Longrightarrow b < c$. Участки a и d больше половины пути из A в B, c меньше этой половины, поэтому $c < a$ и $c < d$. По условию $a + b = c + d$. Так как $b < c$, то $a < d$. Итак, $b < c < d < a$.

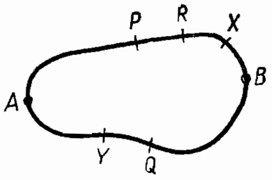


Рис. 86

9.2. Рассмотрим взаимное расположение подмножеств A и B.

1) $A \subset B$, 2) $B \subset A$, 3) $A = B$, 4) $A \cap B = \varnothing$, 5) $A \cap B \neq \varnothing$.

Анализируя эти случаи, находим, что условие задачи выполнено, если $X = B$; проверим:

$$\begin{matrix} X \cap A = X, \\ X \cup B = X \end{matrix} \Longrightarrow X = B.$$

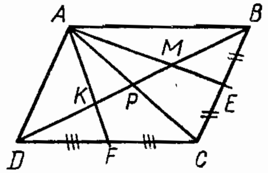


Рис. 87

Частный случай, когда $A = B = X$.

9.3. а) $|DP| = |PB|$, $|AP| = |PC|$, значит, $[DP]$ и $[BP]$ — медианы треугольников ACD и ABC (рис. 87).

б) $[AF]$ и $[AE]$ также медианы этих треугольников, и потому, по свойству медианы треугольника, имеем $|BM| = 2\,|PM|$, $|DK| = 2\,|KP|$, следовательно, $|DP| = |DK| + |KP| = 3\,|KP|$, а $|PB| = |PM| + |BM| = 3\,|PM|$.

в) $|DP| = |PB|$, откуда $|KP| = |PM|$, и тогда $|DK| = |KM| = |BM|$.

9.4. Рассмотрим случай уплаты денег четырьмя пассажирами из 25. Наименьшее число монет таково: I — 20, II — 15, III — (10 + 10), IV — 15; соответственно сдача будет такова: 15, 10, 15, 10. Если мы увеличим число пассажиров в 6 раз, то 24 пассажира уплатят за проезд $20 \cdot 6$ к. = 120 к. Оставшийся пассажир положит в кассу 15 к.+10 к. и возьмет 20 к. сдачи. 32 монеты есть наименьшее число монет, необходимых для оплаты проезда, так как сумму денег 1 р. 25 к. составит в этом случае наименьшее возможное число монет — 7 монет: $5 \cdot 20 + 15 + 10$.

9.5. Пусть n — число прямых, N_n — число частей, на которые плоскость разделилась n прямыми.

Рассмотрим несколько случаев для n (рис. 88, *а*, *б*, *в*, *г*).

Из рисунка 88 видно, что $N_n = 3n - 2$. Значит, $N_{100} = 298$.

9.6. Прямая, пересекающая $(n - 1)$ прямые и проведенная параллельно n-й прямой, увеличивает число N на n (см. чертежи к задаче 5).

Значит, надо провести 101-ю прямую, пересекающую 99 прямых, параллельно 100-й прямой, чтобы число N увеличилось на 100.

9.7. ***Вариант А***

1. $y : x = 1$, так как $y : y = y$ и $x \cdot x = x$ возможно только при $y = 1$ и $x = 1$.

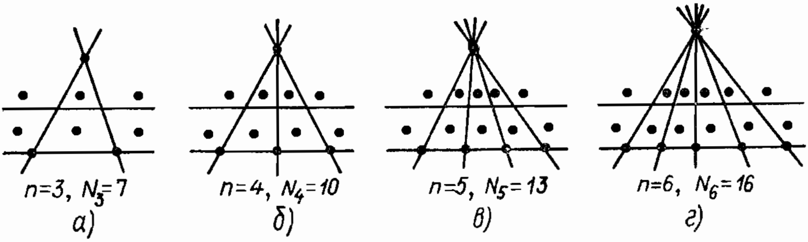


Рис. 88

2. 30.

3. Верно. Распределительный закон умножения (на -1) относительно вычитания и переместительный закон.

4. Сколько времени прошло от начала суток? x ч прошло от начала суток; $\frac{x}{7}$ ч осталось до конца суток.

$$x + \frac{x}{7} = 24 \Rightarrow x = 21.$$

5. x — число 3-рублевых денежных знаков (рублевых; 5-рублевых).

$$x + 3x + 5x = 90 \Rightarrow x = 10.$$

Сумма, представленная 3-рублевыми знаками, $3 \cdot 10 = 30$ р.

6. 17(76)21.

Правило: $(12 + 16) \cdot 2 = 56$, $(17 + 21) \cdot 2 = 76$.

Вариант Б

1. $x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x < 0$ или $x > 1$.

2. 30.

3. 100, так как четных чисел, которые могут стоять на первом месте в числе, четыре (2, 4, 6, 8); на 2-м и 3-м местах — пять (0, 2, 4, 6, 8).

25 чисел, у которых на первом месте стоит 2. Для 4, 6, 8 тоже по 25 чисел. Всего 100.

4. В шахматном турнире приняли участие 5 школьников. Каждый должен сыграть со всеми остальными. Сколько матчей будет проведено в этом турнире (рис. 89)?

О т в е т: 10 матчей.

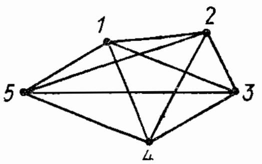


Рис. 89

5. Пусть x — число рублевых (3-рублевых или 5-рублевых) денежных знаков.

$20 < x + 3x + 5x < 30 \Rightarrow x = 3$.

В кассе 27 р.

6. $x = 35$, так как $1 + 7 = 8$; $8 + 8 = 16$; $16 + 9 = 25$; $25 + 10 = 35$.

10.3. Смотри решение этой задачи в тексте § 11.

10.4. Например: «Какой формы лист фанеры дает бо́льшую экономию материала при выпиливании из него дна для бочки?»

О т в е т. Теоретически — правильный n-угольник. Чем больше n, тем больше экономия материала. Практически — квадрат, так как шестиугольник, двенадцатиугольник и т. д. тоже еще надо вырезать.

10.5. Минутная стрелка пробегает мимо 60 делений циферблата за то же самое время, за которое часовая стрелка проходит 5 таких делений. Следовательно, маленькая стрелка движется (60 : 5) в 12 раз медленнее, чем большая. Большая пройдет 1 деление, а маленькая — $\frac{1}{12}$ деления. Значит, за 1 мин большая опережает маленькую на $\left(1-\frac{1}{12}\right)\frac{11}{12}$ деления. $5:\frac{11}{12}=\frac{60}{11}$ (мин) — большая догонит маленькую.

О т в е т: командир должен вскрыть конверт в 1 ч 5 мин $27\frac{3}{11}$ с.

Можно составить серию задач, пользуясь «методом» «А нельзя ли...?».

Приведем пример одной из таких задач. «Известно, что минутная и часовая стрелки совпадают в 12 ч, в 1 ч 5 мин $27\frac{3}{11}$ с и т. д. А нельзя ли узнать, когда они направлены в противоположные стороны?»

Р е ш е н и е. Разность между оборотами, сделанными минутной и часовой стрелками, равна $\frac{1}{2}$ полного оборота, взятого нечетное число раз, $t-\frac{1}{12}t=\frac{1}{2}(2n-1)$; $t=\frac{6}{11}(2n-1)$ (ч), $n=$ $=1, 2, 3...$

10.6. Докажите сначала, что если в $\triangle ABC$ соединить основания высот, то получится треугольник, для которого стороны и высоты данного $\triangle ABC$ являются биссектрисами внутренних и внешних углов.

Предположим теперь, что нам известны точки E и F — основания высот BE и CF треугольника ABC, а также прямая l, на которой лежит высота AD. Мы должны указать на прямой l такую точку D, чтобы в $\triangle DEF$ прямая l шла по биссектрисе. Для этого достаточно построить точку E_1, симметричную точке E относительно прямой l, и принять за D точку пересечения прямых E_1F и l. Докажите, что прямая BC должна служить биссектрисой внешнего угла D $\triangle DEF$, а прямые AC и AB — либо обе биссектрисами внутренних, либо биссектрисами его внешних углов E и F. Искомых треугольников ABC существует два, если прямая l не проходит через середину отрезка EF, бесконечно много, если она проходит

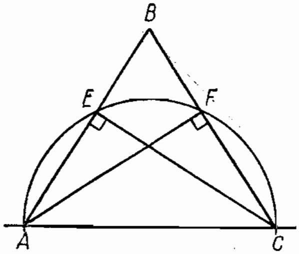


Рис. 90

и перпендикулярна этому отрезку, и нет ни одного, если она проходит, но не перпендикулярна.

Серия задач.

Например, «Построить треугольник, если заданы прямая, на которой лежит его основание, и две точки, являющиеся основаниями высот, опущенных на боковые стороны».

Р е ш е н и е. Докажите, что в любом $\triangle ABC$ окружность, построенная на основании AC, как на диаметре, проходит через точки E и F — основания высот, опущенных на боковые стороны (рис. 90). Пользуясь данными задачи, т. е. зная точки E, F и прямую l, на которой лежит AC, легко восстановить эту окружность: ее центр будет лежать на пересечении прямой l и перпендикуляра, проведенного через середину отрезка EF. Построив эту окружность, мы найдем точки пересечения ее с l. Одну из них можно принять за A, другую — за C. Третья вершина B треугольника находится как точка пересечения прямых AE и CF.

Проверьте, что если отрезок EF не перпендикулярен прямой l, то существуют два треугольника, удовлетворяющих требованиям задачи, а если $EF \perp l$, то их либо нет совсем, либо (если точки E и F симметричны относительно прямой l) существует бесконечно много.

10.7. Надо задавать вопросы так, чтобы каждый последующий вопрос уменьшал вдвое количество остающихся возможных вариантов. При такой системе, чтобы угадать один из 2^n вариантов, достаточно n вопросов.

Всего имеется 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, тогда, возможных телефонных номеров имеем $10^5 \cdot 10^5 > (2^3)^5$, т. е. $10^5 > 2^{15}$. Значит, $10^5 < 2^{17}$ хватит 17 вопросов. Сами вопросы можно задавать по-разному. Например, можно спросить: «Верно ли, что ваш номер больше 50 000?» Если ответили «да», то второй вопрос может быть такой: «Больше ли он 75 000?» И т. д.

§ 11. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

11.1. Обозначим на схеме (рис. 91) знаками «+» и «—» рыцарей различных станов. Мысленно исключим всех рыцарей одного стана, сидящих рядом, кроме последнего (против часовой стрелки); получим, что число рыцарей первого и второго станов стало одинаковым, а вместе — число четное. Мы исключили всех рыцарей, справа от которых сидел друг, и оставили всех рыцарей, слева от которых сидел враг.

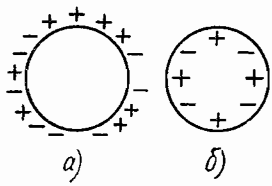


Рис. 91

По условию число их одинаково (четное), таким образом общее число всех рыцарей делится на 2 и еще раз на 2, т. е. на 4.

11.2. Допустим, что шарик находится в точке C. Из рисунка 92, *а* ясно движение шарика. Поэтому, поместив второй шарик на прямой (SN), ответим на вопрос задачи. Однако шарик S можно поместить и в некоторых точках прямых, параллельных диагонали (AB), и на самой диагонали. Исследование поможет найти эти точки.

Если имеем прямоугольный бильярд, то движение первого шарика (B) показано на рисунке 92, *б*. Покажем, что (BK) не параллельна прямой (PN). Для этого достаточно доказать, что угол 1 не конгруэнтен углу 2. $\angle 2 \cong \angle DNK$, в свою очередь, $\angle DNK \cong \angle KB_1B$ (так как $(FD) \parallel (BB_1)$). $\widehat{1} = 2 \cdot \widehat{KB_1B}$ (так как $\angle 1$ — внешний для $\triangle BKB_1$). Имеем, $\angle 2 \cong \angle DNK$, следовательно, $\angle 2 \cong \angle KB_1B$, $\widehat{1} = 2 \times \times \widehat{KB_1B}$. Значит, $\widehat{1} > \widehat{2}$, тогда (BK) не параллельна (PN).

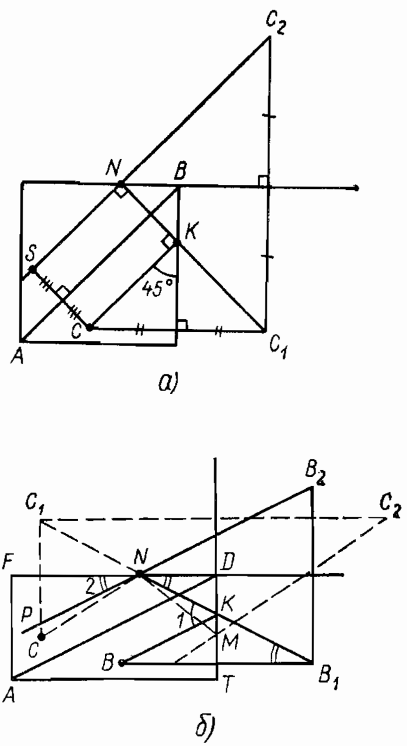


Рис. 92

Таким образом, по прямой (PN) второй шарик пускать нельзя (по условию задачи второй шар должен двигаться по прямой, параллельной (AD)). Если же шарик C пустить в нужном направлении, даже так, чтобы он ударился о борт (FD) в точке N, то, как было показано раньше, (C_2M) не будет параллельна прямой (BK). Следовательно, для прямоугольного бильярда задача не имеет решений.

11.3. Рассмотрим решение этой задачи.

а) Пусть сопротивления проводников равны соответственно R_1 и R_2 Ом. По условию задачи можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = a, \\ \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{b}. \end{cases}$$

б) Преобразуем эту систему, помня, что $R_1 > 0$, $R_2 > 0$.

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = a, \\ \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} = \dfrac{1}{b}; \end{cases} \qquad \begin{cases} R_1 + R_2 = a, \\ R_1 \cdot R_2 = ab. \end{cases}$$

в) Используя теорему Виета, приходим к уравнению $x^2 - ax + ab = 0$, корни которого x_1 и x_2; $R_1 = x_1$, $R_2 = x_2$ или $R_1 = x_2$, $R_2 = x_1$, причем

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a(a-4b)}}{2}, \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a(a-4b)}}{2}.$$

г) Оба корня действительны при условии $a - 4b \geqslant 0$, или $a \geqslant 4b$, или (так как $b > 0$) $\frac{a}{b} \geqslant 4$; оба корня являются решением системы, если они положительны; это условие соблюдается, так как $R_1 + R_2 = a > 0$, $R_2 \cdot R_1 = ab > 0$. При $a < 4b$ решений нет.

д) Практический вывод. Общее сопротивление двух параллельно включенных в сеть проводников уменьшится по крайней мере в 4 раза по сравнению с сопротивлением тех же проводников, включенных последовательно. Используя полученный результат, мы можем с полным основанием утверждать следующее: для того чтобы при параллельном соединении проводники имели сопротивление, например, в 0,5 Ом, необходимо взять такие два проводника, общее сопротивление которых было бы не менее 2 Ом.

е) Приложение к теории.

1) Если заменить в $\frac{a}{b} \geqslant 4$ $a = R_1 + R_2$ и $\frac{1}{b} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, то получим при $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ неравенство $(R_1 + R_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \geqslant 4$.

2) bk.

3) В качестве очевидных решений этой задачи можно также получить неравенства

$$\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} \geqslant 2 \quad \text{или} \quad K + \frac{1}{k} \geqslant 2 \quad \left(\text{если} \quad \frac{R_1}{R_2} = K\right).$$

Последнее неравенство имеет особый интерес (и богатые приложения), так как вскрывает важное свойство двух взаимно-обратных чисел.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Рис. 93

11.4. Раскрасим доску в четыре цвета, как указано на рисунке 93 (цифры — номера цветов). Тогда каждая плитка замостит четыре клетки со всеми четырьмя цветами. Но клеток, окрашенных в 1-й цвет, —25, во 2-й — 26, в 3-й — 25, а в 4-й — 24. Отсюда следует невозможность указанной укладки.

11.5. См. рис. 94.

11.7. Пусть для того, чтобы фабрика получила наибольшую прибыль, надо изготовить x пар

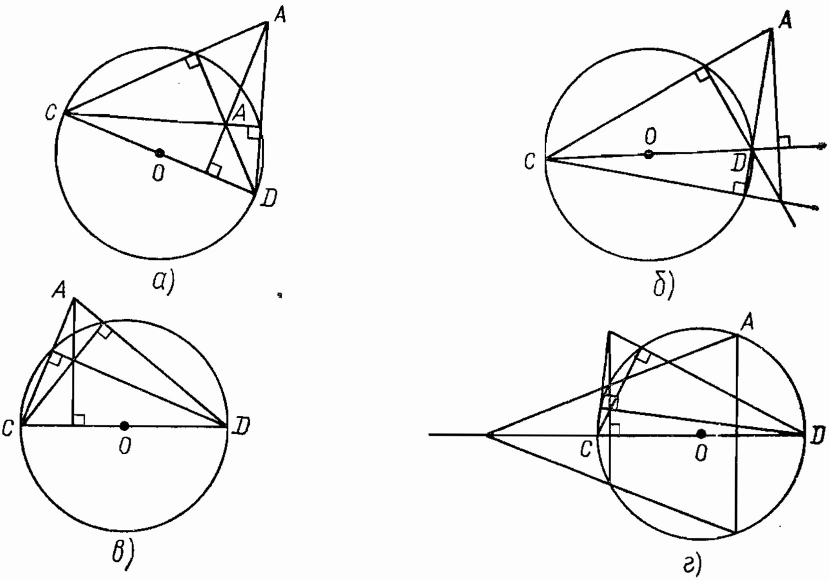


Рис. 94

туфель для мальчиков и y пар туфель для девочек. Тогда имеем:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leqslant 100, \\ 2x \leqslant 60, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Общая прибыль равна $F = 5x + 3y$ денежных единиц.

Решая систему, получим: $x = 30$, $y = 5$. Откуда наибольшая прибыль равна:

$$F = 5x + 3y = 5 \cdot 30 + 3 \cdot 5 = 165$$

при выпуске 30 пар туфель для мальчиков и 5 пар для девочек.

§ 12. КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

12.1. Вычертим произвольный треугольник (лучше разносторонний и разноугольный, так как, изобразив равнобедренный или прямоугольный треугольник, мы можем принять какое-либо частное его свойство за общее).

Высоты $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке (точке O). Эта же точка является точкой пересечения биссектрис $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 68).

Достаточно показать, что $\widehat{C_1A_1A} = \widehat{AA_1B_1}$ (для других углов доказательство будет аналогичным, так как взята произвольная высота AA_1).

Если A_1A — биссектриса угла $C_1A_1B_1$, то она будет осью симметрии для этого угла.

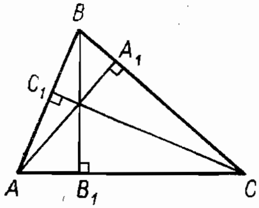


Рис. 95

Для того чтобы доказать, что AA_1 есть биссектриса угла $C_1A_1B_1$, необходимо убедиться в равенстве величин углов C_1A_1A и AA_1B_1. Равенство величин углов можно доказать, если:

а) углы входят в конгруэнтные или подобные между собой треугольники;

б) углы лежат в плоскости и имеют соответственно параллельные или перпендикулярные стороны;

в) углы являются одноименными углами относительно некоторой окружности и опираются на одну и ту же дугу этой окружности;

г) величины углов равны порознь одной и той же величине угла (свойство транзитивности равенства);

д) углы имеют общую сторону, которая является осью симметрии угла, величина которого равна сумме величин данных углов.

Наиболее перспективными кажутся направления:

1) поиск пары подобных друг другу треугольников;

2) попытка «привязать» оба угла к одной и той же окружности;

3) использовать идею симметрии.

П.з. (1). Дан треугольник ABC, в котором проведены высоты. Найти пары соответственно подобных треугольников (рис. 95).

Таковы пары:

$$\triangle ABA_1 \sim \triangle C_1BC,$$
$$\triangle AB_1B \sim \triangle AC_1C,$$
$$\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$$

(прямоугольные, имеющие общий острый угол). Откуда, в частности,

$$\frac{|A_1A|}{|CC_1|} = \frac{|BA_1|}{|BC_1|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

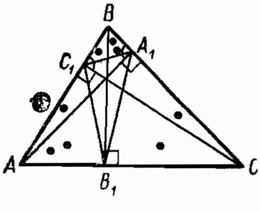


Рис. 96

П. з. (2). Основания высот $\triangle ABC$ соединены. Найти пары подобных между собой треугольников (рис. 96) (угол B — общий; $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BA_1|}{|BC_1|}$; имеет место признак подобия треугольников). Таким образом, решение п. з. (1) обеспечивает решение п. з. (2) (рис. 97).

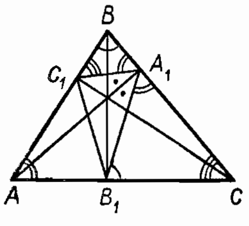


Рис. 97

В свою очередь п. з. (2) обеспечивает решение данной задачи (если от равных величин вычесть поровну, то останутся равные величины).

1) $\triangle ABA_1 \sim \triangle C_1BC$ $(\widehat{BA_1A} = \widehat{BC_1C} = d$, $\angle ABC$ — общий) по признаку подобия прямоугольных треугольников (рис. 98).

2) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|BA_1|}{|BC_1|}, \\ \angle ABC \text{ — общий}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle C_1BA_1$

(имеет место признак подобия треугольников).

$\widehat{BA_1C_1} = \widehat{BAC}$ (если бы $\widehat{BA_1C_1} = \widehat{BCA}$, то было бы $C_1A_1 \parallel AC$, что не имеет места, так как $\triangle ABC$ произвольный).

3) $\triangle A_1CB_1 \backsim \triangle ABC$ (аналогично второму шагу решения).

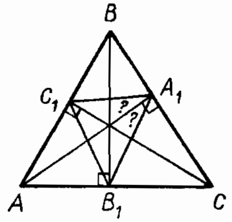


Рис. 98

$$\widehat{B_1A_1C} = \widehat{BAC}.$$

4) $\left.\begin{array}{l}\widehat{BA_1C_1} = \widehat{BAC}, \\ \widehat{B_1A_1C} = \widehat{BAC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{BA_1C_1} = \widehat{B_1A_1C}.$

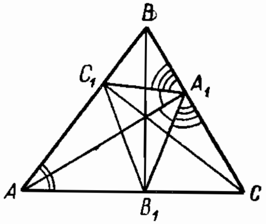


Рис. 99

5) A_1A — биссектриса $\angle C_1A_1B_1$, что видно из вспомогательного чертежа и следует из свойств равенства, условия и четвертого шага решения (рис. 99).

6) Аналогично доказывается, что высоты BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

При решении задачи мы использовали только одно из намеченных направлений (см. п. 2). Попробуем развить второе направление — «привязать» исследуемые углы к окружности (рис. 100).

Четырехугольник A_1BC_1O: $(CC_1) \perp (AB)$ и $(BB_1) \perp (AC)$, $(CC_1) \cap (BB_1) = O$.

Значит, $\widehat{C_1OA_1} + \widehat{C_1BA_1} = \pi$.

Следовательно, существует такая окружность (O_1, r), что четырехугольник C_1OBA_1 вписан в эту окружность.

Аналогично, существует окружность (O_2, r) такая, что четырехугольник A_1OB_1C вписан в эту окружность.

Но тогда $\widehat{C_1BO} = \widehat{C_1A_1O}$, $\widehat{B_1CO} = \widehat{B_1A_1O}$, $\widehat{C_1BO} = \widehat{B_1CO}$, следовательно, $\widehat{C_1A_1O} = \widehat{B_1A_1O}$ и т. д.

Развитие второго из намеченных направлений поиска решения также привело к успеху!

Приведет ли к успеху идея симметрии? На этот вопрос попробуйте ответить сами.

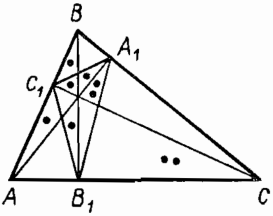


Рис. 100

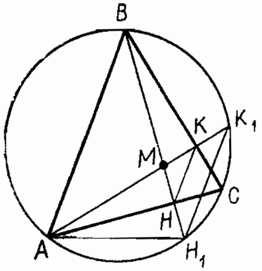


Рис. 101

12.2. Вычертим произвольный треугольник.

Центр описанной окружности лежит на пересечении срединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Так как мы построили остроугольный треугольник, то точка O — центр этой окружности — лежит внутри треугольника (рис. 69).

Нужно доказать, что отрезок $[OC]$ перпендикулярен отрезку $[KH]$, соединяющему основания высот треугольника ABC.

Проведем анализ условия задачи. Из того, что $[BH]$ и $[AK]$ — высоты, следует, что $\triangle AKC$ и $\triangle BHC$ прямоугольные и углы KAC и HBC конгруэнтны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Это пока ни о чем не говорит. В условии еще сказано об окружности, описанной около треугольника ABC. $[OC]$ — радиус этой окружности.

Чтобы доказать, что $[OC] \perp [KH]$, видоизменим требуемую ситуацию, найдем новые сочетания данных и неизвестных элементов. Для этого продолжим высоты AK и BH до пересечения с описанной окружностью в точках K_1 и H_1 (рис. 101).

$\angle KAC \cong \angle HBC$, следовательно, $\angle K_1AC \cong \angle H_1BC$. Это вписанные углы. Значит, $\smile H_1C \cong \smile CK_1$. Получаем, радиус $[OC]$ делит дугу, а значит, и хорду пополам и перпендикулярен хорде $[H_1K_1]$.

Осталось доказать, что отрезок $[KH]$ параллелен $[K_1H_1]$.

Параллельность отрезков можно доказать, если:

а) один из отрезков будет средней линией треугольника, в основании которого лежит второй отрезок;

б) если соответственные углы при пересечении двух прямых третьей конгруэнтны;

в) если две прямые перпендикулярны третьей;

г) если они центрально-симметричны;

д) если они являются сторонами гомотетичных треугольников.

Наиболее перспективным кажется направление:

а) доказать, что один из искомых отрезков является средней линией треугольника, в основании которого лежит второй отрезок.

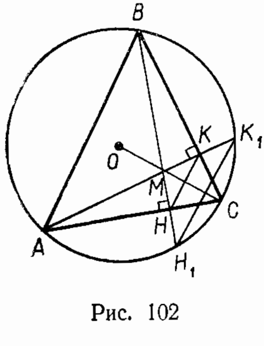


Рис. 102

Решим подзадачу 1 (п. з. (1)).

Докажем, что $[HK]$ — средняя линия $\triangle H_1MK_1$ (см. рис. 101).

Так как $\smile H_1C \cong \smile CK_1$, то $\angle H_1AC \cong$ $\cong \angle K_1AC$ и $[AH] \perp [BH]$. Значит, $\triangle MAH \cong \triangle AHH_1$. Отсюда $[MH] \cong [HH_1]$.

Аналогично доказывается, что $[MK] \cong$ $\cong [KK_1]$.

Доказали, что $[HK] \parallel [H_1K_1]$.

Таким образом, решение п. з. (1) обеспечивает решение данной задачи.

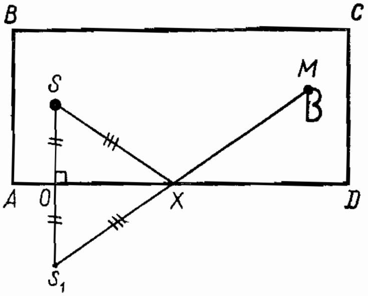


Рис. 103

1) $\angle KAC \cong \angle HBC$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) (рис. 102).

2) $\smile H_1C \cong \smile K_1C$ (так как $\angle K_1AC$ и $\angle H_1BC$ вписанные и $\angle K_1AC \cong \angle H_1BC$).

3) $[OC] \perp [H_1K_1]$ (как часть диаметра, делящего дугу пополам).

4) $\angle K_1AC \cong \angle CAH_1$ (так как они вписанные и $\smile H_1C \cong \smile CK_1$).

5) $\triangle MAH \cong \triangle HAH_1$ (так как $[AC] \perp [BH]$ и $\angle K_1AC \cong \angle CAH_1$).

6) $[MH] \cong [HH_1]$ (так как $\triangle AMH \cong \triangle AHH_1$).

7) $[HK] \parallel [H_1K_1]$ (так как $[HK]$ — средняя линия $\triangle MK_1H_1$).

8) $[OC] \perp [HK]$ (если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых (H_1K_1), то она перпендикулярна и другой (HK)).

Случай тупоугольного треугольника рассмотрите самостоятельно.

12.3. Решение этой задачи основано на известных свойствах осевой симметрии (рис. 103): 1) $[SO] \perp [AD]$; 2) $|SO| = |OS_1|$; 3) $[S_1M]$; 4) $[S_1M] \cap [AD] = X$; 5) X — искомая.

12.4. Заменив 74 на $x + 1$ в данном выражении, получим:

$$x^{31} - (x+1)x^{30} + (x+1)x^{29} - \ldots + (x+1)x^{17} - (x+1)x^{16} + \\ + x \cdot x^{15} + 15 = x^{31} - x^{31} - x^{30} + x^{30} + x^{29} - \ldots + \\ + x^{18} + x^{17} - x^{17} - x^{16} + x^{16} + 15 = 15.$$

12.5. Перепишем данное уравнение так: $xy = n\,(61 - x^3)$.

Так как x, y и n — натуральные числа, то $61 - x^3 > 0$, поэтому x может принимать только три натуральных значения: 1, 2 и 3.

Рассмотрим следующие случаи:

1) При $n = 6k$ уравнение $xy = 6k\,(61 - x^3)$ имеет три натуральных решения:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 60 \cdot 6k; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 53 \cdot 3k; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = 34 \cdot 2k. \end{cases}$$

2) При $n = 6k \pm 1$ уравнение $xy = (6k \pm 1) \cdot (61 - x^3)$ имеет единственное натуральное решение:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 60 \cdot (6k \pm 1). \end{cases}$$

3) При $n = 6k \pm 2$ уравнение $xy = (6k \pm 2) \cdot (61 - x^3)$ имеет два натуральных решения:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 60 \cdot (6k \pm 2); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 53 \cdot (3k \pm 1). \end{cases}$$

4) При $n = 6k + 3$ уравнение $xy = (6k + 3) \cdot (61 - x^3)$ имеет два натуральных решения:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 60 \cdot (6k + 3); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 34 \cdot (2k + 1). \end{cases}$$

Единственное решение при $n = 6k \pm 1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$,

СОДЕРЖАНИЕ

Юрий Михайлович Колягин
Вачаган Арташесович Оганесян

УЧИСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

Редактор *Н. И. Никитина*
Обложка художника *М. К. Шевцова*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *Н. А. Биркина, М. М. Широкова*
Корректор *О. С. Захарова*

ИБ № 4580

Сдано в набор 21.08.79. Подписано к печати 05.03.80. 60×90¹/₁₆. Бумага типограф. № 2. Литер. гарн. Высокая печать. Усл. печ. л. 6. Уч.-изд. л. 5,73. Тираж 600 000 экз. Заказ № 580. Цена 15 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината на Калининском ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинате детской литературы им. 50-летия СССР Росглавполиграфпрома Госкомиздата РСФСР. Калинин, проспект 50-летия Октября, 46.

15 коп.

Москва
«Просвещение»
1980