

В. Д. ЧИСТЯКОВ

П р и
знаменитые
задачи
древности



В. Д. ЧИСТЯКОВ

П р и
ЗНАМЕНИТЫЕ
ЗАДАЧИ
ДРЕВНОСТИ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ
РАБОТЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва — 1963

О Т А В Т О Р А

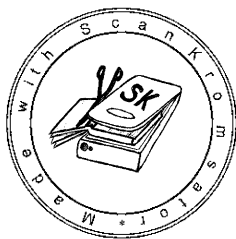
Настоящая книга посвящается трем знаменитым геометрическим задачам древности, над решением которых человечество трудилось в течение более двух тысяч лет. Эти задачи составляют увлекательную и поучительную страницу истории.

Автор стремился писать языком, вполне доступным для учащихся старших классов средней школы. Однако чтобы понять, что в ней написано, надо прочитать ее с большим вниманием и проделать все встречающиеся вычисления с начала до конца. Таким образом, читать эту книгу надо не торопясь, осмысливая и продумывая все прочитанное с пониманием всех математических рассуждений и выкладок.

Книгу рекомендуем учащейся молодежи для самостоятельного чтения и для составления ученических докладов на математическом кружке или на соответствующих математических вечерах.

Главу V «Применение номографии к решению задачи о трисекции угла» написал Л. С. Блох.

Все критические замечания и пожелания по данной книге прошу направлять по адресу: Москва, И-18, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, Учпедгиз, редакция математики.



Scan AAW

ВВЕДЕНИЕ

Первые задачи на построение возникли в глубокой древности. Возникли они из хозяйственных потребностей человека. Уже древним архитекторам и землемерам приходилось решать простейшие задачи на построение, связанные с их профессией.

Самые первые задачи на построение, по-видимому, решались непосредственно на местности и заключались в проведении (провешивании) прямых линий и построении прямого угла с использованием для этого так называемого «египетского треугольника» со сторонами 3, 4 и 5.

К задачам на построение прибегали древние инженеры, когда составляли рабочий чертеж того или иного сооружения и решали вопросы, связанные с отысканием красивых геометрических форм сооружения и его наибольшей вместимости.

Решения простейших геометрических задач на построение, которые помогали людям в их хозяйственной жизни, формулировались в виде «практических правил», исходя из наглядных соображений. Именно эти задачи и были основой возникновения наглядной геометрии, нашедшей довольно широкое развитие у древних народов Египта, Вавилона, Индии и др.

Однако практические правила первых землемеров, архитекторов и астрономов еще не составляли настоящей геометрии как дедуктивной науки, основанной на теоретических построениях и доказательствах.

Задачи на построение нашли широкое распространение в древней Греции, где впервые создалась геометрическая теория в систематическом изложении.

Первым греческим ученым, который занимался решением геометрических задач на построение, был Фалес Милетский (624—547 гг. до н. э.). Это он, пользу-

ясь построением треугольников, определил расстояние, недоступное для непосредственного измерения — от берега до корабля в море. Это он вычислил высоту египетской пирамиды по отбрасываемой ею тени.

Большую роль в развитии задач на построение сыграл П и ф а г о р (ок. 580—500 гг. до н. э.). По свидетельству греческого историка математики П р о к л а (412—485 гг.), «Пифагор впервые разработал принцип геометрии и теоремы невещественным разумным путем». Пифагор и его ученики потратили много сил, чтобы отдельным геометрическим сведениям, состоящим до того времени из набора интуитивных правил, придать характер настоящей науки, основанной на логических умозрительных доказательствах. С именем Пифагора связана теорема, согласно которой в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов. По-видимому, эту теорему сам Пифагор (или его ученики) доказывал при помощи геометрических построений, опираясь на понятие равновеликости равносторонних фигур.

Пифагору приписывается еще ряд замечательных открытий, наиболее важные из которых следующие:

1. Теорема о сумме внутренних углов треугольника.
2. Задача о покрытии. Пифагор путем построения и некоторыми рассуждениями показал, что плоскость может быть заполнена (покрыта) без наложений или правильными треугольниками, или квадратами, или правильными шестиугольниками.
3. Геометрические способы решения квадратного уравнения.

4. Правило решить задачу: «По данным двум фигурам построить третью, которая была бы равновелика одной из данных и подобна другой».

Упомянутый выше Прокл и древнегреческий историк П л у т а р х (ок. 46—126 гг.), автор «Сравнительных жизнеописаний», утверждают, что Пифагор решил следующие задачи на построение:

1. Построить среднюю пропорциональную между двумя данными отрезками.

2. На данном отрезке построить параллелограмм, равный данному и имеющий угол, равный заданному углу.

3. Построить правильный пятиугольник.

Пифагор и его ученики, кроме правильного пятиугольника, умели строить правильные многоугольники, у кото-

рых число сторон равняется 3, 4, 6, 8, 10, 16. Но они были совершенно бессильны в построении правильных семиугольников, девятиугольников и одиннадцатиугольников.

Особенно большое внимание задачам на построение уделял Платон (427—347 гг. до н. э.), основатель «Академии» в Афинах, где преподавал философию более 20 лет. Недаром, как говорит предание, при входе в свою академию, которая размещалась в роскошном городском саду, Платон сделал надпись: «Пусть не входит сюда тот, кто не знает геометрии».

Хотя многие историки математики склонны считать, что значение Платона, как геометра, слишком преувеличено, тем не менее историки Диоген и Лаэций, жившие в III—IV вв. н. э., и Прокл утверждают, что в области геометрии Платону принадлежит ряд замечательных открытий, из которых выделяются следующие:

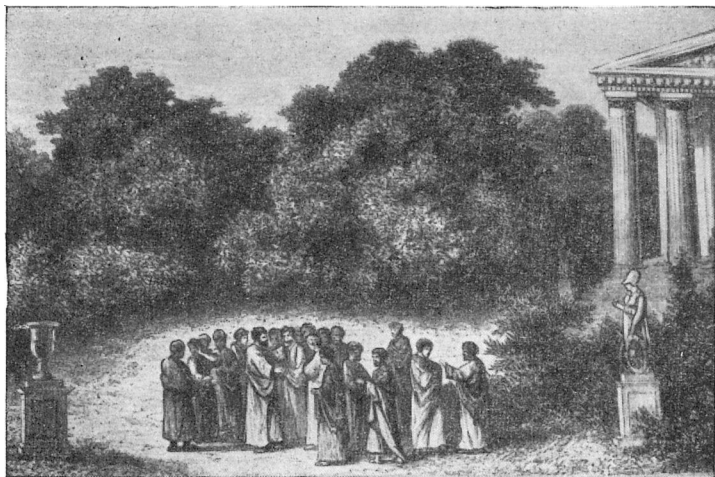
1. Способ находить стороны прямоугольного треугольника в рациональных числах.
2. Изобретение инструмента, при помощи которого механически решается вопрос о нахождении двух среднепропорциональных отрезков прямых между двумя данными.
3. Пополнил теорию иррациональных величин, которая получила начало в пифагорейской школе, но не была достаточно развита.
4. Продвинул вперед стереометрию, которая раньше отставала от планиметрии.



Платон

5. Подведение под геометрию логического фундамента.

В саду знаменитой «Академии» Платона, который был излюбленным местом для диспутов философов и геометров, были впервые критически разработаны в логической последовательности как основные начала, на которых должна строиться геометрическая наука, так и ее основные теоремы. Под сенью этой академии, по-видимому, и были сформулированы основные методы доказательств, из которых до нас дошли, как платоновские методы, «аналитико-синтетический метод» и «способ приведения к нелепости».



Платон с учениками в саду Академии

Только в школе Платона задачи на построение получили надлежащее обоснование. Всякая сложная задача, по Платону, должна решаться аналитико-синтетическим методом, т. е. путем проведения «анализа» и «синтеза», причем анализ, как правило, должен предшествовать синтезу. В связи с решением задач на построение в платоновской школе выработалось понятие «о геометрическом месте точек», как о непрерывном ряде точек, удовлетворяющем определенному условию. Такие важные кривые, как конхоида, циссоида, квадратриса, открытые в разное время древнегреческими геометрами, можно рассматривать как наиболее интересные примеры геометрических мест.

Платон и его ученики считали построение геометрическим, если оно выполнялось при помощи циркуля и линейки, т. е. путем проведения окружностей и прямых линий. Если же в процессе построения использовались другие чертежные инструменты, то построение не считалось геометрическим. Древние греки вслед за Платоном стремились к геометрическим построениям и считали их идеалом в геометрии.

Уже в древности греческие математики встретились с тремя задачами на построение, которые не поддавались решению. Эти задачи следующие:

Первая задача. *Задача об удвоении куба.* Требуется построить ребро куба, который по объему был бы в два раза больше данного куба.

Вторая задача. *Задача о трисекции угла.* Требуется произвольный угол разделить на три равные части.

Третья задача. *Задача о квадратуре круга.* Требуется построить квадрат, площадь которого равнялась бы данному кругу.

Эти три задачи и носят название «знаменитых геометрических задач древности». Им и посвящается настоящая книга.

Большое место задачам на построение отводится в «Началах» Евклида (III в. до н. э.), где существование фигур доказывается их построением при помощи циркуля и линейки. В «Началах» Евклида находятся почти все задачи на построение, которые изучаются в настоящее время в школе.

ГЛАВА I

ДЕЛОССКАЯ ЗАДАЧА ОБ УДВОЕНИИ КУБА

§ 1. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УДВОЕНИИ КУБА

Происхождение задачи об удвоении куба связано, по видимому, с естественным желанием древних ученых обобщить легко решаемую задачу об удвоении квадрата, т. е. о построении квадрата, который по площади превосходил бы данный квадрат в два раза.

Трудности, связанные с решением задач об удвоении, дали повод к возникновению легенд о происхождении этой задачи. Познакомимся с двумя из них.

Легенда первая. Эта легенда принадлежит Эратосфену (276—194 гг. до н. э.), знаменитому греческому математику, астроному и философу. Кстати заметим, что Эратосфен в своей деятельности не замыкался рамками одних только точных наук и был также видным поэтом, первоклассным оратором и искусным археологом. Кроме того, принимал активное участие в Олимпийских играх и был даже победителем в пятиборье. Вот что он рассказывал о причинах, побудивших рассматривать задачу об удвоении куба.

Однажды на острове Делосе, что находится в Эгейском море, вспыхнула эпидемия чумы. Жители этого острова обратились к знаменитому дельфийскому оракулу, который служил при храме Аполлона в Дельфах (Дельфы — общегреческий религиозный центр в Фохиде, у подножия горы Парнас), за помощью и советом.

Чтобы прекратить страдания людей, ответил им оракул, надо снискать милость богов, а для этого надо удвоить золотой жертвенник богу Аполлону (богу Солнца), имеющий форму куба.

Жители Делоса поспешили скорей отлить из золота два таких жертвенника, какой был установлен в храме Аполлона, и поставили один сверх другого, думая, что проблема удвоения кубического жертвенника ими решена.

Однако чума не прекращалась. Тогда они опять обратились к оракулу с недоумевающим вопросом:

— Почему же не прекращается чума, ведь мы удвоили золотой жертвенник всесильному Аполлону?

На это им оракул с огорчением ответил:

— Нет, вы не решили поставленной задачи! Надо было удвоить жертвенник, не изменяя его кубической формы.

Не в состоянии решить эту задачу так, как требовал оракул, делосцы обратились за помощью к знаменитому математику и философу Платону. Но он уклончиво ответил им:

— Боги, вероятно, недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией.

Однако сам Платон не сумел решить указанной задачи циркулем и линейкой. С того времени эта задача и стала именоваться «делосской» (иногда ее неправильно называют «делийской»).

Легенда вторая. Царь Минос повелел воздвигнуть памятник своему сыну Главку. Архитекторы дали памятнику форму куба, ребро которого равнялось 100 локтям. Но Минос нашел этот памятник слишком малым и приказал его удвоить. Чувствуя свое бессилие в решении поставленной задачи, архитекторы обратились за помощью к ученым-геометрам, но и они не могли решить указанной задачи.

§ 2. ПОПЫТКА РЕШИТЬ ЗАДАЧУ ОБ УДВОЕНИИ КУБА ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Древние греки сравнительно легко решили задачу об удвоении квадрата. Для этого надо было уметь строить при помощи циркуля и линейки корень квадратный из двух. Действительно, если сторона данного квадрата равняется a , а сторона искомого квадрата x , то, согласно условию задачи, будем иметь:

$$x^2 = 2a^2,$$

откуда

$$x = a\sqrt{2}.$$

Чтобы построить $\sqrt{2}$, нужно построить гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого каждый катет равен единице. Теперь остается отрезок, равный $\sqrt{2}$, увеличить в a раз, тогда и получим сторону искомого квадрата. А проще всего в качестве x взять диагональ данного квадрата, которая, по теореме Пифагора, как раз и будет равняться $a\sqrt{2}$ (рис. 1).

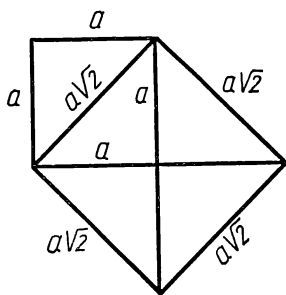


Рис. 1

Обобщая задачу об удвоении квадрата, древние греки перешли к рассмотрению задачи об удвоении куба и также стремились решить ее при помощи циркуля и линейки. Оказалось, что решение задачи об удвоении куба сводится к геометрическому построению корня кубического

из двух. Действительно, если ребро данного куба положить равным a , а ребро искомого куба — x , то, согласно условию задачи, будем иметь:

$$x^3 = 2a^3,$$

откуда

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Однако все старания построить $\sqrt[3]{2}$ циркулем и линейкой не увенчались успехом. И трудно сказать, как долго еще продолжались бы эти попытки, если бы, наконец, в первой половине XIX в. не было доказано, что при помощи циркуля и линейки, без привлечения других вспомогательных средств, $\sqrt[3]{2}$ построить нельзя.

§ 3. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕВОЗМОЖНОСТИ РЕШИТЬ ЗАДАЧУ ОБ УДВОЕНИИ КУБА ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Чтобы иметь хотя бы некоторое представление о разрешимости и неразрешимости задач на построение, ограничимся следующим небольшим замечанием. Прежде всего напомним (это учащиеся знают хорошо), что при помощи цир-

куля и линейки можно сравнительно легко построить выражения:

$$a + b; a - b; \frac{ab}{c}; \sqrt{ab}; \sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 - b^2},$$

где a , b , c суть данные или найденные отрезки. Если решение задачи сводится к последовательному выполнению этих операций в конечном числе, то задача оказывается разрешимой при помощи циркуля и линейки¹. Если же решение некоторой задачи не сводится к последовательному выполнению указанных выше операций в конечном числе, то такую задачу при помощи циркуля и линейки решить невозможно. Задача об удвоении куба и является примером таких неразрешимых задач, которую нельзя решить, прибегая только к циркулю и линейке, т. е. путем проведения окружностей и прямых линий.

Современными средствами, выходящими за пределы школьного курса математики, строго доказано, что *кубическое уравнение с рациональными коэффициентами, не имеющее рациональных корней, не может быть разрешимо в квадратных радикалах, т. е. ни один из корней этого уравнения не может быть построен при помощи циркуля и линейки*. В дальнейшем эту теорему будем называть «теоремой неразрешимости». Доказательство этой теоремы можно прочитать, например, в книге Б. И. Аргунова и М. Б. Балка, «Геометрические построения на плоскости» (стр. 214—217).

В предыдущем параграфе было показано, что задача об удвоении куба сводится к решению кубического уравнения

$$x^3 - 2a^3 = 0,$$

где a есть ребро данного куба, x — искомое ребро удвоенного куба.

Приняв для простоты длину ребра данного куба за 1, получим уравнение:

$$x^3 - 2 = 0.$$

¹ Пользуясь указанными выше операциями на построение, можно дать правила, позволяющие построить без вычислений отрезки, длины которых в точности равны действительным корням квадратных уравнений $x^2 \pm px \pm q^2 = 0$, где p и q рассматриваются как длины некоторых отрезков.

(См. по этому поводу: Б. И. Аргунов и М. Б. Балка, Геометрические построения на плоскости, Учпедгиз, М., 1955, стр. 181—185).

Это уравнение с рациональными коэффициентами, как легко убедиться, не может иметь рациональных корней. Следовательно, по «теореме неразрешимости», задача об удвоении куба не может быть решена при помощи циркуля и линейки.



Р. Декарт

Первый из ученых, кто открыто высказал мнение, что точное построение отрезка, равного $\sqrt[3]{2}$, посредством циркуля и линейки неосуществимо, был знаменитый французский ученый Р. Декарт (1596—1650 гг.). В 1637 г. он высказал предположение, что вообще кубический корень из некубического рационального числа есть иррациональность, не приводящаяся к конечному числу действий извлечения квадратного корня.

Строгое доказательство неразрешимости задачи об удвоении куба при помощи циркуля и линейки было дано французским математиком П. Ванцелем в 1837 г.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УДВОЕНИИ КУБА ПРИ ПОМОЩИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ

1. Решение Гиппократа Хиосского при помощи «вставок»

Одним из первых древнегреческих геометров, сделавшим значительный шаг в решении задачи об удвоении куба, был Г и п п о к р а т Х и о с с к и й (5 в. до н. э.).

(Не надо смешивать с Гиппократом — врачом, основоположником античной медицины, родом из города Меропис, находящегося на острове Кос.)

Гиппократ Хиосский был знаменитым геометром своего времени. Жил около 440 г. до н. э. Он является автором первого систематического сочинения по геометрии, которое, к сожалению, до нас не дошло.

Аристотель характеризует Гиппократа Хиосского как изобретательного геометра, но мало приспособленного к обыденной жизни человека. Начав жизнь своим богатым купцом, он скоро по своей чрезмерной доверчивости и наивности был самым бессовестным образом обманут сборщиками налогов в Византии, которые своими плутовскими проделками лишили его всего денежного состояния.

Решение стереометрической задачи, каковой является делосская задача об удвоении куба, Гиппократ Хиосский свел к рассмотрению планиметрической задачи, заключающейся в нахождении двух средних пропорциональных между двумя данными отрезками, из которых второй в два раза больше первого, т. е. к нахождению таких двух отрезков x и y , которые, будучи «вставлены» между двумя данными a и $2a$, составили бы вместе с ними геометрическую прогрессию: $a, x, y, 2a$.

Поскольку $a, x, y, 2a$ — геометрическая прогрессия, то $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Откуда $x^2 = ay$ и $y^2 = 2ax$. Следовательно,

$$x^4 = a^2y^2 = 2a^3x, \text{ или } x^3 = 2a^3.$$

Выходит, что x и есть ребро искомого куба, превосходящего по объему данный куб с ребром a в два раза.

Однако, как и следовало ожидать, Гиппократу не удалось отыскать ребро удвоенного куба x с помощью геометрического построения, прибегая только к циркулю и линейке, но ему вполне удалось, как мы убедились выше, стереометрическую задачу свести к плоской задаче на отыскание двух «вставок» x и y между a и $2a$, причем a — ребро данного куба, а x — искомое ребро удвоенного куба.

2. Решение Архита Тарентского

Гиппократ Хиосский, как известно, задачу об удвоении куба со стороной a свел к нахождению двух «вставок» x и y так, чтобы выполнялась геометрическая прогрессия: $a, x,$

у, $2a$, т. е. чтобы $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Эти «вставки» геометрическим путем (при помощи циркуля и линейки) найти нельзя, так как это равносильно геометрическому построению $x = \sqrt[3]{2}$. Стало быть, эти «вставки» нужно искать «негеометрическим» построением.

Заслуга Архита Тарентского (ок. 440—360 гг. до н. э.) как раз и заключается в открытии такого построения. Задачу об удвоении куба он решил весьма оригинальным стереометрическим построением, основанным на рассмотрении пересечения нескольких поверхностей вращения.

Архит Тарентский несомненно является одним из выдающихся, если не самым выдающимся, геометров своего времени. Как полагают, он был учеником пифагорейца Филолая и близким другом Платона, которого он спас от рабского плена. Он был учителем знаменитого Евдокса, создавшего теорию пропорций. В своем родном городе Таренте он семь раз избирался стратегом. Как полководец, Архит не проиграл ни одного сражения и поэтому снискал у своих сограждан большой авторитет и славу.

Круг научных интересов Архита весьма разнообразен. Вот далеко не полный список его открытий:

1. Развил арифметику натуральных чисел.
2. Далеко продвинул теорию несоизмеримых величин.
3. Дал теоретико-числовое обоснование теории музыки (по словам Птолемея, его можно считать самым крупным античным теоретиком музыки).
4. Первый из античных ученых дал систематическую разработку механики на математических основах.
5. Писал сочинения о машинах и пытался сам конструировать их. Это он, любя детей, сконструировал в подарок им механического деревянного голубя, который мог летать.

Но самым блестящим достижением Архита как геометра является, конечно, решение знаменитой делосской задачи, в котором проявился его необыкновенно тонкий ум и весьма большой талант. Решение делосской задачи, выполненное Архитом, вызывает восторг и удивление даже у современных математиков. Так, например, крупный голландский математик Ван дер Варден (род. 1903), известный своими трудами по современной алгебре и замечательными исследованиями по истории античной мате-

матики, излагая метод Архита, которым он решил задачу об удвоении куба, не мог воздержаться от восклицания: «Разве это не замечательно? Архита, должно быть, осенило некоторое поистине божественное вдохновение, когда он нашел это построение» (Б. Л. Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука, ГИФМЛ, М., 1959, стр. 210).

В чем же суть столь замечательного построения Архита, с помощью которого решается одна из замечательных задач древности? Это построение приводится в комментариях Евтокия, которое он позаимствовал у Евдема. Воспроизводим это построение, изменив несколько стиль изложения и исключив некоторые излишние повторения.

Пусть AD и G — два отрезка и требуется найти два средних пропорциональных между ними. На большом отрезке AD , как на диаметре, опишем круг $ABDZ$ и отложим хорду $AB=G$, которая, будучи продолжена, с проведенной в D касательной к кругу пересечется в точке P (рис.2). Проведем прямую BEZ параллельно PDO . Далее, на полуокружности ABD построим прямой полуцилиндр, а на отрезке AD , как на диаметре, — полуокруг (на рисунке он не показан), перпендикулярный кругу $ABDZ$. Этот полуокруг будем называть «первым вертикальным полуокругом».

Если теперь будем вращать этот первый вертикальный полуокруг от точки D к точке D_1 , оставляя его все время вертикальным, вокруг образующей полуцилиндра, проходящей через точку A , считая эту точку неподвижной, то полуокруг на указанном выше прямом полуцилиндре высекает некоторую кривую линию.

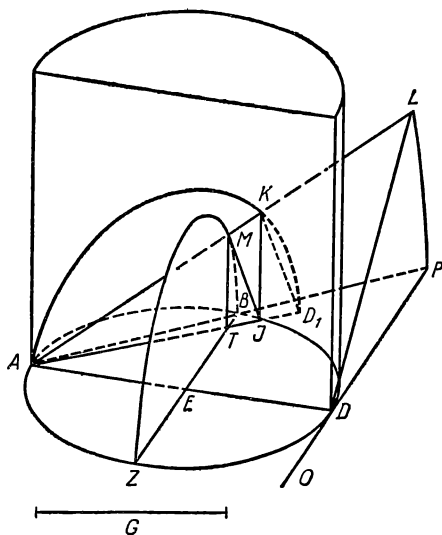


Рис. 2

При вращении $\triangle ADP$ около AD от точки P к точке L прямая AP опишет некоторый полуконус, причем точка B опишет полукруг BMZ , который будем называть «вторым вертикальным полукругом». Этот полуконус своей образующей AL пересечет полученную кривую на полуцилиндре в точке K , принадлежащей образующей IK . Пусть прямая, соединяющая I с A , пересечет BZ в точке T , а прямая AL (образующая полуконуса) пересечет «второй вертикальный полукруг» BMZ в точке M . Проведем также прямые KD_1 , MI и MT . Поскольку вертикальные полукруги AKD_1 и BMZ расположены перпендикулярно к горизонтальному кругу $ABDZ$, то линия их пересечения MT будет перпендикулярна к тому же горизонтальному кругу $ABDZ$. Таким образом, $MT \perp BZ$.

По теореме о перпендикуляре, опущенном из точки окружности на диаметр, будем иметь:

$$MT^2 = BT \cdot TZ \quad (1)$$

Далее, по свойству хорд, проходящих через точку внутри круга $ABDZ$, получим:

$$BT \cdot TZ = AT \cdot TI \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает

$$MT^2 = AT \cdot TI. \quad (3)$$

Из (3) следует, что угол AMI — прямой. Угол AKD_1 — также прямой, так как он вписан в полуокружность AKD_1 и опирается на диаметр AD_1 . Следовательно, $MI \parallel KD_1$. Выходит, что $\triangle AMI \sim \triangle AKD_1 \sim \triangle AIK$, откуда

$$AM : AI = AI : AK = AK : AD_1$$

Но $AM = AB$, а $AD_1 = AD$; получим:

$$AB : AI = AI : AK = AK : AD.$$

Если данные отрезки AB и AD соответственно положить равными a и $2a$, где a — ребро данного куба, а отрезки AI и AK обозначить соответственно через x и y , то окончательно получим:

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Таким образом, для двух заданных отрезков a и $2a$ найдены два средних пропорциональных x и y , следовательно, $x = AI$ и будет ребром удвоенного куба. Знаменитая делосская задача об удвоении куба решена.

3. Решение Платона

Ниже приводится решение делосской задачи, приписываемое Платону. Это решение основано на следующей лемме:

Во всякой прямоугольной трапеции (рис. 3) с перпендикулярными диагоналями отрезки диагоналей образуют геометрическую прогрессию:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OD}.$$

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — прямоугольная трапеция, у которой $\angle A = \angle B = 90^\circ$ и $AC \perp BD$. В

этом случае докажем, что $\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OD}$.

Из того, что $\triangle ABC$ и $\triangle BAD$ прямоугольные, а OB и OA соответственно их высоты, вытекает:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} \quad (1)$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OD}. \quad (2)$$

Из (1) и (2), как следствие, получаем:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OD}.$$

Что и требовалось доказать.

Пусть теперь требуется построить x так, чтобы $x^3 = 2a^3$, где a — ребро данного куба, а x — ребро удвоенного куба. Для этого в полученной прогрессии достаточно положить $OC = a$, $OB = x$, $OA = y$, $OD = 2a$. Тогда будем иметь:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

откуда

$$x^2 = ay; \quad y^2 = 2ax.$$

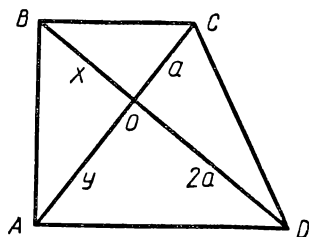


Рис. 3

Путем несложных вычислений получается $x^4 = 2a^3x$. Таким образом,

$$x^3 = 2a^3.$$

Следовательно, $x=OB$ и будет ребром удвоенного куба.

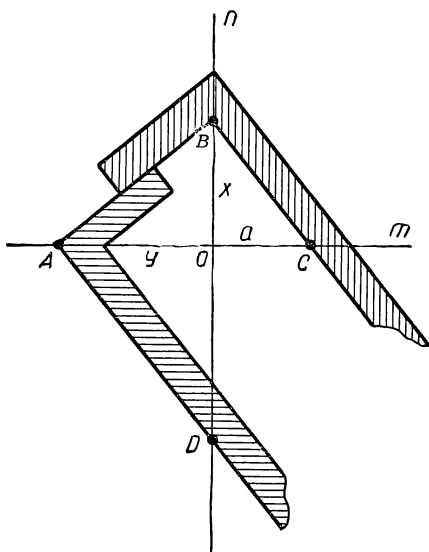


Рис. 4

Основываясь на доказанной лемме, само построение отрезка OB можно выполнить при помощи двух прямоугольных плотничьих наугольников. Это делается следующим образом. Берутся две взаимно перпендикулярные прямые m и n , пересекающиеся в точке O (рис. 4). На прямой m вправо от точки O отложим отрезок $OC = a$, где a — сторона куба, подлежащего удвоению.

На прямой n вниз от точки O отложим отрезок $OD = 2a$. Теперь берем два пря-

моугольных плотничьих наугольника (на рисунке они заштрихованы) и располагаем их так, как показано на рисунке, т. е. 1) чтобы катет первого наугольника проходил через точку C , которая считается данной, а вершина его находилась на прямой n ; 2) чтобы катет второго наугольника проходил через точку D , которая считается также данной, а вершина находилась бы на прямой m ; 3) остальные два катета того и другого наугольника должны соприкасаться.

При таком расположении двух наугольников по данным точкам C и D найдем на прямых m и n точки A и B .

Тогда $OB = x$, а $OA = y$. По лемме

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

откуда

$$x^3 = 2a^3.$$

Следовательно, $x = OB$ и есть построенное ребро удвоенного куба, что и нужно было сделать.

По свидетельству Эратосфена, Платон даже предложил механизм для выполнения решения делосской задачи, устройство и применение которого видно из чертежа (рис. 5). Один из наугольников, имеющих П-образную форму, с помощью специально устроенных пазов может скользить вдоль другого.

Необходимо заметить, что хотя Платон и сконструировал прибор для механического решения делосской задачи, однако такие приборы он осуждал самым решительным образом. Вот, что пишет Плутарх в своей восьмой книге «Застольных бесед»: «Сам Платон порицал друзей Евдокса, Архита и Менехма, которые хотели свести удвоение куба к механическим построениям, ибо они думали получить две средние пропорциональные не из теоретических соображений; но ведь таким образом уничтожается и гибнет благо геометрии, и этим путем геометрия возвращается обратно к чувственному, вместо того, чтобы подыматься выше этого и твердо держаться вечных, нематериальных образов». (См. В а н д е р В а р д е н, Пробуждающаяся наука, ГИФМЛ, М., 1959, стр. 224.)

Таким образом, Платон был против применения механических приборов, так как они, по его мнению, «отворачивают» внимание ученых от чистой науки к материальному,

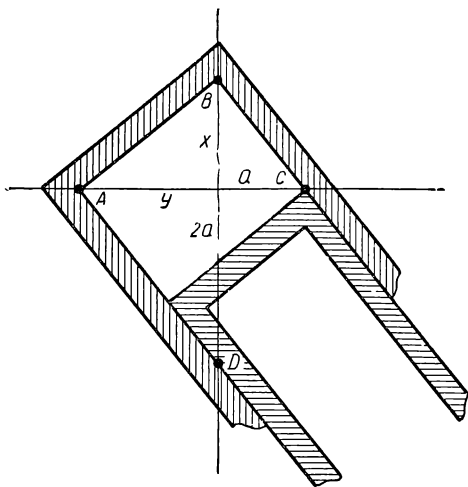


Рис. 5

от геометрических образов к негеометрическим. Он против «материальных вещей, которые требуют длительной обработки недостойным ремеслом» (Ван дер Варден, стр. 224). Вот почему многие историки математики склонны считать, что рассмотренное выше решение, приписываемое Платону, на самом деле Платону и не принадлежит. С этим согласен и упомянутый выше голландский математик Ван дер Варден. «Настоящий Платон, — по его словам, — не стал бы искать такого решения» (Ван дер Варден, стр. 225).

А если Платон и предложил «механическое решение», то предложил его как образец того, как не надо делать. Ван дер Варден полагает, что, возражая Архиту, Евдоксу и Менехму, Платон, по-видимому, вкладывал в свои слова такой смысл: «Вы нашли механические решения? В этом нет никакого искусства; даже и я, совсем не геометр, могу это сделать: для этого нужен только схематический чертеж, даже нет надобности в предварительном геометрическом решении задачи. Вот, взгляни... Но если поступать так, то все благо совершенно разрушается, так как внимание от чистой геометрии отворачивается к материальным предметам...» (Ван дер Варден, стр. 226).

Решение Платона делосской задачи «механическим путем», несмотря на отрицательное отношение к нему самого изобретателя, является весьма оригинальным и простым в употреблении.

4. Решение Менехма

Дальнейший значительный вклад в решение делосской задачи внес знаменитый ученый древности Менехм, живший в IV в. до н. э. Он был учеником знаменитого Евдокса и прославился работами по астрономии и математике. Менехм был смелого и независимого характера. Об этом свидетельствует следующий диалог, происшедший якобы между Александром Великим и Менехмом.

Александр Великий (обращаясь к Менехму):

— Я хочу изучить всю премудрость геометрической науки, так скажи мне: нет ли для нас, царей, более короткого пути к геометрии?

Менехм (с достоинством):

— О царь, для путешествующих по этой стране есть царские дороги и дороги для простых граждан, но в геометрии для всех одна дорога!..¹

Изучение конуса привело Менехма к весьма замечательному открытию, а именно к открытию так называемых «конических сечений». А глубокое размышление над свой-

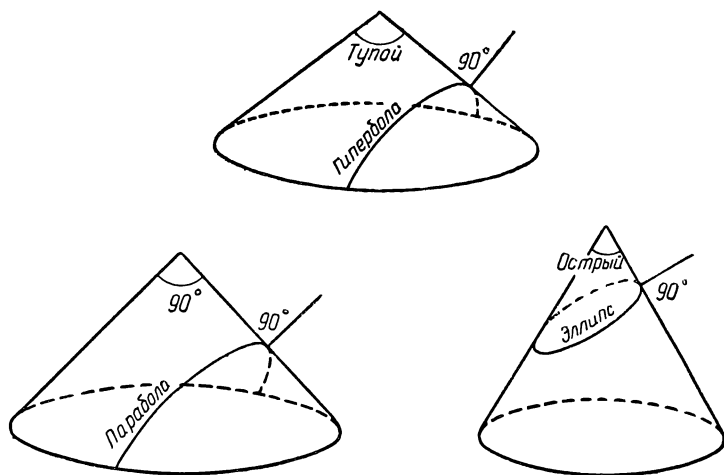


Рис. 6

ствами конических сечений и над делосской задачей явилось источником другого крупнейшего открытия, заключающегося в применении конических сечений к решению задачи об удвоении куба.

Что это за конические сечения? Коническими сечениями называются кривые, получаемые путем пересечения конуса секущей плоскостью.

Сам Менехм рассматривал исключительно конус вращения. Конусы вращения в зависимости от величины угла при вершине (угла, составленного двумя образующими, расположенными в плоскости осевого сечения) он делил

¹ Этот же диалог приписывается и Евклиду (составителю знаменитых «Начал») с царем Птолемеем. Все же первоначальная редакция, по-видимому, относилась к Менехму.

на три категории: прямоугольные, когда угол при вершине прямой, тупоугольные, когда угол при вершине тупой, и остроугольные, когда угол при вершине острый. Для получения конических сечений секущая плоскость бралась перпендикулярно к образующей (рис. 6).

Коническое сечение прямоугольного конуса дает параболу, коническое сечение тупоугольного конуса — гиперболу и коническое сечение остроугольного конуса — эллипс.

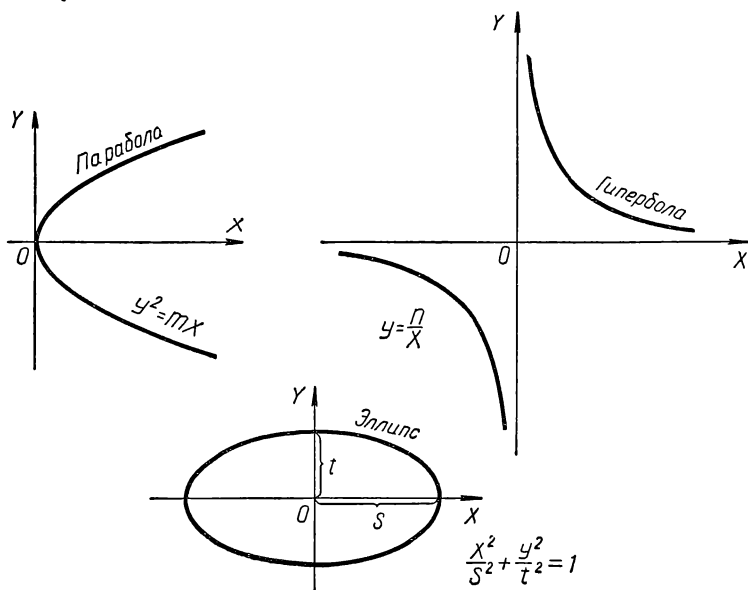


Рис. 7

Эти кривые, отнесенные к осям координат, введенным впервые французским математиком Р. Декартом в XVII в., имеют вид (рис. 7). Их уравнения будут:

- 1) $y^2 = mx$ (парабола),
- 2) $y = \frac{n}{x}$ (гипербола),
- 3) $\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$ (эллипс).

Задачу об удвоении куба Менехм решает двумя способами.

Первый способ. Решение задачи об удвоении куба с ребром a сводится к рассмотрению двух парабол:

$$x^2 = ay \text{ и } y^2 = 2ax.$$

Решая эти уравнения, как систему, относительно x , будем иметь

$$\begin{aligned}x^4 &= a^2y^2 = 2a^3x, \\x^4 - 2a^3x &= 0, \\x(x^3 - 2a^3) &= 0.\end{aligned}$$

Получаем два вещественных корня $x_1 = 0$ и $x_2 = a\sqrt[3]{2}$. Первый корень не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, искомым решением будет второй корень, т. е. ребро удвоенного куба равняется $a\sqrt[3]{2}$.

Путем построения графиков обеих парабол искомое ребро удвоенного куба получается, как ненулевая абсцисса точки пересечения парабол (рис. 8).

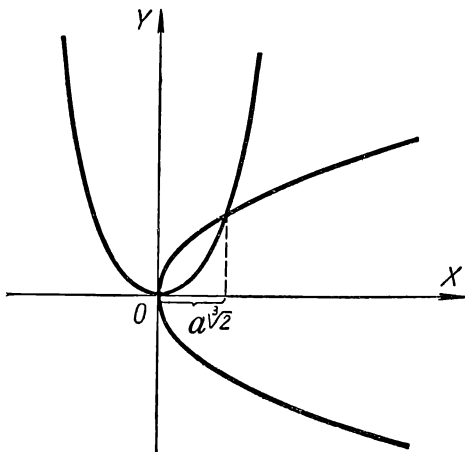


Рис. 8

Второй способ. Задача об удвоении куба сводится к решению двух уравнений, из которых одно — уравнение гиперболы, а другое — уравнение параболы;

$$y = \frac{2a^2}{x} \text{ (гипербола),}$$

$$x^2 = ay \text{ (парабола).}$$

Решая совместно относительно x , получим:

$$x^2 = \frac{2a^3}{x}, \text{ или } x^3 = 2a^3.$$

Следовательно,

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Путем построения графиков искомое ребро удвоенного куба находится, как абсцисса пересечения гиперболы с параболой (рис. 9).

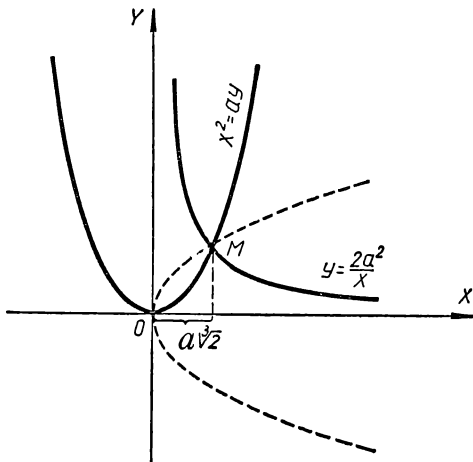


Рис. 9

Необходимо заметить, что в последнем случае вместо параболы $x^2 = ay$ можно взять параболу $y^2 = 2ax$, которая на чертеже изображена пунктиром¹.

¹ Уместно добавить, что идею графического решения задачи об удвоении куба можно осуществить бесконечным множеством способов, среди которых, конечно, заслуживают внимания наиболее «простые» кривые, которые и применял для этой цели Менехм,

5. Решение Эратосфена при помощи сконструированного им прибора «мезолябия»

К тому, что говорилось выше об Эратосфене в связи с происхождением делосской задачи, добавим, что Эратосфен родился в Кирене, образование получил в Александрии и Афинах. Когда ему было около 50 лет, его пригласили ко двору Птолемея III в качестве воспитателя наследника престола и быть главой всемирно известной Александрийской библиотеки. В области математики Эратосфен предложил весьма эффективный способ нахождения ряда простых чисел («эратосфеново решето») и занимался изучением средних величин.

Имя Эратосфена тесно связано с историей делосской задачи. Он построил оригинальный и весьма простой прибор для механического решения задачи об удвоении куба. Этот прибор носит название «мезолябия», что в переводе означает «уловитель», т. е. уловитель двух средних величин, из которых одна и составляет искомую сторону удвоенного куба.

Мезолябий Эратосфена состоит из двух параллельно расположенных реек m и n , расстояние между которыми равно удвоенной стороне данного куба, т. е. $2a$. К этим

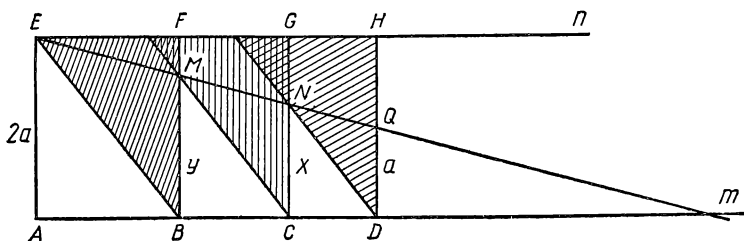


Рис. 10

рейкам прикреплены три равных прямоугольных треугольника, из которых один, самый левый, смонтирован неподвижно, а другие два могут перемещаться вдоль пазов, устроенных в рейках, причем на верхнюю рейку опираются равные катеты, а на нижнюю — их противоположные вершины (рис. 10).

На катете HD самого правого подвижного треугольника откладываем отрезок $DQ = a$. Теперь двигаем подвижные треугольники с таким расчетом, чтобы точки пересечения катета одного треугольника с гипотенузой следующего за ним (M и N) располагались бы на одной прямой с E и Q . Тогда из рассмотрения соответствующих подобных треугольников получаем:

$$\frac{a}{NC} = \frac{NC}{MB} = \frac{MB}{2a}.$$

Обозначая NC через x и MB через y , будем иметь:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Следовательно, $x = NC$ и будет найденной величиной искомого ребра удвоенного куба. Делосская задача решена.

Текст механического решения Эратосфена был высечен на камне в храме царя Птолемея в Александрии. Над текстом находилась бронзовая модель, состоящая из трех треугольников, которые можно было передвигать взад и вперед между двумя рейками.

На мраморной доске в этом же храме были высечены также стихи Эратосфена. Стихи эти таковы:

«Если бы, друг, ты замыслил большое из малого сделать,
Куб сотворить ли двойной, иль перестроить объем,
Это возможно — и сени расширишь, и яму просторней
Выроешь, и водоем влагой наполнишь двойной.
Вот мой прибор: меж линеек две средние сразу отыщешь,
Между краями других ты их отметишь концы.
Нужды тебе уж не будет в премудром цилиндре Архита,
В конусе не для тебя высек триаду Менехм,
И с богоравным Евдоксом изогнутых линий не надо,
Циркулем вооружась, тонкий изгиб находить.
Сдвинув отважно линейки, легко мириады построишь
Средних желанных твоих, с меньшей из данных начав.
Счастлив ты, царь Птолемей, — ты дал вечному сыну
Вечно блаженному дар сладкий для муз и царей.
Зевс, бог вселенной! В грядущем пусть с милостью той же
он примет

Скипетр от царской руки — и да свершится сие.
Тот же, кто жертву во храме великом увидит, да скажет:
— Дар этот Эратосфен людям, измыслив, принес.»

В приведенных стихах Эратосфена упоминаются решения Архита, Менехма и Евдокса. С решениями Архита и Менехма мы ознакомились выше, а решение Евдокса до нас, к сожалению, не дошло (считается утерянным).

6. Решение Буонафальче (приближенное решение)

Буонафальче дает одно из самых простых приближенных решений задачи об удвоении куба при помощи циркуля и линейки (точного решения этой задачи при помощи циркуля и линейки, как известно, дать нельзя).

Пусть дан куб с ребром a и требуется найти ребро x удвоенного куба, т. е. чтобы для x выполнялось равенство $x^3 = 2a^3$. Решение выпол-

ним приближенно при помощи только циркуля и линейки. Пользуясь циркулем и линейкой, строим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной, равной a (рис. 11). Теперь сторону $AC = a\sqrt{2}$ делим на шесть равных частей и находим на катете BC от точки C к точке B точку D с таким расче-

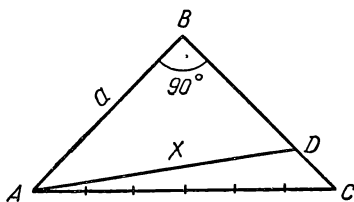


Рис. 11

том, чтобы выполнялось равенство $CD = \frac{1}{6} AC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$. Соединив A с D , получим отрезок AD , который для краткости обозначим через x . Теперь подсчитаем, чему равняется x .

По теореме Пифагора будем иметь:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{AB^2 + (BC - CD)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2} = a \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \\ &= a \sqrt{\frac{37 - 6\sqrt{2}}{18}} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \sqrt{37 - 6\sqrt{2}} \approx a \cdot 1,25863 \approx \\ &\approx a \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Итак, $x \approx a \sqrt[3]{2}$, где $\sqrt[3]{2} \approx 1,25863$ (на самом деле $\sqrt[3]{2} \approx 1,2599$).

Следовательно, ребро удвоенного куба приблизительно равно $a\sqrt[3]{2}$, если ребро данного куба равно a . Таким образом, если данный куб имеет ребро a , равное отрезку AB , то x — искомое ребро удвоенного куба — будет приблизительно равняться отрезку AD , который отличается от истинного значения искомого ребра меньше, чем на $\frac{a}{2000}$.

7. Другие решения

Много потрудились над решением задачи об удвоении куба такие ученые, как Аполлоний, Никомед, Диоклес, Виет, Декарт и Ньютон.

Аполлоний решал указанную задачу путем построения двух средних геометрических «вставок», рассматривая для этой цели прямоугольник со сторонами a и $2a$, где a — ребро данного куба.

Никомед и Диоклес решали задачу путем изобретенных ими механизмов, вычерчивающих высшие кривые (конхоиду и циссоиду).

Оригинальные решения задачи об удвоении куба впоследствии дали Ф. Виет, Р. Декарт и И. Ньютон. На этих решениях для краткости останавливаться не будем.

ГЛАВА II

ЗАДАЧА О ТРИСЕКЦИИ УГЛА

§ 1. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТРИСЕКЦИИ УГЛА

Вторая древнейшая знаменитая геометрическая задача — это задача о трисекции угла. Слово «трисекция» происходит от латинского *tri* — в сложных словах означает «три» — и *sectio* — «разрезание», «рассечение». Родиной этой задачи является древняя Греция (примерно V в. до н. э.). Возникновение задачи о трисекции угла в отличие от делосской задачи об удвоении куба не связано ни с какими преданиями и легендами. Задача о делении угла на три равные части, по-видимому, возникла из потребностей архитектуры и строительной техники. При составлении рабочих чертежей орнаментов, разного рода украшений, многогранных колоннад и т. д., при строительстве, внутренней и внешней отделке храмов, надгробных памятников и других больших и малых сооружений древние инженеры, художники и архитекторы встретились с необходимостью уметь делить окружность на любое конечное число равных частей, а это в некоторых случаях (и довольно часто) приводило их к рассмотрению трисекции некоторых углов. Делить угол пополам древние греки умели довольно легко, а вот разделить угол на три равные части оказалось не всегда возможно.

Сама жизнь и прежде всего практические запросы архитектуры и строительной техники требовали от геометров хорошо разработанной теории и практики построения правильных многоугольников. И нет ничего удивительного, что в древней Греции теория и практика построения правильных многоугольников в геометрической науке очень

рано привлекает внимание ученых. Строить правильный многоугольник им удавалось сравнительно просто, когда равные дуги получались путем деления соответствующих центральных углов каждый раз пополам. Но случалось так, что равные дуги надо было получить путем деления центрального угла на три равные части, тогда перед геометрами возникали чрезвычайно большие трудности, которые и привели ученых к специальному рассмотрению задачи о трисекции угла. Действительно, пользуясь циркулем и линейкой, древние греки, например, легко строили правильный восьмиугольник. Для этой цели окружность делилась пополам, полученные дуги опять делились пополам, а потом равные дуги, центральные углы которых равны 90° , делились еще раз пополам. Затем концы равных восьми дуг соединялись хордами. Правильный восьмиугольник считался построенным. Но картина совершенно менялась, когда приходилось строить, скажем, правильный семиугольник. В этом случае окружность надо разделить на 7 равных частей. Разделив окружность на три равные части, получали центральные углы в 120° . Теперь для завершения построения надо произвести трисекцию угла в 120° , а этого при помощи только циркуля и линейки, оказывается, выполнить точно невозможно. Здесь и в других подобных случаях перед учеными встала одна из трудных геометрических проблем, которая стала называться «знаменитой задачей о трисекции угла».

§ 2. ПОПЫТКА РЕШИТЬ ЗАДАЧУ О ТРИСЕКЦИИ УГЛА ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

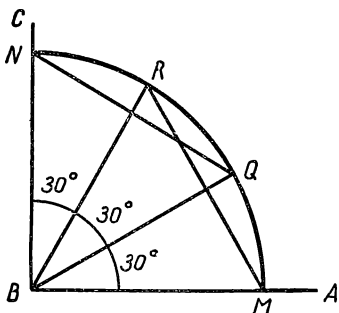


Рис. 12

Пользуясь циркулем и линейкой, древние греки умели делить произвольный угол на две равные части. Со времен Пифагора они умели делить прямой угол на три равные части. Это они выполняли так.

Пусть дан прямой угол ABC и требуется разделить его на три равные части, т. е. произвести трисек-

цию этого угла. Для этого из вершины данного угла B , как из центра, проводим окружность (для нужного построения достаточно провести четверть окружности). Точки пересечения окружности со сторонами AB и BC соответственно обозначим через M и N (рис. 12). Далее, из точек M и N тем же радиусом делаем засечки R и Q . Теперь соединим хордами M и R , N и Q . Получаем два равносторонних треугольника: $\triangle BRM$ и $\triangle BQN$. Но в равностороннем треугольнике все три угла по 60° . Следовательно, $\angle MBR = \angle QBN = 60^\circ$. Тогда $\angle MBQ = \angle RBN = \angle QBR = 30^\circ$. Итак, данный прямой угол удалось разделить на три равные части. Что и нужно было сделать.

С такой же легкостью и теми же средствами древние греки стремились разделить на три равные части и всякий другой угол. Но тут их постигло глубокое разочарование. Пользуясь циркулем и линейкой, они смогли выполнить трисекцию углов только для отдельных частных случаев.

В чем дело? А дело заключается в том, что трисекция произвольного угла оказывается неразрешимой при помощи циркуля и линейки, но об этом будет рассказано в следующем параграфе.

§ 3. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О ТРИСЕКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Древнегреческие ученые проявили много тонкого остроумия для изобретения разного рода механизмов, с помощью которых они без особого труда делили произвольный угол на три равные части. Но перед ними всегда стоял вопрос: почему трисекция угла, легко выполняемая при помощи специально изготовленных механизмов, не поддается разрешению при помощи циркуля и линейки? И вообще, разрешима ли эта задача в общем виде при помощи этих классических чертежных инструментов?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, проведем некоторые рассуждения. Обозначим данный угол, который требуется разделить на три равные части, через 3α . Рассмотрим $\cos 3\alpha$.

По известным формулам тригонометрии будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \cos 3\alpha &= \cos (\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha = \\
 &= \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\
 &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \\
 &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \\
 &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \cos^3 \alpha = \\
 &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,
 \end{aligned}$$

или

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Умножая левую и правую части полученного равенства на 2, будем иметь:

$$2 \cos 3\alpha = 8 \cos^3 \alpha - 6 \cos \alpha.$$

Пусть теперь $2 \cos 3\alpha = a$ и $2 \cos \alpha = x$, тогда

$$a = x^3 - 3x,$$

или

$$x^3 - 3x - a = 0. \quad (1)$$

Чтобы доказать, что задача о трисекции угла не разрешима в общем виде, достаточно указать хотя бы один угол, который нельзя разделить при помощи циркуля и линейки. Путем несложных рассуждений покажем, что таким свойством обладает, например, угол в 60° . Действительно, полагая $3\alpha = 60^\circ$, получим $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$, и уравнение (1)

примет вид:

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \quad (2)$$

В алгебре доказывается, что рациональными корнями уравнения (2) могли бы быть $+1$ и -1 , но ни то, ни другое указанному уравнению не удовлетворяет. Выходит, что уравнение (2) не имеет рациональных корней, и, следовательно, по «теореме неразрешимости» угол в 60° нельзя разделить на три равные части при помощи циркуля и линейки¹. Итак, если пользоваться циркулем и линейкой, задача о трисекции угла в о б щ е м в и д е не разрешима.

¹ Из того, что угол в 60° не может быть разделен на три равные части при помощи циркуля и линейки, вытекает, что угол в 20° , а следовательно, и угол в 40° не могут быть построены указанными инструментами. Отсюда вытекает важное предложение: правильный девятиугольник, восемнадцатиугольник и т. д. не могут быть построены циркулем и линейкой.

Далее, для a можно было бы указать еще бесчисленное множе-

Укажем теперь некоторые частные случаи, когда задача о трисекции угла разрешима циркулем и линейкой.

Древним ученым, как указывалось выше, была известна трисекция прямого угла при помощи циркуля и линейки. Возможность этой трисекции можно подтвердить и теоретически. Действительно, положив $3\alpha = 90^\circ$, получим, что $a = 0$, и уравнение (1) примет вид:

$$x^3 - 3x = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет корни $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$. Таким образом, ненулевые корни выражены в квадратных радикалах. Следовательно, угол в 90° можно разделить циркулем и линейкой на три равные части.

Аналогичными рассуждениями можно было бы показать, что теми же средствами и угол в 45° можно разделить на три равные части.

Необходимо добавить, что трисекция при помощи циркуля и линейки возможна для бесчисленного множества углов, например для углов вида $\frac{\pi}{2^n}$, где n — целое положительное число (последнее рекомендуется доказать самостоятельно).

Р. Декарт был первым ученым, который высказал предположение, что трисекция произвольного угла не может быть выполнена при помощи циркуля и линейки, если последняя не имеет никаких отметок. Строгое же доказательство неразрешимости задачи о трисекции произвольного угла впервые было дано в 1837 г. П. Ванцелем.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРИСЕКЦИИ УГЛА ПРИ ПОМОЩИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ

1. Решение Гиппия из Элиды при помощи открытой им квадратрисы.

Задача о трисекции угла в общем случае не разрешима при помощи циркуля и линейки, но это вовсе не значит, что данную задачу нельзя решить другими вспомога-

ство значений, для которых уравнение (1) не разрешимо в квадратных радикалах, и, следовательно, существует бесчисленное множество углов, трисекция которых не может быть выполнена при помощи циркуля и линейки.

ными средствами. Древним геометрам было хорошо известно, что достаточно немного усилить конструктивные возможности циркуля и линейки дополнительными вспомогательными средствами, чтобы трисекция любого угла стала уже выполнимой.

Первый из древнегреческих ученых, кто дал строгое решение задачи о трисекции любого острого угла при помощи дополнительных вспомогательных средств, был Гиппий из Элиды (V в. до н. э.). Для своего решения Гиппий воспользовался открытой им кривой, которую он

назвал *к в а д р а т р и с о й* (от позднелатинского *quadratrix*). Он даже изобрел механизм, вычерчивающий эту кривую. Квадратриса он получил, исходя из следующих механических соображений. Пусть имеется квадрат $ABCD$ (рис. 13). Предположим, что сторона этого квадрата AD , как подвижный радиус, будет равномерно вращаться вокруг точки A , как своего центра, и за время t опишет четверть окружности от точки D до точки B .

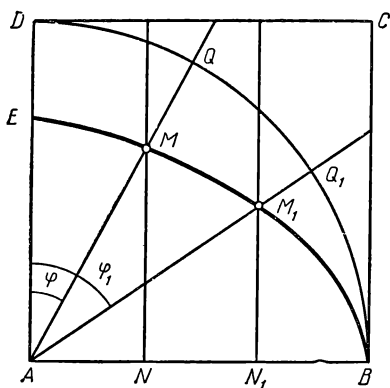


Рис. 13

Пусть далее прямая, перпендикулярная AB , будет равномерно перемещаться слева направо от точки A до точки B и за указанное выше время t перейдет из положения AD в положение BC . Тогда геометрическое место точек пересечения в каждый момент времени вращающегося радиуса и прямой, перемещающейся параллельно самой себе и перпендикулярной AB , образует непрерывную кривую, которая и носит название квадратрисы¹.

Как исследовал Гиппий, квадратриса обладает тем за-

1) Сам термин «квадратриса» стал употребляться с IV в. до н. э. после того, как Динострат — ученик Платона и брат Менехма — применил квадратрису к решению квадратуры круга, о которой речь будет позднее (гл. III).

мечательным свойством, что абсциссы ее точек пропорциональны соответствующим углам, т. е.

$$\frac{AN}{AN_1} = \frac{\varphi}{\varphi_1}, \text{ где } \varphi = \angle MAE \text{ и } \varphi_1 = \angle M_1AE.$$

Для доказательства положим, что радиус AD за единицу времени повернется на угол α , а прямая, перпендикулярная AB , за это время переместится на k единиц. Пусть далее, что точки M и M_1 квадратрисы получились соответственно через t и t_1 единиц времени. Тогда

$$\varphi = \alpha t \text{ и } AN = kt,$$

$$\varphi_1 = \alpha t_1 \text{ и } AN_1 = kt_1.$$

Разделив эти равенства почленно, будем иметь:

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{t}{t_1} \text{ и } \frac{AN}{AN_1} = \frac{t}{t_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{AN}{AN_1} = \frac{\varphi}{\varphi_1},$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного, как следствие, вытекает, что равным отрезкам неподвижного радиуса AB при помощи квадратрисы соответствуют и равные дуги окружности DB . Так, на рисунке 13 отрезку AN соответствует дуга DQ , отрезку NN_1 — дуга QQ_1 и отрезку N_1B — дуга Q_1B . Если положить, что $AN = NN_1 = N_1B$, тогда и соответствующие дуги будут равны. Теперь уже без особого труда можно разделить любой острый угол не только на три, но и на любое число равных частей.

Пусть дан острый угол α и требуется разделить его на три равные части.

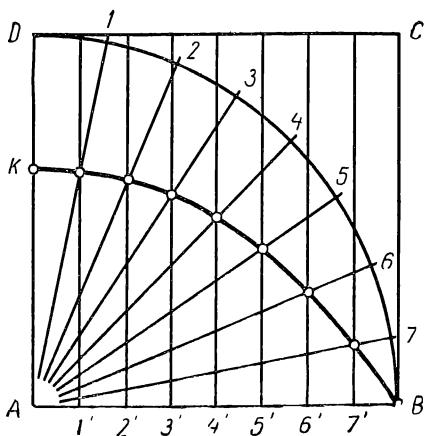


Рис. 14

Сначала построим для некоторого квадрата $ABCD$ квадратрису. Для этого дугу окружности DB и сторону AB данного квадрата разделим на $2n$ равных частей, где n — любое натуральное число. Заметим, что, чем больше возьмем n , тем точнее будет построение квадратрисы. Для простоты положим $n = 4$, тогда $2n = 8$. Делим дугу DB и радиус AB на 8 равных частей. Концы полученных равных частей дуги DB обозначим цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (рис. 14). Точки деления неподвижного радиуса AB обозначим через $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'$. Теперь точки $1, 2, 3$

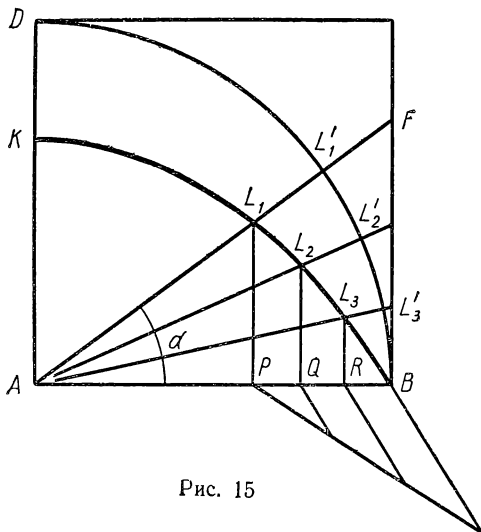


Рис. 15

$4, 5, 6, 7$ соединим прямыми с точкой A , а через точки $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'$ проведем прямые, перпендикулярные AB . Точки пересечения полученных радиусов с соответствующими прямыми, перпендикулярными AB , и будут точками квадратрисы (на чертеже обозначены кружочками). Соединяя эти точки плавной кривой, мы и получаем квадратрису KB , как непрерывную линию.

Теперь при помощи квадратрисы разделим данный острый угол α на три равные части. Для этой цели построим угол FAB , равный углу α (рис. 15). Обозначим точки пересечения прямой AF с квадратрисой KB и окружностью DB

соответственно через L_1 и L'_1 . Далее из точки L_1 на прямую AB опустим перпендикуляр L_1P . Затем отрезок PB обычным приемом, показанным на чертеже, разделим на три равные части точками Q и R . В точках Q и R к прямой AB восставим перпендикуляры до пересечения их с квадратрисой KB в точках L_2 и L_3 . Соединяя точки L_2 и L_3 с точкой A и продолжая прямые AL_2 и AL_3 до пересечения с окружностью DB , получим точки L'_2 и L'_3 .

Поскольку дуги $L'_1L'_2$, $L'_2L'_3$ и L'_3B равны между собой, то соответствующие им центральные углы $L'_1AL'_2$, $L'_2AL'_3$ и L'_3AB также равны между собой и каждый из них равен $\frac{\alpha}{3}$. Следовательно, указанным выше приемом мы разделили данный угол α на три равные части, что и нужно было сделать.

2. Решение Паппа Александрийского при помощи конхоиды Никомеда

Во II в. до н. э. в Александрии жил ученый Н и к о м е д. Жизнь его, как и многих других ученых древней Греции, нам почти неизвестна. В своих комментариях к первой книге «Начала» Евклида Прокл утверждает, что Никомед изобрел конхоиду, которую он использовал для решения задачи об удвоении куба и трисекции угла. Однако Папп Александрийский, живший в IV в. н. э., в своих «Математических коллекциях», посвященных жизнеописанию древнегреческих ученых, где он подробно останавливается на знаменитых задачах древности, подтверждает, что Никомед действительно изобрел замечательную кривую, названную им конхойдой, которую с успехом можно применить к решению задачи о трисекции угла, но это было сделано уже после Никомеда. Заслугу применения конхоиды Никомеда к решению задачи о трисекции угла Папп приписывает себе.

А теперь посмотрим, как, следуя Паппу, можно при помощи конхоиды решить задачу о трисекции угла.

Прежде всего поближе познакомимся с самой конхойдой Никомеда. Пусть имеется некоторая прямая AB (базис) и точка O (полюс) вне этой прямой. В плоскости, определяемой ими, через точку O проведем пучок лучей и на каждом луче отложим равные отрезки в обе стороны от его точки пересечения с данной прямой. Геометрическое место кон-

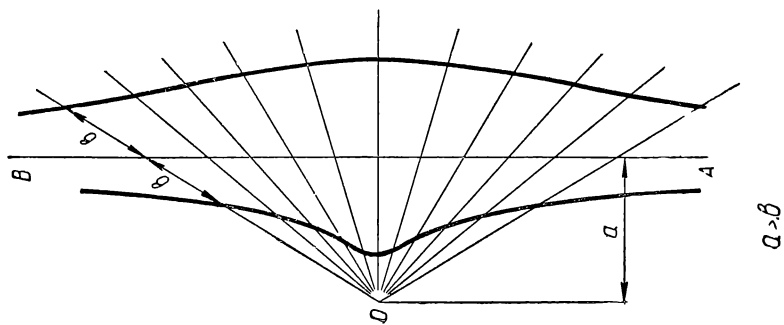
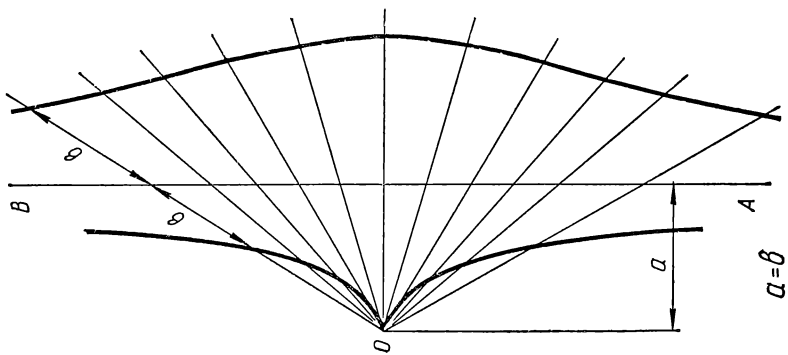
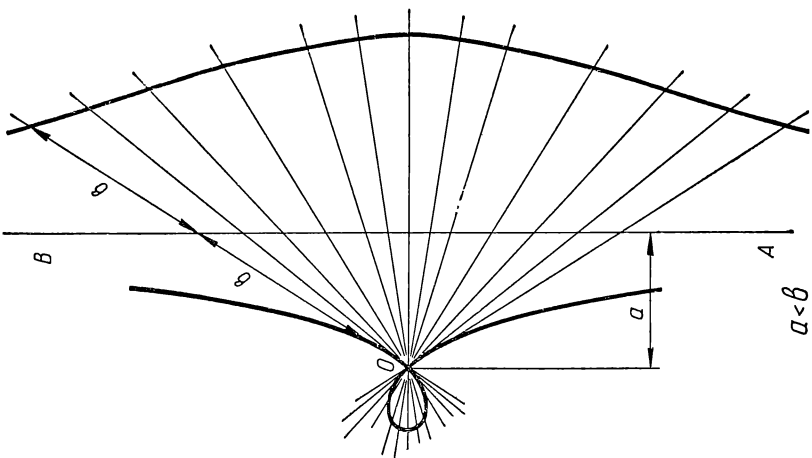


Рис. 16

цов этих отрезков и представляет конхоиду Никомеда, т. е. конхоиду прямой AB относительно полюса O^1 .

На чертеже (рис. 16) изображены три конхоиды прямой относительно полюса O , отвечающие трем случаям: $a > b$, $a = b$ и $a < b$, где a — расстояние полюса O до базиса AB и b — откладываемый отрезок (параметр).

Пусть теперь требуется какой-нибудь острый угол AOB разделить на три равные части, причем эту трисекцию надо произвести при помощи конхоиды Никомеда.

Поступаем так, как указывал Папп Александрийский. На одной из сторон данного угла, например на стороне

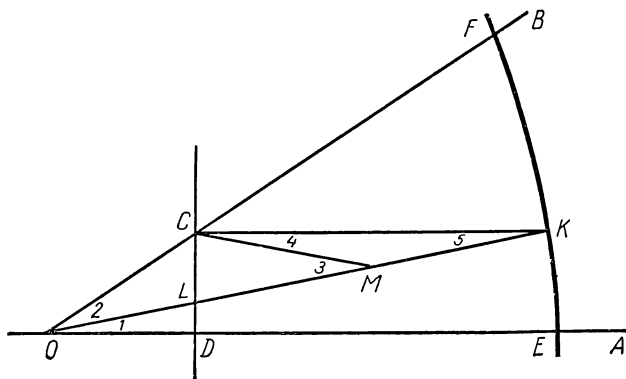


Рис. 17

OB , возьмем произвольную точку C и из нее на прямую OA опустим перпендикуляр CD (рис. 17). Теперь построим одну ветвь (правую) конхоиды Никомеда, приняв точку O за полюс, прямую CD за базис, а отрезок, равный $2OC$, за параметр. Эта конхоида пересечет стороны данного угла в точках E и F . Через точку C проведем прямую, параллельную DE , которая пересечет конхоиду в некоторой точке K . Соединим точку K с точкой O . Полученный угол AOK и будет составлять одну треть данного. Докажем это. Прежде всего обозначим точку пересечения прямых OK и CD через L . Середину отрезка LK обозначим через M

¹ Вообще говоря, можно построить конхоиду, приняв за базис какую-нибудь кривую линию, но Никомед такую конхоиду не рассматривал.

и соединим ее прямой с точкой C . Нужные нам углы, как показано на чертеже, обозначим цифрами $1, 2, 3, 4, 5$. Остается доказать, что угол 2 в два раза больше угла 1 . Действительно, принимая во внимание свойство конхоиды, будем иметь:

$$LK = DE = 2OC.$$

Далее,

$$LK = 2LM \text{ и } CM = MK.$$

Следовательно,

$$\angle 4 = \angle 5 \text{ (свойство равнобедренного треугольника),}$$

$$\angle 5 = \angle 1 \text{ (свойство параллельных прямых),}$$

$$\angle 2 = \angle 3 \text{ (свойство равнобедренного треугольника).}$$

Далее,

$$\angle 3 = \angle 4 + \angle 5 = 2\angle 5 \text{ (свойство внешнего угла треугольника),}$$

или

$$\angle 2 = 2\angle 1,$$

т. е. угол AOK составляет одну треть угла AOB , что и требовалось доказать.

3. Решение Архимеда при помощи циркуля и линейки с двумя отметками

Оригинальное и вместе с тем чрезвычайно простое решение задачи о трисекции угла дал древнегреческий ученый **Архимед**.

О жизни Архимеда известны только отрывочные сведения, которые дошли до нас благодаря древним писателям Цицерону, Плутарху и другим. Из их работ узнаем, что Архимед родился в 287 году до н. э. в Сицилии и на 75 году жизни был убит римским воином при взятии римлянами города Сиракуз в 212 году до н. э.

Рассказывают, что Архимед был патриотом своей родины и города Сиракуз, где он родился и жил. Он в течение двух лет при помощи своих машин с успехом защищал Сиракузы от мощной римской армии, которой командовал Марк Клавдий Марцелл, один из самых крупных военачальников того времени. Вот в каких словах передает древнегреческий писатель Плутарх (ок. 46—126) взятие города Сиракуз римлянами:

«Марцелл вполне полагался на обилие и блеск своего вооружения и на собственную свою славу. Но все оказалось беспомощным против Архимеда и его машин...

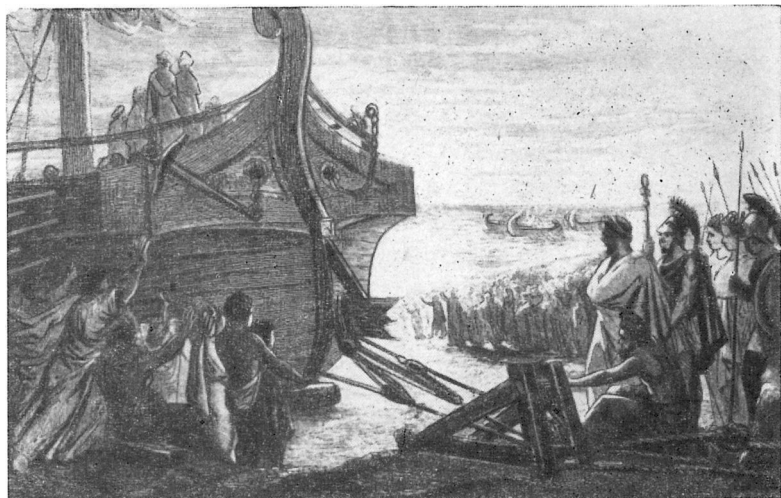
Архимед был родственником умершего царя Гиерона. В свое время Архимед писал Гиерону, что небольшой силой возможно привести в движение сколь угодно большую тяжесть; более того, вполне полагаясь на убедительность своих доказательств он утверждал даже, что был



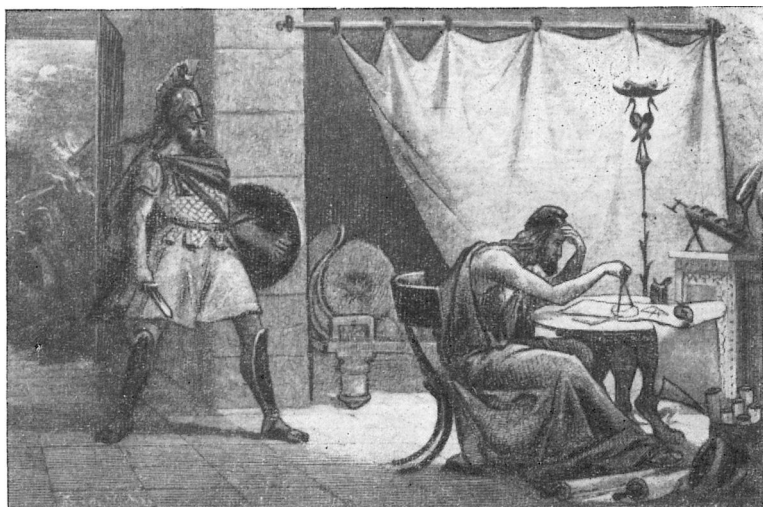
Архимед

бы в состоянии привести в движение самую Землю, если бы существовала другая, на которую он мог бы стать («Дайте мне, где стать, и я сдвину Землю»). Гиерон был этим удивлен и предложил Архимеду показать на деле, как возможно большую тяжесть привести в движение малой силой. Архимед осуществил это над грузовым трехмачтовым судном, которое, казалось, могло вытащить на берег только большое число людей. Архимед велел посадить на судно множество людей и нагрузить его большим грузом. Поместившись затем в некотором отдалении на берегу, он без всякого напряжения, очень спокойно нажимая собственной рукой на конец полиспаста, легко, не нарушая равновесия, придвинул судно. Гиерон был этим в высшей степени поражен и, убедившись в высоком значении этого искусства, склонил Архимеда соорудить машины как для обороны, так и для нападения при любой осаде...

Когда римляне начали наступление с суши и с моря, сиракузяне считали невозможным противостоят такой большой силе и военной мощи. Но когда Архимед привел в действие свои машины и орудия разнообразного рода, на сухопутные войска врагов посыпались камни огромной величины и веса с шумом и невероятной быстротой. Целые



Архимед посредством машины вытаскивает на берег галеру



Смерть Архимеда

подразделения войск валились на землю, и их ряды пришли в полный беспорядок. В то же время и на суда неприятеля обрушивались из крепости тяжелые балки, искривленные в виде рогов; одни из них сильными ударами погружали суда в глубь моря, другие крюками в форме журавлиных клювов, точно железными руками, поднимали корабли высоко в воздух, а затем опускали кормой в воду. В то же время другие машины швыряли суда на скалы возле стен города, и их матросы подвергались страшному уничтожению...

Римляне были так напуганы, что достаточно было показаться над стенами канату или деревянной палке, как все кричали, что Архимед направил на них машину, и

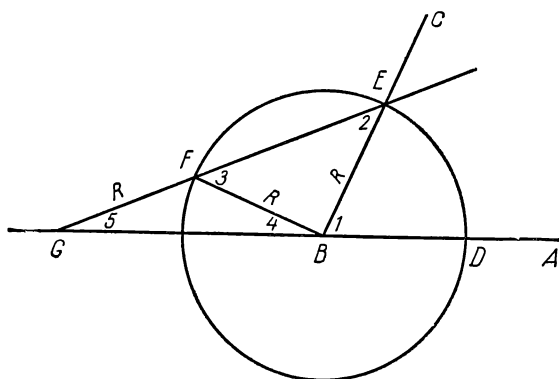


Рис. 18

быстро убежали. Видя это, Марцелл прекратил сражение и нападение и предоставил дальнейшую осаду действию времени».

В своих математических расчетах Архимед, предвосхитив идеи современного математического анализа, остроумно решал задачи на вычисление длин кривых, площадей и объемов.

До нас дошли следующие сочинения Архимеда:

1. Две книги о шаре и цилиндре.
2. Измерение круга.
3. О коноидах и сфероидах.
4. О спиралях.
5. Две книги о равновесии плоскости.

6. Исчисление песчинок.
7. Квадратура параболы.
8. Послание Эратосфену о методе обработки механических предложений.
9. Две книги о плавающих телах.
10. Отрывки.

Задачу о трисекции угла Архимед решает при помощи обыкновенного циркуля и подвижной линейки, на которой разрешается делать две отметки, расстояние между которыми должно равняться радиусу проводимой окружности. Как это делается, покажем на конкретном примере. Пусть требуется произвольно взятый острый угол ABC разделить на три равные части. Для этого из вершины данного угла B , как из центра, произвольным радиусом R опишем окружность (рис. 18). Точки пересечения сторон данного угла с окружностью обозначим через D и E . Теперь берем подвижную линейку с двумя отметками F и G , причем длина отрезка $FG = R$, и прикладываем ее к точке E так, чтобы F и G оказались на одной прямой с точкой E и чтобы F находилась на окружности, а G — на продолжении стороны BA . Тогда угол EGD и будет составлять одну треть заданного угла ABC .

Докажем это. Обозначим для краткости углы на чертеже цифрами $1, 2, 3, 4, 5$. Надо доказать, что угол 5 составляет третью часть угла 1 , т. е. $\angle 5 = \frac{1}{3} \angle 1$.

Действительно, $\angle 1 = \angle 5 + \angle 2$ (свойства внешнего угла треугольника), но $\angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ (свойство внешнего угла треугольника). Далее, $\angle 5 = \angle 4$ (свойство равнобедренного треугольника). Тогда $\angle 3 = 2\angle 5$. Из треугольника BEF , поскольку он равнобедренный, $\angle 3 = \angle 2$. Учитывая предыдущее равенство, будем иметь:

$$\angle 1 = \angle 5 + \angle 3 = \angle 5 + 2\angle 5 = 3\angle 5.$$

Следовательно,

$$\angle 5 = \frac{1}{3} \angle 1,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. ДРУГИЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Изыскание все новых и новых решений задачи о трисекции угла не пропало даром. Оказалось, что задача о трисекции угла тесно примыкает к задачам алгебры и три-

гонометрии. Так, еще в XV в. самаркандский ученый Д ж е м ш и д и б н М а с у д а л ь - К а ш и применил трисекцию угла к составлению весьма точных тригонометрических таблиц, нужных для вычислительной математики и астрономии. Применяя некоторый прием приближенного численного решения кубического уравнения, он по известному значению $\sin 3^\circ$ производит вычисление $\sin 1^\circ$. Далее, в XVI в. знаменитый французский математик Ф. В и е т на основе трисекции угла находит тригонометрическое решение кубического уравнения в так называемом его неприводимом случае.

Другие весьма оригинальные, но довольно сложные способы решения задачи о трисекции угла дали ученые Д е к а р т, Н ь ю т о н, К л е р о и Ш а л ь. Все эти решения основаны на отыскании точек пересечения конического сечения с окружностью.

Попытки найти красивое решение задачи о трисекции угла предпринимаются и в настоящее время (см. гл. V этой книги).

ГЛАВА III

ЗАДАЧА О КВАДРАТУРЕ КРУГА

§ 1. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЗАДАЧИ О КВАДРАТУРЕ КРУГА

Задача о квадратуре круга, как указывалось выше, заключается в следующем: *построить квадрат, площадь которого была бы равна площади данного круга.*

Задача о квадратуре круга — самая старая из всех математических задач. Она возникла на заре человеческой культуры и ее история охватывает период около четырех тысяч лет. Этой задачей раньше греков занимались вавилоняне и египтяне. Независимо от греков ею занимались китайцы и индийцы. Задача о квадратуре круга вместе с тем является самой популярной из всех математических задач. Этой популярности, по-видимому, содействовала ее жизненная необходимость и чрезвычайная простота формулировки, которая доступна как математику, так и нематематику.

Особенно большое распространение эта задача получила в древней Греции. Об этой задаче даже говорит человек, далекий от математики, — древнегреческий драматург **А р и с т о ф а н** (446—385 гг. до н. э.). Так, в его комедии «Птицы» приводится любопытный в этом отношении диалог между ученым-землемером Метонем и афинянином Писфетером. Приводим этот диалог полностью.

М е т о н.

Я к вам пришел.

П и с ф е т е р.

Еще несчастье новое.

Зачем пришел ты? И каков твой замысел?

С какими ты сюда явился целями?

М е т о н.

Я землемер. Хочу отмерить каждому
Полоску воздуха.

П и с ф е т е р.

О боги правые!
Ты что за человек?

М е т о н.

Зовусь Метоном я,
Знаком всем грекам, и колонцам в частности.

П и с ф е т е р.

А это что?

М е т о н.

Орудье измеренья.
Напоминает очень воздух формой
Кастриюлю для тушенья. Здесь линейку я
Изогнутую приложу и циркулем
Отмерю расстоянье, понимаешь?

П и с ф е т е р.

Нет.

М е т о н.

Затем прямую, тоже по линейке,
Я проведу, чтобы круг квадратом сделался,
Здесь, в центре, будет рынок. К рынку улицы
Пойдут прямые. Так лучи расходятся,
Сверкая, от звезды. Звезда округлая,
Лучи прямые.

П и с ф е т е р.

Ты Фалес поистине!..

По свидетельству Плутарха, первый из греческих математиков, кто по-серьезному занимался квадратурой круга, был Анаксагор (500—428 гг. до н. э.). Будучи посажен в тюрьму за безбожие, он предался размышлениям на математические темы. В результате этих размышлений, отгонявших печаль и тоску о свободе, он и «начертал

квadrатуру круга». Каким путем пытался он решить задачу о квадратуре круга, это, к сожалению, до нас не дошло.

Квadrатурой круга много занимался другой греческий ученый Г и п п и й из Элиды (ок. V в. до н. э.). В 420 г. до н. э. он открыл, как указывалось выше, трансцендентную кривую — квадратрису, которая служила для решения задач о трисекции угла и квадратуре круга. Первый из древнегреческих ученых, кто применил квадратрису Гиппия для решения задачи о квадратуре круга, был Д и н о с т р а т, живший во второй половине IV в. до н. э.

В дальнейшем увидим, что большой вклад в историю задачи о квадратуре круга внесли современники Сократа (469—399 гг. до н. э.) А н т и ф о н и Б р и з о н, а также Г и п п о к р а т Х и о с с к и й, живший во второй половине V в. до н. э. Изыскания древнегреческих ученых, связанные с задачей о квадратуре круга, завершаются замечательными исследованиями по этому вопросу величайшего математика древности А р х и м е д а из Сиракуз, жившего в III в. до н. э. Его трактат «Измерение круга» является образцом строгой научной постановки вопроса и его приближенного решения.

§ 2. ПОПЫТКА РЕШИТЬ ЗАДАЧУ О КВАДРАТУРЕ КРУГА ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Древнегреческие ученые стремились задачу о квадратуре круга решить при помощи циркуля и линейки. Показательна в этом отношении работа Гиппократа Хиосского,

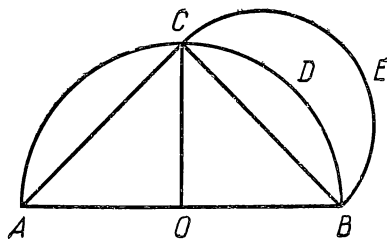


Рис. 19

которому удалось криволинейную фигуру (гиппократовы луночки) преобразовать в равновеликий ей многоугольник. Однако преобразовать круг в равновеликий ему квадрат Гиппократу так и не удалось. Остановимся несколько подробнее на его рассуждениях.

На отрезке AB , как на диаметре (рис. 19), построим полукруг ACB . Далее, из точки O — середины отрезка

AB — восставим перпендикуляр OC . Соединим прямыми точку C с точками A и B . Отрезок CB будет стороной квадрата, вписанного в круг, и площадь треугольника ACB будет равняться половине этого квадрата. На отрезке CB , как на диаметре, опишем еще полукруг CEB . Применяя к прямоугольному треугольнику ACB теорему Пифагора, получим:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2CB^2. \quad (1)$$

На основании того, что площади кругов относятся между собой, как квадраты их диаметров, будем иметь:

$$\text{пл. круга } ACB : \text{пл. круга } CEB = AB^2 : CB^2, \quad (2)$$

или, учитывая (1),

$$\text{пл. круга } ACB : \text{пл. круга } CEB = 2 : 1. \quad (3)$$

Откуда

$$\text{пл. круга } ACB = 2 \text{ пл. круга } CEB. \quad (4)$$

Тогда

$$\text{пл. полукруга } ACB = 2 \text{ пл. полукруга } CEB. \quad (5)$$

Следовательно,

$$\text{пл. сектора } OCB = \text{пл. полукруга } CEB. \quad (6)$$

Вычитая из левой и правой частей равенства (6) сегмент CDB , получим, что площадь $\triangle OCB$ равняется площади луночки $CDBE$. Наконец, при помощи циркуля и линейки теперь не составляет большого труда построить квадрат, площадь которого будет равна площади $\triangle OCB$, а следовательно, и площади луночки $CDBE$. Так Гиппократ Хиосский весьма оригинальным приемом нашел квадратуру некоторой, специального вида, луночки.

Это открытие Гиппократа окрылило древних геометров надеждой, что с помощью циркуля и линейки когда-нибудь удастся вычислить и квадратуру круга: «Раз можно найти квадратуру некоторой луночки, образованной дугами кругов, то почему же, — рассуждали они, — нельзя найти квадратуру круга».

Сам Гиппократ, найдя квадратуру указанной выше луночки, пытался найти квадратуру круга, пользуясь следующими рассуждениями. Пусть дан произвольный круг диаметра AB и требуется, пользуясь только циркулем и линейкой, построить квадрат, равновеликий этому кругу.

Рассмотрим полукруг ACB данного диаметра AB (рис. 20). Возьмем отрезок AD , равный удвоенному диаметру AB , и построим на нем, как на диаметре, полуокружность. Далее, раствором циркуля, равным AB , находим на полуокружности точки F и K . Концы дуг AF , FK и KD соединяем хордами, которые образуют трапецию $AFKD$, вписанную в полуокружность $AFKD$. Боко-

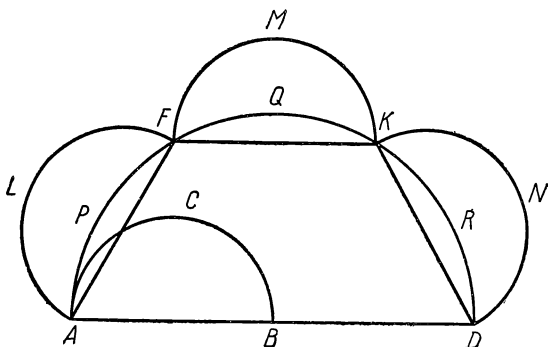


Рис. 20

вые стороны AF и KD и верхнее основание FK этой трапеции равны между собой и равны AB — по построению. Построим на отрезках AF , FK и KD , как на диаметрах, полуокружности ALF , FMK , KND .

Известно, что площади кругов относятся, как квадраты их диаметров. Следовательно,

$$\text{пл. круга } AFKD : \text{пл. круга } ACB = AD^2 : AB^2.$$

Но $AD = 2 AB$, тогда

$$\text{пл. круга } AFKD : \text{пл. круга } ACB = 4 : 1.$$

Откуда

$$\text{пл. круга } AFKD = 4 \text{ пл. круга } ACB,$$

или

$$\text{пл. полукруга } AFKD = 2 \text{ пл. круга } ACB.$$

Окончательно имеем:

$$\text{пл. полукруга } AFKD = 4 \text{ пл. полукруга } ACB.$$

Так как $AF = FK = KD = AB$, то площади полукругов ALF , FMK и KND , взятые по отдельности, равны площади полукруга ACB . Учитывая это, будем иметь:

пл. полукруга $AFKD =$ пл. полукруга $ALF +$ пл. полукруга $FMK +$ пл. полукруга $KND +$ пл. полукруга ACB . Вычитая из левой и правой частей площади сегментов APF , FQK и KRD , которые являются общими частями большого полукруга $AFKD$ и соответственно малых полукругов ALF , FMK и KND , получим:

пл. трапеции $AFKD =$ пл. луночки $ALF +$ пл. луночки $FMK +$ пл. луночки $KND +$ пл. полукруга ACB .

Откуда

пл. полукруга $ACB =$ пл. трапеции $AFKD -$ пл. квадрата (равновеликого луночкам $ALFP$, $FMKQ$ и $KNDR$).

Выходит, что площадь данного круга ACB равна удвоенной разности площади трапеции и некоторого квадрата. Следовательно, для данного круга, как думал Гиппократ, можно указанным способом всегда построить квадрат, равновеликий этому кругу, пользуясь только циркулем и линейкой.

Однако в рассуждениях Гиппократа Хиосского допущена одна ошибка, которая «из невозможного делает возможным» — неразрешимую задачу о квадратуре круга разрешимой. Ошибка в рассуждениях Гиппократа, приводящая к иллюзорному решению задачи о квадратуре круга, была замечена еще древними учеными. Об этой ошибке говорят древнегреческий историк математики Евдем Родосский и знаменитый основоположник формальной логики Аристотель. Так, Евдем Родосский заявляет, что хотя рассуждение Гиппократа Хиосского и является остроумным, тем не менее оно является ошибочным. Дело в том, говорит Евдем, что три луночки, которые рассматривал Гиппократ при решении квадратуры круга, построены не на катетах прямоугольного треугольника, а на сторонах трапеции и, следовательно, к ним он не может применить то свойство о квадратуемости луночки, которое он доказал в начале. В этом же упрекал Гиппократа и Аристотель. Аристотель, как и Евдем, считал, что Гиппократ впал в грубую ошибку, полагая возможным квадратуру луноч-

ки, построенной на стороне квадрата, необдуманно применить к квадратуре луночки, построенной на стороне шестиугольника¹.

Другая попытка решить задачу о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки была предпринята древнегреческим ученым Антифоном. Он в данный круг, квадратура которого находилась, вписывал сначала квадрат. Затем дуги, хордами которых являются стороны вписанного в круг квадрата, он делил пополам и точки деления соединял с вершинами квадрата и таким образом получал вписанный в круг правильный восьмиугольник. Далее, дуги, хордами которых являются стороны вписанного в круг правильного восьмиугольника, делил также пополам и точки деления соединял с вершинами указанного восьмиугольника и получал вписанный в круг правильный 16-угольник. Продолжая этот процесс дальше, он получал вписанные в круг правильные 32-угольник, 64-угольник и т. д. Он считал, что указанным построением, выполняемым только при помощи циркуля и линейки, можно прийти к такому правильному многоугольнику, правда, быть может, с очень большим числом сторон, который полностью исчерпает круг, т. е. его площадь будет равна площади данного круга. А так как для любого правильного многоугольника всегда можно построить равновеликий ему квадрат, то и для данного круга, поскольку он исчерпывается правильным многоугольником, можно построить равновеликий ему квадрат.

Еще в древности ученые подвергли решение Антифона резкой критике. Они совершенно правильно заявляли, что утверждение Антифона, будто правильный многоугольник может совпасть с кругом, противоречит основным началам геометрии.

Однако для целей приближенной квадратуры круга

¹ Некоторые ученые истории математики (Лакруа, Бретшнейдер) говорят, что, несмотря на свидетельство древних историков, они не верят, чтобы такой проницательный геометр, как Гиппократ, впал в такую грубую ошибку. Вероятно, заявляют они, сам Гиппократ выразился следующим образом: если бы квадратура луночки, построенной на стороне шестиугольника, была возможной, то и квадратура круга также была бы возможной. Но его комментаторы исказили смысл приведенной фразы и дали повод обвинять Гиппократа в том, в чем сам он, по-видимому, совершенно не виноват.

рассуждение Антифона вполне приемлемо, так как с помощью этого рассуждения данный круг можно приближенно квадрировать с любой степенью точности.

§ 3.0 ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕВОЗМОЖНОСТИ РЕШИТЬ ЗАДАЧУ О КВАДРАТУРЕ КРУГА ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Попытки древнегреческих ученых решить задачу о квадратуре круга путем проведения прямых и окружностей так и не увенчались успехом. Оно и понятно, почему. Дело в том, что задача о квадратуре круга, так же как и задачи об удвоении куба и трисекции угла, оказывается также неразрешимой при помощи циркуля и линейки.

Еще в 1755 г. Парижская Академия наук, видя бесплодные усилия математиков, а еще больше нематематиков, пытавшихся во что бы то ни стало решить задачу о квадратуре круга, вынесла решение впредь не принимать на рассмотрение работы, касающиеся квадратуры круга, а также и других двух знаменитых задач древности, т. е. задач о трисекции угла и удвоении куба. Это охладило пыл «квадратурщиков», и задачей о квадратуре круга люди стали заниматься значительно меньше.

Окончательный удар всем иллюзиям решить задачу о квадратуре круга при помощи циркуля и линейки был нанесен лишь во второй половине XIX в. Немецкому математику Ф. Линдеману в 1882 г. удалось, наконец, вполне строго доказать, что задача о квадратуре круга неразрешима при помощи циркуля и линейки и все старания что-нибудь сделать в этом направлении указанными средствами являются совершенно напрасными и ненужными.

Доказательство Линдемана чрезвычайно трудное и далеко выходит за пределы школьного курса математики.

Оставляя в стороне рассуждения Линдемана о невозможности решения квадратуры круга, мы ограничимся следующими весьма краткими замечаниями.

Пусть дан круг радиуса R и требуется построить квадрат, равновеликий этому кругу. Обозначим сторону искомого квадрата через x , тогда будем иметь:

$$x^2 = \pi R^2,$$

откуда

$$x = R \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, вопрос о построении квадрата, равновеликого данному кругу, сводится к построению произведения данного отрезка R на данное число $\sqrt{\pi}$, причем это построение надо провести при помощи только циркуля и линейки, т. е. путем проведения конечного числа окружностей и прямых линий.

При помощи циркуля и линейки можно всегда построить произведение данного отрезка R на рациональное число (целое или дробное), но далеко не всегда можно указанными средствами построить произведение данного отрезка на число иррациональное. Произведение данного отрезка R на число иррациональное можно построить в некоторых случаях, если, например, иррациональное число равняется $\sqrt{2}$ или $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; тогда $R\sqrt{2}$ находится, как сторона квадрата, вписанного в круг радиуса R , а $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ — как сторона правильного 12-угольника, вписанного в круг радиуса R , причем, как известно, вписать правильный 12-угольник в круг не составляет трудности, после того как в круг предварительно вписан правильный шестиугольник.

В теории геометрических построений установлено, что данный отрезок R можно умножить при помощи циркуля и линейки на вещественное число лишь только в том случае, если это вещественное число может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, разрешимого в квадратных радикалах. Число, которое не может являться корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, принято называть т р а н с ц е н д е н т н ы м ч и с л о м. Следовательно, при помощи циркуля и линейки нельзя построить произведение данного отрезка R на число трансцендентное. Таким образом, чтобы доказать неразрешимость задачи о квадратуре круга при помощи циркуля и линейки, необходимо установить невозможность указанными средствами построить произведение данного отрезка R на число $\sqrt{\pi}$, а для этого достаточно показать, что $\sqrt{\pi}$ или π есть число трансцендентное.

Заслуга Ф. Линдемана как раз и заключается в том, что он впервые в мировой науке вполне строго доказал, что π есть число трансцендентное и тем самым окончательно установил невозможность решения задачи о квадратуре

круга с помощью циркуля и линейки. Вот почему Ф. Линдемана называют «победителем числа π », а еще лучше — «победителем задачи о квадратуре круга»¹.

В заключение заметим, что изучение арифметической природы числа π исторически шло в следующем направлении. Сначала в 1761 г. немецкий математик И. Л а м б е р т первый показал, что число π есть число иррациональное. Позднее французский математик А. Л е ж а н д р установил, что квадрат числа π есть также число иррациональное. Наконец, в 1882 г. немецкий математик Ф. Л и н д е м а н доказал знаменитую теорему, согласно которой, как указывалось выше, число π есть число трансцендентное, т. е. оно не может служить корнем какого-нибудь алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Отсюда, как следствие, уже вытекала неразрешимость с помощью циркуля и линейки знаменитой задачи о квадратуре круга.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КВАДРАТУРЕ КРУГА ПРИ ПОМОЩИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ

1. Решение Динострата при помощи квадратрисы

Известно, что задача о квадратуре круга неразрешима при помощи циркуля и линейки. Однако задача о квадратуре круга становится вполне разрешимой, если специально для нее расширить средства построения. Это знали еще древние греки. Они знали, что квадратура круга будет вполне разрешимой, если в процессе построения воспользоваться некоторыми специальными кривыми. Первое такое решение задачи о квадратуре круга еще в IV в. до н. э. выполнил Д и н о с т р а т. Он при своем решении воспользовался хорошо известной нам квадратрисой. Суть этого решения заключается в следующем.

Пусть ANB — четверть окружности, расположенной в квадранте AOB , а AMC — квадратриса этого квадранта (рис. 21). Далее Динострат воспользовался соотношением, которое позднее было доказано Паппом Александрийским:

¹ См. по этому поводу статью И. Я. Демпмана «Победитель числа π — Фердинанд Линдеман». «Ученые записки» Ленинградского госуд. пединститута, Физико-математический факультет, т. XVII, вып. 2, стр. 119—123.

$$ANB : OB = OB : OC,$$

где C — конечная точка квадратрисы.

Поскольку $OA = OB = R$, то

$$ANB : R = R : OC,$$

или

$$ANB = \frac{R^2}{OC}.$$

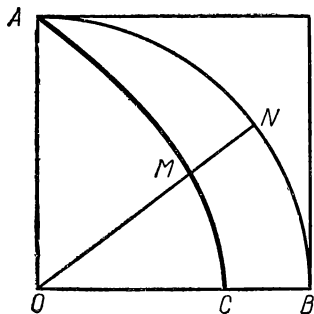


Рис. 21

Откуда длина окружности ра-

диуса R равняется $\frac{4R^2}{OC}$. Та-

ким образом, длина окружно-
сти определена. Чтобы постро-
ить квадрат, равновеликий
кругу, Динострат, по-видимо-
му, воспользовался теоремой:
*площадь круга равна площади
треугольника, основание ко-
торого равно окружности, а
высота — радиусу круга*¹.

§ 5. О ПРИБЛИЖЕННОЙ КВАДРАТУРЕ КРУГА

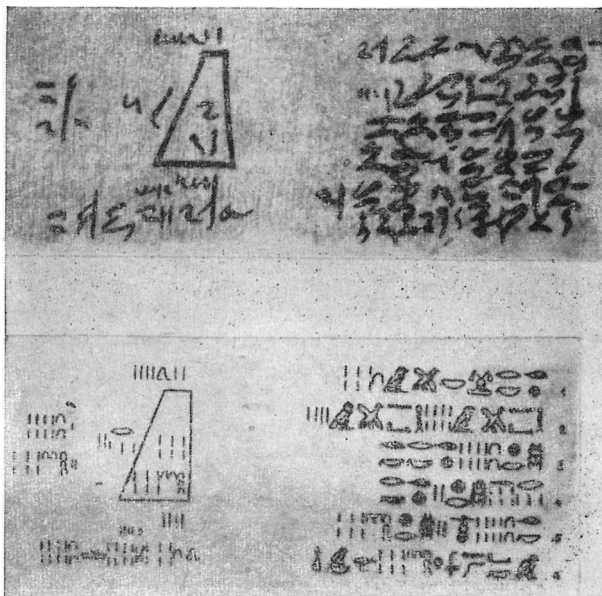
Из формулы $x = R\sqrt{\pi}$ видно, чтобы решить задачу о квадратуре круга, достаточно построить отрезок, равный числу π . Но построить отрезок, равный числу π , при помощи циркуля и линейки невозможно, так как число π , как показал Линдеман, есть число трансцендентное. Таким образом, старания древних ученых найти при помощи циркуля и линейки отрезок, длина которого точно равнялась бы числу π , не могли увенчаться успехом и, как следовало ожидать, приводили к приближенным результатам. Само собой разумеется, что если число π вычислять приближенно, то и квадратура круга будет выполняться приближенно. На этот путь приближенного вычисления числа π , начиная с глубокой древности, и встали ученые многих народов.

Рассмотрим историю этого вопроса более подробно.

¹ Эта теорема позднее была строго доказана Архимедом и поэтому носит название «теоремы Архимеда».

1. Приближенная квадратура круга у древних египтян

Лучшим источником для ознакомления с египетской математикой и искусством вычисления является знаменитый папирус Ринда, относящийся к периоду 2000—1700 лет до н. э. и носящий название: «Наставление, как достигнуть знания всех темных (трудных, непонятных вещей)... (кусок папируса вырван)... всех тайн, которые скрывают в себе вещи. Сочинение это написано в 33 году в 4-м месяце



Кусок папируса, содержащий вычисление объема

времени вод в царствование царя Ра-а-ус. Со старых рукописей времени царя ... (кусок папируса вырван) ... ат. Писец Ахмес написал это».

В этом папирусе дается правило для приближенного решения задачи о квадратуре круга. Согласно египетскому правилу, сторона квадрата, равновеликого площади круга, равна восьми девятым диаметра круга. Выходит, что

$$S_{\text{круга}} = \left(\frac{8}{9} d\right)^2,$$

откуда

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16.$$

2. Приближенная квадратура круга у древних вавилонян

Древние вавилоняне, занимаясь вопросами астрономии, делили год на 360 дней, а в соответствии с этим видимую орбиту солнца (окружность) делили также на 360°. Это привело их к весьма замечательному открытию, что радиус круга, будучи взят в качестве хорды, помещается в окружности ровно шесть раз.

Деление окружности на шесть равных частей, легко выполнимое при помощи циркуля и линейки, дало возможность вавилонянам приближенно считать, что длина окружности равняется ушестеренному радиусу или, что то же, утроенному диаметру. В этом случае площадь круга будет равняться утроенному квадрату радиуса.

Таким образом, египтяне считали, что окружность больше диаметра ровно в 3 раза и, следовательно, число $\pi = 3$. К этому результату, как увидим далее, пришли и другие древние народы, например китайцы и индийцы, к нему иногда прибегали и древние египтяне и даже древние греки.

3. Приближенная квадратура круга у древних греков.

Выше говорилось, что древние греки очень рано стали заниматься квадратурой круга. Еще в V в. ею, как известно, занимался Анаксагор из Клазомен. По свидетельству Платона, Анаксагор дал приближенную квадратуру круга, но это решение до нас не дошло.

По существу приближенную квадратуру круга дал Антифон, который квадрировал круг, как указывалось выше, последовательностью вписанных в круг правильных многоугольников, стороны которых все время удваиваются.

Позднее Б р и з о н для приближенной квадратуры круга стал рассматривать, кроме вписанных в круг правильных многоугольников, стороны которых все время

удваиваются, еще и описанные около круга правильные многоугольники, стороны которых также удваиваются.

Если Антифон указал путь, двигаясь по которому можно найти для π нижнюю границу, то Бризон показал, как найти и верхнюю границу π , и в этом смысле пошел дальше Антифона.

Большой вклад в теорию и практику приближенной квадратуры круга в III в. до н. э. внес Архимед из Сиракуз. Он посвятил вопросам приближенной квадратуры круга свой знаменитый трактат «Измерение круга», роль которого в науке трудно переоценить.

В этом трактате Архимед доказывает следующие три теоремы.

Теорема первая. Площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равняется длине окружности круга, а другой — радиусу круга.

Теорема вторая. Площадь круга относится к площади квадрата, построенного на диаметре, приблизительно, как 11 : 14.

Теорема третья. Длина окружности превышает утроенный диаметр менее чем на одну седьмую, но больше чем на десять семьдесят первых диаметра.

На языке символов последняя теорема запишется так:

$$C - 3D < \frac{1}{7} D \text{ и } C - 3D > \frac{10}{71} D,$$

где C — длина окружности, а D — ее диаметр.

Откуда

$$\frac{10}{71} D < C - 3D < \frac{1}{7} D,$$

или

$$3 \frac{10}{71} < \frac{C}{D} < 3 \frac{1}{7}.$$

Следовательно,

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

Верхнюю $3 \frac{1}{7}$ и нижнюю $3 \frac{10}{71}$ границы для числа π Архимед получил путем последовательного рассмотрения отношений периметров к диаметру правильных описанных и вписанных в круг многоугольников, начиная с шестиуголь-

ника и кончая 96-угольником. Если π приравнять верхней границе, то получим архимедово значение $\pi = \frac{22}{7}$ (архимедово число), которое, будучи выражено десятичной дробью, дает часто употребляемое приближение с точностью до 0,01.

С приближенной квадратурой круга тесно связано также и имя знаменитого основоположника геоцентрической системы мира древнегреческого ученого К л а в д и я П т о л е м е я (II в.), написавшего «Великое математическое построение астрономии в XIII книгах», известное под арабизированным названием «Альмагест».

Свое сочинение Птолемей как раз начинает с рассмотрения приближенной квадратуры круга, которая понадобилась ему для составления таблиц синусов.

Птолемей, пользуясь шестидесятеричной системой счисления, значение π выражает числом $3,8'30''$, т. е.

$$\pi = 3,8'30'' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} = 3,14167\dots$$

Птолемеёво значение числа π , как легко видеть, является более точным, чем значение π , найденное Архимедом.

4. Приближенная квадратура круга у древних китайцев

Одним из замечательных памятников древнего Китая является трактат «Математика в девяти книгах», составление которого относится к началу нашей эры. Первая книга этого трактата посвящается «Измерению полей» и содержит набор задач на вычисление площадей полей различной геометрической формы (прямоугольных, треугольных, в виде трапеций, круга, сегмента, сектора и кольца). Площади круга, сектора и кольца вычисляются при $\pi = 3$.

Для вычисления площадей «круглых полей» древние китайцы имели следующие правила.

Первое правило. «Умножь половину обвода на половину диаметра». Таким образом, имеем:

$$S = \frac{1}{2} C \cdot \frac{d}{2},$$

где C — обвод (длина окружности), d — ее диаметр.

Второе правило. «Умножь обвод на диаметр, раздели на 4 и возьми один раз». Следовательно, получим:

$$S = \frac{Cd}{4}.$$

Третье правило. «Умножь диаметр сам на себя, раздели на 4 и возьми 3 раза». Откуда

$$S = \frac{d^2}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4} d^2.$$

Во II в. китайский математик Чжан Хэн полагает, что $\pi = \sqrt{10}$. Этим приближением пользовался крупнейший индийский математик Брахмагупта.

В III в. крупный китайский математик Лю Хуэй путем рассмотрения вписанного в круг правильного многоугольника с 192 сторонами получил для π значение $\frac{157}{50}$, т. е. $\pi = 3,14$.

В V в. выдающийся китайский математик Цзю Чун-жи (430—501) для π получил приближение $\frac{355}{113}$, дающее семь верных значений цифр, и показал, что число π лежит в пределах:

$$3,1415296 < \pi < 3,1415297.$$

Прошло более 10 веков, когда в XVI в. это приближение было вновь переоткрыто в Нидерландах математиком Андрианом Мецием. Число $\pi = \frac{355}{113}$ в Европе называют «числом Меция».

До XIV в. точность вычисления числа π , данная Цзю Чун-жи, была самой высокой во всей мировой науке. Эту точность числа π впервые удалось перекрыть среднеазиатскому математику Джамшиду Гиясэддину Ал-Кашани, который для π нашел значение с 16 верными десятичными знаками.

5. Приближенная квадратура круга у древних индийцев

Самым старым памятником индийской геометрии, дошедшим до нашего времени, являются сборники, имеющие общее название «Сулва-сутры», в буквальном переводе «Правило веревки», составление которых охватывает

период с VI до IV в. до н. э. «Сулва-сутра» составляют свод инструкций для построения жертвенников с математическим расчетом их формы, размеров и ориентацией западно-восточной линии.

Для квадратуры круга в «Сулва-сутрах» дается такое индийское правило: «Надо разделить диаметр круга на 15 равных частей и взять 13 таких частей для стороны квадрата, равного кругу».

Легко подсчитать, что в этом случае число $\pi = \frac{676}{225}$, или $\pi = 3,00(4)$.

Занимаясь астрономией, индийцы большое внимание уделяли приближенной квадратуре круга и спрямлению окружности и ее частей. В связи с этим им приходилось находить различные приближения для числа π . Так, в VI в. один из виднейших индийских математиков Ариабхата в своем астрономо-математическом сочинении «Ариабхатам» для приближенного значения π давал значение $\frac{62832}{20000} = 3,1416$. Само правило гласило: «Прибавь 4 к 100, умножь на 8, приложи 62 000, это будет приблизительно длина окружности для диаметра, равного 20 000».

В VII в. крупнейший индийский математик Брахмагупта предлагал два приближенных значения для π . Одно приближение грубое и равняется 3, т. е. $\pi = 3$. Другое приближение более точное и равняется $\sqrt{10}$, т. е. $\pi = \sqrt{10}$.

В первой половине XII в. виднейший индийский математик Бхаскара-Акрия в своем астрономо-математическом сочинении «Сидданта-сиромани» (венец системы) посвящает математике главу «Лилавати» (прекрасная), где для числа π дает новое приближение, равное дроби $\frac{3927}{1250}$, т. е. $\pi = \frac{3927}{1250}$.

Свое приближение $\pi = \frac{3927}{1250}$ он даже называл «точным» в противоположность архимедову значению $\pi = 3\frac{1}{7}$, которое он считал «неточным».

Весьма точное приближение $\pi = \frac{3927}{1250}$ Бхаскара находил при помощи формулы:

$$S_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - S_n^2}},$$

где S_{2n} — сторона правильного вписанного в круг $2n$ -угольника,

S_n — сторона вписанного в круг правильного n -угольника и r — радиус круга.

Заметим, что к квадратуре круга имеют прямое отношение такие два правила Бхаскары.

Первое правило Бхаскары (для определения хорд).

Пусть будет c — окружность, a — дуга, D — диаметр и G — хорда, тогда будем иметь:

$$G = \frac{4Da(c-a)}{\frac{5}{4}c^2 - a(c-a)}.$$

Так, если диаметр равен 240, то хорды дуг в 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160 и 180 градусов соответственно будут равны 42, 82, 120, 154, 184, 208, 226, 236 и 240.

Второе правило Бхаскары (для определения дуг).

Формула, определяющая дугу a в функции хорды G для окружности c и диаметра D , будет иметь вид:

$$a = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{\frac{5}{4}c^2G}{4D + G}}.$$

Эту формулу Бхаскара получил из предыдущей, решая уравнение второй степени относительно a .

6. Приближенная квадратура круга у народов Средней Азии и ближнего Востока

Среднеазиатские народы имеют за своими плечами богатую самобытную культуру, корни которой уходят в глубину веков. Особенно большой вклад внесли среднеазиатские ученые в мировую математическую культуру, являясь зачинателями ряда научных математических дисциплин и особенно астрономии, алгебры, тригонометрии.

Исторические исследования последних лет показывают, что первое место в развитии математики в странах арабского халифата на протяжении более 500 лет, с IX по XVI в., неизменно принадлежало ученым народов Средней Азии

и Закавказья и прежде всего таджикам, узбекам и азербайджанцам. Совершенно прав А. П. Юшкевич, подчеркивая, что «Достижения среднеазиатских математиков IX—XV вв. принадлежат, таким образом, в подавляющей своей части народам нашей страны и поэтому должны привлечь особое внимание советских историков науки» (А. П. Юшкевич, О математике народов Средней Азии в IX—XV вв., «Историко-математические исследования», вып. 4, ГИТТЛ, 1951, стр. 45).

Из ранних среднеазиатских ученых много занимался приближенной квадратурой круга известный хорезмийский алгебраист первой трети IX в. ал-Хорезми (Мухамед бен Муса ал-Хорезми), прославивший себя двумя трактатами: один по алгебре «Хисаб ал-джебр вал-мукабала», а другой по арифметике «Арифметика» ал-Хорезми.

Ал-Хорезми жил при дворе халифа ал-Мамуна, покровителя и ценителя наук, по велению которого переводились древнегреческие классики («Начала» Евклида, «Конические сечения» Аполлония и работы Архимеда «Об измерении круга», «О шаре и цилиндре», «Алмагест» Птолемея и многие другие), а также извлечения из работ индийских ученых Ариабхата и Брамагупты. Ал-Хорезми успешно занимался вопросами астрономии (уточнил таблицы хорд Птолемея) и принимал участие при измерении градуса земного меридиана. Ал-Хорезми оставил еще ряд трактатов, в том числе «Трактат по астролябии» и «Трактат о солнечных часах».

Своими сочинениями ал-Хорезми много содействовал распространению индийской системы счисления, без которой вряд ли можно было бы в Европе получить «лудольфово число», а также другие, более точные европейские приближения числа π .

Ал-Хорезми познакомил свои и европейские народы с наиболее важными греческими и индийскими приближениями числа π . Он знакомил читателя с архимедовым числом $\pi = 3\frac{1}{7}$ и подчеркивал, что это число является «наиболее употребительным в практике». Об индийских приближениях числа π , которыми являются $\pi = \sqrt{10}$ и $\pi = \frac{62832}{20000}$, он говорит как о наиболее точных результатах и подчеркивает их индийское происхождение.

В так называемой «арабской» литературе имеется сочинение «О квадратуре круга» математика ал - Х а й т а м а (умер в 1038 г.), которое целиком посвящено квадратуре круга, но, к сожалению, оно еще до сих пор широко не обнародовано. Один из знатоков истории квадратуры круга профессор Ф. Р у д и о высказывает сожаление по поводу того, что это сочинение «еще никем не исследовано, между тем как это первое, известное нам со времен Архимеда, сочинение с таким заглавием и, судя по имени автора, следует ожидать найти в нем интересные попытки подойти возможно ближе к площади круга» (Ф. Р у д и о, О квадратуре круга с изложением истории вопроса. Перевод с немецкого, под редакцией и с примечаниями акад. С. Н. Бернштейна, изд. 3-е, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1936, стр. 39).

В XV в. приближенной квадратурой круга успешно занимался иранский математик ал - Қ а ш и (Джемшид Гиясэддин ал-Каши), посвятивший этому вопросу «Трактат об окружности».

Отдавая дань религиозным суевериям, ал-Каши начинает свой трактат так: «Хвала Аллаху, обладающему знанием отношения диаметра к окружности, знающему величину всего сложного и простого, творцу земли и небес, создателю света во тьме». Говоря о цели своего сочинения, в предисловии к нему он писал: «...мы хотим так определить окружность круга в частях, в которых выражен диаметр, чтобы мы были уверены, что в круге, диаметр которого равен шестистам тысячам диаметров земли, разница между ней (полученной величиной окружности) и истинной была не больше волоса, т. е. одной шестой ширины среднего ячменного зерна, так что разность для круга меньше чем этот не измерялась бы ничем (из этих мер) (Джемшид Гиясэддин ал-Каши, Ключ арифметики и трактат об окружности, Перевод с арабского Б. А. Розенфельда, редакция Б. А. Сегала и А. П. Юшкевича, ГИТТЛ, М., 1956, стр. 266).

В «Трактате об окружности» ал-Каши дает приближенное вычисление числа 2π с 17 десятичными знаками, выражая это число дробью со знаменателем 10^{16} . Полученный ал-Каши результат можно записать так:

$$2\pi = 6, 2831853071795865.$$

Этот результат верен во всех разрядах.

7. Исследования о квадратуре круга у европейских математиков

В Европе исследования, связанные с задачей о квадратуре круга, шли по двум направлениям. Ученые первого направления старались дать для π как можно больше десятичных знаков. В этом стремлении у них даже наблюдается своего рода «соревнование». Так, в 1597 г. с помощью 2^{30} -угольников Андриан ван-Ромен повторяет упомянутое выше приближение для π ал-Каши и подтверждает правильность его результата. Годом раньше, т. е. в 1596, Людольф ван Цейлон (1539—1610) перекрывает результат ал-Каши и Андриана ван-Ромена и вычисляет для π сначала 20 знаков, а затем в 1615 г. 32 знака и, наконец, 35 знаков. Рекорд установил английский вычислитель У. Шенкс, который в 1873 г. вычислил π с 708 десятичными знаками. Его результат перекрыли в 1948 г. ученые-вычислители Фергюссон и Уренч. Независимо друг от друга они получили для π 808 знаков. Они обнаружили, что у Шенкса все десятичные знаки, начиная с 528-го, неверные. Для интереса приводим значение для π , найденное Фергюссоном и Уренчем. Вот это число:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399
37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825
34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582
23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559
64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475
64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610
45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315
58817 48815 20920 96282 92540 91515 36436 78925 90360
01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057
27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011
94912 98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737
19070 21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674
81846 76694 05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342
75778 96091 73673 17872 14684 40901 22495 34301 46549
58537 10507 92279 68225 89235 42019 95611 21290 21960
86403 44181 59813 62977 47713 09960 51870 72113 49999
99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859 50244 594(55)

Необходимо отметить, что результат Фергюссона и Уренча тоже перекрыт. В настоящее время с помощью вычислительных машин для числа π найдено более 2000 десятичных знаков.

Ученые второго направления шли по линии уяснения арифметической природы числа π и принципиальной невозможности решения задачи о квадратуре круга при помощи циркуля и линейки. Характерны в этом отношении работы Эйлера, Ламберта, Лежандра и «победителя числа π » Линдемана.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ КВАДРАТРИСЫ И КОНХОИДЫ

1. Вывод уравнения квадратрисы

Пусть прямая BC движется равномерно со скоростью v сверху вниз, оставаясь параллельной OA , а прямая OB вращается равномерно с угловой скоростью ω по ходу часовой стрелки вокруг точки O (рис. 22). Далее, пусть за время T прямая BC перейдет из положения BC в положение OA и за это же время T прямая OB повернется на прямой угол из положения OB в положение OA . Положим, что за время t прямая BC будет в положении QR , а прямая OB в положении OM . В этом случае точка M будет лежать на квадратрисе BMD , соответствующей квадрату $OACB$.

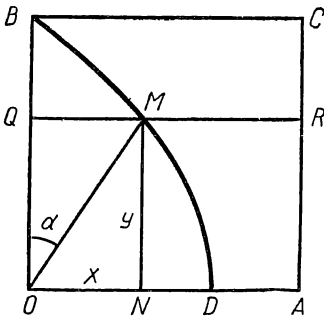


Рис. 22

Примем направления OA и OB за оси координат и обозначим соответственно через Ox и Oy . Пусть x и y будут координатами точки M .

Найдем теперь уравнение, которому удовлетворяют x и y одновременно. Прежде всего заметим:

$$v = \frac{a}{T},$$

где a — сторона данного квадрата.

Исходя из чертежа, замечаем, что

$$y = OB - QB,$$

или

$$y = a - vt,$$

откуда

$$y = a - \frac{a}{T}t. \quad (1)$$

Обозначим угол $ВОМ$ через α , получим

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Имея в виду, что $\alpha = \omega t$, будем иметь:

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \omega t.$$

Принимая во внимание, что $\omega = \frac{\pi}{2T}$, получим:

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2T}. \quad (2)$$

Определим t из соотношения (1)

$$t = \frac{(a-y)T}{a}.$$

Подставив полученное значение t в соотношение (2), будем иметь:

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \frac{\pi(a-y)}{2a}.$$

Последнее уравнение можно представить так:

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2a} \right),$$

откуда

$$\frac{x}{y} = \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2a},$$

или

$$\boxed{x = y \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2a}}.$$

Это и будет искомое уравнение квадратрисы.

Заметим, что для решения задачи о квадратуре круга с помощью квадратрисы надо знать координаты точки D , т. е. координаты нижнего конца квадратрисы. Ордината

этой точки равна нулю, а абсцисса находится при помощи формулы:

$$x = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2a} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi y}{2a}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}} =$$

$$= \frac{2a}{\pi} \approx \frac{2a}{3,14} \approx 0,67a.$$

2. Вывод уравнения конхоиды

Рассмотрим конхоиду прямой AB с полюсом в точке O (рис. 23). Пусть a — расстояние полюса O до прямой AB ,

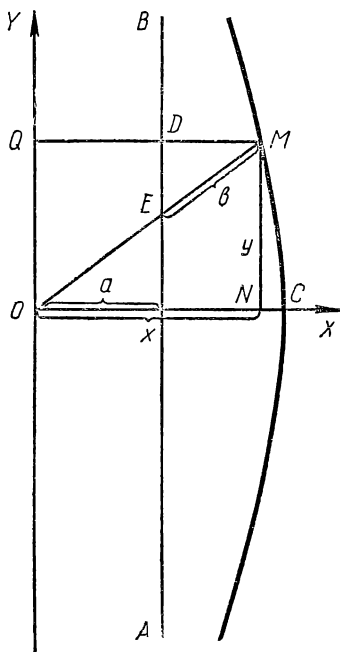


Рис. 23

а b — параметр. Пусть M — произвольная (текущая) точка конхоиды, координаты которой относительно некоторой системы координат XOY суть x и y . Найдем уравнение, которому удовлетворяют x и y . Для этой цели выберем систему координат XOY так, чтобы начало координат находилось в полюсе O , ось OX пошла по прямой OK , а ось OY — параллельно AB .

Опустим из точки M на оси OX и OY соответственно перпендикуляры MN и MQ . Обозначим через D точку пересечения прямых AB и MQ , а через E — точку пересечения прямых AB и OM . Из чертежа легко усмотреть, что $\triangle ONM \sim \triangle EDM$. Откуда

$$\frac{OM}{EM} = \frac{ON}{DM},$$

или

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b} = \frac{x}{x - a}.$$

Возводя в квадрат обе части полученного уравнения и освобождаясь от дробности, получим:

$$(x^2 + y^2) (x - a)^2 = b^2 x^2.$$

Это и будет искомое уравнение конхоиды.

Выходит, что конхоида Никомеда есть алгебраическая кривая четвертого порядка.

* * *

ГЛАВА V

ПРИМЕНЕНИЕ НОМОГРАФИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ТРИСЕКЦИИ УГЛА

На I Всемирном конгрессе математиков, состоявшемся в 1890 г. в Париже, было принято решение выделить в самостоятельную математическую дисциплину ту ее часть, которая занимается построением и изучением геометрических мест точек, удовлетворяющих одному и тому же закону. Эта дисциплина была названа номографией, что по-гречески означает графическое изображение закона.

За последние полвека номография получила широкое применение как при решении различных математических задач, так и для разных инженерных расчетов.

Графическое решение уравнений со многими неизвестными в настоящее время не представляет для номографиста особого затруднения. Тем меньшую сложность должно представить для любителя номографии решение задачи трисекции угла, ибо эта задача всего с двумя неизвестными.

Ниже приводим несколько номограмм, решающих эту задачу. Для их построения не было сделано никаких вычислений и были использованы только циркуль и линейка без делений, как этого требовали древнейшие геометры.

1. Номограмма для трисекции острого угла, построенная по формуле $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$

Приводим метод построения номограммы формулы,

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha,$$

не прибегая к каким-либо вычислениям и используя лишь циркуль и линейку без делений.

Для того чтобы избежать необходимость вычислять по тригонометрическим таблицам значения $\sin \alpha$ и $\sin 3\alpha$, на рисунке 24 построен график синусов углов. Для этого по окружности верхнего квадранта от точки B отложены 27 равных дуг и точки их концов пронумерованы от 1 до 27. Очевидно, что перпендикуляры из этих точек на радиус AB равны синусам соответствующих центральных углов. Так как опускать перпендикуляры из всех точек на радиус AB требует значительных геометрических построений, то на том же рисунке построен и нижний квадрант окружности и на нем отложены от той же точки B те же 27 равных дуг и точки их концов также пронумерованы от 1 до 27, но со значком прим. Соединяя одноименные точки верхнего и нижнего квадранта, избавляемся от необходимости опускать перпендикуляры на радиус AB . Пользуясь рисунком 24, можно без всяких вычислений для заданного угла α и соответствующего ему угла 3α найти величины отрезков, отвечающие их синусам, хотя значения эти являются величинами несоизмеримыми.

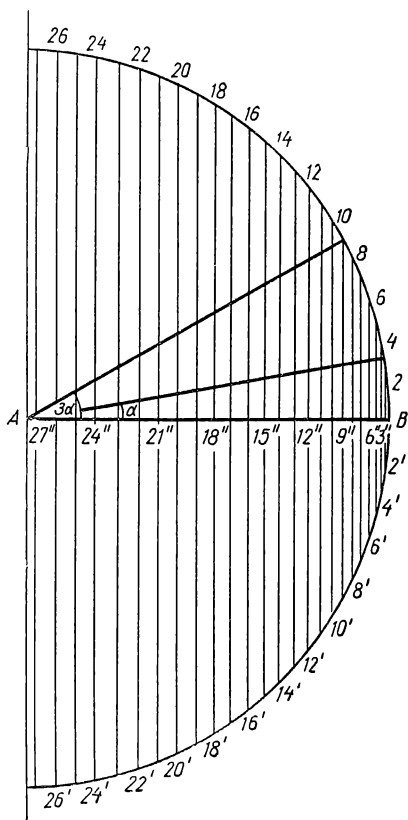


Рис. 24

На рисунке 25 дана кривая формулы:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Построение выполнено в следующей последовательности. Тем же радиусом AB , что и на рисунке 24, на рисунке 25 построена четверть окружности. Горизонтальная ось принята за ось $\sin \alpha$, а вертикальная — за ось $\sin 3\alpha$. За

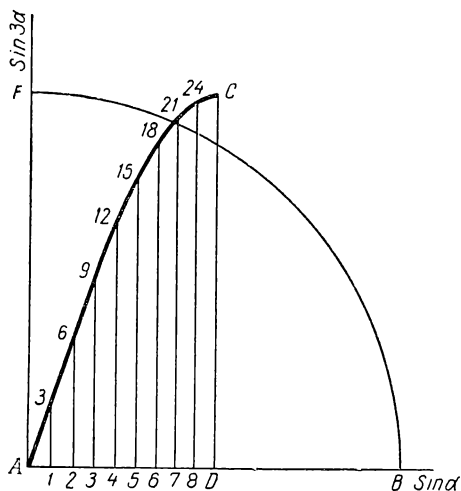


Рис. 25

начало координат принята точка A . По горизонтальной оси от точки A отложены отрезки, равные синусам углов, которым отвечают точки от 1 до 9 на рисунке 24. Нумерация этих точек сохранена та же. От каждой из полученных точек отложены вверх по перпендикулярам к радиусу AB отрезки, равные синусам соответствующих тройных углов, что отвечает номерам точек,

кратных трем (3, 6, 9 и т. д.). На рисунке 25 этим точкам присвоена такая же нумерация. Следовательно, кривая AC , построенная по точкам на рисунке 25, представляет собой кривую зависимости $\sin 3\alpha$ от $\sin \alpha$, т. е. кривую формулы

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Для того чтобы использовать кривую AC для деления любого острого угла на три равные части, на рисунке 26 построена номограмма, на которой, кроме кривой AC и квадранта окружности FB , еще проведена прямая AE под углом 45° к горизонтальной оси AB . Эта прямая нужна для того, чтобы горизонтальный отрезок по оси AB , отвечающий значению $\sin \alpha$, преобразовать в равный ему вертикальный отрезок и найти соответствующую ему точку на квадранте FB окружности.

На номограмме дано построение для следующего примера: требуется найти третью часть угла $МAB$. Из точки $М$ проводим горизонталь до кривой AC , затем вертикаль до прямой AE и далее горизонталь до пересечения с окружностью FB в точке N , которую соединяем с центром окружности A . Полученный $\angle NAB$ равен третьей частью $\angle MAB$.

Из приведенного описания построения кривой AC трисекции угла видим, что она не сложнее построения квадратрисы Гиппия, а способ пользования кривой AC проще и нагляднее.

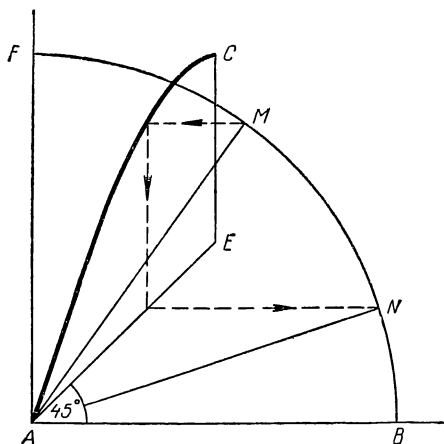


Рис. 26

2. Внутренние и внешние кривые трисекции углов первой четверти окружности

Метод нахождения геометрических мест точек, удовлетворяющих какому-либо условию, в настоящее время широко применяется как в номографии, так и при решении геометрических задач на построение. Пользуясь им, удалось построить несколько кривых трисекции угла. Приведем описание двух наиболее простых построений этих кривых.

На рисунке 27 показана схема построения внутренних кривых трисекции острых углов. На этом рисунке дана четверть окружности, положение радиуса OC , определяющего заданный угол $COA = 3\alpha$, положение радиуса OD , определяющего искомый угол $DOA = \alpha$, и положение радиуса OE , определяющего угол $EOA = 2\alpha$.

Если через точку D провести прямую $DF \parallel OA$, то, очевидно, зная положение точки F на радиусе OC , легко решить обратную задачу, т. е. найти положение точки D на

окружности, а соединив ее с центром окружности, построим $\angle DOA = \frac{1}{3} \angle COA$.

Если для каждого угла найдем положение радиуса, образующего угол 3α , и на нем отметим положение точки F , как это сделано на рисунке 27, то, соединяя все эти точки

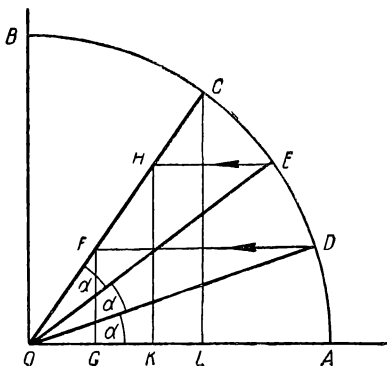


Рис. 27

плавной кривой, получим геометрическое место точек, обладающих одним и тем же свойством; а именно: если провести радиус, отсекающий заданный угол, и точку пересечения этого радиуса с построенной кривой перенести параллельно радиусу OA на окружность и полученную точку соединить с центром окружности, то построенный таким способом угол равен $\frac{1}{3}$ заданного угла.

На рисунке 28 показано построение кривой CD , которая отвечает геометрическому месту точек F рисунка 27.

На схеме, приведенной на рисунке 27, показано также положение радиуса OE , определяющего $\angle EOA = 2\alpha$. Если через точку E провести $EH \parallel OA$, то получим в пересечении с радиусом точку H . Очевидно, зная положение точки H , легко найти положение точки E на окружности, а следовательно, построить $\angle EOA = \frac{2}{3} \angle COA$.

Геометрическое место точек H даст вторую внутреннюю кривую трисекции острого угла. На рисунке 28 показано так же, как построена кривая EF , отвечающая этому геометрическому месту точек.

Построение обеих внутренних кривых трисекции угла не сложнее построения квадратрисы Гиппия, но способ пользования ими проще и отчетливее, как это видно из номограммы, приведенной на рисунке 29. На ней даны обе построенные нами внутренние кривые трисекций угла и четверть соответствующей окружности. Приведенный на ней

пример использования номограммы полагаем не нуждается в пояснении.

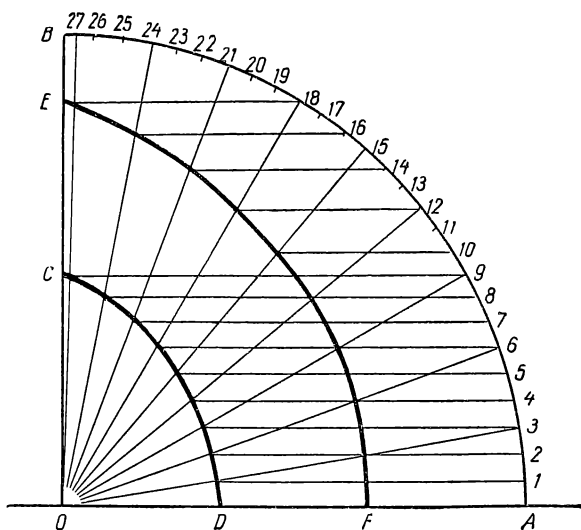


Рис. 28

Выведем уравнения обеих кривых в полярных координатах¹. Из рисунка 27 имеем, что $\triangle OFG \sim \triangle OCL$, откуда

$$\frac{OF}{OC} = \frac{FG}{CL},$$

но $OF = \rho_1$; $OC = R$; $FG = R \sin \alpha$; $CL = R \sin 3\alpha$, следовательно,

$$\frac{\rho_1}{R} = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha},$$

или

$$\rho_1 = \frac{R \sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} = \frac{R}{3 - 4 \sin^2 \alpha}. \quad (1)$$

Это уравнение первой (более близкой к центру окружности) внутренней кривой трисекции угла в полярных координатах, где угол α — третья часть заданного угла.

¹ С полярными координатами учащиеся могут познакомиться по книге Н. В. Ефимова «Краткий курс аналитической геометрии», ГИТТЛ, 1956, стр. 16—18.

Из рисунка 27 имеем также, что $\triangle OHK \sim \triangle OCL$, откуда

$$\frac{OH}{OC} = \frac{HK}{CL};$$

но $OH = \rho_2$; $OC = R$; $HK = R \sin 2\alpha$; $CL = R \sin 3\alpha$, следовательно,

$$\frac{\rho_2}{R} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha},$$

или

$$\rho_2 = \frac{R \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{2R \sin \alpha \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} = \frac{2R \cos \alpha}{3 - 4 \sin^2 \alpha}. \quad (2)$$

Полученное уравнение (2) будет уравнением второй внутренней кривой трисекции угла в полярных координатах, где угол α — третья часть заданного угла.

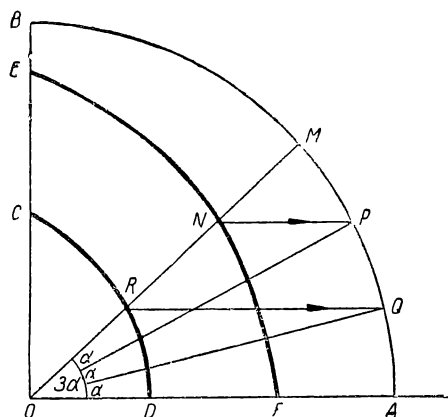


Рис. 29

Применяя весьма схожий метод, можно построить две наружные кривые трисекции угла. На рисунке 30 дана схема такого построения.

Она отличается от схемы на рисунке 27 тем, что в ней проводят горизонтальную прямую CF через точку C , являющуюся концом радиуса, отвечающего заданному углу COA , а радиусы OE и OD , отвечающие углам 2α и α , продол-

жают до пересечения в точках H и K с прямой CF . Очевидно, что если знать положение точек H и K на прямой CF , то провести радиусы OE и OD не представляет труда. Следовательно, и в данном случае задача сводится к построению геометрического места точек H и геометрического места точек K .

Это построение показано на рисунке 31, где кривая CD представляет геометрическое место точек пересечения про-

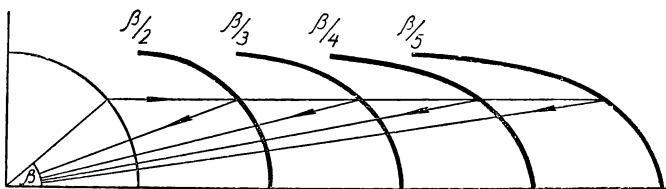


Рис. 33

сти, имеются четыре кривые. Первая, обозначенная $\frac{\beta}{2}$, служит для деления угла пополам; вторая, обозначенная $\frac{\beta}{3}$, — для деления угла на три равные части; третья, обозначенная $\frac{\beta}{4}$, — для деления угла на четыре равные части и четвертая, обозначенная $\frac{\beta}{5}$, — для деления угла на пять равных частей. Способ пользования номограммой виден из приведенного на ней примера.

3. Деление угла на три равные части, пользуясь улиткой Паскаля

Рассмотрим приведенную раньше схему деления угла на три равные части по Архимеду. Из нее видим, что из вершины заданного угла проводится произвольным радиусом окружность, а затем из точки пересечения окружности с наклонной стороной заданного угла проводят прямую DA так, чтобы отрезок $AB = R$. Для этого, очевидно, доста-

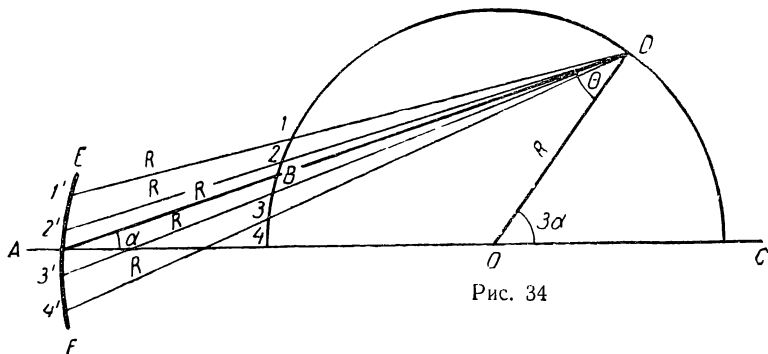


Рис. 34

точно провести через точку D несколько лучей и на каждом из них отложить, начиная от точки пересечения луча

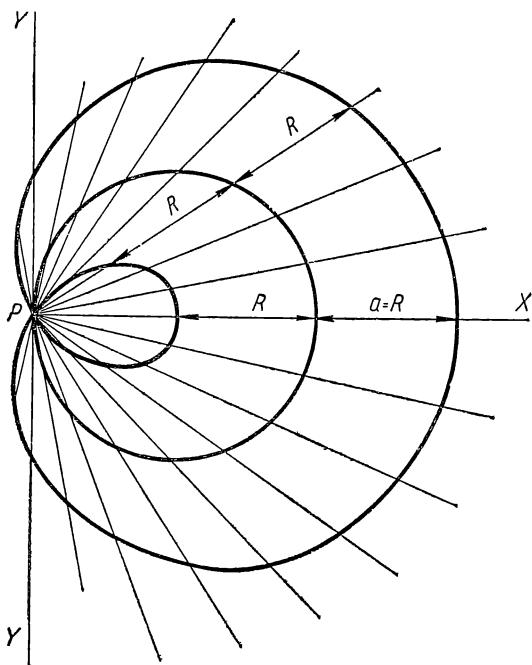


Рис. 35

с окружностью, отрезок, равный R , и полученные точки соединить кривой, как это сделано на рисунке 34. Пересечение этой кривой EF с продолжением стороны OC заданного угла и даст искомую точку A . Легко сообразить, что полученный $\angle DAC = \frac{1}{3} \angle DOC$.

По методу построения кривой EF видим, что эта кривая представляет собой часть кривой конхоиды (улитки Паскаля). Базисом ее является круг радиуса R , полюсом точка P , расположенная на окружности. На лучах, проводимых из полюса, от точек их пересечения с базисом откладываются одинаковые отрезки, равные радиусу круга R . Уравнение такой улитки Паскаля в прямоугольных координатах, если за начало координат принять полюс, будет

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = R^2 (x^2 + y^2), \quad (5)$$

а в полярных координатах

$$\rho = R (1 + 2 \cos \theta). \quad (6)$$

Следовательно, улитка Паскаля, в которой откладываемый отрезок равен радиусу круга, принятого за базис, будет представлять собой и кривую трисекции угла.

На рисунке 35 дано построение такой улитки Паскаля. Так как откладываемый отрезок менее диаметра круга, то улитка Паскаля имеет петлю, показанную на рисунке 35.

Номограмма для трисекции угла при помощи улитки Паскаля дана на рисунке 36. Она состоит из верхней ветви улитки (без петли) и полуокружности. Вершиной заданного угла является центр полуокружности. Для нахождения третьей части заданного угла AOC достаточно соединить точку A , полученную от пересечения стороны OA

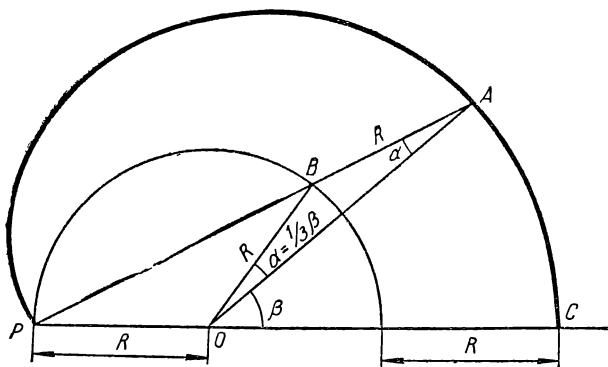


Рис. 36

угла AOC с улиткой Паскаля, с полюсом P . Полученный $\angle PAO = \frac{1}{3} \angle AOC$. Если точку B пересечения прямой PA с кругом соединить с центром круга, то полученный $\angle BOA = \frac{1}{3} \angle AOC$. Докажем это. Из построения на номограмме видим, что $\triangle ABO$ и $\triangle POB$ — равнобедренные, так как

$$PO = OB = BA = R.$$

Следовательно, $\angle BAO = \angle BOA = \alpha$. Но $\angle PBO$ — внешний относительно $\triangle OBA$, поэтому $\angle PBO = \angle BOA + \angle BAO = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Из $\triangle POB$ имеем: $\angle PBO = \angle BPO = 2\alpha$. Заданный угол $\angle AOC$ — внешний относительно $\triangle PAO$, поэтому имеем: $\angle AOC = \angle APO + \angle PAO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$.

Следовательно, $\angle PAO = \angle BOA = \alpha = \frac{1}{3} \angle AOC = \frac{1}{3} \beta$.

Если для трисекции углов, пользуясь конхойдой прямой Никомеда, требуется для каждого заданного угла строить свою конхойду, то при использовании улитки Паскаля для тех же целей достаточно построить такую улитку один раз и она может быть использована для трисекции любого острого угла.

4. Деление угла на три равные части, пользуясь новой улиткой

Для построения кривой трисекции угла может быть использована схема, приведенная на рисунке 37. На ней $\angle OAB$ — заданный, а $\angle CAB$ равен его третьей части. На наклонной стороне заданного угла OAB взята произвольная точка O и радиусом OA проведена окружность,

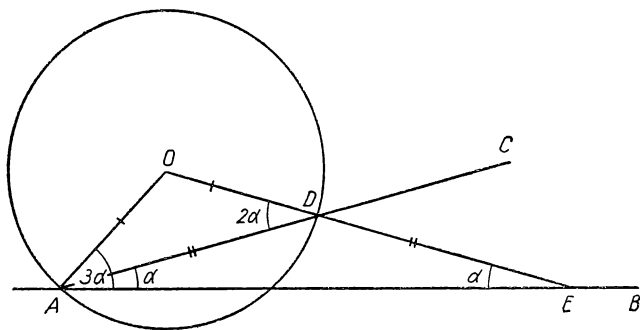


Рис. 37

которая пересекает сторону угла OAB в точке D . Проведя через эту точку радиус OD и продолжая его до пересечения с прямой AB — второй стороной заданного угла OAB ,

получим $\triangle OAD$ и $\triangle ADE$ — оба равнобедренные. Докажем это.

$\triangle AOD$ — равнобедренный, так как $OA = OD = R$. Следовательно, $\angle OAD = \angle ODA = 2\alpha$. Но $\angle ODA$ — внешний относительно $\triangle ADE$, поэтому

$$\angle ODA = \angle DAE + \angle DEA,$$

или

$$2\alpha = \alpha + \angle DEA,$$

откуда $\angle DEA = \alpha$.

Следовательно, $\triangle ADE$ — равнобедренный и $AD = DE$.

Отсюда получаем способ деления угла на три равные части. Для этого надо из произвольной точки O , выбранной на стороне заданного угла, провести радиусом OA

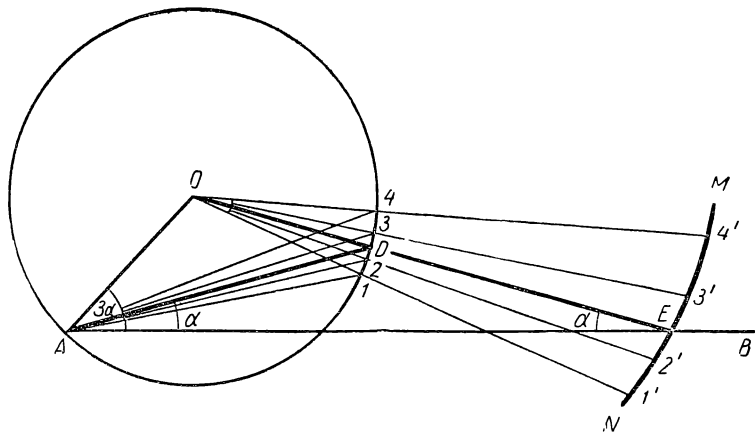


Рис. 38

окружность, а затем из вершины A заданного угла провести прямую AD так, чтобы, соединив точку D с центром окружности O и продолжив полученную прямую OD до пересечения со стороной AB , получить $DE = AD$. На рисунке 38 показано, как найти положение прямой AD , удовлетворяющее этому условию.

Из вершины A заданного угла проводим несколько прямых, пересекающих окружность в точках $1, 2, 3$ и 4 . Эти точки соединяем с центром окружности, продолжаем полученные радиусы за окружность и на продолжении каждого радиуса откладываем отрезок, равный расстоянию конца радиуса от вершины A заданного угла. Таким образом, нами получены точки $1', 2', 3'$ и $4'$, которые соединяем плавной кривой MN . Точку пересечения этой кривой со стороной AB заданного угла OAB соединяем с цент-

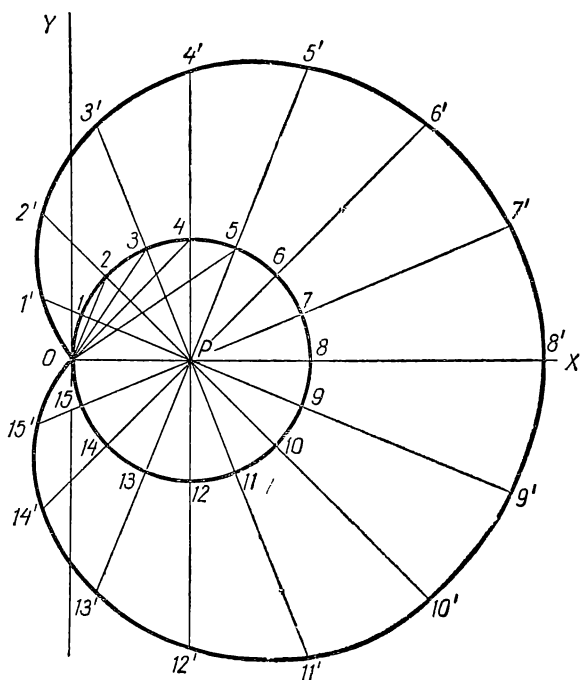


Рис. 39

ром окружности O . Эта прямая OE пересечет окружность в точке D , которую соединяем с вершиной A заданного угла. Так как согласно нашему построению $AD = DE$, то прямая AD и является искомой.

Чтобы избежать необходимости строить указанным выше способом кривую MN для каждого угла, который требуется разделить на три равные части, на рисунке 39 дает-

ся построение полной кривой. Способ построения ее следующий. Точка P , центр окружности, принята за полюс, сама окружность принята за базис, а отрезки, откладываемые на продолжениях радиусов, в отличие от кривых конхонд не равны друг другу, а изменяются по следующему определенному закону. Принимаем точку O на окружности за второй полюс и из него проводим лучи до концов радиусов. Получаем отрезки $O1, O2, O3, O4$ и т. д. Каждый из этих отрезков откладываем на продолжении своего радиуса, т. е. откладываем $11' = O1, 22' = O2, 33' = O3, 44' = O4$ и т. д. Полученные точки $1', 2', 3', 4'$ и т. д. соединяем плавной кривой.

Как видим, откладываемые отрезки сперва увеличиваются от нуля до длины, равной диаметру окружности, а потом уменьшаются снова до нуля. Полученная кривая

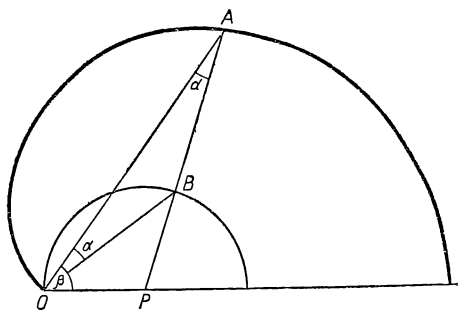


Рис. 40

по своему виду напоминает улитку Паскаля, поэтому дальше называем ее новой улиткой.

На рисунке 40 построена номограмма для трисекции углов при помощи такой улитки. Номограмма состоит из половины новой улитки и полуокружности. Точка O является вершиной заданного угла. Из рисунка 40 видно, что для нахождения третьей части заданного угла AOP достаточно точку A соединить с точкой P , тогда $\angle OAP = \alpha = \frac{1}{3}\beta$. Если точку B , полученную при пересечении прямой AP с окружностью, соединить с точкой O , то получим $\angle AOB = \alpha = \frac{1}{3}\beta$. Докажем это.

По способу построения этой улитки имеем, что $OB = BA$, следовательно, $\triangle OAB$ — равнобедренный и $\angle OAP = \angle PAO = \alpha$. Но $\angle OBP$ — внешний относительно $\triangle OAB$, поэтому $\angle OBP = \angle BAO + \angle BOA = \alpha + \alpha = 2\alpha$. В свою очередь $\triangle OBP$ — тоже равнобедренный, так как $OP = PB = R$, следовательно, $\angle BOP = \angle OBP = 2\alpha$, а $\angle AOP = \angle AOB + \angle BOP = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. Таким образом, проводя прямую OB , отсекаем от заданного угла его третью часть. Пользуясь этой номограммой, можно произвести трисекцию любого угла от 0° до 135° .

5. Номограмма для трисекции острых и тупых (до 180°) углов

Все приведенные выше способы деления угла на три равные части в большинстве своем давали решение только для острых углов и лишь, пользуясь новой улиткой, представляется возможным разделить на три равные части и тупой угол, если он не более 135° .

Ниже приводим построение кривой трисекции угла, пользуясь которой можно разделить на три равные части как острый, так и тупой (до 180°) углы.

На рисунке 41 дана схема построения такой кривой. На ней $\angle BAC$ — заданный, т. е. угол, который требуется

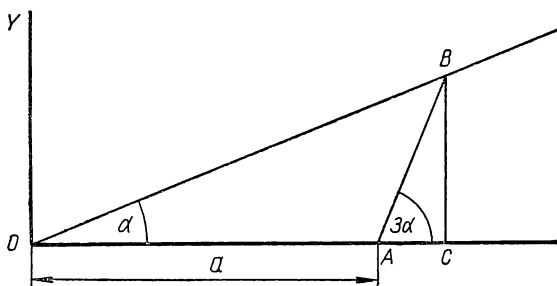


Рис. 41

разделить на три равные части, а $\angle BOC$ равен одной трети заданного, т. е. искомый. Горизонтальные стороны этих углов совпадают. Расстояние между вершинами этих углов $OA = a$. Точка B — пересечение наклонных сторон

обоих углов — искомая точка нашей кривой трисекции углов. Если для каждого угла с вершиной в точке O будем строить соответственно угол, в три раза больший его, с вершиной в точке A , то наклонные прямые будут пересекаться для каждой комбинации углов в другой точке, причем, если $\angle BOC$ будем увеличивать, то точка B будет перемещаться влево, а если уменьшать, то вправо.

На рисунке 42 показано построение кривой трисекции угла по описанному методу. Точка A является вершиной изменяющегося искомого угла α , а точка B — вершиной

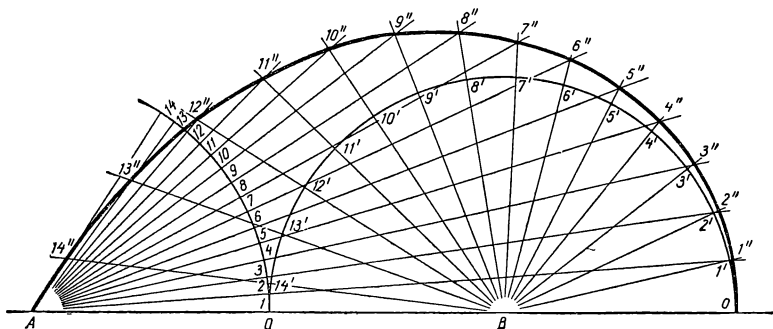


Рис. 42

соответствующего заданного угла 3α . Нумерация точек на полуокружности с центром в точке B и нумерация точек на дуге окружности с центром в точке A соответствующая. Радиусы полуокружности и дуги одинаковые. Расстояние $AB = 2R$. Построение точек кривой трисекции ясно из рисунка 42. Нумерация построенных точек соответствует нумерации точек на полуокружности и на дуге. Выведем уравнение построенной кривой трисекции угла.

Из схемы на рисунке 41 видно, что координаты точки B связаны следующими зависимостями:

- 1) из $\triangle OBC$ $BC = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha$ или $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$,
- 2) из $\triangle ABC$ $BC = AC \cdot \operatorname{tg} 3\alpha$ или $y(x - a) \operatorname{tg} 3\alpha$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \text{ и } \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{y}{x - a}.$$

Выведем зависимость между $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3\alpha &= \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Подставляя в выведенную нами зависимость значения $\operatorname{tg} 3\alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x-a} &= \frac{\frac{3y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{1 - \frac{3y^2}{x^2}} = \frac{3x^2y - y^3}{x(x^2 - 3y^2)} = \frac{y(3x^2 - y^2)}{x(x^2 - 3y^2)}; \\ x(x^2 - 3y^2) &= (x-a)(3x^2 - y^2); \\ x^3 - 3xy^2 - 3x^3 + 3ax^2 + xy^2 - ay^2 &= 0; \\ 2x^3 - 3ax^2 + 2xy^2 + ay^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Это будет уравнение кривой трисекции угла для той ее части, которая расположена вправо от точки A (см. рис. 41). Для части, которая расположена влево от этой точки, будем иметь из $\triangle ABC$, что $BC = AC \cdot \operatorname{tg} 3\alpha$ или $y = (a - x) \operatorname{tg} 3\alpha$ и соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{y}{a-x} &= \frac{\frac{3y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{1 - \frac{3y^2}{x^2}} = \frac{y(3x^2 - y^2)}{x(x^2 - 3y^2)}; \\ x(x^2 - 3y^2) &= (a-x)(3x^2 - y^2); \\ x^3 - 3xy^2 - 3ax^2 + 3x^3 + ay^2 - xy^2 &= 0; \\ 4x^3 - 3ax^2 - 4xy^2 + ay^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что при $x = a$ уравнения (7) и (8) должны быть тождественны.

Для уравнения (7) при $x = a$ имеем:

$$\begin{aligned} 2a^3 - 3a^3 + 2ay^2 + ay^2 &= 0, \\ 3y^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Для уравнения (8) при $x = a$ имеем:

$$4a^3 - 3a^3 - 4ay^2 + ay^2 = 0,$$

$$3y^2 = a^2.$$

Как видим, ордината y в точке сопряжения обеих кривых трисекции угла совпадает.

На рисунке 43 дана номограмма трисекции острого и тупого (до 180°) углов, пользуясь построенной кривой.

На ней точка B — вершина заданного угла, а точка A — вершина искомого угла. Способ пользования виден из приведенного примера.

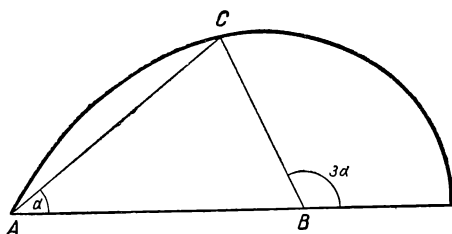


Рис. 43

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. Адлер, Теория геометрических построений. Перевод с немецкого, изд. 3, Учпедгиз, Л., 1940.

Б. И. Аргунов и М. Б. Балк, Геометрические построения на плоскости, Учпедгиз, 1955.

Архимед, Исчисление песчинок (Псаммит). Перевод, краткий обзор работ и примечания проф. Г. Н. Попова, ГТТИ, М.—Л., 1932.

И. Г. Башмакова, Лекции по истории математики в Древней Греции, «Историко-математические исследования», вып. XI, ГИФМЛ, М., 1958, стр. 225—438.

Г. Н. Берман, Циклоида. Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с ней связанных, изд. 2, ГИТТЛ, М., 1954.

Б. Бляшке, Греческая и наглядная геометрия. «Математическое просвещение». Математика, ее преподавание, приложения и история. Вып. 3, ГИФМЛ, М., 1958, стр. 101—138.

В. М. Брадис, В. Л. Минковский, А. К. Харчева, Ошибки в математических рассуждениях, изд. 2, Учпедгиз, М., 1959.

Б. Л. Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. Перевод с голландского И. Н. Веселовского, ГИФМЛ, М., 1959.

М. Е. Ващенко-Захарченко, Исторический очерк развития геометрии, т. I, Киев, 1883.

М. Е. Ващенко-Захарченко, «Начала» Евклида с пояснительным введением и толкованиями, Киев, 1880.

Г. Вебер и И. Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. I. Элементарная алгебра и анализ, изд. второе. Матезис, Одесса, 1911.

К. Вейерштрасс, К мемуару Линдемана «О лудолюфовом числе» (доказательство невозможности квадратуры круга). Перевод И. Л. Скалозубова, под редакцией А. В. Васильева, Казань, 1894.

И. Н. Веселовский, Христиан Гюйгенс, Учпедгиз, М., 1959.

А. Н. Глаголев, Элементарная геометрия и собрание геометрических задач, изд. 3, М., 1903.

Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия, ч. I. Планиметрия. Для 6—8 классов семилетней и средней школы, изд. 3, под редакцией Д. И. Перепелкина, Учпедгиз, М., 1954.

А. Д а в и д о в, Элементарная геометрия в объеме гимназического курса, изд. 19, М., 1900.

Р. Д е к а р т, Рассуждение о методе с приложениями «Диоптрика. Метеоры. Геометрия», изд. АН СССР, 1953.

И. Я. Д е п м а н, Победитель числа π — Фердинанд Линдеман. «Ученые записки Ленинградского гос. педагогического института», т. XVII, вып. 2, стр. 119—123.

Г. И. Д р и н ф е л ь д, Трансцендентность чисел π и e , изд. Харьковского гос. университета, Харьков, 1952.

Е в к л и д, «Начала», книги XI—XV. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

Е. И. И г н а т ь е в, В царстве смекалки или арифметика для всех, Книга вторая, изд. 2, ГИЗ, М.

Ф. К л е й н, Вопросы элементарной и высшей математики, ч. I. Арифметика, алгебра и анализ. Перевод с немецкого Д. А. Крыжановского, Матезис, 1912.

Ф. К л е й н, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I. Арифметика, алгебра, анализ, М.—Л., 1933.

А. А. К о л о с о в, Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах (VIII—X), Учпедгиз, 1963.

Б. А. К о р д е м с к и й, Н. В. Р у с а л е в, Удивительный квадрат, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.

Р. К у р а н т и Г. Р о б б и н с, Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов. Перевод с английского под редакцией проф. В. Л. Гончарова.

Б. В. К у т у з о в, Геометрия, пособие для учителей и педагогических институтов, Учпедгиз, 1950.

Ф. К э д ж о р и, История элементарной математики с указанием на методы преподавания. Перевод с английского, Одесса, 1910.

В. И. Л е б е д е в, Очерки по истории точных наук, вып. IV. Знаменитые геометрические задачи древности, Петроград, 1920.

В. Л и т ц м а н, Великаны и карлики в мире чисел. Перевод с пятого немецкого издания Л. С. Товалевой, под редакцией И. М. Яглома, ГИФМЛ, М., 1959.

К. А. М а л ы г и н, Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. Пособие для учителей. Под редакцией проф. И. Я. Деммана, Учпедгиз, М., 1958.

Ф. Ф. Н а г и б и н, Математическая шкатулка, Учпедгиз, 1958.

О к в а д р а т у р е к р у г а с приложением истории вопроса, составленной Ф. Р у д и о. Перевод под редакцией и с примечаниями акад. С. Н. Бернштейна, изд. 3, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1936.

Л. Я. О к у н е в, Высшая алгебра, Учпедгиз, 1958.

Я. И. П е р е л ь м а н, Занимательная геометрия, изд. 7, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

М. В. П о т о ц к и й, Аналитическая геометрия на плоскости, Учпедгиз, 1956.

С. Р о у, Геометрические упражнения с куском бумаги. Перевод с английского, Матезис, Одесса, 1910.

Г. Ф а ц ц а р и, Краткая история математики с древнейших времен, кончая средними веками. Перевод с итальянского С. А. Галашина, изд. «Колос», М., 1923.

Г. Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII веках. Перевод с немецкого П. Новикова, изд. 2, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1938.

Г. Г. Цейтен, История математики в древности и средние века, изд. 2, подготовленное А. П. Юшкевичем, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1938.

В. Д. Чистяков, Математические вечера в средней школе, изд. 2, Учпедгиз, М., 1958.

В. Д. Чистяков, Исторические экскурсии на уроках математики в средней школе, Учпедгиз БССР, Минск, 1959.

В. Д. Чистяков, Исторические экскурсии на уроках геометрии в средней школе. Сборник статей по вопросам преподавания геометрии в средней школе. Под редакцией Стратилатова, Учпедгиз, М., 1958, стр. 5—17.

С. Н. Шрейдер, Три задачи древней геометрии. Из опыта проведения внеклассной работы по математике в средней школе, Учпедгиз, М., 1955, стр. 87—100.

Л. А. Шрубко, Трисекция угла. «Известия Академии наук Казахской ССР», № 115, серия геологическая, вып. 12, изд. Академии наук Казахской ССР, Алма-Ата, 1952, стр. 99—103.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
<i>Глава I.</i> Делосская задача об удвоении куба	8
<i>Глава II.</i> Задача о трисекции угла	29
<i>Глава III.</i> Задача о квадратуре круга	46
<i>Глава IV.</i> Вывод уравнения квадратрисы и конхоиды	68
<i>Глава V.</i> Применение номографии к решению задачи о трисекции угла	72
Рекомендуемая литература	92

Василий Дмитриевич Чистяков
ТРИ ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ

Редактор *Л. А. Сидорова*
Оформление художника *М. Ф. Ольшевского*
Художественный редактор *Б. Л. Николаев*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *К. А. Иванова*
* * *

Сдано в набор 6/IV 1963 г. Подпи-
сано к печати 9/IX 1963 г. 84×108¹/₃₂.
Печ. л. 6 (4.92). Уч.-изд. л. 4,24.
Тираж 55 тыс. экз.
* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд
Марьиной рощи, 41.

Полиграфкомбинат Приволжского сов-
нархоза, г. Саратов,
ул. Чернышевского, 59.

Цена 12 коп.
Заказ 356

