Новиков И.Я.
Протасов В.Ю.
Скопина М.А.

Теория всплесков

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.5
ББК 22.161.5
Н 73

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 05-01-14058д

Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. **Теория всплесков.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 616 с. — ISBN 5-9221-0642-2.

Теория всплесков (вейвлетов) лежит на пересечении чистой математики, вычислительной математики и аудио и графической обработки сигналов, сжатия и передачи информации. Всплеск-анализ сформировался в 80–90 гг. XX века. Данная книга является первой в русскоязычной литературе монографией, целиком посвященной систематическому изложению современной теории всплесков. В ней подробно излагается построение ортогональных и биортогональных систем всплесков, изучаются их структурные и аппроксимационные свойства, начиная с основ теории и заканчивая специальными вопросами и задачами. Значительная часть представленного материала ранее в монографиях не излагалась.

Для студентов старших курсов, аспирантов, научных работников и инженеров.

ISBN 5-9221-0642-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Любимым жене и детям посвящаю

И. Я. Новиков

Моему отцу Юрию Ивановичу Протасову,
привившему мне любовь к точным наукам

В. Ю. Протасов

Мою математическую династию
открыл дед И. А. Скопин,
продолжил отец А. И. Скопин.
Им посвящаю

М. А. Скопина

Предисловие

Теория всплесков лежит на пересечении чистой математики, вычислительной математики, а также проблематики аудио и графической обработки сигналов, сжатия и передачи информации.

Слово всплеск — эквивалент английского «wavelet», которое в свою очередь является переводом французского «ondellete», первоначально введенного А. Гроссманом, Й. Морле. При внедрении терминологии в русскоязычную литературу возникали многочисленные варианты, среди которых в качестве «wavelets» использовались слова: онделлеты, вейвлеты, вэйвлеты, волнушки, волночки. В конечном итоге математики выбрали предложенный К. И. Осколковым термин «всплеск», который не является точным переводом слова «wavelet», но зато хорошо отражает суть происходящего. Под системами всплесков обычно понимают сжатия и сдвиги одной функции, образующие систему представления в каком-либо смысле (например, ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$). В некоторых ситуациях системы всплесков состоят из сдвигов и сжатий нескольких функций или целой последовательности. Понятие «всплеск» как таковое не вводится, конкретный смысл придается таким словосочетаниям, как «всплеск-функция», «последовательность всплеск-функций», «пространство всплесков» и т. п.

Интерес к изучению систем всплесков возник задолго до появления терминологии и создания основ теории и был обусловлен главным образом потребностью в их использовании для обработки сигналов. В связи с этими задачами всплеск-анализ сформировался (в определенном смысле как альтернатива классическому анализу Фурье) в конце 80-х — начале 90-х годов XX века в работах С. Малла, Й. Мейера, П. Ж. Лемарье, И. Добеши, А. Коена, Р. Девора, У. Лоутона, Ч. Чуи и др. Базисы всплесков имеют ряд преимуществ по сравнению с другими базисами, используемыми в качестве аппарата приближения функций. Они обладают так называемой время-частотной локализацией, т. е. быстро убывают на бесконечности как сами базисные функции, так и их преобразования Фурье. Благодаря этому свойству при разложении по базису сигналов, частотные характеристики которых меняются по времени или по пространству (таковыми являются, в частности, речевые или музыкальные сигналы, сейсмические сигналы, а также изображения), много коэффициентов разложения при ненужных на данном пространственном или временном участке гармониках оказываются малыми и могут быть отброшены, что обеспечивает тем самым сжатие информации. Допустимость такого отбрасывания объясняется другим важным свойством: всплеск-разложения являются безусловно сходящимися рядами. Кроме того, существуют эффективные алгоритмы, позволяющие быстро вычислять коэффициенты всплеск-разложений. Все это привлекает многочисленных специалистов в самых различных областях прикладной и инженерной математики к использованию всплесков. С другой стороны, системы всплесков оказались полезными для решения некоторых задач теории функций и функционального анализа. Таким образом, всплески дают тот редкий пример, когда теория и ее практическая реализация развиваются параллельно.

Толчком к развитию математической теории всплесков послужили базовые работы Й. Мейера и С. Малла, в которых было введено понятие кратномасштабного анализа, описан метод его построения по данной (подходящей) функции и найдены явные формулы для нахождения соответствующей всплеск-функции, сдвиги и сжатия которой образуют ортонормированный базис. Благодаря этой теории было найдено много примеров систем всплесков, у которых базисные функции являются гладкими и обладают хорошей время-частотной локализацией, в частности, гладкие всплески с компактным носителем. Как раз такие примеры и требовались для приложений.

За пятнадцатилетний период развития теории всплесков были написаны тысячи работ. Основными монографиями являются книги Й. Мейера [5], И. Добеши [2], Ч. К. Чуи [6], П. Войтащика [8], Е. Эрнандеса, Г. А. Вейса [9]. В русскоязычной литературе имеются переводы монографий [2, 6], учебное пособие А. П. Петухова [10], главы в монографиях Б. С. Кашина, А. А. Саакяна [1], и В. И. Бердышева, Л. В. Петрака [11], а также обзорные статьи И. Я. Новикова, С. Б. Стечкина [44, 45] и Н. М. Астафьевой [46]. Приведенные списки не претендуют на полноту, в частности, мы не цитируем книги, посвященные узко специальным вопросам, и книги инженерного плана.

Книга, которую мы предлагаем читателю, является первой в русскоязычной литературе монографией, целиком посвященной систематическому изложению современной теории всплесков. В ней подробно излагается построение ортогональных и биортогональных систем всплесков, изучаются их структурные и аппроксимационные свойства, начиная с основ теории и заканчивая специальными вопросами и задачами. Представлены некоторые приложения всплесков, главным образом теоретического плана. В первых двух главах приводятся базовые факты теории соответственно для одномерного и многомерного случаев. Их изложение, однако, не дублирует ни одну из упомянутых выше книг. Многие из известных базовых утверждений представлены в наиболее общем виде, либо снабжены новыми доказательствами. Бóльшая часть материала, представленного в последующих главах, ранее в монографиях не излагалась. В частности, впервые дается общая теория периодических кратномасштабных анализов для многомерного случая с матричным коэффициентом расширения, теория нестационарных всплесков, представлены результаты о локальной гладкости всплеск-функций. Подробно излагается теория всплесков с компактными носителями, исследуются соответствующие масштабирующие уравнения, изучаются фрактальные свойства всплесков и их связь с классическими фрактальными кривыми. Рассказывается о различных способах оценки гладкости всплесков с компактными носителями. В частности, в явном виде найдены модули непрерывности таких всплесков, а также порядки их приближения. Отдельная глава посвящена вопросам время-частотной локализации всплесков. Приводится новая конструкция модифицированных всплесков Добеши, сохраняющих локализованность с ростом их гладкости. Большое внимание уделяется вопросам сходимости всплеск-разложений в различных смыслах и оценкам порядка приближения всплесками в различных функциональных пространствах.

Отметим, однако, что настоящая монография не может претендовать на полноту изложения всех аспектов современной теории всплесков. Например, мы совсем не затрагиваем тему непрерывного всплеск-преобразования, применения всплесков к дифференциальным уравнениям, а также многих практических приложений.

Все представленные в книге факты снабжены полными доказательствами кроме небольшого числа вставок, напечатанных мелким шрифтом. Особенно подробно даны доказательства в базовых главах. Используемые вспомогательные факты приводятся в приложениях также с доказательствами (исключение составляют только те факты, которые можно найти в широко доступных монографиях). Все главы снабжены историческими комментариями и упражнениями для читателя.

Книга рассчитана на читателя, знакомого с основами теории функций и функционального анализа в объеме стандартных университетских курсов. Значительная часть материала доступна для инженеров, и, вероятно, может вызвать их интерес.

В заключении хотим отметить, что авторы весьма признательны С. Б. Стечкину, который одним из первых в России проявил интерес к теории всплесков и способствовал в разных формах вовлечению всех трех авторов в данную тематику. Авторы также благодарны А. П. Петухову, который прочитал фрагменты рукописи и сделал ряд полезных замечаний.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку публикации этой книги (грант № 05-01-14066).

Основные обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{R}^d$ — d-мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots$ $\ldots, y_d)$ — его элементы (векторы), $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$, $(x, y) =$ $= x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$, $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.

$\mathbb{Z}^d$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^1$.

$\mathbb{Z}_+^d = \{x \in \mathbb{Z}^d\colon\ x_k \geqslant 0, k = 1, \ldots, d\}$.

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_+^1$.

$\mathbb{T}^d = [0, 1)^d$ — d-мерный единичный тор.

μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^d$.

χ_e — характеристическая функция множества $e \subset \mathbb{R}^d$, она принимает значение 1 в точках $t \in E$ и 0 в других точках.

δ_{lk} — символ Кронекера, он равен 1 при $l = k$ и 0 в противном случае.

если $a \in \mathbb{R}$, то $[a] := \max\{n \in \mathbb{Z}\colon \quad n \leqslant a\}$.

$\operatorname{supp} f$ — носитель функции f, т. е. наименьшее по включению замкнутое множество, на дополнении которого функция почти везде равна нулю, финитной будем называть функцию с компактным носителем.

$\widehat{f}(k) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-2\pi i (k,t)}\, dt$ — коэффициент Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ по тригонометрической системе с номером $k \in \mathbb{Z}^d$.

$\widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-2\pi i (x,t)}\, dt$ — преобразование Фурье функции f из $L(\mathbb{R}^d)$, $L_2(\mathbb{R}^d)$, или из пространства $\mathcal{S}'$ обобщенных функций медленного роста.

F и F^{-1} — операторы, сопоставляющие функции соответственно ее прямое и обратное преобразование Фурье.

$L \log L(\mathbb{T}^d)$ — класс функций $f \in L(\mathbb{T}^d)$, для которых

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} |f| \max\{0, \log |f|\} < \infty.$$

ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространство последовательностей комплексных чисел $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ с нормой $\|c\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^p\right)^{1/p}$.

$\langle f, g \rangle$ — скалярное произведение элементов гильбертова пространства.

$\operatorname{span}\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ — множество конечных линейных комбинаций системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ с комплексными коэффициентами.

T — оператор, T^* — сопряженный к T оператор, T^{-1} — обратный к T оператор.

A — матрица размера $d \times d$, $\|A\|$ обозначает ее евклидову операторную норму из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$, A^T — транспонированная с A матрица, A^* — эрмитова сопряженная с A матрица, $\det A$ — определитель A, E_d — единичная матрица размера $d \times d$.

Пусть $m(\xi) = \sum\limits_{k=N_1}^{N_2} c_k e^{-2\pi i k \xi}$ — тригонометрический полином, $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$. Через $\mathbf{m}(z)$ будем обозначать соответствующий алгебраический лорановский полином. Таким образом, $m(\xi) = \mathbf{m}(e^{-2\pi i \xi})$.

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность $\ldots, x_{-k}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$; иногда используются записи $\{x_k\}$ или (x).

$\mathcal{S}$ — пространство бесконечно-дифференцируемых быстро убывающих функций на $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S} = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \mid \forall\ m, k \geqslant 0\ \ \|f^{(m)}(x)(1+|x|)^k\|_{\infty} < \infty\}.$$

Топология пространства $\mathcal{S}$ задается сходящимися к нулю последовательностями:

$$f_j \to 0 \ \Leftrightarrow\ \forall\ m, k \geqslant 0\ \ \|f_j^{(m)}(x)(1+|x|)^k\|_{\infty} \to 0,$$

$\mathcal{S}'$ — пространство непрерывных линейных функционалов на этом пространстве (пространство обобщенных функций медленного роста).

$\mathcal{D}$ — пространство бесконечно-дифференцируемых финитных функций на $\mathbb{R}$ с топологией

$$f_j \to 0 \ \Leftrightarrow\ \forall\ m \geqslant 0\ \ \|f_j^{(m)}(x)\|_{\infty} \to 0, \qquad \exists\ M > 0 \colon \forall\ j\ \ \operatorname{supp} f_j \subset [-M, M],$$

$\mathcal{D}'$ — пространство непрерывных линейных функционалов на этом пространстве.

$\mathbf{1}$ — тождественную единица на $\mathbb{R}$.

α_f — показатель Гёльдера функции f на данном отрезке $[a, b]$

$$\alpha_f = k + \sup\Big\{\alpha \ \Big|\ |f^{(k)}(x_1) - f^{(k)}(x_2)| \leqslant C_\alpha |x_1 - x_2|^{\alpha}, \quad x_1, x_2 \in [a, b]\Big\},$$

где k — наибольшее целое число, для которого $f \in C^k[a,b]$. Аналогично определяется показатель Гёльдера в пространстве L_p:

$$\alpha_{f,p} = k + \sup\Big\{\alpha \;\Big|\; \|f^{(k)}(\cdot + h) - f^{(k)}(\cdot)\|_p \leqslant C_\alpha h^\alpha,\ h > 0\Big\}.$$

Локальная гладкость (локальный показатель Гёльдера) функции f в точке x определяется как

$$\alpha_f(x) = \sup\Big\{\alpha \;\Big|\; |f^{(k)}(x + h) - f^{(k)}(x)| \leqslant C_\alpha h^\alpha,\ h > 0\Big\}.$$

W_p^s — пространство Соболева.

$B_{pq}^{(s)}$ — пространство Бесова.

$F_{pq}^{(s)}$ — пространство Лизоркина–Трибеля.

$S_p(f) = \sup\Big\{\alpha \;\Big|\; \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^{p\alpha})\, d\xi < \infty\Big\}$ — гладкость функции f по Соболеву в $L_p(\mathbb{R})$, $f \in L_p(\mathbb{R})$.

Глава 1

ВСПЛЕСКИ НА ПРЯМОЙ

1.1. Базисы Рисса

В этом параграфе мы введем и обсудим важное для теории всплесков понятие базиса Рисса в гильбертовом пространстве, которое обобщает понятие ортогонального базиса с сохранением наиболее существенных его свойств. Нас в первую очередь будут интересовать базисы Рисса, состоящие из целых сдвигов некоторой функции.

Через ℓ_2 обозначим гильбертово пространство последовательностей комплексных чисел $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, со скалярным произведением $\langle c^1, c^2 \rangle := \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^1 \overline{c_n^2}$.

Определение 1.1.1. Пусть H — гильбертово пространство. Система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ называется *системой Рисса с постоянными* $A, B > 0$, если для любого $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ сходится в H и

$$A\|c\|_{\ell_2}^2 \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right\|_H^2 \leqslant B\|c\|_{\ell_2}^2. \tag{1.1}$$

Если система Рисса является базисом (см. приложение A.1), то ее будем называть *базисом Рисса*.

Теорема 1.1.2. *Пусть* H — *гильбертово пространство,* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *система Рисса в* H *с постоянными* A, B. *Тогда*

(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является базисом Рисса в пространстве*

$$V := \left\{ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \right\};$$

(ii) $V = \overline{\operatorname{span}\{f_n, n \in \mathbb{N}\}}$;

(iii) *для любого элемента* $f \in V$ *выполняется неравенство*

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2. \tag{1.2}$$

Доказательство. По определению пространства V любой его элемент есть сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, поэтому для доказательства (i) остается проверить единственность такого представления. Предположим, что для некоторого $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n \in V$ существует другое представление в виде ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c'_n f_n$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и по заданному $\varepsilon > 0$ подберем такое $N \geqslant k$, что

$$\Big\| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n f_n \Big\| < \varepsilon, \quad \Big\| \sum_{n=N+1}^{\infty} c'_n f_n \Big\| < \varepsilon.$$

Используя (1.1), имеем

$$|c_k - c'_k| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |c_n - c'_n|^2} \leqslant \frac{1}{A} \Big\| \sum_{n=1}^{N} (c_n - c'_n) f_n \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{A} \left(\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c'_n) f_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n f_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=N+1}^{\infty} c'_n f_n \Big\| \right) < \frac{2\varepsilon}{A}.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует $c_k = c'_k$.

Введем оператор $I : \ell_2 \longrightarrow H$, который каждому $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ сопоставляет элемент $f = Ic = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$. Ясно, что I взаимно однозначно отображает ℓ_2 на V. Более того, на основании (1.1) имеем

$$\|I\|^2 \leqslant B, \quad \|I^{-1}\|^2 \leqslant A^{-1}, \tag{1.3}$$

т. е. I осуществляет изоморфизм ℓ_2 на V. Отсюда, в частности, следует, что V замкнуто. Принимая во внимание включения $\operatorname{span}\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset V$, $V \subset \overline{\operatorname{span}\{f_n, n \in \mathbb{N}\}}$, получаем (ii). Пусть $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots \ldots)$ — n-й орт в ℓ_2, тогда $f_n = I(e_n)$. Поскольку $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в ℓ_2, используя (1.3), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, Ie_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle I^* f, e_n \rangle|^2 = \|I^* f\|_{\ell_2}^2 \leqslant B\|f\|^2,$$

$$\|f\|^2 = \|I^{*-1} I^* f\|^2 \leqslant \frac{1}{A} \|I^* f\|_{\ell_2} = \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle I^* f, e_n \rangle|^2 = \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2,$$

что и требовалось для доказательства (iii). $\Diamond$

Замечание 1.1.3. Если в условиях теоремы вместо предположения, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является системой Рисса, потребовать лишь выполнение правого неравенства (1.1) (в этом случае говорят, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

является *системой Бесселя*), то можно утверждать, что для любого $f \in H$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть любой конечный набор функций $\{f_n\}_{n=1}^N$, повторить для него необходимые рассуждения доказательства теоремы 1.1.2 (обоснование замкнутости пространства $V_N = \left\{ f = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n f_n \right\}$ в этом случае не требуется) и заметить, что для любого $f \in H$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle P_N f, f_n\rangle|^2,$$

где P_N — ортогональный проектор на V_N.

Упражнение 1.1.4. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в гильбертовом пространстве H. Доказать, что выполнение (1.2) для любого $f \in H$ влечет (1.1).

Мы установили, что, как и в случае ортогональных базисов, разложения по базису Рисса являются линейными комбинациями с коэффициентами из ℓ_2, а коэффициенты Фурье любого элемента удовлетворяют соотношению (1.2), обобщающему равенство Парсеваля. Теперь покажем, что базисы Рисса наследуют еще одно замечательное свойство ортогональных базисов: способ нумерации их элементов не имеет значения. Базисы, обладающие таким свойством называют *безусловными* (см. приложение А.1).

Теорема 1.1.5. *Любой базис Рисса в гильбертовом пространстве H является безусловным базисом.*

Доказательство. По теореме 1.1.2 любой элемент $f \in H$ представим в виде $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Обозначим через s_n частичные суммы этого представления, а через s'_n — частичные суммы ряда, полученного из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ некоторой перестановкой его членов. Пусть I — оператор, определенный в доказательстве теоремы 1.1.2. Положим $e = I^{-1}f$, $\sigma_n = I^{-1}s_n$, $\sigma'_n = I^{-1}s'_n$. Как было показано, I осуществляет изоморфизм ℓ_2 на H, поэтому из того, что $f = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ следует $e = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma'_n$, что влечет $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = f$. $\Diamond$

В силу доказанной теоремы способ образования частичных сумм в разложениях по системам Рисса не имеет значения, поэтому слагаемые в таких суммах можно нумеровать любым счетным множеством. В частности, в дальнейшем нам будет удобно, чтобы индекс суммирования пробегал множество $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^d$.

Лемма 1.1.6. *Пусть* $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L_2(\mathbb{R})$, *тогда ряд* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi + k)|$ *сходится почти везде, а его сумма суммируема на* $(0, 1)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\varphi = \widetilde{\varphi}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^1 |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \, d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

В силу теоремы Планшереля правая часть этого равенства конечна, а, значит, по теореме Леви функция $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2$ почти всюду конечна и

$$\int\limits_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \, d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^1 |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \, d\xi.$$

Для произвольных $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L_2(\mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi + k)| \leqslant \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2} \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi + n)|^2},$$

из которого по уже доказанному, используя неравенство Коши–Буняковского, получаем требуемое утверждение. $\Diamond$

Теорема 1.1.7. *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. *Для того чтобы система функций* $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *являлась системой Рисса с постоянными* A, B, *необходимо и достаточно, чтобы для почти всех* $\xi \in \mathbb{R}$ *выполнялось неравенство*

$$A \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \leqslant B. \tag{1.4}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$. Из (1.4) и равенства Парсеваля следует

$$\int\limits_0^1 \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\xi}\Big|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \, d\xi \geqslant A \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_0^1 \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\xi}\Big|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \, d\xi \leqslant B \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2, \tag{1.6}$$

Меняя в левой части порядок интегрирования и суммирования по k, что оправдано в силу теоремы Лебега, имеем

$$\int\limits_0^1 \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\xi}\Big|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\xi} \widehat{\varphi}(\xi)\Big|^2 \, d\xi. \tag{1.7}$$

Таким образом, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\cdot}\widehat{\varphi}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. По теореме Планшереля отсюда следует, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\,\cdot+n) \in L_2(\mathbb{R})$ и

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\cdot+n)\Big\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}\widehat{\varphi}(\xi)\Big|^2 d\xi. \tag{1.8}$$

Сопоставляя это равенство с (1.7) и применяя (1.5), (1.6), получаем

$$A\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 \leqslant \Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\cdot+n)\Big\|^2 \leqslant B\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2,$$

что и означает выполнение условия (1.1) для системы $\{\varphi(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Необходимость. Пусть функции $\varphi(\,\cdot+n)$, $n\in\mathbb{Z}$ образуют систему Рисса, тогда $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\,\cdot+n) \in L_2(\mathbb{R})$ для любого $c=\{c_n\}\in\ell_2$, а, значит, по теореме Планшереля $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\cdot}\widehat{\varphi}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ и имеет место равенство (1.8). Из конечности правой части (1.8) по теореме Леви следует равенство (1.7). Используя (1.7), (1.8), перепишем условие (1.1) в следующем виде: для любого $g=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\cdot} \in L_2(0,1)$ выполняется неравенство

$$A\|g\|^2 \leqslant \int\limits_0^1 |g(\xi)|^2\sigma(\xi)\,d\xi \leqslant B\|g\|^2, \tag{1.9}$$

где

$$\sigma(\xi) := \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2.$$

Функция σ является 1-периодической и, по лемме 1.1.6, суммируема на $(0,1)$. Поскольку

$$\sup_{\|g\|_2\neq 0}\int\limits_0^1 \frac{|g|^2}{\|g\|_2^2}\,\sigma = \sup_{\substack{\|h\|_1=1\\ h\geqslant 0}}\int\limits_0^1 h\sigma = \sup_{\|h\|_1=1}\int\limits_0^1 h\sigma,$$

по теореме Рисса

$$\operatorname*{vraisup}_{[0,1]}\sigma = \|\sigma\|_\infty = \sup_{\|g\|_2\neq 0}\int\limits_0^1 \frac{|g|^2}{\|g\|_2^2}\,\sigma \leqslant B,$$

т. е. установлено правое неравенство в (1.4). Предположим, что левое неравенство не выполнено. Тогда существует множество $E\subset[0,1]$ положительной меры, такое что $\sigma \leqslant A-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ на E. Положив $g=\chi_E$, имеем

$$\int_0^1 |g|^2\sigma = \int_E \sigma \leqslant (A-\varepsilon)\mu E = (A-\varepsilon)\|g\|_2^2 < A\|g\|_2^2,$$

что противоречит (1.9). $\Diamond$

Замечание 1.1.8. Из доказательства теоремы ясно, что если вместо условия (1.4) предположить лишь, что для почти всех $\xi\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 \leqslant B, \tag{1.10}$$

то можно утверждать, что ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\,\cdot+n)$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ для любого $c=\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell_2$, и

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\cdot+n)\Big\|^2 \leqslant B\|c\|_{\ell_2}^2. \tag{1.11}$$

Упражнение 1.1.9. Пусть функция $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ финитна, $\varphi_n := \varphi(\,\cdot+n)$, $n\in\mathbb{Z}$, доказать, что существует такая постоянная $B>0$, что для любой функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

Предложение 1.1.10. *Пусть $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ и система $\{\varphi(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в замкнутом подпространстве V пространства $L_2(\mathbb{R})$. Для того чтобы $f\in L_2(\mathbb{R})$ принадлежала V необходимо и достаточно, чтобы существовала 1-периодическая функция $m_f\in L_2(0,1)$ такая, что*

$$\widehat{f}(\xi) = m_f(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \tag{1.12}$$

для почти всех $\xi\in\mathbb{R}$. При этом коэффициенты разложения f по системе $\{\varphi(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ совпадают с соответствующим коэффициентами Фурье функции m_f.

Доказательство. По теореме 1.1.2

$$V = \Big\{ f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(\cdot+n),\ \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2<\infty \Big\}.$$

Пусть $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2<\infty$,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(x+n). \tag{1.13}$$

Поскольку операции преобразования Фурье и перехода к пределу в L_2 коммутируют, а ряд в правой части (1.13) сходится в L_2, применяя преобразование Фурье к обеим частям этого равенства, получаем

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \widehat{\varphi(\cdot + n)}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\xi} \widehat{\varphi}(\xi). \qquad (1.14)$$

Для доказательства необходимости осталось положить

$$m_f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n\xi} \qquad (1.15)$$

и заметить, что в силу равенства Парсеваля, $m_f \in L_2(0,1)$. В другую строну, если выполнено (1.12) и $m_f \in L_2(0,1)$, то домножая (1.15) на $\widehat{\varphi}(\xi)$, получим равенство (1.14), которое, как уже установлено, эквивалентно (1.13). $\Diamond$

Определение 1.1.11. Пусть H — гильбертово пространство. Будем говорить, что системы $\{f_n\}, \{g_n\} \subset H$ являются *биортонормированными*, если

$$\langle f_n, g_k\rangle = \delta_{nk}.$$

Предложение 1.1.12. *Пусть* $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L_2(\mathbb{R})$. *Системы* $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\varphi}(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *являются биортонормированными тогда и только тогда, когда для почти всех* $\xi \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + k)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi + k)} = 1, \qquad (1.16)$$

причем ряд в левой части (1.16) *абсолютно сходится. В частности, для того чтобы система* $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *была ортонормированной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1 \qquad (1.17)$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Доказательство. По теореме Планшереля для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\widetilde{\varphi}(x-k)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)}e^{2\pi i k\xi}\,d\xi =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{l}^{l+1} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)}e^{2\pi i k\xi}\,d\xi = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi+n)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+n)}e^{2\pi i k\xi}\,d\xi. \qquad (1.18)$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования возможно в силу теоремы Лебега и леммы 1.1.6. По той же лемме 1-периодическая функция

$$\sigma(\xi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi+n)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+n)}$$

суммируема на $(0,1)$. Осталось заметить, что биортонормированность систем $\{\varphi(\,\cdot-k)\}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot-n)\}$ означает

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\widetilde{\varphi}(x-k)}\,dx = \delta_{k0}, \tag{1.19}$$

что в силу (1.18) равносильно тому, что все коэффициенты Фурье функции σ кроме нулевого равны нулю, а это, в свою очередь, по теореме единственности равносильно тому, что $\sigma(\xi)=1$ для почти всех $\xi\in\mathbb{R}$. $\Diamond$

Упражнение 1.1.13. Доказать, что если функции $\varphi,\widetilde{\varphi}\in L_2(\mathbb{R})$ финитны, то функция $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi+k)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+k)}$ эквивалентна тригонометрическому полиному.

Теорема 1.1.14. *Пусть $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$. Если система $\{\varphi(\,\cdot+n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в замкнутом подпространстве V пространства $L_2(\mathbb{R})$, то существует функция $\varphi^\sharp\in L_2(\mathbb{R})$, такая что ее целые сдвиги $\varphi^\sharp(\,\cdot+n)$, $n\in\mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в V.*

Доказательство. Положим

$$\widehat{\varphi^\sharp}(\xi) = \nu(\xi)\widehat{\varphi}(\xi),$$

где

$$\nu(\xi) = \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+l)|^2\right)^{-1/2}.$$

По теореме 1.1.7 функция ν существенно ограничена, поэтому $\widehat{\varphi^\sharp}\in L_2(\mathbb{R})$ и, очевидно, для $\widehat{\varphi^\sharp}$ выполнено условие (1.17), а, значит, по предложению 1.1.12 целые сдвиги $\varphi^\sharp$ образуют ортонормированную систему. Учитывая теорему 1.1.2 и предложение 1.1.10, имеем

$$\begin{aligned} V = \left\{f\colon\ f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\varphi(\cdot+n),\ \ \sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_n|^2<\infty\right\} = \\ = \{f\colon\ \widehat{f}=\mu\widehat{\varphi},\quad \mu\in L_2\} = \{f\colon\ \widehat{f}=\mu_1\widehat{\varphi^\sharp},\quad \mu_1=\mu\nu^{-1}\in L_2\} = \\ = \left\{f\colon\ f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n^\sharp\varphi^\sharp(\cdot+n),\ \ \sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_n^\sharp|^2<\infty\right\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что система $\{\varphi^\sharp(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом в V. $\Diamond$

1.2. КМА и масштабирующая функция

Определение 1.2.1. Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset \subset L_2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *кратномасштабным анализом* в $L_2(\mathbb{R})$, далее для краткости *КМА* (*multiresolution analysis*, *MRA*), если выполнены следующие условия (аксиомы):

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR2. $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$;

MR3. $\bigcap\limits_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

MR4. $f \in V_j \iff f\left(2^{-j} \cdot\right) \in V_0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR5. Существует функция $\varphi \in V_0$, такая что последовательность $\{\varphi(\,\cdot + n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в V_0.

Отметим еще два свойства пространств V_j, которые мгновенно вытекают из аксиом MR4, MR5. Прежде, чем их сформулировать, введем обозначение для сдвигов и сжатий функции f:

$$f_{jn} := 2^{j/2} f\left(2^j \cdot + n\right), \quad n, j \in \mathbb{Z}. \tag{1.20}$$

MR6. Для любого $j \in \mathbb{Z}$ функции φ_{jn}, $n \in \mathbb{Z}$, образуют базис Рисса в V_j с теми же постоянными A, B, что и функции φ_{0n}, $n \in \mathbb{Z}$;

MR7. Если $f \in V_j$, то $f\left(\cdot \pm 2^{-j}\right) \in V_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Из дальнейшего будет понятно, что свойство MR3 тоже вытекает из MR4, MR5, но следуя традиционному изложению, мы включили его в набор постулируемых условий.

Функция φ из аксиомы MR5 называется *масштабирующей* (*scaling* или *refinable*) для данного КМА $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

По теореме 1.1.14 в пространстве V_0 существует функция $\varphi^\sharp$, целые сдвиги которой образуют ортонормированный базис в V_0, и, аналогично свойству MR6, функции $\varphi^\sharp_{jn}$, $n \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в V_j для всех $j \in \mathbb{Z}$.

Главное предназначение КМА состоит в следующем. На их основе можно строить ортогональные (биортогональные) базисы, полученные посредством сжатий и сдвигов одной функции (двух функций). Такие базисы мы и будем называть базисами всплесков. Подробнее об этом пойдет речь в следующем параграфе, а сейчас займемся вопросами существования КМА и методом их построения. Основополагающим свойством является свойство MR5, в котором фигурирует масштабирующая функция, определяющая пространства V_0, а в силу свойства MR6 и весь КМА, т. е. имея подходящую функцию φ, мы можем определить

$$V_j := \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{jn}, \quad n \in \mathbb{Z}\}}, \tag{1.21}$$

обеспечив выполнение свойств MR4, MR5. Ясно, что не любая функция, целые сдвиги которой образуют систему Рисса, нам подойдет, так как надо удовлетворить еще MR1, MR2, MR3, из дальнейшего будет понятно, что наиболее ограничительным из них является свойство вложенности пространств MR1. Таким образом, чтобы научиться строить КМА, нам нужно охарактеризовать класс масштабирующих функций. Такую характеризацию удобно дать в терминах преобразования Фурье.

Будем говорить, что совокупность пространств $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, определенных соотношением (1.21), *порождена* функцией φ.

Предложение 1.2.2. *Пусть* $\varphi, f \in L_2(\mathbb{R})$, $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — *совокупность пространств, порожденных функцией* φ. *Соотношение* $f \perp V_0$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+l)\overline{\widehat{\varphi}(\xi+l)} = 0$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Соотношение $f \perp V_0$ равносильно тому, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi(x+k)}\,dx = 0$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$. С другой стороны,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi(x+k)}\,dx = \int\limits_{0}^{1} e^{2\pi ik\xi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+n)\overline{\widehat{\varphi}(\xi+n)}\,d\xi.$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования возможно в силу теоремы Лебега и леммы 1.1.6. По той же лемме ряд в правой части является 1-периодической суммируемой функцией, и по теореме единственности все ее коэффициенты Фурье равны нулю тогда и только тогда, когда функция равна нулю почти везде. $\diamondsuit$

Предложение 1.2.3. *Пусть* $\varphi, f \in L_2(\mathbb{R})$ *и выполнено* (1.4), $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — *совокупность пространств, порожденных функцией* φ. *Соотношение* $f \in V_j$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует* 1*-периодическая функция* $m_f \in L_2(0,1)$ *такая, что*

$$\widehat{f}(\xi) = 2^{-j/2} m_f(2^{-j}\xi)\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi) \tag{1.22}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$. *При этом коэффициенты разложения* f *по системе* $\{\varphi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье функции* m_f.

Для $j = 0$ сформулированное утверждение совпадает с утверждением предложения 1.1.10, для $j \neq 0$ доказательство легко следует из предложения 1.1.10 и свойства MR4, которое, очевидно, вытекает из определения пространств V_j.

Теорема 1.2.4. *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ *и выполнено* (1.4). *Для того чтобы для совокупности пространств* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, *порожденных функ-*

цией φ, *выполнялось свойство* MR1, *необходимо и достаточно, чтобы существовала* 1*-периодическая функция* $m_0 \in L_2(0,1)$ *такая, что*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2) \tag{1.23}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из определения пространств V_j следует, что для них выполнены свойства MR4, MR6, поэтому ясно, что выполнение свойства MR1 равносильно выполнению соотношения $V_0 \subset V_1$, которое в свою очередь эквивалентно условию $\varphi \in V_1$. Осталось воспользоваться предложением 1.2.3 и положить $m_0 := m_\varphi/\sqrt{2}$. ♢

Равенство (1.23) называют *масштабирующим уравнением (refinement equation)*, а функцию m_0 — *маской*. В инженерной терминологии маской или *фильтром* называют набор коэффициентов Фурье функции m_0. Часто и в математических статьях под маской понимается последовательность коэффициентов Фурье, а саму функцию m_0 тогда называют символом маски. Мы не будем использовать такую терминологию.

Пусть

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{2\pi i n\xi},$$

применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям равенства (1.23), преобразуем его к виду

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \varphi_{1n}. \tag{1.24}$$

В инженерной терминологии соотношения (1.23) и (1.24) называются соответственно *масштабирующим уравнением* в частотной и во временной области.

Следствие 1.2.5. *Пусть* φ *— масштабирующая функция, удовлетворяющая* (1.4), m_0 *— ее маска. Тогда*

$$\frac{A}{B} \leqslant |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 \leqslant \frac{B}{A} \tag{1.25}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сопоставляя (1.23) с (1.4) и учитывая 1-периодичность m_0, для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$ получаем

$$\begin{aligned} A &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi+n}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+n}{2}\right)\right|^2 = \\ &= \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+k\right)\right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+k\right)\right|^2 \leqslant \\ &\leqslant B\left(\left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2\right), \end{aligned}$$

что влечет левое неравенство (1.25), правое доказывается аналогично. $\Diamond$

Следствие 1.2.6. *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — две масштабирующие функции (вообще говоря, для двух различных КМА) соответственно с масками $m_0, \widetilde{m}_0$. Если системы $\{\varphi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\varphi}_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ являются биортонормированными, то*

$$m_0(\xi)\overline{\widetilde{m}_0(\xi)} + m_0\,(\xi+1/2)\,\overline{\widetilde{m}_0\,(\xi+1/2)} = 1 \tag{1.26}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$. В частности, если $\{\varphi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная система, то

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0\,(\xi+1/2)|^2 = 1 \tag{1.27}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.2.5 с использованием равенства (1.16) вместо (1.4).

Упражнение 1.2.7. Пусть φ масштабирующая функция некоторого КМА, $\varphi(x) = O(1+|x|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Доказать, что ее маска m_0 непрерывна в точке $1/2$ и $m_0(1/2) = 0$.

Лемма 1.2.8. *Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ и выполнено* (1.10). *Тогда*

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = 0$$

для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Предположим сначала, что функция f — финитна и непрерывна на $\mathbb{R}$. Пусть $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$, $R > 1$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, для $j < -2\log R$ имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 \leqslant 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Bigg(\int\limits_{|x|\leqslant R} |f(x)||\varphi(2^j x + k)|\,dx \Bigg)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2^j \|f\|_\infty^2 2R \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{|x|\leqslant R} |\varphi(2^j x + k)|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2R\|f\|_\infty^2 \int\limits_{S(R,j)} |\varphi(y)|^2\,dy = 2R\|f\|_\infty^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_{S(R,j)}(y)|\varphi(y)|^2\,dy,$$

где

$$S(R,j) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k - 2^j R, k + 2^j R],$$

$\chi_{R,j}$ — характеристическая функция множества $S(R,j)$. Если $y \notin \mathbb{Z}$, то

$$\lim_{j\to-\infty} \chi_{R,j}(y) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{j\to-\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_{R,j}(y)|\varphi(y)|^2\,dy=0.$$

Предельный переход здесь возможен в силу теоремы Лебега.

Пусть теперь f — произвольная функция из $L_2(\mathbb{R})$. Зададим $\varepsilon>0$ и найдем такую финитную непрерывную функцию $\widetilde{f}$, что

$$\|f-\widetilde{f}\|<\varepsilon. \tag{1.28}$$

Из (1.10), теорем 1.1.7, 1.1.2 и замечаний 1.1.8, 1.1.3 следует

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f-\widetilde{f},\varphi_{jk}\rangle|^2\leqslant B\varepsilon.$$

Осталось применить неравенство треугольника и принять во внимание, что для $\widetilde{f}$ справедливость леммы уже установлена. $\Diamond$

Теорема 1.2.9. *Пусть* $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ *и выполнено* (1.4). *Тогда для совокупности пространств* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, *порожденных функцией* φ, *выполнено условие* MR3.

Доказательство. Предположим, что $f\in V_j$ для всех $j\in\mathbb{Z}$. Из (1.4) и теорем 1.1.7, 1.1.2 следует

$$A\|f\|\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{jk}\rangle|^2\right)^{1/2}.$$

По лемме 1.2.8 правая часть стремится к нулю при $j\to-\infty$. Это влечет $\|f\|=0$, что и означает выполнение условия MR3. $\Diamond$

Теорема 1.2.10. *Пусть для* $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ *выполнено* (1.4). *Для того чтобы для совокупности пространств* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, *порожденных функцией* φ *и удовлетворяющих* MR1, *выполнялось* MR2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\operatorname{supp}\widehat{\varphi}(2^j\cdot)=\mathbb{R}. \tag{1.29}$$

Эту теорема будет доказана в более общей ситуации в гл. 2.

Для того чтобы удовлетворить (1.29), достаточно предположить, что функция $\widehat{\varphi}$ непрерывна в нуле и

$$\widehat{\varphi}(0)\neq 0. \tag{1.30}$$

Мы покажем, что это требование можно ослабить, отбросив (1.30), которое выполняется автоматически.

Лемма 1.2.11. *Пусть $f, \varphi \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = 2^j \int_0^1 \left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(2^j(\xi+l)\right)\overline{\widehat{\varphi}\,(\xi+l)}\right|^2 d\xi. \tag{1.31}$$

Доказательство. Положим

$$h(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(2^j(\xi+l)\right)\overline{\widehat{\varphi}\,(\xi+l)}. \tag{1.32}$$

Функция h является 1-периодической, из неравенства Коши–Буняковского и леммы 1.1.6 следует ее суммируемость на $(0,1)$ и наличие суммируемой мажоранты у частичных сумм ряда, определяющего h. Используя теорему Планшереля и равенство Парсеваля, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i 2^{-j}k\xi} \overline{\widehat{\varphi}\,(2^{-j}\xi)}\, d\xi\right|^2 =$$

$$= 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2^j\xi) e^{-2\pi i k\xi} \overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\, d\xi\right|^2 =$$

$$= 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \widehat{f}(2^j(\xi+l)) e^{-2\pi i k\xi} \overline{\widehat{\varphi}(\xi+l)}\, d\xi\right|^2 =$$

$$= 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^1 h(\xi) e^{-2\pi i k\xi}\, d\xi\right|^2 = 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{h}(k)\right|^2 = 2^j \int_0^1 |h(\xi)|^2\, d\xi.$$

Произведенное изменение порядка суммирования и интегрирования оправдано теоремой Лебега с учетом отмеченных выше свойств h. $\lozenge$

Лемма 1.2.12. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in L_\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\varphi}\left(2^{-j}\xi\right)\right|^2 \left|\widehat{f}\,(\xi)\right|^2 d\xi + R_j, \tag{1.33}$$

где

$$|R_j| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l\in\mathbb{Z},\, l\neq 0} \left|\widehat{f}\,(\xi)\right| \left|\widehat{f}\left(\xi + 2^j l\right)\right| \left|\widehat{\varphi}\left(2^{-j}\xi\right)\right| \left|\widehat{\varphi}\left(2^{-j}\xi + l\right)\right| d\xi. \tag{1.34}$$

Доказательство. Мы можем считать, что интеграл в правой части (1.34) конечен, так как в противном случае утверждение леммы тривиально. Интеграл в правой части (1.33) также конечен ввиду существенной ограниченности $\widehat{f}$ и теоремы Планшереля. По лемме 1.2.11

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = 2^j \int\limits_0^1 |h(\xi)|^2 \, d\xi, \tag{1.35}$$

где h — функция, определенная равенством (1.32). С другой стороны,

$$2^j \int\limits_0^1 |h(\xi)|^2 \, d\xi = \int\limits_0^{2^j} \left|h(2^{-j}\xi)\right|^2 \, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{2^j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}\,(\xi+2^j l)}\widehat{f}\left(\xi+2^j k\right) \overline{\widehat{\varphi}\,(2^{-j}\xi+l)}\widehat{\varphi}\left(2^{-j}\xi+k\right) \, d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi) \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}\,(\xi+2^j l)}\overline{\widehat{\varphi}\,(2^{-j}\xi+l)} \, d\xi.$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования оправдано теоремой Лебега с учетом суммируемости подынтегральных выражений в (1.33) и (1.34). Для доказательства леммы осталось отделить от суммы слагаемое с номером $l=0$ и сопоставить с (1.35). $\Diamond$

Лемма 1.2.13. *Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ непрерывна в нуле и выполнено* (1.10). *Тогда*

$$\lim_{j\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = |\widehat{\varphi}(0)| \|f\|^2 \tag{1.36}$$

для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Сначала предположим, что функция f суммируема и трижды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Тогда для ее преобразования Фурье справедлива оценка

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \frac{C}{1+|\xi|^3}, \tag{1.37}$$

тем более, $\widehat{f} \in L_\infty(\mathbb{R})$. По лемме 1.2.12, принимая во внимание, что из (1.10) следует $\widehat{\varphi} \in L_\infty(\mathbb{R})$, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\varphi}\left(2^{-j}\xi\right)\right|^2 \left|\widehat{f}\,(\xi)\right|^2 \, d\xi + R_j, \tag{1.38}$$

где

$$|R_j| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \left|\widehat{f}\,(\xi)\right| \left|\widehat{f}\,(\xi+2^j l)\right| \left|\widehat{\varphi}\,(2^{-j}\xi)\right| \left|\widehat{\varphi}\,(2^{-j}\xi+l)\right| \,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \|\widehat{\varphi}\|_\infty^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(\xi)\right| \left|\widehat{f}\,(\xi+2^j l)\right| \,d\xi.$$

Применим (1.37) к правой части и оценим полученную сумму:

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\left(1+|\xi|^3\right)\left(1+\left|\xi+2^j l\right|^3\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \int\limits_{|\xi+2^j l|\leqslant 2^{j-1}|l|} \frac{d\xi}{|\xi|^3} + \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \int\limits_{|\xi+2^j l|> 2^{j-1}|l|} \frac{d\xi}{\left(1+|\xi|^3\right)\left(2^{j-1}|l|\right)^3} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \left(2^{j-1}|l|\right)^{-3} 2^j|l| + \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \left(2^{j-1}|l|\right)^{-3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1+|\xi|^3}.$$

Нетрудно проверить, что правая часть имеет порядок $O(2^{-2j})$, и поэтому $\lim\limits_{j\to+\infty} R_j = 0$. Переходя к пределу при $j \to +\infty$ в (1.38), осуществляя предельный переход под знаком интеграла, который возможен в силу теоремы Лебега, получим (1.36). Теперь возьмем произвольную $f \in L_2(\mathbb{R})$. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем такую функцию $\widetilde{f} \in C^3 \cap L_2(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, что $\|f-\widetilde{f}\| < \varepsilon$. Обозначая через P_j ортогональный проектор на V_j и принимая во внимание, что $\|P_j\| \leqslant 1$, из (1.10), теорем 1.1.7, 1.1.2, замечаний 1.1.8, 1.1.3, имеем

$$\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle P_j(f-\widetilde{f}), \varphi_{jk}\rangle\right|^2} \leqslant \sqrt{B}\,\|P_j(f-\widetilde{f})\| \leqslant \sqrt{B}\,\|f-\widetilde{f}\| < \sqrt{B}\,\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства треугольника следует

$$\left|\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2} - \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle \widetilde{f}, \varphi_{jk}\rangle\right|^2}\,\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f-\widetilde{f}, \varphi_{jk}\rangle\right|^2} = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle P_j(f-\widetilde{f}), \varphi_{jk}\rangle\right|^2} < \sqrt{B}\,\varepsilon.$$

Поскольку для $\widetilde{f}$ соотношение (1.36) уже доказано, переходя в этом неравенстве к верхнему и нижнему пределам при $j \to +\infty$, учитывая произвольность ε, получаем (1.36) для f. $\Diamond$

Теорема 1.2.14. *Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ непрерывна в нуле, удовлетворяет масштабирующему уравнению* (1.23), *и выполнено* (1.4). *Тогда совокупность пространств $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, порожденных φ, образуют КМА, для которого φ является масштабирующей функцией.*

Доказательство. Как уже отмечалось, из определения V_j вытекает свойство MR4. Из условия (1.4) и теорем 1.1.7, 1.1.2 следует, что целые сдвиги функции φ образуют базис Рисса в V_0, т. е. выполнено MR5. Свойства MR1 и MR3 следуют соответственно из теорем 1.2.4 и 1.2.9. Осталось проверить MR2. Покажем сначала, что $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. Предположим противное. Тогда по лемме 1.2.13

$$\lim_{j\to+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{jk}\rangle|^2 = 0 \tag{1.39}$$

для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$. Возьмем $f \in V_0$, $\|f\| \neq 0$. В силу MR1 $f \in V_j$ для всех $j \geqslant 0$, но тогда по теореме 1.1.2 для любого $j \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{jk}\rangle|^2 \geqslant A\|f\|^2,$$

что противоречит (1.39). Теперь предположим, что MR2 не выполнено. Тогда существует такая функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\|f\| \neq 0$, что $f \perp V_j$ для любого $j \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{jk}\rangle|^2 = 0$$

при всех $j \in \mathbb{Z}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $j \to +\infty$ получаем (1.39), что, как уже установлено, не верно ни для какой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ при $\|f\| \neq 0$. $\Diamond$

Упражнение 1.2.15. Пусть φ масштабирующая функция некоторого КМА с ортонормированными целыми сдвигами. Доказать, что из непрерывности $\widehat{\varphi}$ в нуле следует $\widehat{\varphi}(0) = 1$.

1.3. Пространства всплесков

Как уже отмечалось, основным свойством КМА является возможность на их основе строить ортогональные и биортогональные базисы всплесков. Сначала займемся описанием конструкции для ортогонального случая. Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — КМА с масштабирующей функцией φ, целые сдвиги которой образуют ортонормированную систему (в параграфе 1.2 объяснялось, почему такая масштабирующая функция существует в любом КМА). Обозначим через W_j ортогональное дополнение к V_j в пространстве V_{j+1}, тогда по свойствам гильбертова пространства V_j раскладывается в прямую сумму $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Мы получили последовательность $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ подпространств пространства $L_2(\mathbb{R})$ такую, что $W_j \perp V_j$, $W_j \perp W_k$ для всех $j,k\in\mathbb{Z}$, $k\neq j$, и

$$V_j = V_k \oplus W_k \oplus \ldots \oplus W_{j-1}$$

для всех $j,k\in\mathbb{Z}$, $k<j$. Отсюда, ввиду MR2,

$$L_2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \ldots,$$

а ввиду MR3,

$$V_0 = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \ldots$$

Объединяя эти два разложения, получаем

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j. \tag{1.40}$$

Таким образом, пространство $L_2(\mathbb{R})$ разложено в прямую сумму попарно ортогональных подпространств W_j. С другой стороны, из построения ясно, что для пространств W_j имеет место аналог свойства MR4: $f\in W_j \iff f\,(2^{-j}\cdot)\in W_0$. Центральный момент конструкции состоит в том, что масштабирующая функция φ порождает некоторую другую функцию $\psi\in W_0$, наследующую многие свойства φ, в частности, целые сдвиги ψ образуют ортонормированный базис в W_0. Но тогда аналогично свойству MR6 система функций $\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом в W_j. Ввиду (1.40), объединение таких систем по всем $j\in\mathbb{Z}$ является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$, состоящим из сдвигов и растяжений функции ψ, и любая функция $f\in L_2(\mathbb{R})$ раскладывается в ряд

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f,\psi_{jn}\rangle \psi_{jn}. \tag{1.41}$$

Пространства W_j называют *пространствами всплесков (wavelet spaces)*.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — КМА с масштабирующей функцией φ, $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{2\pi i n\xi}$ — ее маска, система $\{\varphi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированной,*

$$\psi := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-n} h_{1-n}\varphi_{1n}. \tag{1.42}$$

Тогда функции ψ_{jn}, $n\in\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Фактически доказательство этого утверждения будет получено как частный случай теоремы 1.3.7, в которой будет установлено, что в условиях теоремы 1.3.1 функции ψ_{0n}, $n\in\mathbb{Z}$, образуют ортонормированную систему, а пространство $\overline{\operatorname{span}\{\psi_{0n},\ n\in\mathbb{Z}\}}$, является ортогональным дополнением к V_0 в пространстве V_1. Тогда ясно, что для любого $j\in\mathbb{Z}$

функции ψ_{jn}, $n \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис пространства $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$, и требуемое утверждение следует из (1.40).

Упражнение 1.3.2. Докажите, что (1.42) эквивалентно

$$\widehat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i\xi}\overline{m_0(\xi + 1/2)}\widehat{\varphi}(\xi). \tag{1.43}$$

Отметим, что существуют ортонормированные базисы всплесков, для которых нет КМА, порождающего их.

Прежде чем рассмотреть соответствующий пример, приведем формулировки двух теорем, доказательства которых мы не приводим, их можно найти в статье [61]. Доказательство первой теоремы в более общей ситуации будет приведено в гл. 8.

Теорема 1.3.3. *Пусть $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, $\|\psi\| = 1$. Функция ψ порождает ортонормированный базис всплесков тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m\xi)|^2 = 1 \ \text{ п. в.};$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^p\xi)\overline{\widehat{\psi}(2^p(\cdot + k))} = 0 \ \text{ п. в. для любых нечетных } k.$$

Теорема 1.3.4. *Пусть ψ порождает ортонормированный базис всплесков. Соответствующая масштабирующая функция существует тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^p(\xi + k))|^2 > 0 \ \text{ п. в.}$$

В этом случае

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^p(\xi + k))|^2 = 1 \ \text{ п. в.}$$

Следствие 1.3.5. *Если $\widehat{\psi}(\xi) \neq 0$ почти всюду, то масштабирующая функция существует. В частности это имеет место, если ψ имеет компактный носитель (в этом случае $\widehat{\psi}$ — аналитическая функция). В последнем случае масштабирующая функция тоже имеет компактный носитель.*

Используя теорему 1.3.3, нетрудно проверить, что функция ψ, определяемая в образах Фурье равенством

$$\widehat{\psi} = \chi_{[-4/7,-2/7]} + \chi_{[2/7,3/7]} + \chi_{[12/7,16/7]},$$

порождает ортонормированный базис всплесков. То, что для данной функции ψ не существует КМА, порождающего ее, следует из теоремы 1.3.4. Действительно, если предположить существование масштабирующей функции φ, то $|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 - |\widehat{\varphi}(2\xi)|^2 = |\widehat{\psi}(2\xi)|^2$. Это следует из (1.23), (1.27) и (1.43):

$$|\widehat{\psi}(2\xi)|^2 = |m(\xi + 1/2)|^2|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = (1 - |m(\xi)|^2)|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 - |\widehat{\varphi}(2\xi)|^2.$$

Из последнего равенства следует, что $|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum\limits_{j\geqslant 1} |\widehat{\psi}(2^j\xi)|^2$ или

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = \chi_{[-2/7,2/7]} + \chi_{[3/7,4/7]} + \chi_{[6/7,8/7]}.$$

Однако ортонормированность системы $\{\varphi(\,\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ эквивалентна тождеству (1.17), которое в данном случае не выполнено.

Несмотря на существование функций, порождающих ортонормированные базисы всплесков без помощи соответствующего КМА, с любой такой функцией связана структура, очень близкая к КМА.

Теорема 1.3.6. *Пусть* $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *— ортонормированный базис в* $L_2(\mathbb{R})$,

$$W_j := \overline{\operatorname{span}\{\psi_{jk},\ k\in\mathbb{Z}\}},\quad V_j := \bigoplus_{l<j} W_l.$$

Тогда пространства V_j, $j\in\mathbb{Z}$, *обладают следующими свойствами*:

(i) $V_j \subset V_{j+1}$;

(ii) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$;

(iii) $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;

(iv) $f\in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot)\in V_0$;

(v) $f\in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k)\in V_0$ *для любого* $k\in\mathbf{Z}$.

Доказательство. Первые четыре свойства очевидны. Пятое следует из равенства $V_0^{\perp} = \bigoplus_{j\geqslant 0} W_j$, где $V^{\perp}$ — ортогональное дополнение к V, и того, что каждое из пространств W_j, $j\geqslant 0$, инвариантно относительно целых сдвигов. ♢

Переходим к описанию конструкции биортогональных систем всплесков. Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — два кратномасштабных анализа. Чтобы реализовать ту же идею, что и в ортогональном случае, нам теперь надо определить пространства всплесков W_j для первого КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ как дополнение к V_j в V_{j+1}, ортогональное пространству $\widetilde{V}_j$ второго КМА $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Теорема 1.3.7. *Пусть* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *— два КМА с масштабирующими функциями соответственно* φ, $\widetilde{\varphi}$,

$$m_0(\xi) = 2^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{2\pi i n\xi},\quad \widetilde{m}_0(\xi) = 2^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_n e^{2\pi i n\xi}$$

— их маски,

$$\psi := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-n}\widetilde{h}_{1-n}\varphi_{1n}, \tag{1.44}$$

$$\widetilde{\psi} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-n} h_{1-n}\widetilde{\varphi}_{1n}, \tag{1.45}$$

$$W_0 := \overline{\operatorname{span}\{\psi_{0n},\ \ n\in\mathbb{Z}\}}.$$

Тогда

(i) *система* $\{\psi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *образует базис Рисса в* W_0,

(ii) $W_0\subset V_1$;

если при этом системы $\{\varphi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\varphi}_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *является биортонормированными, то*

(iii) $W_0 \perp \widetilde{V}_0$,
(iv) *любое* $f \in V_1$ *представимо в виде* $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in V_0$, $f_2 \in W_0$,
(v) $\{\psi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\psi}_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — *биортонормированные системы.*

Доказательство. В первую очередь заметим, что

$$e^{2\pi i\xi}\overline{\widetilde{m}_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-n}\widetilde{h}_{1-n}e^{2\pi in\xi},$$

поэтому, на основании предложения 1.2.3,

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{\pi i\xi}\overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \tag{1.46}$$

и аналогично

$$\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi) = e^{\pi i\xi}\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{1.47}$$

Поскольку $\{\varphi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\varphi}_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ являются системами Рисса, по теореме 1.1.7 для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$A \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+n)|^2 \leqslant B, \tag{1.48}$$

$$\widetilde{A} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+n)|^2 \leqslant \widetilde{B}. \tag{1.49}$$

Используя (1.46), имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(\xi+n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+n}{2}\right)\right|^2 =$$

$$= \left|\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+k\right)\right|^2 + \left|\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+k\right)\right|^2.$$

Отсюда, из неравенств (1.48), (1.49) и (1.25) следует, что

$$\frac{A\widetilde{A}}{\widetilde{B}} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(\xi+n)|^2 \leqslant \frac{B\widetilde{B}}{\widetilde{A}}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$, откуда, принимая во внимание теоремы 1.1.7 и 1.1.2, получаем (i).

Для того чтобы доказать (ii), достаточно проверить принадлежность пространству V_1 базисных функций ψ_{0n}, $n \in \mathbb{Z}$, но это следует из определения функции ψ и свойств MR6, MR7.

Для доказательства (iii) достаточно проверить, что каждый базисный элемент ψ_{0n}, $n \in \mathbb{Z}$ ортогонален $\widetilde{V}_0$. Используя (1.46) и масштабирующее уравнение для функции $\widetilde{\varphi}$, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\psi}(\xi+k)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+k)}e^{2\pi in\xi} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(n+1/2)(\xi+k)} \overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+k+1}{2}\right)\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+k}{2}\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{2}\right)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{\xi+k}{2}\right)} =$$

$$= e^{2\pi i(n+1/2)\xi}\left(\overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2}\right)}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+l\right)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{\xi}{2}+l\right)} -\right.$$

$$\left. - \overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+l\right)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{\xi+1}{2}+l\right)}\right).$$

Из предложения 1.1.12 следует, что правая часть этого равенства равна нулю при почти всех $\xi \in \mathbb{R}$, откуда в силу предложения 1.2.2 получаем $\psi_{0n} \perp \widetilde{V}_0$.

Пусть $f \in V_1$. По предложению 1.2.3 существует 1-периодическая функция $m_f \in L_2(0,1)$, удовлетворяющая соотношению (1.22). Положим

$$\alpha(\xi) := m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} + m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)},$$

$$\beta(\xi) := \left(m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) - m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right)e^{-\pi i\xi}.$$

Нетрудно проверить, что функции α, β являются 1-периодическими и имеет место равенство

$$m_f\left(\frac{\xi}{2}\right) = \alpha(\xi)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) + \beta(\xi)\overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}e^{\pi i\xi}. \tag{1.50}$$

Покажем, что $\alpha \in L_2(0,1)$. По следствию 1.2.5 функция $\widetilde{m}_0$ существенно ограничена, поэтому

$$\left(\int_0^1 |\alpha(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\left(\int_0^1 \left|m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \left|m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\,C\left(\int_0^1 \left|m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 d\xi + \int_0^1 \left|m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} = 2C\|m_f\|.$$

Аналогично проверяется, что $\beta \in L_2(0,1)$. Пусть

$$\alpha(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\xi}, \quad \beta(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi i n\xi},$$

положим

$$f_1(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(x+n), \quad f_2(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\psi(x+n).$$

Ясно, что $f_1 \in V_0$, $f_2 \in W_0$. Применяя предложение 1.1.10, масштабирующее уравнение для φ и (1.46), имеем

$$\widehat{f}_1(\xi) = \alpha(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) = \alpha(\xi)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$
$$\widehat{f}_2(\xi) = \beta(\xi)\widehat{\psi}(\xi) = \beta(\xi)e^{\pi i\xi}\overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Из этих равенств, (1.22) и (1.50) следует $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$, что влечет $f = f_1 + f_2$, и тем самым доказано (iv).

Для доказательства (v) вследствие предложения 1.1.12 достаточно проверить, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(\xi+k)\overline{\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi+k)} = 1 \tag{1.51}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{Z}$. Используя (1.46) и (1.47), имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(\xi+k)\overline{\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi+k)} =$$
$$= \overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+k+1}{2}\right)}m_0\left(\frac{\xi+k+1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{2}\right)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{\xi+k}{2}\right)} =$$
$$= \left(\overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2}\right)}m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+l\right)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{\xi}{2}+l\right)} -\right.$$
$$\left. - \overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+l\right)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{\xi+1}{2}+l\right)}\right).$$

Подставляя в правую часть равенства (1.16) и (1.26), получим (1.51). $\Diamond$

Функции ψ, $\widetilde{\psi}$, обеспечивающие свойства (i)–(v) теоремы 1.3.7, будем называть *всплеск-функциями* (*wavelet functions*). Такая пара функций не единственная, например, в равенствах (1.46), (1.47) можно заменить множитель $e^{\pi i\xi}$ на $\pm e^{\pm\pi i\xi}$, из доказательства теоремы ясно, что определенные таким образом ψ, $\widetilde{\psi}$ тоже будут всплеск-функциями.

Упражнение 1.3.8. Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — КМА, удовлетворяющие условиям теоремы 1.3.7. Описать все пары функций λ, $\widetilde{\lambda}$, при которых $\psi, \widetilde{\psi}$, определенные равенствами

$$\widehat{\psi}(\xi) = \lambda(\xi)\overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad \widehat{\widetilde{\psi}}(\xi) = \widetilde{\lambda}(\xi)\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

являются всплеск-функциями.

Если ψ — всплеск-функция, то набор функций ψ_{jk}, $j,k \in \mathbb{Z}$, будем называть *системой всплесков* (*wavelet system*).

Из формулировки теоремы 1.3.7 ясно, что, поменяв ролями первый и второй КМА и положив

$$\widetilde{W}_0 := \overline{\operatorname{span}\{\widetilde{\psi}_{0n}, \quad n \in \mathbb{Z}\}},$$

мы получим для КМА $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ утверждения, аналогичные (i)–(iv). Определим пространства всплесков

$$\begin{aligned} W_j &:= \{f \in L_2(\mathbb{R}):\ f(2^{-j}\cdot) \in W_0\}, \\ \widetilde{W}_j &:= \{f \in L_2(\mathbb{R}):\ f(2^{-j}\cdot) \in \widetilde{W}_0\}. \end{aligned}$$

Следствие 1.3.9. *В условиях теоремы* 1.3.7 *системы* $\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *и* $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *являются базисами Рисса соответственно в пространствах* W_j *и* $\widetilde{W}_j$; $V_{j+1} = V_j + W_j$, $\widetilde{V}_{j+1} = \widetilde{V}_j + \widetilde{W}_j$; $W_j \perp \widetilde{W}_k$ *для всех* $j \neq k$; $V_j \perp \widetilde{W}_k$, $\widetilde{V}_j \perp W_k$ *для всех* $k \geqslant j$; *системы* $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *являются биортонормированными.*

Все утверждения следствия мгновенно вытекают из теоремы 1.3.7 и MR4.

Теорема 1.3.10. *Пусть* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — *два КМА с масштабирующими функциями соответственно* φ, $\widetilde{\varphi}$ *такими, что системы* $\{\varphi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\varphi}_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *являются биортонормированными, и пусть* ψ, ψ — *соответствующие всплеск-функции. Тогда для любой функции* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *имеет место разложение*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\varphi}_{0n}\rangle \varphi_{0n} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle \psi_{jn} = \tag{1.52}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle \psi_{jn} + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle \psi_{jn}. \tag{1.53}$$

Доказательство. Введем оператор P_j, действующий на $L_2(\mathbb{R})$,

$$P_j f := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle \varphi_{jn},$$

и покажем, что он ограничен. Из того, что $\{\widetilde{\varphi}_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является системой Рисса, теоремы 1.1.2 и замечания 1.1.3 следует

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle|^2 \leqslant \widetilde{B}\|f\|^2,$$

где $\widetilde{B}$ — верхняя постоянная системы Рисса. Значит, поскольку $\{\varphi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является системой Рисса, $P_jf \in V_j$ и

$$\|P_jf\|^2 \leqslant B\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle|^2 \leqslant B\widetilde{B}\|f\|^2. \tag{1.54}$$

Таким образом,

$$\|P_j\| \leqslant C, \tag{1.55}$$

где C не зависит от j. Ясно, что

$$\langle f, g\rangle = \langle P_jf, g\rangle \tag{1.56}$$

для любого $g \in \widetilde{V}_j$, отсюда следует, что P_j — проекционный оператор на V_j. Аналогично, оператор

$$Q_jf := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle \psi_{jn}$$

ограничен и является проектором на W_j. По следствию 1.3.9 для любой функции $f \in V_{j+1}$ имеет место разложение $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in V_j$, $f_2 \in W_j$. Поэтому для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$P_{j+1}f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_{jn} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n\psi_{jn}.$$

Домножая скалярно это равенство последовательно на функции $\widetilde{\varphi}_{jn}, \widetilde{\psi}_{jn}$, $n \in \mathbb{Z}$ и учитывая (1.56), найдем коэффициенты разложения: $c_n = \langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle$, $d_n = \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle$. Таким образом,

$$P_{j+1}f = P_jf + Q_jf.$$

Применив это равенство несколько раз, получим

$$P_{j+1}f = P_0f + \sum_{i=0}^{j} Q_if, \tag{1.57}$$

$$P_0f = P_{-j}f + \sum_{i=-j}^{-1} Q_if. \tag{1.58}$$

По MR2 для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$ существует $g \in V_{j_0}$ такое, что $\|f - g\| < \varepsilon$. Отсюда, из MR1 и (1.55) для всех $j \geqslant j_0$

$$\|f - P_jf\| = \|(f - g) - P_j(f - g)\| < (1 + C)\varepsilon.$$

Сопоставляя это с (1.57), получаем

$$f = P_0f + \sum_{i=0}^{\infty} Q_if, \tag{1.59}$$

и тем самым установлено равенство (1.52). Для доказательства (1.53) заметим, что из левого неравенства (1.54) и леммы 1.2.8 следует

$$\|P_j f\| \leqslant B \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle|^2 \underset{j\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Осуществляя предельный переход в (1.58), имеем

$$P_0 f = \sum_{i=-\infty}^{-1} Q_i f.$$

Подставляя это равенство в (1.59), получаем (1.53). ◊

З а м е ч а н и е 1.3.11. Из доказательства теоремы ясно, что соотношения (1.52), (1.53) могут быть заменены на

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle \varphi_{jn} + \sum_{i=j}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{in}\rangle \psi_{in} = \tag{1.60}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{j-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{in}\rangle \psi_{in} + \sum_{i=j}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{in}\rangle \psi_{in} \tag{1.61}$$

для любого $j \in \mathbb{Z}$.

В гл. 2 будет показано, что при весьма незначительных дополнительных требований на функции φ, $\widetilde{\varphi}$ в условиях теоремы 1.3.10 каждая из систем $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

В доказательствах теорем 1.3.7 и 1.3.10 мы нигде не использовали свойства MR2, MR3 второго КМА $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Кроме того, если не затрагивать вопрос сходимости всплеск-разложений, а ограничиться обсуждением самой конструкции биортогональных всплесков, то, вообще говоря, можно отказаться и от требования, чтобы функции $\widetilde{\varphi}_{0n}$, $n \in \mathbb{Z}$, образовывали систему Рисса (хотя формально мы использовали это требование в доказательстве теоремы 1.3.7, фактически нам была нужна лишь ограниченность маски $\widetilde{m}_0$). В связи с этим возникает желание расширить класс функций $\widetilde{\varphi}$, порождающих КМА $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Более того, если φ непрерывна, то в качестве $\widetilde{\varphi}$ можно попробовать взять борелевскую меру. Рассмотрим пример такой конструкции.

В качестве $\widetilde{\varphi}$ возьмем δ-функцию, заданную на $\mathbb{R}$. Поскольку $\widehat{\widetilde{\varphi}} \equiv 1$, функция $\widetilde{\varphi}$ является решением масштабирующего уравнения (1.23) с маской $\widetilde{m}_0 \equiv 1$. Предположим, что функция φ непрерывна, порождает КМА, и $\varphi(n) = \delta_{n0}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда ясно, что условие (1.17) выполнено, т. е. $\{\varphi_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\varphi}_{0n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортонормированные системы.

Следовательно и системы $\{\varphi_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\varphi}_{jn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является биортонормированными для любого $j\in\mathbb{Z}$. Отсюда имеем

$$\delta_{nk} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{jn}(x)\widetilde{\varphi}_{jk}(x)\,dx =$$

$$= 2^{-j/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{jn}(2^{-j}(x-k))\delta(x)\,dx = 2^{-j/2}\varphi_{jn}(-2^{-j}k).$$

С другой стороны, для любой непрерывной функции f

$$\langle f,\widetilde{\varphi}_{jn}\rangle = 2^{-j/2}f(-2^{-j}k).$$

Таким образом, проекционный оператор P_j на пространство V_j, введенный в доказательстве теоремы 1.3.10, интерполирует функцию f в узлах $x_{jn}:=2^{-j}n$, $n\in\mathbb{Z}$, поэтому рассматриваемый КМА называется *интерполяционным*.

По формулам (1.44) и (1.45) найдем всплеск-функции

$$\psi(x) = 2\varphi(2x+1),$$
$$\widetilde{\psi}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-k}h_{1-k}\delta(2x+k),$$

где $h_k/\sqrt{2}$ — коэффициенты Фурье маски m_0. Проекционный оператор на пространство W_j не будет интерполяционным, но коэффициенты разложения по системе $\{\psi_{jn}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ выражаются через значения функции f в узлах x_{jn}, $j,n\in\mathbb{Z}$. Формальный подсчет дает

$$\langle f,\widetilde{\psi}_{jn}\rangle = 2^{j/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\widetilde{\psi}(2^jx+n)\,dx =$$

$$= 2^{\frac{j+1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-k}h_{1-k}\delta(2^{j+1}x+2n+k)\,dx =$$

$$= 2^{-\frac{j+1}{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-k}h_{1-k}f\left(-2^{-j-1}(2n+k)\right).$$

1.4. Системы Хаара, Баттла–Лемарье, Стрёмберга и Мейера

1. Система Хаара, которую начали изучать почти на целое столетие раньше, чем появилась теория всплесков, является самым простым, но в тоже время самым модельным примером системы всплесков. Мы построим базис Хаара, следуя общей схеме, изложенной в 1.3.

Положим $\varphi = \varphi^H = \chi_{[0,1]}$. Преобразование Фурье этой функции

$$\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\pi i\xi}\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$$

удовлетворяет уравнению (1.23) с маской

$$m_0(\xi) = m^H(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\xi}.$$

Ортонормированность целых сдвигов функции φ очевидна. Таким образом, φ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.14 и, значит, является масштабирующей функцией порожденного ею КМА Хаара. По формуле (1.42) найдем соответствующую всплеск-функцию

$$\psi^H(x) = \varphi(2x+1) - \varphi(2x+2) = \begin{cases} -1, & \text{при } -1 \leqslant x < -1/2, \\ \ \ 1, & \text{при } -1/2 < x \leqslant 0, \\ \ \ 0, & \text{при } x = -1/2,\ x > 0,\ x < -1. \end{cases}$$

По теореме 1.3.1 функции ψ^H_{jk}, $j, k \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

Сам А. Хаар рассматривал ортонормированный базис, порожденный всплеск-функцией $\psi(x) = \psi^H(-x)$, причем рассматривал его только в пространстве $L_2([0,1])$. Насколько известно авторам, в работах А. Хаара не был отмечен тот факт, что все элементы построенной им системы являются двоичными сжатиями и сдвигами одной фиксированной функции. Возможно это задержало возникновении стройной теории всплесков почти на столетие.

2. Всплески Баттла–Лемарье. Естественным обобщением системы Хаара является следующая конструкция. Положим $\varphi^{B,0} = \chi_{[0,1]}$ (это уже знакомая нам масштабирующая функция системы Хаара) и для любого натурального N определим функцию $\varphi = \varphi^{B,N}$ рекурсивно:

$$\begin{aligned} \varphi^{B,2k+1}(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{B,2k}(t)\chi_{[0,1]}(x-t)\,dt, \\ \varphi^{B,2k}(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{B,2k-1}(t)\chi_{[-1,0]}(x-t)\,dt. \end{aligned} \tag{*}$$

Функции $\varphi^{B,N}$ являются B-сплайнами. Мы воздержимся от изложения хорошо изученной теории B-сплайнов, которую можно прочитать во многих монографиях. Некоторые свойства B-сплайнов будут изложены при изучении масштабирующих уравнений (пример 3.5.1, гл. 3). Отметим пока лишь, что по индукции легко проверить, что $\varphi^{B,N}$ — сплайн порядка N с компактным носителем; функция $\varphi^{B,2k+1}$ сосредоточена на отрезке $[-k-1, k+1]$, а функция $\varphi^{B,2k}$ — на отрезке $[-k, k+1]$.

Поскольку преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению их преобразований Фурье, мы имеем

$$\widehat{\varphi^{B,N}}(\xi) = e^{-\pi i \gamma(N)\xi} \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^{N+1},$$

где

$$\gamma = \gamma(N) = \begin{cases} 0, & \text{если } N \text{ нечетное,} \\ 1, & \text{если } N \text{ четное.} \end{cases}$$

Покажем, что целые сдвиги функции φ образуют систему Рисса. По теореме 1.1.7 для этого достаточно проверить ограниченность положительными постоянными сверху и снизу суммы $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2$. Но это следует из тривиальных неравенств:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 \geqslant \min_{\xi\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^{2(N+1)} > 0,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 \leqslant \max_{\xi\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^{2(N+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k-1/2)^{2(N+1)}} < \infty.$$

Нетрудно видеть, что функция $\widehat{\varphi}$ удовлетворяет уравнению (1.23) с маской $m_0(\xi) = m^{B,N}(\xi) = e^{-\pi i\gamma\xi} \cos^{N+1} \pi\xi$. Значит, опять выполнены все условия теоремы 1.2.14, и $\varphi^{B,N}$ является масштабирующей функцией порожденного ей КМА Баттла–Лемарье.

По теореме 1.1.14 в этом КМА существует другая масштабирующая функция $\varphi^\sharp$, целые сдвиги которой образуют ортонормированную систему. Ясно, что $\varphi^\sharp$ тоже является сплайном порядка N, но при $N > 1$ ее носитель уже не будет компактным. Далее, по теореме 1.3.1 можно построить соответствующий ортонормированный базис всплесков ψ_{jk}, $j,k\in\mathbb{Z}$, состоящий из сплайнов порядка N.

Рассмотрим подробнее случай $N = 1$. Нетрудно проверить, что

$$\varphi(x) = \varphi^{B,1}(x) := (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$$

во временной области ее масштабирующее уравнение имеет вид

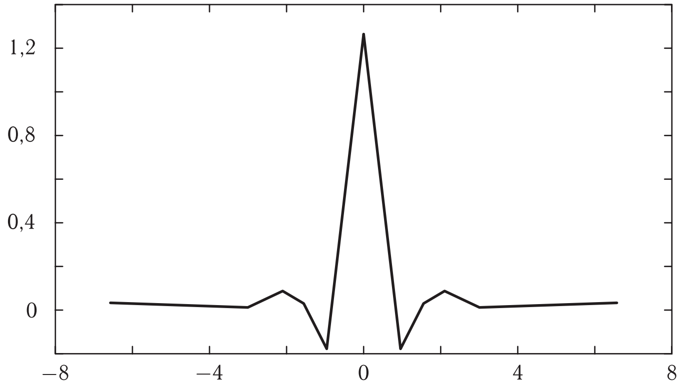
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\varphi(2x-1) + \varphi(2x) + \frac{1}{2}\,\varphi(2x+1)$$

и справедливо равенство

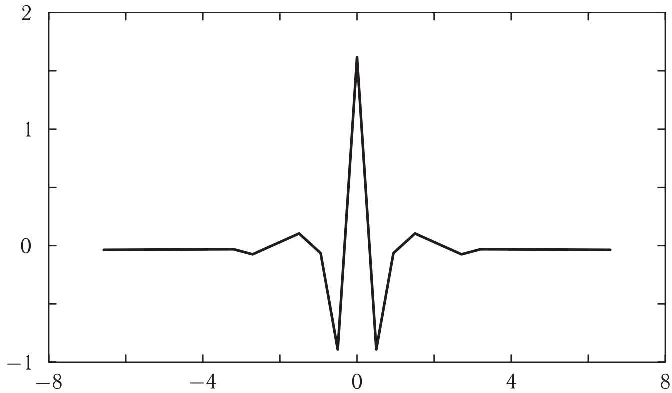
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin \pi(\xi+k)}{\pi(\xi+k)}\right)^4 = \frac{1+2\cos^2\pi\xi}{3}.$$

Функция $\varphi^\#$ определяется равенством

$$\widehat{\varphi}^\#(\xi) = \frac{\sqrt{3}\,\widehat{\varphi}(\xi)}{(1+2\cos^2\pi\xi)^{1/2}} = \frac{\sqrt{3}\,\sin^2\pi\xi}{(\pi\xi)^2(1+2\cos^2\pi\xi)^{1/2}},$$



а



б

Рис. 1.1. Система Баттла–Лемарье ($N = 1$): *а* — масштабирующая функция $\varphi^{\#}$; *б* — всплеск-функция $\psi^{B,1}$

из которого следует, что

$$\varphi^{\#}(x) = \sqrt{3}\sum_n c_n \varphi(x+n),$$

где c_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции $[1+2\cos^2 \pi\xi]^{-1/2}$, а масштабирующее уравнение для $\widehat{\varphi}^{\#}$ имеет вид

$$\widehat{\varphi}^{\#}(2\xi) = m_0^{\#}(\xi)\widehat{\varphi}^{\#}(\xi),$$

где

$$m_0^{\#}(\xi) = \cos^2 \pi\xi \left[\frac{1+2\cos^2 \pi\xi}{1+2\cos^2 2\pi\xi}\right]^{1/2}.$$

По формуле (1.46) соответствующая всплеск-функция $\psi = \psi^{B,1}$ определяется равенством

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\pi\xi}\sin^2\frac{\pi\xi}{2}\left[\frac{1+2\sin^2\pi\xi/2}{1+2\cos^2\pi\xi}\right]^{1/2}\widehat{\varphi}^{\#}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sqrt{3}\,m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

где

$$m_1(\xi) = e^{2i\pi\xi}\sin^2\pi\xi\left[\frac{1+2\sin^2\pi\xi}{(1+2\cos^2 2\pi\xi)(1+2\cos^2\pi\xi)}\right]^{1/2}.$$

Обозначая через d_n, $n \in \mathbb{Z}$, коэффициенты Фурье функции m_1, получаем

$$\psi(x) = \sqrt{3}\sum_n d_n\varphi(2x+n).$$

В случае $N = 2$

$$\varphi(x) = \varphi^{B,2}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2, & \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{3}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}(x-2)^2, & \text{если} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

масштабирующее уравнение во временной области имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\varphi(2x-2) + \frac{3}{4}\varphi(2x-1) + \frac{3}{4}\varphi(2x) + \frac{1}{4}\varphi(2x+1),$$

и справедливо равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\sin\pi(\xi+k)}{\pi(\xi+k)}\right)^6 = \frac{8}{15} + \frac{13}{30}\cos 2\pi\xi + \frac{1}{30}\cos^2 2\pi\xi.$$

Ортогонализовать B-сплайн $\varphi = \varphi^{B,N}$ можно чуть-чуть по-другому. Заметим, что

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+l)|^2 = P_N(\cos 2\pi\xi), \tag{1.62}$$

где P_N — положительный полином степени N на отрезке $[-1, 1]$. Действительно, легко видеть, что

$$\operatorname{supp}\varphi = \left[\frac{\gamma-N-1}{2}, \frac{\gamma+N+1}{2}\right]. \tag{1.63}$$

Остается заметить, что по формуле Планшереля

$$\int_0^1 e^{2\pi ik\xi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+l)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik\xi}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\varphi(t+k)\,dt.$$

Таким образом, принимая во внимание равенства $<\varphi_{0k}, \varphi_{00}> = <\varphi_{0,-k}, \varphi_{00}>$, из (1.63) получаем (1.62).

В силу леммы Рисса (см. приложение A.11)

$$P_N(\cos 2\pi\xi) = a_N|(1 + z_1\, e^{2\pi i\xi}) \dots (1 + z_N\, e^{2\pi i\xi})|^2,$$

где $\{z_l\}_{l=1}^N$ всегда можно выбрать внутри единичного круга: $|z_l| < 1$. Более того, из результатов Шонберга [215] следует, что $\{z_l\}_{l=1}^N$ — положительные числа. Обозначим их: $s_N < s_{N-1} < \dots < s_1$. Пусть

$$A_N(\xi) = \sqrt{a_N}\,(1 + s_1\, e^{2\pi i\xi}) \dots (1 + s_N\, e^{2\pi i\xi}).$$

Тогда функция φ^{St}, определяемая равенством

$$\widehat{\varphi^{St}}(\xi) = \widehat{\varphi^{St,N}}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi^{B,N}}(\xi)}{A_N(\xi)}, \tag{1.64}$$

удовлетворяет (1.17) и, следовательно ее целые сдвиги образуют ортонормированную систему. Соответствующую этой функции систему всплесков называют *всплесками Стрёмберга*. Так как

$$(1 + s\, e^{2\pi i\xi})^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-s\, e^{2\pi i\xi})^l,$$

равенство (1.64) означает, что φ^{St} разлагается в ряд по целым сдвигам влево B-сплайна $\varphi^{B,N}$, причем коэффициенты разложения убывают как геометрическая прогрессия. Значит, $\operatorname{supp} \varphi^{St} = \left(-\infty, \dfrac{\gamma + N + 1}{2}\right]$ и $\varphi^{St}(t)$ убывает экспоненциально при $t \to -\infty$.

Отметим, что очень близкие конструкции ортонормированных базисов (правда, как и в случае системы Хаара они рассматривались для пространства $L_2([0, 1])$) были сконструированы в работах Шаудера и Чисельского вскоре после открытия Хаара. Основной идеей построений являлось многократное интегрирование всплеск-функций Хаара с целью получения нужной гладкости элементов базиса с последующим применением процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта. Однако последняя операция нарушает простую алгебраическую структуру базиса всплесков Хаара, что значительно усложняет изучение таких систем и, что еще более важно, затрудняет вычислительные процессы разложения в ряды Фурье функций и обратного восстановления их по коэффициентам.

Всплески Баттла–Лемарье и Стрёмберга называют *сплайн-всплесками*.

3. Всплески Мейера. Для $\varepsilon \in [0, 1/6]$ определим функцию $\varphi = \varphi^M$ равенством

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\xi| < \dfrac{1}{2} - \varepsilon, \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}|\xi| + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4\varepsilon}\right)\right), & \text{если } \dfrac{1}{2} - \varepsilon \leqslant |\xi| \leqslant \dfrac{1}{2} + \varepsilon. \\ 0, & \text{если } |\xi| > \dfrac{1}{2} + \varepsilon, \end{cases}$$

где ν — функция, заданная на $\mathbb{R}$, и такая, что $\nu(\xi) \geqslant 0$, $\nu(\xi) = 0$ при $\xi \leqslant 0$, $\nu(\xi) = 1$ при $\xi \geqslant 1$,

$$\nu(\xi) + \nu(1 - \xi) = 1 \tag{1.65}$$

при $\xi \in [0,1]$. Положим

$$m_0(\xi) = m^M(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2(\xi+l)). \tag{1.66}$$

Поскольку $\widehat{\varphi}$ обладает следующим свойством:

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\varphi}(2\xi)$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}$, а носители функций $\widehat{\varphi}(\cdot/2)$ и $\widehat{\varphi}(\cdot + 2l)$ дизъюнктны при $l \neq 0$, имеет место тождество

$$m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2\xi+2l)\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi).$$

Таким образом, функция $\widehat{\varphi}$ удовлетворяет уравнению (1.23), а функция m_0 является ее маской. Покажем, что целые сдвиги функции φ образуют ортонормированную систему. По предложению 1.1.12 достаточно проверить, что равенство (1.17) выполнено для любого $\xi \in \mathbb{R}$. При $|\xi| < \dfrac{1}{2} - \varepsilon$ и $|\xi| > \dfrac{1}{2} + \varepsilon$ оно очевидно. Пусть $\xi = \dfrac{1}{2} + \delta$, $0 \leqslant |\delta| \leqslant \varepsilon$, тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}^2(\xi+k) = \widehat{\varphi}^2\left(\frac{1}{2}+\delta\right) + \widehat{\varphi}^2\left(-\frac{1}{2}+\delta\right) =$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{\delta}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(-\frac{\delta}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)\right) +$$

$$+ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{\delta}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\nu\left(-\frac{\delta}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)\right)\right).$$

Осталось заметить, что правая часть тождественно равна единице, поскольку в силу соотношения (1.65)

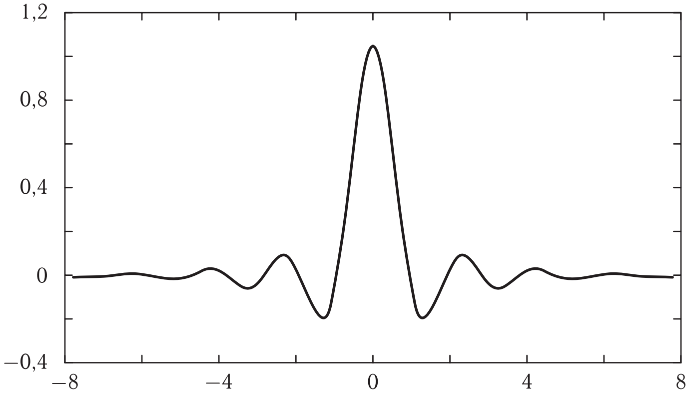
$$\nu\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\varepsilon}\right) = 1 - \nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\varepsilon}\right).$$

Доказано, что φ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.14 и, значит, является масштабирующей функцией порожденного ею КМА Мейера. По теореме 1.3.1 соответствующая система всплесков образует ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

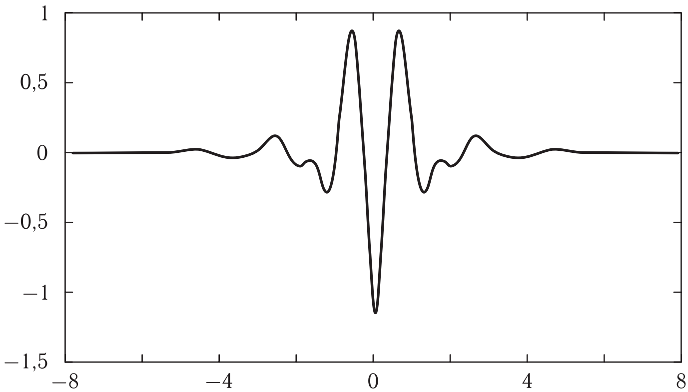
Остановимся на предельном случае системы Мейера, соответствующем $\varepsilon = 0$, который является своего рода «антиподом» системы Хаара (функции φ и $\widehat{\varphi}$ фактически меняются ролями). В этом случае простой подсчет дает явное представление масштабирующей функции $\varphi = \varphi^S$:

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \tag{1.67}$$

Теорема 1.4.1. *Пусть* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *— КМА, порожденный масштабирующей функцией* φ*, определенной равенством* (1.67)*. Тогда*



а



б

Рис. 1.2. Система Мейера ($\varepsilon = 1/6$, $\nu(x) = -20x^7 + 70x^6 - 84x^5 + 35x^4$): *а* — масштабирующая функция φ^M; *б* — всплеск-функция ψ^M

(i) *для того чтобы функция* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *принадлежала пространству* V_j *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-2^{j-1}, 2^{j-1}]; \tag{1.68}$$

(ii) *для любого элемента* f *пространства* V_j *имеет место разложение*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(-2^{-j}n) \frac{\sin \pi(2^j x + n)}{\pi(2^j x + n)}, \tag{1.69}$$

где ряд сходится по норме в $L_2(\mathbb{R})$ *и равномерно на* $\mathbb{R}$ (*для непрерывного представителя класса смежности функции* f).

Доказательство. Соотношение (1.68) равносильно равенству

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\chi_{[-2^{j-1},2^{j-1}]} = m_f(2^{-j}\xi)\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

где

$$m_f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j(\xi+n)).$$

Отсюда и из предложения 1.2.3 следует (i).

Пусть $f \in V_j$, тогда по (i) выполнено (1.68). Из финитности $\widehat{f}$ следует эквивалентность f непрерывной функции и, более того, по теореме Пэли–Винера (см. приложение A.7) — эквивалентность f целой функции экспоненциального типа. Будем считать, что f — непрерывный представитель класса смежности. По формуле обращения преобразования Фурье

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi = \int\limits_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi \tag{1.70}$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Применяя обобщенное равенство Парсеваля, имеем

$$\int\limits_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int\limits_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} e^{2\pi i\left(x+2^{-j}n\right)\xi}\,d\xi \int\limits_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i2^{-j}n\xi}\,d\xi =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin\pi(2^jx+n)}{\pi(2^jx+n)} \int\limits_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i2^{-j}n\xi}\,d\xi.$$

Для доказательства (1.69) при фиксированном $x \in \mathbb{R}$ осталось подставить это равенство в правую часть (1.70) и заметить, что, в силу формулы обращения,

$$\int\limits_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i2^{-j}k\xi}\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i2^{-j}k\xi}\,d\xi = f(-2^{-j}k).$$

Отсюда также следует, что число $f(-2^{-j}k)$ является k-м коэффициентом Фурье 2^j-периодической функции

$$g(\xi) := 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+2^jk),$$

которая принадлежит $L_2(0,2^j)$, значит, ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |f(-2^{-j}n)|^2$ сходится. Кроме того, очевидно, что ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin\pi(2^jx+n)}{\pi(2^jx+n)}\right)^2$$

равномерно сходится на $\mathbb{R}$. Поэтому, применяя к ряду в правой части (1.69) неравенство Коши, устанавливаем его равномерную сходимость.

Применяя теорему Планшереля и формулу обращения, учитывая структуру носителей функций $\widehat{f}, \widehat{\varphi}$, имеем

$$\langle f, \varphi_{jn}\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_{jn}(x)\,dx = 2^{-j/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi)e^{2\pi i 2^{-j}n\xi}\,d\xi =$$

$$= 2^{-j/2}\int\limits_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i 2^{-j}n\xi}\,d\xi = 2^{-j/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i 2^{-j}n\xi}\,d\xi =$$

$$= 2^{-j/2}f(2^{-j}n).$$

Отсюда и из того, что функции φ_{jn}, $n\in\mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в V_j следует, что ряд в правой части (1.69) сходится по норме в $L_2(\mathbb{R})$. $\Diamond$

КМА, описанный в теореме 1.4.1, принято называть *КМА Котельникова–Шеннона*. Построим соответствующую систему всплесков. Заметим, что 1-периодическая функция

$$m_0(\xi) = m^S(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\xi| \leqslant 1/4;\\ 0, & \text{если } 1/4 \leqslant |\xi| \leqslant 1/2,\end{cases}$$

является маской масштабирующей функции φ^S.

Коэффициенты $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ из (1.24) можно найти, пользуясь формулой (1.69):

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(-k/2)\,\varphi(2t+k).$$

Значит,

$$h_k = h_k^S = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0;\\ \dfrac{2}{k\pi}\,(-1)^{(k-1)/2}, & \text{если } k \text{ — нечетное;}\\ 0, & \text{если } k \text{ — четное.}\end{cases}$$

В соответствие с общей схемой находим преобразование Фурье соответствующей всплеск-функции $\psi = \psi^S$:

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\pi\xi}\overline{m(\xi/2+1/2)}\widehat{\varphi}(\xi/2) = e^{i\pi\xi}\chi_{[-1,\,-1/2]\bigcup[1/2,\,1]}(\xi) = \\ = e^{i\pi\xi}(\widehat{\varphi}(\xi/2) - \widehat{\varphi}(\xi)).$$

Упражнение 1.4.2. Доказать, что

$$\psi^S(t) = 2\varphi^S(2t+1) - \varphi^S(t+1/2).$$

1.5. Константы неопределенности

Главной особенностью систем всплесков является то, что все элементы этой системы получаются в результате сжатий и сдвигов одной фиксированной функции. Генерирующая всплеск-функция ψ представляет собой затухающее колебание, локализованное как по времени, так и по частоте. Двоичные сжатия-растяжения функции ψ порождают разбиение частотной оси на октавы. Таким образом, коэффициент Фурье $c_{jk} = \langle f, \psi_{jk}\rangle$ функции f по базису всплесков по существу дает информацию о том, как функция f колеблется в полосе частот, за которую отвечает ψ_{jk}, причем колебания изучаются в некоторой локальной области, где функция ψ_{jk} принимает значимые значения.

В связи с этим важную роль играет время-частотная локализация всплеск-функции ψ, характеризуемая при помощи понятий *центра* и *радиуса*. Центр $x_f^\star$ и радиус Δ_f функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ с ненулевой нормой определяются равенствами

$$x_f^\star := \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,|f(x)|^2\,dx}{\|f\|^2}; \quad \Delta_f := \frac{1}{\|f\|}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - x_f^\star)^2\,|f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}.$$

Центр представляет собой математическое ожидание случайной величины с плотностью распределения, равной $|f|^2/\|f\|^2$, радиус же является средним квадратическим отклонением той же случайной величины. Грубо говоря, функция f локализована (т. е. принимает значимые значения) на отрезке $[x_f^\star - \Delta_f, x_f^\star + \Delta_f]$.

Аналогично определяется центр $\xi_{\widehat{f}}^\star$ и радиус $\Delta_{\widehat{f}}$ для преобразования Фурье функции f:

$$\xi_{\widehat{f}}^\star := \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}{\|\widehat{f}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}; \quad \Delta_{\widehat{f}} := \frac{1}{\|\widehat{f}\|}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\xi - \xi_{\widehat{f}}^\star)^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right\}^{1/2}.$$

Произведение $\Delta_f\,\Delta_{\widehat{f}}$ характеризует время-частотную локализацию f и называется *константой неопределенности* функции f.

Упражнение 1.5.1. Пусть x^* и ξ^* — центры f и $\widehat{f}$ соответственно. Доказать, что функция $g(x) := e^{-2\pi i\xi^* t} f(x + x^*)$ и ее преобразование Фурье имеют нулевые центры и те же радиусы $\Delta_f = \Delta_g$, $\Delta_{\widehat{f}} = \Delta_{\widehat{g}}$.

Теорема 1.5.2. *Для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ с ненулевой нормой выполняется неравенство*

$$\Delta_f \Delta_{\widehat{f}} \geqslant \frac{1}{4\pi} \approx 0{,}079\,577\,5. \tag{1.71}$$

Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$f(x) = ce^{2\pi i a x} g_\alpha(x - b),$$

где $g_\alpha(x) := \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}\, e^{-\pi x^2/(4\alpha)}$, $c \neq 0$, $\alpha > 0$; $b \in \mathbb{R}$.

Сначала докажем вспомогательное утверждение. Напомним, что функция $f(x)$ является абсолютно непрерывной, если она дифференцируема почти всюду, ее производная локально суммируема и

$$f(x) - f(y) = \int\limits_x^y f'(t)\, dt \quad \text{для любых } x, y$$

(см. приложение A.10).

Лемма 1.5.3. *Пусть f абсолютно непрерывна. Если функции $(1 + |x|)f(x)$ и $f'(x)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$, то*

$$\left|\mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\overline{f'(x)}\, dx\right|^2 \leqslant \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2\, dx\right\}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2\, dx\right\}. \tag{1.72}$$

Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$f(x) = c\, e^{-\pi x^2/(4\alpha)},$$

где $c \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Доказательство. Неравенство (1.72) следует из неравенства Коши–Буняковского. Если в (1.72) имеет место равенство, то

$$-\,\mathrm{Re}\, x f(x)\overline{f'(x)} = |x f(x) f'(x)|, \tag{1.73}$$

$$|x f(x)| = 2\alpha |f'(x)|. \tag{1.74}$$

где α — некоторая положительная константа. Несложно показать, что другой случай

$$\mathrm{Re}\, x f(x)\overline{f'(x)} = |x f(x) f'(x)|$$

противоречит тому, что $f \in L_2(\mathbb{R})$. Равенство (1.74) влечет, что

$$x f(x) = 2\alpha f'(x) e^{i\theta(x)},$$

где $\theta(x)$ — некоторая действительнозначная функция. Из (1.73) следует, что

$$-xf(x)\overline{f'(x)} \geqslant 0,$$

откуда в свою очередь получаем

$$-2\alpha|f'(x)|^2 e^{i\theta(x)} \geqslant 0,$$

и, значит, $e^{i\theta(x)} = -1$. Окончательно имеем

$$xf(x) = -2\alpha f'(x),$$

следовательно, f' непрерывна и

$$f(x) = c\,e^{-\pi x^2/4\alpha}$$

для некоторой константы $c \neq 0$. $\diamondsuit$

Доказательство теоремы 1.5.2. В первую очередь заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что функции f и $\widehat{f}$ имеют нулевые центры (см. упражнение 1.5.1), а так же что $\|f\| = 1$, т. е. доказываемое неравенство имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,dx \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi \geqslant \frac{1}{4\pi}. \tag{1.75}$$

Кроме того, можем считать, что $\Delta_f\Delta_{\widehat{f}} < \infty$ (в противном случае утверждение тривиально), что влечет конечность каждого из интегралов в (1.75). Покажем, что функция f абсолютно непрерывна. Рассмотрим обобщенную производную $f' \in \mathcal{S}'$ (см. приложение А.3), для которой выполнено равенство (в смысле обобщенных функций)

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi).$$

Функция в правой части этого равенства принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, поэтому и $\widehat{f'} \in L_2(\mathbb{R})$, и равенство выполняется почти всюду на $\mathbb{R}$. Следовательно, $f' \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда для любого отрезка $[a,b]$ имеем $f' \in L[a,b]$, а значит, функция f' имеет первообразную на $[a,b]$, которая совпадает с f. Таким образом, функция f абсолютно непрерывна и ее производная принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Значит, и функция $g(x) := |f(x)|^2$ абсолютно непрерывна, и ее производная суммируема на $\mathbb{R}$. Из равенства $g(x) - g(0) = \int\limits_0^x g'(t)\,dt$ и суммируемости g' следует, что правая часть имеет предел при $x \to \pm\infty$, а из суммируемости g — что этот предел равен нулю.

Ясно, что

$$(\Delta_f\Delta_{\widehat{f}})^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dt\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dt\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi\right) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dt\right)\|f'\|^2.$$

С помощью леммы 1.5.3 и интегрирования по частям имеем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2dt\right)\|f'\|^2 \geqslant \left|\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\overline{f'}(x)\,dx\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{d}{dx}\,|f(x)|^2dx\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx\right)^2 = \frac{1}{4}. \quad \lozenge$$

Заметим, что $\Delta_{\psi_{jk}} = 2^{-j}\,\Delta_\psi$, $\Delta_{\widehat{\psi_{jk}}} = 2^j\,\Delta_{\widehat{\psi}}$, $j,k\in\mathbf{Z}$. Таким образом, константа неопределенности для всех элементов базиса всплесков одна и та же.

Проанализируем примеры базисов всплесков, рассмотренные в параграфе 1.4, с точки зрения их время-частотной локализации. Нетрудно проверить, что для системы Хаара (см. с. 39) $\Delta_{\psi^H} = \sqrt{5/6}$, $\Delta_{\widehat{\psi^H}} = \infty$, что означает хорошую локализованность по времени и очень плохую по частоте. Для системы Котельникова–Шеннона (см. с. 48) ситуация прямо противоположная: $\Delta_{\psi^S} = \infty$, $\Delta_{\widehat{\psi^S}} = \sqrt{\dfrac{7}{12}}$. Исторически первым примером ортонормированного базиса в $L_2(\mathbb{R})$, константы неопределенности элементов которого равномерно ограничены, явилась система всплесков Мейера (см. с. 44) с достаточно гладким преобразованием Фурье. Ясно, что

$$\Delta_{\psi^M}\Delta_{\widehat{\psi^M}} < \infty$$

при $\widehat{\psi^M}\in C^2(\mathbb{R})$. Всплески Мейера очень хорошо локализованы по частоте (их преобразование Фурье имеет компактный носитель) и в случае $\widehat{\psi^M}\in C^\infty(\mathbb{R})$ хорошо локализованы по времени (убывают на $\pm\infty$ быстрее любой степени, но не экспоненциально). Всплески Баттла–Лемарье и Стрёмберга (см. с. 40) наоборот сами убывают экспоненциально, а вот их преобразование Фурье имеет только соответствующее конечной гладкости полиномиальное убывание.

Для всплесков (используя ортогональность разномасштабных всплесков) можно уточнить оценки снизу на характеристики локализованности.

Теорема 1.5.4 [188]. *Если ψ — всплеск-функция, порождающая ортонормированный базис всплесков, то*

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi\int_{\mathbb{R}}t^2|\psi(t)|^2\,dt\right\}^{1/2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}-1)\pi} \approx 0{,}271\,694.$$

Теорема 1.5.5. [188] *Если ψ — всплеск-функция с нулевым центром преобразования Фурье, порождающая ортонормированный базис всплесков, то*

$$\Delta_\psi\Delta_{\widehat{\psi}} \geqslant \frac{3}{4\pi}.$$

Для нормированной функция φ имеем

$$t^*_\varphi := \int\limits_{\mathbb{R}} t|\varphi(t)|^2\,dt; \quad \Delta_\varphi := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (t-t^*_\varphi)^2|\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2};$$

$$\xi^*_{\widehat{\varphi}} := \int\limits_{\mathbb{R}} \xi|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi; \quad \Delta_{\widehat{\varphi}} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (\xi-\xi^*_{\widehat{\varphi}})^2|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Далее нам понадобятся следующие характеристики 1-периодической функции $g(\xi) := \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} c_l e^{2\pi i l\xi}$, для обозначения которых нам будет удобно использовать те же символы, что и для непериодического случая:

$$t^*_g := \sum_{l\in\mathbb{Z}} l|c_l|^2 \Big/ \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l|^2;$$

$$\Delta_{ti,g} := \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} (l-t^*_g)^2|c_l|^2 \Big/ \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l|^2\right)^{1/2};$$

$$\xi^*_g := \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \xi|g(\xi)|^2\,d\xi \Big/ \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |g(\xi)|^2\,d\xi;$$

$$\Delta_{fr,g} := \left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\xi-\xi^*_g)^2|g(\xi)|^2 d\xi \Big/ \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |g(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2},$$

где в последнем интеграле вычитание $\xi - \xi^*_g$ выполняется по модулю 1. Для маски

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_l e^{2\pi i l\xi}$$

масштабирующей функции с ортонормированными целыми сдвигами (см. (1.23) и (1.24)) имеем

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |h_l|^2 = 1. \tag{1.76}$$

Поэтому

$$t^*_{m_0} := \sum_{l\in\mathbb{Z}} l|h_l|^2;$$

$$\Delta_{ti,m_0} := \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} (l-t^*_m)^2|h_l|^2\right)^{1/2};$$

$$\xi^*_{m_0} := 2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \xi |m_0(\xi)|^2\, d\xi;$$

$$\Delta_{fr,m_0} := \left(2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1/2} (\xi - \xi^*_{m_0})^2 |m_0(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Если m_0 — дифференцируемая функция и

$$m_0'(\xi) = i\sqrt{2}\,\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}} l\, h_l\, e^{2\pi i l\xi}, \tag{1.77}$$

то очевидно, что

$$t^*_{m_0} := \frac{1}{i\sqrt{2}\,\pi} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} m_0'(\xi)\overline{m(\xi)}\, d\xi;$$

$$\Delta_{ti,m_0} := \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |m_0'(\xi)|^2\, d\xi - (t^*_{m_0})^2\right)^{1/2}.$$

Теперь установим взаимосвязь между радиусами масштабирующей функции и вспомогательными характеристиками ее маски.

Лемма 1.5.6. *Пусть φ — масштабирующая функция с маской m_0, имеющая ортонормированные целые сдвиги. Если $\xi^*_{fr,m_0} = \xi^*_{\widehat{\varphi}} = 0$, то*

$$\Delta_{fr,m_0} \leqslant \frac{\Delta_{\widehat{\varphi}}}{2}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\Delta^2_{\widehat{\varphi}} = \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\xi + l)^2 |\widehat{\varphi}(\xi + l)|^2\, d\xi.$$

Пусть

$$P(\xi) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\xi + l)^2 |\widehat{\varphi}(\xi + l)|^2.$$

Так как $\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)$ (см (1.23)), то

$$P(2\xi) = 4\left(|m_0(\xi)|^2 P(\xi) + |m_0(\xi + 1/2)|^2 P(\xi + 1/2)\right). \tag{1.78}$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P(\xi)\,d\xi = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P(2\xi)\,d\xi =$$

$$= 4\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(|m_0(\xi)|^2 P(\xi) + |m_0(\xi+1/2)|^2 P(\xi+\pi)\right)\,d\xi =$$

$$= 8\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \xi^2 |m_0(\xi)|^2 \frac{P(\xi)}{\xi^2}\,d\xi \geqslant 8\Bigl(\inf_{\xi\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \frac{P(\xi)}{\xi^2}\Bigr)\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \xi^2 |m_0(\xi)|\,d\xi. \quad (1.79)$$

Так как для любого $l\in\mathbb{Z}$ имеем $|\xi+l|\geqslant|\xi|$ при $\xi\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, то в силу (1.17)

$$\inf_{\xi\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} \frac{P(\xi)}{\xi^2} \geqslant 1.$$

Окончательно получаем,

$$\Delta^2_{\widehat{\varphi}} \geqslant 4\Delta^2_{fr,m_0}. \qquad \lozenge$$

Замечание 1.5.7. Если φ — действительнозначная масштабирующая функция, то $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — действительные числа, поэтому $m(\xi)=\overline{m(-\xi)}$ и $|m(\xi)|$ — четная функция, как и $|\widehat{\varphi}(\xi)|$. Очевидно, что в этом случае $\xi^*_{fr,m_0}=\xi^*_{\widehat{\varphi}}=0$.

Замечание 1.5.8. Пусть φ — масштабирующая функция с маской m_0, имеющая ортонормированные целые сдвиги. Если $\xi^*_{fr,m_0}=\xi^*_{\widehat{\varphi}}=0$, то из (1.79) следует, что

$$\Delta_{\widehat{\varphi}} \leqslant 2\sqrt{2}\Bigl(\sup_{\xi\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \frac{P(\xi)}{\xi^2}\Bigr)^{1/2}\Delta_{fr,m_0}.$$

Лемма 1.5.9. *Пусть масштабирующая функция φ, имеющая ортонормированные целые сдвиги, определяется равенством*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} m_0(2^{-l}\xi), \qquad (1.80)$$

и бесконечное произведение допускает почленное дифференцирование. Тогда

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} t^2|\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{2}-1}\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |m_0'(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Так как $\widehat{x\varphi(x)}(\xi) = -2\pi i\widehat{\varphi}\,'(\xi)$, то в силу тождества Планшереля имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} t^2|\varphi(t)|^2\,dt = 4\pi^2\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}\,'(\xi)|^2 d\xi.$$

Из (1.80) следует, что

$$\widehat{\varphi}\,'(\xi) = \left(\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}\frac{m_0'(2^{-l}\xi)}{m_0(2^{-l}\xi)}\right)\prod_{p=1}^{\infty} m_0(2^{-p}\xi).$$

В силу (1.27) $|m_0(\xi)| \leqslant 1$, поэтому

$$|\widehat{\varphi}\,'(\xi)| \leqslant \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}|m_0'(2^{-l}\xi)|\cdot\left|\prod_{p=l+1}^{\infty} m_0(2^{-p}\xi)\right|$$

и

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}\,'(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0'(2^{-l}\xi)|^2\cdot|\prod_{p=l+1}^{\infty} m_0(2^{-p}\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0'(\xi)|^2\cdot\left|\prod_{p=1}^{\infty} m_0(2^{-p}\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0'(\xi)|^2\cdot\left|\prod_{p=1}^{\infty} m_0(2^{-p}\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Учитывая (1.17), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0'(\xi)|^2\left|\prod_{p=1}^{\infty} m_0(2^{-p}\xi)\right|^2 d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |m_0'(\xi)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+l)|^2\,d\xi = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |m_0'(\xi)|^2 d\xi. \quad \diamond$$

В нижеследующих леммах преобразование Фурье масштабирующей функции и ее маска предполагаются дифференцируемыми.

Лемма 1.5.10. *Пусть масштабирующая функция φ, имеющая ортонормированные целые сдвиги, определяется равенством*

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\prod_{l=1}^{\infty} m_0(2^{-l}\xi)$$

и ряд $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+l)|^2$ *допускает почленное дифференцирование. Тогда*

$$\pi\Bigg(2\int\limits_{-\frac12}^{\frac12} |m_0'(\xi)|^2\,d\xi\Bigg)^{1/2} \leqslant \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} t^2|\varphi(t)|^2\,dt\Bigg)^{1/2} \leqslant 2\pi\Bigg(\int\limits_{-\frac12}^{\frac12} |m_0'(\xi)|^2\,d\xi\Bigg)^{1/2}.$$

Доказательство. Используя (1.23) и (1.17), имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}\,'(\xi)|^2 d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big|\frac12\, m_0'(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)+\frac12\, m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}\,'(\xi/2)\Big|^2 d\xi = \\
&= \frac14\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0'(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)|^2 d\xi + \frac14\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}\,'(\xi/2)|^2 d\xi + \\
&\qquad + \frac12\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}\big(m_0(\xi/2)\overline{m_0'(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)}\widehat{\varphi}\,'(\xi/2)\big)\,d\xi = \\
&= \frac12\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0'(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi + \frac12\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0(\xi)\widehat{\varphi}\,'(\xi)|^2 d\xi + \\
&\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}\big(m_0(\xi)\overline{m_0'(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)}\widehat{\varphi}\,'(\xi)\big)\,d\xi = \\
&= \frac12\int\limits_{-\frac12}^{\frac12} |m_0'(\xi)|^2 d\xi + \frac12\int\limits_{\mathbb{R}} |m_0(\xi)\widehat{\varphi}\,'(\xi)|^2 d\xi + \\
&\qquad + \int\limits_{-\frac12}^{\frac12} \operatorname{Re}\big(m_0(\xi)\overline{m_0'(\xi)}\big)\Bigg(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \operatorname{Re}\big(\widehat{\varphi}\,'(\xi+l)\overline{\widehat{\varphi}(\xi+l)}\big)\Bigg) d\xi.
\end{aligned}$$

По условию леммы и (1.17)

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \big(|\widehat{\varphi}(\xi+l)|^2\big)' = 2\sum_{l\in\mathbb{Z}} \operatorname{Re}\big(\widehat{\varphi}'(\xi+l)\overline{\widehat{\varphi}(\xi+l)}\big) = 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}'(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |m'(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} |m(\xi)\widehat{\varphi}'(\xi)|^2 d\xi.$$

Так как $|m(\xi)| \leqslant 1$ (см. (1.27)), то из последнего равенства следует утверждение. $\Diamond$

При некоторых дополнительных предположениях на масштабирующую маску можно получить другую оценку снизу на $\left(\int\limits_{\mathbb{R}} t^2|\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$.

Лемма 1.5.11. *Пусть масштабирующая функция φ, имеющая ортогональные сдвиги, определяется равенством*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} m_0(2^{-l}\xi)$$

и модуль ее маски — четная функция, убывающая на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. *Тогда*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} t^2|\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \geqslant \sqrt{2}\,\pi \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \left(|m_0(\xi)|'\right)^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Легко видеть, что $||\widehat{\varphi}(\xi)|'| \leqslant |\widehat{\varphi}'(\xi)|$. Поэтому, используя (1.23), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}'(\xi)|^2 d\xi \geqslant \int\limits_{-1}^{1} |\widehat{\varphi}'(\xi)|^2 d\xi \geqslant \int\limits_{-1}^{1} \left(|\widehat{\varphi}|'(\xi)\right)^2\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\,|m_0(\xi/2)|'|\widehat{\varphi}(\xi/2)| + \frac{1}{2}\,|m_0(\xi/2)||\widehat{\varphi}(\xi/2)|'\right)^2\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \left(|m_0(\xi)|'|\widehat{\varphi}(\xi)| + |m_0(\xi)||\widehat{\varphi}(\xi)|'\right)^2\,d\xi.$$

По условию $|m_0(\xi)|$ — четная функция и $|m_0(\xi)|' \leqslant 0$ при $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$. Тогда $|\widehat{\varphi}(\xi)|' \leqslant 0$ при $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и

$$\int\limits_{-\frac12}^{1/2} \left(|m_0(\xi)|' \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| + |m_0(\xi)| \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)|'\right)^2 d\xi =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1/2} \left(|m_0(\xi)|' \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| + |m_0(\xi)| \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)|'\right)^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_{0}^{1/2} \left(|m_0(\xi)|' \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)|\right)^2 d\xi \geqslant |\widehat{\varphi}(1/2)|^2 \int\limits_{-\frac12}^{1/2} \left(|m_0(\xi)|'\right)^2 d\xi. \quad \Diamond$$

Л е м м а 1.5.12. *Пусть φ — масштабирующая функция, имеющая ортонормированные целые сдвиги. Тогда*

$$\int\limits_{-\frac12}^{\frac12} m_0'(\xi)\overline{m_0(\xi)}\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} |m_0(\xi+1/2)|^2 \widehat{\varphi}\,'(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\, d\xi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.23) и (1.17) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}\,'(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac12 \left[m_0'(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2) + m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}\,'(\xi/2)\right] \overline{m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} m_0'(\xi)\overline{m_0(\xi)}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}} |m_0(\xi)|^2 \widehat{\varphi}\,'(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\frac12}^{\frac12} m'(\xi)\overline{m_0(\xi)}\, d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}} |m_0(\xi)|^2 \widehat{\varphi}\,'(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\, d\xi.$$

Полученное равенство вместе с (1.27) доказывает утверждение. $\Diamond$

1.6. Вычислительные алгоритмы

Для практического использования разложений по всплескам нужно уметь вычислять коэффициенты этих разложений. Одно из достоинств структуры КМА состоит в том, что коэффициенты всплеск-разложений можно вычислять рекурсивно, переходя от уровня к уровню. Пусть мы хотим разложить функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$ по ортогональной паре систем всплесков ψ_{jn}, $\widetilde{\psi}_{jn}$, порожденных соответственно масштабирующими функциями φ, $\widetilde{\varphi}$. По теореме 1.3.10

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\varphi}_{0n}\rangle \varphi_{0n} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle \psi_{jn}.$$

При реализации прикладных задач можно вычислить лишь конечное число коэффициентов, поэтому мы сразу выберем некоторое натуральное j_0 и заменим функцию f на близкий к ней в $L_2(\mathbb{R})$ элемент

$$\widetilde{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\varphi}_{0n}\rangle \varphi_{0n} + \sum_{j=0}^{j_0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle \psi_{jn}. \tag{1.81}$$

Заметим, что на основании следствия 1.3.9

$$\langle f, \widetilde{\varphi}_{0n}\rangle = \langle \widetilde{f}, \widetilde{\varphi}_{0n}\rangle, \quad \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle = \langle \widetilde{f}, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle \tag{1.82}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$, $j = 0, \ldots, j_0$. Положим

$$c_{jn} = \langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle, \quad d_{jn} = \langle f, \widetilde{\psi}_{jn}\rangle.$$

Наша цель — найти все коэффициенты разложения (1.81), т. е. вычислить c_{0n}, d_{jn} для всех $n \in \mathbb{Z}$, $j = 0, \ldots, j_0$. Для этого найдем сначала величины $c_{j_0 n}$, $n \in \mathbb{Z}$, по определяющим их формулам

$$c_{j_0 n} = \langle \widetilde{f}, \widetilde{\varphi}_{j_0 n}\rangle = 2^{j_0/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widetilde{\varphi}(2^{j_0}t + n)\, dt =$$
$$= 2^{-j_0/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - 2^{-j_0}n) 2^{j_0}\widetilde{\varphi}(2^{j_0}t)\, dt.$$

Если функция $\widetilde{\varphi}$ хорошо локализована, например, финитна, то при больших j_0 функция $2^{j_0}\widetilde{\varphi}(2^{j_0}t)$ близка к δ-функции, и соответствующее значение интеграла в правой части близко к $f(-2^{-j_0}n)$, т. е. имеет место приближенное равенство

$$c_{j_0 n} \approx 2^{-j_0/2} f(-2^{-j_0}n).$$

Эти величины мы и будем считать исходными данными. Более того, при решении прикладных задач обычно нет полной информации об изучаемой функции, а ее задание осуществляется набором значений в какой-то сетке узлов, чаще всего равномерной. Точки $2^{-j_0}n$, $n \in \mathbb{Z}$, вполне подходят, чтобы их взять в качестве узлов такой сетки. Таким образом, мы можем просто отождествить функцию f с последовательностью $\{c_{j_0 n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Пусть функции φ, $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяют масштабирующим уравнениям

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi_{1k}, \quad \widetilde{\varphi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_k \widetilde{\varphi}_{1k}.$$

По теореме 1.3.7 соответствующие всплеск-функции определяются равенствами

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \widetilde{h}_{1-k} \varphi_{1k}, \quad \widetilde{\psi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-k} h_{1-k} \widetilde{\varphi}_{1k}.$$

Осуществив сжатие в 2^j раз и сдвиг на n, преобразуем эти равенства к виду

$$\varphi_{jn} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{k-2n} \varphi_{j+1,k}, \quad \psi_{jn} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \widetilde{h}_{1-k+2n} \varphi_{j+1,k}. \tag{1.83}$$

$$\widetilde{\varphi}_{jn} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_{k-2n} \widetilde{\varphi}_{j+1,k}, \quad \widetilde{\psi}_{jn} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-k} h_{1-k+2n} \widetilde{\varphi}_{j+1,k}. \tag{1.84}$$

Отметим, что в случае финитных φ, $\widetilde{\varphi}$ лишь конечное число коэффициентов $h_k, \widetilde{h}_k$ отлично от нуля, т. е. суммы в (1.83) и (1.84) конечны. Домножив (1.84) скалярно на f, получим

$$c_{jn} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_{k-2n} c_{j+1,k}, \quad d_{jn} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \widetilde{h}_{1-k+2n} c_{j+1,k}.$$

По этим формулам, зная $c_{j+1,k}$, $k\in\mathbb{Z}$, мы легко можем найти все коэффициенты $c_{j,k}$, $d_{j,k}$, $k\in\mathbb{Z}$, причем в случае финитных φ, $\widetilde{\varphi}$ вычислять придется только конечные суммы с фиксированным числом слагаемых для всех j. Мы описали один шаг рекурсивного алгоритма. Начав с исходных данных $c_{j_0,k}$, $k\in\mathbb{Z}$, и пройдя j_0 шагов, найдем все требуемые коэффициенты. Приведенный алгоритм называется *каскадным*.

Теперь рассмотрим обратную задачу: требуется восстановить функции f по известным коэффициентам ее всплеск-разложения (задача реконструкции функции). Мы по-прежнему отождествляем функцию f с последовательностью $\{c_{j_0 n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, таким образом, требуется найти все элементы этой последовательности по исходным данным $c_{0,k}$, $d_{j,k}$, $k\in\mathbb{Z}$, $j=0,\ldots,j_0$. Пусть $j<j_0$. Используя введенные обозначения, перепишем (1.60) для $\widetilde{f}$ в виде

$$\widetilde{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{jk}\varphi_{jk} + \sum_{i=j}^{j_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{ik}\psi_{ik}.$$

Домножая это равенство скалярно на $\widetilde{\varphi}_{j+1,n}$, используя следствие 1.3.9 и принимая во внимание (1.83), получаем

$$c_{j+1,n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{jk}\langle\varphi_{jk}, \widetilde{\varphi}_{j+1,n}\rangle + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{jk}\langle\psi_{jk}, \widetilde{\varphi}_{j+1,n}\rangle.$$

Подставляя равенства (1.83) и используя биортогональность систем $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\varphi}_{j+1,n}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, имеем

$$c_{j+1,n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{jk}\left\langle \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{l-2k}\varphi_{j+1,l}, \widetilde{\varphi}_{j+1,n}\right\rangle + \\ + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{jk}\left\langle \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-l}\widetilde{h}_{1-l+2k}\varphi_{j+1,l}, \widetilde{\varphi}_{j+1,n}\right\rangle = \\ = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{jk}h_{n-2k} + (-1)^{1-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{jk}\widetilde{h}_{1-n+2k}.$$

По этим формулам, зная коэффициенты $c_{j,k}$, $d_{j,k}$, $k\in\mathbb{Z}$, мы можем вычислить $c_{j+1,n}$, $n\in\mathbb{Z}$. Опять описан один шаг рекурсивного алгоритма. Начав с $j=0$ и пройдя j_0 шагов, мы найдем последовательность $\{c_{j_0 n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Опять в случае финитных φ, $\widetilde{\varphi}$ придется вычислять только конечные суммы с фиксированным числом слагаемых.

1.7. Сходимость всплеск-разложений

В теореме 1.3.10 было установлено, что любую функцию $f\in L_2(\mathbb{R})$ можно разложить по системе биортогональных всплесков $\psi_{jk}, \widetilde{\psi}_{jk}$, а частичные суммы этого разложения можно представить в виде

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle\varphi_{jn} = P_j f,$$

где $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции, порождающие соответствующие КМА, причем P_j является проекционным оператором на пространство V_j. Таким образом, последовательность $\{P_j(f)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ сходится при $j\to\infty$ к f по норме в $L_2(\mathbb{R})$. В этом параграфе мы займемся изучением других видов сходимости этой последовательности. Мы будем накладывать на функции $\varphi, \widetilde{\varphi}$ дополнительные требования, обеспечивающие их принадлежность пространствам $L_p(\mathbb{R})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, что позволит расширить класс функций f, для которых имеют смысл скалярные произведения $\langle f, \widetilde{\varphi}_{jn}\rangle$, значит, и определен оператор $P_j f$.

Лемма 1.7.1. *Пусть η — четная ограниченная суммируемая и убывающая на $[0,\infty)$ функция. Тогда существует постоянная C, зависящая только от η, такая, что*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(x+k)\eta(y+k) \leqslant C\eta\left(\frac{x-y}{8}\right) \tag{1.85}$$

для всех $x, y\in\mathbb{R}$.

Доказательство. В первую очередь заметим, что левая и правая части равенства (1.85) инвариантны относительно операции

$(x, y) \longrightarrow (x+t, y+t)$, поэтому можно считать, что $|x| \leqslant 1/2$. Пусть сначала $|y| \leqslant 2$, тогда

$$\eta\left(\frac{x-y}{8}\right) \geqslant \eta\left(\frac{5}{16}\right) =: C_1.$$

Если $C_1 = 0$, то $\eta(t) = 0$ для всех $t \geqslant 5/16$, но тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(x+k)\eta(y+k) = \eta(x)\eta(y) \leqslant \frac{\eta^2(0)}{\eta(1/8)}\,\eta\left(\frac{x-y}{8}\right).$$

Если $C_1 > 0$, то

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(x+k) \leqslant 2\left(\eta(0) + \int_0^\infty \eta(x)\,dx\right) =: C_2. \tag{1.86}$$

Теперь предположим, что $|y| \geqslant 2$, тогда $|x-y| \leqslant 2|y|$, и из (1.86) следует

$$\sum_{|k|\leqslant|y|/2} \eta(x+k)\eta(y+k) \leqslant \eta\left(\frac{y}{2}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta(x+k) \leqslant C_2\eta\left(\frac{x-y}{4}\right),$$

$$\sum_{|k|\geqslant|y|/2} \eta(x+k)\eta(y+k) \leqslant \eta\left(\frac{|k|}{2}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta(x+k) \leqslant$$

$$\leqslant C_2\eta\left(\frac{y}{4}\right) \leqslant C_2\eta\left(\frac{x-y}{8}\right). \quad \Diamond$$

Следствие 1.7.2. *Пусть η удовлетворяет условиям леммы* 1.7.1 *и для функций $\varphi, \widetilde{\varphi}$ при почти всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$|\varphi(x)|, |\widetilde{\varphi}(x)| \leqslant \eta(x). \tag{1.87}$$

Тогда P_j — непрерывный оператор из $L_p(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем

$$\|P_j\| \leqslant A, \tag{1.88}$$

где A — постоянная, зависящая только от η, и

$$P_j f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{jk}(x)\overline{\widetilde{\varphi}_{jk}(y)}\,dy \tag{1.89}$$

для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и почти всех $x \in \mathbb{R}$. Если при этом $|\varphi(x)| \leqslant \eta(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то равенство (1.89) *верно при всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(2^j x + k)| \leqslant \eta(2^j x + k)$ для всех $k \in \in \mathbb{Z}$, тогда по лемме 1.7.1 частичные суммы ряда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^j x + k)\overline{\widetilde{\varphi}(2^j y + k)}|$$

почти везде y мажорируются функцией $C\eta(2^{j-3}(x-y))$, которая (как функция от аргумента y) принадлежит любому $L_q(\mathbb{R})$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, значит, в силу теоремы Лебега имеет место равенство (1.89) и

$$\|P_j f\|_p \leqslant C \left\| 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\eta(2^{j-3}(\cdot - y))\,dy \right\|_p =$$

$$= C \left\| 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(\cdot - y)\eta(2^{j-3}y)\,dy \right\|_p \leqslant 8C\|f\|_p \int_{-\infty}^{\infty} \eta(y)\,dy. \quad \Diamond$$

Заметим, что во всех примерах ортогональных систем всплесков, приведенных в 1.4, кроме системы Котельникова–Шеннона, порождающие функции φ удовлетворяют условиям следствия 1.7.2.

Далее будут рассматриваться функции $\varphi, \widetilde{\varphi}$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.3.10, которые мы будем называть (в соответствием с утверждением этой теоремы) масштабирующими функциями, порождающими биортогональную систему всплесков.

Лемма 1.7.3. *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции, порождающие биортогональную систему всплесков и удовлетворяющие условиям следствия* 1.7.2,

$$K_j(x,y) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{jk}(x)\overline{\widetilde{\varphi}_{jk}(y)}.$$

Тогда для всех $j \in \mathbb{Z}$ и почти всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_j(x,y)\,dy = 1. \tag{1.90}$$

Если при этом функция $\varphi(x)$ непрерывна, то (1.90) *выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Ясно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_j(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(2^j x, y)\,dy,$$

поэтому достаточно установить (1.90) для $j = 0$. Предположим, что $\int_{-\infty}^{\infty} K_0(x,y)\,dy \neq 1$, на множестве положительной меры, тогда существует такое $\delta > 0$, что

$$\mu\left\{x \in \mathbb{R}\colon \ \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x,y)\,dy - 1 \right| > \delta \right\} > 0,$$

а вследствие 1-периодичности функции $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(\cdot,y)\,dy$ отсюда следует

$$\mu\left\{x\in\mathbb{R}:\ \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(x,y)\,dy-1\right|>\delta\right\}=\infty, \tag{1.91}$$

Покажем, что с ростом j последовательность $K_j(\cdot,y)\,dy-1$ сходится к нулю по мере на $[-1,1]$. Используя лемму 1.7.1, для почти всех $x\in[-1,1]$ имеем

$$\left|\int\limits_{|y|\geqslant 2} K_j(x,y)\,dy\right|\leqslant C2^j\int\limits_{|y|\geqslant 2}\eta(2^{j-3}(x-y))\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C2^j\int\limits_{|y|\geqslant 2}\eta(2^{j-4}y)\,dy=16C\int\limits_{|y|\geqslant 2j-4}\eta(y)\,dy,$$

что влечет сходимость левой части к нулю почти везде на $[-1,1]$, значит, и по мере. Положим $f_1=\chi_{[-2,2]}$. Поскольку $f_1\in L_2(\mathbb{R})$, по теореме 1.3.10 последовательность P_jf_1 сходится к f_1 в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ при $j\to+\infty$, тем более она сходится в $L_2[-1,1]$, следовательно, и по мере на $[-1,1]$. Осталось заметить, что на $[-1,1]$ имеет место равенство

$$\int\limits_{|y|<2} K_j(\cdot,y)\,dy-1=P_jf_1-f_1. \tag{1.92}$$

Таким образом, существует последовательность натуральных j_k таких, что

$$\mu\left\{x\in[-1,1]\colon\ \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{j_k}(x,y)\,dy-1\right|>\delta\right\}<\frac{1}{k^2}.$$

Отсюда получаем

$$\mu\left\{x\in\left[-2^{j_k},2^{j_k}\right]\colon\ \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(x,y)\,dy-1\right|>\delta\right\}<\frac{1}{k^2},$$

что противоречит (1.91).

Пусть теперь функция φ непрерывна. Тогда, очевидно, $|\varphi(x)|\leqslant\eta(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$. По следствию 1.7.2 для всех $x\in\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(x,y)\,dy=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta(x+k)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}\,dy.$$

Ввиду (1.86) ряд в правой части равномерно сходится на $\mathbb{R}$, следовательно, его сумма непрерывна. $\Diamond$

Теорема 1.7.4. *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции, порождающие биортогональную систему всплесков и удовлетворяющие условиям следствия* 1.7.2, $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$P_j f(x) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \tag{1.93}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Если при этом f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то сходимость в (1.93) *равномерная. Если, кроме того, функция $\varphi(x)$ непрерывна, то* (1.93) *имеет место при всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть в некоторой точке x выполнены равенства (1.89) и (1.90), тогда

$$|P_j f(x) - f(x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(y)||K_j(x,y)|\,dy. \tag{1.94}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Разобьем интеграл в правой части (1.94) по схеме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \int\limits_{|x-y|<\delta} + \int\limits_{|x-y|>\delta} =: I_1 + I_2.$$

Из (1.88) при всех $j \in \mathbb{Z}$ получаем

$$|I_1| \leqslant A\varepsilon,$$

а из леммы 1.7.1 имеем

$$|I_2| \leqslant C\|f\|_\infty 2^{j+1} \int\limits_{|x-y|>\delta} \eta\left(2^{j-3}(x-y)\right)\,dy =$$

$$= C\|f\|_\infty 2^{j+4} \int\limits_{|y|>2^{j-3}\delta} \eta\,(y)\,dy \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует (1.93). В случае равномерной непрерывности f на $\mathbb{R}$ все приведенные оценки не зависят от точки x. Осталось заметить, что по лемме 1.7.3 и следствию 1.7.2 равенства (1.89) и (1.90) выполнены для почти всех $x \in \mathbb{R}$, а в случае непрерывной φ — для всех $x \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

Теорема 1.7.5. *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции, порождающие биортогональную систему всплесков и удовлетворяющие условиям следствия* 1.7.2, $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$P_j f \xrightarrow[j\to+\infty]{L_p} f. \tag{1.95}$$

Доказательство. Сначала предположим, что функция f непрерывна и финитна, $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$, тогда из теоремы 1.7.4 следует

$$\int_{-2R}^{2R} |f(x) - P_j f(x)|^p \, dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.96}$$

Используя леммы 1.7.1, 1.7.3 и следствие 1.7.2, учитывая монотонность функции η, имеем

$$\int_{|x|>2R} |f(x) - P_j f(x)|^p \, dx = \int_{|x|>2R} dx \left| \int_{-R}^{R} f(y) K_j(x,y)\, dy \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \left(2^j C \|f\|_\infty\right)^p \int_{|x|>2R} dx \left| \int_{-R}^{R} \eta\left(2^{j-3}(x-y)\right)\, dy \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \left(2^{j+1} RC \|f\|_\infty\right)^p \int_{|x|>2R} \eta^p\left(2^{j-4}x\right)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 16\, (2RC\|f\|_\infty)^p \left(2^j \eta\left(2^{j-3}R\right)\right)^{p-1} \int_{|x|>2^{j-3}R} \eta(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2R\, (16C\|f\|_\infty)^p \left(\int_0^{2^{j-3}R} \eta(t)\, dt \right)^{p-1} \int_{|x|>2^{j-3}R} \eta(x)\, dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Для доказательства общего случая осталось аппроксимировать произвольную $f \in L_p(\mathbb{R})$ финитной непрерывной функцией $\widetilde{f} \in L_p(\mathbb{R})$ и принять во внимание (1.88). $\Diamond$

Теорема 1.7.6. *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции, порождающие биортогональную систему всплесков и удовлетворяющие условиям следствия* 1.7.2, $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$P_j f(x) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть x — точка Лебега функции f, т.е. имеет место соотношение

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} |f(x+y) - f(x)|\, dy = 0,$$

и в этой точке выполнены равенства (1.89) и (1.90), тогда

$$|P_j f(x) - f(x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(y)||K_j(x,y)|\,dy. \tag{1.97}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем такое δ, что

$$\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} |f(x+y) - f(x)|\,dy < \varepsilon \tag{1.98}$$

для всех $h \in (0,\delta)$. Пусть $2^{-j} < \delta$, $2^{k_0} \leqslant \delta < 2^{k_0+1}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Разобьем интеграл в правой части (1.97) по схеме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \int\limits_{|x-y|<2^{-j}} + \sum_{k=-j}^{k_0} \int\limits_{2^k<|x-y|<2^{k+1}} + \int\limits_{|x-y|>2^{k_0+1}} =: I_0 + \sum_{k=-j}^{k_0} I_k + J.$$

Применяя лемму 1.7.1, используя монотонность функции η и условие (1.98), получаем

$$\left|\sum_{k=-j}^{k_0} I_k\right| \leqslant C2^j \sum_{k=-j}^{k_0} \int\limits_{2^k<|x-y|<2^{k+1}} |f(y) - f(x)|\eta(2^{j-3}(x-y))\,dy =$$

$$= C2^j \sum_{k=-j}^{k_0} \int\limits_{2^k<|y|<2^{k+1}} |f(x+y) - f(x)|\eta(2^{j-3}y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=-j}^{k_0} 2^{-k-2} \int\limits_{-2^{k+1}}^{2^{k+1}} |f(x+y) - f(x)|\,dy 2^{j+k+2}\eta(2^{j+k-3}) \leqslant$$

$$\leqslant 32C\varepsilon \sum_{k=-j}^{k_0} 2^{j+k-3}\eta(2^{j+k-3}) \leqslant 64C\varepsilon \int\limits_0^{\infty} \eta(t)\,dt;$$

$$|I_0| \leqslant C2^j \int\limits_{|x-y|<2^{-j}} |f(y) - f(x)|\eta(2^{j-3}(x-y))\,dy \leqslant 2C\eta(0)\varepsilon.$$

Таким образом, сумма всех I_k мала при любом j. Для оценки J опять воспользуемся леммой 1.7.1.

$$|J| \leqslant C\left(2^j \int\limits_{|y|>2^{k_0+1}} |f(x+y)|\eta(2^{j-3}y)\,dy + |f(x)| \int\limits_{|y|>2^{j+k_0-2}} \eta(y)\,dy\right).$$

Второй интеграл стремится к нулю с ростом j ввиду суммируемости η. Используя монотонность η, при $p=1$ имеем

$$2^j \int\limits_{|y|>2^{k_0+1}} |f(x+y)|\eta(2^{j-3}y)\,dy \leqslant 2^j\eta(2^{j+k_0-2})\|f\|_1,$$

а при $p>1$, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$2^j \int\limits_{|y|>2^{k_0+1}} |f(x+y)|\eta(2^{j-3}y)\,dy \leqslant 2^j\|f\|_p\Bigg(\int\limits_{|y|>2^{k_0+1}} \eta^q(2^{j-3}y)\,dy\Bigg)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{3/q}\|f\|_p\left(2^j\eta(2^{j+k_0-2})\right)^{1/p}\Bigg(\int\limits_{|y|>2^{j+k_0-2}} \eta(y)\,dy\Bigg)^{1/q}.$$

Правые части обоих неравенств стремятся к нулю с ростом j, поскольку

$$2^j\eta(2^j+k_0-2) \leqslant 2^{3-k_0}\int\limits_{2^{j+k_0-3}}^{2^{j+k_0-2}} \eta(t)\,dt \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Осталось заметить, что по лемме 1.7.3 и следствию 1.7.2 равенства (1.89) и (1.90) выполнены для почти всех $x\in\mathbb{R}$, и почти все $x\in\mathbb{R}$ являются точками Лебега функции f. $\lozenge$

Доказанные теоремы 1.7.4, 1.7.5, 1.7.6 утверждают наличие сходимости, но не дают никакой информации о скорости сходимости. Хороший аппарат приближения обеспечивает скорость сходимости для гладких функций, пропорциональную порядку гладкости. Мы покажем, что всплеск-разложения будут обладать таким свойством, если потребовать не только соответствующую гладкость для всплеск-функции ψ и достаточно быстрое убывание для обеих функций ψ, $\widetilde{\psi}$. Суть дела раскрывает следующее утверждение.

Теорема 1.7.7. *Пусть $m\in\mathbb{N}, \psi\in C^m(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R})$, для почти всех $x\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$|\widetilde{\psi}(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|x|)^{m+1+\alpha}}, \tag{1.99}$$

где $\alpha>0$, M — абсолютная постоянная, $\psi,\widetilde{\psi}\in L_2(\mathbb{R})$ и системы функций $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ биортогональны. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^l\widetilde{\psi}(x)\,dx = 0, \quad l=0,\ldots,m. \tag{1.100}$$

Доказательство. Проведем индукцию по l. Сначала установим базу для $l=0$. Зафиксируем $a\in\mathbb{R}$, для которого $\psi(a)\neq 0$, тогда ввиду биортогональности систем $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\psi}(x)\,dx = 2^j\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\psi}(2^jx+k)\,dx = \frac{2^j}{\psi(a)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\psi(a)-\psi(x))\widetilde{\psi}(2^jx+k)\,dx \tag{1.101}$$

для любых $j,k\in\mathbb{Z}$, $j\neq 0$. Зададим $\varepsilon>0$ и подберем $\delta>0$ такое, что $|\psi(a)-\psi(x)|<\varepsilon$ при $|x-a|<\delta$. Поскольку функция ψ суммируема на $\mathbb{R}$, то существует столь большое N, что

$$\int\limits_{|x|\geqslant N}|\widetilde{\psi}(x)|\,dx<\varepsilon. \tag{1.102}$$

Подобрав $j,k\in\mathbb{Z}$ так, чтобы выполнялось $|2^jx+k|>N$ при $|x-a|>\delta$, получим

$$\left|2^j\int\limits_{|x-a|<\delta}(\psi(a)-\psi(x))\widetilde{\psi}(2^jx+k)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon 2^j\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\psi}(2^jx+k|)\,dx=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\psi}(x)|\,dx,$$

$$\left|2^j\int\limits_{|x-a|>\delta}(\psi(a)-\psi(x))\widetilde{\psi}(2^jx+k)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|\psi\|_\infty 2^{j+1}\int\limits_{|x-a|>\delta}|\widetilde{\psi}(2^jx+k|)\,dx\leqslant 2\|\psi\|_\infty\int\limits_{|x|>N}\widetilde{|}\psi(x|)\,dx.$$

Сопоставляя эти соотношения с (1.101) и (1.102) и принимая во внимание произвольность ε, устанавливаем (1.100) для $l=0$.

Теперь проведем индукционный переход. Предположим, что (1.100) выполнено для $l=0,\ldots,n-1$, $n\leqslant m$. Зафиксируем $b\in\mathbb{R}$, для которого $\psi^{(n)}(b)\neq 0$. Используя индукционное предположение и биортогональность систем $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, для любых $j,k\in\mathbb{Z}$, $j\neq 0$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\psi(x)-\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\psi^{(r)}(b)(x-b)^r\right)\widetilde{\psi}(2^jx+k)\,dx=$$

$$=-\frac{\psi^{(n)}(b)}{n!}\,2^{-j(n+1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^n\widetilde{\psi}(x)\,dx. \tag{1.103}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, подберем $\delta \in (0,1)$, такое что

$$\left|\psi(x) - \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}\,\psi^{(r)}(b)(x-b)^r\right| \leqslant \varepsilon |x-b|^n$$

при $|x-b| < \delta$. Ввиду условия (1.99) можно подобрать столь большое N, что

$$\int\limits_{|x|\geqslant N} (1+|x|)^n |\widetilde{\psi}(x)|\,dx < \delta^n \varepsilon.$$

Кроме того, подобрав $j,k \in \mathbb{Z}$, $j \neq 0$, так чтобы выполнялось $|2^j x + k| > N$ при $|x-b| > \delta$ и $|2^j b + k| \leqslant 1$, получим

$$2^{j(n+1)}\left|\int\limits_{|x-b|<\delta}\left(\psi(x) - \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\psi^{(r)}(b)(x-b)^r\right)\widetilde{\psi}(2^j x + k)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{j(n+1)}\varepsilon \int\limits_{|x-b|<\delta} |x-b|^n |\widetilde{\psi}(2^j x+k)|\,dx \leqslant \varepsilon \int\limits_{|y|<\delta} (|y|+1)^n |\widetilde{\psi}(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant M\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(|y|+1)^{m-n+1+\alpha}} \leqslant C_1\varepsilon;$$

$$2^{j(n+1)}\left|\int\limits_{|x-b|>\delta}\left(\psi(x) - \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\psi^{(r)}(b)(x-b)^r\right)\widetilde{\psi}(2^j x + k)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{j(n+1)} \int\limits_{|x-b|>\delta}\left(|\psi(x)| + \sum_{r=0}^{n}|\psi^{(r)}(b)|\delta^{-r}|x-b|^r\right)|\widetilde{\psi}(2^j x+k)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{-n}2^{j(n+1)}\left(\|\psi\|_\infty + \sum_{r=0}^{n}|\psi^{(r)}(b)|\right)\int\limits_{|x-b|>\delta}|x-b|^n|\widetilde{\psi}(2^j x+k)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{-n}\left(\|\psi\|_\infty + \sum_{r=0}^{n}|\psi^{(r)}(b)|\right)\int\limits_{|y|>N}(1+|y|)^n|\widetilde{\psi}(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|\psi\|_\infty + \sum_{r=0}^{n}|\psi^{(r)}(b)|\right)\varepsilon = C_2\varepsilon.$$

Сопоставляя эти соотношения с (1.103) и принимая во внимание произвольность ε, устанавливаем (1.100) для $l = n$. $\Diamond$

Теорема 1.7.8. *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции, порождающие биортогональную систему всплесков ψ, $\widetilde{\psi}$, такую, что $\psi \in C^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, и*

$$|\psi(x)|, |\widetilde{\psi}(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|x|)^{m+1+\alpha}}, \quad \alpha > 0, \tag{1.104}$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ и для любой функции $f \in C^m(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$\|P_j f - f\|_\infty \leqslant C \frac{\|f^{(m)}\|_\infty}{2^{jm}}, \tag{1.105}$$

где C — постоянная, зависящая только от m, α и M.

Доказательство. Из замечания 1.3.11 следует

$$f - P_j f = \sum_{i=j}^{\infty} Q_i f, \tag{1.106}$$

где

$$Q_i f := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{in} \rangle \psi_{in}. \tag{1.107}$$

По следствию 1.7.2

$$Q_i f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{in}(x) \overline{\widetilde{\psi}_{in}(y)}\, dy$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и теорему 1.7.7, имеем

$$\langle f, \widetilde{\psi}_{in} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(y-x)^l + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(y-x)^m \right) \overline{\widetilde{\psi}_{in}(y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(\xi)(y-x)^m \overline{\widetilde{\psi}_{in}(y)}\, dy. \tag{1.108}$$

Мы можем считать, что $f^{(m)} \in L_\infty(\mathbb{R})$, иначе утверждение теоремы тривиально. Из леммы 1.7.1 следует, что ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi_{in}(x) \overline{\widetilde{\psi}_{in}(y)} (y-x)^m|$$

и все его частичные суммы имеют суммируемую мажоранту. Подставив (1.108) в (1.107) и поменяв местами сумму и интеграл (что возможно в силу теоремы Лебега), получим

$$Q_i f(x) = \frac{2^i}{m!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(\xi)(y-x)^m \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{in}(x)\overline{\widetilde{\psi}_{in}(y)}\, dy$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Отсюда, применяя лемму 1.7.1 и (1.104), имеем

$$|Q_i f(x)| \leqslant \frac{C_1}{m!}\, 2^i \|f^{(m)}\|_\infty \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x-y|^m \frac{dy}{(1+2^{i-3}|x-y|)^{m+1+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1}{m!}\, 2^{3(m+1)} \frac{\|f^{(m)}\|_\infty}{2^{im}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+|y|)^{1+\alpha}} = C_2 \frac{\|f^{(m)}\|_\infty}{2^{im}},$$

что влечет

$$\sum_{i=j}^{\infty} |Q_j f(x)| \leqslant C_2 \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\|f^{(m)}\|_\infty}{2^{im}} = C \frac{\|f^{(m)}\|_\infty}{2^{jm}}. \tag{1.109}$$

Ряд в правой части (1.106) сходится в $L_2(\mathbb{R})$, значит, он сходится по мере на произвольном отрезке, и по теореме Рисса некоторая его подпоследовательность сходится почти везде на этом отрезке. Отсюда, учитывая равномерность оценки (1.109), получаем (1.104). ◊

Замечание 1.7.9. Из доказательства теоремы ясно, что вместо гладкости функции ψ можно потребовать выполнение условия обнуления моментов (1.100).

Для всплесков с компактным носителем теоремы 1.7.7 и 1.7.8 будут усилены в параграфе 4.2 (теорема 4.2.6).

1.8. Фреймы всплесков

В параграфе 1.3 было показано, что масштабирующая функция φ, целые сдвиги которой ортогональны, порождает систему всплесков $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, которые образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Теперь мы будем изучать системы всплесков, порожденные некоторой φ, для которой требование ортогональности целых сдвигов ослаблено. Интерес к такого рода исследованиям вызывают, например, следующие соображения.

Целые сдвиги функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

не только не являются ортогональными, но даже и не образуют базиса Рисса. Однако нетрудно видеть, что эта функция порождает КМА Хаара, а, значит, и ортонормированный базис всплесков.

Пусть m_0 — маска масштабирующей функции φ. Равенство

$$|m_0|^2 + |m_0(\cdot + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{п. в.} \tag{1.110}$$

является необходимым условием ортонормированности системы $\{\varphi_{jk}\}$ (см. следствие 1.2.6), но не является достаточным. Удовлетворять достаточные условия (мы будем их обсуждать в гл. 2) на практике бывает достаточно сложно. Простой метод ортогонализации, описанный в теореме 1.1.14, обычно не подходит для решения прикладных задач, так как при этом теряется компактность носителя функции φ. С другой стороны, прикладникам часто не требуется базисность системы всплесков, избыточные системы вполне могут быть использованы вместо базисов, если они обладают свойством разложимости (для любой функции имеет место разложение по этой системе). Более того, избыточность бывает даже полезна в инженерных исследованиях.

Мы будем изучать системы всплесков, порожденных функцией φ, удовлетворяющей условию (1.110) вместо требования ортонормированности, и даже лишь условию

$$|m_0|^2 + |m_0(\cdot + 1/2)|^2 \leqslant 1 \quad \text{п. в.} \tag{1.111}$$

Нам понадобится понятие фрейма, являющееся в некотором смысле обобщением базиса Рисса и сохраняющее часть его достоинств.

Определение 1.8.1. Пусть H — гильбертово пространство. Система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ называется *фреймом (frame)*, если существуют такие постоянные $A, B > 0$, что для любого элемента $f \in H$ выполняется неравенство

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2. \tag{1.112}$$

Постоянные A и B называют соответственно нижней и верхней границами фрейма. Если границы фрейма совпадают, то фрейм называют *жестким* (tight). Жесткие фреймы с единичными границами ($A = B = 1$) иногда еще называют ортоподобными системами, что оправдано следующим утверждением.

Предложение 1.8.2. *Для того чтобы система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ была жестким фреймом с единичными границами, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $f \in H$ имело место разложение*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n\rangle f_n, \tag{1.113}$$

где ряд сходится в H.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $f \in H$, тогда по (1.112) имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 = \|f\|^2. \tag{1.114}$$

В первую очередь заметим, что ряд в правой части (1.113) сходится. Действительно,

$$\left\|\sum_{n=N}^{M} \langle f, f_n\rangle f_n\right\|^2 = \left|\sum_{n=N}^{M} \langle f, f_n\rangle\langle f_n, g_{NM}\rangle\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=N}^{M} |\langle f, f_n\rangle|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_n, g_{NM}\rangle|^2,$$

где $\|g_{NM}\| \leqslant 1$. Из определения фрейма следует, что правая часть стремится к нулю при $N, M \to \infty$. Теперь проверим равенство (1.113). Можно считать, что $\|f\| = 1$. Положим

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n\rangle f_n, \sigma_N = \sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n\rangle|^2,$$

тогда, очевидно,

$$\|f - s_N\|^2 = 1 - 2\sigma_N + \|s_n\|^2.$$

Поскольку из (1.114) вытекает $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N = 1$, осталось проверить, что $\|s_N\| \to 1$. Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмем столь большое N, что $\sigma_N \geqslant 1 - \varepsilon$. Тогда

$$\|s_N\| = \sup_{\|g\|\leqslant 1} |\langle s_N, g\rangle| \geqslant |\langle s_N, f\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n\rangle\langle f_n, f\rangle\right| = \sigma_N \geqslant 1 - \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\|s_N\|^2 = |\langle s_n, g_N\rangle|^2 = \left|\sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n\rangle\langle f_n, g_N\rangle\right|^2$$

где $\|g_N\| \leqslant 1$. Применяя к правой части неравенство Коши–Буняковского и равенство (1.114), получаем $\|s_N\| \leqslant 1$. ◊

Следствие 1.8.3. *Если жесткий фрейм с единичными границами образует базис, то этот базис является ортонормированным.*

Для доказательства достаточно положить $f = f_k$ в (1.113) и принять во внимание единственность такого разложения.

Таким образом, жесткий фрейм с единичными границами можно рассматривать как обобщение ортонормированного базиса на избыточные системы (т. е. системы, не обладающие свойством минимальности).

Сейчас мы увидим, что понятие фрейма обобщает на избыточные системы понятие базиса Рисса.

Теорема 1.8.4. *Для того чтобы система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ была фреймом с границами A, B в гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы она являлась ортогональной проекцией некоторого базиса Рисса с постоянными A, B в некотором гильбертовом пространстве H^*, содержащем H. В частности, если элементы f_n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют базис пространства H, то этот базис является базисом Рисса.*

Доказательство. Необходимость. Пусть H^* — гильбертово пространство, H — его подпространство, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис Рисса в H^* с постоянными A, B. Обозначим через P оператор, осуществляющий ортогональную проекцию H^* на H, и положим $f_n = PF_n$, $n = 1, 2, \ldots$. По теореме 1.1.2 система $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм с границами A, B. Осталось заметить, что если $f \in H$, то $\|f\|_{H^*} = \|f\|_H$ и $\langle f, F_n\rangle = \langle f, f_n\rangle$.

Достаточность. Пусть система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (1.112). Покажем сначала, что для любого $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ сходится в H. Действительно,

$$\left\|\sum_{n=N}^{M} c_n f_n\right\| = \left|\left\langle \sum_{n=N}^{M} c_n f_n, g_{NM}\right\rangle\right| = \left|\sum_{n=N}^{M} c_n \langle f_n, g_{NM}\rangle\right|,$$

где $\|g_{NM}\| \leqslant 1$. Из неравенства Коши и (1.112) следует

$$\left|\sum_{n=N}^{M} c_n \langle f_n, g_{NM}\rangle\right|^2 \leqslant \sum_{n=N}^{M} |c_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_n, g_{NM}\rangle|^2 \leqslant$$

$$\leqslant B \sum_{n=N}^{M} |c_n|^2 \|g_{NM}\|^2 \underset{N,M\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что влечет $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n \in H$ и ограниченность оператора

$$T\colon\ \ c \to \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n.$$

Пусть h — ядро оператора T, т. е. множество таких $c \in \ell_2$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n = 0$. Из непрерывности оператора T следует, что h является замкнутым подпространством пространства ℓ_2. Обозначим через h' его ортогональное дополнение. Определим оператор I, действующий из H в ℓ_2 и сопоставляющий каждому $f \in H$ последовательность $\{\langle f, f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Из левого неравенства (1.112) следует, что I взаимно однозначно отображает H на $I(H) =: h_1$, поэтому существует обратный оператор I^{-1}, действующий из h_1 на H. Кроме того, из (1.112) следует, что операторы I, I^{-1} ограничены, причем

$$\|I\|^2 \leqslant B, \quad \|I^{-1}\|^2 \leqslant 1/A, \tag{1.115}$$

т. е. I осуществляет изоморфизм пространств H и h_1. Покажем, что $h_1 = h'$. Если $c \in h$, $c' \in h_1$, то существует $f \in H$ такое, что $c'_n = \langle f, f_n \rangle$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, значит,

$$\langle c, c' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle f, f_n \rangle = \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right\rangle = 0.$$

Таким образом, $h_1 \subset h'$. Если $h_1 \neq h'$, то существует ненулевой элемент $c \in h' \ominus h_1$, но тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \langle f, f_n \rangle = 0$ для любого f из H, в частности, для $f = f_0 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, значит, $f_0 = 0$, что противоречит предположению $c \in h'$, $c \neq 0$. Обозначим через T_1 сужение оператора T на h'. Для любых $c \in h'$ и $g \in H$ имеет место равенство

$$\langle T_1 c, g \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n, g \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle f_n, g \rangle = \langle c, Ig \rangle,$$

откуда следует $T_1 = I^*$. Поэтому $I^* c = T_1 c = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ для любого $c \in h'$ и из (1.115) получаем

$$A \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right\|^2 \leqslant B \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{при} \quad c \in h'. \tag{1.116}$$

Пусть $\{\alpha_n\}_{n \in \Lambda}$ — ортогональный базис в h, такой что $\|\alpha_n\| = \sqrt{A}$ для всех $n \in \Lambda$, тогда для любого $c \in \ell_2$ выполняется равенство

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_n \right\|^2 = A \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \tag{1.117}$$

Множество Λ может оказаться пустым, конечным или счетным. В случае конечного Λ будем считать, что его элементами являются номера ненулевых компонент элементов пространства h.

Положим $\widetilde{h} := \left\{ \sum\limits_{n \in \Lambda} c_n \alpha_n, \quad c \in h \right\}$. Ясно, что ортогональное дополнение к пространству $\widetilde{h}$ в h состоит из элементов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_n$, где

$c \in h'$. Обозначим через β_n ортогональную проекцию α_n на $\widetilde{h}$. Для любого $c \in h$ имеем

$$\sum_{n\in\Lambda} c_n(\alpha_n - \beta_n) = \sum_{n\in\Lambda} c_n\alpha_n - \sum_{n\in\Lambda} c_n\beta_n \in \widetilde{h},$$

что влечет

$$\sum_{n\in\Lambda} c_n(\alpha_n - \beta_n) = 0 \quad \text{при} \quad c \in h. \tag{1.118}$$

Аналогично,

$$\sum_{n\in\Lambda} c_n\beta_n = 0 \quad \text{при} \quad c \in h'. \tag{1.119}$$

Доопределим набор $\{\beta_n\}_{n\in\Lambda}$ нулевыми β_n при $n \in \mathbb{N} \setminus \Lambda$. Сопоставляя (1.117) с (1.118), устанавливаем, что для всех $c \in h$ имеет место равенство

$$\Big\|\sum_{n\in\Lambda} c_n\beta_n\Big\|^2 = A\sum_{n\in\Lambda} |c_n|^2$$

или, что то же самое,

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\beta_n\Big\|^2 = A\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{при} \quad c \in h. \tag{1.120}$$

Теперь определим пространство H^* как прямую сумму пространств H и h, т. е. пространство H^* состоит из пар $(f, c) =: f \oplus c$, где $f \in H$, $c \in h$, а скалярное произведение элементов $F = f \oplus c$, $F' = f' \oplus c'$ задается формулой

$$\langle F, F'\rangle_{H^*} = \langle f, f'\rangle_H + \langle c, c'\rangle_h.$$

Покажем, что элементы $F_n := f_n \oplus \beta_n$ образуют базис Рисса в H^*. Любое $c \in \ell_2$ представимо в виде $c = c^0 + c'$, где $c^0 \in h$, $c' \in h'$. Используя (1.119) и определение пространства h, имеем

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} c_nF_n\Big\|^2 = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} c_nf_n\Big\|^2 + \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\beta_n\Big\|^2 = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} c'_nf_n\Big\|^2 + \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} c^0_n\beta_n\Big\|^2.$$

Отсюда, применив (1.116) и (1.120), получим

$$A\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} c_nF_n\Big\|^2 = B\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{при} \quad c \in h'.$$

Осталось отметить, что в случае, когда элементы f_n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют базис в H, пространство h пусто, значит, H^* совпадает с H и $F_n = f_n$, $n = 1, 2, \ldots$. $\Diamond$

С л е д с т в и е 1.8.5. *Если система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм с границами A, B в гильбертовом пространстве H, то в H существует* *двойственный фрейм* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с границами* $\dfrac{1}{B}, \dfrac{1}{A}$ *такой, что любой элемент* $f \in H$ *представим в виде*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle f_n, \tag{1.121}$$

где ряд сходится по норме в H.

Доказательство. Пусть $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис Рисса в H^*, построенный в теореме 1.8.4, P — оператор, осуществляющий ортогональную проекцию H^* на H, тогда $f_n = PF_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Для любого $F \in H^*$ имеет место разложение

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F, G_n \rangle F_n,$$

где $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сопряженная система (см. приложение А.1, теорема А.1.3). В частности, если $f \in H$, то

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, G_n \rangle F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, PG_n \rangle F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, PG_n \rangle f_n.$$

Положим $g_n = PG_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и проверим, что $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — требуемый фрейм. В силу теоремы 1.8.4 для этого достаточно показать, что система $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом Рисса в H^*. Пусть $c \in \ell_2$; используя теорему 1.1.2 и биортонормированность систем $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеем

$$\left\| \sum_{n=N}^{M} c_n G_n \right\|^2 = \sup_{\|F\| \leqslant 1} \left| \left\langle \sum_{n=N}^{M} c_n G_n, F \right\rangle \right| =$$

$$= \sup_{\|c'\| \leqslant 1/A} \left| \left\langle \sum_{n=N}^{M} c_n G_n, \sum_{k=1}^{\infty} c'_k F_k \right\rangle \right| = \sup_{\|c'\| \leqslant 1/A} \left| \sum_{n=N}^{M} c_n c'_n \right| \leqslant \frac{1}{A} \sqrt{\sum_{n=N}^{M} |c_n|^2}\,.$$

Отсюда ясно, что ряд $\sum\limits_{n=N}^{M} c_n G_n =: G$ сходится по норме. По теореме 1.1.2 система $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фреймом с границами A, B, поэтому

$$\frac{1}{B} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle G, F_n \rangle|^2 \leqslant \|G\|^2 \leqslant \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle G, F_n \rangle|^2.$$

Осталось принять во внимание, что $c_n = \langle G, F_n \rangle$. $\Diamond$

Следствие 1.8.6. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\widetilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *биортонормированные системы в гильбертовом пространстве* H. *Если одна из систем образует фрейм в* H, *то каждая из этих систем является базисом Рисса в* H.

Доказательство. Пусть система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (1.112). По следствию 1.8.5 для любого $f \in H$ имеет место разложение (1.121). Коэффициенты этого разложения можно найти посредством домножения (1.121) скалярно на $\widetilde{f}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, откуда следует, во-первых, единственность разложения по системе $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, а, во-вторых, равенства

$$\langle f, g_n\rangle = \langle f, \widetilde{f}_n\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.122}$$

для всех $f \in H$. Таким образом, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в H, который по теореме (1.8.4) является базисом Рисса. Поскольку $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм, то из (1.122) очевидно следует, что и система $\{\widetilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ тоже является фреймом, значит, в силу уже доказанного и базисом Рисса. $\Diamond$

Теперь перейдем к изучению фреймов всплесков. Пусть φ — функция из $L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющая при почти всех $\xi \in \mathbb{R}$ масштабирующему уравнению

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \tag{1.123}$$

где m_0 — маска, и пусть $m_1, \ldots, m_r$ — 1-периодические функции из $L_2(0, 1)$ (их тоже будем называть масками), такие что для матрицы

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) & \ldots & m_r(\xi) \\ m_0(\xi + 1/2) & m_1(\xi + 1/2) & \ldots & m_r(\xi + 1/2) \end{pmatrix}$$

при почти всех $\xi \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$M(\xi)M^*(\xi) = E_2. \tag{1.124}$$

Определим всплеск-функции $\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}$, задав их преобразование Фурье по формулам

$$\widehat{\psi^{(k)}}(\xi) = m_k(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \quad k = 1, \ldots, r. \tag{1.125}$$

Эта конструкция является обобщением построения всплеск-функций в ортонормированном случае, для которого $m_1(\xi) = e^{\pi i \xi}\overline{m_0(\xi + 1/2)}$, $r = 1$ (см. 1.3).

Лемма 1.8.7. *Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ непрерывна в нуле, удовлетворяет* (1.123), *а для ее маски m_0 выполнено* (1.111). *Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 \leqslant |\widehat{\varphi}(0)|^2 \tag{1.126}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что из (1.123) и (1.111) следует, что $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant |\widehat{\varphi}(0)|$ при почти всех $\xi \in \mathbb{R}$. Поэтому для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\sum_{k=-2^l}^{2^l-1} |\widehat{\varphi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k=-2^l}^{2^l-1} \prod_{n=1}^{l+1} \left|m_0\left(2^{-n}(\xi + k)\right)\right|^2 \left|\widehat{\varphi}\left(2^{-n}(\xi + k)\right)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant |\widehat{\varphi}(0)|^2 \sum_{k=-2^l}^{2^l-1} \prod_{n=1}^{l+1} |m_0\left(2^{-n}(\xi+k)\right)|^2 =$$

$$= |\widehat{\varphi}(0)|^2 \sum_{k=0}^{2^l-1} \left(\prod_{n=1}^{l+1} |m_0\left(2^{-n}(\xi+k)\right)|^2 + \prod_{n=1}^{l+1} |m_0\left(2^{-n}(\xi+k-2^l)\right)|^2 \right).$$

Из 1-периодичности функции m_0 и (1.111) следует, что правая часть не превосходит

$$|\widehat{\varphi}(0)|^2 \sum_{k=0}^{2^l-1} \prod_{n=1}^{l} |m_0\left(2^{-n}(\xi+k)\right)|^2 =: \mu(l).$$

Опять используя 1-периодичность функций m_0 и (1.111), получаем

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} \left(\prod_{n=1}^{l} |m_0\left(2^{-n}(\xi+k)\right)|^2 + \right.$$

$$\left. + \prod_{n=1}^{l} |m_0\left(2^{-n}(\xi+k+2^{l-1})\right)|^2 \right) \leqslant \mu(l-1).$$

Применив эту оценку l раз, получим $\mu(l) \leqslant |\widehat{\varphi}(0)|^2$. ♢

Следствие 1.8.8. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям леммы* 1.8.7, $f \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 \leqslant |\widehat{\varphi}(0)|^2 \|f\|^2 \tag{1.127}$$

при всех $j \in \mathbb{Z}$ и

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = 0, \tag{1.128}$$

$$\lim_{j\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = |\widehat{\varphi}(0)|^2 \|f\|^2. \tag{1.129}$$

Доказательство. Из (1.126) в силу теорем 1.1.7, 1.1.2 и замечаний 1.1.8, 1.1.3 вытекает (1.127), а соотношения (1.128) и (1.129) следуют соответственно из лемм 1.2.8 и 1.2.13. ♢

Теорема 1.8.9. *Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ непрерывна в нуле и удовлетворяет* (1.123), *всплеск-функции $\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}$ определены соотношением* (1.125), *а для их масок $m_0, m_1, \ldots, m_r$ выполнено* (1.124). *Тогда система функций $\psi_{jk}^{(\nu)}$, $j,k \in \mathbb{Z}$, $\nu = 1, \ldots, r$, образует жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$ с границами $A = B = |\widehat{\varphi}(0)|^2$.*

Доказательство. В первую очередь заметим, что из (1.124) следует, что $|m_\nu(\xi)| \leqslant 1$ для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$ и $\nu = 1, \ldots, r$, поэтому $\widehat{\psi}^{(\nu)} \in L_2(\mathbb{R})$, значит, по теореме Планшереля $\psi^{(\nu)} \in L_2(\mathbb{R})$. Теперь покажем, что для m_0 выполнено (1.111). Пусть для некоторого $\xi \in \mathbb{R}$ имеет место равенство (1.124). Тогда $(r+1)$-мерные векторы

$$a := (m_0(\xi), \ldots, m_r(\xi)), \quad b := (m_0(\xi + 1/2), \ldots, m_r(\xi + 1/2))$$

ортогональны и имеют единичные длины. Дополним набор этих векторов до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^{r+1}$ и достроим матрицу M до квадратной, заполнив все последующие строки остальными векторами базиса. Построенная матрица унитарна, поэтому ее столбцы являются единичными векторами, откуда следует $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 \leqslant 1$. Таким образом, функция φ удовлетворяет условиям леммы 1.8.7, значит, выполнено (1.126), а из следствия 1.8.8 вытекает (1.127).

Докажем, что для любых $j, j' \in \mathbb{Z}$, $j < j'$, имеет место равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 + \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{i=j}^{j'-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{ik}^{(\nu)}\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j',k}\rangle|^2. \tag{1.130}$$

Ясно, что достаточно проверить (1.130) для случая $j' = j+1$. Из леммы 1.2.11, соотношений (1.123), (1.125) и 1-периодичности функций $m_0, m_1, \ldots, m_r$ следует

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 + \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{i=j}^{j'-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{ik}^{(\nu)}\rangle|^2 =$$

$$= 2^j \sum_{\nu=0}^{r} \int_0^1 \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(2^j(\xi+k)\right) \overline{m_\nu\left(\frac{\xi+k}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{2}\right)} \right|^2 d\xi =$$

$$= 2^j \sum_{\nu=0}^{r} \int_0^1 \left| \sigma(\xi) \overline{m_\nu\left(\frac{\xi}{2}\right)} + \sigma(\xi+1) \overline{m_\nu\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} \right|^2 d\xi, \tag{1.131}$$

где

$$\sigma(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(2^{j+1}\left(\frac{\xi}{2} + k\right)\right) \overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\right)}.$$

Правую часть (1.131) можно переписать в виде

$$2^j \int_0^1 |\sigma(\xi)|^2 \sum_{\nu=0}^{r} \left| m_\nu\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 d\xi + 2^j \int_0^1 |\sigma(\xi+1)|^2 \sum_{\nu=0}^{r} \left| m_\nu\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \right|^2 d\xi +$$

$$+\,2^j\int\limits_0^1\sigma(\xi)\overline{\sigma(\xi+1)}\sum_{\nu=0}^{r}m_\nu\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{m_\nu\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\,d\xi\,+$$

$$+\,2^j\int\limits_0^1\sigma(\xi+1)\overline{\sigma(\xi)}\sum_{\nu=0}^{r}m_\nu\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\overline{m_\nu\left(\frac{\xi}{2}\right)}\,d\xi.$$

Принимая во внимание (1.124), получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\varphi_{jk}\rangle|^2+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{i=j}^{j'-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\psi_{ik}^{(\nu)}\rangle|^2=$$

$$=2^j\int\limits_0^1\left(|\sigma(\xi)|^2+|\sigma(\xi+1)|^2\right)\,d\xi=2^j\int\limits_0^2|\sigma(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=2^{j+1}\int\limits_0^1|\sigma(2\xi)|^2\,d\xi=2^{j+1}\int\limits_0^1\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\left(2^{j+1}\left(\xi+k\right)\right)\overline{\widehat{\varphi}\left(\xi+k\right)}\right|^2d\xi.$$

Для доказательства (1.130) при $j'=j+1$ осталось опять воспользоваться леммой 1.2.11.

Переходя в (1.130) к пределу сначала при $j\to-\infty$, а затем при $j'\to+\infty$, на основании следствия 1.8.8 получим

$$\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{i,k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\psi_{ik}^{(\nu)}\rangle|^2=|\widehat{\varphi}(0)|^2\|f\|^2,$$

что и требовалось доказать. $\Diamond$

Следствие 1.8.10. *Если функция* $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1.8.9, *а для ее маски* m_0 *выполнено* (1.111), *то существуют такие* $\psi^{(1)},\psi^{(2)}\in L_2(\mathbb{R})$, *что функции* $\psi_{jk}^{(\nu)}$, $j,k\in\mathbb{Z}$, $\nu=1,2$, *образуют жесткий фрейм в* $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Положим

$$m_1(\xi)=\begin{cases}\dfrac{e^{2\pi i\xi}\overline{m_0(\xi+1/2)}}{B(\xi)}, & |m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+1/2)|^2\neq0,\\[2mm] \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2\pi i\xi}, & |m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+1/2)|^2=0;\end{cases}$$

$$m_2(\xi)=\begin{cases}\dfrac{A(\xi)m_0(\xi)}{B(\xi)}, & |m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+1/2)|^2\neq0,\\[2mm] \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & |m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+1/2)|^2=0.\end{cases}$$

где

$$A = \sqrt{1 - |m_0(\xi)|^2 - |m_0(\xi + 1/2)|^2}\,, \quad B = \sqrt{|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2}\,.$$

Нетрудно проверить, что для соответствующей матрицы M выполнено (1.124), и требуемое утверждение следует из теоремы 1.8.9. $\Diamond$

Важным частным случаем теоремы 1.8.9 является следующее утверждение, по сути усиливающее теорему 1.3.1.

Теорема 1.8.11. *Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ непрерывна в нуле, удовлетворяет* (1.123), $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, *а для ее маски* $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{2\pi i n\xi}$ *выполнено* (1.110); *и пусть*

$$\psi := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-n} h_{1-n} \varphi_{1n}. \tag{1.132}$$

Тогда функции ψ_{jk}, $j, k \in \mathbb{Z}$, образуют жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$ с границами $A = B = |\widehat{\varphi}(0)|^2$.

Если при этом система функций φ_{0k}, $k \in \mathbb{Z}$, является системой Рисса с постоянными a, b, то $a \leqslant |\widehat{\varphi}(0)|^2 \leqslant b$.

Доказательство. В первую очередь заметим, что на основании теоремы 1.2.3 равенство (1.132) можно переписать в виде

$$\widehat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

где

$$m_1(\xi) = e^{\pi i\xi}\overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}.$$

Нетрудно проверить, что матрица

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) \\ m_0(\xi + 1/2) & m_1(\xi + 1/2) \end{pmatrix}$$

унитарна, т. е. для нее выполнено (1.124), и первое утверждение следует из теоремы 1.8.9.

Пусть теперь φ_{0k}, $k \in \mathbb{Z}$, — система Рисса, $\{V_j\}$ — порожденный ею КМА. Из теорем 1.1.2 и 1.1.7 следует, что

$$a\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{0k}\rangle|^2 \leqslant b\|f\|^2$$

для любого $f \in V_0$. Но тогда и для любых $j \in \mathbb{Z}$, $f \in V_j$ выполняется неравенство

$$a\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 \leqslant b\|f\|^2.$$

Отсюда и из следствия 1.8.8 получаем второе утверждение теоремы. $\Diamond$

Глава 2

МНОГОМЕРНЫЕ ВСПЛЕСКИ

2.1. Сепарабельные КМА

В этой главе мы обобщим понятие системы всплесков на многомерный случай. Для этого можно выбрать различные подходы. Наиболее простой и достаточно естественный путь — это определить многомерный базис всплесков как тензорное произведение одномерных. Именно таким способом распространяются на многомерный случай многие одномерные ортонормированные базисы, например, тригонометрический.

Схема построения такова. Пусть $\{f_n^{(\nu)}\}_n$, $\nu = 1, \ldots, d$, — ортонормированные базисы в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Определим заданные на $\mathbb{R}^d$ функции f_N, $N = (N_1, \ldots, N_d)$, как тензорные произведения функций $f_{N_1}, \ldots, f_{N_d}$, т. е. для $x \in \mathbb{R}^d$ положим

$$f_N(x) = f_{N_1}(x_1) \times \ldots \times f_{N_d}(x_d).$$

Далее для записи тензорных произведений будем использовать следующие обозначения:

$$f_N = f_{N_1} \otimes \ldots \otimes f_{N_d} = \bigotimes_{\nu=1}^{d} f_{N_\nu}.$$

Ясно, что функции f_N попарно ортогональны в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$. Также несложно проверить, что система $\{f_N\}_N$ полна в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, взяв всплеск-функцию ψ, для которой система $\{\psi_{jk}\}_{jk}$ является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$, мы можем образовать d-мерную систему всплесков

$$\Psi_{JK} := \psi_{J_1K_1} \otimes \ldots \otimes \psi_{J_dK_d}, \tag{2.1}$$

где $J = (J_1, \ldots, J_d)$, $K = (K_1, \ldots, K_d)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Аналогично, исходя из пары всплеск-функций ψ, $\widetilde{\psi}$, для которых системы $\{\psi_{jk}\}_{jk}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{jk}$ биортогональны, можно построить биортогональные системы d-мерных всплесков Ψ_{JK}, $\widetilde{\Psi}_{JK}$. Кроме того, в качестве компонент тензорного произведения в (2.1) можно взять различные одномерные всплеск-функции, т. е. положить

$$\Psi_{JK} := \psi^{(1)}_{J_1K_1} \otimes \ldots \otimes \psi^{(d)}_{J_dK_d}. \tag{2.2}$$

Описанные системы всплесков представляют интерес и могут быть полезны для использования в различных ситуациях. Однако они не наследуют всех достоинств одномерных базисов всплесков, в частности, теряется свойство локализованности, представляющее большую ценность для прикладных задач. Проиллюстрируем это на примере системы Хаара. В одномерном случае базисные функции ψ_{jk} с большим номером j имеют малый носитель. Носитель многомерной базисной функции Ψ_{JK} может оказаться большим по одному или нескольким направлениям при сколь угодно большом $|J|$. Таким образом, если мы перенумеруем функции, заменив многомерный индекс J на одномерный каким-нибудь естественным способом, например, по кубам или шарам, диаметр носителя функции с большим номером, вообще говоря, не будет малым.

Для того чтобы избежать указанных недостатков, используем другой подход. Идея состоит в том, что вместо тензорного произведения готовых базисов всплесков берется тензорное произведение КМА, породивших эти базисы.

Пусть даны одномерные КМА $\{V_j^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\nu = 1,\dots,d$. Определим подпространства V_j, $j\in\mathbb{Z}$, пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$V_j := \bigotimes_{\nu=1}^{d} V_j^{(\nu)} = \overline{\operatorname{span}\{f = f_1\otimes\ldots\otimes f_d,\ f_\nu\in V_j^{(\nu)}\}}. \tag{2.3}$$

Пусть $\varphi^{(\nu)}$ — масштабирующая функция ν-го КМА $\{V_j^{(\nu)}\}_j$, положим

$$\varphi = \varphi^{(1)}\otimes\ldots\otimes\varphi^{(d)}.$$

По определению масштабирующей функции целые сдвиги функции φ образуют систему Рисса. Из теоремы 1.1.7 следует, что при почти всех ξ имеет место неравенство

$$A^{(\nu)} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}^{(\nu)}(\xi+k)|^2 \leqslant B^{(\nu)}, \quad A^{(\nu)}, B^{(\nu)} > 0.$$

Отсюда и из очевидного соотношения $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}^{(1)}\otimes\ldots\otimes\widehat{\varphi}^{(d)}$ для почти всех $\xi\in\mathbb{R}^d$ получаем

$$A \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 \leqslant B, \tag{2.4}$$

где

$$A := \prod_{\nu=1}^{d} A^{(\nu)}, \quad B := \prod_{\nu=1}^{d} B^{(\nu)}.$$

Повторяя практически дословно рассуждения доказательства теоремы 1.1.7, имеем следующее утверждение.

Предложение 2.1.1. *Пусть $\varphi\in L_2(\mathbb{R}^d)$. Для того чтобы система $\{\varphi(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ являлась системой Рисса с постоянными A, B,* *необходимо и достаточно, чтобы для почти всех* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *выполнялось неравенство* (2.4).

Поскольку при каждом ν система $\{\varphi^{(\nu)}(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом в пространстве $V_0^{(\nu)}$ (аксиома MR5 определения 1.2.1), ясно, что

$$V_0 = \overline{\operatorname{span}\{\varphi(\cdot+n), n \in \mathbb{Z}^d\}}$$

и, по теореме 1.1.2, функции $\varphi(\,\cdot+n)$, $n \in \mathbb{Z}^d$, образуют базис Рисса в пространстве V_0. Несложно проверить, что если целые сдвиги каждой функции $\varphi^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, d$, попарно ортогональны, то и $\{\varphi(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ будет ортогональной системой. Из определения пространств V_j ясно, что условия $f \in V_0$ и $f(2^j\cdot) \in V_j$ равносильны. Из свойства вложенности для каждого из КМА $\{V_j^{(\nu)}\}_j$ (аксиома MR1 определения 1.2.1) легко следует, что $\varphi(2^j\cdot+n) \in V_{j+1}$ для любого $n \in \mathbb{Z}^d$, откуда вытекает включение $V_j \subset V_{j+1}$.

Далее отметим, что любой элемент F пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ можно аппроксимировать с произвольной степенью точности конечной линейной комбинацией элементов вида

$$f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_d, \quad f_\nu \in L_2(\mathbb{R}), \ \nu = 1, \ldots, d,$$

(для проверки этого факта достаточно воспользоваться разложением функции F по какому-нибудь базису, являющемуся тензорным произведением одномерных базисов, например, можно взять один из описанных выше ортонормированных базисов всплесков). В свою очередь, из свойства полноты для каждого КМА $\{V_j^{(\nu)}\}_j$ (аксиома MR2 определения 1.2.1) следует, что любой элемент $f \in L_2(\mathbb{R})$ можно аппроксимировать конечной линейной комбинацией функций $\varphi^{(\nu)}(2^j\cdot+n)$, $n \in \mathbb{Z}$, для достаточно больших $j \in \mathbb{Z}$. Значит, элемент F можно аппроксимировать элементом пространства V_j для некоторого j, т. е. объединение всех пространств V_j, $j \in \mathbb{Z}$, плотно в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теперь покажем, что пересечение всех V_j не содержит ненулевых элементов. Предположим, что существует функция F, принадлежащая всем пространствам V_j, $j \in \mathbb{Z}$, и $\|F\| \neq 0$. Пусть $\psi_{jk}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, d$, — ортонормированные базисы всплесков в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, порожденные соответствующими КМА $\{V_j^{(\nu)}\}_j$, Ψ_{JK} — функции, определенные равенством (2.2). Если $j < \min\{J_1, \ldots, J_d\}$, то $\Psi_{JK} \perp V_j$, значит, $\Psi_{JK} \perp F$ для всех $J, K \in \mathbb{Z}^d$. Но, как уже отмечалось, система $\{\Psi_{JK}\}_{J,K\in\mathbb{Z}^d}$ является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R}^d)$, что противоречит предположению $\|F\| \neq 0$.

Резюмируя приведенные рассуждения, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.1.2. *Пусть* $\{V_j^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\nu = 1, \ldots, d$, *— КМА в* $L_2(\mathbb{R})$. *Тогда подпространства* V_j *пространства* $L_2(\mathbb{R}^d)$, *определенные соотношением* (2.3), *удовлетворяют свойствам*:

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$;

MR2. $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ *плотно в* $L_2(\mathbb{R}^d)$;

MR3. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

MR4. $f \in V_0 \iff f\,(2^j\cdot) \in V_j$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$;

MR5. *существует функция* $\varphi \in V_0$, *такая что последовательность* $\{\varphi(\,\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, *образует базис Рисса в* V_0.

Совокупность пространств V_j, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1.2, мы будем называть *сепарабельным КМА* в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теперь, следуя стандартной схеме, определим пространства всплесков по формулам

$$W_j = V_{j+1} \ominus V_j.$$

Поскольку

$$V_{j+1} = \bigotimes_{\nu=1}^{d} V_{j+1}^{(\nu)} = \bigotimes_{\nu=1}^{d} \left(V_j^{(\nu)} \oplus W_j^{(\nu)}\right) =$$

$$= \bigoplus_{\substack{e\subset\{1,\ldots,d\}\\ e\neq\varnothing}} \left(\bigotimes_{\nu\in e} W_j^{(\nu)}\right)\left(\bigotimes_{\mu\notin e} V_j^{(\mu)}\right) \oplus \left(\bigotimes_{\nu=1}^{d} V_j^{(\nu)}\right),$$

мы видим, что пространство W_j распадается в прямую сумму $2^d - 1$ подпространств, которые мы обозначим через $W_{j,e}$, $e \subset \{1,\ldots,d\}$, $e \neq \varnothing$. Пусть $\psi^{(\nu)}$ — всплеск-функция, целые сдвиги которой образуют базис Рисса в $W_j^{(\nu)}$. Ясно, что целые сдвиги функции

$$\psi_e := \left(\bigotimes_{\nu\in e} \psi^{(\nu)}\right)\left(\bigotimes_{\mu\notin e} \varphi^{(\mu)}\right), \quad e \subset \{1,\ldots,d\},\ e \neq \varnothing$$

образуют базис Рисса в $W_{0,e}$ причем, если одномерные базисы были ортогональными, то и многомерные будет ортогональными. Таким образом, в отличие от одномерного случая, в каждом пространстве всплесков мы нашли несколько всплеск-функций, целые сдвиги которых образуют его базис.

2.2. Матричный коэффициент растяжения

В предыдущем параграфе мы рассмотрели сепарабельные КМА. Масштабирующие функции, порождающие такие КМА, имеют очень специальный вид — являются тензорным произведением одномерных функций. Возникает естественное желание расширить класс порождающих масштабирующих функций. Это можно сделать, приняв свойства MR1–MR5 из теоремы 2.1.2 за аксиомы, определяющие КМА. Такое определение КМА практически не будет отличаться от одномерного. Но в многомерном случае обычно возникает более широкий класс объектов в связи с появлением различных направлений. В нашей ситуации резерв для такого рода обобщения имеется в аксиоме MR4, где фигурирует коэффициент расширения 2^j. Умножение каждой компоненты аргумента на один и тот же множитель означает, что мы умножаем вектор аргумента на диагональную матрицу с равными диагональными элементами, т. е. производим одинаковое расширение по всем координатным направлениям. Естественно в качестве коэффициента растяжения рассматривать и другие матрицы. При этом даже не обязательно предполагать, что матрица является растягивающей, но, чтобы обеспечить свойство полноты (аксиома MR2), при многократном умножении на матрицу должно осуществляется растяжение по всем направлениям. Мы будем рассматривать класс квадратных целочисленных матриц M, у которых все собственные числа по модулю больше единицы. Для таких матриц справедливо соотношение

$$\lim_{n\to+\infty} \|M^{-n}\| = 0, \tag{2.5}$$

что и обеспечивает отмеченное требование, и более того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|M^{-n}\|^{\delta} < \infty \tag{2.6}$$

при любом $\delta > 0$ (см. приложение A.5).

Прежде чем перейти к общему определению многомерного КМА, приведем ряд понятий и фактов, связанных с матричным расширением (сжатием) функций.

Если A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, будем говорить, что векторы $k, n \in \mathbb{Z}^d$ *сравнимы по модулю* A и писать $k \equiv n \pmod A$, если $k - n = Al$, $l \in \mathbb{Z}^d$. Целочисленная решетка $\mathbb{Z}^d$ разбивается на классы смежности относительно введенного отношения сравнения. Множество, содержащее в себе ровно по одному представителю каждого класса смежности, мы будем называть *множеством цифр матрицы* A. В тех ситуациях, когда не важно, какое именно множество цифр выбрано, мы будем считать его выбранным произвольным образом и обозначать $D(A)$.

Предложение 2.2.1. *Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$. Тогда число классов смежности относительно сравнения по модулю A равно $|\det A|$, а множество $H(A) := \mathbb{Z}^d \cap A[0,1)^d$ является множеством цифр.*

Доказательство. Покажем, что число целых точек в множестве $A[0,1)^d$ равно его объему. Обозначим объем множества $A[0,1)^d$ и число попавших в него целых точек соответственно через a и b. Рассмотрим d-мерный куб со стороной N и найдем двумя способами число параллелепипедов вида $A([0,1)^d + k)$, $k \in \mathbb{Z}^d$, попавших внутрь куба $[0,N]^d$. Пусть S обозначает объединение всех таких параллелепипедов. При больших N объем S, очевидно, равен $N^d + o(N^d)$. Число целых точек в S тоже равно $N^d + o(N^d)$. Объем одного параллелепипеда равен a, а число целых точек в нем равно b. Выразив двумя способами число параллелепипедов в S и приравняв эти выражения, имеем

$$\frac{N^d + o(N^d)}{a} = \frac{N^d + o(N^d)}{b}.$$

Разделив обе части на N^d и устремив N к бесконечности, получим $a = b$. Покажем, что в множестве $H(A)$ нет сравнимых между собой элементов. Пусть целые точки $s_1, s_2 \in A[0,1)^d$ сравнимы по модулю A, тогда $s_1 - s_2 = Al$, где $l \in \mathbb{Z}^d$. Домножив равенство на A^{-1} получим, что разность двух элементов из $[0,1)^d$ равна целому вектору, что возможно только если $l = \mathbf{0}$, значит, и $s_1 = s_2$. Теперь покажем, что множество $H(A)$ содержит в себе представителей всех классов смежности матрицы A. Пусть целый вектор $s \notin A[0,1)^d$ представляет какой-то класс смежности. Вектор $A^{-1}s$ попадет в какой-то куб вида $[0,1)^d + k$, $k \in \mathbb{Z}$ (поскольку такие кубы покрывают все пространство $\mathbb{R}^d$). Положим $s' = A(A^{-1}s - k)$. Ясно, что s' и s сравнимы по модулю A и $s' \in A[0,1)^d$, т.е. мы нашли в $A[0,1)^d$ представителя из того же класса смежности, что и s. Таким образом, $H(A)$ содержит в себе ровно по одному представителю каждого класса смежности, значит, число классов смежности равно a. Осталось заметить, что $a = |\det A|$. $\Diamond$

Лемма 2.2.2. *Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $D(A)$ — ее множество цифр, тогда равенство $p = Ak + s$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех $p \in \mathbb{Z}^d$ и множеством пар (k, s), $k \in \mathbb{Z}^d$, $s \in D(A)$.*

Доказательство. Пусть сначала $D(A) = H(A)$. Любое $p \in \mathbb{Z}^d$ представимо в виде $p = Ak + Ar$, где вектор k — целая часть вектора $A^{-1}p$, а r — его дробная часть. Положив $s = Ar$, найдем требуемое представление, так как $s \in A[0,1)^d$ и $s \in \mathbb{Z}^d$ (потому что разность $p - Ak$ целая). Выразив цифру $s \in H(A)$ через цифру $s' \in D(A)$ из того же класса смежности, получим требуемое представление для произвольного $D(A)$. Единственность представления для любого $D(A)$ очевидна. $\Diamond$

Лемма 2.2.3. *Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $|\det A| > 1$. Тогда множество $\{r + A^j p\}$ при всевозможных $r \in D(A^j)$ и $p \in D(A)$ является множеством цифр матрицы A^{j+1}.*

Доказательство. Количество всевозможных пар $(r,\ p)$ при $r \in D(A^j)$ и $p \in D(A)$ ровно $|\det A|^{j+1}$, т.е. достаточно доказать, что для разных пар не могут получаться векторы, сравнимые по модулю A^{j+1}. Пусть $r,\ r_1 \in D(A^j)$, а $p,\ p_1 \in D(A)$. Предположим, что $r + A^j p$ и $r_1 + A^j p_1$ сравнимы между собой по модулю A^{j+1}, т.е.

$(r-r_1)+A^j(p-p_1)=A^{j+1}n$ для некоторого $n\in\mathbb{Z}^d$. Домножив обе части равенства слева на A^{-j}, получим, что $A^{-j}(r-r_1)=-(p-p_1)+ + An\in\mathbb{Z}^d$, т. е. $r\equiv r_1 \pmod{A^j}$, но r и r_1 принадлежат $D(A^j)$, а там ровно по одному представителю каждого класса смежности, значит, $r=r_1$. А из равенства $(p-p_1)=An$ следует, что $p=p_1$. Таким образом, $r+A^jp$ и $r_1+A^jp_1$ могут быть сравнимы между собой по модулю A^{j+1} тогда и только тогда, когда $r=r_1$ и $p=p_1$. $\lozenge$

Определение 2.2.4. Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d\times d$. Будем говорить, что *множество K сравнимо с множеством L по модулю A (по модулю $\mathbb{Z}^d$ при $A=E_d$),* если множество K можно разбить на конечное число попарно непересекающихся измеримых подмножеств K_n, $n=1,\dots,N$, так, что существуют целочисленные векторы $l_1,\dots,l_N$ такие, что $L=\bigcup\limits_{n=1}^{N}(K_n+Al_n)$, причем $(K_n+Al_n)\bigcap(K_{n_1}+Al_{n_1})=\varnothing$ при $n\ne n_1$.

Очевидно, что если множество K сравнимо с множеством L, то и L сравнимо с K. Сравнимость по модулю $\mathbb{Z}^d$ означает, что сдвигая на целые векторы части множества K, мы можем «собрать» из них множество L. Сравнимость по модулю A означает, что сдвигая части множества K на векторы вида Al, где l — целый вектор, можно «собрать» L. Очевидно, что если два множества сравнимы между собой, то у них одинаковая мера.

Лемма 2.2.5. *Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d\times d$. Тогда множество*

$$K:=\bigcup_{r\in D(A)}(A^{-1}[0,1)^d+A^{-1}r)$$

сравнимо с $[0,1)^d$ по модулю $\mathbb{Z}^d$, и для любой функции $f\in L(\mathbb{T}^d)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{[0,1)^d}f=\sum_{r\in D(A)}\ \int\limits_{A^{-1}[0,1)^d+A^{-1}r}f.$$

Доказательство. Положим

$$K_n:=\big([0,1)^d+n\big)\cap\bigcup_{r\in D(A)}(A^{-1}[0,1)^d+A^{-1}r).$$

Очевидно, что $K=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}^d}K_n$, причем $K_n\bigcap K_{n_1}=\varnothing$ при $n\ne n_1$. Так как K ограничено, то непустых множеств K_n конечное число. Покажем, что $K_n\bigcap(K_{n_1}-l)=\varnothing$ для любого $l\in\mathbb{Z}^d$. Пусть $u\in K_n\subset K$, тогда $u=A^{-1}v+A^{-1}r$, где $v\in[0,1)^d$, $r\in D(A)$. Предположим, что существует вектор $u_1\in K_{n_1}$, $n\ne n_1$, такой что $u=u_1-l$, $l\in\mathbb{Z}^d$, или, что то же самое, $u - u_1 \in \mathbb{Z}^d$. Пусть $u_1 = A^{-1}v_1 + A^{-1}r_1$, тогда разность $u - u_1$ будет иметь вид

$$A^{-1}(v - v_1) + A^{-1}(r - r_1) = l, \quad l \in \mathbb{Z}^d.$$

Домножив это равенство на A слева, получим $v - v_1 + r - r_1 = Al$, $l \in \mathbb{Z}^d$. Так как векторы r, r_1 и Al целые, а векторы v и v_1 из $[0,1)^d$, равенство возможно только при $v = v_1$. Но поскольку оба вектора r, r_1 принадлежат $D(A)$, они не могут быть сравнимы по модулю A, следовательно, $r = r_1$, т.е. мы доказали, что $u = u_1$, но это противоречит предположению $n \neq n_1$.

Осталось проверить, что $[0,1)^d = \bigcup\limits_n (K_n - n)$. Заметим, что множество $K_n - n$ содержится в $[0,1)^d$ для любого n по определению K_n, и, кроме того, $(K_n - n) \bigcap (K_{n_1} - n_1) = \varnothing$. Проверим, что для любого u из $[0,1)^d$ существуют n и $w \in K_n$, такие что $u = w - n$. Умножив вектор u слева на матрицу A, представим Au в виде целого вектора и дробной части: $Au = p + v$, $p \in \mathbb{Z}^d$, $v \in [0,1)^d$. Вектор p сравним с одной из цифр, т.е. существуют такие $r \in D(A)$ и $l \in \mathbb{Z}^d$, что $p = r + Al$. Выразив отсюда u, имеем $u = A^{-1}r + l + A^{-1}v$, значит, $u - l \in K$. Следовательно, $u - l \in K_n$, причем $n = -l$. Положив $w := u - l = u + n$, $w \in K_n$, получим $u = w - n$.

Второе утверждение леммы тривиально следует из 1-периодичности функции f по каждой переменной. $\Diamond$

Лемма 2.2.6. *Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $|\det A| > 1$. Тогда*

$$\sum_{s \in D(A^*)} e^{2\pi i (A^{-1}r,\ s)} = \begin{cases} |\det A|, & \textit{если} \quad r \equiv \mathbf{0} \pmod{A}, \\ 0, & \textit{если} \quad r \not\equiv \mathbf{0} \pmod{A}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Доказательство. Положим $m := |\det A| = |\det A^*|$. Классы смежности относительно A^* образуют группу по сложению, в которой m элементов. Если $r \equiv \mathbf{0} \pmod{A}$, т.е. $r = Al$, $l \in \mathbb{Z}^d$, то (2.7) очевидно. Если $r \not\equiv \mathbf{0} \pmod{A}$, то возьмем любой вектор $a \in \mathbb{Z}^d$ такой, что $(A^{-1}r, a) \notin \mathbb{Z}$, тогда, в частности, $a \not\equiv \mathbf{0} \pmod{A^*}$. Рассмотрим векторы a, $2a$, $3a, \ldots$. Пусть m_1 наименьшее натуральное число, такое что $m_1 a \equiv 0 \pmod{A^*}$, тогда $1 < m_1 \leqslant m$ (если все элементы ka, $k = 1, \ldots, m$, не сравнимы с нулем, то они попарно не сравнимы друг с другом, но в группе всего m элементов). Таким образом, векторы a, $2a, \ldots, m_1 a$ образуют подгруппу, состоящую из m_1 элементов, значит, по теореме Лагранжа m делится на m_1. Пусть $m = m_1 n$. Положим $a_1 = 0$; $a_2, \ldots, a_n$ — представители элементов из фактор группы. Тогда $a_k + ja$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m_1$, пробегают все элементы группы, и

$$\sum_{k=1}^{m} e^{2\pi i (A^{-1}r, s_k)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_1} e^{2\pi i (A^{-1}r, a_k + ja)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i(A^{-1}r, a_k)} \sum_{j=1}^{m_1} e^{2\pi i(A^{-1}r, ja)} = C\frac{1 - e^{2\pi i m_1(A^{-1}r, a)}}{1 - e^{2\pi i(A^{-1}r, a)}}.$$

И из того, что $m_1 a = A^* l$, $l \in \mathbb{Z}^d$, и предположения $(A^{-1}r, a) \notin \mathbb{Z}$, следует, что последняя дробь равна нулю. ◊

Следствие 2.2.7. *В условиях леммы* 2.2.6 *матрица*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{|\det A|}}\, e^{2\pi i(A^{-1}n, r)}\right\}_{n \in D(A), r \in D(A^*)}$$

унитарна.

Доказательство. Скалярное произведение столбцов с номерами n_1, n_2 равно

$$\sum_{r \in D(A^*)} e^{2\pi i(A^{-1}(n_1 - n_2), r)}.$$

По лемме 2.2.6 эта сумма равна $|\det A|$ при $n_1 = n_2$, в противном случае она равна нулю, так как $n_1 \not\equiv n_2 \pmod A$. ◊

Упражнение 2.2.8. Пусть A удовлетворяет условиям леммы 2.2.6, $f \in C(\mathbb{T}^d)$. Доказать, что $f(A^{-1}n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}^d$, не сравнимых с нулем по модулю A, тогда и только тогда, когда все суммы коэффициентов Фурье функции f с номерами из одного класса смежности матрицы A^* равны друг другу.

2.3. Несепарабельные КМА

В этом параграфе и далее на протяжении всей главы мы будем считать, что M — фиксированная целочисленная матрица размера $d \times d$, все собственные числа которой по модулю больше единицы, $m = |\det M|$. Для такой матрицы, очевидно, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, и, как уже отмечалось выше, справедливы соотношения (2.5), (2.6), из которых, в частности, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |M^n x| = \infty \tag{2.8}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq \mathbf{0}$, т. е. оператор, соответствующий этой матрице, при многократном действии осуществляет растяжение по всем направлениям.

Определение 2.3.1. Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *кратномасштабным анализом* (далее КМА) в $L_2(\mathbb{R}^d)$ *с матричным коэффициентом расширения* M, если выполнены следующие условия (аксиомы):

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$.

MR2. $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

MR3. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

MR4. $f \in V_0 \iff f\,(M^j\cdot) \in V_j$ для всех $j \in \mathbb{Z}$.

MR5. Существует функция $\varphi \in V_0$, такая что последовательность $\{\varphi(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ образует базис Рисса в V_0.

Как и в одномерном случае, функцию φ будем называть *масштабирующей*. Если масштабирующая функция некоторого КМА не является тензорным произведением функций одной переменной, то такой КМА называют *несепарабельным*.

Вводя обозначения

$$f_{jn} := m^{j/2} f\left(M^j\cdot+n\right), \quad n \in \mathbb{Z}^d,\ j \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

из аксиом MR4, MR5 получаем еще два очевидных свойства:

MR6. Для любого $j \in \mathbb{Z}$ функции φ_{jn}, $n \in \mathbb{Z}^d$, образуют базис Рисса в V_j с теми же постоянными A, B, что и функции φ_{0n}, $n \in \mathbb{Z}^d$.

MR7. Если $f \in V_j$, то $f\,(\,\cdot + M^{-j}n) \in V_j$, для всех $n \in \mathbb{Z}^d$.

Пусть φ — масштабирующая функция для некоторого КМА. Из свойств MR1, MR6 и теоремы 1.1.2 следует *масштабирующее уравнение*

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n\varphi_{1n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |h_n|^2 < \infty. \tag{2.10}$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям этого равенства, получаем

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(Mx+n)e^{-2\pi i(x,\xi)}\,dx.$$

После замены переменной в интеграле равенство примет вид

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(M^{*-1}\xi)\widehat{\varphi}(M^{*-1}\xi), \tag{2.11}$$

где

$$m_0(\xi) = m^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n e^{2\pi i(n,\xi)}.$$

Как и в одномерном случае, функцию m_0 будем называть *маской*. Из (2.10) и равенства Парсеваля следует, что $m_0 \in L_2(\mathbb{T}^d)$.

Теперь обсудим вопрос, как построить КМА. Следуя рассуждениям для одномерного случая, будем искать подходящую порождающую функцию φ среди функций, удовлетворяющих (2.4). Положим

$$V_j := \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{jn}, \quad n \in \mathbb{Z}^d\}}. \tag{2.12}$$

Из предложения 2.1.1 и теоремы 1.1.2 следует аксиома MR5, но тогда, по определению пространств V_j, выполнено и MR4, а выполнение MR1 равносильно тому, что φ является решением масштабирующего уравнения (2.10). Таким образом, нам необходимо потребовать от функции φ, чтобы выполнялось (2.10) или, что то же самое, чтобы ее преобразование Фурье удовлетворяло (2.11).

Теорема 2.3.2. *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *и выполнено* (2.4). *Тогда для совокупности пространств* V_j, $j \in \mathbb{Z}$, *определенных равенством* (2.12), *выполняется условие* MR3.

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = 0 \tag{2.13}$$

для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Предположим сначала, что функция f непрерывна на $\mathbb{R}^d$ и финитна, а ее носитель содержится в некотором шаре $B_R := \{|x| < R\}$, $R > 1$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 \leqslant m^j \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Bigg(\int\limits_{B_R} |f(x)||\varphi(M^j x + k)|\, dx \Bigg)^2 \leqslant$$

$$\leqslant m^j (2R)^d \|f\|_\infty^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_{B_R} |\varphi(M^j x + k)|^2\, dx =$$

$$= (2R)^d \|f\|_\infty^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_{M^j B_R + k} |\varphi(y)|^2\, dy. \tag{2.14}$$

Из (2.5) следует, что диаметр множества $M^j B_R$ стремится к нулю при $j \to -\infty$, значит, при для достаточно больших по модулю отрицательных j множества $M^j B_R + k$, $k \in \mathbb{Z}^d$, будут попарно дизъюнктными. Поэтому, положив

$$S(R, j) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d} (M^j B_R + k),$$

перепишем правую часть (2.14) в виде

$$(2R)^d \|f\|_\infty \int\limits_{R,j} |\varphi(y)|^2\, dy = (2R)^d \|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi_{R,j}(y) |\varphi(y)|^2\, dy.$$

где $\chi_{R,j}$ — характеристическая функция множества $S(R, j)$. Если $y \notin$ $\notin \mathbb{Z}^d$, то

$$\lim_{j\to-\infty} \chi_{R,j}(y) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{j\to-\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi_{R,j}(y) |\varphi(y)|^2\, dy = 0.$$

Предельный переход здесь возможен в силу теоремы Лебега.

Пусть теперь f — произвольная функция из $L_2(\mathbb{R}^d)$. Задав $\varepsilon > 0$, найдем такую финитную непрерывную функцию $\widetilde{f}$, что

$$\|f - \widetilde{f}\| < \varepsilon. \tag{2.15}$$

Из (2.4), предложения 2.1.1, теоремы1.1.2 и замечания 1.1.3 следует

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\langle f-\widetilde{f},\varphi_{jk}\rangle|^2 \leqslant B\varepsilon.$$

Для доказательства (2.13) осталось применить неравенство треугольника и принять во внимание, что для $\widetilde{f}$ справедливость этого неравенства уже установлена.

Предположим, что существует такая функция $f\in L_2(\mathbb{R}^d)$, что $f\in$ $\in V_j$ для всех $j\in\mathbb{Z}$. Из (2.4), предложения 2.1.1 и теоремы1.1.2 следует

$$A\|f\| \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\langle f,\varphi_{jk}\rangle|^2\Big)^{1/2}.$$

Ввиду (2.13) правая часть стремится к нулю при $j\to-\infty$. Это влечет $\|f\|=0$, что и означает выполнение условия MR3. $\Diamond$

Доказательство теоремы 2.3.2 практически не отличается от доказательства соответствующего одномерного утверждения. Точно так же, повторяя почти дословно одномерные рассуждения, можно получить многомерный аналог теоремы 1.2.14. Вместо этого мы докажем другой критерий выполнения аксиомы MR2.

Лемма 2.3.3. *Пусть $\varphi, f\in L_2(\mathbb{R}^d)$ и выполнено* (2.4), $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — *совокупность пространств, порожденных функцией φ. Соотношение $f\in V_j$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такая функция $m_f\in L_2(\mathbb{T}^d)$, что*

$$\widehat{f}(\xi)=m_f(M^{*-j}\xi)\widehat{\varphi}(M^{*-j}\xi)$$

для почти всех $\xi\in\mathbb{R}^d$.

Убедиться в справедливости этой леммы можно, повторив почти дословно доказательства предложений 1.1.10 и 1.2.3.

Теорема 2.3.4. *Пусть для $\varphi\in L_2(\mathbb{R}^d)$ выполнено* (2.4). *Для того чтобы для совокупности пространств $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, порожденных функцией φ и удовлетворяющих* MR1, *выполнялось* MR2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp}\widehat{\varphi}(M^{*j}\cdot)=\mathbb{R}^d. \tag{2.16}$$

Доказательство. В первую очередь отметим, что для пространств V_j, порожденных функцией φ, выполнены аксиомы MR4, MR5, значит, и аксиома MR7. Таким образом, каждое пространство V_j инвариантно относительно сдвигов $t=M^{-j}n$, $n\in\mathbb{Z}^d$. Покажем, что пространство $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$ инвариантно относительно любого сдвига $t\in\mathbb{R}^d$. Произвольное $t\in\mathbb{R}^d$ можно аппроксимировать векторами вида $M^{-j}n$, $n\in\mathbb{Z}^d$, $j\in\mathbb{N}$, со сколь угодно большими j.

Действительно, из (2.5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $j_0 \in \mathbb{N}$, такое что $|M^{-j}x| < \varepsilon$ для всех $j \geqslant j_0$ и для всех $x \in [0,1)^d$. При $j \geqslant j_0$, выбрав $n \in \mathbb{Z}^d$ так, чтобы обеспечить включение $M^j t - n \in [0,1)^d$, получим $|t - M^{-j}n| \leqslant \varepsilon$. Если $f \in \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, из аксиомы MR1, $f \in V_j$ при всех $j \geqslant j_1$, и из непрерывности функции $\|f(\,\cdot + t)\|$ следует, что $f(\,\cdot + t) \in \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$, $t \in \mathbb{R}^d$. Если $g \in \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$, то, приближая g функциями $f \in \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, снова используя непрерывность сдвига и инвариантность нормы относительно сдвига в $L_2(\mathbb{R}^d)$, получим $g(\,\cdot + t) \in \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$.

Для $X \subset L_2(\mathbb{R}^d)$ положим $\widehat{X} := \{\widehat{f}\colon f \in X\}$. По теореме Винера для L_2 (см. приложение A.8), замкнутое подпространство X пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ инвариантно относительно сдвигов тогда и только тогда, когда $\widehat{X} = L_2(\Omega)$ для некоторого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Пусть $X := \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$, тогда $\widehat{X} = L_2(\Omega)$. Таким образом, $X = L_2(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbb{R}^d$. Положим

$$\varphi_j := \varphi(M^j \cdot), \quad \Omega_0 := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp} \widehat{\varphi}_j.$$

Докажем, что $\Omega = \Omega_0$. Поскольку $\varphi_j \in V_j$, $j \in \mathbb{Z}$, имеет место включение $\operatorname{supp} \widehat{\varphi}_j \subset \Omega$, значит, $\Omega_0 \subset \Omega$. Предположим теперь, что $\Omega \setminus \Omega_0$ содержит множество положительной меры Ω_1. По лемме 2.3.3 преобразование Фурье любого элемента из V_j равно нулю почти везде на Ω_1. Следовательно, то же верно и для любого элемента из $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$. Переходя к пределу, устанавливаем, что преобразование Фурье любого элемента из X равно нулю почти везде на Ω_1, что противоречит тому, что $\widehat{X} \supset L_2(\Omega_1)$. Осталось заметить, что $\operatorname{supp} \widehat{\varphi}_j = \operatorname{supp} \widehat{\varphi}(M^{*-1})$. $\Diamond$

З а м е ч а н и е 2.3.5. Анализируя доказательства теоремы 2.3.4 и вспомогательных фактов, нетрудно видеть, что теорема остается справедливой и без предположения, что φ удовлетворяет (2.4), если при этом под порожденными этой функцией пространствами понимать пространства

$$V_j := \overline{\operatorname{span}\{\varphi(M^j \cdot + n), \ \ n \in \mathbb{Z}^d\}}.$$

У п р а ж н е н и е 2.3.6. Пусть φ масштабирующая функция некоторого КМА в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Доказать, что из непрерывности $\widehat{\varphi}$ в нуле следует $\widehat{\varphi}(\mathbf{0}) \neq 0$.

У п р а ж н е н и е 2.3.7. Пусть φ масштабирующая функция для КМА в $L_2(\mathbb{R}^d)$, m_0 — ее маска, $\varphi(x) = O(1 + |x|^{-d-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Доказать, что равенство $\widehat{\varphi}(n) = 0$ выполнено для всех $n \in \mathbb{Z}^d$,

$n \neq \mathbf{0}$, тогда и только тогда, когда $m_0(M^{*-1}k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \not\equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$.

Упражнение 2.3.8. Пусть функция $\varphi \in L(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению (1.23), а ряд $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\xi + l)|^2$ равномерно сходится. Доказать, что функция $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(x+k)$ эквивалентна постоянной.

Пример 2.3.9. Пусть M — матрица размера $d \times d$ с двойками на диагонали. Определим функцию B_N, $N \geqslant d$, задав ее преобразование Фурье

$$\widehat{B}_N(\xi) = 2^d \prod_{k=1}^{N} \frac{1 - e^{2\pi i (a_k, \xi)}}{2\pi i (a_k, \xi)},$$

где $a_k \in \mathbb{R}^d$, $0 < |a_k| < 2$, $k = 1, \ldots, N$, и ранг матрицы $A := (a_1, \ldots, a_N)$ равен d. Из равенства

$$\widehat{B}_N(\xi) = 2^d \prod_{k=1}^{N} \frac{(1 - e^{\pi i (a_k, \xi)})(1 + e^{\pi i (a_k, \xi)})}{2\pi i (a_k, \xi)} = \widehat{B}_N(\xi/2) \prod_{k=1}^{N} \frac{1 + e^{\pi i (a_k, \xi)}}{2}$$

следует, что функция B_N удовлетворяет масштабирующему уравнению с маской

$$m_0(\xi) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1 + e^{2\pi i (a_k, \xi)}}{2}.$$

Для того чтобы показать, что целые сдвиги функции B_N образуют систему Рисса, согласно предложению 2.1.1 достаточно проверить, что сумма $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} \left|\widehat{B}_N(\xi+n)\right|^2$ почти везде ограничена и отделена от нуля. Ясно, что при $|a_k| < 2$ существует такая постоянная $C = C(A) > 0$, что

$$\left|\widehat{B}_N(\xi)\right|^2 = \left|2^d \prod_{k=1}^{N} \frac{\sin \pi (a_k, \xi)}{\pi i (a_k, \xi)}\right|^2 \geqslant C$$

для всех $\xi \in [-1/2, 1/2]^d$, тем более

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left|\widehat{B}_N(\xi+n)\right|^2 \geqslant C > 0.$$

Среди векторов $a_1, \ldots, a_N$ есть, по крайней мере, d линейно независимых (будем считать, что это векторы $a_1, \ldots, a_d$), поэтому

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left|\widehat{B}_N(\xi+n)\right|^2 \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \prod_{k=1}^{d} \left|\frac{\sin \pi((a_k, \xi) + (a_k, n))}{(a_k, \xi) + (a_k, n)}\right|^2.$$

Нетрудно проверить, что ряд в правой части равномерно сходится на $[-1/2, 1/2]^d$, значит,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left|\widehat{B}_N(\xi+n)\right|^2 \leqslant C'.$$

Таким образом, B_N порождает несепарабельный КМА.

Функции B_N являются многомерным обобщением B-сплайнов, их принято называть *бокс-сплайнами*. Ясно, что B_d является характеристической функцией множества $A[-1/2, 1/2]^d$, т. е. B_d — сплайн нулевого порядка. Можно показать, что при произвольном N функция B_N является сплайном порядка $N-d$. $\diamondsuit$

2.4. Построение масштабирующих функций

Функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, являющуюся решением масштабирующего уравнения (2.10), будем называть *масштабирующей* (без связи с КМА). Напомним, что выполнение (2.10) для функции φ равносильно выполнению (2.11) для ее преобразования Фурье $\widehat{\varphi}$. По любой масштабирующей функции определяется ее маска. Верно и обратное. Взяв в качестве маски подходящую функцию $m_0 \in L_2(\mathbb{T}^d)$, мы можем построить функцию $\widehat{\varphi}$, удовлетворяющую уравнению (2.11) с этой маской. Действительно, правая часть (2.11) зависит от функции $\widehat{\varphi}$, к которой опять можно применить (2.11). Продолжая этот процесс, для любого натурального n имеем

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(M^{*-n}\xi)\prod_{j=1}^{n} m_0(M^{*-j}\xi).$$

Если при этом функция $\widehat{\varphi}$ непрерывна в нуле и $\widehat{\varphi}(\mathbf{0}) = 1$, то, переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$, приняв во внимание (2.5), получим

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(M^{*-j}\xi). \tag{2.17}$$

Для того чтобы бесконечное произведение сходились в нуле, необходимо потребовать

$$m_0(\mathbf{0}) = 1. \tag{2.18}$$

Конечно, сходимости только в нуле нам мало, имеет смысл рассматривать лишь те функции m_0, которые обеспечат сходимость бесконечного произведения, по крайней мере, почти всюду. Следующее утверждение говорит о том, что класс таких масок достаточно широк.

Предложение 2.4.1. *Пусть функция* $m_0(\xi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k e^{2\pi i(k,\xi)}$ *удовлетворяет* (2.18) *и*

$$c_k = O(|k|^{-d-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \tag{2.19}$$

Тогда бесконечное произведение (2.17) *сходится* [1]) *абсолютно и равномерно на любом компакте.* $\Diamond$

Доказательство. Из соотношений (2.18) и (2.19) имеем

$$|m_0(\xi)-1| \leqslant 2\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k\sin\pi(k,\xi)| \leqslant C\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^{-d-\varepsilon}|\xi| =: C_1|\xi|. \quad (2.20)$$

Отсюда и из (2.6) следует равномерная на любом компакте сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}|m_0(M^{*-j}\xi)-1|,$$

что влечет равномерную на любом компакте сходимость бесконечного произведения (2.17). $\Diamond$

Условие (2.19) выполняется, в частности, для тригонометрических полиномов, которые представляют наибольший интерес для приложений, потому что для соответствующих систем всплесков, как и в одномерном случае, вычислительные алгоритмы пересчета коэффициентов (см. параграф 1.6) являются конечными.

Следствие 2.4.2. *В условиях предложения* 2.4.1 *функция* $\widehat{\varphi}$, *определенная равенством* (2.17), *непрерывна на* $\mathbb{R}^d$.

Доказательство следует из равномерной сходимости частичных произведений к $\widehat{\varphi}$ на компактах и непрерывности функции m_0, которая имеет место, так как ее ряд Фурье абсолютно сходится.

Упражнение 2.4.3. Пусть функция φ — масштабирующая функция, ее преобразование Фурье непрерывно, и ряд $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+l)|^2$ равномерно сходится. Доказать, что если $\widehat{\varphi}(\mathbf{0})\neq 0$, то $\widehat{\varphi}(n)=0$ для всех $n\in\mathbb{Z}^d$, $n\neq\mathbf{0}$.

Оказывается, что масштабирующее уравнение с полиномиальной маской всегда имеет единственное, с точностью до постоянного множителя, решение в пространстве обобщенных функций S', и это решение финитно. В частности, если существует решение в $L^2(\mathbb{R}^d)$, то оно единственно (с точностью до нормировки) и имеет компактный носитель. Для доказательства введем на пространстве обобщенных функций с компактным носителем *масштабирующий оператор* (transition operator):

$$[Tf](x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_kf(Mx-k). \quad (2.21)$$

Это линейный непрерывный оператор в пространстве S'. Масштабирующая функция является его собственным элементом, соответствующим собственному значению 1.

[1]) В отличие от традиционной терминологии, мы будем считать бесконечное произведение сходящимся и в случае, когда оно имеет нулевое значение.

Теорема 2.4.4. *Масштабирующее уравнение с полиномиальной маской всегда имеет единственное, с точностью до постоянного множителя, решение $\varphi \in S'$ с компактным носителем. Это решение дается формулой* (2.17). *Более того, для любой финитной обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ последовательность $f_n = T^n f$ сходится в пространстве $\mathcal{S}'$ к функции $c \cdot \varphi$, где нормирующий множитель c равен $\widehat{f}(0)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} m_0\left(M^{*-k}\xi\right)$ сходится в пространстве $\mathcal{S}'$. Из этого следует, что функция φ, определенная как обратное преобразование Фурье этого произведения, принадлежит $\mathcal{S}'$. Это также будет означать (если взять обратное преобразование Фурье) сходимость $T^n f \to \varphi$ в пространстве $\mathcal{S}'$. Сходимость имеет место для любой функции $f \in S'$ с компактным носителем такой, что $\widehat{f}(0) = 1$. Из этого, в частности, следует единственность решения φ. Далее применим лемму A.5.1 (см. приложение A.5) к оператору $B = M^{*-1}$. Получим, что оператор T сохраняет подпространство $\{f \in \mathcal{S}' \colon\ \operatorname{supp} f \subset K\}$. Следовательно, если взять f с условием $\operatorname{supp} f \subset K$, $\widehat{f}(0) = 1$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} T^n f$ имеет носитель на компакте K, что завершает доказательство. Итак, остается установить сходимость

$$\widehat{T^n f}(\xi) = m_0\left(M^{*-1}\xi\right)\ldots m_0\left(M^{*-n}\xi\right)\widehat{f}\left(M^{*-n}\xi\right) \ \to$$
$$\to\ \widehat{f}(0)\prod_{k=1}^{\infty} m_0\left(M^{*-k}\xi\right) \qquad (2.22)$$

в пространстве $\mathcal{S}'$ для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ с компактным носителем. Мы уже доказали, что сходимость имеет место на каждом компакте в $\mathbb{R}^d$, однако этого недостаточно для сходимости в $\mathcal{S}'$.

Оценим рост функции $\widehat{T^n f}(\xi)$ при $\xi \to \infty$. Пусть $\rho = \rho(M^{*-1})$ — спектральный радиус оператора M^{*-1} (наибольший из модулей его собственных значений, см. приложение A.5). По условию $\rho < 1$. Фиксируем произвольное $q \in (\rho, 1)$. Тогда для некоторой константы C_q имеем $\|M^{*-k}\| \leqslant C_q q^k$, $k \in \mathbb{N}$. Как мы знаем, существует константа C такая, что $|1 - m_0(\xi)| \leqslant C|\xi|$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Теперь берем произвольное $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\xi| > \dfrac{1}{C_q C}$. Пусть p будет наименьшее целое число, для которого $|M^{*-p}\xi| \leqslant \dfrac{1}{C_q C}$. Для каждого $n \geqslant p+1$ имеем

$$\left|\widehat{f}\Big(M^{*-p}\xi\Big)\prod_{k=1}^{n} m_0\Big(M^{*-k}\xi\Big)\right| \leqslant C_1\left|\prod_{k=1}^{p} m_0\Big(M^{*-k}\xi\Big)\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{n-p}\Big(1+q^j\Big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C_2 \|m_0\|_\infty^p < C_1 C_2 \|m_0\|_\infty^{\log_q \frac{q}{C_q C\|\xi\|}} = C_1 C_2 \left(\frac{C_q C|\xi|}{q}\right)^{\log_{1/q}\|m_0\|_\infty}, \tag{2.23}$$

где

$$C_1 = \max\left\{|\widehat{f}(\eta)|,\ |\eta| \leqslant \frac{1}{C_q C}\right\}, \quad C_2 = \left|\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + q^j\right)\right|.$$

При оценке числа p мы воспользовались тем, что $|M^{*-p+1}\xi| > \dfrac{1}{C_q C}$, следовательно,

$$C_q q^{p-1} > \frac{1}{C_q C|\xi|},$$

откуда

$$p < \log_q\left(\frac{q}{C_q C|\xi|}\right).$$

Итак, для достаточно больших n функция $\widehat{T^n f}(\xi)$ растет при $\xi \to \infty$ не быстрее полинома степени $\log_{1/q}\|m_0\|_\infty$. Возьмем теперь произвольную пробную функцию $h \in \mathcal{S}$. Поскольку она убывает на бесконечности быстрее, чем любая степень $|\xi|$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое $R = R(\varepsilon)$, при котором $\left|\int\limits_{|\xi|>R} \widehat{T^n f}\, h\, d\xi\right| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant p+1$. С другой стороны, в шаре $\{\xi \in \mathbb{R}^d\colon\ |\xi| \leqslant R\}$ произведение (2.22) сходится равномерно к $\widehat{f}(0)\widehat{\varphi}(\xi)$, следовательно $(\widehat{T^n f}, h) \to (\widehat{f}(0)\widehat{\varphi}, h)$ при $n \to \infty$, что и завершает доказательство. $\Diamond$

Итак, если функция $\varphi \in \mathcal{S}'$, преобразование Фурье которой непрерывно в нуле и $\widehat{\varphi}(0) = 1$, удовлетворяет масштабирующему уравнению с полиномиальной маской, то она имеет компактный носитель, и для любой функции $f \in \mathcal{S}'$ преобразование Фурье которой непрерывно в нуле последовательность $f_n = T^n f$ сходится в пространстве обобщенных функций к $\widehat{f}(0) \cdot \varphi$.

Следствие 2.4.5. *Если масштабирующее уравнение с полиномиальной маской имеет суммируемое решение φ, нормированное условием $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\, dx = 1$, то это решение имеет компактный носитель и задается формулой* (2.17). *Более того, для любой суммируемой функции f последовательность $f_n = T^n f$ сходится в пространстве $\mathcal{S}'$ к функции $\widehat{f}(0) \cdot \varphi$.*

Теперь займемся изучением бесконечных произведений (2.17) для масок m_0, обладающих некоторыми специальными свойством.

Определение 2.4.6. Будем говорить, что множество K *конгруэнтно* множеству L, если оно является замыканием некоторого множества, сравнимого с L по модулю $\mathbb{Z}^d$.

Ясно, что любое множество, конгруэнтное некоторому компакту, тоже является компактом.

Лемма 2.4.7. *Пусть* m_0 — *непрерывная* 1-*периодическая функция, удовлетворяющая условию* (2.18),

$$F(\xi) := \prod_{j=1}^{\infty} m_0(M^{*-j}\xi).$$

Если функция F *непрерывна и*

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} |F(\xi+l)| \neq 0 \tag{2.24}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$, *то существует компакт* K, *конгруэнтный кубу* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$, *содержащий окрестность нуля, такой что*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \inf_{\xi\in K} |m_0(M^{*-k}\xi)| \neq 0. \tag{2.25}$$

Доказательство. Положим

$$C_\xi = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} |F(\xi+l)|,$$

если ряд в правой части сходится, в противном случае положим $C_\xi = 1$. Из условия (2.24) следует, что для любого $\xi \in [-1/2, 1/2]^d$ существует $l_\xi \in \mathbb{N}$, для которого

$$\sum_{\|l\|_\infty \leqslant l_\xi} |F(\xi+l)| \geqslant \frac{1}{2}\, C_\xi.$$

Функция $|F|$ непрерывна, поэтому и конечная сумма $\sum\limits_{\|l\|_\infty \leqslant l_\xi} |F(\,\cdot+l)|$ тоже будет непрерывной. Следовательно, для любого ξ существует окрестность $N_\xi = \{\theta \in \mathbb{R}^d\colon |\xi-\theta| < R_\xi\}$, такая что

$$\sum_{\|l\|_\infty \leqslant l_\xi} |F(\theta+l)| \geqslant \frac{1}{4}\, C_\xi$$

для всех $\theta \in N_\xi$. Поскольку $[-1/2, 1/2]^d$ — компакт, а $\{N_\xi\}_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ — его открытое покрытие, из него можно выбрать конечное подпокрытие $\{N_\xi\}_{\xi\in\Omega}$. Из всех l_ξ, $\xi \in \Omega$, выберем наибольшее и обозначим через l_0, а из всех C_ξ, $\xi \in \Omega$, выберем наименьшее и обозначим через $4C$. Ясно, что для любого $\xi \in [-1/2, 1/2]^d$ существует такое $l \in \mathbb{Z}^d$, $\|l\|_\infty \leqslant l_0$, что

$$|F(\xi+l)| \geqslant \frac{C}{(2l_0+1)^d} =: C_1.$$

Перенумеруем векторы $l \in \mathbb{Z}^d$, $\|l\|_\infty \leqslant l_0$, так, чтобы $l(0) = \mathbf{0}$. Получим последовательность $l(n)$, $n = 0, \ldots, (2l_0+1)^d =: L$. Определим множества S_n:

$$S_0 = \{\xi \in [-1/2, 1/2]^d : F(\xi) \geqslant C_1\},$$

$$S_n = \left\{\xi \in [-1/2, 1/2]^d \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} S_k : |F(\xi + l(n))| \geqslant C_1\right\}.$$

Ясно, что множества S_n, $n = 0, \ldots, L$, измеримы и образуют разбиение $[-1/2, 1/2]^d$. Функция F непрерывна и $F(0) = 1$, поэтому S_0 содержит окрестность нуля. Положим

$$K = \bigcup_{n=0}^{L} \overline{(S_n + l(n))}. \tag{2.26}$$

Нетрудно видеть, что множество K конгруэнтно кубу $[-1/2, 1/2]^d$. По построению $F(\xi) \geqslant C_1$ на K, и K содержит окрестность нуля.

Покажем, что K удовлетворяет (2.25). Пусть $K \subset [-R, R]^d$. Функция m_0 непрерывна, поэтому из соотношений (2.18), (2.5) следует, что

$$|m_0(M^{*-k}\xi)| > \frac{1}{2}$$

для всех $\xi \in [-R, R]^d$ при $k > k_0$. Таким образом, достаточно показать, что

$$\inf_{\xi \in K} |m_0(M^{*-k}\xi)| \neq 0$$

для конечного числа k, $1 \leqslant k \leqslant k_0$. Для $\xi \in K$ имеем

$$F(\xi) = \left(\prod_{k=1}^{k_0} m_0(M^{*-k}\xi)\right) F(M^{*-k_0}\xi).$$

Левая часть равенства отделена от нуля, а второй сомножитель в правой части ограничен, так как функция F непрерывна и, следовательно, ограничена на компакте. Отсюда вытекает

$$\prod_{k=1}^{k_0} |m_0(M^{*-k}\xi)| \geqslant C_2 > 0$$

для любого $\xi \in K$. Поскольку функция m_0 непрерывна, каждый сомножитель в этом произведении отделен от нуля, т. е.

$$|m_0(M^{*-k}\xi)| \geqslant C_3 > 0$$

для всех $k = 1, \ldots, k_0$ и для любого $\xi \in K$, что и завершает доказательство леммы. $\Diamond$

Лемма 2.4.8. *Пусть m_0 — функция, удовлетворяющая условиям предложения* 2.4.1, *существует компакт K, конгруэнтный кубу $[-1/2,1/2]^d$, содержащий окрестность нуля, такой что*

$$C := \inf_{k\in\mathbb{N}}\inf_{\xi\in K}|m_0(M^{*-k}\xi)| \ne 0, \tag{2.27}$$

и пусть

$$F_n(\xi) = \prod_{j=1}^{n}|m_0(M^{*-j}\xi)|\chi_K(M^{*-n}\xi), \quad F(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty}|m_0(M^{*-j}\xi)|.$$

Тогда, если $F\in L(\mathbb{R}^d)$, то F_n сходится к F в $L(\mathbb{R}^d)$, если $F\in L_2(\mathbb{R}^d)$, то F_n сходится к F в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. В первую очередь отметим, что по предложению 2.4.1 бесконечное произведение, определяющее функцию F, сходится в каждой точке. Используя неравенство $e^{-2x}\leqslant 1-x$, верное при $0\leqslant x\leqslant 1/2$, и соотношения (2.27), (2.20), для достаточно большого N (которое мы зафиксируем) и для любого $\xi\in K$ имеем

$$|F(\xi)| \geqslant C^N \prod_{j=N+1}^{\infty}\bigl(1-|1-m_0(M^{*-j}\xi)|\bigr) \geqslant$$

$$\geqslant C^N \exp\Biggl(-2C_1\max_{\xi\in K}|\xi|\sum_{k=N+1}^{\infty}\|M^{-k}\|\Biggr) =: C_2 > 0.$$

Это можно перефразировать так:

$$\chi_K(\xi) \leqslant |F(\xi)|/C_2 \tag{2.28}$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^d$. Компакт K содержит окрестность нуля, поэтому из (2.5) следует, что $\chi_K(M^{*-n}\xi)\to 1$ при $n\to+\infty$ для любого $\xi\in\mathbb{R}^d$, что вместе с предложением (2.4.1) влечет поточечную сходимость $F_n\to F$ на $\mathbb{R}^d$. Из неравенства (2.28) имеем

$$|F_n(\xi)| \leqslant \frac{1}{C_2}\prod_{j=1}^{n}|m_0(M^{*-j}\xi)||F(M^{*-n}\xi))| = \frac{1}{C_2}\,|F(\xi)|$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^d$. Таким образом, если $F\in L(\mathbb{R}^d)$, то функции F_n имеют суммируемую мажоранту. Значит, по теореме Лебега F_n сходится к F в $L(\mathbb{R}^d)$. Если $F\in L_2(\mathbb{R}^d)$, то

$$|F_n(\xi)-F(\xi)|^2 \leqslant |F_n(\xi)|^2 + 2|F_n(\xi)|\ |F(\xi)| + |F(\xi)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{C_2^2}+\frac{2}{C_2}+1\right)|F(\xi)|^2 =: C_4|F(\xi)|^2.$$

Функция $|F_n - F|^2$ поточечно сходится к нулю и имеет суммируемую мажоранту $C_4|F(\xi)|^2$, значит, $F_n \to F$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. $\Diamond$

2.5. Условия биортогональности

В этом параграфе мы будем рассматривать масштабирующие функции $\varphi, \widetilde{\varphi}$, соответственно с масками

$$m_0(\xi) := m^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h_k e^{2\pi i(k,\xi)}, \qquad \widetilde{m_0}(\xi) := m^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{h}_k e^{2\pi i(k,\xi)}. \tag{2.29}$$

Нас интересует, когда целые сдвиги функций $\varphi, \widetilde{\varphi}$ будут образовывать биортонормированную систему в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (в частности, когда целые сдвиги одной функции φ образуют ортонормированную систему).

Повторив почти дословно предложение 1.1.12 вместе с его доказательством, имеем следующее утверждение.

Предложение 2.5.1. *Пусть* $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$. *Системы*

$$\{\varphi(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}, \quad \{\widetilde{\varphi}(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$$

являются биортонормированными тогда и только тогда, когда для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ *выполняется равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(\xi+k)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+k)} = 1, \tag{2.30}$$

причем ряд в левой части (2.30) *абсолютно сходится.*

Предложение 2.5.2. *Пусть* $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — *масштабирующие функции соответственно с масками* $m_0, \widetilde{m_0}$. *Если целые сдвиги* φ, $\widetilde{\varphi}$ *образуют биортонормированную систему, то*

$$\sum_{s\in D(M^*)} m_0(\xi + {M^*}^{-1}s)\overline{\widetilde{m_0}(\xi + {M^*}^{-1}s)} = 1 \tag{2.31}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ *и для любого множества цифр* $D(M^*)$ *матрицы* M^*.

Доказательство. Используя формулу (2.30) и масштабирующие уравнения для функций $\varphi, \widetilde{\varphi}$, имеем

$$1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(M^*\xi+p)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(M^*\xi+p)} =$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} m_0(\xi+{M^*}^{-1}p)\widehat{\varphi}(\xi+{M^*}^{-1}p)\overline{\widetilde{m_0}(\xi+{M^*}^{-1}p)\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+{M^*}^{-1}p)}. \tag{2.32}$$

Используя леммы 2.2.2, произведем в правой части (2.32) замену индекса суммирования $p = M^*k + s$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $s \in D(M^*)$, что приведет ее к виду

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{s\in D(M^*)} m_0(\xi + \theta_{ks})\overline{\widetilde{m_0}(\xi + \theta_{ks})}\widehat{\varphi}(\xi + \theta_{ks})\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi + \theta_{ks})},$$

где $\theta_{ks} = {M^*}^{-1}s + k$. Изменив порядок суммирования, используя 1-периодичность функций $m_0, \widetilde{m_0}$ по каждой переменной и (2.30), получим

$$\sum_{s\in D(M^*)} m_0(\xi + \theta_{\mathbf{0}s})\overline{\widetilde{m_0}(\xi + \theta_{\mathbf{0}s})} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(\xi + \theta_{ks})\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi + \theta_{ks})} =$$

$$= \sum_{s\in D(M^*)} m_0(\xi + {M^*}^{-1}s)\overline{\widetilde{m_0}(\xi + {M^*}^{-1}s)}. \quad \diamondsuit$$

Условие (2.31) несложно проверить для данной пары масок, но оно не очень удобно для подбора подходящей пары $m_0, \widetilde{m}_0$. В этом плане бывает полезна эквивалентная форма (2.31), данная в терминах коэффициентов Фурье функций $m_0, \widetilde{m}_0$.

Предложение 2.5.3. *Пусть даны* 1*-периодические функции*

$$m_0(\xi) = m^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h_k e^{2\pi i(k,\xi)}, \quad \widetilde{m}_0(\xi) = m^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{h}_k e^{2\pi i(k,\xi)},$$

с абсолютно сходящимися рядами Фурье. Тогда выполнение условия (2.31) *равносильно тому, что для любого* $n \in \mathbb{Z}^d$ *имеет место равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h_k \overline{\widetilde{h}_{k-Mn}} = \delta_{n0}. \tag{2.33}$$

Доказательство. Из равенства

$$\sum_{s\in D(M^*)} m_0(\xi + {M^*}^{-1}s)\overline{\widetilde{m_0}(\xi + {M^*}^{-1}s)} =$$

$$= m^{-1} \sum_{s\in D(M^*)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} h_k \overline{\widetilde{h}_l} e^{2\pi i(k-l,\xi)} e^{2\pi i(k-l,{M^*}^{-1}s)} =$$

$$= m^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(n,\xi)} h_k \overline{\widetilde{h}_{k-n}} \sum_{s\in D(M^*)} e^{2\pi i(M^{-1}n,s)}$$

Перемена порядка суммирования здесь оправдана тем, что ряд в правой части по $2d$-мерному индексу (n,k) абсолютно сходится, а сумма по s конечна. Отсюда по лемме 2.2.6 для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ имеем

$$\sum_{s\in D(M^*)} m_0(\xi + M^{*-1}s)\overline{\widetilde{m_0}(\xi + M^{*-1}s)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(Mn,\xi)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h_k\overline{\widetilde{h}_{k-Mn}}. \tag{2.34}$$

Таким образом, выполнение условия (2.31) равносильно тому, что

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(n,\omega)}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h_k\overline{\widetilde{h}_{k-Mn}}\right), \quad \omega = M^*\xi,$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}^d$. Мы получили разложение единицы в ряд Фурье, выписав значения коэффициентов Фурье этого ряда, получим требуемые равенства. $\diamondsuit$

Проиллюстрируем, как на практике по заданной полиномиальной маске m_0 можно подобрать полиномиальную маску $\widetilde{m}_0$, удовлетворяющую условиям (2.31), (2.18).

Пример 2.5.4. Пусть

$$d = 2, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{2\pi i(k,\xi)},$$

$$c_{00} = 1/2, \quad c_{10} = 1/4, \quad c_{11} = 1/4,$$

а остальные c_k равны нулю. Мы хотим найти тригонометрический полином

$$\widetilde{m}_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} x_k e^{2\pi i(k,\xi)},$$

удовлетворяющий условиям (2.33), (2.18). В первую очередь нам надо выбрать подходящий спектр Ω функции $\widetilde{m}_0$. Ясно, что при конечном спектре условие (2.33) будет представлять собой конечный набор равенств. Добавив к ним равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} x_k = 1,$$

обеспечивающее выполнение условия (2.18) для $\widetilde{m}_0$, получим линейную систему относительно неизвестных x_k, $k \in \Omega$. Конечно не при любом выборе спектра система окажется совместной. Попробуем взять такой же спектр, как у функции m_0. Нетрудно видеть, что у векторов, сравнимых с нулем по модулю M, сумма координат четна, и ненулевые равенства в (2.33) будут только для векторов $Mn = (0,0)^T$, $(1,1)^T$, $(-1,-1)^T$ (соответствующие значениям $n = (0,0)^T$, $(1,0)^T, (-1,0)^T$). Таким образом, система примет вид

$$\begin{cases} c_{00}x_{00} + c_{10}x_{10} + c_{11}x_{11} = \frac{1}{2} \\ c_{11}x_{00} = 0 \\ c_{00}x_{11} = 0 \\ x_{00} + x_{10} + x_{11} = 1 \end{cases}$$

Подставив значения коэффициентов c_k, увидим, что система не имеет решений. Расширим спектр функции $\widetilde{m}_0$, добавив неизвестные коэффициенты x_{21}, x_{22}. Получим систему

$$\begin{cases} c_{00}x_{00} + c_{10}x_{10} + c_{11}x_{11} = \frac{1}{2} \\ c_{11}x_{00} = 0 \\ c_{00}x_{11} + c_{10}x_{21} + c_{11}x_{22} = 0 \\ c_{00}x_{22} = 0 \\ x_{00} + x_{10} + x_{11} + x_{21} + x_{22} = 1, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение

$$x_{00} = 0, \quad x_{10} = 3/2, \quad x_{11} = 1/2, \quad x_{21} = -1, \quad x_{22} = 0. \qquad \Diamond$$

Предложение 2.5.2 является обобщением одномерного результата, сформулированного в следствии 1.2.6. Мы установили необходимое условие биортогональности целых сдвигов масштабирующей функции, которое вообще говоря не является достаточным. Это демонстрирует следующий пример.

Пример 2.5.5. Пусть $\varphi = \chi_{[0,3]}$, очевидно, эта функция является масштабирующей при $M = 2$, и для ее маски $m_0(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{6\pi i\xi}\right)$ выполнено тождество

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 = 1.$$

Однако ясно, что не все целые сдвиги функции φ ортогональны друг другу. Более того, целые сдвиги функции φ не образуют систему Рисса. Действительно, непосредственный счет дает

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + l)|^2 = 3 + 4\cos 2\pi\xi + 2\cos 4\pi\xi.$$

Нетрудно видеть, что правая часть этого равенства обращается в нуль при $\xi = 1/3$. $\Diamond$

К сожалению, пока не найдено просто формулируемых и легко проверяемых на практике достаточных условий. Изложенные далее достаточные условия, описанные в разных терминах, не выглядят привлекательными в этом плане. Все же нередко их удается проверить в конкретных ситуациях.

Теорема 2.5.6 (критерий Коэна). *Пусть* $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — *масштабирующие функции соответственно с масками* $m_0, \widetilde{m_0}$, *удовлетворяющими условиям предложения* 2.4.1 *и* (2.31). *Для того чтобы целые сдвиги функций* φ, $\widetilde{\varphi}$ *были биортонормированными, достаточно, а в случае когда*

$$\varphi(x), \widetilde{\varphi}(x) = O\left(|x|^{-(d+\varepsilon)}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad |x| \to \infty, \tag{2.35}$$

и необходимо, чтобы существовал компакт K, *конгруэнтный кубу* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$, *содержащий окрестность нуля, такой что*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \inf_{\xi\in K} |m_0(M^{*-k}\xi)| \neq 0, \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} \inf_{\xi\in K} |\widetilde{m_0}(M^{*-k}\xi)| \neq 0. \tag{2.36}$$

Замечание 2.5.7. На практике проверка выполнения условия (2.36) сводится к нахождению наименьшего значения на компакте K для конечного числа функций. Действительно, из компактности K, непрерывности m_0 и $\widetilde{m_0}$, равенств $m_0(\mathbf{0}) = \widetilde{m}_0(\mathbf{0}) = 1$ и условия (2.5) следует, что $|m_0(M^{*-k}\xi)\widetilde{m_0}(M^{*-k}\xi)| > 1/2$ для всех $\xi \in [-R, R]^d$ при $k > k_0$. Таким образом, остается показать, что $2k_0$ функций

$$m_0(M^{*-1}\xi),\ \widetilde{m_0}(M^{*-1}\xi),\ \ldots,\ m_0(M^{*-k_0}\xi),\ \widetilde{m_0}(M^{*-k_0}\xi)$$

не имеют нулей на K.

Доказательство теоремы 2.5.6. Достаточность. Из леммы 2.4.8, примененной к функции

$$m_0^*(\xi) := m_0(\xi)\overline{\widetilde{m_0}(\xi)},$$

вытекает, что последовательность

$$\mu_k(\xi) := \prod_{j=1}^{k} m_0(M^{*-j}\xi)\overline{\widetilde{m_0}(M^{*-j}\xi)}\ \chi_K(M^{*-k}\xi), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.37}$$

сходится к $\widehat{\varphi} \cdot \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}}$ в $L(\mathbb{R}^d)$. Так как компакт K конгруэнтен кубу $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$, для любой 1-периодической по каждой переменной функции f имеем

$$\int_K f = \int_{[-1/2,1/2]^d} f = \int_{[0,1]^d} f.$$

В частности, используя (2.37), для любого $n \in \mathbb{Z}^d$ получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu_k(\xi)e^{2\pi i(n,\xi)}\, d\xi = m^k \int_{\mathbb{R}^d} \mu_k(M^{*k}\theta)e^{2\pi i(n,M^{*k}\theta)}\, d\theta =$$

$$= m^k \int\limits_K \prod_{j=1}^{k} m_0(M^{*k-j}\theta)\overline{\widetilde{m_0}(M^{*k-j}\theta)} e^{-2\pi i(n, M^{*k}\theta)} d\theta =$$

$$= m^k \int\limits_{[0,1]^d} \prod_{l=1}^{k-1} m_0(M^{*l}\theta)\overline{\widetilde{m_0}(M^{*l}\theta)} e^{2\pi i(n, M^{*k}\theta)} m_0(\theta)\overline{\widetilde{m_0}(\theta)}\, d\theta.$$

В правой части под интегралом стоит 1-периодическая по каждой переменной функция, поэтому воспользовавшись леммой 2.2.5 при $A = M^*$, преобразуем этот интеграл к виду

$$m^k \sum_{r\in D(M^*)} \int\limits_{Q_1 + M^{*-1}r} \prod_{l=1}^{k-1} m_0(M^{*l}\theta)\overline{\widetilde{m_0}(M^{*l}\theta)} e^{2\pi i(n, M^{*k}\theta)} m_0(\theta)\overline{\widetilde{m_0}(\theta)}\, d\theta,$$

где $Q_1 = M^{*-1}[0,1)^d$. Далее, сделаем замену $\theta = \xi + M^{*-1}r$ в каждом слагаемом, внесем сумму под знак интеграла и, воспользовавшись формулой (2.31), получим

$$m^k \int\limits_{Q_1} \prod_{l=1}^{k-1} m_0(M^{*l}\xi)\overline{\widetilde{m_0}(M^{*l}\xi)} e^{2\pi i(n, M^{*k}\xi)} d\xi.$$

Сделав замену переменной $\theta = M^*\xi$ в интеграле, а в произведении замену индекса $l - 1 \to l$, получим

$$m^{k-1} \int\limits_{[0,1)^d} \prod_{l=0}^{k-2} m_0(M^{*l}\theta)\overline{\widetilde{m_0}(M^{*l}\theta)} e^{2\pi i(n, M^{*k-1}\theta)} d\theta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mu_{k-1}(\theta) e^{2\pi i(n,\theta)}\, d\theta.$$

Таким образом, для любых $k,\ n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mu_k(\theta) e^{2\pi i(n,\theta)}\, d\theta = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mu_{k-1}(\theta) e^{2\pi i(n,\theta)}\, d\theta.$$

Построив аналогичную цепочку равенств при $k = 1$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mu_1(\xi) e^{2\pi i(n,\xi)}\, d\xi = \ldots = \int\limits_{[0,1)^d} e^{2\pi i(n,\theta)}\, d\theta = \delta_{n0} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi)\ \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)} e^{2\pi i(n,\xi)}\, d\xi = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mu_k(\xi) e^{2\pi i(n,\xi)}\, d\xi = \delta_{n0},$$

что, ввиду теоремы Планшереля, влечет равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \overline{\widetilde{\varphi}}(x-n)\, dx = \delta_{n0}.$$

Необходимость. Пусть теперь выполнено (2.35), покажем, что в этом случае функция

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(\xi+l)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+l)} =: \Phi(\xi) \tag{2.38}$$

непрерывна на $\mathbb{R}^d$. Положим

$$G(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(t+k)e^{-2\pi i(t+k,\xi)}, \quad \widetilde{G}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{\varphi}(t+k)e^{-2\pi i(t+k,\xi)}.$$

Из формулы суммирования Пуассона следует, что

$$\widehat{G}(l) = \widehat{\varphi}(\xi+l), \quad \widehat{\widetilde{G}}(l) = \widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+l)$$

для любого $l \in \mathbb{Z}^d$. Применяя обобщенное равенство Парсеваля, имеем

$$\Phi(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widehat{G}(l)\overline{\widehat{\widetilde{G}}(l)} = \int\limits_{[0,1]^d} G(t)\overline{\widetilde{G}(t)}\, dt =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(t+k)e^{-2\pi i(t+k,\xi)}\overline{\widetilde{G}(t)}\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(t)e^{-2\pi i(t,\xi)}\overline{\widetilde{G}(t)}\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{\widetilde{\varphi}(t+k)}e^{-2\pi i(k,\xi)}\, dt.$$

Поскольку в силу условия (2.35)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\varphi(t)\widetilde{\varphi}(t+k)|\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\varphi(t)| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widetilde{\varphi}(t+k)|\, dt < \infty,$$

поменяв местами порядок суммирования и интегрирования, представим $\Phi(\xi)$ в виде суммы абсолютно сходящегося тригонометрического ряда, которая непрерывна.

Из непрерывности функции Φ и предложения 2.5.1 следует равенство $\Phi(\xi) = 1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$, значит, F удовлетворяет всем условиям леммы 2.4.7, из которой получаем требуемое утверждение. $\Diamond$

Следствие 2.5.8. *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции соответственно с масками $m_0, \widetilde{m_0}$, удовлетворяющими* (2.31) *и условиям предложения* 2.4.1. *Если m_0 и $\widetilde{m}_0$ не обращаются в нуль на множестве $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M^{*-k}[-1/2, 1/2]^d$, то целые сдвиги функций φ, $\widetilde{\varphi}$ образуют биортонормированную систему.*

Предположения следствия являются частным случаем предположений теоремы 2.5.6, в качестве компакта K взят куб $[-1/2, 1/2]^d$.

В силу (2.5) существует такое k_0, что для любого $k > k_0$ выполнено $M^{*-k}[-1/2, 1/2]^d \subset M^{*-1}[-1/2, 1/2]^d$, поэтому в условиях следствия 2.5.8 достаточно проверить отсутствие нулей функций m_0 и $\widetilde{m}_0$ на множествах $M^{*-k}[-1/2, 1/2]^d$, $k = 1, \ldots, k_0$. В случае если $M^{*-k}[-1/2, 1/2]^d \subset M^{*-k+1}[-1/2, 1/2]^d$, достаточно того, что m_0 и $\widetilde{m}_0$ не имеют нулей на $M^{*-1}[-1/2, 1/2]^d$.

Пример 2.5.9. Пусть $d = 2$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos 2\pi\xi_1 + \frac{1}{4}\cos 2\pi\xi_2,$$

$$\widetilde{m}_0(\xi) = 1 + \frac{1}{4}(\cos 2\pi\xi_1 + \cos 2\pi\xi_2) - \\ - \frac{1}{8}(\cos^2 2\pi\xi_1 + \cos^2 2\pi\xi_2) - \frac{1}{4}\cos 2\pi\xi_1 \cos 2\pi\xi_2.$$

Коэффициенты полиномов m_0 и $\widetilde{m}_0$, записанные в матричной форме, будут выглядеть соответственно следующим образом

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/32 & 0 & 0 \\ 0 & -1/16 & 1/8 & -1/16 & 0 \\ -1/32 & 1/8 & 7/8 & 1/8 & -1/32 \\ 0 & -1/16 & 1/8 & -1/16 & 0 \\ 0 & 0 & -1/32 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

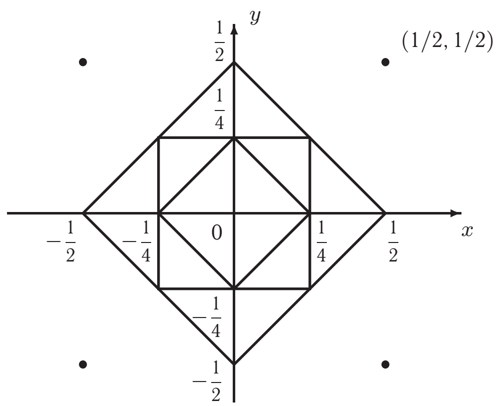


Рис. 2.1. Множества $M^{*-k}[-1/2, 1/2]^2$ при $k = 1, 2, 3$

Нетрудно проверить, что выполнены (2.18) и (2.33) (значит, и (2.31)). Покажем, что эти маски удовлетворяют достаточному условию биортогональности следствия 2.5.8. Действительно, полиномы m_0 и $\widetilde{m}_0$ обращаются в нуль в единственной на $\mathbb{T}^d$ точке $(1/2, 1/2)^T$, так как равенства $m_0(\xi) = 0$, $\widetilde{m}_0(\xi) = 0$ возможны только если все входящие в них косинусы равны -1. Поэтому ни один нуль функций $m_0, \widetilde{m}_0$ не попадет в множество $M^{-1}[-1/2, 1/2]^d$, и нетрудно видеть, что имеет место включение $M^{-k}[-1/2, 1/2]^d \subset M^{-1}[-1/2, 1/2]^d$ для всех $k \geqslant 2$ (см. рис. 2.1). $\Diamond$

Рассмотрим две масштабирующие функции $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L(\mathbb{R}^d)$ и положим

$$\varphi^*(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(t)\overline{\widetilde{\varphi}(x-t)}dt, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.39}$$

$$h_k^* := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n \overline{\widetilde{h}_{n-k}}, \quad k \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.40}$$

Из теоремы Планшереля следует равенство

$$\varphi^*(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)}e^{-2\pi i(\xi,x)}\,d\xi,$$

из которого нетрудно установить, что функция φ^* непрерывна на $\mathbb{R}^d$. Кроме того, из условия $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$, следует, что функция φ^* ограничена, а из условия $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L(\mathbb{R}^d)$, следует $\varphi^* \in L(\mathbb{R}^d)$. Поэтому $\varphi^* \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Найдем преобразование Фурье этой функции. Поскольку в интеграле

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(t)\overline{\widetilde{\varphi}(x-t)}e^{-2\pi i(\xi,x)}\,dt\,dx$$

подынтегральная функция суммируема на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, поменяв порядок интегрирования, получим

$$\widehat{\varphi}^*(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(-\xi)}.$$

Применяя к обоим сомножителям правой части равенство (2.11), имеем,

$$\widehat{\varphi}^*(\xi) = m_0(M^{*-1}\xi)\overline{\widetilde{m}_0(-M^{*-1}\xi)}\widehat{\varphi}(M^{*-1}\xi)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(-M^{*-1}\xi)} =$$
$$= m_0(M^{*-1}\xi)\overline{\widetilde{m}_0(-M^{*-1}\xi)}\widehat{\varphi}^*(M^{*-1}\xi).$$

Таким образом, функция φ^* является масштабирующей с маской

$$m_0(\xi)\overline{\widetilde{m}_0(-\xi)} =: m_0^*(\xi).$$

Нетрудно проверить, что

$$m_0^*(\xi) = m^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h_k^* e^{2\pi i(k,\xi)}.$$

Лемма 2.5.10. *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L(\mathbb{R}^d)$ — масштабирующие функции соответственно с масками $m_0, \widetilde{m_0}$, ряды Фурье которых абсолютно сходятся, φ^* — функция, определенная равенством* (2.39). *Тогда для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство*

$$\varphi^*(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n^* \varphi^*(M\xi + n). \tag{2.41}$$

Доказательство. Из абсолютной сходимости рядов Фурье функций $m_0, \widetilde{m_0}$ и соотношения (2.40) следует

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |h_n^*| < \infty. \tag{2.42}$$

Отсюда, учитывая ограниченность функции φ^*, устанавливаем, что ряд в правой части (2.41) равномерно сходится, и значит, ввиду непрерывности φ^*, его сумма непрерывна. С другой стороны, этот ряд сходится в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к функции φ^*, поскольку соотношение (2.41) является масштабирующим уравнением для φ^*, что и влечет справедливость (2.41) в каждой точке. $\Diamond$

Введем оператор W_{φ^*}, действующий из ℓ_2 в ℓ_2:

$$(W_{\varphi^*}c)_k := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n^* c_{n+Mk}, \quad c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d} \in \ell_2. \tag{2.43}$$

Теорема 2.5.11 (критерий Лоутона). *Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L(\mathbb{R}^d)$ — масштабирующие функции соответственно с масками $m_0, \widetilde{m_0}$, имеющими абсолютно сходящиеся ряды Фурье и удовлетворяющими* (2.18), *φ^* — функция, определенная равенством* (2.39). *Для того чтобы целые сдвиги функций φ, $\widetilde{\varphi}$ были биортонормированными, необходимо, а в случае когда*

$$\varphi(x), \widetilde{\varphi}(x) = O\left(|x|^{-d-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad |x| \to \infty, \tag{2.44}$$

и достаточно, чтобы последовательность $\delta := \{\delta_{k0}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ была единственным в пространстве ℓ_1 собственным вектором оператора W_{φ^*}, соответствующим собственному числу 1.

Доказательство. Достаточность. Пусть δ — единственный в ℓ_1 собственный вектор оператора W_{φ^*}, соответствующий собственному числу 1. По лемме 2.5.10

$$\varphi^*(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n^* \varphi^*(Mk + n)$$

для любого $k \in \mathbb{Z}^d$, т. е. последовательность $\{\varphi^*(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ является собственным вектором оператора W_{φ^*}, соответствующим собственному числу 1. Теперь покажем, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\varphi^*(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\overline{\widetilde{\varphi}}(x+n)\, dx \right| < \infty. \tag{2.45}$$

Для этого достаточно проверить сходимость ряда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} |\varphi(x+k)\widetilde{\varphi}(x+k+n)|\, dx. \tag{2.46}$$

Из (2.44) следует, что существуют такие $C > 0$ и $R > 1$, что

$$|\varphi(x)|, |\widetilde{\varphi}(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{d+\varepsilon}}$$

при $|x| \geqslant R$. Поэтому

$$\sum_{|k|\geqslant R+1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} |\varphi(x+k)\widetilde{\varphi}(x+k+n)|\, dx \leqslant \sum_{|k|\geqslant R+1} \frac{2^{d+\varepsilon}C}{|k|^{d+\varepsilon}} \|\widetilde{\varphi}\|_1 < \infty.$$

Для доказательства сходимости ряда (2.46) осталось заметить, что для любого фиксированного $k \in \mathbb{Z}^d$

$$\sum_{|n+k|\geqslant R+1} \int_{\mathbb{T}^d} |\varphi(x+k)\widetilde{\varphi}(x+k+n)|\, dx \leqslant \sum_{|n+k|\geqslant R+1} \frac{2^{d+\varepsilon}C}{|n+k|^{d+\varepsilon}} \|\varphi\|_1 < \infty.$$

Соотношение (2.45) означает, что $\{\varphi^*(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \ell_1$. Следовательно, $\varphi^*(k) = \delta_{k0}$ для любого $k \in \mathbb{Z}^d$, что и означает биортонормированность целых сдвигов функций φ, $\widetilde{\varphi}$.

Необходимость. Пусть $\varphi^*(k) = \delta_{k0}$ для любого $k \in \mathbb{Z}^d$ и пусть $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \ell_1$ — собственный вектор оператора W_{φ^*}, соответствующий собственному числу 1. Покажем, что для любого натурального N и для любого $r \in \mathbb{Z}^d$ имеет место равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k}\varphi^*(r + M^{-N}k) = c_r. \tag{2.47}$$

Проведем индукцию по N. Сначала проверим базу для $N = 1$. Применив (2.41) к левой части (2.47), преобразуем ее к виду

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n^*\varphi^*(Mr + k + n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k}h^*_{-k-Mr} = (W_{\varphi^*}c)_r = c_r.$$

Теперь проведем индукционный переход $N \to N + 1$. Применяя (2.41), имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k}\varphi^*(r + M^{-N-1}k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n^*\varphi^*(Mr + M^{-N}k + n).$$

Меняя в правой части порядок суммирования (это возможно, так как двойной ряд абсолютно сходится ввиду соотношения (2.42) и ограниченности φ^*) и используя индукционное предположение, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k}\varphi^*(r+M^{-N-1}k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h_n^* c_{Mr+n} = (W_{\varphi^*}c)_r = c_r.$$

Из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k$ и ограниченности φ^* следует

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k}\varphi^*(r+M^{-N-1}k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k}\lim_{N\to+\infty}\varphi^*(r+M^{-N-1}k).$$

Поэтому, переходя к пределу в (2.47) и принимая во внимание (2.5), имеем

$$c_r = \varphi^*(r)\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{-k} = \delta_{r0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k,$$

что, очевидно, влечет $c_r = \delta_{r0}$ для любого $r\in\mathbb{Z}^d$. Осталось заметить, что из предложений 2.5.2, 2.5.3 и равенства (2.40) следует, что δ является собственным вектором оператора W_{φ^*}, соответствующим собственному числу 1. $\Diamond$

В практическом плане теорема 2.5.11 годится скорее для опровержения условий ортогональности и биортогональности (хотя и с помощью нее обычно это сделать довольно сложно). Проиллюстрируем проверку отсутствия ортогональности на примере маски, которая уже обсуждалась в примере 2.5.5.

Пример 2.5.12. Пусть $d=1$, $M=2$, $m_0(\xi)=\frac{1}{2}\left(1+e^{6\pi i\xi}\right)$. Покажем, что эта маска не породит масштабирующей функции φ, целые сдвиги которой образуют ортонормированную систему. Маска m^* функции φ^* имеет три ненулевых коэффициента $h_0^*=1$, $h_3^*=1/2$, $h_{-3}^*=1/2$, значит, собственные векторы оператора W_{φ^*}, соответствующие собственному числу 1, находятся из системы

$$c_k = c_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k+3} + \frac{1}{2}c_{2k-3}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ясно, что δ является решением системы. Возьмем вектор c, у которого отличны от нуля только четыре компоненты $c_1=c_{-1}=1$, $c_2=c_{-2}=1/2$. Эти компоненты войдут только в уравнения

$$\begin{cases} c_1 = c_2 + \frac{1}{2}c_{-1} + \frac{1}{2}c_5, \\ c_2 = c_4 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_7, \\ c_{-1} = c_{-2} + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_{-5}, \\ c_{-2} = c_{-4} + \frac{1}{2}c_{-1} + \frac{1}{2}c_{-7}, \end{cases}$$

которые обращаются в верные равенства. Таким образом, мы нашли в ℓ_1 еще один собственный вектор оператора W_{φ^*}, соответствующий собственному числу 1. $\Diamond$

В приведенных критериях ортогональности и биортогональности предполагалось, что обе масштабирующие функции принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}^d)$. На практике обычно эти функции строятся по маскам, и проверка принадлежности $L_2(\mathbb{R}^d)$ оказывается весьма затруднительной. Поэтому встает вопрос, как по коэффициентам масштабирующего уравнения (или, что тоже самое, по коэффициентам Фурье маски) определить, будет ли его решение принадлежать L_2. В случае финитных масштабирующих функций, т. е. для уравнений с полиномиальной маской, существует два алгоритма, сводящие вопрос о принадлежности φ к $L_2(\mathbb{R}^d)$ к вычислению собственных значений некоторых конечномерных операторов. Мы опишем оба алгоритма, отослав читателя за доказательствами к соотвествующим статьям. В обоих аглоритмах необходимо сначала найти так называемое инвариантное множество Ω, соотвествующее данной маске m_0. Конечное множество целых точек $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ назовем *инвариантным* для данной полиномиальной маски $m_0(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} h_k e^{2\pi i(k,\xi)}$, если

$$M^{-1}\Big(k + \operatorname{Conv}\Omega\Big) \;\subset\; \operatorname{Conv}\Omega$$

для любого $k \in \mathbb{Z}^d$ такого, что $h_k \neq 0$ (напомним, что Conv — выпуклая оболочка множества). В случае $d = 1$ в качестве Ω подходит, например, множество всех целых точек отрезка $\left[\dfrac{N_1}{M-1}, \dfrac{N_1}{M-1}\right]$. Так, в случае $M = 2$, $N_1 = 0$, $N_2 = N$ имеем $\Omega = \{0, 1, \ldots, N\}$. В многомерном случае нахождение Ω представляет более сложную задачу. В качестве такого множества всегда можно взять множество целых точек носителя масштабирующей функции. Сложность, однако, в том, что носитель нам изначально неизвестен. Поэтому обычно поступают иначе: строят выпуклое ограниченое множество $D \subset \mathbb{R}^d$, обладающее свойством $M^{-1}(D + k) \subset D$, и полагают $\Omega = D \bigcap \mathbb{Z}^d$. В качестве D подходит, например, шар достаточно большого радиуса в норме, в которой оператор M^{-1} — сжимающий. Такая норма существует, поскольку все собственные значения этого оператора по модулю меньше 1 (приложение A.5, лемма A.5.1). Фактически, мы строили такое множество D при доказательстве теоремы 2.4.4. Если M имеет базис из собственых векторов, то в качестве D можно взять достаточно большой параллеелпипед, натянутый на эти векторы. Для диагональных матриц M подходит куб. Один из возможных алгоритмов построения D изложен в [87]. На практике, однако, в большинстве случаев проще угадать подходяшее множество D.

Итак, пусть у нас имеется инвариантное множество Ω. Пусть $s_0, \ldots$ $\ldots, s_{m-1}$ — все целые точки, принадлежащие образу MI_d полуоткрытого куба

$$I_d = \big\{(x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d,\ x_i \in [0, 1),\, i = 1, \ldots, d\big\}.$$

Напомним, что таких точек будет ровно $m = |\det M|$. Теперь сформируем m матриц $T_0, \ldots, T_{m-1}$ размера $N \times N$, где N — количество элементов в Ω. Матрицы задаются поэлементно с помощью следующей формулы:

$$\big(T_k\big)_{ij} = \sqrt{m}\; h_{Mi-j+s_k}, \quad i, j \in \Omega \qquad k = 0, \ldots, m-1. \tag{2.48}$$

Соответствующие операторы T_k действуют в $\mathbb{R}^N$. Если сдвиги масштабирующей функции обладают свойством базиса Рисса, то все эти операторы имеют общее собственное подпространство

$$W = \left\{(x_1, \ldots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N, \ \sum x_i = 0\right\}$$

(доказательство этого факта можно найти, например, в [86]). Положим $\widetilde{T}_k = T_k|_W$. Наконец, введем на пространстве самосопряженных операторов X в $\mathbb{R}^{N-1}$ следующий оператор:

$$\mathcal{A}_2 X = \frac{1}{m}\left(\widetilde{T}_0 X \widetilde{T}_0^* + \ldots + \widetilde{T}_{m-1} X \widetilde{T}_{m-1}^*\right).$$

Этот оператор действует в $\mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}$.

Теорема 2.5.13. *Пусть масштабирующее уравнение с полиномиальной маской удовлетворяет* (2.27). *Тогда его решение принадлежит* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *в том и только том случае, когда все собственные значения оператора* $\mathcal{A}_2$ *по модулю меньше* 1.

Комментарии и пояснения к этой теореме, а также идея доказательства содержатся в приложении А.6.

Второй способ проверки принадлежности масштабирующей функции пространству $L_2(\mathbb{R}^d)$ использует оператор W_φ, определяемый равенством (2.43). Возьмем теперь инвариантное множество Ω, соотвествующее маске $|m_0(\xi)|^2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k e^{2\pi i(k,\xi)}$, пусть также L — количество элементов в этом множестве. Рассмотрим ограничение оператора W_φ на L-мерное пространство $\ell_2(\Omega)$. Матрица этого оператора задается равенством

$$\Big(W_\varphi\Big)_{ij} = m \cdot a_{Mi-j}, \qquad i, j \in \Omega \tag{2.49}$$

Теорема 2.5.14. *Пусть дано масштабирующее уравнение с полиномиальной маской, удовлетворяющей* (2.27). *Тогда его решение принадлежит* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *в том и только том случае, когда оператор* (2.49) *имеет простое собственное значение* 1, *а все остальные собственные значения по модулю меньше* 1.

Доказательство см. [88].

Таким образом, оба критерия сводят вопрос о принадлежности масштабирующей функции к пространству L_2 к проверке того, что спектральный радиус ρ некоторого конечномерного оператора строго меньше 1. В большинстве случаев удобнее использовать теорему 2.5.14, поскольку размерность матрицы W_φ, как правило, меньше, чем размерность $\mathcal{A}_2$. Однако в ряде случаев полезны оба критерия. Так, например, в одномерном случае величина $-\frac{1}{2}\log_2 \rho(\mathcal{A}_2)$ равна показателю Гёльдера функции φ в пространстве L_2 (см., например, обзорную статью [116]), а величина $-\frac{1}{2}\log_2 \rho(W_\varphi)$ равна показателю гладкости по Соболеву (см. [172]).

2.6. Построение всплеск-функций

В этом параграфе мы займемся изучением биортогональных систем всплесков, соответствующих паре масштабирующих функций с биортогональными целыми сдвигами, порождающих пару КМА. Как уже было показано в параграфе 2.1, принципиальным отличием многомерного случая от одномерного является наличие не одной, а нескольких всплеск-функций. Нахождение всплеск-функций в несепарабельном КМА оказалось существенно более сложной задачей.

Определение 2.6.1. Пусть даны два КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Будем говорить, что функции $\psi^{(\nu)}\in V_1$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)}\in\widetilde{V}_1$, $\nu=1,\ldots,m-1$, образуют набор всплеск-функций, если $\psi^{(\nu)}\perp\widetilde{V}_0$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)}\perp V_0$ для всех $\nu=1,\ldots,m-1$, и

$$\langle\psi^{(\nu)}(\cdot+k),\widetilde{\psi}^{(\varkappa)}(\cdot+l)\rangle=\delta_{\nu\varkappa}\delta_{kl}$$

для всех $k,l\in\mathbb{Z}^d$ и всех $\nu,\varkappa=1,\ldots,m-1$.

Теорема 2.6.2. *Пусть КМА: $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ соответственно порождены масштабирующими функциями $\varphi,\widetilde{\varphi}$ с масками $m_0,\widetilde{m}_0$, и системы $\{\varphi(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ являются биортонормированными. Если для матриц*

$$\mathcal{M}:=\{m_\nu(\xi+M^{*-1}s_k)\}_{\nu,k=0}^{m-1},\quad \widetilde{\mathcal{M}}:=\{\widetilde{m}_\nu(\xi+M^{*-1}s_k)\}_{\nu,k=0}^{m-1},$$

где $m_\nu,\widetilde{m}_\nu\in L_2(\mathbb{T}^d)$, $\nu=1,\ldots,m-1$, $\{s_0,\ldots,s_{m-1}\}$ — произвольный набор цифр матрицы M^*, при почти всех $\xi\in\mathbb{R}^d$ выполнено равенство

$$\mathcal{M}\widetilde{\mathcal{M}}^*=E_m, \tag{2.50}$$

то функции $\psi^{(\nu)},\widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu=1,\ldots,m-1$, определяемые равенствами

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}(\xi)=m_\nu(M^{*-1}\xi)\widehat{\varphi}(M^{*-1}\xi),\widehat{\widetilde{\psi}^{(\nu)}}(\xi)=\widetilde{m}_\nu(M^{*-1}\xi)\widehat{\widetilde{\varphi}}(M^{*-1}\xi), \tag{2.51}$$

образуют набор всплеск-функций.

Доказательство. В первую очередь заметим, что из леммы 2.3.3 следуют включения $\psi^{(\nu)}\in V_1$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)}\in\widetilde{V}_1$, $\nu=1,\ldots,m-1$.

Для удобства переобозначим функции $\varphi,\widehat{\varphi}$ соответственно через $\psi^{(0)},\widetilde{\psi}^{(0)}$. Нам надо проверить равенства

$$\langle\psi^{(\nu)}(\cdot+k),\widetilde{\psi}^{(\varkappa)}(\cdot+l)\rangle=\delta_{\nu\varkappa}\delta_{kl} \tag{2.52}$$

для всех $k,l\in\mathbb{Z}^d$ и всех $\nu,\varkappa=0,\ldots,m-1$ (оно уже выполнено при $\nu=\varkappa=0$ по условию теоремы). Пусть $\nu\ne 0$. Если $\nu=\varkappa$, то в силу предложения 2.5.1 справедливость (2.52) равносильна выполнению равенства

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^d}\widehat{\psi}^{(\nu)}(M^*\xi+p)\overline{\widehat{\widetilde{\psi}^{(\varkappa)}}(M^*\xi+p)}=\delta_{\nu\varkappa} \tag{2.53}$$

при почти всех ξ. С помощью рассуждений, аналогичных доказательству предложения 1.1.12, нетрудно установить, что соотношения (2.52) и (2.53) эквивалентны и при $\nu \ne \varkappa$.

Используя (2.51) и масштабирующие уравнения для функций $\varphi, \widetilde{\varphi}$, имеем

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\psi}^{(\nu)}(M^*\xi+p)\overline{\widehat{\widetilde{\psi}^{(\varkappa)}}(M^*\xi+p)} =$$
$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} m_\nu(\xi+M^{*-1}p)\widehat{\varphi}(\xi+M^{*-1}p)\overline{\widetilde{m_\varkappa}(\xi+M^{*-1}p)\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+M^{*-1}p)}. \tag{2.54}$$

Используя лемму 2.2.2, заменим индекс суммирования $p = M^*k+s$, $k\in\mathbb{Z}^d$, $s\in D(M^*)$, в правой части (2.54), что приведет ее к виду

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in D(M^*)} m_\nu(\xi+\theta_{ks})\overline{\widetilde{m_\varkappa}(\xi+\theta_{ks})}\widehat{\varphi}(\xi+\theta_{ks})\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+\theta_{ks})},$$

где $\theta_{ks} = M^{*-1}s+k$. Изменив порядок суммирования, используя 1-периодичность функций $m_\nu, \widetilde{m_\varkappa}$ по каждой переменной и (2.30), получим

$$\sum_{s\in D(M^*)} m_\nu(\xi+\theta_{\mathbf{0}s})\overline{\widetilde{m_\varkappa}(\xi+\theta_{\mathbf{0}s})}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{\varphi}(\xi+\theta_{ks})\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+\theta_{ks})} =$$
$$= \sum_{s\in D(M^*)} m_\nu(\xi+M^{*-1}s)\overline{\widetilde{m_\varkappa}(\xi+M^{*-1}s)}.$$

Осталось заметить, что из (2.50) следует, что

$$\sum_{s\in D(M^*)} m_\nu(\xi+M^{*-1}s)\overline{\widetilde{m_\varkappa}(\xi+M^{*-1}s)} = \delta_{\nu\varkappa}$$

при почти всех $\xi\in\mathbb{R}^d$. ◊

Теорема 2.6.2 не дала ответа на вопрос о существовании набора всплеск-функций, а лишь свела задачу к нахождению периодических функций $m_\nu, \widetilde{m}_\nu$, $\nu = 1,\ldots,m-1$, для которых выполнено равенство (2.50). Подобрать такие функции довольно сложно. Несколько упрощает дело следующее утверждение.

Л е м м а 2.6.3. *Пусть* $m_\nu, \widetilde{m}_\varkappa \in L_2(\mathbb{T}^d)$,

$$m_\nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h_k e^{2\pi i(k,\xi)}, \quad \widetilde{m}_\varkappa(\xi) = \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widetilde{h}_k e^{2\pi i(k,\xi)},$$

$D(M) = \{s_0,\ldots,s_{m-1}\}$, $D(M^*)$ — *множества цифр соответственно матриц* M, M^*,

$$\mu_{\nu k}(\xi) := \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} h_{Ml+s_k}e^{2\pi i(l,\xi)}, \widetilde{\mu}_{\varkappa k}(\xi) := \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\widetilde{h}_{Ml+s_k}e^{2\pi i(l,\xi)}.$$

Тогда

$$\sum_{s\in D(M^*)} m_\nu(\xi + M^{*-1}s)\overline{\widetilde{m_\varkappa}(\xi + M^{*-1}s)} = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_{\nu k}(M^*\xi)\overline{\widetilde{\mu}_{\varkappa k}(M^*\xi)}. \tag{2.55}$$

Доказательство. Ввиду леммы 2.2.2 для любого $s \in D(M^*)$ имеем

$$m_\nu(\xi + M^{*-1}s) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} h_{Ml+s_k} e^{2\pi i(Ml+s_k, \xi+M^{*-1}s)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi i(M^{-1}s_k, s)} e^{2\pi i(s_k,\xi)} \mu_{\nu k}(M^*\xi). \tag{2.56}$$

Аналогично можно представить функции $\widetilde{m}_\nu(\xi + M^{*-1}s)$. Из этих равенств и следствия 2.2.7 получаем требуемое соотношение. $\Diamond$

Из доказанной леммы следует, что если периодические функции $m_\nu, \widetilde{m}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, из $L_2(\mathbb{T}^d)$ удовлетворяют (2.50), то существуют такие функции $\mu_{\nu k}, \widetilde{\mu}_{\nu k} \in L_2(\mathbb{T}^d)$, что матрицы

$$\{\mu_{\nu k}(\xi)\}_{\nu,k=0}^{m-1}, \quad \{\overline{\widetilde{\mu}_{k\nu}(\xi)}\}_{\nu,k=0}^{m-1} \tag{2.57}$$

являются взаимно обратными при почти всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Эти матрицы называют *полифазными*. Из доказательства леммы 2.6.3 ясно, что верно и обратное: если для функций $\mu_{\nu k}, \widetilde{\mu}_{\nu k} \in L_2(\mathbb{T}^d)$ матрицы (2.57) взаимно обратные, и для $\nu = 0, \ldots, m-1$

$$m_\nu(\xi) := \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi i(s_k,\xi)} \mu_{\nu k}(M^*\xi),$$
$$\widetilde{m}_\nu(\xi) := \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi i(s_k,\xi)} \widetilde{\mu}_{\nu k}(M^*\xi),$$

то выполнено (2.50). Таким образом, чтобы построить набор всплеск-функций, нужно уметь продолжить две матрицы, элементами которых являются функции из $L_2(\mathbb{T}^d)$, до взаимно обратных по заданным соответственно их первой строке $\{\mu_{0k}\}_{k=0}^{m-1}$ и первому столбцу $\{\overline{\widetilde{\mu}_{0k}}\}_{k=0}^{m-1}$. Отметим сразу, что задача имеет тривиальное решение в случае $m = 2$:

$$\mu_{10} = -\overline{\widetilde{\mu}_{01}}, \quad \mu_{11} = \overline{\widetilde{\mu}_{00}}, \quad \widetilde{\mu}_{10} = -\overline{\mu_{01}}, \quad \widetilde{\mu}_{11} = \overline{\mu_{00}}.$$

Далее мы будем обсуждать возможность такого продолжения для произвольного m.

Сначала рассмотрим ситуацию (соответствующую построению ортогональной системы всплесков), когда даны функции $\mu_{0k} = \widetilde{\mu}_{0k}$ из $L_2(\mathbb{T}^d)$, для которых

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\mu_{0k}(\xi)|^2 = 1 \quad \text{п. в.} \tag{2.58}$$

Нам нужно достроить эту строку до унитарной матрицы. Такое построение можно осуществить с помощью преобразования Холсхолдера. Положим

$$\mu_{k0} = \overline{\mu_{0k}} \frac{1-\mu_{00}}{1-\overline{\mu_{00}}}, \qquad \mu_{kl} = \delta_{kl} - \frac{\mu_{0l}\overline{\mu_{0k}}}{1-\overline{\mu_{00}}}$$

для $k, l = 1, \ldots, m-1$. Унитарность проверяется непосредственным счетом. Покажем, что построенные функции принадлежат пространству $L_2(\mathbb{T}^d)$. Действительно, из (2.58) следует, что

$$|\mu_{0k}| \leqslant \sqrt{1 - |\mu_{00}|^2}$$

для всех $k = 1, \ldots, m-1$, что влечет $|\mu_{kl}| \leqslant 2 + |\mu_{00}|$.

Теперь рассмотрим биортогональный случай. Масштабирующие функции φ, $\widetilde{\varphi}$ определяют набор функций $\mu_{0k}, \widetilde{\mu}_{0k} \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $k = 0, \ldots$ $\ldots, m-1$. По предложению 2.5.2 и лемме 2.6.3 биортонормированность целых сдвигов функций φ, $\widetilde{\varphi}$ влечет равенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu_{0k}(\xi)\overline{\widetilde{\mu}_{0k}(\xi)} = 1 \quad \text{п. в.} \tag{2.59}$$

Кроме того, поскольку целые сдвиги функции φ образуют систему Рисса, с помощью предложения 2.1.1 и рассуждений, аналогичных доказательству следствия 1.2.5, нетрудно установить, что сумма

$$\sum_{s \in D(M^*)} |m_0(\xi + M^{*-1}s)|^2$$

почти везде отделена от нуля, что вместе с леммой 2.6.3 влечет соотношение

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\mu_{0k}(\xi)|^2 \geqslant C > 0 \quad \text{п. в.}$$

Отсюда следует, что функции

$$\mu'_{0k}(\xi) := \frac{\mu_{0k}(\xi)}{\left(\sum\limits_{l=0}^{m-1} |\mu_{0l}(\xi)|^2\right)^{1/2}}$$

принадлежат пространству $L_2(\mathbb{T}^d)$. Достроим строку $\mu'_{00}, \ldots, \mu'_{0(m-1)}$ до унитарной матрицы с элементами из $L_2(\mathbb{T}^d)$ (например, с помощью описанного выше преобразования Холсхолдера). Пусть $\overline{\widetilde{Q}}_1, \ldots, \overline{\widetilde{Q}}_{m-1}$ — строки этой матрицы, начиная со второй, и положим

$$Q_0 = (\mu_{00}, \ldots, \mu_{0(m-1)}), \quad \widetilde{Q}_0 = (\overline{\widetilde{\mu}}_{00}, \ldots, \overline{\widetilde{\mu}}_{0(m-1)}).$$

Из унитарности матрицы и соотношения (2.59) мы имеем

$$\overline{\widetilde{Q}}_n \widetilde{Q}_k^T = \delta_{nk}, \quad Q_0 \widetilde{Q}_l^T = \delta_{0l} \quad \text{п. в.}$$

для всех $n, k = 1, \ldots, m-1$, $l = 0, \ldots, m-1$. Положив

$$Q_k = \overline{\widetilde{Q}}_k - \overline{\widetilde{Q}}_k \widetilde{Q}_0^T Q_0, \quad k = 1, \ldots, m-1,$$

получим

$$Q_k \widetilde{Q}_l^T = \delta_{kl} \quad \text{п. в.}$$

для всех $k, l = 0, \ldots, m-1$. Таким образом, по заданным первым строкам $\{\mu_{0k}\}_{k=0}^{m-1}$, $\{\overline{\widetilde{\mu}}_{0k}\}_{k=0}^{m-1}$ найдены матрицы $Q, \widetilde{Q}$, для которых

$$Q\widetilde{Q}^T = E_m \quad \text{п. в.}$$

Резюмируя приведенные рассуждения и теорему 2.6.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.6.4. *Пусть КМА* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *соответственно порождены масштабирующими функциями* $\varphi, \widetilde{\varphi}$ *с масками* $m_0, \widetilde{m}_0$. *Если системы* $\{\varphi(\,\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ *являются биортонормированными, то существуют* $m_\nu, \widetilde{m}_\nu \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, *такие что функции* $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, *определяемые равенствами* (2.51), *образуют набор всплеск-функций.*

Функции $m_\nu, \widetilde{m}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, мы будем называть *масками соответствующих всплеск-функций*.

Если маски масштабирующих функций обладали гладкостью, то маски всплеск-функций, построенные по описанному алгоритму, вообше говоря не будут гладкими (и даже непрерывными). Покажем, что в случае $d < 2m-1$ можно обеспечить сохранение гладкости. Предположим, что функции $\mu_{0k}, \widetilde{\mu}_{0k}$ имеют непрерывные частные производные порядка r, $r \geqslant 1$. Первый шаг конструкции — построение функций μ'_{0k}, очевидно, сохраняет гладкость. Гладкое отображение $(\mu'_{00}, \ldots, \mu'_{0(m-1)})$ действует из d-мерного тора $\mathbb{T}^d$ в единичную сферу S в комплексном m-мерном пространстве $\mathbf{C^m}$. Покроем $\mathbb{T}^d$ конечным числом множеств, диаметры которых не превосходят некоторого $\varepsilon > 0$, тогда диаметры образов этих множеств не превзойдут $C\varepsilon$, где C — постоянная, зависящая только от функций μ'_{0k}. Поскольку размерность $\mathbb{T}^d$ меньше размерности S, ясно, что при достаточно малом ε объединение образов этих множеств не покроет S, и, значит, найдется точка $\alpha \in S$, которая вместе с некоторой своей окрестностью не попадет в образ тора. Пусть

U — унитарная числовая матрица, преобразующая вектор α в вектор $(1, 0, \ldots, 0)^T$. Положим

$$(\mu''_{00}, \ldots, \mu''_{0(m-1)}) = (\mu'_{00}, \ldots, \mu'_{0(m-1)})U,$$
$$(\widetilde{\mu}''_{00}, \ldots, \widetilde{\mu}''_{0(m-1)}) = (\widetilde{\mu}_{00}, \ldots, \widetilde{\mu}_{0(m-1)})U.$$

Обе новые строки сохранили гладкость порядка r, строку $\mu''_{00}, \ldots$ $\ldots, \mu''_{0(m-1)}$ можно достроить до унитарной матрицы с помощью преобразования Холсхолдера, которое также сохранит гладкость, так как значения функции μ''_{00} отделены от единицы. Последующие шаги конструкции основаны на линейных преобразованиях. Таким образом мы можем построить взаимно обратные матрицы $\{\mu''_{\nu k}(\xi)\}_{\nu,k=0}^{m-1}$, $\{\overline{\widetilde{\mu}''_{k\nu}(\xi)}\}_{\nu,k=0}^{m-1}$, состоящие из функций с непрерывными производными порядка r. Для построения требуемых матриц осталось положить

$$(\mu_{\nu 0}, \ldots, \mu_{\nu(m-1)}) = (\mu''_{\nu 0}, \ldots, \mu''_{\nu(m-1)})\overline{U^T},$$
$$(\widetilde{\mu}_{\nu 0}, \ldots, \widetilde{\mu}_{\nu(m-1)}) = (\widetilde{\mu}''_{\nu 0}, \ldots, \widetilde{\mu}''_{\nu(m-1)})\overline{U^T}$$

для $\nu = 1, \ldots, m-1$.

Особый интерес для инженерных приложений представляют наборы всплеск-функций с полиномиальными масками. Такие всплеск-функции наследуют финитность от порождающих их масштабирующих функций. Действительно, если две масштабирующие функции $\varphi, \widetilde{\varphi}$ с биортогональными целыми сдвигами финитны, то, очевидно, их маски являются тригонометрическими полиномами. Пусть нам удалось найти соответствующий набор всплеск-функций с полиномиальными масками. Применив преобразование Фурье к равенствам (2.51), представим $\psi^{(\nu)}$ и $\widetilde{\psi}^{(\nu)}$ в виде конечных линейных комбинаций соответственно функций $\widetilde{\varphi}_{1k}$ и φ_{1k}, что влечет их финитность. Обсудим вопрос существования всплесков с компактным носителем.

Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции с полиномиальными масками $m_0, \widetilde{m}_0$. Тогда соответствующие функции $\mu_{0k}, \widetilde{\mu}_{0k}$ также являются тригонометрическими полиномами. Наша задача состоит в том, чтобы по заданным первым строкам $\{\mu_{0k}\}_{k=0}^{m-1}$, $\{\overline{\widetilde{\mu}}_{0k}\}_{k=0}^{m-1}$ найти матрицы $Q, \widetilde{Q}$, элементы которых являются тригонометрическими полиномами, такие что $Q\widetilde{Q}^T = E_m$. Это можно сделать по следующей схеме. Положим

$$Q_0 = (\mu_{00}, \ldots, \mu_{0(m-1)}), \quad \widetilde{Q}_0 = (\overline{\widetilde{\mu}}_{00}, \ldots, \overline{\widetilde{\mu}}_{0(m-1)}).$$

Предположим, что нам удалось достроить Q_0 до *унимодулярной* матрицы, т. е. до квадратной матрицы, у которой элементами являются тригонометрические полиномы, а модуль определителя тождественно равен 1 (именно эта часть конструкции является ключевой и наиболее трудной). Обозначим строки построенной матрицы, начиная со второй, через $Q'_1, \ldots, Q'_{m-1}$. Ясно, что такая матрица имеет обратную, причем элементы обратной матрицы будут также тригонометрическими полиномами. Обозначим столбцы обратной матрицы, начиная со второго, через $\widetilde{Q}_1^T, \ldots, \widetilde{Q}_{m-1}^T$. Положим

$$Q_k = Q_k' - Q_k' \widetilde{Q}_0^T Q_0, \quad k = 1, \ldots, m-1.$$

Нетрудно видеть, что

$$Q_k \widetilde{Q}_l^T = \delta_{kl}$$

для всех $k, l = 0, \ldots, m-1$, т. е. найдены требуемые матрицы $Q, \widetilde{Q}$.

Вернемся к первому шагу конструкции. Переформулируем задачу на алгебраическом языке. Положив $z = (z_1, \ldots, z_d)$, $z_k = e^{2\pi i \xi_k}$, будем рассматривать вместо тригонометрических полиномов соответствующие лорановские полиномы, используя для них те же обозначения. Нам дана унимодулярная строка лорановских полиномов, т. е. строка Q_0, для которой существует строка $\widetilde{Q}_0$, такая что $Q_0 \widetilde{Q}_0^T = 1$ при всех $z \neq \mathbf{0}$. Требуется достроить строку Q_0 до унимодулярной матрицы (т. е. до квадратной матрицы, элементами которой являются лорановские полиномы, с определителем по модулю, равным 1 при всех $z \neq \mathbf{0}$). Вопросы такого рода давно интересовали алгебраистов. В частности, долго искали решение следующей задачи, получившей название проблемы Серра: всегда ли можно построить унимодулярную матрицу, элементами которой являются алгебраические полиномы, по ее первой унимодулярной строке. Положительное решение проблемы было найдено в 1976 г. независимо Квилленом и Суслиным (см. [99]). Более того, в 1977 г. Суслин [100] распространил результат на более широкий класс колец, в частности, на кольцо лорановских полиномов. Сопоставив результат Суслина с описонным выше процессом ортогонализации, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.6.5. *Пусть КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ соответственно порождены масштабирующими функциями $\varphi, \widetilde{\varphi}$ с полиномиальными масками $m_0, \widetilde{m}_0$. Если системы $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, $\{\widetilde{\varphi}(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ являются биортонормированными, то существуют тригонометрические полиномы $m_\nu, \widetilde{m}_\nu \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, такие что функции $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, определяемые равенствами* (2.51), *образуют набор всплеск-функций.*

Результат Суслина, на который опирается доказательство теоремы 2.6.5, носит теоретический характер. Парк и Вудберг [101] дали конструктивное доказательство этого результаты, формально дающее алгоритм для достраивания строки до унимодулярной матрицы. Этот алгоритм опирается на построение базисов Гребнера, имеющее достаточно высокую сложность, и фактически непригоден для практического использования за исключением редких случаев, когда степени полиномов оказались достаточно маленькими.

В заключение приведем два результата, дающих отрицательный ответ на вопрос о возможности расширения матриц.

Теорема 2.6.6. *Если $m > 2$, то не существует функций $f_{\nu k}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, $k = 0, \ldots, m-1$, непрерывных на единичной сфере S в комплексном m-мерном пространстве $\mathbf{C^m}$, таких что матрица $\{f_{\nu k}\}_{\nu,k=0}^{m-1}$, где $f_{0k}(z_0, \ldots, z_{m-1}) = z_k$, обратима для всех $z = (z_0, \ldots, z_{m-1}) \in S$.*

Эта теорема следует из результатов, приведенных в [93, с. 24], см. также [92].

Пакер и Риффел [102] доказали, что для матрицы $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ E_4 & 0 \end{pmatrix}$ размера 5×5 существует гладкая маска m_0, у которой строка ее полифазных функций $(\mu_{01}, \mu_{02}, \mu_{03})$ удовлетворяет равенству (2.58), но не может быть продолжена до унитарной матрицы с непрерывными элементами.

Вопрос о возможности достроить любую подходящую строку до унитарной матрицы, элементами которой являются лорановские полиномы, остается окрытым.

Несмотря на значительные трудности в реализации метода достраивания строки до унимодулярной матицы, описанная схема построения биортогональных всплесков с компактным носителем полезна, хотя бы потому, что в конкретных ситуациях иногда удается просто угадать унимодулярную матрицу (и безусловно на это больше шансов, чем угадать две взаимно обратные матрицы).

Пример 2.6.7. Пусть $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Возьмем в качестве масштабирующей функции бокс-сплайн B_3 (см. пример 2.3.9), заданный равенством

$$\widehat{B}_3(\xi) = 2^2 \prod_{k=1}^{3} \frac{1 - e^{2\pi i (a_k, \xi)}}{2\pi i (a_k, \xi)},$$

где $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (0, 1)$, $a_3 = (1, 1)$. Его маской является полином

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{3} \left(1 + e^{2\pi i (a_k, \xi)}\right).$$

Возьмем в качестве множества цифр векторы

$$s_0 = (0, 0), \quad s_1 = (0, 1), \quad s_2 = (1, 0), \quad s_3 = (1, 1)$$

и представим маску в виде

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2}\Big(e^{2\pi i (s_0, \xi)} \left(1 + e^{4\pi i (\xi_1 + \xi_2)}\right) + e^{2\pi i (s_1, \xi)} \left(1 + e^{4\pi i \xi_1}\right) + \\ + e^{2\pi i (s_2, \xi)} \left(1 + e^{4\pi i \xi_2}\right) + 2 e^{2\pi i (s_3, \xi)}\Big).$$

Отсюда, положив $z_1 = e^{2\pi i \xi_1}$, $z_2 = e^{2\pi i \xi_2}$, находим полифазные функции

$$\mu_{00}(\xi) = \frac{1 + z_1 z_2}{2}, \quad \mu_{01}(\xi) = \frac{1 + z_1}{2}, \quad \mu_{02}(\xi) = \frac{1 + z_2}{2}, \quad \mu_{03}(\xi) = 1.$$

Эту строку нетрудно достроить до диагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + z_1 z_2}{2} & \frac{1 + z_1}{2} & \frac{1 + z_2}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0, \end{pmatrix}$$

определитель которой равен 1. ◊

Опишем общую схему построения унимодулярной матрицы по заданной унимодулярной строке при $d = 1$, основанную на алгоритме Евклида. Пусть дана строка лорановских полиномов Q_0, для которой существует строка $\widetilde{Q}_0$, такая что $Q_0\widetilde{Q}_0^T = 1$. Домножив эти строки соответственно на z^N, z^M, где N, M — подходящие целые числа, получим строки алгебраических многочленов $P_0 = (p_1, \ldots, p_m)$, $\widetilde{P}_0 = (\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_m)$, причем $P_0\widetilde{P}_0^T = z^{N+M}$. Из элементов $p_1, \ldots, p_m$ выберем ненулевой многочлен наименьшей степени. Будем считать, что таковым оказался p_1. Если $p_2, \ldots, p_m$ — тождественные нули, то $p_1\widetilde{p}_1 = z^{N+M}$, значит, p_1 и $\widetilde{p}_1$ — одночлены. В этом случае задача тривиальна. В противном случае найдется многочлен p_k, степень которого не ниже степени p_1. Поделив p_k на p_1 с остатком, получим $p_k = qp_1 + r$, $\deg r < \deg p_1$. Заменим p_k на r в строке P_0 и обозначим новую строку через P_0'. Нетрудно видеть, что $P_0' = P_0E$, где E — элементарная матрица, т. е. квадратная матрица, у которой на диагонали стоят единицы и есть еще только один ненулевой элемент (в данном случае он равен $-q$). Новая строка P_0' опять обладает свойством: для нее существует строка $\widetilde{P}_0' := \widetilde{P}_0(E^{-1})^T$, такая что $P_0'\widetilde{P}_0' = z^{N+M}$. Продолжая алгоритм Евклида

$$p_1 = n_1 r + r_1, \quad r = n_2 r_1 + r_2, \ldots, \quad r_L = n_{L+2} r_{L+1},$$

мы придем к строке полиномов, у которой одна из координат — тождественный нуль. Опять выберем ненулевой элемент строки наименьшей степени и повторим рассуждения. Будем продолжать процесс до тех пор, пока не придем к строке полиномов P_0'' с единственной ненулевой компонентой p_n, причем $P_0'' = P_0X$, где X — произведение элементарных матриц, и существует строка $\widetilde{P}_0''$ такая, что $P_0''(\widetilde{P}_0'')^T = z^{N+M}$. Отсюда и из равенства $P_0''(\widetilde{P}_0'')^T = p_n\widetilde{p}_n$ следует, что p_n — одночлен и поэтому строку P_0'' нетрудно продолжить до унимодулярной матрицы P, а решением исходной задачи будет матрица $Q := ZPX^{-1}$, где Z — диагональная матрица с элементами $z^{-N}, z^N, 1, \ldots, 1$ на диагонали. $\Diamond$

Описанная конструкция не работает при $d > 1$, так как в многомерном случае для полиномов нет алгоритма Евклида.

Теорема 2.6.5 не дает ответа на вопрос о существовании ортогональных систем всплесков с компактным носителем, в случае $\mu_{0k} = \widetilde{\mu}_{0k}$, $k = 0, \ldots, m-1$. Покажем, как можно построить такую систему при $d = 1$.

Пусть дана строка лорановских полиномов Q_0, для которой

$$Q_0 Q_0^* = 1 \tag{2.60}$$

при всех $z \neq \mathbf{0}$. Нам надо достроить эту строку до унитарной матрицы. Запишем Q_0 в виде

$$Q_0 = \sum_{n=N}^{M} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{R}^m, \quad n = N, \ldots, M, \quad |a_N| \neq 0.$$

Вычислив коэффициент при старшей степени у полинома $Q_0Q_0^*$, из (2.60) получим

$$(a_N, a_M) = 0. \tag{2.61}$$

Пусть U — числовая унитарная матрица, такая что

$$a_N U = (|a_N|, 0, \ldots, 0).$$

Из (2.61) следует, что $(a_N U, a_M U) = 0$, значит, у вектора $a_M U$ первая координата нулевая. Пусть Z — диагональная матрица с элементами $1, z^{-1}, \ldots, z^{-1}$ на диагонали, тогда

$$Q_0 U Z = \sum_{n=N}^{M-1} a'_n z^n =: Q'_0,$$

причем матрица UZ унитарна, и поэтому новая строка Q'_0 опять удовлетворяет (2.60). Повторим те же рассуждения для строки Q'_0, и будем продолжать процесс до тех пор, пока не придем к строке

$$Q''_0 = a''_N z^N = Q_0 Y,$$

где Y — унитарная матрица, и для Q''_0 выполнено соотношение (2.60), которое равносильно равенству $|a''_N| = 1$. Пусть U' — числовая унитарная матрица, такая что $a''_N U' = (1, 0, \ldots, 0)$, а Z' — диагональная матрица с элементами $z^{-N}, \ldots, z^{-N}$ на диагонали, тогда

$$Q_0 Y U' Z' = Q''_0 U' Z' = (1, 0, \ldots, 0),$$

значит, $Q := (YU'Z')^{-1}$ является искомой унитарной матрицей. $\Diamond$

2.7. Базисы всплесков

В этом параграфе мы покажем, что для широкого класса КМА, удовлетворяющих условиям теоремы 2.6.4, построенные в этой теореме наборы всплеск-функций $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, порождают биортогональные базисы $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}, \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 2.7.1. *Пусть даны КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, — соответствующие наборы всплеск-функций. Тогда системы $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}, \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ являются биортонормированными.*

Доказательство. Из определений КМА и набора всплеск-функций следует, что при всех $j \in \mathbb{Z}$

$$\psi_{jk}^{(\nu)} \in V_{j+1}, \quad \widetilde{\psi}^{(\nu)} \in \widetilde{V}_{j+1}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^d$, $\nu = 1, \ldots, m-1$;

$$\langle f, \widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)} \rangle = 0, \quad \langle \widetilde{f}, \psi_{jk}^{(\nu)} \rangle = 0$$

для всех $f \in V_i$, $\widetilde{f} \in \widetilde{V}_i$ при $i \leqslant j$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $\nu = 1, \ldots, m-1$;

$$\langle \psi_{jk}^{(\nu)}, \widetilde{\psi}_{jl}^{(\varkappa)} \rangle = \delta_{kl}$$

для всех $k, l \in \mathbb{Z}^d$, $\nu, \varkappa = 1, \ldots, m-1$. Отсюда ясно, что системы $\{\psi_{jk}\}, \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ являются биортонормированными. $\Diamond$

Для изучения базисности систем $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}, \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ нам понадобятся вспомогательные результаты.

Лемма 2.7.2. *Пусть $f, \varphi, \widetilde{\varphi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{jk} \rangle} = m^j \int_{\mathbb{T}^d} h(\xi) \overline{\widetilde{h}(\xi)}\, d\xi,$$

где

$$h(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}\left(M^{*j}(\xi + l)\right) \overline{\widehat{\varphi}\,(\xi + l)}, \quad \widetilde{h}(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}\left(M^{*j}(\xi + l)\right) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\,(\xi + l)}.$$

Доказательство. В первую очередь заметим, что функции $h, \widetilde{h}$ являются 1-периодическими по каждой переменной, из неравенства Коши–Буняковского и рассуждений, аналогичных доказательству леммы 1.1.6, следует их суммируемость на $\mathbb{T}^d$ и наличие суммируемой мажоранты у частичных сумм рядов, определяющих $h, \widetilde{h}$. Используя теорему Планшереля и равенство Парсеваля, имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{jk} \rangle} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i (M^{*-j}k, \xi)} \overline{\widehat{\varphi}\left(M^{*-j}\xi\right)}\, d\xi \times$$

$$\times \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\omega) e^{-2\pi i (M^{*-j}k, \omega)} \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(M^{*-j}\omega\right)}\, d\omega} =$$

$$= m^j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(M^{*j}\xi) e^{-2\pi i (k, \xi)} \overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\, d\xi\, \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(M^{*j}\omega) e^{-2\pi i (k, \omega)} \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega)}\, d\omega} =$$

$$= m^j \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \widehat{f}(M^{*j}(\xi + l)) e^{-2\pi i (k, \xi)} \overline{\widehat{\varphi}(\xi + l)}\, d\xi \times$$

$$\times \overline{\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \widehat{f}(M^{*j}(\omega + m)) e^{-2\pi i (k, \omega)} \overline{\widehat{\varphi}(\omega + m)}\, d\omega} =$$

$$= m^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{T}^d} h(\xi) e^{-2\pi i k\xi}\, d\xi \overline{\int\limits_{\mathbb{T}^d} \widetilde{h}(\omega) e^{-2\pi i k\omega}\, d\omega} = m^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(k) \overline{\widehat{\widetilde{h}}(k)} =$$

$$= m^j \int\limits_{\mathbb{T}^d} h(\xi) \overline{\widetilde{h}(\xi)}\, d\xi.$$

Произведенное изменение порядка суммирования и интегрирования оправдано теоремой Лебега с учетом отмеченных выше свойств $h, \widetilde{h}$. $\Diamond$

Лемма 2.7.3. *Пусть преобразование Фурье функции $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям*

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leqslant C_0 |\xi|, \tag{2.62}$$

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leqslant C_1 (1 + |\xi|)^{-d/2-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \tag{2.63}$$

для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Тогда существует такое $C > 0$, что

$$\sum_{j,k} |\langle\, f, \psi_{jk} \,\rangle|^2 \leqslant C \|f\|^2 \tag{2.64}$$

для любой функции f из $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Пусть $\delta \in (0,1)$. Применяя лемму 2.7.2 и неравенство Коши, имеем

$$\sum_k |\langle\, f, \psi_{jk} \,\rangle|^2 = \int\limits_{M^{*j}[0,1)^d} \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\xi + M^{*j} l) \overline{\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi + l)} \right|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{M^{*j}[0,1)^d} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\xi + M^{*j} l)|^2 |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi + l)|^{2\delta} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi + k)|^{2(1-\delta)} \right) d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi + k)|^{2(1-\delta)} d\xi,$$

Из условия (2.63) следует, что функция $\sum\limits_k |\widehat{\psi}(\xi + k)|^{2(1-\delta)}$ существенно ограничена на $\mathbb{R}^d$ при $\delta < 2\varepsilon/(d + 2\varepsilon)$ (так как $2(1-\delta)(d/2 + \varepsilon) > d$, и ряд $\sum\limits_{k\neq\mathbf{0}} 1/|k|^n$ сходится при $n > d$). С другой стороны, для таких δ

мы имеем

$$\sum_{j,k} |\langle\, f, \psi_{jk}\ \rangle\,|^2 \leqslant C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \operatorname*{vraisup}_{\xi\in\mathbb{R}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta} \|\widehat{f}\|^2.$$

Положим $\alpha(\xi) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta}$. Поскольку $\alpha(\xi) = \alpha(M^{*n}\xi)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, существенный супремум по $\mathbb{R}^d$ можно заменить на существенный супремум по множеству

$$\Omega := M^{*k_0}[-1,1]^d \setminus (-1,1)^d,$$

где k_0 — наименьшее натуральное число, для которого имеет место включение $[-1,1]^d \subset M^{*k_0}[-1,1]^d$. Действительно, если $\xi \in (-1,1)^d$, $\xi \neq \mathbf{0}$, то вектор $M^{*k_0}\xi$ попадет либо в Ω, либо в $(-1,1)^d$, тогда рассмотрим векторы $M^{*2k_0}\xi$, $M^{*3k_0}\xi$ и т. д. При каком-нибудь номере n вектор $M^{*nk_0}\xi$ попадет в Ω. Значит,

$$\alpha(\xi) = \alpha(M^{*nk_0}\xi) < \operatorname*{vraisup}_{\xi\in\Omega} \alpha(\xi)$$

для почти всех $\xi \in (-1,1)^d$. Если же $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus M^{*k_0}[-1,1]^d$, то существует натуральное j_0, такое что $M^{*-j_0}\xi \in (-1,1)^d$ и мы свели к рассмотенному случаю. Таким образом,

$$\sum_{j,k} |\langle\, f, \psi_{jk}\ \rangle\,|^2 \leqslant C_2 \operatorname*{vraisup}_{\xi\in\Omega} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta} \|\widehat{f}\|^2.$$

Используя (2.62) и (2.6), для почти всех $\xi \in \Omega$ имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta} \leqslant C_0^{2\delta} \sum_{j=0}^{\infty} |M^{*-j}\xi|^{2\delta} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^{2\delta} \sup_{\Omega} |\xi|^{2\delta} \sum_{j=0}^{\infty} \|M^{*-j}\|^{2\delta} := C_3.$$

Теперь, применяя (2.63), оценим вторую часть суммы для $\xi \in \Omega$:

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta} \leqslant C_0^{2\delta} \sum_{j=1}^{\infty} (1 + |M^{*-j}\xi|)^{2\delta(-d/2-\varepsilon)}.$$

Поскольку $2\delta(-d/2-\varepsilon) = -\delta(d+2\varepsilon) \leqslant -\delta$,

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta} \leqslant C_0^{2\delta} \sum_{j=1}^{\infty} (1 + |M^{*j}\xi|)^{-\delta} \leqslant C_0^{2\delta} \sum_{j=1}^{\infty} |M^{*j}\xi|^{-\delta}.$$

Заметим, что $1/|M^{*j}\xi| \leqslant \|M^{*-j}\|/|\xi|$, поэтому, продолжая цепочку неравенств и используя (2.6), имеем

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} |\widehat{\psi}(M^{*-j}\xi)|^{2\delta} \leqslant C_0^{2\delta} \sup_{\Omega} \frac{1}{|\xi|^{\delta}} \sum_{j=1}^{\infty} \|M^{*-j}\|^{\delta} := C_4.$$

Собрав оценки вместе, получим (2.64). $\Diamond$

Далее мы будем обсуждать ситуацию, когда целые сдвиги порождающих масштабирующих функций $\varphi, \widetilde{\varphi}$, являются биортонормированными. Напомним, что в этом случае всплеск-функции определяются равенствами (2.51), а их маски $m_\nu, \widetilde{m}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, таковы, что для матриц

$$\mathcal{M} := \{m_\nu(\xi + M^{*-1}s_k)\}_{\nu,k=0}^{m-1}, \quad \widetilde{\mathcal{M}} := \{\widetilde{m}_\nu(\xi + M^{*-1}s_k)\}_{\nu,k=0}^{m-1},$$

где $\{s_0, \ldots, s_{m-1}\} = D(M^*)$, почти везде выполнено равенство (2.50).

Лемма 2.7.4. *Пусть КМА* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *соответственно порождены масштабирующими функциями* $\varphi, \widetilde{\varphi}$ *с масками* $m_0, \widetilde{m}_0$, *удовлетворяющими* (2.31), *функции* $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, *определены равенствами* (2.51) *с масками* $m_\nu, \widetilde{m}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, *удовлетворяющими* (2.50). *Если существуют такие постоянные* B, $\widetilde{B}$, *что*

$$\sum_{j,k,\nu} |\langle f, \psi_{jk}^{(\nu)} \rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \tag{2.65}$$

$$\sum_{j,k,\nu} |\langle f, \widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)} \rangle|^2 \leqslant \widetilde{B}\|f\|^2 \tag{2.66}$$

для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$\sum_{j,k,\nu} |\langle f, \psi_{jk}^{(\nu)} \rangle|^2 \geqslant \frac{1}{\widetilde{B}}\|f\|^2 \tag{2.67}$$

для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Сначала покажем, что для любой функции f из $L^2(\mathbb{R}^d)$ и для любых $j, j' \in \mathbb{Z}$, $j < j'$, имеет место равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{jk}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{jk}\rangle} + \sum_{i=j}^{j'} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi_{ik}^{(\nu)}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\psi}_{ik}^{(\nu)}\rangle} = \\ = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j',k}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{j',k}\rangle}. \tag{2.68}$$

Ясно, что достаточно проверить (2.68) для $j' = j + 1$. Используя леммы 2.2.2, 2.7.2 и масштабирующие уравнения для $\varphi, \widetilde{\varphi}$, принимая во внимание 1-периодичность функций $m_0, m_1, \ldots, m_{m-1}$, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{jk}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{jk}\rangle} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi_{jk}^{(\nu)}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\rangle} =$$

$$= m^j \sum_{\nu=0}^{m-1} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}\left(M^{*j}(\xi+k)\right) \overline{\widetilde{m}_\nu\left(M^{*-1}(\xi+k)\right) \widehat{\varphi}\left(M^{*-1}(\xi+k)\right)} \times$$

$$\times \overline{\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}\left(M^{*j}(\xi+l)\right) \overline{\widetilde{m}_\nu\left(M^{*-1}(\xi+l)\right) \widehat{\widetilde{\varphi}}\left(M^{*-1}(\xi+l)\right)}}\, d\xi =$$

$$= m^j \sum_{\nu=0}^{m-1} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Bigg(\sum_{s\in D(M^*)} \sigma(\xi+s) \overline{m_\nu\left(M^{*-1}(\xi+s)\right)} \Bigg) \times$$

$$\times \overline{\Bigg(\sum_{r\in D(M^*)} \widetilde{\sigma}(\xi+r) \overline{\widetilde{m}_\nu\left(M^{*-1}(\xi+r)\right)} \Bigg)}\, d\xi, \quad (2.69)$$

где

$$\sigma(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}\Big(M^{*(j+1)}\Big(M^{*-1}\xi + k\Big)\Big) \overline{\widehat{\varphi}\left(M^{*-1}\xi + k\right)},$$

$$\widetilde{\sigma}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}\Big(M^{*(j+1)}\Big(M^{*-1}\xi + k\Big)\Big) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(M^{*-1}\xi + k\right)}.$$

С помощью (2.50), правая часть (2.69) преобразуется к виду

$$m^j \int\limits_{\mathbb{T}^d} \sum_{s\in D(M^*)} \sigma(\xi+s) \overline{\widetilde{\sigma}(\xi+s)}\, d\xi.$$

Отсюда, используя (2.2.5), получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{jk}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{jk}\rangle} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi_{jk}^{(\nu)}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\rangle} =$$

$$= m^{j+1} \sum_{s\in D(M^*)} \int\limits_{M^{*-1}(\mathbb{T}^d+s)} \sigma(M^*\xi) \overline{\widetilde{\sigma}(M^*\xi)}\, d\xi =$$

$$= m^{j+1} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}\Big(M^{*(j+1)}(\xi+k)\Big) \overline{\widehat{\varphi}(\xi+k)} \times$$

$$\times \overline{\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}\Big(M^{*(j+1)}(\xi+l)\Big) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi+l)}}\, d\xi.$$

Для доказательства (2.68) при $j' = j + 1$ осталось опять воспользоваться леммой 2.7.2.

Из неравенства Коши и соотношения (2.13) следует, что

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{jk}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{jk}\rangle} = 0.$$

Переходя в (2.68) к пределу при $j \to -\infty$, для любого $j' \in \mathbb{Z}$ получаем равенство

$$\sum_{i=-\infty}^{j'} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi_{ik}^{(\nu)}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\psi}_{ik}^{(\nu)}\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j',k}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{j',k}\rangle}.$$

При $f \in V_{j'}$ это равенство примет вид

$$\sum_{i=-\infty}^{j'} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi_{ik}^{(\nu)}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\psi}_{ik}^{(\nu)}\rangle} = \|f\|^2.$$

Пусть теперь f — произвольная функция из $L_2(\mathbb{R}^d)$, $\|f\| \ne 0$. В силу аксиомы MR2 определения 2.3.1 для любого $\varepsilon > 0$ существуют $j' \in \mathbb{Z}$ и $g \in V_{j'}$, такие что $\|f - g\| < \varepsilon$. Используя (2.65), (2.66), неравенство Коши и неравенство треугольника, имеем

$$\sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, \psi_{ik}^{(\nu)}\rangle|^2} \geqslant \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{j'} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\langle g, \psi_{ik}^{(\nu)}\rangle|^2} - \sqrt{B}\,\varepsilon \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{\widetilde{B}}\,\|g\|} \left| \sum_{i=-\infty}^{j'} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle g, \psi_{ik}^{(\nu)}\rangle \overline{\langle g, \widetilde{\psi}_{ik}^{(\nu)}\rangle} \right| - \sqrt{B}\,\varepsilon =$$

$$= \frac{\|g\|}{\sqrt{\widetilde{B}}} - \sqrt{B}\,\varepsilon \geqslant \frac{1}{\sqrt{\widetilde{B}}}(\|f\| - \varepsilon) - \sqrt{B}\,\varepsilon.$$

Перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим (2.67). $\Diamond$

Теорема 2.7.5. *Пусть КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ соответственно порождены масштабирующими функциями $\varphi, \widetilde{\varphi}$ с масками $m_0, \widetilde{m}_0$, удовлетворяющими* (2.31), *для некоторых постоянных $C > 0$, $\varepsilon > 0$ и почти всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство*

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|, \quad |\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-d/2-\varepsilon}; \tag{2.70}$$

$\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля, функции $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, определены равенствами (2.51) *с непрерывно дифференцируемыми в некоторой окрестности нуля*

ограниченными масками $m_\nu, \widetilde{m}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, *удовлетворяющими* (2.50) *и такими, что*

$$m_\nu(\mathbf{0}) = \widetilde{m}_\nu(\mathbf{0}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m-1. \tag{2.71}$$

Тогда каждая из систем $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}, \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ *образует фрейм в* $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Если при этом системы* $\{\varphi(\,\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ *являются биортонормированными. то* $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, — *наборы всплеск-функций, и каждая из систем* $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}, \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ *образует базис Рисса в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Покажем, что функции ψ^ν, $\nu = 1, \ldots, m-1$, удовлетворяют условиям леммы 2.7.3. Действительно, из (2.70), (2.51) и ограниченности масок следует (2.63). Кроме того, функция $\widehat{\varphi}$ и маски $m_1, \ldots, m_{m-1}$ ограничены и имеют ограниченные частные производные в окрестности нуля. Поэтому из (2.71) и (2.51) получаем (2.62). Лемма 2.7.3 дает фреймовую оценку сверху для системы $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$ при каждом $\nu = 1, \ldots, m-1$, значит, выполнено соотношение (2.65), и аналогично (2.66), которые, по лемме 2.7.4, влекут (2.67). Таким образом, система $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$ является фреймом в $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Если $\varphi, \widetilde{\varphi}$ имеют биортонормированные целые сдвиги, то по теореме 2.7.1 системы $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}, \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ являются биортонормированными, и силу следствия 1.8.6 для их базисности Рисса достаточно, чтобы одна из систем была фреймом. ◊

Условие (2.70) в теореме 2.7.5 вообще говоря не является необходимым.

В условиях теоремы 2.7.5 накладывались некоторые требования на маски $m_1, \ldots, m_{m-1}$, $\widetilde{m}_1, \ldots, \widetilde{m}_{m-1}$. Теперь обсудим вопрос, как обеспечить эти требования.

Лемма 2.7.6. *Пусть функции* $m_0, \ldots, m_{m-1}$, $\widetilde{m}_0, \ldots, \widetilde{m}_{m-1} \in L_2(\mathbb{T}^d)$ *удовлетворяют условию* (2.50), $m_1, \ldots, m_{m-1}, \widetilde{m}_0$ *непрерывны в некоторой окрестности множества* $M^{*-1}\left(D(M^*)\right)$ *и*

$$\widetilde{m}_0(\mathbf{0}) = 1. \tag{2.72}$$

Для выполнения равенств

$$m_\nu(\mathbf{0}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m-1, \tag{2.73}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\widetilde{m}_0(M^{*-1}s) = 0, \qquad s \in D(M^*),\ s \neq \mathbf{0}. \tag{2.74}$$

Доказательство. По лемме 2.6.3 выполнение равенств (2.50) эквивалентно тому, что полифазные матрицы $\{\mu_{\nu k}(\xi)\}_{\nu,k=0}^{m-1}$

и $\{\overline{\widetilde{\mu}_{k\nu}(\xi)}\}_{\nu,k=0}^{m-1}$ являются взаимно обратными, что дает

$$\sum_{k=0}^{m-1} \overline{\widetilde{\mu}_{0k}(\xi)}\mu_{\nu k}(\xi) = 0 \quad \text{п. в.}, \quad \nu = 1, \dots, m-1. \tag{2.75}$$

Из (2.56) и леммы 2.2.7 следует, что

$$\mu_{\nu k}(M^*\xi) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{s \in D(M^*)} e^{-2\pi i (M^{-1}s_k, s - M^*\xi)} m_\nu(\xi + M^{*-1}s),$$

$$k = 0, \dots, m-1.$$

Поэтому функции $\mu_{\nu k}$ (и аналогично $\widetilde{\mu}_{\nu k}$), $\nu.k = 0, \dots, m-1$, непрерывны в окрестности нуля, и, значит, (2.75) справедливо при $\xi = \mathbf{0}$, т. е. векторы $(\mu_{\nu 0}(\mathbf{0}), \dots, \mu_{\nu, m-1}(\mathbf{0}))$, $\nu = 1, \dots, m-1$, ортогональны вектору $(\overline{\widetilde{\mu}_{00}(\mathbf{0})}, \dots, \overline{\widetilde{\mu}_{0,m-1}(\mathbf{0})})$. С другой стороны, из (2.56) следует, что равенства (2.72) и (2.73) соответственно можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{m-1} \overline{\widetilde{\mu}_{0k}(\mathbf{0})} = \sqrt{m}\,, \quad \sum_{k=0}^{m-1} \mu_{\nu k}(\mathbf{0}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m-1.$$

Таким образом, векторы $(\mu_{\nu 0}(\mathbf{0}), \dots, \mu_{\nu 0}(\mathbf{0}))$, $\nu = 1, \dots, m-1$, ортогональны вектору $(1, \dots, 1)$. Принимая во внимание линейную независимость этих векторов, устанавливаем, что для выполнения равенств (2.73) необходимо и достаточно, чтобы

$$\widetilde{\mu}_{0k}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad k = 0, \dots, m-1. \tag{2.76}$$

Опять воспользовавшись (2.56), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi i (M^{-1}s_k, s)} \widetilde{\mu}_{0k}(\mathbf{0}) = \widetilde{m}_0(M^{*-1}s), \quad s \in D(M^*).$$

Рассмотрим эти равенства как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\widetilde{\mu}_{0k}(\mathbf{0})$, $k = 1, \dots, m-1$. В силу следствия 2.2.7 система имеет единственное решение, и из теоремы 2.2.6 получаем, что выполнение равенств (2.72) и (2.74) равносильно (2.76). $\Diamond$

Теперь понятно, что если маски всплеск-функций непрерывно дифференцируемы в окрестности множества $M^{*-1}\,(D(M^*))$ и ограничены, то выполнение условия (2.71) обеспечивается требуемыми свойствами масок масштабирующих функций. Нетрудно видеть, что функции $\mu_{\nu k}, \widetilde{\mu}_{\nu k}$, $\nu = 1, \dots, m-1$, построенные по схеме, описанной в параграфе 2.6, унаследуют свойства непрерывной дифференцируемости в окрестности нуля и ограниченности от функций $\mu_{0k}, \widetilde{\mu}_{0k}$ при условии (2.76), которое, как было установлено, равносильно выполнению равенств (2.72) и (2.74). Резюмируя сказанное, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.7.7. *Пусть КМА* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *соответственно порождены масштабирующими функциями* $\varphi, \widetilde{\varphi}$ *с масками* $m_0, \widetilde{m}_0$, *непрерывно дифференцируемыми в окрестности множества* $M^{*-1}(D(M^*))$, *ограниченными и удовлетворяющими условиям* (2.72), (2.74), *функции* $\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}$ *непрерывно дифференцируемы в окрестности нуля и удовлетворяют условиям* (2.50), (2.70); *системы* $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, $\{\widetilde{\varphi}(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ *являются биортонормированными.*

Тогда существует набор всплеск-функций $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, m-1$, *такой, что каждая из систем* $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}, \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ *образует базис Рисса в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Упражнение 2.7.8. Пусть $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, m-1$, — набор всплеск-функций, функции $\widehat{\psi}^{(\nu)}$ непрерывны в нуле. Доказать, что для того, чтобы система $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$ являлась базисом Рисса в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ необходимо, чтобы $\widehat{\psi}^{(\nu)}(\mathbf{0}) = 0$, $\nu = 1, \dots, m-1$.

Намного проще решается вопрос базисности в ортогональном случае.

Теорема 2.7.9. *Пусть КМА* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *порожден масштабирующей функцией* φ *с маской* m_0, *система* $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, *является ортонормированной. Если* $\psi^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, m-1$, — *набор всплеск-функций, определяемый равенствами* (2.51), *с такими масками* m_ν, $\nu = 1, \dots, m-1$, *что при почти всех* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *матрица*

$$\mathcal{M} := \{m_\nu(\xi + M^{*-1}s_k)\}_{\nu,k=0}^{m-1},$$

где $\{s_0, \dots, s_{m-1}\} = D(M^*)$, *унитарна, то система* $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$ *является ортонормированным базисом в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. По теореме 2.7.1 система $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$ является ортонормированной. Из неравенства Бесселя следует, что для $B = 1$ выполнено соотношение (2.65), которое, по лемме 2.7.4, влечет (2.67) при $\widetilde{B} = 1$. Таким образом, для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ имеет место равенство Парсеваля, т. е. система $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$ полна в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. ◊

2.8. КМА Хаара

В классическом КМА Хаара масштабирующей функцией является характеристическая функция отрезка $[0, 1]$. Сейчас мы обсудим, характеристические функции каких множеств в $\mathbb{R}^d$ также являются масштабирующими функциями, порождающими ортогональные базисы всплесков. Ясно, что целые сдвиги такого множества должны быть попарно дизъюнктны (иначе целые сдвиги его характеристической функции не будут образовывать ортогональную систему). Конечно, одного этого требования не достаточно, чтобы характеристическая функция множества породила КМА.

В этом параграфе равенства множеств из $\mathbb{R}^d$ мы будем понимать с точностью до множества меры нуль, соответственно два множества будем называть *дизъюнктными*, если их пересечение имеет нулевую меру.

Теорема 2.8.1. *Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, целые сдвиги которого попарно дизъюнктны. Функция χ_E является масштабирующей для некоторого КМА, тогда и только тогда, когда*

(i) *существует множество цифр D_E матрицы M такое, что*

$$ME = \bigcup_{n \in D_E} (E + n);$$

(ii) $\bigcup_{l \in \mathbb{Z}^d} (E + l) = \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Пусть χ_E — масштабирующая функция для некоторого КМА. Из аксиомы MR1 следует, что $\chi_{ME} \in V_{-1} \subset V_0$, значит, по аксиоме MR5 имеет место разложение

$$\chi_{ME} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_n \chi_E(\cdot + n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_n \chi_{E+n}.$$

Отсюда, учитывая дизъюнктность множеств $E + n$ при разных n, видим, что коэффициенты c_n могут принимать только два значения: 1 и 0. Кроме того, поскольку $\mu(ME) = m\mu E$, устанавливаем, что ненулевых коэффициентов c_n ровно m и

$$\chi_{ME} = \sum_{k=1}^{m} \chi_{E+n_k}. \tag{2.77}$$

Покажем, что целые векторы n_k, $k = 1, \ldots, m$, принадлежат различным классам смежности. Предположим, что $n_{k_1} \equiv n_{k_2} \pmod M$ при $k_1 \neq k_2$, тогда $n_{k_1} = n_{k_2} + Ml$, где $l \in \mathbb{Z}^d$, $l \neq \mathbf{0}$, следовательно,

$$M(E + l) = ME + Ml = \bigcup_{k=1}^{m} (E + n_k + Ml) \supset E + n_{k_1}.$$

С другой стороны, из (2.77) следует

$$ME = \bigcup_{k=1}^{m} (E + n_k), \tag{2.78}$$

поэтому $ME \cap M(E + l) \neq \varnothing$, что ввиду взаимной однозначности отображения M влечет соотношение $E \cap (E + l) \neq \varnothing$, которое противоречит условиям теоремы. Таким образом, $\{n_1, \ldots, n_m\}$ — искомое множество цифр D_E, что и завершает доказательство (i).

Для доказательства (ii) положим $S = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}^d} (E+l)$, $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus S$. Предположим, что (ii) не выполнено, т. е. $\mu\Omega > 0$. Из (2.78) следует

$$MS = M\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^d} (E+l)\right) = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^d} (ME+Ml) = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^d} \bigcup_{k=1}^{m} (E+n_k+l). \tag{2.79}$$

Отсюда, приняв во внимание лемму 2.2.2, получим равенство $MS = S$, которое в силу взаимной однозначности отображения M влечет $M\Omega = \Omega$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \chi_E(M^j x+n)\,dx = \frac{1}{m^j}\int\limits_{\Omega} \chi_E(x+n)\,dx = \frac{1}{m^j}\int\limits_{\Omega} \chi_{E-n}(x)\,dx = 0$$

для всех $j\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{Z}^d$. Пусть Ω_0 — ограниченное подмножество множества Ω положительной меры. Положим $f=\chi_{\Omega_0}$. Ясно, что $\|f\|_2 > 0$ и $f \perp V_j$ для любого $j\in\mathbb{Z}$, что противоречит аксиоме MR2.

Пусть теперь для E выполнены условия (i), (ii). Рассмотрим 1-периодическую по каждой переменной функцию

$$\Phi := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \chi_E(\cdot+n). \tag{2.80}$$

Из (ii) и попарной дизъюнктности множеств $E+n$, $n\in\mathbb{Z}^d$, следует, что $\Phi(x)=1$ для почти всех $x\in\mathbb{T}^d$. Поэтому

$$\|\chi_E\|_2^2 = \|\chi_E\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Phi(x)\,dx = 1.$$

Таким образом, $\chi_E\in L_2(\mathbb{R}^d)$, и целые сдвиги функции χ_E образуют ортонормированную систему. Кроме того, мы установили соотношение $\chi_E\in L(\mathbb{R}^d)$, которое влечет непрерывность функции $\widehat{\chi}_E$, и равенство

$$\widehat{\chi}_E(\mathbf{0}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x)\,dx = \|\chi_E\|_1 = 1,$$

т. е.

$$\lim_{x\to\mathbf{0}} \widehat{\chi}_E(x) = \widehat{\chi}_E(\mathbf{0}) = 1. \tag{2.81}$$

Из (i) вместе с попарной дизъюнктностью множеств $E+n$, $n\in\mathbb{Z}^d$, следует равенство

$$\chi_E(x) = \sum_{n\in D_E} \chi_E(Mx+n), \tag{2.82}$$

которое является масштабирующим уравнением для функции χ_E, а, значит, для порожденных этой функцией пространств V_j, $j\in\mathbb{Z}$, выполнена аксиома MR1, но тогда, в силу теорем 2.3.2, 2.3.4, учитывая (2.81), имеем и аксиомы MR2, MR3. $\diamondsuit$

Из теоремы 2.8.1 ясно, что если мы хотим построить аналог классической системы Хаара, нужно иметь множество с попарно дизъюнктными целыми сдвигами, удовлетворяющее условиям (i), (ii). Проверить дизъюнктность целых сдвигов несложно для простых множеств. Однако далее будет предъявлен широкий класс множеств, удовлетворяющих (i), (ii), для которых это не так. В этом плане нам будет полезно следующее утверждение.

Предложение 2.8.2. *Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющее* (ii). *Тогда следующие условия эквивалентны*:

OR1. *Система $\{\chi_E(\,\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ является ортонормированной*;

OR2. *Целые сдвиги множества E попарно дизъюнктны*;

OR3. $\mu E = 1$.

Доказательство. Пусть Φ — функция, определенная соотношением (2.80). Нетрудно видеть, что при условии (ii) равенство $\Phi(x) = 1$ выполняется для почти всех $x \in \mathbb{T}^d$ тогда и только тогда, когда множества $E + n$, $n \in \mathbb{Z}^d$, попарно дизъюнктны, а при отсутствии попарной дизъюнктности $\Phi(x) \geqslant 1$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^d$, и существует множество положительной меры, на котором $\Phi(x) \geqslant 2$. Поэтому эквивалентность условий OR2 и OR3 следует из равенства

$$\mu E = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Phi(x)\,dx.$$

Осталось заметить, что одновременное выполнение OR2 и OR3, очевидно, равносильно OR1. $\Diamond$

КМА, порожденный функцией χ_E, для которой выполнено OR1, будем называть *КМА Хаара*.

Теорема 2.8.3. *Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяюшее условиям* (i), (ii) *теоремы* 2.8.1, *и* $\mu E = 1$, *тогда функция χ_E порождает КМА Хаара*.

Доказательство следует из теоремы 2.8.1 и предложения 2.8.2.

В случае, когда проверка условий OR2, OR3 нетривиальна, мы можем воспользоваться результатами параграфа 2.5 для проверки OR1. Заметим, что для доказательства равенства (2.82) не требуется попарная ортогональность всех множеств $E + n$, $n \in \mathbb{Z}$, достаточно, чтобы ортогональными были пары $E + n$, $E + k$ при $n, k \in D_E$, $n \neq k$, но это всегда имеет место при выполнении условия (i), поскольку

$$\mu ME = m\mu E = \sum_{n\in D_E} \mu E = \sum_{n\in D_E} \mu(E+n).$$

Таким образом, при построении КМА Хаара ключевым является условие (i), из которого следует, что функция χ_E удовлетворяет масштаби-

рующему уравнению (2.82), при этом ее маской будет тригонометрический полином
$$m_0(\xi) = \frac{1}{m}\sum_{n\in D_E} e^{2\pi i(n,\xi)}. \tag{2.83}$$

Покажем, что для m_0 выполнено необходимое условие ортонормированности (2.31), т. е. имеет место тождество
$$\sum_{s\in D_E} |m_0(\xi + M^{*-1}s)|^2 = 1. \tag{2.84}$$

Действительно,
$$\sum_{s\in D_E} |m_0(\xi + M^{*-1}s)|^2 = \frac{1}{m^2}\sum_{n\in D_E}\sum_{k\in D_E}\sum_{s\in D_E} e^{2\pi i(n-k,\xi+M^{*-1}s)}.$$

По следствию 2.2.7 внутренняя сумма в правой части отлична от нуля лишь при $k \equiv n \pmod M$, что в данном случае равносильно $k = n$, значит, в сумме по n, k ровно m ненулевых слагаемых, каждое из которых равно m. В параграфе 2.5 было показано, что равенство (2.84) недостаточно для ортогональности целых сдвигов функции χ_E. Чтобы обеспечить OR1, надо потребовать выполнение какого-нибудь достаточного условия ортогональности. Если мы обеспечили OR1, то, как уже было показано, из (i) следует, что функция χ_E является масштабирующей, значит, порожденные ею пространства V_j, $j\in\mathbb{Z}$, удовлетворяют MR1, а из теорем 2.3.2, 2.3.4 и равенства
$$\widehat{\chi}_E(0) = \|\chi_E\|_2^2 = 1$$
следуют аксиомы MR2, MR3. $\Diamond$

Резюмируя сказанное и используя теорему 2.5.6, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.8.4. *Пусть E — компактное множество в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющее условию* (i) *теоремы* 2.8.1, m_0 — *тригонометрический полином, определенный равенством* (2.83). *Если существует компакт K, конгруэнтный кубу $[-1/2,1/2]^d$, содержащий окрестность нуля, такой, что*
$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\inf_{\xi\in K} |m_0(M^{*-k}\xi)| \ne 0, \tag{2.85}$$
то χ_E порождает КМА Хаара.

Теперь построим в КМА Хаара набор всплеск-функций. Доопределим строку $\alpha_{00},\ldots,\alpha_{0,m-1}$, где $\alpha_{0k} = 1/\sqrt{m}$, $k = 0,\ldots,m-1$, до ортогональной матрицы $A := \{\alpha_{\nu k}\}_{\nu,k}$. Пусть $D_E = \{s_0,\ldots,s_{m-1}\}$. Для $\nu = 1,\ldots,m-1$ положим
$$m_\nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{\nu k}e^{2\pi i(s_k,\xi)}$$

и определим функции $\psi^{(\nu)}$ равенствами

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}(\xi) = m_\nu(M^{*-1}\xi)\widehat{\chi}_E(M^{*-1}\xi).$$

Применяя преобразование Фурье, получим явные представления для этих функций

$$\psi^{(\nu)}(x) = \sqrt{m}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{\nu k}\chi_E(Mx+s_k).$$

Для того чтобы убедиться, в том, что функции $\psi^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, образуют набор всплеск-функций, проверим, что матрица

$$\mathcal{M} := \{m_\nu(\xi + M^{*-1}s_k)\}_{\nu,k=0}^{m-1}$$

унитарна. Используя ортогональность матрицы A и следствие 2.2.7, имеем

$$\sum_{l=0}^{m-1} m_\nu(\xi + M^{*-1}s_l)\overline{m_\varkappa(\xi + M^{*-1}s_l)} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{m-1}\alpha_{\nu k}\alpha_{\varkappa n}\sum_{l=0}^{m-1}e^{2\pi i(s_k - s_n, \xi + M^{*-1}s_l)} = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{\nu k}\alpha_{\varkappa k} = \delta_{\nu\varkappa},$$

что и означает унитарность матрицы $\mathcal{M}$. По теореме 2.7.9 система $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$ является ортонормированным базисом в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$. Эти базисы и обобщают классическую систему Хаара.

Теперь дадим конструктивное описание множеств, характеристическая функция которых порождает КМА Хаара. Пусть D — произвольное множество цифр матрицы M. Положим

$$E = E_D := \{x \in \mathbb{R}^d : \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}s_k, \ s_k \in D\}. \tag{2.86}$$

Предложение 2.8.5. *Множество E_D является компактом в $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, содержащаяся в E, тогда

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}s_k^{(n)}, \quad s_k^{(n)} \in D.$$

Поскольку D — конечное множество, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, в которой все элементы имеют одну и ту же первую цифру s_1^*. Далее, переходя к новой подпоследовательности, обеспечим постоянную вторую цифру s_2^*, и т. д. Выделим диагональную подпоследовательность $\{x_{n_k^*}\}$ и положим

$$x^* = \sum_{k=1}^{\infty} M^{-k} s_k^*.$$

Из построения ясно, что $x_{n_k^*} \longrightarrow x^* \in E$. $\Diamond$

Предложение 2.8.6. *Множество E_D удовлетворяет условиям* (i), (ii) *теоремы* 2.8.1.

Доказательство. Очевидно, что (i) выполнено при $D_E = D$. Для доказательства (ii) положим $S = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}^d} (E + l)$, $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus S$. Из (i), повторяя цепочку равенств (2.79), получим равенство $MS = S$. Из определения множества S следует, что $S + n = S$ для любого $n \in \mathbb{Z}^d$. Ясно, что и множество Ω обладает аналогичными свойствами, т. е.

$$\Omega + n = \Omega \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.87}$$

$$M^j\Omega = \Omega \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2.88}$$

причем эти равенства выполнены точно (а не с точностью до множества меры нуль, как мы ранее условились их понимать). Покажем, что множество S замкнуто. Пусть $x_n \to x$, $\{x_n\} \subset S$, тогда $x_n = y_n + k_n$, где $y_n \in E$, $k_n \in \mathbb{Z}^d$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как она сходится, последовательность $\{y_n\}$ ограничена, так как множество E компактно, значит, и последовательность $\{k_n\}$ ограничена, т. е. существует только конечное число различных k_n. Выделим такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $x_{n_k} = y_{n_k} + k^*$, $k^* \in \mathbb{Z}^d$, для всех $k = 1, 2, \ldots$. Из сходимости последовательности $\{x_{n_k}\}$ следует сходимость последовательности $\{y_{n_k}\}$ и, поскольку E — компакт, $y_{n_k} \to y \in E$, а, значит, $x_{n_k} \to y + k^* \in S$. Таким образом, множество S замкнуто, а множество Ω открыто. Предположим, что $\Omega \neq \varnothing$, тогда в Ω содержится некоторый шар Δ. Из (2.88) следует, что $M^j\Delta \subset \Omega$ при сколь угодно больших $j \in \mathbb{Z}$, откуда, принимая во внимание (2.5), получаем, что Ω содержит некоторое множество $[0, 1]^d + n$, $n \in \mathbb{Z}^d$. В силу (2.87) отсюда следует, что $\Omega = \mathbb{R}^d$, что противоречит тому, что S — не пустое множество. $\Diamond$

Сопоставляя предложения 2.8.2 и 2.8.6 с теоремой 2.8.1, видим, что характеристическая функция множества E_D породит КМА Хаара, если выполнено одно из эквивалентных условий OR1, OR2, OR3. Не для всякого множества цифр D они окажутся выполненными. Пусть $d = 1$, $M = 2$, $D = \{0, 3\}$, ясно, что в этом случае множеством E_D является отрезок $[0, 3]$, для которого OR3 не имеет места. Более того, в параграфе 2.5 было показано, что целые сдвиги характеристической функции этого отрезка даже не образуют систему Рисса. В силу теорем 2.8.3, 2.8.4, чтобы убедиться в том, что характеристическая функция множества E_D порождает КМА Хаара, достаточно либо проверить условие OR3, либо найти компакт K, конгруэнтный кубу $[-1/2, 1/2]^d$, содержащий окрестность нуля, на котором функции $m_0(M^{*-k}\xi)$, $k = 1, 2, \ldots$, не обращаются в нуль.

Можно показать, что если характеристическая функция некоторого множества E порождает КМА Хаара, то E представимо в виде (2.86).

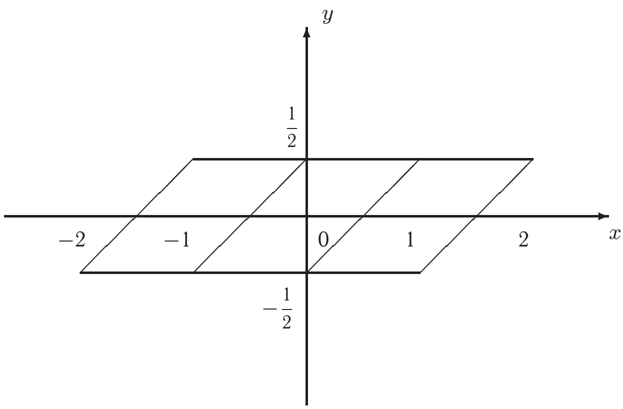


Рис. 2.2. Множество P — центральный малый параллелограмм, множество MP — большой параллелограмм (пример 2.8.7)

Пример 2.8.7. Пусть $d = 2$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, множество D состоит из цифр $r_0 = (0, 0)$, $r_1 = (1, 0)$, $r_2 = (-1, 0)$. Покажем, что множеством E_D является параллелограмм с вершинами $(0, 1/2)$, $(1, 1/2)$, $(0, -1/2)$, $(-1, -1/2)$, который мы обозначим через P. Ясно, что имеет место равенство (см. рис. 2.2)

$$MP = P \cup (P + r_1) \cup (P + r_2), \tag{2.89}$$

из которого следует, что при любом $N \in \mathbb{N}$ произвольное $x \in P$ представимо в виде

$$x = \sum_{k=1}^{N} M^{-k} s_k + M^{-N} y,$$

где $s_k \in D$, $k = 1, \ldots, N$, $y \in P$. Перейдя в этом равенстве к пределу при $N \to \infty$, приняв во внимание 2.5, получим $x \in E_D$. Таким образом, $P \subset \subset E_D$.

Пусть теперь $x \in E_D$. Поскольку $M^{-1} r_k \in P$, $k = 0, 1, 2$, из (2.89) по индукции следует, что $\sum\limits_{k=1}^{N} M^{-k} s_k \in P$ для любого $N \in \mathbb{N}$ и для любых $s_1, \ldots, s_N \in D$. Отсюда, принимая во внимание замкнутость P, получим $x \in P$, т. е. $E_D \subset P$. Теперь ясно, что для E_D выполнены условия (i), (ii) теоремы 2.8.1 и условие OR3 предложения 2.8.2. По теореме 2.8.3 функция χ_{E_D} порождает КМА Хаара. $\diamondsuit$

Пример 2.8.8. Пусть $d = 1$, $M = 3$. Если составить D из цифр $0, 1, 2$, то, очевидно, множеством E_D будет отрезок $[0, 1]$. Нетрудно убедиться в том, что для любых трех последовательных цифр множество E_D является интервалом. Возьмем $D = \{-4, 0, 1\}$. В этом

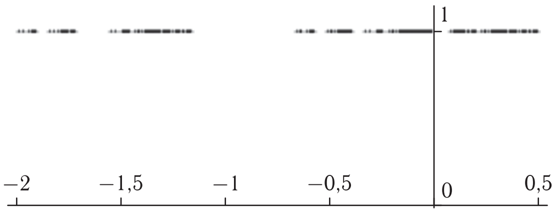


Рис. 2.3. График функции χ_{E_D} (пример 2.8.8)

случае E_D уже не будет интервалом, график его характеристической функции, изображенный на рис. 2.3, выглядит «рваным отрезком».

Из равенства

$$|m_0(\xi)|^2 = \frac{1}{9}\,(3 + 2\cos 2\pi\xi + 2\cos 8\pi\xi + 2\cos 6\pi\xi)$$

видно, что функции $m_0(3^{-k}\xi)$, $k = 1, 2, \ldots$, не имеют нулей на компакте $K = [-1/2, 1/2]$. Значит, по теореме 2.8.4 функция χ_{E_D} порождает КМА Хаара. $\diamondsuit$

Пример 2.8.9. Пусть $d = 2$, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, множество D состоит из цифр $r_0 = (0, 0)$, $r_1 = (1, 0)$. В этом случае E_D — фрактальное множество, изображенное на рис. 2.4, а маской функции χ_{E_D} является полином

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2}\,(1 + e^{2\pi i\xi_1}).$$

Нули функции

$$|m_0(M^{*-1}\xi)|^2 = \frac{1}{2}\,(1 + \cos\pi(\xi_1 - \xi_2))$$

находятся на прямых $\xi_1 - \xi_2 = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому в качестве компакта K из теоремы 2.8.4 нельзя взять квадрат $[-1/2, 1/2]^2$, однако годится конгруэнтный ему параллелограмм с вершинами $(0, 1/2)$, $(1, 1/2)$, $(0, -1/2)$, $(-1, -1/2)$. Нетрудно проверить, что функции $m_0(M^{*-k}\xi)$, не обращаются в нуль на этом параллелограмме при $k = 2, 3, \ldots$. Значит, по теореме 2.8.4 функция χ_{E_D} порождает КМА Хаара. $\diamondsuit$

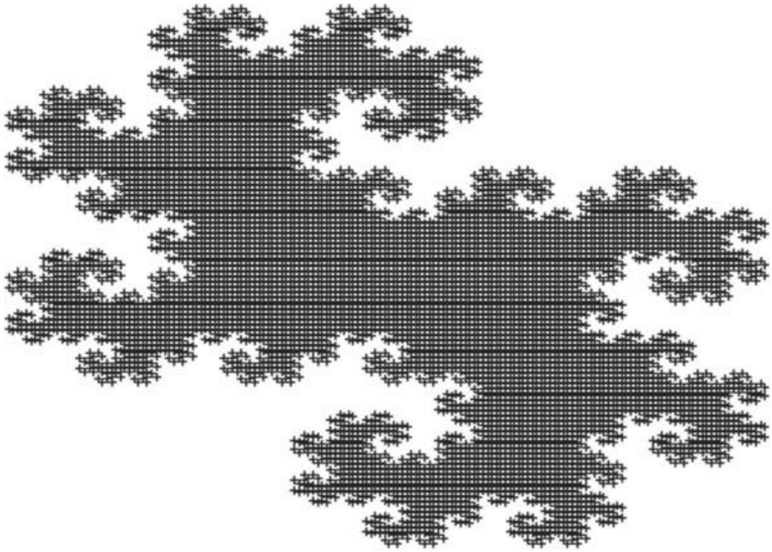


Рис. 2.4. Двуглавый дракон — множество E_D (пример 2.8.9)

Упражнение 2.8.10. Пусть $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, множество D состоит из цифр $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$. Проверить, что χ_{E_D} порождает КМА Хаара.

Глава 3

ФИНИТНЫЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Как мы знаем, построение одномерных ортогональных всплесков с компактным носителем сводится к отысканию решений масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x + k), \tag{3.1}$$

где лишь конечное число коэффициентов h_k отлично от нуля.

Не ограничивая общности, с возможным сдвигом нумерации, будем считать, что h_{-N} и h_0 — соответственно первый и последний ненулевые коэффициенты. Обозначая $c_k = h_{-k}/\sqrt{2}$, приводим уравнение к виду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi(2x - k), \tag{3.2}$$

где $c_0, \ldots, c_N$ — произвольные комплексные коэффициенты, причем $c_0 c_N \neq 0$, $N \geqslant 1$.

3.1. Существование, единственность и слабая сходимость

Если уравнение (3.2) имеет суммируемое решение с компактным носителем, то, интегрируя обе части уравнения, получим

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \left(\frac{1}{2} \sum_k c_k\right) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx,$$

значит, или $\sum\limits_k c_k = 2$, или $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 0$. В последнем случае первообразная $\varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$ также имеет компактный носитель и, в чем нетрудно убедиться, удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{2}\, \varphi_1(2x - k).$$

Вновь берем интеграл от обеих частей, и вновь получаем две возможности: либо $\sum\limits_k c_k = 4$, либо $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_1(x)\,dx = 0$. В последнем случае переходим к следующей первообразной $\varphi_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,dt$ и т. д. Так получаем последовательность (конечную или бесконечную) $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, в которой каждая функция φ_k имеет компактный носитель и $\varphi_k^{(k)} = \varphi$. Имеем $\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi i\xi)^k \widehat{\varphi}_k(\xi)$. Обе функции $\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}_k$ целые, так что последнее равенство означает, что функция $\varphi(\xi)$ имеет нуль порядка не меньше k в точке $\xi = 0$. Поэтому последовательность $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ должна оборваться на некотором φ_n. Это означает, что

$$\widehat{\varphi}_n(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx \neq 0,$$

следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k = 2^{n+1}$. Итак,

Предложение 3.1.1. *Если уравнение* (3.2) *имеет суммируемое решение с компактным носителем, то* $\sum\limits_{k=0}^{N} c_k = 2^{n+1}$ *для некоторого целого* $n \geqslant 0$. *В случае* $n = 0$ *имеем* $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \neq 0$. *Если же* $n \geqslant 1$, *то наше решение имеет* n*-ю первообразную с компактным носителем* φ_n, *которая является решением другого масштабирующего уравнения*:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n}\, c_k \varphi_n(2x - k), \tag{3.3}$$

при этом $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx \neq 0$.

Этот факт позволяет ограничиться рассмотрением случая $\sum c_k = 2$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \neq 0$, поскольку общий случай сводится к данному переходом к первообразной конечное число раз. Итак,

Здесь и далее мы полагаем $\sum c_k = 2$. *При этом условии любое решение масштабирующего уравнения обладает свойством* $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \neq 0$. *Далее будем предполагать, что все решения нормированы условием* $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$.

Замечание 3.1.2. Предложение 3.1.1 верно и в более общей ситуации, не только для суммируемых решений, но и для любых обобщенных решений с компактным носителем. Доказательство отличается незначительно. Достаточно воспользоваться двумя фактами:

1) преобразование Фурье обобщенной функции с компактным носителем является целой функцией;
2) если обобщенная функция с компактным носителем $\varphi \in \mathcal{S}'$ такова, что $\langle \varphi, \mathbf{1} \rangle = 0$, то она имеет первообразную с компактным носителем.

Напомним, что символом $\mathbf{1}$ мы обозначаем функцию, тождественно равную единице на $\mathbb{R}$. Хотя $\mathbf{1} \notin \mathcal{S}$, для финитной функции $f \in \mathcal{S}'$ выражение $\langle \varphi, \mathbf{1} \rangle$ определено и совпадает с $\widehat{f}(0)$, а для регулярных (обычных) функций f оно совпадает с интегралом $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. В разных ситуациях мы будем использовать любое из этих трех обозначений.

Вновь рассмотрим масштабирующий оператор (2.21) на пространстве S', который теперь запишется следующим образом:

$$[Tf](x) = \sum_{k=0}^{N} c_k f(2x-k). \tag{3.4}$$

Используя теорему 2.4.4 для одномерного оператора $Mx = 2x$, получаем, что масштабирующее уравнение (3.2) при условии $\sum c_k = 2$ имеет единственное, с точностью до умножения на константу, обобщенное решение φ с компактным носителем. Это решение представляется через преобразование Фурье с помощью формулы (2.17), которая принимает вид

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right). \tag{3.5}$$

Для любой начальной функции f_0 с компактным носителем последовательность $f_n = T^n f_0$ сходится в S' к функции $\widehat{f_0}(0)\varphi$. Решение φ сосредоточено на отрезке $[0, N]$ (т. е. $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [0, N]$). В самом деле, оператор T сохраняет пространство функций, сосредоточенных на этом отрезке. Следовательно, выбрав начальную функцию f_0 с условием $\operatorname{supp} f_0 \subset [0, N]$, получим, что все функции f_n, значит, и предел последовательности также сосредоточены на этом отрезке.

Формула (3.5) определяет единственное (с точностью до умножения на константу) решение уравнения (3.2) в классе обобщенных функций с непрерывным в нуле преобразованием Фурье. В частности, это решение единственно среди обобщенных функций с компактным носителем, а также (если $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$) среди всех суммируемых функций. Любое суммируемое решение уравнения (3.2), если таковое существует, имеет компактный носитель и, следовательно, совпадает с φ (с точностью до домножения на константу). В дальнейшем мы будем называть φ *каноническим решением* и считать (если не оговорено обратное), что любая масштабирующая функция является каноническим решением соответствующего уравнения. Каноническое решение нормировано условием $\widehat{\varphi}(0) = 1$ и сосредоточено на отрезке $[0, N]$.

Таким образом, масштабирующая функция однозначно определена коэффициентами уравнения, или, что то же самое, маской масштабирующего уравнения.

3.2. Условия Стрэнга–Фикса

Обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'$ с компактным носителем удовлетворяет *условию Стрэнга–Фикса порядка* L ($L \geqslant 0$), если

$$\widehat{f}^{(r)}(n) = 0, \quad r = 0, \ldots, L; \;\; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

иными словами, преобразование Фурье $\widehat{f}$ (являющееся целой функцией) имеет нули порядка не менее L во всех целых точках, отличных от нуля.

Для данной финитной функции f такой, что $\widehat{f}(0) \neq 0$, условие Стрэнга–Фикса эквивалентно тому, что целые сдвиги этой функции порождают все полиномы степени не выше L, т. е. $\mathcal{P}_L \subset V_f$, где

$$V_f = \Big\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k f(x - k), \; \lambda_k \in \mathbb{C} \Big\}$$

— пространство функций, порожденных целыми сдвигами функции f а $\mathcal{P}_L$ — пространство алгебраических полиномов степени не выше L. Заметим, что поскольку f имеет компактный носитель, функциональный ряд $\sum\limits_k \lambda_k f(\,\cdot - k)$ сходится на каждом компакте в $\mathbb{R}$ при любом выборе последовательности $\{\lambda_k\}$. Если f является регулярной (суммируемой на каждом компакте) функцией, то сумма ряда также представляет собой регулярную функцию. Если $f \in \mathcal{S}'$, то сумма ряда является обобщенной функцией из $\mathcal{D}'$ (из пространства линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}$ пробных функций с компактным носителем), а при дополнительном условии — если последовательность $\{\lambda_k\}$ растет не быстрее полинома, сумма ряда является функцией из $\mathcal{S}'$.

Теорема 3.2.1. *Для данного* $L \geqslant 0$ *и данной функции* $f \in \mathcal{S}'$ *с компактным носителем такой, что* $\widehat{f}(0) = 1$, *следующие свойства эквивалентны*:

(*a*) $\widehat{f}^{(r)}(n) = 0$, $r = 0, \ldots, L$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (*условие Стрэнга–Фикса порядка* L);

(*b*) $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} (x - k)^r f(x - k) \equiv C$ *для каждого* $r = 0, \ldots, L$. *В частности* $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} f(x - k) \equiv 1$ (*свойство разбиения единицы*);

(*c*) *для каждого* $r = 0, \ldots, L$ *функция* $F_r(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} k^r f(x - k)$ *является алгебраическим полиномом*;

(*d*) *для каждого* $r = 0, \ldots, L$ *функция* $F_r(x)$ *есть полином степени* r *со старшим коэффициентом* 1;

(*e*) $\mathcal{P}_L \subset V_f$.

Доказательство. $(a) \Leftrightarrow (b)$. Согласно формуле суммирования Пуассона, для произвольной функции $g \in \mathcal{S}'$ имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) e^{-2\pi i n x}.$$

Поэтому $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k) \equiv C$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) e^{-2\pi i n x} \equiv C\,,$$

а это значит, что все коэффициенты данного тригонометрического ряда, за исключением, возможно, нулевого, равны нулю, т. е. $\widehat{g}(n) = 0$, $n \neq 0$. Остается положить $g(x) = x^r f(x)$ и заметить, что $\widehat{g} = (-2\pi i)^{-r} \widehat{f}^{(r)}$. Для $L = 0$ имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x-k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{-2i\pi n x} = \widehat{f}(0) = 1.$$

$(b) \Rightarrow (d)$. Имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^r f(x-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Bigl(x - (x-k)\Bigr)^r f(x-k) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} x^{r-j} (x-k)^j f(x-k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x^{r-j} (x-k)^j f(x-k), \tag{3.6}$$

где $\binom{r}{j}$ — биномиальные коэффициенты. Поскольку сумма

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x^{r-j} (x-k)^j f(x-k)$$

есть тождественная константа для каждого $j = 0, \ldots, r$, сумма (3.6) является полиномом степени r, и коэффициент при x^r равен

$$\binom{r}{j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x-k) = 1.$$

$(d) \Rightarrow (c)$. Очевидно.

$(d) \Rightarrow (e)$. Очевидно.

$(e) \Rightarrow (c)$. Этот пункт наиболее сложен для доказательства. Если полином $p(x)$ принадлежит пространству V_f, то коэффициенты в его разложении $p(x) = \sum \lambda_k f(x-k)$ могут, вообще говоря, расти быстрее всякого полинома, т.е. ряд не будет сходиться в пространстве $\mathcal{S}'$, и мы не сможем применить к нему почленно преобразование Фурье. Доказательство проведем другим способом, основанном на разностных уравнениях.

Во-первых, заметим, что можно ограничиться случаем $f \in C(\mathbb{R})$, т.е. f — финитная непрерывная функция. Иначе рассмотрим вместо f ее свертку с некоторой функцией $h \in \mathcal{D}$, имеющей компактный носитель и такой, что $\widehat{h}(0) \neq 0$. Если $\mathcal{P}_L \subset V_f$, то и $\mathcal{P}_L \subset V_{f*h}$. В самом деле, если $x^r \in V_f$, то $x^r = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k f(x-k)$, тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k [f*h](x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k [f(\cdot - k)*h](x) =$$

$$= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k f(s-k)\Big) * h = [s^r * h(s)](x) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(s)(x-s)^r\,ds =$$

$$= x^r \int\limits_{\mathbb{R}} h(s)\,ds + \sum_{j=1}^{r} x^{r-j}(-1)^j \binom{r}{r-j} \int\limits_{\mathbb{R}} h(s)s^j\,ds.$$

Последнее выражение является полиномом степени r, поскольку коэффициент при x^r равен $\int\limits_{\mathbb{R}} h(s)\,ds = \widehat{h}(0) \neq 0$. Таким образом, пространство V_{f*h} содержит $\mathcal{P}_L$. Итак, если свойство (e) выполняется для функции f, то оно выполняется и для свертки $f*h$. Далее, если свойство (c) выполнено для каждой такой свертки $f*h$, то оно выполнено и для самой функции f. Действительно, если для каждого $h \in \mathcal{D}$ такого, что $\int\limits_{\mathbb{R}} h \neq 0$ ряд $\sum\limits_{k} k^r [f*h](x-k)$ является полиномом от x, то он является полиномом и для каждого $h \in \mathcal{S}'$ (используем полноту пространства $\mathcal{D}$ в $\mathcal{S}'$), в частности, для $h = \delta$. Значит, свойство (c) выполнено для $f*\delta = f$. Итак, достаточно обосновать переход $(e) \Leftrightarrow (c)$ для гладких функций f.

Пусть для каждого $r = 0,\ldots,L$ полином x^r раскладывается в ряд

$$x^r = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k f(x-k). \tag{3.7}$$

Так как f непрерывна, то данное равенство выполнено в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Возьмем $y \in [N-1, N]$, для которого

$$f(y) + f(y-1) + \ldots + f(y-N+1) \neq 0.$$

Такое y существует, поскольку

$$\int\limits_{N-1}^{N} (f(y) + f(y-1) + \ldots + f(y-N+1))\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1.$$

Положим $f(y-j) = v_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $v_j = 0$ при $j \leqslant -1$ и $j \geqslant N$. Применим равенство (3.7) для $x = y + n$, $k = j + n$. При любом n имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} v_j a_{j+n} = (y+n)^r, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Это — разностное уравнение (на последовательность $\{a_k\}$) с полиномиальной правой частью. Решение представляется в виде суммы

$$a_k = a_k^{\mathrm{hom}} + a_k^{par}$$

общего решения однородного уравнения a_k^{hom} и частного решения a_k^{par}. Имеем:

$$\begin{aligned} a_k^{hom} &= \sum_{q=1}^{d} \lambda_q^k p_q(k), \\ a_k^{par} &= p_0(k) k^{\mu}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ — корни характеристического полинома

$$\chi_y(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} v_j \lambda^j,$$

$p_1, \ldots, p_d$ — произвольные полиномы, степени которых не превосходят кратностей соответствующих корней, p_0 — некоторый фиксированный полином степени r, μ — кратность корня $\lambda = 1$ (см. приложение А.18). Таким образом,

$$a_k = p_0(k) k^{\mu} + \sum_{q=1}^{d} \lambda_q^k p_q(k). \tag{3.9}$$

В нашем случае $\mu = 0$, так как

$$\chi_y(1) = \sum_{j=0}^{N-1} v_j = \sum_{j=0}^{N-1} f(y-j) \neq 0.$$

Заметим, что для каждого $y \in [N-1, N]$ коэффициенты $\{a_k\}$ выражаются по формуле (3.9), однако корни λ_q полинома $\chi_y(\lambda)$, вообще говоря, различны для разных y. Используя непрерывность функции f, мы покажем, что в нашем случае данные корни одинаковы для всех y. Для двух различных значений y выражения (3.9) тождественно равны на множестве целых чисел, следовательно, у них совпадают все показатели λ_k и соответствующие коэффициенты полиномов p_q при ненулевых показателях (см. приложение А.18). Таким образом, выражения (3.9) равны тождественно для всех y. В частности, полиномы $p_0(k)k^\mu$ совпадают для всех y. Поскольку $\mu = 0$ для одного из значений y, имеем $\mu = 0$ для всех y. Так как последовательность $a_k = p_0(k)$ при каждом y есть частное решение разностного уравнения $\sum\limits_{j=0}^{N-1} v_j a_{j+n} = (y+n)^r$, то она удовлетворяет (3.7). Итак, для каждого $r = 0, \ldots, L$ существует полином p_0 степени r, для которого

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_0(k) f(x-k) = x^r.$$

Из этого, как легко видеть, следует свойство (c).

$(c) \Rightarrow (a)$. Пусть

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^r f(x-k) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^d.$$

После преобразования Фурье имеем

$$\left(\sum_k k^r e^{-2\pi i k\xi}\right)\widehat{f}(\xi) = \sum_{q=0}^{d} \alpha_q (2\pi i)^{-q} \delta^{(q)}(\xi).$$

Учитывая, что

$$\sum_k k^r e^{-2\pi i k\xi} = \sum_k (-2\pi i)^{-r} \delta^{(r)}(\xi - k),$$

преобразуем:

$$\left(\sum_k k^r e^{-2\pi i k\xi}\right)\widehat{f}(\xi) = \left(\sum_k (-2\pi i)^{-r} \delta^{(r)}(\xi-k)\right)\widehat{f}(\xi) =$$

$$= \sum_k (-2\pi i)^{-r} \widehat{f}(\xi)\delta^{(r)}(\xi-k),$$

откуда

$$(-2\pi i)^{-r} \sum_k \widehat{f}(\xi)\delta^{(r)}(\xi-k) = \sum_{q=0}^{d} \alpha_q (2\pi i)^{-q} \delta^{(q)}(\xi).$$

Следовательно, функция в левой части этого равенства имеет носитель в точке $\xi = 0$, значит, для каждого $k \neq 0$ имеем

$$\widehat{f}(\xi)\delta^{(r)}(\xi-k) = 0, \quad r = 0, \ldots, L,$$

поэтому $\widehat{f^{(r)}}(k) = 0$, $r = 0, \ldots, L$. Теорема доказана. $\Diamond$

Нетрудно явно найти константы, возникающие в пункте (b) теоремы 3.2.1, а также полиномы из пункта (c). Везде далее мы обозначаем

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx \quad \text{и} \quad f * g\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Предложение 3.2.2. *Если обобщенная функция f с компактным носителем, для которой $\langle f, \mathbf{1}\rangle = 1$, удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка $L \geqslant 0$, то для произвольного полинома $p \in \mathcal{P}_L$ имеем*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(x-k)f(x-k) = \langle p, f\rangle, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)f(x-k) = p * f\,(x). \tag{3.11}$$

Доказательство. Согласно пункту (b) теоремы 3.2.1 имеем

$$\sum_{k} p(x-k)f(x-k) \equiv C,$$

поэтому

$$C = \int\limits_0^1 C\,dx = \int\limits_0^1 \sum_k p(x-k)f(x-k)\,dx = \\ = \sum_k \int\limits_0^1 p(x-k)f(x-k)\,dx = \langle p, f\rangle,$$

что доказывает (3.10). Обозначим $p_x(\cdot) = p(x-\cdot)$. Ясно, что при любом x полином p_x имеет ту же степень, что и p. Используя (3.10), получаем

$$\sum_k p_x(t-k)f(t-k) = \int p_x(t)f(t)\,dt = p * f\,(x).$$

Это равенство верно для любого t, в частности для $t = x$. Остается заметить, что $p_x(x-k) = p(k)$, откуда получаем (3.11). $\Diamond$

Итак, для каждого $r \leqslant L$ полином

$$(t^r) * f\,(x) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \langle f, x^j\rangle x^{r-j} = \\ = x^r - r\cdot\langle f, x\rangle x^{r-1} + \ldots + (-1)^r\langle f, x^r\rangle$$

разлагается по целым сдвигам функции f как $\sum\limits_k k^r f(x-k)$. Пользуясь этим, получаем разложение для произвольного полинома $P \in \mathcal{P}_L$:

$$P(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \bigl[S_f^{-1}P\bigr](k)f(x-k), \qquad \deg P \leqslant L, \tag{3.12}$$

где S_f^{-1} — линейный оператор на пространстве $\mathcal{P}$ (пространстве алгебраических полиномов), обратный к S_f — оператору свертки с функцией f. Легко видеть, что все подпространства $\mathcal{P}_L,\ L \geqslant 0$, инвариантны относительно S_f, значит, и относительно обратного оператора S_f^{-1}, если последний существует. Вообще говоря, оператор свертки с функцией не обязательно обратим. На пространстве полиномов он будет обратим в том и только том случае, когда $\langle f, \mathbf{1}\rangle \neq 0$. В нашем случае это условие выполнено, так как $\langle f, \mathbf{1}\rangle = 1$.

Вернемся к масштабирующим функциям. Сейчас мы покажем, что любое гладкое решение масштабирующего уравнения удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса (порядка не ниже, чем порядок гладкости функции), причем гладкость функции может быть измерена как в пространстве $C(\mathbb{R})$ (показатель Гёльдера), так и в $L_p(\mathbb{R})$ при любом $p \in [0, +\infty]$, либо по Соболеву (показатель s_p) также при любом p. Результат останется неизменным: гладкость масштабирующей функции в каждом из этих пространств не может превосходить порядка условия Стрэнга–Фикса, которому удовлетворяет масштабирующая функция.

Теорема 3.2.3. *Пусть функция $\varphi(x)$ с компактным носителем является L_1-решением масштабирующего уравнения* (3.2), *причем $\varphi \in W_1^L(\mathbb{R})$, либо $s_p(\varphi) > L$, при некоторых $L \geqslant 0$, $p \geqslant 1$; тогда φ удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L.*

Доказательство. Считаем, что φ — каноническое решение и дается формулой (3.5). Преобразование Фурье обеих частей масштабирующего уравнения дает уравнение (1.23). После k итераций получим

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \prod_{l=1}^{k} m_0\left(\frac{\xi}{2^l}\right). \qquad (3.13)$$

Поскольку $\widehat{\varphi}(0) = 1$, функция $\widehat{\varphi}(\xi)$ не обращается в нуль в достаточно малом круге $\Omega_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{C},\ |\xi| < \varepsilon\}$. Возьмем некоторое $\delta \in [0, \varepsilon)$ и целые $n \neq 0,\ k \geqslant 1$. Подставив $2^k n + \delta$ вместо ξ в равенство (3.13), получаем

$$\widehat{\varphi}(2^k n + \delta) = \widehat{\varphi}\left(n + \frac{\delta}{2^k}\right) \prod_{l=1}^{k} m_0\left(2^{k-l} n + \frac{\delta}{2^l}\right) = \widehat{\varphi}\left(n + \frac{\delta}{2^k}\right) \prod_{l=1}^{k} m_0\left(\frac{\delta}{2^l}\right).$$

Далее, из равенства (3.13) следует существование такой константы $C_\varepsilon > 0$, что для всех $k \geqslant 1$ имеем

$$\inf_{z \in \Omega_\varepsilon} \left| \prod_{l=1}^{k} m_0\Big(\frac{z}{2^l}\Big) \right| > C_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|\widehat{\varphi}(2^k n + \delta)| > C_\varepsilon |\widehat{\varphi}(n + 2^{-k}\delta)|. \qquad (3.14)$$

Предположим теперь, что $\varphi \in W_1^L(\mathbb{R})$; тогда

$$\xi^L \widehat{\varphi}(\xi) \to 0 \qquad \text{при} \qquad \xi \to \infty$$

вдоль действительной оси. Совместив это с (3.14), получим, что для любого $\delta \in [0, \varepsilon)$

$$(2^k n + \delta)^L \widehat{\varphi}(n + \frac{\delta}{2^k}) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Следовательно, функция $\widehat{\varphi}(\xi)$ имеет нуль в точке $\xi = n$ порядка, как минимум, $L+1$, что доказывает предложение в случае $\varphi \in W_1^L$.

В случае $s_p > L$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^p (1 + |\xi|^{pL}) |d\xi < \infty.$$

С другой стороны,

$$\int |\widehat{\varphi}(\xi)|^p (1 + |\xi|^{pL})|)\, d\xi \geqslant \sum_{k \in \mathbb{N}} \int\limits_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} |\widehat{\varphi}(2^k n + \delta)|^p (1 + |(2^k n + \delta)|^{pL})\, d\delta >$$

$$> \sum_{k \in \mathbb{N}} C_\varepsilon \int\limits_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} |\widehat{\varphi}(n + \delta 2^{-k})|^p (1 + |(2^k n + \delta)|^{pL})\, d\delta.$$

Данный ряд сходится, поэтому

$$\int\limits_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} |\widehat{\varphi}(n + \delta 2^{-k})|^p (1 + |(2^k n + \delta)|^{pL})\, d\delta \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

По теореме о среднем значении находим такое $\eta_k \in (\varepsilon/2, \varepsilon)$, что

$$|\widehat{\varphi}(n + 2^{-k}\eta_k)|^p (1 + |(2^k n + \eta_k)|^{pL}) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Следовательно, функция $\widehat{\varphi}(\xi)$ в точке $\xi = n$ имеет нуль порядка не менее $L+1$. $\Diamond$

Следствие 3.2.4. *Если масштабирующая функция с компактным носителем принадлежит $W_1^L(\mathbb{R})$, или имеет гладкость по Соболеву большую, чем L, то она обладает свойствами (b)–(e) из теоремы* 3.2.1 ($L \geqslant 0$).

Итак, *гладкая масштабирующая функция удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса, и ее целые сдвиги порождают все полиномы соответствующей степени*. В частности, при $L = 0$ получаем

Следствие 3.2.5. *Суммируемая масштабирующая функция с компактным носителем обладает свойством разбиения единицы*:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) \equiv 1.$$

Фактически, доказывая теорему 3.2.3, мы установили несколько более сильное утверждение:

Следствие 3.2.6. *Если $\widehat{\varphi}(\xi) = o(\xi^{-L})$ при $\xi \to \infty$, то φ удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L.*

Естественно, что условия Стрэнга–Фикса для масштабирующей функции должны быть охарактеризованы в терминах коэффициентов уравнения $\{c_k\}$ или в терминах маски m_0. Для этого рассмотрим *бинарное дерево* $\mathcal{T}$, построенное следующим образом: корню дерева поставим в соответствие число $\frac{1}{2}$, числа $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ лежат в вершинах первого уровня, соседних с корнем. Далее дерево строится по индукции: если число γ находится в вершине n-го уровня, то ее соседи на $(n+1)$-м уровне — числа $\gamma/2$ и $1/2 + \gamma/2$. Таким образом, на n-м уровне находятся числа

$$2^{-n-1}(2k+1), \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1$$

(далее будем отождествлять вершины с соответствующими числами).

Пусть $\mathcal{A}$ — подмножество вершин дерева, некоторые элементы $\mathcal{A}$ могут совпадать, в этом случае они считаются с кратностью. Назовем $\mathcal{A}$ *блокирующим множеством кратности* r $(r \geqslant 1)$, если любой бесконечный путь по дереву $\alpha_0 \to \alpha_1 \to \ldots$, выходящий из корня (вершина α_k — из k-го уровня, все пути по дереву — с возрастанием уровней, т. е. без хода назад) имеет ровно r общих элементов с множеством $\mathcal{A}$, считая с кратностью. Например, корень дерева $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ является блокирующим множеством кратности 1.

Упражнение 3.2.7. Докажите, что любое блокирующее множество конечно.

Упражнение 3.2.8. Докажите, что любое блокирующее множество всегда имеет пару симметричных точек $\left\{\alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right\}$ за исключением случая, когда оно тривиально, т. е. целиком содержится в корне дерева.

Упражнение 3.2.9. Докажите, что блокирующее множество кратности $r \geqslant 1$ содержит, как минимум, L элементов (с учетом кратности). Для каких множеств этот минимум достигается? Какое минимальное число элементов может содержать блокирующее множество кратности r, если известно, что все его элементы различны?

Теорема 3.2.10. *Масштабирующая функция удовлетворяет условиям Стрэнга–Фикса порядка $L \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда существует блокирующее множество кратности $L+1$, состоящее из корней маски $m_0(\xi)$.*

Доказательство. Пусть φ удовлетворяет условиям Стрэнга–Фикса порядка L. Возьмем любой бесконечный путь $\alpha_0 \to \alpha_1 \to \ldots$ из корня дерева. Так как функция $\widehat{\varphi}$ — целая, то найдется α_s, для которого $\widehat{\varphi}(\alpha_s) \neq 0$. Итерируя $s+1$ раз равенство $\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)$, получим

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(2^{-s-1}\xi) \prod_{k=1}^{s+1} m_0(2^{-k}\xi). \tag{3.15}$$

Подставляя $\xi = 2^s\alpha_s$ и учитывая, что $2\alpha_{k+1} \equiv \alpha_k \pmod 1$, получаем

$$\widehat{\varphi}(2^s\alpha_s) = \widehat{\varphi}(\alpha_s) \prod_{k=0}^{s} m_0(\alpha_k).$$

Так как $2^s\alpha_s = r$ для некоторого $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то функция $\widehat{\varphi}(\xi)$ имеет нуль порядка $\geqslant L+1$ в точке $\xi = 2^s\alpha_s$. Поскольку $\widehat{\varphi}(\alpha_s) \neq 0$, среди точек α_k, $k = 0, \ldots, s$, есть, как минимум, $L+1$ нуль полинома m_0 (считая с кратностью).

Обратно, пусть каждый бесконечный путь из корня дерева содержит по крайней мере $L+1$ нуль полинома m_0. Докажем, что для любого целого $r \neq 0$ точка r является нулем функции $\widehat{\varphi}$ кратности $\geqslant L+1$. Пусть $r = 2^l q$ для некоторого нечетного q. Подставляя $\xi = r$ в равенство (3.5) и учитывая, что $m_0(2^{-k}r) = 1$, для всех $r = 1, \ldots, l$ получаем

$$\widehat{\varphi}(r) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}q) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0(\alpha_k),$$

где $\alpha_k \equiv 2^{-k}q \pmod 1$. Так как бесконечный путь $\alpha_0 \to \alpha_1 \to \ldots$ содержит по крайней мере $L+1$ нуль полинома m_0, то $\widehat{\varphi}$ имеет в точке r нуль кратности $\geqslant L+1$. $\Diamond$

Следствие 3.2.11. *Пусть финитная функция $\varphi(x)$ является L_1-решением масштабирующего уравнения* (3.2), *причем $\varphi \in W_1^L(\mathbb{R})$, либо $s_p(\varphi) > L$ при некоторых $L \geqslant 0$, $p \geqslant 1$; тогда существует блокирующее множество кратности $L+1$, состоящее из корней маски уравнения $m_0(\xi)$.*

Таким образом, наличие блокирующего множества кратности $L+1$ является необходимым условием гладкости масштабирующей функции. Вообще говоря, это условие не является достаточным (см. примеры 3.5.5, 7.3.7–7.3.9).

Поскольку блокирующее множество кратности r содержит, как минимум, r элементов (упражнение 3.2.9), получаем

Следствие 3.2.12. *Если масштабирующая функция удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L, то $\deg m_0 \geqslant L+1$.*

Применив теперь теорему 3.2.3, получим

Следствие 3.2.13. *Если $\varphi \in W_1^L(\mathbb{R})$, то $\deg m_0 \geqslant L+1$.*

Таким образом, решение масштабирующего уравнения (3.1) порядка N может удовлетворять условиям Стрэнга–Фикса порядка не более $N-1$, его гладкость (в пространстве $L_1(\mathbb{R})$) не превосходит N. Для каждого N существует единственная масштабирующая функция, для которой эти параметры достигаются (кардинальный B-сплайн, см. пример 3.5.1).

Масштабирующая функция с компактным носителем имеет конечную гладкость.

Применив теперь следствие 3.2.6, получаем

Следствие 3.2.14. *Если* $\widehat{\varphi}(\xi) = o(\xi^{-L})$ *при* $\xi \to \infty$, *то* $\deg m_0 \geqslant L + 1$. *Единственной маской данной степени* $n \geqslant 0$, *для которой* $\widehat{\varphi}(\xi) = o(\xi^{1-n})$, *является маска* $m_0(\xi) = \left(\dfrac{e^{-2\pi i\xi}+1}{2}\right)^n$, *соответствующая B-сплайну.*

Следующим шагом мы свяжем гладкость масштабирующей функции с ее аппроксимационными свойствами. Для этого нам понадобится доказать один вспомогательный результат, касающийся произвольных функций с компактным носителем. Оказывается, что свойство функции порождать пространство полиномов (т. е. условие Стрэнга–Фикса соответствующего порядка) равносильно ее свойству хорошо приближать гладкие функции.

3.3. Приближение сдвигами масштабирующей функции

Рассмотрим сначала произвольную обобщенную функцию $f \in S'$ с компактным носителем. Если f удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка $L \geqslant 0$, то она порождает сдвигами пространство полиномов степени L. При этом функция f, вообще говоря, не обязана быть непрерывной, и даже вовсе может не быть регулярной функцией. Порядок L для любой функции f ограничен, так как порядок любого нуля целой функции $\widehat{f}$ ограничен. Пусть L — наибольший порядок условия Стрэнга–Фикса, которому удовлетворяет f. В силу теоремы 3.2.1, целые сдвиги f не порождают полинома x^{L+1}. Таким образом, они не порождают всех гладких функций. Более того, ограничение пространства V_f на любой отрезок $[a, b]$ конечномерно, поэтому данное пространство не может не только содержать в себе, но даже и приближать с любой точностью какой-либо класс функций (C^l или W_p^l). Поэтому задача ставится по-другому: приблизить функцию некоторого класса сжатиями целых сдвигов функции f.

Определение 3.3.1. Для данной функции $f \in S'$ с компактным носителем и для данного $h \in (0,1)$ положим $V_f(h) = \left\{ \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k f\Big(h^{-1}\cdot - k\Big) \right\}$. Если f является регулярной ограниченной функцией, то ее *порядком приближения* в метрике $C(\mathbb{R})$ называется супремум величин $\gamma > 0$, для которых

$$\inf_{g\in V_f(h)} \|\psi - g\|_{C[-M,M]} \leqslant C(M,\psi)h^\gamma$$

при любых $\psi \in C^l(\mathbb{R})$ $(l = [\gamma])$, $M > 0$, $h \in (0,1)$, где $C(M, \psi)$ — положительная константа. Аналогично определяется порядок приближения в метрике L_p.

Иными словами, порядок приближения больше или равен γ, если расстояние от любой достаточно гладкой функции с компактным носителем до пространства $V_f(h)$ (в соответствующей метрике) равно $O(h^\gamma)$ при $h \to 0$. Порядок приближения в пространстве C будем обозначать через w_f, в пространстве L_p — через $w_{f,p}$. Если фиксировать гладкую функцию $\psi(x)$ по аналогии определяется порядок ее приближения $w_f(\psi)$ пространствами $V_f(h)$.

Теорема 3.3.2. *Пусть f — ограниченная функция с компактным носителем, $L \geqslant 0$ — целое число. Если порядок приближения f больше L, то f удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L. Обратно, если f удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L, то ее порядок приближения больше или равен $L+1$. Более того, для любой функции $\psi \in C^L(\mathbb{R})$, не принадлежащей $C^{L+1}(\mathbb{R})$ имеем*

$$w_f(\psi) = \alpha_\psi, \tag{3.16}$$

где α_ψ — показатель гладкости Гёльдера функции ψ. Тот же результат верен для приближения в метрике L_p с заменой пространства C^L на W_p^L и с заменой соответствующих показателей гладкости. При этом предполагается, что $f \in L_p(\mathbb{R})$.

Перед доказательством теоремы отметим два его следствия:

Следствие 3.3.3. *Порядок приближения любой финитной функции f равен $L+1$, где L — наибольшее число, для которого $\mathcal{P}_L \subset V_f$ (если V_f не содержит $\mathcal{P}_0$ (пространства тождественных констант), то полагаем $L = -1$).*

Следствие 3.3.4. *Порядок приближения любой финитной функции является целым числом.*

Доказательство теоремы 3.3.2. проведем для пространства C, для L_p все аналогично.

Достаточность. Для произвольной функции $\psi \in C^L \setminus C^{L+1}$ и малого $h > 0$ нужно предъявить линейную комбинацию

$$\sum_k a_k f(h^{-1} \cdot - k),$$

приближающую данную функцию на отрезке $[-M, M]$ с точностью $C_M h^\alpha$, где $\alpha = \alpha_\psi$ — показатель Гёльдера ψ. При выполнении условия Стрэнга–Фикса порядка L имеем (формула (3.12))

$$P(x) = \sum_k \left[S_f^{-1} P\right](k) f(x-k)$$

для любого полинома P степени $\leqslant L$. Пусть A_k — оператор сдвига аргумента на k единиц: $A_k \psi(\cdot) = \psi(\cdot + k)$. Тогда $a_k = S_f^{-1} P(k) =$

$= A_k S_f^{-1} P(0)$. Легко показать, что оператор сдвига перестановочен с оператором свертки, поэтому

$$A_k S_f^{-1} P(0) = S_f^{-1} A_k P(0).$$

Итак,

$$a_k = S_f^{-1} A_k P(0) = [S_f^{-1} P(\cdot + k)](0) = \big\langle \delta,\, S_f^{-1} P(\cdot + k) \big\rangle,$$

где δ — дельта-функция. Далее,

$$\big\langle \delta,\, S_f^{-1} P(\cdot + k) \big\rangle = \big\langle (S_f^{-1})^* \delta,\, P(\cdot + k) \big\rangle.$$

Таким образом, $a_k = \big\langle (S_f^{-1})^* \delta,\, P(\,\cdot + k) \big\rangle$. Итак, коэффициенты разложения полинома по целым сдвигам функции f являются значениями линейного функционала $(S_f^{-1})^* \delta$ на целых сдвигах данного полинома. Теперь мы продолжим этот функционал по теореме Хана–Банаха на пространство $C[-M, M]$, и получим формулу разложения произвольной непрерывной функции, аналогичную (3.12). Эта формула точна на полиномах степени не выше L. Для произвольного отрезка $[a, b]$ функционал $(S_f^{-1})^* \delta$ определен на пространстве $\mathcal{P}_L[a, b]$, даже если $0 \notin [a, b]$. Ставим в соответствие каждой непрерывной функции $\psi \in C(\mathbb{R})$ ряд

$$\psi(x) \ \sim\ \sum_k \big\langle \lambda(\cdot - k), \psi(\cdot) \big\rangle f(x - k). \tag{3.17}$$

Данное разложение точно на полиномах степени не выше L и сохраняет компактность носителя функции: если ψ имеет компактный носитель, то и соответствующий ряд (3.17) также имеет компактный носитель. Покажем, что разложение, сжатое с коэффициентом $h > 0$:

$$\psi(x) \ \sim\ \psi_{\lambda,h}(x) = \sum_k h^{-1} \Big\langle \lambda\big(h^{-1} \cdot - k\big), \psi \Big\rangle f\big(h^{-1} x - k\big), \tag{3.18}$$

приближает ψ на любом отрезке с точностью $O(h^\alpha)$, где

$$\alpha \ =\ \min\{\alpha_\psi,\, L + 1\}.$$

Возьмем настолько большое N, что

$$\operatorname{supp} f \subset [-N, N], \quad \operatorname{supp} \lambda \subset [-N, N].$$

Предположим также, что $\psi \in C^L(\mathbb{R})$ (иначе заменим L на максимальное целое l, для которого $\psi \in C^l$). Берем теперь произвольную точку x_0 и отрезок $[x_0 - 2Nh,\, x_0 + 2Nh]$. Очевидно, значение функции $\psi_{\lambda,h}$ в точке x_0 полностью определяется значениями функции ψ на этом отрезке. Функция ψ, в свою очередь, может быть равномерно приближена на этом отрезке полиномом степени не выше L с точностью $O(h^\alpha)$. В частности, для полинома Тейлора

$$p_{x_0,L}(x) = \psi(x_0) + \ldots + \frac{\psi^{(L)}(x_0)}{L!}\,(x - x_0)^L$$

имеем
$$\|\psi - p_{x_0,L}\|_{C[x_0-2Nh,x_0+2Nh]} \leqslant C_\varepsilon h^{\alpha-\varepsilon}$$
для любого $\varepsilon > 0$ (см. [19]). Тогда для всех $k \in \left[\frac{x_0}{h} - N, \frac{x_0}{h} + N\right]$ (для таких k имеем $\operatorname{supp} \lambda(h^{-1} \cdot - k) \subset [x_0 - 2Nh, x_0 + 2Nh]$) получаем
$$\left|h^{-1}\left\langle\lambda(h^{-1} \cdot -k),\ \psi\right\rangle - h^{-1}\left\langle\lambda(h^{-1} \cdot -k),\ p_{x_0,L}\right\rangle\right| =$$
$$= \left|h^{-1}\left\langle\lambda(h^{-1} \cdot -k),\ \psi - p_{x_0,L}\right\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|h^{-1}\lambda(h^{-1} \cdot -k)\right\|_{C^*[x_0-2Nh,x_0+2Nh]} \|\psi - p_{x_0,L}\|_{C[x_0-2Nh,x_0+2Nh]} \leqslant$$
$$\leqslant \|\lambda\| \cdot C_\varepsilon h^{\alpha-\varepsilon},$$
где $\|\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$ — полная вариация заряда λ. Тогда
$$|p_{x_0,L}(x_0) - \psi_{\lambda,h}(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k\in\left[\frac{x_0}{h}-N,\frac{x_0}{h}+N\right]} \left|h^{-1}\left\langle\lambda(h^{-1} \cdot -k),\ p_{x_0,L}\right\rangle - h^{-1}\left\langle\lambda(h^{-1} \cdot -k),\ \psi\right\rangle\right| \cdot \|f\| \leqslant$$
$$\leqslant 2N\|f\| \cdot \|\lambda\| C_\varepsilon h^{\alpha-\varepsilon}.$$
Так как $\psi(x_0) = p_{x_0,L}(x_0)$, то теперь получаем окончательно
$$|\psi(x_0) - \psi_{\lambda,h}(x_0)| \leqslant 2N\|f\| \cdot \|\lambda\| C_\varepsilon h^{\alpha-\varepsilon}$$
равномерно по всем точкам x_0 на любом компакте. Достаточность доказана.

Необходимость. Покажем, что произвольная обобщенная функция с компактным носителем, порядок аппроксимации которой больше L, обязана удовлетворять условию Стрэнга–Фикса того же порядка. Взяв в качестве приближаемой функции полином x^r степени не выше L, имеем
$$\inf_{g\in V_f(h)} \|x^r - g\|_{C[-M,M]} = o(h^L), \quad h \to 0$$
(так как $w_f > L$). С другой стороны
$$\inf_{g\in V_f(h)} \|x^r - g\|_{C[-M,M]} = \inf_{g\in V_f} \|(hx)^r - g\|_{C[-M/h,M/h]} =$$
$$= h^r \inf_{g\in V_f} \|x^r - g\|_{C[-M/h,M/h]} \geqslant h^r \inf_{g\in V_f} \|x^r - g\|_{C[-M,M]}.$$
Итак,
$$h^r \inf_{g\in V_f} \|x^r - g\|_{V[-M,M]} = o(h^L), \quad h \to 0,$$
следовательно,
$$\inf_{g\in V_f} \|x^r - g\|_{C[-M,M]} = o(h^{L-r}),$$
значит,
$$\inf_{g\in V_f} \|x^r - g\|_{C[-M,M]} = o(1), \quad h \to 0,$$

для всех $r = 0, \ldots, L$. Таким образом, пространство V_f приближает все полиномы степени не выше L, но поскольку на любом отрезке $[-M, M]$ это пространство конечномерно, оно должно содержать в себе все эти полиномы. Поэтому $\mathcal{P}_L \subset V_f$, и в силу теоремы 3.2.1 функция f удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L. $\diamondsuit$

Замечание 3.3.5. Несложно построить функционал λ необходимый для разложения (3.18). Согласно теореме Рисса об общем виде элемента из $C^*[a, b]$ (см. приложение A.2) данный функционал задается некоторым борелевским зарядом λ. Таким образом,

$$(S_f^{-1})^* \delta P = \int_a^b P\, d\lambda = \langle \lambda, P \rangle$$

для любого $P \in \mathcal{P}_L$. Заметим, что в качестве λ может быть взят любой борелевский заряд, удовлетворяющий соотношениям

$$[S_f^{-1} p](0) = \langle \lambda,\, p \rangle$$

для $p = 1, x, \ldots, x^L$, или иначе

$$p(0) = \langle \lambda,\ f * p \rangle, \quad p = 1,\, x, \ldots,\, x^L,$$

откуда

$$\langle \lambda,\ f * [x^r] \rangle = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \langle \lambda, x^j \rangle \cdot \langle f,\ x^{r-j} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{при } r = 0; \\ 0, & \text{при } r = 1, \ldots, L. \end{cases} \tag{3.19}$$

Таким образом, λ — борелевский заряд, для которого

$$\langle \lambda,\ x^j \rangle = \alpha_j, \quad j = 0, \ldots, L, \tag{3.20}$$

где константы $\alpha_0, \ldots, \alpha_L$ определяются из линейной системы (3.19). В частности, $\alpha_0 = 1$, значит, $\int_a^b d\lambda = 1$. Заряд можно взять дискретным:

$$(\lambda, \psi) = \sum_{s=0}^{L} \beta_s \psi(x_s),$$

где $x_0, \ldots, x_L$ — различные точки отрезка $[a, b]$, и коэффициенты β_s определяются из системы (3.20). Для каждого набора точек $x_0, \ldots, x_L$ система имеет единственное решение, так как ее определитель является соответствующим определителем Вандермонда (см. лемму A.18.1 и замечание A.18.2 в приложении A.18). В качестве λ можно взять также произвольную абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую

$$\int_a^b x^j \lambda'(x)\, dx = \alpha_j, \qquad j = 0, \ldots, L.$$

Выбор такой функции, конечно, не единственный.

Замечание 3.3.6. Для функций ψ с ограниченной на всей прямой L-й производной имеет место аналог теоремы 3.3.2 для равномерного приближения на всем $\mathbb{R}$, без ограничения на отрезки $[-M, M]$. Если f удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L, то

$$\inf_{g \in V_f(h)} \|g - \psi\|_\infty = O(h^L).$$

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3.3.2.

Замечание 3.3.7. В доказательстве теоремы 3.3.2 мы могли бы использовать вместо полинома Тейлора произвольный полином, хорошо приближающий данную функцию ψ на отрезке $[x_0 - 2Nh, x_0 + 2Nh]$. Следовательно, любая функция, которая может быть локально приближена полиномами степени не выше L, может с такой же точностью быть приближена функциями $\{f(h^{-1} \cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (при условии, что f удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L). Поэтому для данной функции ψ величина $w_f(\psi)$ характеризуется порядком ее приближения алгебраическими полиномами. Последнее может быть выражено, например, с помощью конечных разностей, либо иными средствами теории приближений (см. приложение А.15, а также [19]).

Замечание 3.3.8. Для аппроксимационных свойств финитной функции f от нее требуются только условия Стрэнга–Фикса, и более никаких требований. В частности, от f не требуется гладкости. Она, вообще говоря, может быть произвольной ограниченной борелевской функцией с компактным носителем. При этом, однако, требование ограниченности нельзя снять. Читатель легко придумает соответствующие примеры.

Замечание 3.3.9. Так как разложение (3.18) зависит от функции ψ локально, то можно доказать следующий локальный вариант теоремы 3.3.2:

Если ограниченная функция f с компактным носителем удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L, то произвольная функция ψ, непрерывная в точке x, может быть равномерно приближена системой функций $\{f(h^{-1} \cdot - k)\}$ в некоторой окрестности точки x. При этом порядок приближения равен $\min\{L+1, \alpha_\psi(x)\}$.

Необходимые условия теоремы 3.3.2 также могут быть сформулированы локально. Заметим также, что в доказательстве теоремы мы использовали лишь то условие, что система $\{f(h^{-1} \cdot - k)\}$ приближает степенную функцию x^r на некотором отрезке $[-M, M]$, отрезок при этом можно взять сколь угодно малым.

Пусть ограниченная функция f имеет компактный носитель, пусть также $[a, b]$ — произвольный отрезок. Если для каждой функции $\psi \in C^L[a, b]$, $L \geqslant 0$, найдется последовательность $h_j \to +0$, для которой

$$\inf_{v \in V_f(h_j)} \|v - \psi_{|[a,b]}\|_{C[a,b]} = o(h_j^L), \quad j \to \infty,$$

то f удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка L.

Замечание 3.3.10 (приближение в пространстве L_p). Покажем, как доказать теорему 3.3.2 для случая метрики L_p. Доказательство необходимости остается прежним. Докажем достаточность. Предположим, что функция $f \in L_p$ удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка $L \geqslant 0$. Возьмем произвольный заряд с компактным носителем $\lambda \in L_q$, где $1/q + 1/p = 1$, удовлетворяющий (3.20) и для данной функции $\psi \in W_p^L$ построим ее разложение $\psi_{\lambda,h}$ по формуле (3.18).

Ограничиваем функцию ψ на некоторый отрезок $[-M, M]$ и фиксируем малое $\varepsilon > 0$. Берем теперь некоторый отрезок $[-N, N]$, содержащий носители функции f и заряда λ. Для произвольного $x \in [-M, M]$ приближаем функцию ψ на отрезке $[x - 2hN, x + 2hN]$ подходящим полиномом $P(x)$ степени не выше L так, что

$$\|\psi - P\|_{L_p[x-2hN,x+2hN]} \leqslant C_1 h^{\alpha-\varepsilon} \|\psi\|_{L_p[x-2hN,x+2hN]}$$

(это возможно в силу неравенства Джексона, см. приложение A.15, теорема A.15.2). Далее, пользуясь тем, что разложение (3.18) точно на полиномах степени не выше L, применяем то же рассуждение, что при доказательстве теоремы 3.3.2, и получаем

$$\|\psi - \psi_{\lambda,h}\|_{L_p[-M,M]} \leqslant C_2 h^{\alpha-\varepsilon} \|\psi\|_{L_p[-M,M]}.$$

Остается разбить прямую на отрезки длины $2M$ и сложить данное неравенство (вернее, p-ю степень этого неравенства) по всем отрезкам.

Совместив теоремы 3.2.3 и 3.3.2, получаем следующий результат.

Теорема 3.3.11. *Если масштабирующая функция принадлежит C^L (W_p^L), то ее порядок приближения в соответствующем пространстве не меньше $L + 1$.*

3.4. Линейная независимость, стабильность и ортогональность целых сдвигов

Мы будем различать линейную зависимость целых сдвигов функции f над пространством всех последовательностей ℓ (существует некоторая последовательность, для которой $\sum\limits_k \lambda_k f(\cdot - k) = 0$) и над пространством ограниченных последовательностей ℓ_∞ (когда найдется ограниченная последовательность λ с указанным свойством). Если это не оговорено явно, линейная зависимость и независимость будет пониматься в общем виде, т. е. над пространством всех последовательностей ℓ. Как правило, для изучения всплесков достаточно линейной независимости целых сдвигов над ℓ_∞, однако мы будем формулировать все результаты в общей ситуации.

Определение 3.4.1. *Периодическим нулем* целой функции $g(\xi)$ мы будем называть последовательность комплексных чисел $\Theta = \{\theta_0 + k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ целиком состоящую из нулей функции g.

Периодический нуль, все элементы которого действительны, будем называть *действительным периодическим нулем*.

Ясно, что периодический нуль действителен, если он содержит хотя бы одно действительное число. Если функция g представима в виде произведения $g(\xi) = (e^{2\pi i\xi} - a)h(\xi)$, где h — целая функция, то $\dfrac{1}{2\pi i}\mathrm{Ln}\, a$ — периодический нуль для g. Обратно, если $\Theta = \{\theta_0 + k,\ k \in \in \mathbb{Z}\}$ — периодический нуль функции g, то g делится на $e^{2\pi i\xi} - e^{2\pi i\theta_0}$, т. е. представляется в виде $\left(e^{2\pi iz} - e^{2\pi i\theta_0}\right) h(\xi)$, где h — целая функция. Кратность периодического нуля определяется как максимальная степень r такая, что g делится на $\left(e^{2\pi i\xi} - e^{2\pi i\theta_0}\right)^r$. Для всех элементов $\theta \in \Theta$ значение экспоненты $e^{2\pi i\theta}$ одно и то же, его мы будем обозначать символом $e^{2\pi i\Theta}$.

Пусть обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'$ имеет компактный носитель. Если ее преобразование Фурье имеет периодический нуль, то целые сдвиги функции f линейно зависимы:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda^k f(x-k) = 0, \tag{3.21}$$

где $\lambda = e^{2\pi i\Theta}$, $\Theta = \{\theta_0 + k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$ — периодический нуль. Для доказательства достаточно применить формулу суммирования Пуассона к функции $g(x) = e^{-2\pi i\theta_0 x} f(x)$. Имеем:

$$e^{-2\pi i\theta_0 x}\left[\sum_k \lambda^k f(x-k)\right] = \sum_k e^{-2\pi i\theta_0(x-k)} f(x-k) = \sum_k g(x-k) = \\ = \sum_n \widehat{g}(n) e^{2\pi inx} = \sum_n \widehat{f}(\theta_0 + n) e^{2\pi inx} = 0.$$

Аналогично доказывается, что если периодический нуль Θ имеет кратность r, то

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^n \lambda^k f(x-k) = 0, \quad \lambda = e^{2\pi i\Theta}, \tag{3.22}$$

для каждого $n = 0,\ \ldots, r-1$. Последовательность $\{\lambda^k\}$ будет ограниченной, если периодический нуль Θ действительный. Так что, если функция $\widehat{f}$ имеет действительный периодический нуль, то целые сдвиги f линейно зависимы над ℓ_∞.

Целая функция может иметь бесконечно много периодических нулей. Однако если она является преобразованием Фурье обобщенной функции с компактным носителем, то число ее периодических нулей конечно и не может превосходить длины носителя. Это следует из формулы (3.21). Более того, из формулы (3.22) заключаем, что сумма кратностей всех периодических нулей не превосходит длины носителя N.

Рассмотрим оператор свертки с функцией f на пространстве последовательностей $\mathcal{S}_f :\ \ell \to V_f$. Индекс будем опускать, если понятно, о какой функции f идет речь. $\mathcal{S}^p$ — ограничение этого оператора на пространство ℓ_p. Ядро этого оператора обозначим через $\mathcal{N}$ (соответственно $\mathcal{N}_p$). Таким образом, если $\widehat{f}$ имеет периодический нуль, то оператор $\mathcal{S}$ вырожден ($\mathcal{N} \neq \{0\}$). Если же есть действительный периодический нуль, то $\mathcal{N}_\infty \neq \{0\}$. Как мы покажем далее (теорема 3.4.2) ядро $\mathcal{N}$ конечномерно, его размерность не превосходит длины носителя функции f.

Теорема 3.4.2. *Целые сдвиги обобщенной функции f с компактным носителем линейно зависимы тогда и только тогда когда ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ имеет периодический нуль. Для линейной зависимости над ℓ_∞ необходимо и достаточно существование действительного периодического нуля. Ядро оператора $\mathcal{S}$ имеет вид*

$$\mathcal{N} = \operatorname{span}\Big\{(\lambda_1^k), \ldots, (k^{r_1-1}\lambda_1^k), \ldots, (\lambda_q^k), \ldots, (k^{r_q-1}\lambda_q^k)\Big\}, \tag{3.23}$$

где $\lambda_n = e^{2\pi i \Theta_n}$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_q$ — периодические нули функции $\widehat{f}$, $r_1, \ldots$ $\ldots, r_q$ — их кратности.

Следствие 3.4.3. *В обозначениях теоремы* 3.4.2

$$\dim \mathcal{N} = r_1 + \ldots + r_q,$$

т. е. размерность ядра оператора $\mathcal{S}$ равна сумме кратностей всех периодических нулей функции $\widehat{f}$. Это число не превосходит длины носителя функции f.

Следствие 3.4.4. *Для ядра оператора $\mathcal{S}^\infty$ имеем*

$$\mathcal{N}_\infty = \operatorname{span}\Big\{(\lambda_1^k), \ldots, (\lambda_j^k)\Big\},$$

где $\lambda_n = e^{2\pi i \Theta_n}$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_j$ — действительные периодические нули функции $\widehat{f}$. Таким образом, размерность ядра $\dim \mathcal{N}_\infty$ равна числу различных действительных периодических нулей.

Следствие 3.4.5. *Для каждого $p \in [1, +\infty)$ оператор S^p невырожден, т. е. $\mathcal{N}_p = \{0\}$.*

Для доказательства следствия 3.4.4 заметим, что линейная комбинация нескольких различных последовательностей вида $(k^r\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ограничена только в том случае, если все λ по модулю равны 1, а все степени r равны нулю (см. приложение A.18, предложение A.18.4). Воспользовавшись представлением (3.23), получаем, что элемент ядра $\mathcal{N}$ принадлежит ℓ_∞, если все степени r_n равны 0, а все показатели λ_n по модулю равны 1, т. е. соответствуют действительным периодическим нулям. Следствие 3.4.4 доказано.

Теперь воспользуемся тем фактом, что никакая конечная линейная комбинация последовательностей вида $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}$, где все λ по модулю равны 1, не может стремиться к нулю при $k \to \infty$ (см. приложение A.18, следствие A.18.5). Следовательно, она не может принадлежать ℓ_p при $p < \infty$, что доказывает следствие 3.4.5.

Доказательство теоремы 3.4.2. Всякая линейная комбинация последовательностей

$$(k^l\lambda_n^k), \quad l=0,\ldots,r_n-1, \quad n=1,\ldots,q,$$

содержится в ядре $\mathcal{N}$, это следует из (3.22). Остается доказать обратное: каждый элемент ядра является такой линейной комбинацией. Не ограничивая общности, предполагаем, что $\operatorname{supp} f\subset[0,N]$. Вначале мы осуществляем регуляризацию функции f (заменяем f на ее свертку с подходящей гладкой функцией) и тем самым сводим задачу к случаю непрерывной функции f. Затем, так же как при доказательстве теоремы 3.2.1, берем произвольное $y\in[N-1,N]$ и заключаем, что любая последовательность $\{a_k\}$, обладающая свойством

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(y-j)a_{j+n}=0, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{3.24}$$

дается формулой (3.8), т. е.

$$a_k=\sum_{n=1}^{q}\lambda_n^k p_n(k)$$

где показатели λ_n являются корнями характеристического многочлена

$$\chi_y(\lambda)=\sum_{j=0}^{N-1} f(y-j)\lambda^j,$$

а степени полиномов p_n не превышают кратностей этих корней. Если же последовательность $\{a_k\}$ принадлежит ядру $\mathcal{N}$, то она удовлетворяет (3.24) при всех $y\in[0,1]$. Значит, каждый λ_n есть общий корень всех многочленов χ_y, $\; y\in[0,1]$, и кратность этого корня не ниже, чем $\deg p_n$. Тогда для каждого λ_n имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} k^l\lambda^j f(y-j)=0, \quad y\in[0,1],$$

следовательно,

$$\sum_k k^l\lambda_n^k f(x-k)\equiv 0, \quad l=0,\ldots,\deg p_n.$$

Согласно (3.22) это означает, что $\dfrac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln}\lambda_n$ — периодический нуль функции $\widehat{f}$ кратности не ниже, чем $\deg p_n$. $\Diamond$

Замечание 3.4.6. Фактически мы доказали несколько более сильное утверждение: *если функция $\sum\limits_k a_k f(x-k)$ равна нулю тождественно на некотором луче $x\geqslant A$, то либо $a_k=0$ для всех достаточно больших k, либо функция $\widehat{f}$ имеет периодический нуль. Если* *при этом* $\{a_k\} \in \ell_\infty$, *то* $\widehat{f}$ *имеет действительный периодический нуль.*

Таким образом, установлено следующее

Предложение 3.4.7. *Если для некоторой последовательности* $\{a_k\}$ *функция* $\sum\limits_k a_k f(x-k)$ *имеет компактный носитель, то либо последовательность финитна, либо целые сдвиги* f *линейно зависимы.*

Теперь применим эти результаты к масштабирующим функциям. После теоремы 3.4.2 естественно ожидать, что независимость целых сдвигов определяется исключительно положением нулей полинома $m_0(\xi)$ (маски). Это действительно так. Однако множество нулей маски может иметь сложную структуру, и, чтобы охарактеризовать ее, нам понадобится ввести еще несколько определений.

Рассмотрим произвольный тригонометрический полином $p(\xi)$. Если для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$ имеем $p\left(\frac{\alpha}{2}\right) = p\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = 0$, то пара $\left\{\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right\}$ называется *парой симметричных корней полинома* $p(\xi)$. Для определенности мы везде будем считать, что для произвольного $\alpha \in \mathbb{T}$ элементу $\alpha/2 \in \mathbb{T}$ соответствует число из полуинтервала $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, а элементу $\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$ соответствует число из $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Аналогично определяется пара симметричных корней для соответствующего алгебраического полинома $\mathbf{p}(z)$: эта пара чисел $\{\pm\sqrt{z}\}$ таких, что $\mathbf{p}(\sqrt{z}) = \mathbf{p}(-\sqrt{z}) = 0$.

Множество различных ненулевых комплексных чисел $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots \ldots, b_n\}$ называется *циклическим*, если $b_{j+1} = b_j^2$, $j = 1, \ldots, n$ (при этом полагаем $b_{n+1} = b_1$). Ясно, что любое циклическое множество лежит на единичной окружности $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Простейшее циклическое множество — это $\{1\}$, далее следует множество из двух элементов $\{e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$ и т. д. Для каждого n существует конечное число циклических множеств, состоящих из n элементов. Наименьшее циклическое множество $\{1\}$ будем называть *тривиальным*, все остальные — нетривиальные. Мы будем рассматривать только неприводимые циклические множества, у которых все элементы различны. Заметим, что если два неприводимых циклических множества не совпадают, то они не пересекаются. Комплексное число $b \neq 0$ назовем *циклическим*, если оно является элементом некоторого циклического множества, т. е. если $b^{2^n} = b$. Наименьшее такое n называется *порядком данного циклического числа*. Циклическое множество $\mathbf{b}$ является *циклом* полинома $\mathbf{p}$, если $\mathbf{p}(-\mathbf{b}) = 0$, т. е. $\mathbf{p}(-b_j) = 0$ для всех $b_j \in \mathbf{b}$. Если $\mathbf{b} = \{1\}$, то цикл называется *тривиальным*, все прочие циклы называются нетривиальными. Нам понадобится следующая

Лемма 3.4.8. *Пусть* A, B — *два конечных множества ненулевых комплексных чисел, причем для любого* $z \in B$ *оба числа* $\pm\sqrt{z}$ *лежат* *в $A \cup B$. Тогда либо A содержит пару симметричных чисел $\{a, -a\}$, либо B содержит циклическое множество $\mathbf{b}$ такое, что $-\mathbf{b} \subset A$.*

Доказательство. Предположим, что A не содержит симметричной пары. Тогда для произвольного $z_1 \in B$ хотя бы одно из чисел $\pm\sqrt{z_1}$ принадлежит B. Обозначим это число через z_2. Хотя бы одно из чисел $\pm\sqrt{z_2}$ принадлежит B, обозначаем его через z_3 и т. д. Получим последовательность $\{z_k\} \subset B$, в силу конечности B имеем $z_j = z_{j+n}$ для некоторых $j, n \in \mathbb{N}$. Тогда $z_j^{2^n} = z_j$, следовательно, $z_1^{2^n} = z_1$. Итак, множество $\mathbf{b} = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset B$ — циклическое, не ограничивая общности считаем его неприводимым. Если $-\mathbf{b} \subset A$, то все доказано. Пусть $-z_j \notin A$ для некоторого $z_j \in \mathbf{b}$. Тогда $-z_j \in B$, поскольку $-z_j \in \{\pm\sqrt{z_{j-1}}\} \subset A \cup B$. Применив теперь те же рассуждения, показываем, что число $-z_j$ принадлежит некоторому неприводимому циклическому множеству $\mathbf{b}' \subset B$. Заметим, что $z_{j-1} = (-z_j)^2 \in \mathbf{b}'$. Таким образом, множества $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{b}$ пересекаются, следовательно, $\mathbf{b}' = \mathbf{b}$. Последнее невозможно, так как $-z_j \notin \mathbf{b}$. Значит, $-\mathbf{b} \subset A$, что завершает доказательство. $\Diamond$

Предложение 3.4.9. *Преобразование Фурье масштабирующей функции имеет периодический нуль тогда и только тогда, когда маска уравнения $\mathbf{m}_0$ имеет либо нетривиальный цикл, либо пару симметричных нулей. Оно имеет действительный периодический нуль тогда и только тогда, когда $\mathbf{m}$ либо имеет нетривиальный цикл, либо имеет пару симметричных нулей на единичной окружности.*

Доказательство. Если $\mathbf{m}$ имеет пару симметричных нулей, которые мы обозначим $e^{-2\pi i\alpha/2}$, $-e^{-2\pi i\alpha/2}$, $(\alpha \in \mathbb{C})$, то $\mathbf{m}\Big(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{k}{2}\Big) = 0$ для любого целого k, следовательно,

$$\widehat{\varphi}(\alpha + k) = \widehat{\varphi}\Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{k}{2}\Big) m\Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{k}{2}\Big) = 0.$$

Значит, $\{\alpha + k\}$ — периодический нуль. Он будет действительным в случае $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $\mathbf{m}$ имеет цикл $\mathbf{b} = \{z_1, \ldots, z_n\}$, то $\widehat{\varphi}$ имеет n периодических нулей $\dfrac{1}{2\pi i}\mathrm{Ln} z_r = \{\alpha_r + k\}$, $r = 1, \ldots, n$. В самом деле, фиксируем некоторое k и возьмем наименьшее целое s, для которого $e^{-2\pi i 2^{-s}(\alpha_r + k)} \notin \mathbf{b}$. Ясно, что $s \geqslant 1$. Тогда

$$e^{-2\pi i 2^{-s+1}(\alpha_r + k)} \in \mathbf{b},$$

и, значит,

$$-e^{-2\pi i 2^{-s}(\alpha_r + k)} \in \mathbf{b}.$$

Следовательно, $m_0\big(2^{-s}(\alpha_r + k)\big) = 0$. Воспользовавшись теперь разложением (3.5), получаем $\widehat{\varphi}(\alpha_r + k) = 0$, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть $\widehat{\varphi}$ имеет периодический нуль. Тогда множества

$$A = \{z \in \mathbb{C},\ \mathbf{m}(z) = 0\},$$

$$B = \left\{z \in \mathbb{C},\ \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln} z \text{ — периодический нуль функции } \widehat{\varphi}\right\}$$

удовлетворяют условиям леммы 3.4.8. Действительно, оба множества конечны (функция $\widehat{\varphi}$ может иметь лишь конечное число периодических нулей), кроме того из равенства $\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)$ следует, что $\{\pm\sqrt{z}\} \subset A \cup B$ для каждого $z \in B$. Применяя лемму 3.4.8, получаем, что либо $\mathbf{m}_0$ имеет пару симметричных нулей, либо цикл, причем цикл нетривиальный, так как $\mathbf{m}_0(1) \neq 0$. $\Diamond$

Таким образом, установлена следующая

Теорема 3.4.10. *Целые сдвиги масштабирующей функции линейно независимы в том и только том случае, когда маска не имеет ни нетривиальных циклов, ни симметричных нулей. Они линейно независимы над ℓ_∞ в том и только том случае, когда маска не имеет ни нетривиальных циклов, ни симметричных нулей на единичной окружности.*

Теперь исследуем когда целые сдвиги масштабирующей функции обладают свойством базиса Рисса. Введем сначала следующее обобщение понятия базиса Рисса на пространства $L_p(\mathbb{R})$:

Определение 3.4.11. Для данного $p \in [1, +\infty]$ функция f называется *ℓ_p-стабильной*, или, что то же самое, обладает свойством базиса Рисса в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, если ее целочисленные сдвиги образуют базис Рисса (в метрике L_p) своей линейной оболочки. Это значит, что $f \in L_p(\mathbb{R})$ и существуют положительные константы A_p, B_p такие, что для каждой последовательности $a = \{a_k\} \in \ell_p$

$$A_p\|a\|_p \leqslant \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k f(x-k)\right\|_p \leqslant B_p\|a\|_p, \tag{3.25}$$

При $p = 2$ получаем классическое определение системы Рисса в $L_2(\mathbb{R})$ (определение 1.1.1). Свойство ℓ_p- стабильности означает, что оператор $\mathcal{S}^p(a) = a * f$ *ограниченно обратим* в метрике L_p. Напомним, что линейная независимость целых сдвигов означает простую (теоретико-множественную) обратимость. Следовательно, ℓ_p-стабильность влечет линейную независимость, но не наоборот. Вообще говоря, функция может быть стабильна для некоторого p и нестабильна для других. Оказывается, однако, что для функций с компактным носителем стабильность для всех $p \in [1, +\infty]$ эквивалентна линейной независимости над ℓ_∞.

Теорема 3.4.12. *Для произвольной функции f следующие свойства эквивалентны*:

1) *функция f ℓ_p-стабильна для некоторого $p \in [1, +\infty]$;*
2) *функция f ℓ_p-стабильна для всех $p \in [1, +\infty]$;*

3) *целые сдвиги f линейно независимы над ℓ_∞;*
4) *преобразование Фурье функции f не имеет действительных периодических нулей.*

Замечание 3.4.13. При $p=2$ получаем утверждение теоремы 1.1.7 (но только для финитных функций φ). В самом деле, если φ финитна, то ее преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ является целой функцией, а периодическая функция $\Phi(\xi)=\sum\limits_k |\varphi(\xi+k)|^2$ непрерывна (и даже является тригонометрическим полиномом, см. упражнение 1.1.13). Поэтому условие 4) теоремы 3.4.12 означает, что функция $\Phi(\xi)$ ограничена снизу положительной константой (ограниченность сверху следует из того, что функция периодична и непрерывна).

Доказательство. Если сдвиги $f(\cdot-k)$ линейно зависимы над ℓ_∞, то функция f нестабильна при $p=\infty$. Но она также нестабильна и при остальных значениях p. Докажем это. Согласно теореме 3.4.2 найдется действительное α, для которого $\sum\limits_k e^{2\pi ik\alpha}f(x-k)=0$. Не ограничивая общности, считаем, что $\operatorname{supp} f\subset[0,N]$. Возьмем произвольное $M\geqslant 2N$. Функция $\sum\limits_{k=0}^{M} e^{2\pi ik\alpha}f(x-k)$ равна нулю за пределами отрезков $[0,N-1]$ и $[M-N+1,N]$. Тогда

$$\Big\|\sum_{k=0}^{M} e^{2\pi ik\alpha}f(x-k)\Big\|_p \leqslant \Big\|\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ik\alpha}f(x-k)\Big\|_p + \\ + \Big\|\sum_{k=M-N+1}^{M} e^{2\pi ik\alpha}f(x-k)\Big\|_p \leqslant N\|f\|_p+N\|f\|_p=2N\|f\|_p.$$

Итак, для последовательности

$$\{a_k\}=(0,\ldots,1,e^{2\pi i\alpha},\ldots,e^{2\pi iM\alpha},0,\ldots)$$

получаем

$$\Big\|\sum_k a_k f(x-k)\Big\| \;/\; \|a\|_p \;\to\; 0, \quad M\to\infty.$$

Таким образом, функция f не является p-стабильной ни для какого p.

Обратно, предположим, что $\widehat{f}$ не имеет действительных периодических нулей, т. е. целые сдвиги функции f линейно независимы над ℓ_∞.

Докажем сначала, что функция p-стабильна при $p=\infty$. Предположим, что f нестабильна, тогда существует набор ограниченных последовательностей $a^k\in\ell_\infty$, $\|a^k\|=1$, для которых $\|a^k*f\|_\infty\to 0$, $k\to\infty$. Каждую из последовательностей можно сдвигать на целое число, поэтому мы можем предполагать, что $|a_0^k|\geqslant 1/2$ при каждом k. Далее, по теореме о слабой компактности единичного шара (см. приложение A.2) можно считать, что последовательность a^k слабо сходится к некоторому пределу $a \in \ell_\infty$. В пространствах ℓ_p это означает покоординатную сходимость (см. приложение А.2), причем в данном случае предел ненулевой, так как $|a_0| > 1/2$. Ясно, что $a^k * f$ сходится к $a * f$ на каждом компакте. С другой стороны, $a^k * f \to 0$. Значит, $a * f = 0$, т. е. сдвиги функции f линейно зависимы над ℓ_∞.

Теперь рассмотрим случай $p < \infty$. Нам понадобится дискретный аналог теоремы 3.4.2, который мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 3.4.14. *Пусть $f_0, \ldots, f_{N-1}$ — данные комплексные числа. Рассмотрим оператор $\Phi : \ell_p \to \ell_p$, действующий по формуле*

$$\Phi[a]_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k f_{l-k}$$

(полагаем $f_k = 0$ при $k \notin \{0, \ldots, N-1\}$).

Если $\inf\limits_{\|a\|_p=1} \Phi[a] = 0$, то полином $F(\xi) = \sum\limits_k f_k e^{2\pi i k \xi}$ имеет действительный корень.

Доказательство. Покажем сначала, что оператор Φ ограничен в ℓ_p. Поскольку $\Phi = \Phi_l$, где $\Phi_l[a] = f_l a(l + \cdot)$, имеем

$$\|\Phi\| \leqslant \sum_{l \in \mathbb{Z}} \|\Phi_l\| = \sum_k |f_l|.$$

Найдем теперь обратный оператор Φ^{-1}. Применив преобразование Фурье $a \to \widehat{a}(\xi) = \sum a_k e^{-2\pi i k \xi}$, находим

$$\widehat{\Phi[a]}(\xi) = \sum_l e^{-2\pi i l} \sum_k a_k f_{l-k} = \widehat{a}(\xi) F(-\xi).$$

Если полином F не имеет действительных корней, то определив $1/F(-\xi) = \sum\limits_k \beta_k e^{2\pi i k \xi}$ (функция $1/F$ — аналитическая на действительной прямой, поэтому ее коэффициенты Фурье β_k экспоненциально убывают, в частности, $\sum\limits_k |\beta_k| < \infty$. Применив обратное преобразование Фурье, получаем

$$\left(\Phi^{-1}[a]\right)_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \beta_{l-k}.$$

Воспользовавшись тем, что $\sum\limits_k |\beta_k| < \infty$, доказываем, как это было сделано с оператором Φ, что обратный оператор также ограничен в ℓ_p. Поэтому

$$\inf_{\|a\|_p=1} \|\Phi[a]\| = 1/\|\Phi^{-1}\| > 0,$$

что и требовалось доказать.

Продолжим доказательство теоремы 3.4.12 сведением ее к дискретному случаю. Предположим, что

$$\left\| \inf_{\|a\|_p=1} \sum_k a_k f(\cdot - k) \right\|_p = 0.$$

Берем целое j и рассмотрим оператор $F_j\colon\ \mathbb{R}^{2N+1} \to L[j,\, j+N]$, определяемый равенством

$$F_j[(b_0, \ldots, b_{2N})] = \Bigl(\sup_{k\in\mathbb{Z}} b_k f(x-j+N-k)\Bigr)|_{[j,j+N]}.$$

Ядро этого оператора порождено векторами

$$\Bigl(e^{2\pi i k\theta} k^l\Bigr)_{k=s}^{s=2N+1}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad l = 0, \ldots, r,$$

где $\{\theta + k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ — периодический нуль функции $\widehat{f}(\xi)$, а r — его кратность. Ядро одно и то же для всех операторов F_j, мы обозначим его через K. Поскольку оператор конечномерный, имеем

$$F_j(b) \geqslant C_0 \operatorname{dist}(b, K), \quad b \in \mathbb{R}^{2N+1},$$

где $\operatorname{dist}(b, K) = \inf\limits_{x\in K} \|b - x\|_p$, константа C_0 одна и та же для всех j. Тогда

$$\Bigl\|\sum_k a_k f(x-k)\Bigr\|_p^p = \frac{1}{N}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Bigl\|\Bigl(\sum_k a_k f(x-k)\Bigr)\Bigr|_{[l,l+N]}\Bigr\|_p^p =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_k \Bigl\|F_l(a_{-l-N}, \ldots, a_{-l+N})\Bigr\|_p^p \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C_0}{N}\sum_l \operatorname{dist}\Bigl((a_{-l-N}, \ldots, a_{-l+N})^T, K\Bigr)^p.$$

Таким образом,

$$\inf_{\|a\|_p=1} \sum_j \operatorname{dist}\Bigl((a_{-j-N}, \ldots, a_{-j+N})^T, K\Bigr)^p = 0. \tag{3.26}$$

Теперь возьмем некоторый тригонометрический полином

$$q(\xi) = \sum_{k=-N}^{N} q_k e^{-2\pi i k\xi},$$

который имеет корни (тех же кратностей) во всех действительных периодических нулях функции $\widehat{f}(\xi)$ и не имеет других действительных нулей. Рассмотрим теперь оператор

$$(Qa)_j = \sum_{k=-N}^{N} a_{-j+k} q_k$$

в пространстве ℓ_p. Ясно, что в случае $(a_{-j-N}, \ldots, a_{j+N})^T \in K$ имеем $(Qa)_j = 0$. Поэтому для любого вектора $(a_{-j-N}, \ldots, a_{j+N})^T \in \mathbb{R}_p^{2N+1}$ имеем

$$|(Qa)_j| \leqslant C_1 \operatorname{dist}\bigl((a_{-j-N}, \ldots, a_{j+N})^T, K\bigr).$$

Теперь применяем (3.26):

$$\inf_{\|a\|_p} \|Qa\|_p = \inf_{\|a\|_p=1} \sum_j \bigl|(Qa)_j\bigr|^p = 0.$$

Применим лемму 3.4.14 к оператору Q. Получим, что полином $q(\xi)$ имеет по крайней мере один действительный корень. Это означает, что функция $\widehat{f}(\xi)$ имеет действительный периодический нуль, что и требовалось доказать. $\Diamond$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 3.4.15. *Целые сдвиги масштабирующей функции стабильны в том и только том случае, когда маска* $\mathbf{m}_0$ *не имеет нетривиальных циклов и симметричных нулей на единичной окружности.*

Обратимся теперь к критерию условий Стрэнга–Фикса для масштабирующих функций (теорема 3.2.10). Вспомним, что нетривиальное блокирующее множество всегда содержит пару симметричных корней (упражнение 3.2.8). Поэтому, если масштабирующая функция стабильна и маска $\mathbf{m}_0$ имеет блокирующее множество кратности r, то это множество тривиально. Это значит, что маска $\mathbf{m}_0$ имеет корень $z = -1$ кратности $\geqslant r$, т. е. представляется в виде

$$\mathbf{m}_0(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^r q(z), \tag{3.27}$$

где $q(z)$ — алгебраический полином, $q(1) = 1$. Применив теперь теорему 3.2.10, получаем следующий результат.

Теорема 3.4.16. *Стабильная масштабирующая функция удовлетворяет условиям Стрэнга–Фикса порядка* L *тогда и только тогда, когда маска* $\mathbf{m}_0$ *имеет корень* $z = -1$ *кратности* $\geqslant L+1$, *т. е. представляется в виде*

$$\mathbf{m}_0(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^{L+1} q(z). \tag{3.28}$$

В частности (теорема 3.3.2), для стабильной функции условие (3.28) является критерием того, что ее целые сдвиги порождают пространство полиномов $\mathcal{P}_L$ и что она имеет порядок аппроксимации $\geqslant L+1$. Кроме того (следствие 3.2.11), это условие необходимо (но не достаточно) для гладкости стабильной масштабирующей функции (принадлежности к пространству $W_1^L(\mathbb{R})$). Так, при $L = 0$ получаем

Следствие 3.4.17. *Если масштабирующее уравнение имеет стабильное суммируемое решение, то* $\sum\limits_k c_{2k} = \sum\limits_k c_{2k+1} = 1$.

Данное условие в литературе получило название *правило сумм*, или *нулевое правило сумм*. Оно эквивалентно условию $\mathbf{m}_0(-1) = 0$.

Аналогично, *правило сумм порядка* L:

$$\sum_k (-1)^k k^s c_k = 0, \quad s = 0, \ldots, L,$$

равносильно факторизуемости маски (3.28).

Ортогональность целых сдвигов. Согласно предложению 1.1.12, финитная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеет ортогональные целые сдвиги тогда и только тогда, когда

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi + k)|^2 \equiv C\,; \tag{3.29}$$

целые сдвиги ортонормальны тогда и только тогда, когда эта константа равна 1. Для масштабирующей функции φ следствие 1.2.6 дает необходимые условия ортогональности в терминах маски уравнения: если целые сдвиги масштабирующей функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ ортонормальны, то маска удовлетворяет условию (1.27):

$$|m_0(\xi)|^2 \ + \ |m_0(\xi + 1/2)|^2 \ \equiv \ 1.$$

Это условие не является достаточным (пример 2.5.5). Оказывается, что для финитных масштабирующих функций это условие, в совокупности со стабильностью (т. е. маска не имеет ни циклов, ни симметричных корней на единичной окружности), достаточно для ортонормированности.

Теорема 3.4.18. *Целые сдвиги финитной масштабирующей функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ ортонормированы тогда и только тогда, когда маска не имеет нетривиальных циклов и удовлетворяет* (1.27).

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.1.14 и следствия 3.4.15 (заметим также, что при условии (1.27) маска не может иметь симметричных нулей).

Докажем достаточность. Пусть свойство (1.27) выполнено, и масштабирующая функция φ стабильна. Положим

$$\Phi(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bigl|\widehat{\varphi}(\xi + k)\bigr|^2.$$

Эта функция периодична с периодом 1. Разложим ее в ряд Фурье. Заметим сначала, что так как $\widehat{\varphi} \in L_2(\mathbb{R})$, то $|\widehat{\varphi}|^2 \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда функция $f = \varphi(\cdot) * \varphi(-\,\cdot)$, являющаяся обратным преобразованием Фурье к функции $|\widehat{\varphi}|^2$, непрерывна. Далее, поскольку φ имеет носитель на отрезке $[0, N]$, f сосредоточена на отрезке $[-N, N]$. Применяем теперь формулу суммирования Пуассона:

$$\Phi(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-k) e^{-2\pi i k \xi} = \sum_{k=-N}^{N} f(-k) e^{-2\pi i k \xi},$$

получили неотрицательный тригонометрический полином. Докажем, что он тождественно равен единице. Так как $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то φ удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка 0 (теорема 3.2.3), следовательно, $\Phi(0) = 1$. Докажем, что число 1 является одновременно и максимумом, и минимумом полинома Φ на периоде. Из этого будет следовать, что $\Phi(\xi) \equiv 1$.

Предположим обратное: 1 не является максимумом Φ (случай, когда 1 не является минимумом разбирается аналогично). Тогда $\|\Phi\|_\infty > 1$.

Так как Φ не является тождественной константой, то множество

$$\Lambda = \{\xi \in \mathbb{T},\ \Phi(\xi) = \|\Phi\|_\infty\}$$

конечно. Тогда множества

$$A = \{z \in \mathbb{Z},\ \mathbf{m}_0(z) = 0\}, \qquad B = \{e^{-2\pi i\xi},\ \xi \in \Lambda\}$$

удовлетворяют условиям леммы 3.4.8. В самом деле, если $\xi \in \Lambda$, то

$$\Phi(\xi) = \|\Phi\|_{C[0,2\pi]} = M,$$

следовательно,

$$M = \Phi(\xi/2)|m_0(\xi/2)|^2 + \Phi(\xi/2 + 1/2)|m_0(\xi/2 + 1/2)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant M\Big(|m_0(\xi/2)|^2 + |m_0(\xi/2 + 1/2)|^2\Big) = M.$$

Равенство возможно, если либо $\Phi(\xi/2) = \Phi(\xi/2 + 1/2) = M$ (в этом случае $\pm e^{-2\pi i\xi/2} \in B$), либо в одной из точек $\frac{\xi}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2}$ имеем $\Phi = M$, а в другой $m_0 = 0$. В этом случае $\pm e^{-2\pi i\xi/2} \in A \bigcup B$. Применяя лемму 3.4.8, получаем, что либо $\mathbf{m}_0$ имеет симметричный корень (что невозможно в силу 1.27), либо имеет цикл. При этом цикл — нетривиальный (так как $0 \notin \Lambda$), что противоречит условию. Таким образом, Φ — тождественная константа, что завершает доказательство. $\lozenge$

Замечание 3.4.19. Пример 2.5.5 показывает, что условие (1.27) само по себе не достаточно для ортонормальности. Оно не гарантирует даже стабильности масштабирующей функции. Пример этот взят не случайно, он принадлежит к числу так называемых «сжатых» масок. Возьмем произвольную маску m_0 такую, что $m_0\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0$ и сожмем ее в p раз, где $p \neq 1$ — произвольное нечетное число. Получим маску $m_p(\xi) = m_0(p\xi)$ и масштабирующую функцию $\varphi_p(x) = \varphi(x/p)$. Она не будет стабильной. Действительно, так как $m_0\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0$, то для всех ненулевых целых k имеем

$$\widehat{\varphi}_p(k/p) = \widehat{\varphi}(k) = 0.$$

Так что функция φ_p имеет по крайней мере p действительных периодических нулей $\Big\{\frac{1}{p} + k\Big\}$, $\ldots$, $\Big\{\frac{(p-1)}{p} + k\Big\}$, значит, нестабильна.

Заметим, что если $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, эта функция удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса нулевого порядка (теорема 3.2.3), а если выполнено (1.27), то маска не имеет действительных симметричных нулей, и следовательно $m_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Таким образом, сжатие в нечетное число раз «портит» любую маску: при таком сжатии маска приобретает циклы (следствие 3.4.15). В примере 2.5.5 мы взяли $m_0(\xi) = (1 + e^{-2\pi i\xi})/2$ и $p = 3$.

3.5. Примеры и приложения

Пример 3.5.1 (B-сплайны). Наиболее известной масштабирующей функцией является B-сплайн $B_n(x)$, появившийся, кстати, задолго до теории масштабирующих уравнений. Мы уже рассматривали B-сплайны в параграфе 1.4 при построении всплесков Баттла–Лемарье. Для представления B-сплайнов в виде масштабирующих функций нам будет удобнее немного изменить его определение. Именно, мы будем рассматривать B-сплайн $B_n(x)$, определенный формулами (*) параграфа 1.4, аргумент которого сдвинут таким образом, что $\operatorname{supp} B_n = [0, n+1]$. Таким образом,

$$B_{2k+1}(x) = \varphi^{B,2k+1}(x - k - 1); \qquad B_{2k}(x) = \varphi^{B,2k}(x - k)$$

Нетрудно видеть, что

$$B_n(x) = \chi_{[0,1]} * \ldots * \chi_{[0,1]}$$

(свертка $n+1$ характеристической функции отрезка $[0,1]$). Так, например, $B_0(x) = \chi_{[0,1]}$. Функция $B_n(x)$ является сплайном порядка n с целыми узлами. Она сосредоточена на отрезке $[0, n+1]$, на каждом из отрезков $[k, k+1]$, $k = 0, \ldots, n$, она является полиномом степени n. B-сплайн $B_n(x)$ является масштабирующей функцией, маска соответствующего уравнения $\mathbf{m}_0(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^{n+1}$, его коэффициенты $c_k = 2^{-n}\binom{n}{k}$, $k = 0, \ldots, n$. Это — единственное масштабирующее уравнение данного порядка $n+1$, удовлетворяющее условиям Стрэнга–Фикса порядка n (следствие 3.2.12). Следовательно, из всех масштабирующих функций с данной длиной носителя B-сплайн имеет максимальный порядок аппроксимации $n+1$ и максимальную гладкость ($B_n \in W_1^n(\mathbb{R})$, следствие 3.2.13). B-сплайны играют исключительную роль в теории масштабирующих уравнений не только благодаря своим оптимальным свойствам. Из теоремы 3.4.16 следует, что если масштабирующее уравнение имеет стабильное W_1^L-решение, то его маска содержит множитель $\left(\frac{z+1}{2}\right)^{L+1}$, т. е. маску B-сплайна B_L. Из этого следует, что стабильная гладкая масштабирующая функция разлагается в свертку некоторой масштабирующей функции и B-сплайна соответствующего порядка (подробнее мы вернемся к этому вопросу в гл. 6).

Для любого $n \geqslant 0$ функция B_n стабильна (следствие 3.2.5), однако только при $n = 0$ ее целые сдвиги ортогональны (теорема 3.4.18). Заметим, что B-сплайны — не единственные масштабирующие сплайны, для каждого $n \geqslant 1$ существует конечное число масштабирующих сплайн-функций порядка n (все они были классифицированы в [47, раздел 8] и [110]). Однако все такие функции являются комбинациями целых сдвигов B-сплайна, и все они (кроме самих

B-сплайнов) нестабильны (см. [110]) Поэтому среди всех масштабирующих сплайнов только B-сплайны применимы для построения всплесков.

В дальнейшем мы будем пользоваться таким утверждением (читатель без труда докажет его самостоятельно):

Лемма 3.5.2. *Для любого натурального N на отрезке $[0, N]$ существует единственный с точностью до умножения на константу сплайн порядка N с целыми узлами, принадлежащий $C^{N-1}(\mathbb{R})$. Эта единственная функция — кардинальный B-сплайн порядка N.*

Пример 3.5.3. Уравнение

$$\varphi(x) = \omega\,\varphi(2x) + (1-\omega)\,\varphi(2x-1) + (1-\omega)\,\varphi(2x-2) + \omega\,\varphi(2x-3),$$

где $\omega \in (0, 1)$ соответствует так называемому обобщенному *алгоритму Чайкина* аппроксимации функций по значениям на равномерной сетке [111, 112]. Его решение сосредоточено на отрезке $[0, 3]$, непрерывно при любом $\omega \in (0, 1)$, однако лишь при $\omega = \dfrac{1}{4}$ оно дифференцируемо на всем отрезке (в этом случае, как легко видеть, $\varphi(x) = B_2(x)$ — квадратичный сплайн). При остальных ω эта функция имеет переменную локальную гладкость, при этом на множестве полной меры локальная гладкость одна и та же больше 1 (и, следовательно, $\varphi'(x) = 0$ почти всюду).

Пример 3.5.4 (кривые де Рама). Пусть дано некоторое множество точек $\{p_j\}$ на плоскости, $p_j = (x_j, y_j)$. Строим последовательности $\{p_j^1\}$, $\{p_j^2\}, \ldots$ по следующему рекуррентному правилу

$$p_{2r}^{n+1} = (1-\omega)p_r^n + \omega p_{r+1}^n, \quad p_{2r+1}^{n+1} = \omega p_r^n + (1-\omega)p_{r+1}^n,$$

где $p_j^0 = p_j$. Предельная кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ такая, что

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\gamma(2^{-n}k) - p_k^n\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

называется *кривой де Рама*, соответствующей параметру $\omega \in (0,\, 1/2)$ и начальной последовательности точек $\{p_j\}$. Геометрически кривая де Рама получается в пределе из ломаной с данными вершинами $\{p_j\}$ последовательным срезанием ее углов (на каждом шаге стороны ломаной делится на три части в отношении $\omega : (1-2\omega) : \omega$. В параметрическом задании кривой $\gamma(t)$ обе координатные функции $x(t), y(t)$ являются линейными комбинациями целых сдвигов масштабирующей функции Чайкина $\varphi(t)$ из предыдущего примера. Однако геометрическая гладкость кривой γ (т. е. гладкость в натуральной параметризации) превосходит гладкость φ. Так, при $\omega \leqslant \dfrac{1}{3}$ кривая де Рама непрерывно дифференцируема, а ее вторая производная равна нулю почти всюду на кривой. При $\omega = \dfrac{1}{4}$ кривая де Рама является квадратичным сплайном и состоит из кусков парабол, гладко склеенных в серединах сторон начальной ломаной, при $\omega > \dfrac{1}{3}$ кривая дифференцируема во всех точках, кроме тех, которые соответствуют двоично-рациональным t. Мы вернемся к кривым де Рама в гл. 5, пример 5.5.3.

Пример 3.5.5 (интерполяционная схема С. Дюбука). В 1986 г. С. Дюбук впервые предложил уточняющую схему в качестве алгоритма интерполяции функций. Схема выглядит так:

$$\begin{cases} f_{2r}^{n+1} = f_r^n, \\ f_{2r+1}^{n+1} = -\dfrac{1}{16}\Big(f_{r-1}^n + f_{r+2}^n\Big) + \dfrac{9}{16}\Big(f_r^n + f_{r+1}^n\Big). \end{cases} \tag{3.30}$$

Для любой начальной последовательности $\{f_k^0\}$ данная схема сходится [113], т. е. существует непрерывная функция f, для которой

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|f(2^{-n}k) - f_k^n\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty.$$

Эта схема точна на полиномах степени не выше 3, т. е. если $f_k^0 = f^0(k)$, где $f^0(x) \in \mathcal{P}_3$, то $f(x) \equiv f^0(x)$. Если в качестве начальной последовательности f^0 взята функция δ_k ($\delta_k = 1$ при $k = 0$, и $\delta_k = 0$ иначе), то предельная функция $f = \varphi$ является решением симметричного масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = -\frac{1}{16}\,\varphi(2x-3) + \frac{9}{16}\,\varphi(2x-1) + \varphi(2x) + \frac{9}{16}\,\varphi(2x+1) - \frac{1}{16}\,\varphi(2x+3). \tag{3.31}$$

Функция φ сосредоточена на отрезке $[-3,3]$. Маска уравнения имеет в точке $z=-1$ корень кратности 4, следовательно (теорема 3.4.16), функция φ удовлетворяет условиям Стрэнга–Фикса порядка 3. В частности, ее целые сдвиги порождают пространство полиномов $\mathcal{P}_3$ (этим объясняется точность алгоритма на функциях из этого пространства). Порядок аппроксимации φ равен 4 (теорема 3.3.2). Поэтому, если снять значения некоторой гладкой функции g на равномерной сетке с шагом h (положив $f_j^0 = g(a+hj)$), а затем применить к этой последовательности схему Дюбука, то предельная функция f будет равномерно приближать g с точностью $O(h^4)$, точнее, $\|g-f\|_\infty \leqslant C\|g^{(IV)}\|_\infty h^4$.

На самом деле, коэффициенты схемы Дюбука — не что иное, как коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа степени 3 в точках $-1, 0, 1, 2$. Фактически данный алгоритм на каждой итерации строит полином Лагранжа по четырем соседним точкам:

$$2^{-n}(k-1), \quad 2^{-n}k, \quad 2^{-n}(k+1), \quad 2^{-n}(k+2)$$

и полагает его значение в точке $2^{-n}k + 2^{-n-1}$ в качестве значения следующей функции.

Данная алгоритм был исследован С. Дюбуком в [113], а затем в работе [114] совместно с Г. Деларье обобщен но интерполяционный алгоритм произвольного порядка. Среди всех уточняющих схем, воспроизводящих полиномы данной степени она является оптимальной, т. е. имеет наименьшее число ненулевых коэффициентов. Маска уравнения (3.31) приводится к виду

$$\mathbf{m}_0(z) = z^{-3}\Big(\frac{1+z}{2}\Big)^4\Big(\frac{-1+4z-z^2}{2}\Big). \tag{3.32}$$

Таким образом, маска имеет нуль четвертого порядка в точке $z=-1$ и больше никаких нулей на единичной окружности. Следовательно (теорема 3.4.10), масштабирующая функция φ стабильна. Кроме того, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ (пример 7.3.14), эта функция «почти» из C^2 в том смысле, что принадлежит $C^{2-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. На самом деле, модуль непрерывности производной функции φ равен $Ct\,|\ln t|$.

Глава 4

ВСПЛЕСКИ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ

4.1. Построение ортогональных всплесков

Данная глава посвящена одномерным вещественным ортонормированным всплескам с компактными носителями, которые представляют наибольший интерес для приложений из-за простой численной реализации алгоритмов разложения и синтеза сигналов.

В этой главе нам будет удобно использовать термины *ортогональная всплеск-функция* и *ортогональная масштабирующая функция*. Они являются просто сокращенной формой следующих фраз: всплеск-функция, сжатия и сдвиги которой образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$; масштабирующая функция, целые сдвиги которой образуют ортонормированный базис в нулевом пространстве КМА, порожденным этой функцией.

Как отмечено в следствии 1.3.5 любая ортогональная всплеск-функция с компактным носителем имеет соответствующую ортогональную масштабирующую функцию с компактным носителем. Обратное — очевидно. Если ортогональная масштабирующая функция имеет компактный носитель, то соответствующий всплеск в силу (1.42) является конечной линейной комбинацией функций с компактным носителем, т. е. сам имеет компактный носитель.

Как мы знаем, если ортогональная всплеск-функция имеет компактный носитель, то ей обязательно соответствует кратномасштабный анализ (следствие 1.3.5). Поэтому построение КМА сводится к построению порождающей ортогональной масштабирующей функции φ с компактным носителем. Порожденное ее целыми сдвигами пространство V_0 и все пространства V_j, полученные из V_0 двоичными сжатиями и растяжениями, должны обладать свойствами MR1–MR5 определения 1.2.1. Итак, предположим, что функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ такова, что

$$\langle \varphi(\cdot), \varphi(\cdot - k) \rangle = \delta_{0k}.$$

Положим

$$V_0 = \overline{\mathrm{span}\,\{\varphi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}}, \quad V_j = \{f(2^j \cdot),\ f \in V_0\}.$$

Напомним, при каких условиях на φ эти пространства образуют КМА. Свойства MR2–MR5 уже выполнены. Свойство MR1 теперь равносильно одному лишь включению $V_0 \subset V_1$, поскольку с помощью свойства MR4 это включение переносится на все целые j. Оно, в свою очередь, означает, что $\varphi \in V_1$. Так как функции $\sqrt{2}\,\varphi(2\cdot - k)$ образуют ортонормированный базис пространства V_1, то функция φ должна раскладываться по этому базису, иначе говоря

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2}\,h_k\varphi(2x-k).$$

Так как $h_k = \langle\sqrt{2}\,\varphi(2\cdot - k), \varphi(\cdot)\rangle$, а функция φ имеет компактный носитель, то лишь конечное число коэффициентов h_k не равны нулю. Таким образом, сумма в правой части равенства содержит конечное число ненулевых слагаемых.

Замечание 4.1.1. Линейная независимость целых сдвигов функции φ не так очевидна, как может показаться. Из стабильности φ следует лишь независимость над ℓ_∞, но не над ℓ. На самом деле, стабильная функция с компактным носителем может удовлетворять масштабирующему уравнению с бесконечным числом слагаемых. Например, стабильная функция

$$\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x) + \frac{1}{2}\,\chi_{[0,1)}(x-1)$$

удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\varphi(2x-k).$$

Поэтому в доказательстве используется не только стабильность, но и ортогональность целых сдвигов.

Итак, $\varphi(x) = \sum\limits_{k=n_1}^{n_2} \sqrt{2}\,h_k\varphi(2x-k)$. Не ограничивая общности, с возможным сдвигом аргумента, можно считать, что $n_1 = 0$. Положив теперь $c_k = \sqrt{2}\,h_k$, получаем

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k\varphi(2x-k).$$

Таким образом, φ удовлетворяет некоторому масштабирующему уравнению с конечным числом слагаемых. Далее, условие MR2 означает, что для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$\mathrm{dist}(f, V_j) \to 0, \quad j \to +\infty.$$

Применив теорему 3.3.2, получаем, что функция φ удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка 0. В частности, $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \neq 0$, тогда (предложение 3.1.1) имеем $\sum\limits_k c_k = 2$. Итак, если функция φ с компактным носителем порождает КМА, то (возможно, после целого сдвига аргумента) она является L_2-решением масштабирующего уравнения (3.1) с условием $\sum\limits_k c_k = 2$. Чтобы не менять обозначений, мы теперь нормируем функцию φ, как и ранее, условием $\int \varphi(x)\,dx = 1$. Тогда КМА будет порождаться не самой φ, а ее перенормировкой $\widetilde{\varphi} = \gamma\varphi$, где $\gamma = \|\varphi\|_2^{-1}$. Осталось сформулировать специальные условия на коэффициенты (маску) масштабирующего уравнения. Ортогональность сдвигов φ определяется теоремой 3.4.18: маска уравнения m_0 не имеет циклов и $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 \equiv 1$. Из последнего условия, в частности, следует, что $m(1/2) = 0$, следовательно, условие Стрэнга–Фикса порядка 0 выполнено, значит,

$$\mathrm{dist}(f, V_j) \to 0, \quad j \to +\infty,$$

что обеспечивает условие MR2. Последнее не рассмотренное нами условие — пустота пересечения (MR3). Оно также выполнено. В самом деле, если некоторая функция f принадлежит всем V_j, то (свойство MR4)

$$f(2^{-j}\cdot) \in V_0 \Leftrightarrow \widehat{f}(2^j\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)p_j(\xi),\ j \in \mathbb{Z},$$

где p_j — некоторая 1-периодическая функция. Данное равенство для всех целых j означает $f \equiv 0$.

Теорема 4.1.2. *Если финитная функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ с ортогональными целыми сдвигами порождает КМА, то она удовлетворяет масштабирующему уравнению* (3.1), *маска которого не имеет циклов и удовлетворяет условиям*

$$m_0(0) = 1, \quad |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 \equiv 1. \tag{4.1}$$

Обратно, если маска масштабирующего уравнения удовлетворяет данным условиям, то его решение принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, имеет ортонормированные целые сдвиги и порождает КМА.

Из всех утверждений теоремы не доказанным осталось лишь достаточность условий (4.1) для того, чтобы решение принадлежало $L_2(\mathbb{R})$. Докажем чуть более сильное утверждение, верное и для неполиномиальных масок:

Лемма 4.1.3. *Если маска масштабирующего уравнения*

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi(2x - k)$$

удовлетворяет условиям

$$c_k = O(|k|^{-2-\varepsilon}),\ \varepsilon > 0, \quad m_0(0) = 1, \quad |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 \equiv 1,$$

то его решение φ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и $\|\varphi\|_2 \leqslant |\widehat{\varphi}(0)|$.

Доказательство. Будем считать, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$, тогда (предложение 2.4.1)

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} |m_0(2^{-k}\xi)|^2.$$

Так как $\|m_0^2\|_\infty = 1$, то для любого n имеем

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n} |m_0(2^{-k}\xi)|^2$$

для всех ξ, следовательно,

$$\int_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \int_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n} |m_0(2^{-k}\xi)|^2 d\xi = 2^n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} |m_0(2^k s)|^2 \, ds. \tag{4.2}$$

Пусть $|m_0(s)|^2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi iks}$. Из условий на маску следует, что

$$a_{2k} = \frac{1}{2}\, \delta_{0k}.$$

Таким образом,

$$|m_0(s)|^2 = a_0 + \sum_{k\in 2\mathbb{Z}+1} a_k e^{-2\pi iks},$$

где $a_0 = \dfrac{1}{2}$. Тогда

$$\prod_{k=0}^{n-1} |m_0(2^k s)|^2 = \sum_{k_0+2k_1+\ldots+2^{n-1}k_{n-1}=r} a_{k_0} \ldots a_{k_{n-1}} e^{-2\pi irs},$$

где для каждого j либо $k_j = 0$, либо k_j — нечетное число. Следовательно, если $r = 0$, то $k_0 = \ldots = k_{n-1} = 0$. Поэтому

$$\prod_{k=0}^{n-1} |m_0(2^k s)|^2 = 2^{-n} + \sum_{r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} b_r e^{-2\pi isr}.$$

Так как

$$\int_{-1/2}^{1/2} b_r e^{-2\pi isr} \, ds = 0$$

для всех $r \neq 0$, то

$$\int_{-1/2}^{1/2} \prod_{k=0}^{n-1} |m_0(2^k s)|^2 \, ds = 2^{-n}.$$

Подставляя в (4.2), имеем

$$\int\limits_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi \leqslant 1.$$

При $n \to +\infty$ получаем

$$\|\widehat{\varphi}\|_2 \leqslant 1,$$

следовательно $\|\widehat{\varphi}(\xi)\|_2 \leqslant 1$, что и требовалось доказать. $\Diamond$

Таким образом, маска, удовлетворяющая условиям теоремы 4.1.2, порождает L_2-масштабирующую функцию с ортонормированными целыми сдвигами. Теперь всплеск-функция ψ строится по формуле

$$\widehat{\psi}(\xi) = \nu(\xi) e^{-\pi i \xi} \overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\Big)} \widehat{\varphi}\Big(\frac{\xi}{2}\Big), \tag{4.3}$$

где $\nu(\xi)$ — произвольная 1-периодическая функция такая, что $|\nu(\xi)| = 1$ почти всюду. Из этой формулы получаются все системы всплесков, соответствующие данному КМА.

Лемма 4.1.4. *Пусть КМА порожден финитной функцией $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ с ортогональными целыми сдвигами. Функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ является всплеск-функцией, соответствующей данному КМА, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет* (4.3).

Доказательство. Охарактеризуем пространство W_0 в терминах преобразования Фурье. Включение $f \in W_0$ эквивалентно одновременно двум включениям $f \in V_1$ и $f \perp V_0$. Первое означает, что

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(2x - k)$$

для некоторой последовательности $\{a_k\} \in \ell_2$. После преобразования Фурье имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \widehat{a}(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2), \tag{4.4}$$

где $\widehat{a}(\xi) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi k \xi}$. Свойство $f \perp V_0$ означает, что $\langle f, \varphi(\,\cdot - k)\rangle$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Применив равенство Парсеваля, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k \xi} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\, dx = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Наконец, сделав периодизацию, получим

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + k) \overline{\widehat{\varphi}(\xi + k)} \equiv 0,$$

это равенство выполнено для почти всех $\xi \in \mathbb{R}$. Выражая $\widehat{f}$ из равенства (4.4) и $\widehat{\varphi}$ из равенства $\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)$, затем, группируя суммы для четных и нечетных слагаемых, получаем

$$\frac{1}{2}\widehat{a}\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}\Big)} + \frac{1}{2}\widehat{a}\Big(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}\Big)\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}\Big)} = 0.$$

Так как $m_0\Big(\dfrac{\xi}{2}\Big)$ и $m_0\Big(\dfrac{\xi}{2}+\dfrac{1}{2}\Big)$ не обращаются в нуль одновременно, то существует 1-периодическая функция $\lambda(\xi)$ такая, что

$$\frac{1}{2}\,\widehat{a}(\xi) = \lambda(\xi)\overline{m_0\Big(\xi+\frac{1}{2}\Big)}$$

почти всюду, и при этом

$$\lambda\big(\xi\big) + \lambda\Big(\xi+\frac{1}{2}\Big) = 0$$

почти всюду. Последнее свойство эквивалентно тому, что

$$\lambda(\xi) = e^{-2\pi i\xi}\nu(\xi)$$

для почти всех ξ, где ν — 1-периодическая функция. Подставляя в (4.4), получаем

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi i\xi}\nu(\xi)\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\varphi(\xi/2). \tag{4.5}$$

Итак, мы нашли общий вид функций пространства W_0. Теперь нужно охарактеризовать функции ψ этого пространства, имеющие ортогональные целые сдвиги (это и будут всплеск-функции). Таким образом, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\psi(\xi+k)|^2 = 1$ почти всюду (предложение 1.1.12). Применяя теперь (1.27) получаем

$$\begin{aligned}
\sum_k |\psi(\xi+k)|^2 &= |\nu(\xi+k)|^2\Big|\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\Big)}\Big|^2\cdot\Big|\varphi\Big(\frac{\xi}{2}+\frac{k}{2}\Big)\Big|^2 = \\
&= |\nu(\xi)|^2\sum_l\bigg(\Big|\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}+l\Big)}\Big|^2\cdot\Big|\varphi\Big(\frac{\xi}{2}+l\Big)\Big|^2 + \\
&\qquad + \Big|\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}+l+1\Big)}\Big|^2\cdot\Big|\varphi\Big(\frac{\xi}{2}+l+\frac{1}{2}\Big)\Big|^2\bigg) = \\
&= |\nu(\xi)|^2\bigg(\Big|\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big|^2\cdot\sum_l\Big|\varphi\Big(\frac{\xi}{2}+l\Big)\Big|^2 + \\
&\qquad + \Big|\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}\Big)}\Big|^2\sum_l\Big|\varphi\Big(\frac{\xi}{2}+l+\frac{1}{2}\Big)\Big|^2\bigg) = \\
&= |\nu(\xi)|^2\bigg(\Big|\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big|^2 + \Big|\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2}\Big)}\Big|^2\bigg) = |\nu(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, $|\nu(\xi)|^2 = 1$ почти всюду. $\Diamond$

Итак, при построении всплеск-функции для данного КМА однозначности нет, поскольку мы можем выбирать функцию ν по своему усмотрению. Однако всплески с компактным носителем получаются только при $\nu(\xi) = e^{-2\pi i\xi n}$ для некоторого целого n. Для того чтобы это показать, возьмем сначала $\nu(\xi) \equiv 1$, получим

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i\xi}\overline{m_0\Big(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\Big)}\widehat{\varphi}\Big(\frac{\xi}{2}\Big), \tag{4.6}$$

или, после обратного преобразования Фурье

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\bar{c}_k\varphi(2x + k - 1) \tag{4.7}$$

Так как $\operatorname{supp}\varphi = [0, N]$, то $\operatorname{supp}\psi = \Big[-\dfrac{N-1}{2}, \dfrac{N+1}{2}\Big]$. Итак, всплеск-функция ψ, так же как и ее масштабирующая функция, сосредоточена на отрезке длины N. Если теперь вернуться к общей формуле (4.3), т. е. домножить преобразование Фурье нашей всплеск-функции на некоторую функцию ν, получим новую всплеск-функцию

$$\psi_\nu(x) = \sum_k \widehat{\nu}(k)\psi(x - k),$$

где $\widehat{\nu}(k)$ — коэффициенты Фурье функции ν: $\nu(x) = \widehat{\nu}(k)e^{-2\pi ik\xi}$. Если ψ_ν имеет компактный носитель, то для достаточно большого M имеем

$$\widehat{\nu}(j) = \langle\psi_\nu, \psi(x - j)\rangle = 0$$

для всех j таких, что $|j| > M$. Таким образом, последовательность $\widehat{\nu}(k)$ конечна, т. е. ν — тригонометрический полином. Но поскольку $|\nu(\xi)| = 1$ почти всюду, тригонометрический полином $|\nu(\xi)|^2$ тождественно равен 1, значит, $\nu(\xi) = e^{-2\pi i\xi n}$.

Следовательно, $\psi_\nu(\cdot) = \psi(\,\cdot - k)$. Итак, все всплески с компактным носителем, порожденные данной масштабирующей функцией, совпадают с точностью до целого сдвига. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся только всплесками, полученными по формуле (4.7), т. е. соответствующими случаю $\nu \equiv 1$.

Теперь задача о построении всплесков с компактным носителем сводится к построению соответствующей масштабирующей функции, т. е. к построению маски, удовлетворяющей условиям теоремы 3.3.2.

Начнем с того, что $m_0\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = 0$. Более того, если мы интересуемся гладкими решениями, то должны предполагать, что маска имеет в точке $\dfrac{1}{2}$ нуль высокого порядка — не ниже, чем показатель гладкости (теорема 3.4.16). Поэтому мы факторизуем маску в виде

$$m_0(\xi) = \Big(\frac{1 + e^{-2\pi i\xi}}{2}\Big)^n q(\xi),$$

где $n \geqslant 1$ и $q\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Тогда

$$\left|m_0(\xi)\right|^2 = \left(\cos^2 \pi\xi\right)^n \left|q(\xi)\right|^2,$$

причем $|q(\xi)|^2$, как и всякий положительный тригонометрический полином, является алгебраическим полиномом с действительными коэффициентами от $\cos 2\pi\xi$, а значит, и от $(1 - \cos 2\pi\xi)/2 = \sin^2 \pi\xi$. Таким образом,

$$|m_0(\xi)|^2 = \left(\cos^2 \pi\xi\right)^n P\left(\sin^2 \pi\xi\right),$$

где $P(y)$ — некоторый алгебраический полином, неотрицательный на отрезке $[0, 1]$ и такой, что $P(1) = 1$. Теперь условие

$$|m_0(\xi)|^2 + \left|m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right|^2 \equiv 1$$

становится уравнением на полином P:

$$(1 - y)^n P(y) + y^n P(1 - y) = 1, \tag{4.8}$$

которое должно выполняться тождественно для всех $y \in \mathbb{R}$. Единственное его решение среди полиномов степени не выше n дается формулой

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} y^k, \tag{4.9}$$

и это в самом деле, как легко убедиться, положительный полином на отрезке $[0, 1]$. Для получения общего решения нам необходимо разрешить соответствующее однородное уравнение

$$(1 - y)^n \widetilde{P}(y) + y^n \widetilde{P}(1 - y) = 0.$$

Поскольку $\widetilde{P}(y)$ делится на y^n, мы имеем $\widetilde{P}(y) = y^n \widetilde{P}_1(y)$, и, после подстановки обратно в уравнение, $\widetilde{P}_1(y) + \widetilde{P}_1(1 - y) = 0$. То есть, $\widetilde{P}_1$ симметричен относительно точки $y = 1/2$, а, значит, мы можем написать $\widetilde{P}_1(y) = R\left(\frac{1}{2} - y\right)$, где R — некоторый нечетный полином.

Итак, общее решение уравнения (4.8) имеет вид

$$P(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} y^k + y^n R\left(\frac{1}{2} - y\right), \tag{4.10}$$

где R — некоторый нечетный полином. Таким образом, маска $m_0(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1.2 тогда и только тогда, когда

$$|m_0(\xi)|^2 = \left(\cos^2 \pi\xi\right)^n P\left(\sin^2 \pi\xi\right), \tag{4.11}$$

где полином P дается формулой (4.10), в которой в качестве R берется произвольный нечетный полином, такой, что полином $P(y)$ — неотрицательный на отрезке $[0, 1]$, а полином $P\left(\sin^2 \pi\xi\right)$ не имеет циклов.

Для построения всплеск-функции с компактным носителем берется произвольное натуральное n, подходящий полином R в формуле (4.10) и получаем функцию $|m_0(\xi)|^2$. Строго говоря, мы нашли не саму маску, а квадрат ее модуля. Теперь для нахождения маски нам нужно извлечь квадратный корень. Возможность извлечь корень из любого неотрицательного тригонометрического полинома гарантируется леммой Рисса (см. приложение А.11, теорема А.11.3).

Замечание 4.1.5. Практическая реализация леммы Рисса осуществляется с помощью корней некоторого вспомогательного алгебраического полинома. По этой причине извлечение корня даже из «хороших» полиномов производится, как правило, с привлечением численных методов. Поэтому, несмотря на то, что мы имеем явную формулу для квадрата маски, коэффициенты самой маски будут найдены лишь приближенно (см. [2, § 6.4]).

Полином m_0, существование которого доказано в лемме Рисса, в общем случае не является единственным. Действительно, запишем тригонометрический полином h в виде $h(\xi) = e^{-2\pi i N\xi} G(e^{2\pi i N\xi})$, где G — алгебраический полином степени $2N$. Если у полинома G есть корни, не лежащие на единичной окружности, то существует несколько (конечное число) существенно различных полиномов m (отличающихся не только домножением на константу) таких, что $|m_0|^2 = h$.

Пусть

$$B(\cos(2\pi\xi)) := |m_0(\xi)|^2, \quad m_0(0) = 1, \tag{4.12}$$

причем $B(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^N M(t)$, $M(-1) \neq 0$. Все решения m_0 можно описать следующим образом. Пусть $\{t_k\}$ — корни полинома M. Так как $m_0(0) = 1$, то $B(1) = 1$ и

$$M(\cos 2\pi\xi) = \prod_k \frac{\cos 2\pi\xi - t_k}{1 - t_k}.$$

Разобьем корни на три группы:

$$\{t_k\}_{k\in K_1} \subset (-1, 1); \quad \{t_k\}_{k\in K_2} \subset \mathbb{R} \setminus [-1, 1]; \quad \{t_k\}_{k\in K_3} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Так как полином $B(\cos(2\pi\xi))$ неотрицателен, корни $\{t_k\}_{k\in K_1}$ имеют четную кратность. Поэтому

$$\prod_{k\in K_1} \frac{\cos 2\pi\xi - t_k}{1 - t_k} = \prod_{k\in K_1'} \left(\frac{\cos 2\pi\xi - t_k}{1 - t_k}\right)^2$$

для некоторого $K_1' \subset K_1$. Тригонометрический полином m_0 имеет вид

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i\xi}}{2}\right)^N \prod_{k\in K_1'} \frac{\cos 2\pi\xi - t_k}{1 - t_k} \prod_{k\in K_2 \bigcup K_3} S_k^{\varepsilon_k}(\xi), \tag{4.13}$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$,

$$S_k^1(\xi) = \frac{e^{-2\pi i\xi} - z_k}{1 - z_k}, \quad S_k^{-1}(\xi) = \frac{1 - z_k e^{-2\pi i\xi}}{1 - z_k}.$$

Здесь z_k — решение уравнения $\dfrac{1}{2}\left(z_k + \dfrac{1}{z_k}\right) = t_k$ с $|z_k| > 1$.

Так как M — полином с действительными коэффициентами, то его комплексные корни $\{t_k\}_{k\in K_3}$ симметричны относительно действительной оси. Комплексносопряженной паре корней $t_k, \overline{t_k}$ соответствует четверка $z_k,\ z_k^{-1},\ \overline{z}_k,\ \overline{z}_k^{-1}$. Формула (4.13) показывает, что полином m_0 определяется выбором двух корней из каждой четверки ($\varepsilon_k = 1$ означает выбор z_k, $\varepsilon_k = -1$ означает выбор $1/z_k$.) Для $k \in K_2$ корень z_k является действительным числом.

Лемма Рисса основана на том, что

$$\frac{\cos(2\pi\xi) - t_k}{1 - t_k} = \frac{e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi} - 2t_k}{2 - z_k - 1/z_k} = \frac{e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi} - z_k - 1/z_k}{(1 - z_k)(1 - 1/z_k)} =$$

$$= \frac{e^{-2\pi i\xi} - z_k}{1 - z_k}\,\frac{1 - e^{2\pi i\xi}/z_k}{1 - 1/z_k} = e^{2\pi i\xi}\,\frac{e^{-2\pi i\xi} - z_k}{1 - z_k}\,\frac{e^{-2\pi i\xi} - 1/z_k}{1 - 1/z_k} =$$

$$= e^{2\pi i\xi} S_k^1(2\pi\xi) S_k^{-1}(\xi).$$

Для того чтобы полином m_0 удовлетворял уравнению (4.12) нельзя одновременно выбирать z_k и $\overline{z}_k^{-1}$, так как

$$\overline{S_k^1(\xi)} = \overline{\left(\frac{e^{-2\pi i\xi} - z_k}{1 - z_k}\right)} = \frac{e^{2\pi i\xi}(e^{-2\pi i\xi} - 1/\overline{z}_k)}{1 - 1/\overline{z}_k}.$$

Для того чтобы m_0 имел действительные коэффициенты, надо для $k \in K_3$ вместе с z_k обязательно брать $\overline{z}_k$. Таким образом, для действительнозначных всплесков из четверки $z_k,\ z_k^{-1},\ \overline{z}_k,\ \overline{z}_k^{-1}$ можно взять либо пару сопряженных корней внутри единичного круга, либо — вне. Для комплекснозначных всплесков — одну из двух накрест лежащих пар. Создана специальная компьютерная программа [193], вычисляющая различные масштабирующие функции и соответствующие всплески для классического случая $R = 0$ и различных наборов корней. Эта же программа находит всплески, обладающие различными экстремальными свойствами: максимальной регулярностью, минимальной константой неопределенности, минимальной или максимальной асимметрией и т. д.

Таким образом, уравнение (4.11) определяет маску неоднозначно. С точки зрения построения всплесков, нам не важно, какой из квадратных корней полинома $|m_0|^2$ взять в качестве маски. Каждый из них будет удовлетворять условиям теоремы 4.1.2 и породит свою собственную систему всплесков.

Кроме того, при данном n у нас есть произвол в выборе полинома R. Простейший случай соответствует $R \equiv 0$. При этом полином P будет определяться формулой (4.9) и для соответствующей маски m_n имеем

$$|m_n(\xi)|^2 = \left(\cos^2 \pi\xi\right)^n P_n\left(\sin^2 \pi\xi\right),$$

где P_n определен в (4.9). У данной маски нет циклов (поскольку многочлен $P_n(y)$ строго положителен при всех $y > 0$, у маски m_n вообще не будет корней на периоде, отличных от $\xi = 1/2$). Поэтому данная маска соответствует требованиям теоремы 4.1.2, а масштабирующая функция φ_n порождает всплеск-функцию ψ_n по формуле (4.7). Такие всплески называются *всплесками Добеши*. Каждому n соответствует несколько *масок Добеши* m_n и всплеск-функций Добеши ψ_n (замечание 4.1.5).

Степень полинома m_n равна $N = 2n - 1$, поэтому всплеск-функции Добеши ψ_n имеют носитель длины $2n - 1$, и это — наименьшая длина носителя всплеск-функции при данном n. Всплеск-функция ψ_1 — это не что иное, как функция Хаара. При остальных n всплески Добеши будут не только из $L_2(\mathbb{R})$, но и непрерывны. Это следует из более общей теоремы.

Теорема 4.1.6. *При каждом натуральном n гладкость всплеск-функции ψ_n не меньше, чем $n/5$.*

Доказательство отложим до главы 7 (параграф 7.5). Заметим, что результат этот верен независимо от того, какую из масок m_n мы выбрали, извлекая квадратный корень из полинома. Теорема Добеши обеспечивает построение всплеск-функции с компактным носителем любой гладкости. Правда, длина носителя растет линейно с гладкостью. Однако недостаток этот непреодолим: так как гладкость масштабирующей функции с носителем длины N не превосходит $N - 1$, то и гладкость всплеска не превосходит того же числа. Более того, согласно следствию 3.2.13 гладкость всплесков, соответствующих данному n, включая всплески Добеши, не превосходит $n - 1$. Итак, для каждого n гладкость всплесков Добеши лежит между $n/5$ и $n - 2$. Так что речь может идти лишь о замене $1/5$ большей константой. Для маленьких n гладкость ψ_n оценена более точно, она значительно превосходит $n/5$. В табл. 7.14 приведены гладкости всплесков для $n = 2, 3, 4, 5$.

При другом выборе полинома R получаются всплески с большей длиной носителя. Иногда подбором специального полинома удается увеличить гладкость (см. гл. 4.3).

4.2. Всплески, порожденные финитной масштабирующей функцией

Обратимся вновь к теореме 1.1.14. Предположим, что масштабирующая функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ с компактным носителем обладает не ортогональными, а лишь стабильными (образующими базис Рисса) целыми сдвигами. Иначе говоря, свойство MR5 выполняется в обычном, не усиленном, варианте. Как мы знаем (теорема 1.1.14), в этом случае найдется масштабирующая функция $\varphi^\sharp \in V_0$, целочисленные сдвиги которой образуют ортонормированный базис V_0. В случае всплесков с компактным носителем мы можем охарактеризовать все такие функции, в частности, с компактным носителем.

Предложение 4.2.1. *Предположим, что масштабирующая функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\|\varphi\|_2 = 1$, имеет компактный носитель и является стабильной, но ее целые сдвиги не ортогональны. Тогда, если функция $\varphi^\sharp$ определяется формулой*

$$\widehat{\varphi^\sharp}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\nu(\xi)\,[\Phi(\xi)]^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{4.14}$$

где $\Phi(\xi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}(\xi+k)\right|^2$, а $\nu(\xi)$ — произвольная измеримая 1-периодическая функция такая, что $|\nu(\xi)| = 1$ почти всюду, то целые сдвиги $\varphi^\sharp$ образуют ортонормированный базис V_0. Обратно, если целые сдвиги некоторой функции $\varphi^\sharp$ образуют ортонормированный базис V_0, то $\varphi^\sharp$ определяются формулой (4.14) для подходящей $\nu(x)$, $|\nu(\xi)| = 1$ п. в. Эта функция удовлетворяет масштабирующему уравнению с маской

$$m_0^\sharp(\xi) = m_0(\xi)\left[\frac{\Phi(\xi)}{\Phi(2\xi)}\right]^{1/2}\frac{\nu(2\xi)}{\nu(\xi)}.$$

Если маска m_0 не имеет симметричных корней (т. е. ее целочисленные сдвиги φ линейно независимы над ℓ), то носитель функции $\varphi^\sharp$ некомпактен.

Доказательство. Покажем, что $\widehat{\varphi^\sharp}$ принадлежит V_0 и порождает это пространство. Напомним, что функция Φ является тригонометрическим полиномом $\Phi(\xi) = \sum\limits_{k=-N}^{N} f(-k)e^{-2\pi ik\xi}$, где $f = \varphi(\cdot) * \varphi(-\,\cdot)$. Здесь мы пользуемся компактностью носителя функции φ, мы предполагаем, что $\operatorname{supp}\varphi \in [0, N]$, причем, этот полином не обращается в нуль на действительной оси, если функция φ стабильна. Так что функция

$$g(\xi) = \nu(\xi)\,[\Phi(\xi)]^{-\frac{1}{2}}$$

равномерно ограничена почти всюду на периоде. Если $\{b_k\} \in \ell_2$ — ее коэффициенты Фурье, то

$$\varphi^\sharp(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\varphi(x-k). \tag{4.15}$$

Значит, $\varphi^\sharp \in V_0$. С другой стороны, обратная формула, выражающая φ через целочисленные сдвиги функции $\varphi^\sharp$, выглядит точно так же, только в качестве коэффициентов b_k берутся коэффициенты Фурье функции $g(\xi) = \nu(\xi)\,[\Phi(\xi)]^{1/2}$. Таким образом, функция $\varphi^\sharp$ порождает φ, значит, и все пространство V_0. Функция $\varphi^\sharp$ удовлетворяет равенству (3.29), поэтому имеет ортонормальные целые сдвиги. Так как целые сдвиги φ независимы, то функция $\varphi^\sharp$, являющаяся суммой (4.15), может иметь компактный носитель только если последовательность $\{b_k\}$ финитна (предложение 3.4.7), т. е. функция $g(\xi)$ является тригонометрическим полиномом. Последнее возможно только если $\Phi \equiv C$, иначе полином $|g(\xi)|\Phi(\xi)$ будет тождественно равен 1. $\Diamond$

Замечание 4.2.2. При определении функции $\varphi^\sharp$ есть произвол в выборе функции $\nu(\xi)$. Если положить $\nu \equiv 1$, то коэффициенты b_k в (4.15) убывают экспоненциально: $|b_k| \leqslant C_\varepsilon e^{(-\beta+\varepsilon)k}$, $\beta > 0$, поскольку функция $[\Phi(\xi)]^{-1/2}$ голоморфна в некоторой полосе $|\operatorname{Im}\xi| < \beta$. Следовательно, и сама функция $\varphi^\sharp$, хотя и не будет иметь компактный носитель, будет убывать на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Тот же результат будет получен, если взять ν таким образом, чтобы функция $[\Phi(\xi)]^{1/2}/\nu(\xi)$ была тригонометрическим полиномом. Возможность такого выбора обеспечивает все та же лемма Рисса (теорема A.11.3), поскольку $\Phi(\xi)$ — положительный тригонометрический полином. Таким образом, $\widehat{\varphi}^\sharp(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)/g(\xi)$. Выбор полинома g не единственный (замечание 4.1.5). Однако при любом g функция $1/g$ голоморфна в некоторой полосе $|\operatorname{Im}\xi| < \beta$, и следовательно, коэффициенты $\{b_k\}$ и сама функция $\varphi^\sharp$ убывают на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Замечание 4.2.3. Условия линейной независимости целых сдвигов функции φ в предложении 4.2.1 существенно. Из стабильности φ следует, что ее преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ не имеет действительных периодических нулей. Однако оно может иметь комплексные периодические нули (равносильно: маска $\mathbf{m}_0$ имеет симметричные корни, не лежащие на единичной окружности). В этом случае при надлежащем выборе ν функция $\varphi^\sharp$ может иметь компактный носитель. В качестве примера возьмем масштабирующую функцию φ_n, порождающую всплески Добеши некоторого порядка n, и пусть $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ — корень маски $\mathbf{m}_n$. Положим $\varphi(x) = \varphi_n(x-1) - a\varphi_n$. Эта функция имеет компактный носитель и удовлетворяет масштабирующему уравнению с маской $\mathbf{m}_0(z) = \dfrac{z^2 - a}{z - a}\, m_n(z)$. Так как $\Phi(\xi) = |e^{-i\xi} - a|^2$, то для подходящей функции ν имеем $\varphi^\sharp = \varphi_n$, т. е. $\varphi^\sharp$ имеет компактный носитель. Однако случай, когда целые сдвиги φ линейно зависимы, сводится к масштабирующей функции с меньшим носителем и линейно независимыми целыми сдвигами (гл. 6, параграф 6.2). Поэтому все функции $\varphi^\sharp$ с компактным носителем, которые могут получаться в этом случае, будут совпадать с теми, которые построены в теореме 4.1.2. Везде далее мы считаем, что маска $\mathbf{m}_0$ не имеет симметричных корней, и носитель $\varphi^\sharp$ некомпактен.

Итак, всякая стабильная масштабирущая функция порождает КМА, значит, порождает и систему всплесков. Для построения всплеск-функции нужно перейти к функции $\varphi^\sharp$, а затем применить для нее формулу (4.7), получив таким образом всплеск-функцию ψ. Все рассуждения проводятся точно так же. В доказательствах мы нарочно не пользовались ортонормальностью системы $\{\varphi(\,\cdot - k)\}$, используя лишь свойства базиса Рисса. Единственное и главное отличие — функция $\varphi^\sharp$ не будет иметь компактного носителя, значит, и соответствующая всплеск-функция ψ тоже. Применив теперь следствие 3.4.15, получаем, что каждая L_2 — масштабирующая функция, маска которой не имеет ни циклов, ни симметричных нулей на единичном круге, порождает КМА, причем для различных масштабирующих уравнений пространства V_0 будут также различны. Можно сказать, что кратномасштабных анализов, порожденных функциями с компактным носителем, ровно столько, сколько стабильных масштабирующих функций. Однако всплески с компактным носителем будут получаться только для очень узкого класса масок, удовлетворяющих условию теоремы 4.1.2.

Условие стабильности масштабирующей функции опустить нельзя. Если целые сдвиги функции φ линейно зависимы над ℓ_∞, то и у любой функции $f \in V_0$ целые сдвиги будут линейно зависимы над ℓ_∞, значит, ортонормированной системы они не образуют.

Таким образом, с точки зрения всплесков интерес представляют только стабильные масштабирующие функции.

Теорема 4.2.4. *Функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\|\varphi\| = 1$, с компактным носителем порождает КМА тогда и только тогда, когда она удовлетворяет некоторому масштабирующему уравнению с маской, не имеющей ни циклов, ни симметричных нулей на единичном круге. Соответствующая всплеск-функция будет иметь компактный носитель тогда и только тогда, когда* $|m(\xi)|^2 + \left|m(\xi + \frac{1}{2})\right|^2 \equiv 1.$

Замечание 4.2.5. Хотя масштабирующая функция, целые сдвиги которой неортогональны, порождает всплеск-функцию с носителем на всей прямой, у этой функции по-прежнему будет хорошая локализация. Функция $\varphi^\sharp$ экспоненциально убывает на бесконечности, значит, и соответствующая всплеск-функция ψ убывает экспоненциально.

Теперь применим результаты главы 3 (теоремы 3.3.2 и 3.4.16) и получим утверждение, объясняющее аппроксимационные свойства всплесков, порожденных масштабирующей функцией с компактным носителем.

Напомним, что для финитной функции φ мы обозначаем

$$V_\varphi = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \varphi(x - k), \quad \lambda_k \in \mathbb{C}\right\}$$

— пространство всевозможных функций, порожденных целыми сдвигами φ. Если функция φ порождает некоторый КМА $\{V_j\}$, то $V_0 = V_\varphi \cap L_2(\mathbb{R})$ и, вообще, $V_j = V_\varphi(2^{-j}) \cap L_2(\mathbb{R})$ для любого $j \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4.2.6. *Пусть дан КМА $\{V_j\}$ с финитной масштабирующей функцией φ (не обязательно ортогональной). Тогда для любого $r \geqslant 0$ следующие условия равносильны*:

а) *пространство V_φ содержит все алгебраические полиномы степени $\leqslant r$;*

б) *порядок приближения пространств V_j в метриках C и L_p не меньше $r+1$, т.е. для любой гладкой финитной функции f имеем $\operatorname{dist}(f, V_j) \leqslant C(f)2^{-j(r+1)}$;*

в) *функция φ удовлетворяет условию Стрэнга–Фикса порядка r;*

г) *точка $\xi = \dfrac{1}{2}$ является нулем полинома m_0 порядка, как минимум $r+1$. Иначе говоря, m_0 допускает факторизацию*

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i\xi}}{2}\right)^{r+1} q(\xi),$$

где q — некоторый тригонометрический полином.

Замечание 4.2.7. В теоремах 1.7.7 и 1.7.8 мы показали, что гладкости всплеск-функции ψ (или, более общо, условия нулевых моментов (1.100) для функции ψ) достаточно для того, чтобы масштабирующая функция имела соответствующий порядок приближения (соотношение (1.105)). В случае компактного носителя мы теперь получаем не только достаточные условия, но и критерий для этого (теорема 4.2.6).

Замечание 4.2.8. Пункт а) теоремы 4.2.6 может быть сформулирован также в терминах пространств $\{V_j\}$ без привлечения V_φ следующим образом: каждое пространство V_j содержит все алгебраические полиномы степени $\leqslant r$ локально, т.е. для любого компакта $K \subset \mathbb{R}$ ограничения функций из V_j на этот компакт содержат ограничения всех полиномов степени $\leqslant r$ на него.

Таким образом, факторизация маски полностью отвечает за аппроксимационные свойства всплесков. Факт этот чрезвычайно важен, поскольку говорит о том, насколько быстро разложение произвольной гладкой функции по системе всплесков сходится к самой функции. Возьмем достаточно гладкую функцию f, скажем, $f \in C^r$, ограниченную на $\mathbb{R}$ вместе с первыми r производными. Имеем

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{jk}\psi_{jk},$$

где $c_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle$. «Обрезанный» ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}, i \leqslant j} c_{ik}\psi_{ik}$ представляет собой ортогональную проекцию функции f на пространство V_j. Следовательно,

$$\operatorname{dist}_{L_2}(f, V_j) = \Big\| f - \sum_{k\in\mathbb{Z},\, i\leqslant j} c_{ik}\psi_{ik} \Big\|_2,$$

что по равенству Парсеваля равно

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z},\, i\geqslant j+1} |c_{ik}|^2 \Big)^{1/2}.$$

Значит, порядок приближения пространств V_j в метрике $L_2(\mathbb{R})$ не меньше r тогда и только тогда, когда

$$\Big\| f - \sum_{k\in\mathbb{Z}, i\leqslant j} c_{ik}\psi_{ik} \Big\|_2 \leqslant C(f) 2^{-j(r+1)},$$

или, что то же самое, «хвост ряда» c_{jk} имеет маленькую норму в ℓ_2:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z},\, i\geqslant j+1} |c_{ik}|^2 \leqslant C^2(f) 2^{-2j(r+1)}.$$

Значит, порядок факторизации маски, т. е. порядок нуля в точке $\frac{1}{2}$ несет в себе всю информацию о скорости сходимости разложения гладких функций по системе всплесков, и о том, насколько быстро убывают коэффициенты этого разложения. При этом гладкости самого всплеска не требуется, все зависит лишь от порядка факторизации маски. Тем не менее, как для масштабирующих функций, так и для всплесков, гладкость *достаточна* для хорошей факторизации. Применив предложение 3.3.11, немедленно получаем

Следствие 4.2.9. *Предположим, всплеск-функция ψ порождена финитной масштабирующей функцией φ. Тогда если $\psi \in W_1^r$ или $\varphi \in W_1^r$, то свойства а) и б) (из формулировки теоремы 4.2.6) выполнены.*

Пусть n — наибольшее число, для которого выполнены условия теоремы 4.2.6. Заметим, что разложение по всплескам не может сходиться быстрее, чем $o(2^{-j(r+1)})$, для всех достаточно гладких функций, теорема 4.2.6 это запрещает. Даже повышением гладкости разлагаемой функции нельзя добиться большей скорости или лучшего убывания коэффициентов. Таким образом, алгоритм разложения по всплескам *насыщаем*.

Все сказанное в равной мере относится и к всплескам с компактным носителем. Они, напомним, получаются из масштабирующих функций с ортогональными целыми сдвигами. Соответствующая маска строится по формуле (4.11) для некоторого натурального n, причем предполагается, что $P(0) \neq 0$. Тогда выполнено

Следствие 4.2.10. *Для всплеск-функции с компактным носителем (в частности, для всплесков Добеши ψ_n) порядок приближе-*

ния пространствами V_j, равно как и порядок сходимости разложения для гладких функций, в точности равен n.

Для всплесков с компактным носителем условие факторизации маски в точности равносильно условию моментов (1.100). Поскольку маска в этом случае соответствует уравнению $\left|m_0(\xi)\right|^2 + \left|m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right|^2 \equiv 1$, условие

$$m_0\left(\frac{1}{2}\right) = m_0'\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots = m_0^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

равносильно тому, что

$$m_0'(0) = \ldots = m_0^{(n)}(0) = 0.$$

Это, в свою очередь, означает, что (подставили в формулу (3.5))

$$\widehat{\varphi}'(0) = \ldots = \widehat{\varphi}^{(n)}(0) = 0,$$

иными словами,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n\varphi(x)\,dx = 0. \tag{4.16}$$

Длина носителя всплеска больше или равна (равна только для всплесков Добеши) $2n-1$. Поэтому порядок приближения для всплесков не превосходит $(N+1)/2$. Оптимальными в этом смысле являются всплески Добеши.

Что же касается верхней оценки для гладкости всплесков, то здесь мы можем вновь применить необходимое условие гладкости.

Следствие 4.2.11. *Гладкость всплесков не превосходит длины носителя N масштабирующей функции. Гладкость всплесков с компактным носителем не превосходит $n \leqslant (N+1)/2$.*

4.3. Время-частотная локализация

В этом параграфе излагаются результаты о время-частотной локализации ортонормированных всплесков с компактным носителем. В первом пункте доказывается, что локализация по времени классических всплесков Добеши ухудшается с ростом их гладкости. Второй пункт посвящен модернизации конструкции Добеши, приводящей к ортонормированным всплескам с компактным носителем, локализация которых сохраняется вне зависимости от их гладкости.

4.3.1. Классические всплески Добеши. Пусть $\varphi^{D,N}$ — ортогональная масштабирующая функция для всплеск-функций Добеши $\{\psi_{j,k}^{D,N}\}_{j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}}$, d_N — соответствующая маска, т. е.

$$\widehat{\varphi^{D,N}}(\xi) := \prod_{l=1}^{\infty} d_N(\xi 2^{-l}),$$

$$|d_N(\xi)|^2 := D_N(\xi) := \left(\cos^2 \pi\xi\right)^N P_N\left(\sin^2 \pi\xi\right), \tag{4.17}$$

где многочлен P_N определен в (4.9) (см. также с. 193).

Вычисление констант неопределенности для всплеск-функций Добеши требует исследования корней полиномов, определяющих квадрат модуля маски (см. приложение A.11). Значительно проще изучать константы неопределенности автокорреляционной функции всплеск-функции.

Автокорреляционная функция Φ функции φ определяется равенством

$$\Phi(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\overline{\varphi(s-t)}\, ds.$$

Упражнение 4.3.1. Доказать, что $\widehat{\Phi}(\xi) = |\widehat{\varphi}(\xi)|^2$.

Для доказательства результатов этого параграфа нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 4.3.2. *Для любого натурального числа N функции $D_N(\xi)$ удовлетворяют неравенствам*

$$|\cos^2(\pi\xi)|^N \leqslant D_N(\xi) \leqslant |Q(\xi)|^N, \tag{4.18}$$

где $Q(\xi)$ — 1-периодическая функция, равная 1 при $|\xi| \leqslant 1/4$ и равная $\sin^2(2\pi\xi)$ при $1/4 \leqslant |\xi| \leqslant 1/2$. Функцию $Q(\xi)$ можно записать в виде

$$Q(\xi) = \cos^2(\pi\xi)\widetilde{Q}(\xi),$$

где функция $\widetilde{Q}$ ограничена, удовлетворяет условию Липшица в нуле, а также имеет место неравенство

$$\sigma_2 := \sup_{\xi} |\widetilde{Q}(\xi)\widetilde{Q}(2\xi)| < 2^4 = 16. \tag{4.19}$$

Доказательство. Левое неравенство в (4.18) очевидно, так как $P_N\left(\sin^2 \pi\xi\right) \geqslant 1$. Верхняя оценка для $|\xi| \leqslant 1/4$ следует из (4.1). Для доказательства верхней оценки при $|\xi| \in [1/4, 1/2]$ заметим, что при $t \in [1/2, 1]$ выполняется неравенство

$$P_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k}(2t)^k 2^{-k} \leqslant (2t)^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} 2^{-k} =$$
$$= (2t)^{N-1} P_N(1/2) = (4t)^{N-1} \leqslant (4t)^N,$$

так как в силу (4.8) $P_N(1/2) = 2^{N-1}$. Поэтому для $1/4 \leqslant |\xi| \leqslant 1/2$

$$D_N(\xi) = \cos^{2N}(\pi\xi) P_N(\sin^2(\pi\xi)) \leqslant (4\cos^2(\pi\xi)\sin^2(\pi\xi))^N =$$
$$= (\sin^2(2\pi\xi))^N = (Q(\xi))^N.$$

Для доказательства (4.19) заметим, что $\sup\limits_{\xi} \widetilde{Q}(\xi) = 4$ и $\widetilde{Q}(\xi) = 4$ тогда и только тогда, когда $\xi = (2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\sup_{\xi}\bigl(\widetilde{Q}(\xi)\widetilde{Q}(2\xi)\bigr) < \sup_{\xi}\bigl(\widetilde{Q}(\xi)\bigr)^2 = 16. \qquad \Diamond$$

Теорема 4.3.3. *Пусть $\Phi^{D,N}$ — автокорреляционная функция масштабирующей функции $\varphi^{D,N}$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{\Phi^{D,N}}(\xi) = \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi) \text{ для любых } \xi \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/2\}; \tag{4.20}$$

$$\lim_{N\to\infty} \|\widehat{\Phi^{D,N}} - \chi_{[-1/2,1/2]}\|_p = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty; \tag{4.21}$$

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_{\widehat{\Phi^{D,N}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}; \tag{4.22}$$

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_{\Phi^{D,N}} = \infty. \tag{4.23}$$

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_{\widehat{\Phi^{D,N}}} \Delta_{\Phi^{D,N}} = \infty. \tag{4.24}$$

Доказательство. Дело заключается в том, что

$$|d_N(\xi)|^2 = D_N(\xi) = \mathcal{D}_N(\cos 2\pi\xi); \tag{4.25}$$

где

$$\mathcal{D}_N(t) := \left(\frac{1+t}{2}\right)^N \sum_{l=0}^{N-1} \binom{N-1+l}{l} \left(\frac{1-t}{2}\right)^l =$$

$$= \sum_{l=N}^{2N-1} \binom{2N-1}{l} \left(\frac{1+t}{2}\right)^l \left(\frac{1-t}{2}\right)^{2N-1-l}. \tag{4.26}$$

Формула (4.26) показывает, что $\mathcal{D}_N(t)$ — это полином Бернштейна на $[-1,1]$, аппроксимирующий функцию $\chi_{[0,1]}$. Пунктирная линия на рис. 4.1 изображает график $\mathcal{D}_7$. В силу свойств полиномов Бернштейна

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_N(t) = \chi_{[0,1]}(t) \tag{4.27}$$

для любых $\xi \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

Заметим, что

$$\chi_{[-1/2,1/2]}(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\cos 2^{-l+1}\pi\xi).$$

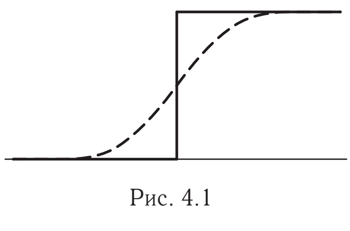


Рис. 4.1

Зафиксируем ξ и выберем $L \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|\xi| < 2^{L-2}$. Тогда

$$\prod_{l=L+1}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\cos \pi\xi 2^{-l+1}) = 1;$$

$$\prod_{l=1}^{L} \chi_{[0,1]}(\cos \pi\xi 2^{-l+1}) = \chi_{[0,1]}(\cos \pi\xi)\chi_{[-1,1]}(\xi)$$

и

$$\left|\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi) - \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left(\prod_{l=1}^{L} D_N(\xi 2^{-l}) - \prod_{l=1}^{L} \chi_{[0,1]}(\cos \pi\xi 2^{1-l})\right) \cdot \widehat{\Phi^{D,N}}(\xi 2^{-L})\right| +$$

$$+ \left|\left(1 - \prod_{l=1}^{\infty} D_N(\xi 2^{-L-l})\right) \cdot \chi_{[0,1]}(\cos \pi\xi)\chi_{[-1,1]}(\xi)\right|.$$

Обозначим

$$I_1(\xi) := \left|\left(\prod_{l=1}^{L} D_N(\xi 2^{-l}) - \prod_{l=1}^{L} \chi_{[0,1]}(\cos \pi\xi 2^{1-l})\right) \cdot \widehat{\Phi^{D,N}}(\xi 2^{-L})\right|;$$

$$I_2(\xi) := \left|\left(1 - \prod_{l=1}^{\infty} D_N(\xi 2^{-L-l})\right) \cdot \chi_{[0,1]}(\cos \pi\xi)\chi_{[-1,1]}(\xi)\right|.$$

Очевидно, что $0 \leqslant \widehat{\Phi^{D,N}}(\xi) \leqslant 1$. Поэтому из (4.27) следует, что

$$I_1(\xi) \to 0 \text{ при } N \to \infty. \tag{4.28}$$

Для оценки I_2 воспользуемся неравенствами:

$$1 - e^{-t} \leqslant t \text{ при } t \geqslant 0 \tag{4.29}$$

и

$$-\ln(1-t) \leqslant \frac{t}{1-t} \text{ при } 0 < t < 1. \tag{4.30}$$

Тогда имеем

$$I_2(\xi) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - D_N(\xi 2^{-l-L})}{D_N(\xi 2^{-l-L})}. \tag{4.31}$$

Так как $|\xi| < 2^{L-2}$, то $\left|\xi 2^{-L-l}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$D_N(\xi 2^{-l-L}) \geqslant D_N(1/4) = \frac{1}{2}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{4.32}$$

Из (4.1) и (4.18) следует, что при $|\xi| \leqslant 1/4$

$$0 \leqslant D_N(0) - D_N(\xi) = 1 - D_N(\xi) = D_N(\xi \pm 1/2) \leqslant \sin^{2N}(2\pi\xi).$$

Последнее неравенство вместе с (4.31) и (4.32) влечет

$$I_2 \leqslant 2\sum_{l=1}^{\infty}(1 - D_N(\xi 2^{-l-L})) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\left(\pi\xi 2^{2-l-L}\right)^{2N} \to 0 \text{ при } N \to \infty. \tag{4.33}$$

Из (4.28) и (4.33) следует (4.20).

Докажем (4.20). В силу теоремы Лебега из (4.20) следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi)\,d\xi = \int_{-1}^{1}\chi_{[-1/2,1/2]}(\xi)\,d\xi = 1. \tag{4.34}$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}}\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi)\,d\xi = \Phi^{D,N}(0) = \|\varphi^{D,N}\|_2^2 = 1,$$

то

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}}\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi)\,d\xi = 0.$$

Поскольку $0 \leqslant \widehat{\Phi^{D,N}}(\xi) \leqslant 1$, то $(\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi))^p \leqslant (\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi))$ и

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}}|\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi)|^p\,d\xi = 0 \tag{4.35}$$

для любого $p \in [1, \infty)$. Окончательно,

$$\|\widehat{\Phi^{D,N}} - \chi_{[-1/2,1/2]}\|_p \leqslant \left(\int_{-1}^{1}\left|\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi) - \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi)\right|^p\,d\xi\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}}\left|\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi) - \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi)\right|^p\,d\xi\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{-1}^{1}\left|\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi) - \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi)\right|^p\,d\xi\right)^{1/p} + \left(\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}}\left|\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi)\right|^p\,d\xi\right)^{1/p}.$$

В силу (4.34) и (4.35) последнее выражение стремится к 0 при $N \to \infty$.

Для доказательства (4.20) заметим, что в силу (4.1)

$$|\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi)| \leqslant \prod_{l=1}^{2L}|d_N(\xi 2^{-l})|^2. \tag{4.36}$$

Учитывая лемму 4.3.2, имеем

$$\prod_{l=1}^{2L}|d_N(\xi 2^{-l})|^2 = \prod_{l=1}^{L} D_N(\xi 2^{-2l})D_N(\xi 2^{1-2l}) \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{l=1}^{L}(\widetilde{Q}(\xi 2^{-2l})\widetilde{Q}(\xi 2^{1-2l}))^N \left|\cos\pi\xi 2^{1-2l}\cos\pi\xi 2^{-2l}\right|^{2N} =$$
$$= (\sigma_2)^{L\,N}\left|\frac{\sin\pi\xi}{2^{2L}\sin\pi\xi 2^{-2L}}\right|^{2N} \leqslant \left(\frac{\sigma_2}{16}\right)^{L\,N}|\sin\pi\xi 2^{-2L}|^{-2N}. \quad (4.37)$$

Ясно, что $|\sin\pi\xi 2^{-2L}| \geqslant \sin(\pi/8)$ при ξ таких, что $|\xi| \in [2^{2L-3}, 2^{2L-1}]$, $L \in \mathbb{N}$. Поэтому, продолжая (4.37), имеем

$$\prod_{l=1}^{2L}|d_N(\xi 2^{-l})|^2 \leqslant \left(\frac{\sigma_2}{16}\right)^{L\,N}|\sin\pi/8|^{-2N}. \quad (4.38)$$

Из этой оценки очевидным образом получаем

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\{|\xi|\geqslant 1/2\}}\xi^2\,|\widehat{\Phi^{D,N}}(\xi)|^2\,d\xi = 0. \quad (4.39)$$

Используя теперь (4.39), (4.20) и теорему Лебега, получаем (4.20).

Для доказательства (4.20) заметим, что из (4.20) при $p = 2$ и равенства Парсеваля следует сходимость по норме $L_2(\mathbb{R})$ $\Phi^{D,N}$ к $\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$ при $N \to \infty$. Так как центр $\Phi^{D,N}$ равен 0, то по лемме Фату получаем

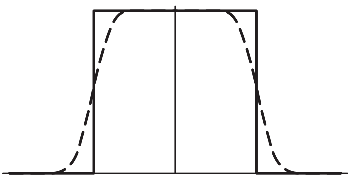


Рис. 4.2

$$\liminf_{N\to\infty}\Delta^2_{\Phi^{D,N}} =$$
$$= \liminf_{N\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} x^2\left(\Phi^{D,N}(x)\right)^2\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} x^2\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2\,dx = \infty,$$

что завершает доказательство (4.20). $\Diamond$

Всплески Добеши можно рассматривать как компактификацию всплесков Котельникова–Шеннона (см. с. 48). Масштабирующая функция последних является идеальным фильтром низких частот $\widehat{\varphi^S}(\xi) := \chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(\xi)$. Пунктирной линией на рисунке изображен график $\mathcal{D}_7(\cos(2\pi\xi))$.

Теорема 4.3.3 показывает, что всплески Добеши теряют локализованность по времени с возрастанием гладкости.

4.3.2. Модифицированные всплески Добеши. Опишем построение всплеск-функций с компактными носителями, масштабирующая функция которых с повышением гладкости стремится в норме $L_2(\mathbb{R})$ к масштабирующей функции Мейера (см. с. 44).

Пусть $a \in (0,1)$, $f_a(t)$ — бесконечно дифференцируемая неубывающая функция на $[-1,1]$, равная 0 при $t \in [-1,-a]$ и удовлетворяющая тождеству

$$f_a(t) + f_a(-t) = 1, \quad t \in [-1,1]. \tag{4.40}$$

Обозначим через

$$b_l^N(t) := \binom{N}{l} \left(\frac{1+t}{2}\right)^l \left(\frac{1-t}{2}\right)^{N-l}, \quad l = 0, 1, \ldots, N,$$

мономы Бернштейна на отрезке $[-1,1]$, $t_{N,l} := \dfrac{2l-N}{N}$.

Рассмотрим тригонометрические полиномы с действительными коэффициентами $h_N^a(l)$

$$m_N^a(\xi) = 2^{-1/2} \sum_{l=0}^{2N-1} h_N^a(l) e^{i2\pi l\xi}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{4.41}$$

удовлетворяющие уравнению

$$|m_N^a(\xi)|^2 = B_{2N-1}^a(\cos 2\pi\xi), \quad m_N^a(0) = 1, \tag{4.42}$$

где

$$B_K^a(t) := \sum_{l=0}^{K} f_a(t_{K,l}) b_l^K(t). \tag{4.43}$$

Полиномы B_K^a — это полиномы Бернштейна, приближающие функцию f_a. Полиномы m_N^a существуют в силу леммы А.11.3.

Из (4.40) следует, что

$$|m_N^a(\xi)|^2 + |m_N^a(\xi + 1/2)|^2 = 1. \tag{4.44}$$

Действительно,

$$B_N^a(-\cos 2\pi\xi) = \sum_{l=0}^{2N-1} f_a(t_{2N-1,l}) \binom{2N-1}{l} (\sin \pi\xi)^{2l} (\cos \pi\xi)^{2(2N-1-l)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{2N-1} f_a(t_{2N-1,2N-1-l}) \binom{2N-1}{l} (\cos \pi\xi)^{2l} (\sin \pi\xi)^{2(2N-1-l)}.$$

Поэтому

$$|m_N^a(\xi)|^2 + |m_N^a(\xi+1/2)|^2 = B_{2N-1}^a(\cos 2\pi\xi) + B_{2N-1}^a(-\cos 2\pi\xi) =$$

$$= \sum_{l=0}^{2N-1} \left(f_a(t_{2N-1,l}) + f_a(t_{2N-1,2N-1-l})\right) \times$$

$$\times \binom{2N-1}{l}(\cos\pi\xi)^{2l}(\sin\pi\xi)^{2(2N-1-l)} = \left(\sin^2(\pi\xi)+\cos^2(\pi\xi)\right)^{2N-1} = 1.$$

Для удобства обозначений положим $h_N^a(l)=0$ при $l<0$ или $l>2N-1$. В терминах коэффициентов $\{h_N^a(l)\}_{l=0}^N$ тождество (4.44) эквивалентно равенствам

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} h_N^a(2l) = \sum_{l\in\mathbb{N}} h_N^a(2l+1) = 2^{-1/2}, \tag{4.45}$$

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} h_N^a(l-2p)h_N^a(l-2q) = \delta_{p,q}, \quad p,q\in\mathbb{N}. \tag{4.46}$$

В силу леммы 2.4.1 бесконечные произведения

$$G_N^a(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} m_N^a(\xi 2^{-l}), \quad N\in\mathbb{N},$$

сходятся абсолютно для любого $\xi\in\mathbb{R}$, причем сходимость равномерная на любом компактном множестве.

Определим функции $\varphi^{a,N}$ и $\psi^{a,N}$ через образы Фурье:

$$\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} m_N^a(\xi 2^{-l}), \tag{4.47}$$

$$\widehat{\psi^{a,N}}(\xi) = e^{i\pi\xi}\cdot\overline{m_N^a(\xi/2+1/2)}\cdot\prod_{l=2}^{\infty} m_N^a(\xi 2^{-l}),\ \xi\in\mathbb{R}.$$

Т е о р е м а 4.3.4. *При любом $a\in(0,1)$ и любом натуральном N функции $\varphi^{a,N}$, $\psi^{a,N}$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и имеют компактный носитель*:

$$\operatorname{supp}\varphi^{a,N} = [-2N+1, 0]; \quad \operatorname{supp}\psi^{a,N} = [-N, N-1]. \tag{4.48}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$\varphi^{a,N}(t) = \sqrt{2}\sum_{l=0}^{2N-1} h_N^a(l)\varphi^{a,N}(2t+l), \tag{4.49}$$

$$\psi^{a,N}(t) = \sqrt{2}\sum_{l=0}^{2N-1} h_N^a(l)\varphi^{a,N}(2t+1-l).$$

Всплеск-функция $\psi^{a,N}$ порождает в $L_2(\mathbb{R})$ ортонормированный базис $\{\psi_{jk}^{a,N}\}_{j,\,k\in\mathbb{Z}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (4.49) следует из теоремы 2.4.4. По поводу первого равенства в (4.48) см. с. 150. Второе легко получается из (1.42). Заметим, что при любом $N\in\mathbb{N}$ тригонометрические полиномы m_N^a не имеют нулей на $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ в силу (4.42) и того, что

$B_{2N-1}(t) > 0$ при $t \in (-1, 1)$. Кроме того, они удовлетворяют (4.44). Значит, по следствию 2.5.8 $\varphi^{a,N}$ — ортонормированная масштабирующая функция. $\Diamond$

Гладкость построенных всплесков линейно возрастает с ростом параметра N. Для доказательства этого факта потребуется вспомогательная оценка.

Для упрощения обозначений перейдем от отрезка $[-1, 1]$ к отрезку $[0, 1]$ путем замены $t \to 2t - 1$:

$$\widetilde{b}_l^N(t) := b_l^N(2t-1) := \binom{N}{l} t^l (1-t)^{N-l}, \quad l = 0, 1, \ldots, N,$$

мономы Бернштейна на отрезке $[0, 1]$;

$$\widetilde{t}_{N,l} := \frac{l}{N}; \quad \widetilde{f}_a(t) = f_a(2t-1);$$

$$\widetilde{B}_K^a(t) := \sum_{l=0}^{K} \widetilde{f}_a(\widetilde{t}_{K,l}) \widetilde{b}_l^K(t).$$

Лемма 4.3.5. *Для любых натуральных K, k, m, связанных соотношениями $m \leqslant k < K$, и для любого $t \in [0, 1]$ имеем*

$$t^{-m} \sum_{l=k}^{K} \widetilde{b}_l^K(t) = \sum_{l=k}^{K} \binom{K}{l} t^{l-m} (1-t)^{K-l} \leqslant \frac{\binom{K}{m}}{\binom{k}{m}}. \tag{4.50}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{l=k}^{K} \binom{K}{l} t^{l-m} (1-t)^{K-l} = \sum_{l=k}^{K} \frac{\binom{K}{l}}{\binom{K-m}{K-l}} \binom{K-m}{K-l} t^{l-m} (1-t)^{K-l} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{l=k,\ldots,K} \frac{\binom{K}{l}}{\binom{K-m}{K-l}} = \sup_{l=k,\ldots,K} \frac{\binom{K}{m}}{\binom{l}{m}} = \frac{\binom{K}{m}}{\binom{k}{m}}. \quad \Diamond$$

Теорема 4.3.6. *Если $a \in (0, 1/2)$, то существует константа $\mu > 0$, такая, что*

$$\varphi^{a,N},\ \psi^{a,N} \in C^{\mu N} \text{ для любого } N \in \mathbb{N},$$

где

$$C^\alpha := \left\{ f\colon \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)(1 + |\xi|)^\alpha d\xi < \infty \right\},\ \alpha > 0.$$

Доказательство. Пусть

$$l_a(K) := \left[\frac{K(1-a)}{2}\right] + 1,$$

где $[t]$ — целая часть числа t. Зафиксируем некоторое $m < l_a(K)$. Пусть

$$L_N^a(\xi) := \left(\frac{1+\cos 2\pi\xi}{2}\right)^{-m} B_{2N-1}^a(\cos 2\pi\xi).$$

Используя хорошо известную формулу

$$\prod_{l=1}^{\infty} \cos\left(2^{-l}\xi\right) = \frac{\sin\xi}{\xi},$$

имеем

$$\left|\widehat{\varphi_N^a}(\xi)\right|^2 = \prod_{l=1}^{\infty} B_{2N-1}^a(\cos 2^{1-l}\pi\xi) =$$

$$= \prod_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos 2^{1-l}\pi\xi}{2}\right)^m \prod_{l=1}^{\infty} L_N^a(2^{-l}\xi) = \left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^{2m} \prod_{l=1}^{\infty} L_N^a(2^{-l}\xi). \tag{4.51}$$

В силу предложения 2.19 бесконечное произведение $\prod\limits_{l=1}^{\infty} L_N^a(2^{-l}\xi)$ сходится, поэтому существует константа C такая, что при $|\xi| \leqslant 1/2$

$$\prod_{l=1}^{\infty} L_N^a(2^{-l}\xi) \leqslant C.$$

Рассмотрим теперь $|\xi| > 1/2$. Определим $l_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$2^{-l_0}|\xi| < 1 \leqslant 2^{1-l_0}|\xi|.$$

Тогда

$$\prod_{l=1}^{\infty} L_N^a(2^{-l}\xi) = \prod_{l=1}^{l_0} L_N^a(2^{-l}\xi) \prod_{l=1}^{\infty} L_N^a(2^{-l_0-l}\xi) \leqslant$$

$$\leqslant C\|L_N^a\|_\infty^{l_0} \leqslant 2C|\xi|^{\log_2(\|L_N^a\|_\infty)}. \tag{4.52}$$

Из (4.51) и (4.52) следует, что

$$\left|\widehat{\varphi_N^a}(\xi)\right|^2 \leqslant 2C|\xi|^{-2m+\log_2(\|L_N^a\|_\infty)}. \tag{4.53}$$

Для завершения доказательства осталось оценить $\|L_N^a\|_\infty$. Ясно, что $f_a(t_{K,l}) = 0$ при $l < l_a(K)$. Поэтому

$$B_K^a(t) \leqslant \sum_{l=l_a(K)}^{K} b_l^K(t). \tag{4.54}$$

В силу (4.50)

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^{-m} \sum_{l=l_a(K)}^{K} b_l^K(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-m} \sum_{l=l_a(K)}^{K} \widetilde{b}_l^K\left(\frac{1+t}{2}\right) \leqslant \frac{\binom{K}{m}}{\binom{l_a(K)}{m}}. \tag{4.55}$$

По формуле Стирлинга существует константа C_1 такая, что

$$\left(\frac{\binom{K}{m}}{\binom{l_a(K)}{m}}\right)^{1/K} \leqslant C_1 \frac{(\widetilde{a}-\gamma)^{\widetilde{a}-\gamma}}{(1-\gamma)^{1-\gamma}\,\widetilde{a}^{\widetilde{a}}}, \tag{4.56}$$

где $\widetilde{a} := \dfrac{1-a}{2}$, $\gamma := \dfrac{m}{K}$.

Легко видеть, что при любом $\widetilde{a} \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ существует $\gamma \in (0, \widetilde{a})$, такое, что

$$2\gamma - \log_2\left(\frac{(\widetilde{a}-\gamma)^{\widetilde{a}-\gamma}}{(1-\gamma)^{1-\gamma}\,\widetilde{a}^{\widetilde{a}}}\right) > 0,$$

что означает, что утверждение теоремы 4.3.6 следует из (4.53). ♢

Для доказательства дальнейших результатов о модифицированных всплесках необходимо получить оценку, аналогичную приведенной в лемме 4.3.2.

Л е м м а 4.3.7. *Для любых натуральных K, l, $l \leqslant K$ выполняется равенство*

$$\sum_{s=l}^{K} \binom{K}{s} (1-t)^{s-l} t^{K-s} = \sum_{s=0}^{K-l} \binom{l-1+s}{s} t^s, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.57}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\widetilde{b}_s^K(1-t) = \widetilde{b}_{K-s}^K(t), \tag{4.58}$$

то

$$\sum_{s=l}^{K} \binom{K}{s} (1-t)^{s-l} t^{K-s} = (1-t)^{-l} \sum_{s=l}^{K} \widetilde{b}_s^K(1-t) =$$
$$= (1-t)^{-l} \sum_{s=0}^{K-l} \widetilde{b}_s^K(t) = \sum_{s=0}^{K-l} \binom{l-1+s}{s} t^s.$$

Последнее равенство здесь основано на теореме 4.4.5. ♢

Пусть $b(a) \in (0,1)$ — корень уравнения

$$2^{a+\frac{2}{K}}(1-b)^{\frac{1-a}{2}}(1+b)^{\frac{1+a}{2}} = 1.$$

Обозначим через $\xi(a) \in [1/4, 1/2]$ корень уравнения

$$\cos 2\pi\xi(a) = -b(a). \tag{4.59}$$

Лемма 4.3.8. *При* $K \geqslant \dfrac{1}{a}$

$$(B_K^a(\cos 2\pi\xi))^{1/K} \leqslant \\ \leqslant \begin{cases} 1, & |\xi| \leqslant \xi(a); \\ 2^{1+a+\frac{2}{K}} \left|\cos(\pi\xi)\right|^{1-a} \left|\sin(\pi\xi)\right|^{1+a}, & |\xi| \in (\xi(a), 1/2]. \end{cases} \tag{4.60}$$

Доказательство. Используя (4.57), имеем

$$B_K^a(\cos 2\pi\xi) \leqslant \\ \leqslant \cos^{2l_a(K)}(\pi\xi) \sum_{l=l_a(K)}^{K} \binom{K}{l} \left(\frac{1+\cos 2\pi\xi}{2}\right)^{l-l_a(K)} \left(\frac{1-\cos 2\pi\xi}{2}\right)^{K-l} = \\ = \cos^{2l_a(K)}(\pi\xi) \sum_{s=0}^{K-l_a(K)} \binom{l_a(K)-1+s}{s} \sin^{2s}(\pi\xi). \tag{4.61}$$

Из условия $K \geqslant \dfrac{1}{a}$ следует, что $l_a(K)-1 \leqslant K - l_a(K)$. Поэтому (см. (4.61))

$$B_K^a(\cos 2\pi\xi) \leqslant \cos^{4l_a(K)-2K-2}(\pi\xi) \cos^{2(K-l_a(K)+1)}(\pi\xi) \times \\ \times \sum_{s=0}^{K-l_a(K)} \binom{K-l_a(K)+s}{s} \sin^{2s}(\pi\xi) = \\ = \cos^{4l_a(K)-2K-2}(\pi\xi) D_{K-l_a(K)+1}(\xi),$$

где полиномы $D_K(\xi)$ определены в (4.17).

В силу леммы 4.3.2 при $|\xi| \in [1/4, 1/2]$ имеем

$$B_K^a(\cos 2\pi\xi) \leqslant \cos^{2(2l_a(K)-K-1)}(\pi\xi) \sin^{2(K-l_a(K)+1)}(2\pi\xi) = \\ = 2^{2(K-l_a(K)+1)} \cos^{2l_a(K)}(\pi\xi) \sin^{2(K-l_a(K)+1)}(\pi\xi)$$

или

$$(B_K^a(\cos 2\pi\xi))^{1/K} \leqslant 2^{2\left(1-\frac{l_a(K)}{K}+\frac{1}{K}\right)} \cos^{2\frac{l_a(K)}{K}}(\pi\xi) \sin^{2\left(1-\frac{l_a(K)}{K}+\frac{1}{K}\right)}(\pi\xi).$$

Заметим, что $\dfrac{l_a(K)}{K} \geqslant \dfrac{1-a}{2}$ и $1 - \dfrac{l_a(K)}{K} + \dfrac{1}{K} \geqslant 1 - \dfrac{1-a}{2} = \dfrac{1+a}{2}$. Поэтому

$$B_K^a(\cos 2\pi\xi)^{1/K} \leqslant 2^{1+a+\frac{2}{K}}|\cos(\pi\xi)|^{1-a}|\sin(\pi\xi)|^{1+a}. \tag{4.62}$$

Напоминаем, что (4.62) выполняется при $|\xi| \in [1/4, 1/2]$. Очевидно, что при любых ξ

$$0 \leqslant B_K^a(\cos 2\pi\xi) \leqslant 1. \tag{4.63}$$

Поэтому необходимо выяснить, при каких ξ правая часть (4.62) меньше 1.

Пусть $t := -\cos\xi$. Несложные вычисления показывают, что выражение

$$2^{1+a+\frac{2}{K}}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\frac{1-a}{2}}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\frac{1+a}{2}} = 2^{a+\frac{2}{K}}(1-t)^{\frac{1-a}{2}}(1+t)^{\frac{1+a}{2}}$$

меньше 1 при $t > b(a)$. Таким образом, из (4.62) и (4.63) следует (4.60). $\diamondsuit$

Для дальнейших оценок необходимо неравенство $\xi(a) < 1/3$, которое эквивалентно неравенству $b(a) < \dfrac{1}{2}$. Последнее, в свою очередь, означает, что a и K должны удовлетворять условию

$$a < \frac{4(1-\frac{1}{K})\ln 2 - \ln 12}{\ln 12}. \tag{4.64}$$

В дальнейшем полагаем, что

$$a < \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 4 + \ln 3} \approx 0{,}115\,772. \tag{4.65}$$

Обозначим

$$R_K(\xi) := 2^{1+a+\frac{2}{K}}\left|\cos(\pi\xi)\right|^{1-a}\left|\sin(\pi\xi)\right|^{1+a}.$$

Из (4.60) следует, что

$$(B_K^a(\cos 2\pi\xi)B_K^a(\cos 4\pi\xi))^{1/K} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} 1, & |\xi| \in \left[0, \dfrac{\xi(a)}{2}\right]; \\ R_K^a(2\xi), & |\xi| \in \left(\dfrac{\xi(a)}{2}, \dfrac{1}{4}\right]; \\ R_K^a(1-2\xi), & |\xi| \in \left(\dfrac{1}{4}, \xi(a)\right]; \\ R_K^a(\xi)R_K^a(1-2\xi)), & |\xi| \in \left(\xi(a), \dfrac{1-\xi(a)}{2}\right]; \\ R_K^a(\xi), & |\xi| \in \left(\dfrac{1-\xi(a)}{2}, \dfrac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Несложные, но достаточно громоздкие, вычисления показывают, что при условии (4.65) и достаточно больших K

$$\left(B_K^a(\cos 2\pi\xi)B_K^a(\cos 4\pi\xi)\right)^{1/K} \leqslant \alpha 2^{2\beta}|\cos\pi\xi|^\beta|\cos 2\pi\xi|^\beta, \qquad (4.66)$$

где $\alpha \in (0,1)$ — некоторая константа, зависящая только от a, $\beta := 1-a$.

Замечание 4.3.9. В качестве α можно взять

$$\alpha := \max\left\{2^{3a-1}, 3^{\frac{a-1}{2}}, 2^{\frac{5a-1}{2}}, \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1-a}{2}}, 2^{\frac{5a-3}{2}}(\sqrt{2}+1)^{\frac{1+a}{2}}\right\}.$$

Исследуем предельное поведение модифицированных всплесков. Определим фазу $w_{a,N}(\xi)$ как бесконечно дифференцируемую действительнозначную функцию, удовлетворяющую условиям

$$w_{a,N}(0) = 0, \quad m_N^a(\xi) = e^{-iw_{a,N}(\xi)}|m_N^a(\xi)|.$$

Тогда

$$\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi) = e^{-iW_N^a(\xi)}\prod_{l=1}^{\infty}|m_N^a(\xi 2^{-l})|,$$

где $W_N^a(\xi) := \sum\limits_{l=1}^{\infty} w_{a,N}(\xi 2^{-l})$. Рассмотрим масштабирующие функции Мейера (их преобразование Фурье отличаются только фазовым множителем от преобразования Фурье масштабирующих функций, рассмотренных на с. 44):

$$\widehat{\varphi^{a,M,N}}(\xi) = e^{-iW_N^a(\xi)}(f_a(\cos\pi\xi))^{1/2}\chi_{[-1,1]}(\xi), \ N \in \mathbb{N}.$$

Лемма 4.3.10. *При* $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *и любом* $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty}\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi) = \widehat{\varphi^{a,M,N}}(\xi).$$

Доказательство. В силу свойств полиномов Бернштейна

$$\lim_{K\to\infty} B_K^a(\cos 2\pi\xi) = f_a(\cos 2\pi\xi), \qquad (4.67)$$

поэтому

$$\lim_{K\to\infty}|m_K^a(\xi)| = (f_a(\cos 2\pi\xi))^{1/2}. \qquad (4.68)$$

Заметим, что при $a < \frac{1}{2}$

$$\widehat{\varphi^{a,M,N}}(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} e^{-iw_{a,N}(\xi 2^{-l})}\left(f_a(\cos\pi\xi 2^{-l+1})\right)^{1/2}.$$

Зафиксируем ξ и выберем $L \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|\xi| < 2^{L-2}$. Тогда

$$\prod_{l=L+1}^{\infty} f_a(\cos \pi\xi 2^{-l+1}) = 1;$$

$$\prod_{l=1}^{L} f_a(\cos \pi\xi 2^{-l+1}) = f_a(\cos \pi\xi)\chi_{[-1,1]}(\xi)$$

и

$$\left|\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi) - \widehat{\varphi^{a,M,N}}(\xi)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left(\prod_{l=1}^{L}\left|m_N^a(\xi 2^{-l})\right| - \prod_{l=1}^{L}\left(f_a(\cos \pi\xi 2^{1-l})\right)^{1/2}\right) \cdot \left|\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi 2^{-L})\right|\right| +$$

$$+ \left|\left(1 - \prod_{l=1}^{\infty}\left|m_N^a(\xi 2^{-L-l})\right|\right) \cdot \left(f_a(\cos(\pi\xi))\right)^{1/2} \chi_{[-1,1]}(\xi)\right|.$$

Обозначим

$$I_1(\xi) := \left|\left(\prod_{l=1}^{L}\left|m_N^a(\xi 2^{-l})\right| - \prod_{l=1}^{L}\left(f_a(\cos \pi\xi 2^{1-l})\right)^{1/2}\right) \cdot \left|\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi 2^{-L-1})\right|\right|;$$

$$I_2(\xi) := \left(1 - \prod_{l=1}^{\infty}\left|m_N^a(\xi 2^{-L-l})\right|\right) \cdot \left(f_a(\cos(\pi\xi))\right)^{1/2} \chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Очевидно, что $0 \leqslant |\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi)| \leqslant 1$. Поэтому из (4.68) следует, что $I_1(\xi) \to \to 0$ при $N \to \infty$.

Для оценки I_2 воспользуемся оценками (4.29) и (4.30). Тогда имеем

$$I_2(\xi) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - |m_N^a(\xi 2^{-l-L})|}{|m_N^a(\xi 2^{-l-L})|}. \tag{4.69}$$

Так как $|\xi| < 2^{L-2}$, то $\left|\dfrac{\xi}{2^{L+l}}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$|m_N^a(\xi 2^{-l-L})| = \left(B_{2N-1}^a(\cos(\pi\xi 2^{1-l-L}))\right)^{1/2} \geqslant$$
$$\geqslant \left(B_{2N-1}^a(0)\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{4.70}$$

Используя (4.44) и (4.62), имеем

$$1 - \left|m_N^a(\xi 2^{-l-L})\right| \leqslant 1 - \left|m_N^a(\xi 2^{-l-L})\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(2N-1)(1+a)+2} \sin^{(2N-1)(1-a)}(\pi\xi 2^{-l-L}). \tag{4.71}$$

Последнее неравенство вместе с (4.69) и (4.70) влечет $I_2(\xi) \to$ $\to 0$ при $N \to \infty$. $\lozenge$

Теорема 4.3.11. *Пусть* $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \|\varphi^{a,N} - \varphi^{a,M,N}\|_2 = 0. \tag{4.72}$$

Доказательство. В силу теоремы Лебега из леммы 4.3.10 следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \left|\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi)\right|^2 d\xi = \int\limits_{-1}^{1} f_a(\cos(\pi\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (f_a(\cos(\pi\xi) + f_a(-\cos(\pi\xi))\, d\xi = 1.$$

Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi)\right|^2 d\xi = \|\varphi^{a,N}\|_2 = 1,$$

то

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \left|\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi)\right|^2 d\xi = 0. \tag{4.73}$$

Окончательно,

$$\|\widehat{\varphi^{a,N}} - \widehat{\varphi^{a,M,N}}\|_2 = \||\widehat{\varphi^{a,N}}| - |\widehat{\varphi^{a,M,N}}|\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-1}^{1} \left||\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi)| - |\widehat{\varphi^{a,M,N}}(\xi)|\right|^2 d\xi\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int\limits_{|\xi|\geqslant 1} \left||\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi)| - |\widehat{\varphi^{a,M,N}}(\xi)|\right|^2 d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_{-1}^{1} \left||\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi)| - |\widehat{\varphi^{a,M,N}}(\xi)|\right|^2 d\xi\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{|\xi|\geqslant 1} \left|\widehat{\varphi^{a,N}}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

В силу леммы 4.3.10 и (4.73) последнее выражение стремится к 0 при $N \to \infty$. $\lozenge$

Перейдем к доказательству того, что константы неопределенности модифицированных всплесков Добеши равномерно ограничены по параметру N, определяющему их гладкость.

Определим масштабирующую функцию И. Мейера (см. параграф 1.4) φ^M, используя функцию f_a:

$$\widehat{\varphi^M}(\xi) := \sqrt{f_a(\cos(\pi\xi))}\,\chi_{[-1,1]}(\xi). \tag{4.74}$$

Автокорреляционные функции для масштабирующих функций Мейера и модифицированных всплесков Добеши обозначим следующим образом:

$$\Phi^M(t) := \int_{\mathbb{R}} \varphi^M(s)\varphi^M(s-t)\,ds,$$

$$\Phi^{a,N}(t) := \int_{\mathbb{R}} \varphi^{a,N}(s)\varphi^{a,N}(s-t)\,ds.$$

Теорема 4.3.12. *Пусть* $a < \dfrac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 4 + \ln 3}$ *и функция* f_a *удовлетворяет условиям*

$$(f_a)''(t) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad t \leqslant 0, \qquad (f_a)''(t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad t > 0, \tag{4.75}$$

$$(f_a)'(t) \leqslant C\sqrt{f_a(t)} \quad \textit{для некоторой константы} \quad C. \tag{4.76}$$

Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \|\widehat{\Phi}^{a,N} - \widehat{\Phi}^M\|_p = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty; \tag{4.77}$$

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_{\widehat{\Phi}^{a,N}} = \Delta_{\widehat{\Phi}^M}; \tag{4.78}$$

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_{\Phi^{a,N}} \leqslant \frac{8\pi^2\sqrt{2}\,C}{(\sqrt{2}-1)\|\Phi^M\|_2}; \tag{4.79}$$

и, следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_{\widehat{\Phi}^{a,N}}\Delta_{\Phi^{a,N}} \leqslant \frac{8\pi^2\sqrt{2}\,C\Delta_{\widehat{\Phi}^M}}{(\sqrt{2}-1)\|\Phi^M\|_2} < \infty. \tag{4.80}$$

Замечание 4.3.13. В силу (4.40) второе условие

$$(f_a)''(t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t > 0$$

в (4.75) следует из первого и наоборот.

Доказательство теоремы 4.3.12 разбито на 6 лемм.

Лемма 4.3.14. *При условиях теоремы* 4.3.12 *имеем*

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{\Phi}^{a,N}(\xi) = f_a(\cos(\pi\xi))\chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Доказательство. Так как

$$\widehat{\Phi}^{a,N}(\xi) = |\widehat{\varphi}^{a,N}(\xi)|^2 = \prod_{l=1}^{\infty} B^a_{2N-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-l}))$$

(см. (4.42) и (4.47)), то утверждение следует из леммы 4.3.10. $\Diamond$

Лемма 4.3.15. *Для любого* $p \in [1, \infty)$

$$\lim_{N\to\infty} \|\widehat{\Phi}^{a,N} - \widehat{\Phi}^{M}\|_{p(\mathbb{R})} = 0.$$

Доказательство. В силу теоремы Лебега из леммы 4.3.14 следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-1}^{1} \widehat{\Phi}^{a,N}(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} f_a(\cos(\pi\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{0}^{1} (f_a(\cos(\pi\xi) + f_a(-\cos(\pi\xi))\, d\xi = 1.$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}^{a,N}(\xi)\, d\xi = \Phi^{a,N}(0) = \|\varphi^{a,N}\|_2^2 = 1,$$

то

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \widehat{\Phi}^{a,N}(\xi)\, d\xi = 0.$$

Поскольку $0 \leqslant \widehat{\Phi}^{a,N}(\xi) \leqslant 1$, то $(\widehat{\Phi}^{a,N}(\xi))^p \leqslant \widehat{\Phi}^{a,N}(\xi)$ и

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\widehat{\Phi}^{a,N}(\xi)|^p\, d\xi = 0 \tag{4.81}$$

для любого $p \in [1, \infty)$. Окончательно,

$$\|\widehat{\Phi^{a,N}} - \widehat{\Phi^{M}}\|_p \leqslant \left(\int_{-1}^{1} \left|\widehat{\Phi^{a,N}}(\xi) - \widehat{\Phi^{M}}(\xi)\right|^p\, d\xi\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \left|\widehat{\Phi^{a,N}}(\xi) - \widehat{\Phi^{M}}(\xi)\right|^p\, d\xi\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} \left|\widehat{\Phi^{a,N}}(\xi) - \widehat{\Phi^{M}}(\xi)\right|^p\, d\xi\right)^{1/p} + \left(\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \left|\widehat{\Phi^{a,N}}(\xi)\right|^p\, d\xi\right)^{1/p}.$$

В силу леммы 4.3.14 и (4.81) последнее выражение стремиться к 0 при $N \to \infty$. $\Diamond$

Лемма 4.3.16. *При условиях теоремы* 4.3.12 *имеем*

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_{\widehat{\Phi}^{a,N}} = \Delta_{\widehat{\Phi}^{M}}. \tag{4.82}$$

Доказательство. В силу (4.44)

$$|\Phi^{a,N}(\xi)| \leqslant \prod_{l=1}^{2L} |m_N^a(\xi 2^{-l})|^2. \tag{4.83}$$

Учитывая (4.66), имеем

$$\prod_{l=1}^{2L} |m_N^a(\xi 2^{-l})|^2 = \prod_{l=1}^{L} B_{2N-1}(\cos\pi\xi 2^{-2l+2}) B_{2N-1}(\cos\pi\xi 2^{1-2l}) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{l=1}^{L} (\alpha 2^{2\beta})^{2N-1} \left|\cos\pi\xi 2^{1-2l}\cos\pi\xi 2^{-2l}\right|^{\beta(2N-1)} =$$

$$= (\alpha 2^{2\beta})^{L(2N-1)} \left|\frac{\sin\pi\xi}{2^{2L}\sin\pi\xi 2^{-2L}}\right|^{\beta(2N-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{L(2N-1)} |\sin\pi\xi 2^{-2L}|^{-\beta(2N-1)}. \tag{4.84}$$

Ясно, что $|\sin\pi\xi 2^{-2L}| \geqslant \sin(\pi/8)$ при ξ таких, что $|\xi| \in [2^{2L-3}, 2^{2L-1}]$, $L \in \mathbb{N}$. Поэтому, продолжая (4.84), имеем

$$\prod_{l=1}^{2L} |m_N^a(\xi 2^{-l})|^2 \leqslant \alpha^{L(2N-1)} (\sin(\pi/8))^{-\beta(2N-1)} = (\alpha^L (\sin(\pi/8))^{-\beta})^{2N-1}. \tag{4.85}$$

Из этой оценки следует, что существует $L_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\{|\xi|\geqslant 2^{L_0}\}} \xi^2 \, |\widehat{\Phi}^{a,N}(\xi)|^2 \, d\xi = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\{|\xi|\geqslant 2^{L_0}\}} |\widehat{\Phi}^{a,N}(\xi)|^2 \, d\xi = 0. \tag{4.86}$$

Используя теперь (4.86), лемму 4.3.14 и теорему Лебега, получаем (4.82). $\Diamond$

Для доказательства (4.77) воспользуемся леммой, доказательство которой аналогично доказательству леммы 1.5.9.

Лемма 4.3.17. *Пусть*

$$\widehat{\Phi}(\xi) := \prod_{l=1}^{\infty} f(\cos(\pi\xi 2^{1-l})),$$

где $f(t)$ — некоторая неотрицательная дифференцируемая функция, причем бесконечное произведение допускает почленное дифференцирование. Предположим также, что

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\xi + m) = 1. \tag{4.87}$$

Тогда

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |t\Phi(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{4\pi^2}{\sqrt{2}-1}\|\sin(2\pi\xi)f'(\cos\pi\xi)\|_{L_2([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])}. \qquad (4.88)$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что

$$\int_{\mathbb{R}} |t\Phi(t)|^2\,dt = 4\pi^2\int_{\mathbb{R}} |\big(\widehat{\Phi}\big)'(\xi)|^2\,d\xi =$$

$$= 4\pi^2\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\pi 2^{1-m}|\sin(\pi\xi 2^{1-m})f'(\cos(\pi\xi 2^{1-m}))|\,\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{l\in\mathbb{N}:\,l\neq m}|f(\cos(\pi\xi 2^{1-l}))|\right)^2 d\xi.$$

Из (4.87) следует (см. доказательство (1.27)), что $f(t)+f(-t)=1$ при $t\in[-1,1]$ и в силу неотрицательности $f:\ \ 0\leqslant f(t)\leqslant 1$. Поэтому, используя неравенство треугольника в $L_2(\mathbb{R})$, имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |t\Phi(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi^2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} 2^{2-2m}|\sin(\pi\xi 2^{1-m})f'(\cos(\pi\xi 2^{1-m}))|^2\,\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{l\in\mathbb{N}:l\neq m}|f(\cos(\xi 2^{-l}))|^2\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi^2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} 2^{2-2m}|\sin(\pi\xi 2^{1-m})f'(\cos(\pi\xi 2^{1-m}))|^2\,\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{l=m+1}^{\infty}|f(\pi\xi 2^{1-l})|^2\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant \pi^2\,\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} 2^{2-m}|\sin(\pi\xi 2^{1-m})f'(\cos(\pi\xi 2^{1-m}))\widehat{\Phi}(\xi 2^{-m})|^2\,d(\xi 2^{-m})\right)^{1/2} =$$

$$= 2\pi^2\sum_{m=1}^{\infty}2^{1-m/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\sin(2\pi\xi)f'(\cos 2\pi\xi)\widehat{\Phi}(\xi)\right|^2\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\pi^2}{\sqrt{2}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sin(2\pi\xi)f'(\cos 2\pi\xi)\widehat{\Phi}(\xi)\right|^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Используя периодичность первого сомножителя в последнем интеграле и тождество (4.87), получаем (4.88). $\Diamond$

Лемма 4.3.18. *Для любого $\xi\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$|(B_N^a)'(\cos 2\pi\xi)\sin(2\pi\xi)|\leqslant 2\sqrt{2}\,C. \tag{4.89}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой для производной полиномов Бернштейна

$$(B_N^a(t))' = \sum_{l=0}^{N-1}\frac{N}{2}\partial(f_a(t_{Nl}))b_l^{N-1}(t), \tag{4.90}$$

где $\partial(f_a(t_{Nl})) := f_a(t_{N,l+1}) - f_a(t_{Nl})$. Из свойств функции f_a (см. с. 205) имеем

$$(B_N^a(t))' = \sum_{l=l_N(a)-1}^{N-l_N(a)}\frac{N}{2}\partial(f_a(t_{Nl}))b_l^{N-1}(t), \tag{4.91}$$

где $l_N(a) := \left[\dfrac{N(1-a)}{2}\right]+1$. Здесь $[t]$ — целая часть числа t. В силу (4.75)

$$\partial(f_a(t_{Nl}))\leqslant\frac{2}{N}\,(f_a)'(t_{N,l+1})\quad\text{при}\quad l<\frac{N}{2}; \tag{4.92}$$

$$\partial(f_a(t_{Nl}))\leqslant\frac{2}{N}\,(f_a)'(t_{N,l})\quad\text{при}\quad l\geqslant\frac{N}{2}. \tag{4.93}$$

Простые вычисления показывают, что

$$b_l^{N-1}(\cos 2\pi\xi)\sin^2(2\pi\xi)\leqslant 4b_{l+1}^N(\cos 2\pi\xi),$$

$$b_l^{N-1}(\cos 2\pi\xi)\sin^2(2\pi\xi)\leqslant 4b_l^N(\cos 2\pi\xi).$$

Поэтому из неравенств (4.92–4.92), условия (4.75) и неравенства Коши следует, что

$$((B_N^a)'(\cos 2\pi\xi))^2\sin^2 2\pi\xi\leqslant$$

$$\leqslant C^2\Bigg(\sum_{l=l_N(a)-1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1}\sqrt{f_a(t_{N,l+1})}\,b_l^{N-1}(\cos 2\pi\xi)+$$

$$+\sum_{l=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N-l_N(a)}\sqrt{f_a(t_{N,l})}\,b_l^{N-1}(\cos 2\pi\xi)\Bigg)^2\sin^2 2\pi\xi\leqslant$$

$$\leqslant C^2\Bigg(\sum_{l=l_N(a)-1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} f_a(t_{N,l+1})b_l^{N-1}(\cos 2\pi\xi) +$$

$$+\sum_{l=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N-l_N(a)} f_a(t_{N,l})b_l^{N-1}(\cos 2\pi\xi)\Bigg)\sin^2 2\pi\xi \sum_{l=l_N(a)-1}^{N-l_N(a)} b_l^{N-1}(\cos 2\pi\xi) \leqslant$$

$$\leqslant 4C^2\Bigg(\sum_{l=l_N(a)-1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} f_a(t_{N,l+1})b_{l+1}^{N}(\cos 2\pi\xi) +$$

$$+\sum_{l=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N-l_N(a)} f_a(t_{N,l})b_l^{N}(\cos 2\pi\xi)\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant 8C^2\sum_{l=l_N(a)-1}^{N-l_N(a)} f_a(t_{N,l})b_l^{N}(\cos 2\pi\xi) = 8C^2B_N^a(\cos 2\pi\xi). \quad (4.94)$$

Так как $0 \leqslant B_N^a(\cos 2\pi\xi) \leqslant 1$, то из (4.94) следует (4.89). ◊

Лемма 4.3.19. *При условиях теоремы* 4.3.4 *имеем*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |t\Phi^{a,N}(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{8\pi^2\sqrt{2}\,C}{\sqrt{2}-1}. \quad (4.95)$$

Доказательство. Неравенство (4.95) следует из (4.88) и (4.89). ◊

Простейший пример модифицированных всплесков получается при использовании в качестве функции f_a кусочно линейной непрерывной функции:

$$f(t) := \begin{cases} 0, & t\in\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right];\\ t+\dfrac{1}{2}, & t\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right];\\ 1, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Пусть $tfu(m) := \Delta_{ti,m}\Delta_{fr,m}$ — константа неопределенности для маски m. Обозначим через s_L, $L\in\mathbb{N}$, маски простейшей модификации с минимальной константой неопределенности (по техническим причинам степень этой маски удобно брать равной $4L-1$), $d_K^{\min}$ — маски Добеши с минимальной константой неопределенности (его степень равна $2K-1$). Минимизация здесь производится по всевозможным маскам, имеющим один и тот же модуль (см. замечание 4.1.5). В следующей таблице сравниваются константы неопределенности этих масок при одинаковых степенях.

L	$tfu(s_L)$	K	$tfu(d_K^{\min})$
1	0,592	2	0,592
2	0,657	4	0,635
3	0,620	6	0,694
4	0,659	8	0,748
5	0,643	10	0,765
6	0,640	12	0,800
7	0,661	14	0,830
8	0,671	16	0,853
9	0,671	18	0,873
10	0,679	20	0,895
11	0,680	22	0,915

4.4. Асимптотика нулей полиномов Бернштейна

В параграфе 4.3.2 построены модифицированные всплески Добеши и доказано, что они сохраняют локализацию с возрастанием гладкости. Для изучения этих всплесков и определения коэффициентов масштабирующего уравнения нужно найти комплексные нули специальных многочленов (см. замечание 4.1.5).

Данный параграф посвящен исследованию асимптотики нулей следующих многочленов Бернштейна:

$$B_L(x) = \sum_{l=0}^{L-1} \binom{4L}{l} x^l (1-x)^{4L-l} + \\ + \sum_{l=L}^{3L-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{l}{2L}\right) \binom{4L}{l} x^l (1-x)^{4L-l}, \quad L \in \mathbb{N}, \qquad (4.96)$$

аппроксимирующих на отрезке $[0,1]$ кусочно-линейную функцию

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ \frac{3}{2} - 2x, & x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]; \\ 0, & x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

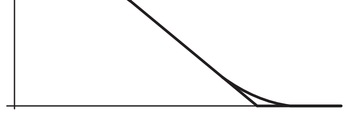


Рис. 4.3

На рис. 4.3 показаны функция f и полином Бернштейна B_7.

Отрезок $[-1,1]$, соответствующий определению масок, заменен здесь на $[0,1]$ для упрощения обозначений.

Используя методы параграфа 4.3.2 можно доказать, что модифицированные всплески Добеши, построенные по функции f вместо f_a, сохраняют локализацию с ростом гладкости. Рисунок 4.4 показывает

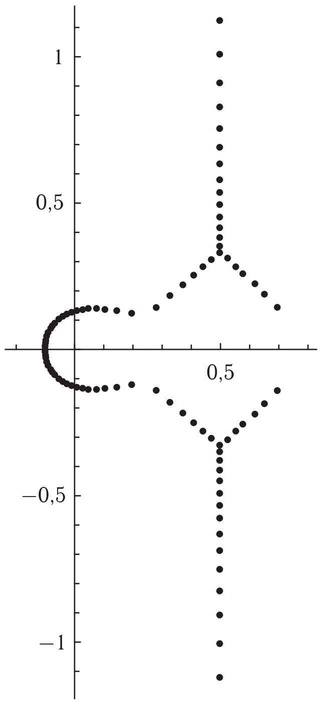


Рис. 4.4

корни B_{37}. Цель параграфа 4.4 — найти кривую, на которой расположены корни и исследовать поведение корней при $L \to \infty$. Оказывается, что предельная кривая состоит из частей двух лемнискат.

Первая лемниската определяется уравнением

$$\mathcal{L}_1 := \left\{ x\colon \left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} = 1 \right\}$$

(рис. 4.5), вторая —

$$\mathcal{L}_2 := \left\{ x\colon \left| \frac{x}{3/4} \right|^{3/4} \left| \frac{1-x}{1/4} \right|^{1/4} = 1 \right\}$$

(рис. 4.6).

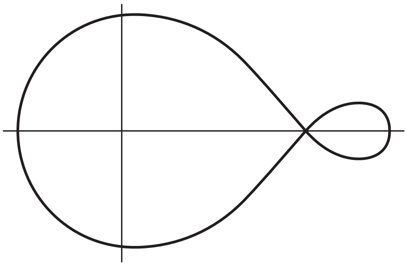


Рис. 4.5. Лемниската $\mathcal{L}_1$

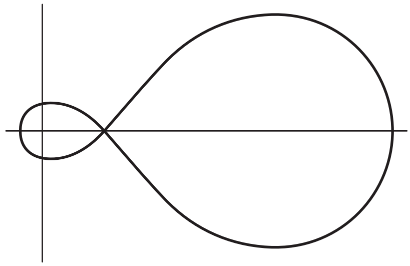


Рис. 4.6. Лемниската $\mathcal{L}_2$

Рисунок 4.7 показывает нули B_{37} вместе с $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Маленькая окружность на рис. 4.7 имеет центр в $\frac{36}{35}$ и радиус $\frac{6}{35}$. Доказано, что многочлены B_L не имеют корней, неравных 1, внутри этого кру-

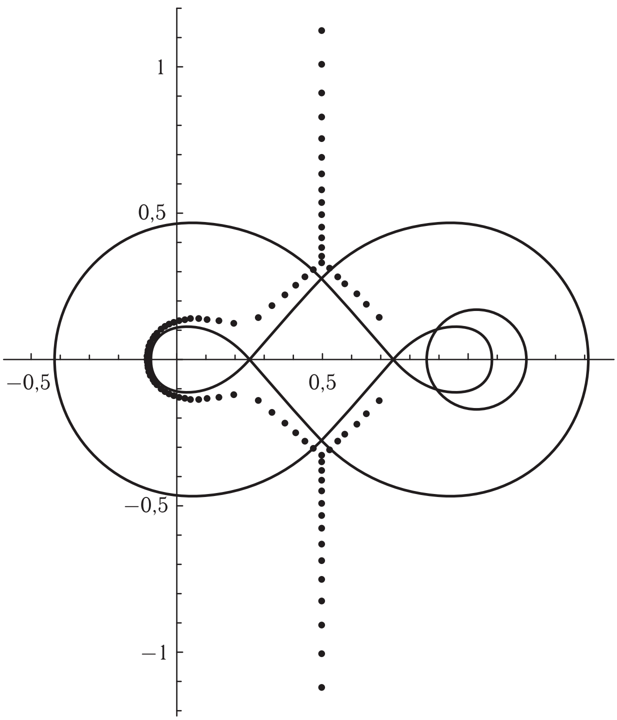


Рис. 4.7

га. В параграфе 4.4 доказываются точные результаты относительно корней B_L, содержащихся в левой петле лемнискаты $\mathcal{L}_2$ и имеющих вещественную часть меньше, чем $1/4$. Подобные результаты получены относительно других областей внутри петель лемнискат $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Численные эксперименты показывают, что вертикальная прямая линия $\operatorname{Re} x = 1/2$ является предельной кривой для нулей B_L, расположенных вне лемнискат.

Теорема 4.4.1. *Все нули многочленов B_L, $L \in \mathbb{N}$, неравные* 1, *лежат вне окружности* $\left|x - \dfrac{36}{35}\right| = \dfrac{6}{35}$.

Доказательство. Ясно, что для $x \neq 1$

$$B_L(x) = (1-x)^{4L}\left[\sum_{l=0}^{L-1}\binom{4L}{l}\left(\frac{x}{1-x}\right)^l + \sum_{l=L}^{3L-1}\left(\frac{3}{2}-\frac{l}{2L}\right)\binom{4L}{l}\left(\frac{x}{1-x}\right)^l\right].$$

Обозначим $z := \dfrac{x}{1-x}$ и применим теорему A.12.1 к полиному

$$\sum_{l=0}^{L-1}\binom{4L}{l}z^l + \sum_{l=L}^{3L-1}\left(\frac{3}{2}-\frac{l}{2L}\right)\binom{4L}{l}z^l.$$

На основании этой теоремы нули полинома находятся в кольце:

$$\min\left\{\min_{0\leqslant l\leqslant L-1}\frac{\binom{4L}{l}}{\binom{4L}{l+1}}, \min_{L\leqslant l\leqslant 3L-2}\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{l}{2L}\right)\binom{4L}{l}}{\left(\frac{3}{2}-\frac{l}{2L}\right)\binom{4L}{l+1}}\right\} \leqslant |z| \leqslant$$
$$\leqslant \max\left\{\max_{0\leqslant l\leqslant L-1}\frac{\binom{4L}{l}}{\binom{4L}{l+1}}, \max_{L\leqslant l\leqslant 3L-2}\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{l}{2L}\right)\binom{4L}{l}}{\left(\frac{3}{2}-\frac{l}{2L}\right)\binom{4L}{l+1}}\right\}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\frac{1}{4L} \leqslant |z| \leqslant 6 - \frac{14}{L+2} < 6.$$

В терминах переменной x имеем

$$\left\{x\colon\quad \left|\frac{x}{1-x}\right| < 6\right\} = \left\{x\colon\quad \left|x - \frac{36}{35}\right| > \frac{6}{35}\right\}. \qquad \lozenge$$

Пусть α_1 и β_1 — области внутри левой и правой петли лемнискаты $\mathcal{L}_1$; α_2 и β_2 — тоже самое для $\mathcal{L}_2$:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &:= \left\{x : \left|\frac{x}{1/4}\right|^{1/4}\left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3/4} < 1;\quad \operatorname{Re} x < 1/4\right\};\\ \beta_1 &:= \left\{x : \left|\frac{x}{1/4}\right|^{1/4}\left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3/4} < 1;\quad \operatorname{Re} x > 1/4\right\},\end{aligned} \tag{4.97}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &:= \left\{x : \left|\frac{x}{3/4}\right|^{3/4}\left|\frac{1-x}{1/4}\right|^{1/4} < 1;\quad \operatorname{Re} x < 3/4\right\};\\ \beta_2 &:= \left\{x : \left|\frac{x}{3/4}\right|^{3/4}\left|\frac{1-x}{1/4}\right|^{1/4} < 1;\quad \operatorname{Re} x > 3/4\right\}.\end{aligned} \tag{4.98}$$

Теорема 4.4.2. *Нули многочленов $B_L(x)$, $L \in \mathbb{N}$, находящиеся в множестве $\{x\colon\ |x| \leqslant 1/4\}$, удовлетворяют неравенству*

$$\left|\frac{x}{1/4}\right|^{1/4} \left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3/4} > a(L), \tag{4.99}$$

где

$$a(L) = \left(\frac{1 - \left(\frac{5}{27}\right)^L \frac{9}{128L}}{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}} \Phi(L)} \right)^{3/(12L+4)},$$

$$\Phi(L) := \frac{\Gamma^*(4L)}{\Gamma^*(L)\Gamma^*(3L)}, \quad \Gamma^*(r) := \sqrt{\frac{r}{2\pi}}\, e^r r^{-r} \Gamma(r),$$

Γ — *гамма-функция.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} b_{N,l}(x) &:= \binom{N}{l} x^l (1-x)^{N-l}, \quad l = 0, 1, \ldots, N; \\ B_{L,1}(x) &:= \sum_{l=0}^{3L-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{l}{2L}\right) b_{4L,l}(x), \\ R_{L,1}(x) &:= \sum_{l=3L+1}^{4L} \left(\frac{l}{2L} - \frac{3}{2}\right) b_{4L,l}(x), \\ B_{L,2}(x) &:= \sum_{l=0}^{L-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L}\right) b_{4L,l}(x). \end{aligned} \tag{4.100}$$

Известно, что

$$\sum_{l=0}^{N} b_{N,l}(x) = 1; \quad \sum_{l=0}^{N} \frac{l}{N}\, b_{N,l}(x) = x.$$

Поэтому

$$B_L(x) = B_{L,1}(x) - B_{L,2}(x) = \frac{3}{2} - 2x + R_{L,1}(x) - B_{L,2}(x). \tag{4.101}$$

Применяя к $B_{L,2}$ формулы (4.113) и (4.116), получаем

$$B_{L,2}(x) = \frac{1}{2} - 2x + (6L) \binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1}(x)\; x^{L+1} (1-x)^{3L+1}, \tag{4.102}$$

где

$$I_{N,k}(x) := \int\limits_0^1 s(1-xs)^{-N} (1-s)^k\, ds.$$

Теперь (4.101) и (4.102) влекут

$$B_L(x) = 1 + R_{L,1}(x) - (6L)\binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1}(x)\, x^{L+1}(1-x)^{3L+1}. \tag{4.103}$$

Очевидно, что для $|x| \leqslant 1/4$ и $s \in [0,1]$

$$\left|(1-xs)^{-1}\right| \leqslant \left(1 - \frac{s}{4}\right)^{-1}. \tag{4.104}$$

Если $B_L(x) = 0$ и $|x| \leqslant 1/4$, то на основании (4.103) и (4.104)

$$\left|(1 + R_{L,1}(x))\, x^{-L-1}(1-x)^{-3L-1}\right| < (6L)\binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1}(1/4). \tag{4.105}$$

Из (4.102) следует, что

$$(6L)\binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1}(1/4) = B_{L,2}(1/4)(1/4)^{-L-1}(3/4)^{-3L-1}. \tag{4.106}$$

Теперь (4.105) и (4.106) влекут

$$\left|\frac{x}{1/4}\right|^{L+1} \left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3L+1} > \frac{|1 + R_{L,1}(x)|}{B_{L,2}(1/4)}.$$

Учитывая следствие 4.4.9 и (4.122), получаем

$$\left|\frac{x}{1/4}\right|^{L+1} \left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3L+1} > \frac{1 - \left(\frac{5}{27}\right)^{L} \frac{9}{128L}}{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}}\,\Phi(L)}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $\dfrac{3}{4(3L+1)}$, получаем (4.99). $\diamondsuit$

Пусть $\mathcal{L}_{11}$ обозначает лемнискату

$$\mathcal{L}_{11}(L) := \left\{x\colon \left|\frac{x}{1/4}\right|^{1/4} \left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3/4} = a(L)\right\}.$$

На рис. 4.8 изображены корни многочлена B_{20} и лемниската $\mathcal{L}_{11}(20)$.

Зафиксируем теперь произвольное $\delta > 0$ и рассмотрим область

$$\alpha_{2,1} := \alpha_2 \bigcap \left\{|x - \frac{1}{4}\,| > \delta\right\} \bigcap \left\{\operatorname{Re} x < \frac{1}{4}\right\}.$$

В силу следствия 4.4.15

$$I_{4L+1,L-1}(x) = \frac{1}{L^2(1-4x)^2} + O(L^{-3}). \tag{4.107}$$

Если $B_L(x) = 0$, то в силу (4.103)

$$x^{-L-1}(1-x)^{-3L-1} = \frac{(6L)\binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1}(x)}{1 + R_{L,1}(x)}. \tag{4.108}$$

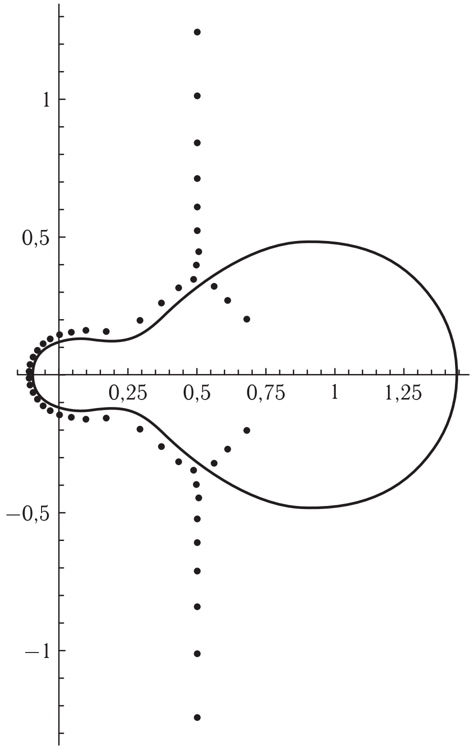


Рис. 4.8

По формуле Стирлинга,

$$\binom{4L-1}{L-1} \sim \frac{4^{4L}}{2\sqrt{6\pi L}\;3^{3L}}.$$

Поэтому (4.108), (4.107) и следствие 4.4.9 влекут

$$x^{-L-1}(1-x)^{-3L-1} = \frac{4^{4L}}{\sqrt{6\pi L}\;L\,3^{3L-1}} \cdot \frac{1}{(1-4x)^2} \cdot \left(1 + O\left(L^{-1}\right)\right).$$

Возводя обе части этого неравенства в степень $\left(-\dfrac{1}{4L+4}\right)$, получаем

$$\left|\frac{x}{1/4}\right|^{1/4}\left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3/4} = \\ = \left(\frac{2^{17}\pi L^3}{3^7}\right)^{\frac{1}{8(L+1)}} \cdot \left(|1-x|\cdot|1-4x|\right)^{\frac{1}{2(L+1)}} \cdot \left(1 + O\left(L^{-2}\right)\right). \quad (4.109)$$

Теорема 4.4.3. *Пусть $\delta > 0$, $L \in \mathbb{N}$. Тогда расстояние от любого нуля полинома $B_L(x)$, содержащегося в $\alpha_{2,1}$, до кривой*

$$\mathcal{L}_{1,L} := \left\{ x: \ \left|\frac{x}{1/4}\right|^{1/4} \left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3/4} = \right.$$

$$\left. = \left(\frac{2^{17}\pi L^3}{3^7}\right)^{\frac{1}{8(L+1)}} \left(|1-x| \cdot |1-4x|\right)^{\frac{1}{2(L+1)}} \right\} \quad (4.110)$$

не превосходит $c(\delta)L^{-2}$.

Рис. 4.9 показывает корни многочлена B_{20} и кривую $\mathcal{L}_{1,L}$ внутри области $\alpha_{2,1}$.

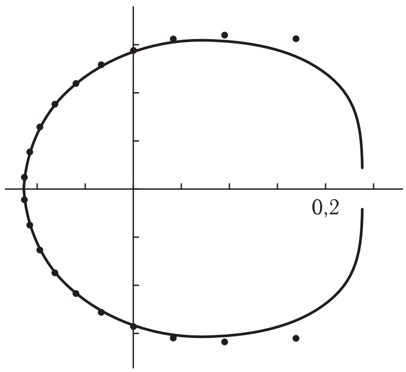


Рис. 4.9

Доказательство. Пусть X — корень B_L, расположенный в $\alpha_{2,1}$, а x — точка на $\mathcal{L}_{1,L}$, ближайшая к X, $\varepsilon := x - X$. Так как $|1+\varepsilon|^a = 1 + O(a|\varepsilon|)$ для любого $a \in (0,1)$, то

$$|1-X|^{\frac{2}{(L+1)}} = |1-x|^{\frac{2}{(L+1)}} \cdot \left|1 + \frac{\varepsilon}{1-x}\right|^{\frac{2}{(L+1)}} = |1-x|^{\frac{2}{(L+1)}} \left(1 + O\left(\frac{|\varepsilon|}{L}\right)\right);$$

$$|1-4X|^{\frac{2}{(L+1)}} = |1-4x|^{\frac{2}{(L+1)}} \left(1 + O\left(\frac{|\varepsilon|}{L}\right)\right);$$

$$\left|X(1-X)^3\right| = \left|x(1-x)^3\right| \cdot \left|1 + \frac{2+x}{x(1-x)}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right|.$$

Пусть $E := \dfrac{2+x}{x(1-x)}$. Так как $x \in \mathcal{L}_{1,L}$, то

$$\frac{\left|\frac{X}{1/4}\right| \cdot \left|\frac{1-X}{3/4}\right|^3}{\left(\frac{2^{17}\pi L^3}{3^7}\right)^{\frac{1}{2(L+1)}} \left(|1-X| \cdot |1-4X|\right)^{\frac{1}{(L+1)}}} = \frac{\left|1 + E\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right|}{1 + O\left(\frac{|\varepsilon|}{L}\right)} =$$

$$= |1 + E\varepsilon + O(|\varepsilon|)| = 1 + O\left(L^{-2}\right).$$

Последнее равенство следует из (4.109) и влечет, что $\varepsilon = O(L^{-2})$. $\Diamond$

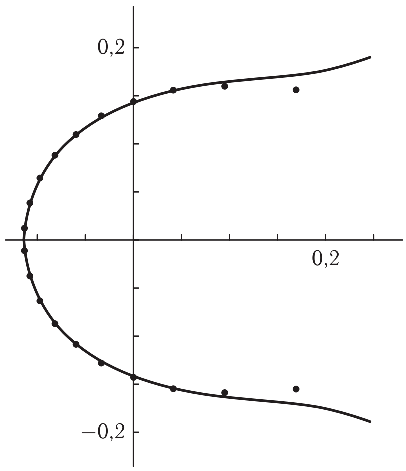


Рис. 4.10

С л е д с т в и е 4.4.4. *Пусть* $\delta > 0$. *Нули* $B_L(x)$, $L \in \mathbb{N}$, *содержащиеся в* $\alpha_{2,1}$, *находятся на расстоянии не больше, чем* $c'(\delta)L^{-1}$ *от кривой* $\mathcal{L}'_{1,L}$:

$$\left|\frac{x}{1/4}\right|^{1/4}\left|\frac{1-x}{3/4}\right|^{3/4} = 1 + \frac{\log\left(\frac{2^{17}\pi L^3}{3^7}\right)}{(8L+1)}.$$

Рис. 4.10 показывает нули B_{20} и $\mathcal{L}'_{1,20}$ в $\alpha_{2,1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из того, что $t = 1 + \log t + O\left((t-1)^{-2}\right)$. $\Diamond$

Докажем представления некоторых специальных многочленов Бернштейна в виде полиномов Тейлора, которые были использованы выше.

Пусть $T_{g,k}(x)$ — полином Тейлора для функции g в точке 0 порядка k:

$$T_{g,k}(x) := \sum_{l=0}^{k} \frac{g^{(l)}(0)}{l!}\, x^l.$$

Пусть

$$A_{N,k}(x) := \sum_{l=0}^{k} b_{N,l}(x).$$

Теорема 4.4.5. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$*

$$A_{N,k}(x) = (1-x)^{N-k} T_{h_{N-k},k}(x) = (1-x)^{N-k} \sum_{l=0}^{k} \binom{N-k-1+l}{l} t^k, \tag{4.111}$$

где

$$h_l(x) := (1-x)^{-l}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$h_l^{(m)}(0) = l \cdot (l+1) \ldots (l+m-1), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.112}$$

где для $m = 0$ выражение справа полагаем равным 1 по определению. Таким образом,

$$T_{h_{N-k},k}(x) = \sum_{l=0}^{k} \binom{N-k-1+l}{l} x^l.$$

Формула (4.111) доказывается по индукции. Для $k = 0$ она очевидна. Предположим, что формула (4.111) верна для k. Для $k+1$ имеем

$$A_{N,k+1}(x) = A_{N,k}(x) + \binom{N}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{N-k-1} =$$

$$= (1-x)^{N-k} T_{h_{N-k},k}(x) + \binom{N}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{N-k-1} =$$

$$= (1-x)^{N-k-1} \left(T_{h_{N-k},k}(x) - x T_{h_{N-k},k}(x) + \binom{N}{k+1} x^{k+1} \right).$$

Принимая во внимание (4.112), получаем (4.111) для $k+1$. $\Diamond$

Следствие 4.4.6. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$*

$$A_{N,k}(x) = 1 - (N-k) \binom{N}{k} \int_0^1 (1-xs)^{-N-1} (1-s)^k ds \; x^{k+1} (1-x)^{N-k}. \tag{4.113}$$

Доказательство. Интегральная формула Тейлора для остаточного члена дает

$$T_{h_{N-k},k}(x) = (1-x)^{k-N} - \frac{(N-k) \ldots N}{k!} \int_0^x (1-s)^{-N-1} (x-s)^k ds. \tag{4.114}$$

Замена переменных $s = xs$ приводит к (4.113). $\Diamond$

Обозначим через

$$C_{N,k}(x) := \sum_{l=1}^{k} \frac{l}{N} \, b_{N,l}(x).$$

Следствие 4.4.7. *Для любого* $N \in \mathbb{N}$ *и* $k \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$

$$C_{N,k}(x) = x(1-x)^{N-k} T_{h_{N-k},k-1}(x) = \tag{4.115}$$

$$= x - (N-k)\binom{N-1}{k-1}\int\limits_0^1 (1-xs)^{-N}(1-s)^{k-1}ds\; x^{k+1}(1-x)^{N-k}. \tag{4.116}$$

Доказательство. Так как $\dfrac{l}{N}\dbinom{N}{l} = \dbinom{N-1}{l-1}$, то, используя (4.111), получаем (4.115)

$$C_{N,k}(x) = x\sum_{l=1}^{k}\binom{N-1}{l-1}x^{l-1}(1-x)^{(N-1)-(l-1)} =$$

$$= xA_{N-1,k-1}(x) = x(1-x)^{N-k}T_{h_{N-k},k-1}(x).$$

Так же как при доказательстве (4.114), получаем

$$T_{h_{N-k},k-1}(x) =$$

$$= (1-x)^{k-N} - \frac{(N-k)\ldots(N-1)}{(k-1)!}\int\limits_0^x (1-s)^{-N}(x-s)^{k-1}\,ds =$$

$$= (1-x)^{k-N} - (N-k)\binom{N-1}{k-1}\int\limits_0^1 (1-xs)^{-N}(1-s)^{k-1}\,ds\; x^k,$$

откуда следует (4.116). $\Diamond$

Докажем теперь некоторые вспомогательные оценки.

Лемма 4.4.8. *Для* $x \in \alpha_2$

$$|R_{L,1}(x)| \leqslant \frac{q(x)^{4L}\tau(x)}{2L(1-\tau(x))^2}, \tag{4.117}$$

где α_2, $R_{L,1}$ *определены в* (4.98), (4.100),

$$q(x) := \left|\frac{x}{3/4}\right|^{3/4}\left|\frac{1-x}{1/4}\right|^{1/4}, \quad \tau(x) := \frac{|x|}{3|1-x|}.$$

Доказательство. Если $x \in \alpha_2$, то

$$q(x) = \left|\frac{x}{3/4}\right|^{3/4}\left|\frac{1-x}{1/4}\right|^{1/4} = \frac{|1-x|}{1/4}\left(\frac{|x|}{3|1-x|}\right)^{3/4} < 1,$$

откуда

$$\tau(x) = \frac{|x|}{3|1-x|} = \left(q(x)\frac{1/4}{|1-x|}\right)^{4/3} < 1,$$

так как $|1-x| > 1/4$ для $x \in \alpha_2$.

Так как $\binom{N}{l} \leqslant \lambda^{-l}(1-\lambda)^{l-N}$ для любого $\lambda \in (0,1)$, то для $x \in \alpha_2$ и $l > 3L$ имеем

$$\left|\binom{4L}{l} x^l (1-x)^{4L-l}\right| \leqslant \left|\frac{x}{3/4}\right|^l \left|\frac{1-x}{1/4}\right|^{4L-l} =$$

$$= \left(\frac{|1-x|}{1/4}\right)^{4L} \left(\frac{|x|}{3|1-x|}\right)^{3L} \left(\frac{|x|}{3|1-x|}\right)^{l-3L} = q(x)^{4L}\tau(x)^{l-3L}. \quad (4.118)$$

Поэтому

$$R_{L,1}(x) := \sum_{l=3L+1}^{4L} \left(\frac{l}{2L} - \frac{3}{2}\right) b_{4L,l}(x) \leqslant$$

$$\leqslant q(x)^{4L} \sum_{l=3L+1}^{4L} \left(\frac{l}{2L} - \frac{3}{2}\right) \tau(x)^{l-3L} = \frac{q(x)^{4L}}{2L} \sum_{l=1}^{L} l\tau(x)^l =$$

$$= \frac{q(x)^{4L}\tau(x)\left(1-(L+1)\tau(x)^L + L\tau(x)^{L+1}\right)}{2L(1-\tau(x))^2} < \frac{q(x)^{4L}\tau(x)}{2L(1-\tau(x))^2}. \quad \Diamond$$

Следствие 4.4.9. *Для* $|x| \leqslant 1/4$

$$|R_{L,1}(x)| < \frac{9}{128L} \cdot \left(\frac{5}{27}\right)^L.$$

Доказательство. Если $|x| \leqslant 1/4$, то $3/4 \leqslant |1-x| \leqslant 5/4$. Поэтому

$$q(x) = \left|\frac{x}{3/4}\right|^{3/4} \left|\frac{1-x}{1/4}\right|^{1/4} \leqslant \frac{1}{3^{3/4}}\, 5^{1/4} = \left(\frac{5}{27}\right)^{1/4},$$

$$\tau(x) = \frac{|x|}{3|1-x|} \leqslant \frac{1/4}{9/4} = \frac{1}{9}. \quad \Diamond$$

Следующие ниже оценки $B_L(1/4)$, $L \in \mathbb{N}$, основаны на представлении некоторых многочленов Бернштейна при помощи неполной бета-функции:

$$\mathrm{Inc}_{a,b}(x) := \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x s^{a-1}(1-s)^{b-1}\, ds.$$

Теорема 4.4.10. *Для любого* $N \in \mathbb{N}$ *и* $k \in \{0,1,2,\ldots,N\}$

$$A_{N,k}(x) = 1 - \mathrm{Inc}_{k+1,N-k}(x). \quad (4.119)$$

Доказательство. Известно, что

$$(b_{N,k}(x))' = N(b_{N-1,k-1}(x) - b_{N-1,k}(x)),$$

где $b_{N,l}(x)$ полагается равным тождественному нулю при $l < 0$ или $l > N$. Поэтому
$$(A_{N,k}(x))' = -Nb_{N-1,k}(x).$$
Так как $A_{N,k}(0) = 1$, то
$$A_{N,k}(x) = 1 - N\int\limits_0^x b_{N-1,k}(s)\,ds,$$
откуда следует (4.119). $\Diamond$

Следствие 4.4.11. *В условиях теремы* 4.4.10 *имеем*
$$B_{L,2}(x) = \frac{1}{2} - 2x + 2x\,\mathrm{Inc}_{L,3L}(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Inc}_{L+1,3L}(x). \tag{4.120}$$

Доказательство. Легко видеть, что
$$B_{L,2}(x) = \frac{1}{2}\,A_{4L,L}(x) - 2C_{4L,L}(x) = \frac{1}{2}\,A_{4L,L}(x) - 2xA_{4L-1,L-1}(x),$$
откуда при помощи (4.119) получаем (4.120). $\Diamond$

Следствие 4.4.12. *В условиях теремы* 4.4.10 *имеем*
$$B_{L,1}(x) = \frac{3}{2} - 2x + 2x\,\mathrm{Inc}_{3L,L}(x) - \frac{3}{2}\,\mathrm{Inc}_{3L+1,L}(x). \tag{4.121}$$

Доказательство. Ясно, что
$$B_{L,1}(x) = \frac{3}{2}\,A_{4L,3L-1}(x) - 2C_{4L,3L-1}(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\,A_{4L,3L}(x) - 2xA_{4L-1,3L-1}(x).$$
Теперь из (4.119) следует (4.120). $\Diamond$

Лемма 4.4.13. *Для любого* $L \geqslant 1$ *имеем*
$$B_{L,2}(1/4) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}}\Phi(L) < \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}}, \tag{4.122}$$
где
$$\Phi(L) := \frac{\Gamma^*(4L)}{\Gamma^*(L)\Gamma^*(3L)}, \qquad \Gamma^*(r) := \sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,e^r r^{-r}\Gamma(r).$$

Доказательство. На основании (4.120),
$$\begin{aligned} B_{L,2}(1/4) &= \frac{1}{2}\,(\mathrm{Inc}_{L,3L}(1/4) - \mathrm{Inc}_{L+1,3L}(1/4)) = \\ &= \frac{(4L-1)!}{(2L-1)!(3L-1)!}\int\limits_0^{1/4}(1-4s)s^{L-1}(1-s)^{3L-1}\,ds. \end{aligned} \tag{4.123}$$

Сделаем замену переменных:

$$-\frac{\zeta^2}{2} = \ln\left[\left(\frac{s}{1/4}\right)^{1/4}\left(\frac{1-s}{3/4}\right)^{3/4}\right],$$

где знак ζ отрицательный. Тогда

$$B_{L,2}(1/4) = \sqrt{\frac{3L}{2\pi}}\,\Phi(L)\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-2L\zeta^2\right)\zeta\,d\zeta = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}}\,\Phi(L).$$

Известно, что $\Gamma^*(r) \searrow 1$ при $r \to \infty$, и $\Phi(L) \nearrow 1$ при $L \to \infty$. $\Diamond$

Лемма 4.4.14. *Пусть* $k,\ N \in \mathbb{N}$; $\delta > 0$; $k < N-2$; $\operatorname{Re} x < \dfrac{k+1}{N-1}$, $\left|x - \dfrac{k+1}{N-1}\right| > \delta$. *Тогда*

$$\mathrm{In}_{N,k}(x) := \int\limits_0^1 (1-xs)^{-N}(1-s)^k ds = \frac{1}{k+1-(N-1)x} + O(k^{-3}). \tag{4.124}$$

Доказательство. Пусть $a := \dfrac{N-1}{k+1}$. В интеграле $\mathrm{In}_{N,k}$ сделаем замену переменных:

$$w := w(s) := \frac{1-s}{(1-xs)^a}.$$

Тогда

$$\frac{dw}{ds} = \frac{(a-(a-1)s)x-1}{(1-xs)^{a+1}}$$

и

$$\mathrm{In}_{N,k}(x) = \int\limits_0^1 \frac{w^k}{1-(a-(a-1)s)x}\,dw.$$

Докажем, что $|w(s)| < 1$ для достаточно малых $s \in [0,1]$. Пусть $x := \rho e^{i\varphi}$. Тогда

$$|w(s)| = \frac{1-s}{\left(1-2\rho s\cos\varphi + \rho^2 s^2\right)^{a/2}}.$$

Поэтому неравенство $|w(s)| < 1$ эквивалентно

$$\frac{\left(1-2\rho s\cos\varphi+\rho^2 s^2\right)^{a/2} - 1}{s} = \frac{f(s)-f(0)}{s} > -1,$$

где

$$f(s) := \left(1-2\rho s\cos\varphi+\rho^2 s^2\right)^{a/2}.$$

Последнее неравенство выполнено для достаточно малых $s \in [0,1]$, так как $f'(0) = -a\rho\cos\varphi > -1$.

Пусть константа $\varepsilon \in (0,1)$ выбрана так, что

$$\varepsilon < \frac{\delta^2}{(k+1)^2(a-1)|x|}$$

и $|\tau| < 1$, где $\tau := w(\varepsilon)$. Тогда

$$\mathrm{In}_{N,k}(x) = \int\limits_0^\tau \frac{w^k}{1-(a-(a-1)s)x}\,dw + \int\limits_\tau^1 \frac{w^k}{1-(a-(a-1)s)x}\,dw.$$

Обозначим

$$I_1 := \int\limits_0^\tau \frac{w^k}{1-(a-(a-1)s)x}\,dw;$$

$$I_2 := \int\limits_\tau^1 \frac{w^k}{1-(a-(a-1)s)x}\,dw.$$

Так как $s \in [0,1]$, то $(a-(a-1)s) \in [1,a]$. Ясно, что отрезок $[x, ax]$ не пересекает круг $\{z\colon\ |1-z| \leqslant \delta\}$, поэтому $|1-(a-(a-1)s)x| > \delta$ для любого $s \in [0,1]$ и

$$|I_1| < \frac{|\tau|^{k+1}}{(k+1)\delta}.$$

Для I_2 имеем

$$I_2 = \frac{1}{1-ax}\int\limits_\tau^1 w^k\,dw - \int\limits_\tau^1 \frac{w^k(a-1)xs}{(1-ax)(1-(a-(a-1)s)x)}\,dw =$$

$$= \frac{1-\tau^{k+1}}{(1-ax)(k+1)} + \int\limits_\tau^1 \frac{w^k(a-1)xs}{(1-ax)(1-(a-(a-1)s)x)}\,dw.$$

Окончательно получаем

$$\left|\mathrm{In}_{N,k}(x) - \frac{1}{(1-ax)(k+1)}\right| < \frac{2|\tau|^{k+1}}{\delta(k+1)} + \frac{(a-1)|x|\varepsilon}{(k+1)\delta^2} <$$

$$< \frac{2|\tau|^{k+1}}{\delta(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^3}. \quad \Diamond$$

Следствие 4.4.15.

$$I_{N,k}(x) = \mathrm{In}_{N,k}(x) - \mathrm{In}_{N,k+1}(x) =$$

$$= \frac{1}{(k+1-(N-1)x)(k+2-(N-1)x)} + O(k^{-3}) =$$

$$= \frac{1}{(k+1)^2\left(1-\frac{N-1}{k+1}x\right)^2} + O(k^{-3}).$$

Глава 5

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВСПЛЕСКОВ

5.1. Масштабирующие функции и фрактальные кривые

Один из главных методов изучения локальной и глобальной гладкости всплесков с компактным носителем состоит в том, что соответствующая масштабирующая функция представляется в виде фрактальной кривой для подходящей пары конечномерных аффинных операторов.

Пусть A_n — n-мерное аффинное пространство, $\widetilde{A}_n$ — соответствующее линейное пространство. Через $\mathcal{A}(A_n)$ обозначим алгебру аффинных операторов на пространстве A_n, через $\mathcal{L}(\widetilde{A}_n)$ — алгебру линейных операторов на $\widetilde{A}_n$. Для произвольного $B \in \mathcal{A}(A_n)$ будем обозначать через $\widetilde{B} \in L(\widetilde{A}_n)$ линейную часть (дифференциал) оператора B.

Непустой компакт $K \subset A_n$ называется *фракталом*, соответствующим данному семейству аффинных операторов $\{B_0, B_1\}$, если $B_0 K \cup \cup B_1 K = K$ (см. приложение A.17). Для простоты мы будем рассматривать лишь семейства из двух операторов, хотя вся теория без изменений переносится на случай произвольного конечного семейства. Согласно классической теореме Хатчинсона (теорема A.17.2 в приложении A.17), если оба оператора B_0, B_1 сжимающие (точнее, их линейные части $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ сжимающие в некоторой норме), тогда существует единственный фрактал.

Наличие нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$, в которой оба оператора сжимающие, теоретически может быть проверено в терминах совместного спектрального радиуса операторов.

Определение 5.1.1. *Совместным спектральным радиусом* (далее ССР) данной пары линейных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ называется число

$$\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) = \lim_{r\to\infty} \max_{(d_1,\ldots,d_r)\in\{0,1\}^r} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_r}\|^{1/r},$$

нижним спектральным радиусом (НСР) называется число

$$\check{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) = \lim_{r\to\infty} \min_{(d_1,\ldots,d_r)\in\{0,1\}^r} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_r}\|^{1/r}.$$

(См. приложение A.6 за коррекностью этого определения, а так же за основными свойствами ССР и НСР). Через $\rho(\widetilde{B})$ — обозначим (обычный) спектральный радиус оператора B, т. е. максимальный модуль его собственных значений.

Лемма 5.1.2. *Для любых операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ и для любого их произведения $\Pi_k = \widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}$ имеем*

$$\check{\rho}(B_0, B_1) \leqslant \Big(\rho(\Pi_k)\Big)^{1/k} \leqslant \widehat{\rho}(B_0, B_1). \tag{5.1}$$

Доказательство см. в приложении A.6. В частности, при $k = 1$ получаем

$$\check{\rho} \leqslant \min\{\rho(\widetilde{B}_0),\, \rho(\widetilde{B}_1)\}, \quad \widehat{\rho} \geqslant \max\{\rho(\widetilde{B}_0),\, \rho(\widetilde{B}_1)\}.$$

Если оба оператора $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ являются преобразованиями подобия (пропорциональны ортогональным операторам), то оба неравенства обращаются в равенство. Если операторы коммутируют, или оба они самосопряженные, или оба задаются верхне(нижне)-треугольными матрицами, то выполняется только второе равенство:

$$\widehat{\rho} = \max\{\rho(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1)\}, \tag{5.2}$$

первое неравенство, вообще говоря, остается строгим. В общем же случае, вычисление или оценка совместного спектрального радиуса является чрезвычайно сложной задачей (см. параграф 7.3).

В дальнейшем будем считать, что набор операторов $\{B_0, B_1\}$ неприводим, т. е. не имеет общих нетривиальных инвариантных аффинных подпространств в A_n. Иначе будем рассматривать ограничения операторов на это подпространство.

Предложение 5.1.3. *Пусть $\{B_0, B_1\}$ — неприводимый набор аффинных операторов. Если $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$, тогда данный набор имеет единственный фрактал $K \subset A_n$. Если же $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) > 1$, то он не имеет фракталов.*

Доказательство. Если $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$, то существует норма в пространстве $\widetilde{A}_n$, для которой $\|\widetilde{B}_i\| < 1$, $i = 0, 1$ (см. приложение A.6, теорема A.6.3), далее ссылаемся на теорему Хатчинсона о существовании и единственности фрактала (приложение A.17, теорема A.17.2).

Обратно, если K — фрактал набора операторов $\{B_0, B_1\}$, то его выпуклая оболочка $\operatorname{conv} K$ имеет непустую внутренность в A_n. В противном случае она целиком содержалась бы в некоторой аффинной плоскости меньшей размерности. Следовательно, аффинная оболочка множества K будет общим собственным подпространством операторов B_0, B_1, что противоречит неприводимости. Итак, выпуклая оболочка K

имеет непустую внутренность. Следовательно, для некоторой константы $C > 0$ имеем

$$\max_{(d_1,\ldots,d_r)\in\{0,1\}^r, r\in\mathbb{N}} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_r}\| < C.$$

Поэтому $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) \leqslant 1$. $\Diamond$

Далее везде предполагаем, что $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$. Из этого, в частности, следует, что $\rho(\widetilde{B}_i) < 1$, $i = 0, 1$ (приложение А.6, лемма 5.1.2). Следовательно, оператор B_i имеет единственную неподвижную точку $v_i \in A_n$.

Теорема 5.1.4. *Предположим, что неприводимый набор аффинных операторов удовлетворяет двум условиям*:

1) $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$;

2) $B_0 v_1 = B_1 v_0$ (v_i — *неподвижная точка оператора* B_i);

тогда фрактал K *этого набора является непрерывной кривой в* A_n. *Более точно*: *существует единственная непрерывная функция* $v\colon\ [0, 1] \to A_n$ (фрактальная кривая) *такая, что*

$$v(x) = B_i v(2x - i), \quad x \in \left[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}\right], \quad i = 0, 1, \tag{5.3}$$

и, следовательно, $v([0, 1]) = K$. *Явно значения этой функции даются формулой*

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} B_{d_1} B_{d_2} \times \ldots \times B_{d_k} v_0, \tag{5.4}$$

где $d_1, d_2, \ldots$ — *цифры в двоичном разложении числа* $x:\ x = 0, d_1 d_2 \ldots$ *В частности, для двоично-рациональных* $x = 0, d_1 d_2 \ldots d_k$ *имеем*

$$v(x) = B_{d_1} B_{d_2} \times \ldots \times B_{d_k} v_0. \tag{5.5}$$

Показатель гладкости Гёльдера в $C[0, 1]$ *функции* v *равен*

$$\alpha_v = -\log_2 \widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1).$$

Более того, если набор линейных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ *неприводим в* $\widetilde{A}_n$, *то*

$$C_1 t^{\alpha_v} \leqslant \omega_1(v, t)_\infty \leqslant C_2 t^{\alpha_v}, \tag{5.6}$$

где C_1, C_2 — *положительные константы.*

Обратно, если для неприводимой пары аффинных операторов $\{B_0, B_1\}$ *уравнение* (5.3) *имеет непрерывное решение, то каждый из операторов* B_i *имеет единственную неподвижную точку* v_i *и выполняются условия* 1) *и* 2).

В дальнейшем мы будем использовать модуль непрерывности первого порядка ω_1, при этом индекс 1 будем опускать. Кроме того, для модуля непрерывности в пространстве $C(\mathbb{R})$ будем опускать индекс ∞. Таким образом, $\omega(f, h) = \omega_1(f, h)_\infty$.

Доказательство. Вначале докажем сходимость предела (5.4). Попутно мы установим, что функция v, заданная этой формулой, непрерывна и $\alpha_v \geqslant -\log_2 \widehat{\rho}$.

Определим $v(x)$ в двоично-рациональных точках x по формуле (5.5). Для произвольных двоично-рациональных x и y оценим норму разности $v(x) - v(y)$. Не ограничивая общности считаем, что $x < y$ и пара x, y отлична от $\{0, 1\}$. Обозначим через z двоично-рациональное число наименьшего порядка такое, что $x \leqslant z \leqslant y$ (легко видеть, что такое число единственно).

Оценим норму $\|v(y) - v(z)\|$ (норма $\|v(z) - v(x)\|$ оценивается аналогично). Имеем $z = 0,\ d_1 \dots d_q,\quad y = 0,\ d_1 \dots d_q d_{q+1} \dots$ Обозначим через r наименьший индекс такой, что $r > q$ и $d_r = 1$. Ясно, что $|y - z| \geqslant 2^{-r}$. Пусть $P \subset \mathbb{N}$ — множество всех индексов $p \in \mathbb{N}$ таких, что p-е цифры после запятой (в двоичном разложении) чисел y и z различны. Легко видеть, что r — наименьшее число в P. Имеем

$$\|v(y) - v(z)\| = \left\| \sum_{p \in P} v(0, d_1 \dots d_{p-1} 1) - v(0, d_1 \dots d_{p-1} 0) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{p \geqslant r} v(0, d_1 \dots d_{p-1} 1) - v(0, d_1 \dots d_{p-1} 0) \right\| =$$

$$= \sum_{p \geqslant r} \left\| B_{d_1} \times \dots \times B_{d_{p-1}} (v_1 - v_0) \right\| \leqslant \sum_{p \geqslant r} C_\varepsilon (\widehat{\rho} + \varepsilon)^{p-1} =$$

$$= \frac{C_\varepsilon (\widehat{\rho} + \varepsilon)^r}{(\widehat{\rho} + \varepsilon)(1 - \widehat{\rho} - \varepsilon)} \leqslant \frac{C_\varepsilon}{(\widehat{\rho} + \varepsilon)(1 - \widehat{\rho} - \varepsilon)} \cdot |y - z|^{-\log_2(\widehat{\rho} + \varepsilon)} \tag{5.7}$$

для некоторой константы C_ε, зависящей только от $\widehat{\rho}$ и от ε. Оценив точно так же норму $\|v(z) - v(x)\|$ и сложив с (5.7), получим

$$\|v(y) - v(x)\| \leqslant \widetilde{C}_\varepsilon |y - x|^{-\log_2(\widehat{\rho} + \varepsilon)} \tag{5.8}$$

для некоторой константы $\widetilde{C}_\varepsilon$, зависящей только от $\widehat{\rho}$ и от ε. Данное неравенство выполняется для каждого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что функция v равномерно непрерывна на множестве двоично-рациональных чисел, и что на этом множестве показатель Гёльдера не меньше, чем $-\log_2 \widehat{\rho}$. Поэтому данная функция однозначно продолжается по непрерывности на весь отрезок $[0, 1]$, и на всем отрезке $\alpha_v \geqslant -\log_2 \widehat{\rho}$. Формула (5.4) следует теперь из непрерывности v. Если набор $\{\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1\}$ неприводим, то мы можем воспользоваться леммой A.6.4 (приложение A.6). Повторяя наше доказательство, взяв $\varepsilon = 0$, $C_\varepsilon = c_2$, получим

$$\|v(y) - v(x)\| \leqslant C_2 |y - x|^{-\log_2 \widehat{\rho}}.$$

Теперь докажем обратное неравенство $\alpha_v \leqslant -\log_2 \widehat{\rho}$. Для этого возьмем множество L, состоящее из всех векторов $u \in \widetilde{A}_n$ таких, что

$$\max_{d_i \in \{0,1\},\, i = 1, \dots, k} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \dots \times \widetilde{B}_{d_k} u\| = o(1) \widehat{\rho}^k \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Ясно, что L — линейное подпространство в $\widetilde{A}_n$, инвариантное относительно операторов $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_1$. Если $v_1 - v_0 \in L$, то L совпадает со всем $\widetilde{A}_n$, иначе операторы B_0, B_1 имели бы общее инвариантное аффинное подпространство $v_0 + L \in A_n$. Итак, $\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k} u\| = o(1)\widehat{\rho}^k$ для всех $u \in \widetilde{A}_n$. Тогда, выбрав ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в $\widetilde{A}_n$, получаем, что для всех достаточно больших k

$$\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k} e_r\| \leqslant \frac{1}{2n\sqrt{n}}\,\widehat{\rho}^k, \quad r = 1, \ldots, n$$

(норма евклидова). Следовательно,

$$\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}\| \leqslant \sqrt{n}\sum_{r=1}^{n}\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k} e_r\| \leqslant \sqrt{n}\,\frac{1}{2n\sqrt{n}}\,\widehat{\rho}^k = \frac{1}{2}\,\widehat{\rho}^k.$$

Но тогда

$$\widehat{\rho} = \widehat{\rho}\{\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1\} = \Big[\widehat{\rho}\Big\{B_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k},\ \{d_1, \ldots, d_k\} \subset \{0,1\}^k\Big\}\Big]^{1/k} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\max\Big\{\|B_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}\|,\ \{d_1, \ldots, d_k\} \subset \{0,1\}^k\Big\}\Big]^{1/k} \leqslant \Big[\frac{1}{2}\,\widehat{\rho}^k\Big]^{1/k} =$$

$$= 2^{-1/k}\widehat{\rho} < \widehat{\rho}.$$

Получили противоречие, следовательно, случай $v_1 - v_0 \in L$ невозможен. Итак, $v_1 - v_0 \notin L$. Это означает, что для некоторой положительной константы C существуют сколь угодно длинные последовательности $d_1, \ldots, d_k$ такие, что

$$\|B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k}(v_1 - v_0)\| \geqslant C\widehat{\rho}^k.$$

Тогда для точек $x = 0, d_1 \ldots d_k 0$ и $y = 0, d_1 \ldots d_k 1$ имеем

$$\|v(y) - v(x)\| \geqslant C\widehat{\rho}^k = C|y - x|^{-\log_2 \widehat{\rho}}.$$

Следовательно,

$$\alpha_v \leqslant -\log_2 \widehat{\rho},$$

что и доказывает обратное неравенство. Если набор операторов $\{\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1\}$ неприводим, то применяем лемму А.6.4: положив $v = v_1 - v_0$ в неравенстве (5.6), получаем

$$\|v(y) - v(x)\| \geqslant C_1|y - x|^{-\log_2 \widehat{\rho}},$$

что доказывает (5.6). Более того, если $\widehat{\rho} \geqslant 1$ то функция v не является равномерно непрерывной на множестве двоично-рациональных чисел, значит, не продолжается непрерывно на весь отрезок $[0, 1]$. Следовательно, в случае $\widehat{\rho} \geqslant 1$ не существует непрерывной функции, удовлетворяющей уравнению (5.3). Так что, из существования непрерывного решения вытекает свойство 2). Свойство 1) также вытекает из существования. В самом деле, из уравнения (5.3) следует, что

$$B_i v(i) = v(i), \quad i = 0, 1.$$

Поэтому операторы B_0, B_1 имеют неподвижные точки: $v(0)$ и $v(1)$ соответственно. Других неподвижных точек у них нет. Если бы, например, оператор B_0 имел бы еще одну неподвижную точку $a \in A_n$, то $\widetilde{B}_0(v(0) - a) = v(0) - a$, значит, оператор $\widetilde{B}_0$ имеет собственное значение 1, так что $\widehat{\rho} \geqslant 1$, а это противоречит условию 2). Итак, $v_i = v(i)$ — единственная неподвижная точка оператора B_i, $i = 1, 2$.

Наконец, из того же уравнения (5.3) следует, что

$$v(1/2) = B_0 v(1) = B_1 v(0).$$

Поэтому условие 1) выполнено. Теорема доказана. $\Diamond$

Следствие 5.1.5. *Если фрактальная кривая v является липшицевой функцией, то $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) = \frac{1}{2}$. Обратно, если $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) = \frac{1}{2}$ и набор $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ неприводим, то функция v — липшицева.*

Замечание 5.1.6. Если операторы $\widetilde{B}_0$ и $\widetilde{B}_1$ имеют общее собственное подпространство, то показатель Гёльдера функции v может быть неточен. Подобный пример доставляет уже функция Дьюбука. Ее производная (являющаяся фрактальной кривой), как было показано в [113], «почти» липшицева: ее модуль непрерывности равен $t|\ln t|$. Подробнее мы разберем эту ситуацию в примере 7.3.14, параграф 7.3.

Замечание 5.1.7. Если каждый из аффинных операторов B_0, B_1 имеет по неподвижной точке (v_0, v_1 соответственно), то перекрестное условие $B_0 v_1 = B_1 v_0$ всегда влечет $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) \geqslant \frac{1}{2}$. Действительно, как легко видеть

$$\big(\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1\big)[v_1 - v_0] = v_1 - v_0.$$

Таким образом, оператор $\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1$ имеет собственное значение 1, следовательно, в любой норме $\|\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1\| \geqslant 1$. Но если $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < \frac{1}{2}$, то в некоторой норме для обоих операторов $\|B_i\| < \frac{1}{2}$, а, значит, $\|\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1\| < 1$.

Теперь представим непрерывные решения масштабирующих уравнений в виде фрактальных кривых.

Пусть непрерывная функция φ с носителем $[0, N]$ является решением масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi(2x - k).$$

Тогда вектор-функция $v: [0,1] \to \mathbb{R}^N$, заданная равенством

$$v(x) = \bigl(\varphi(x),\, \varphi(x+1), \ldots,\, \varphi(x+N-1)\bigr)^T \in \mathbb{R}^N, \tag{5.9}$$

есть решение уравнения

$$v(x) = T_i v(2x-i), \quad x \in [i/2, (i+1)/2], \qquad i = 0, 1, \tag{5.10}$$

где операторы T_0, T_1 задаются с помощью $N \times N$-матриц:

$$(T_0)_{ij} = c_{2i-j-1}, \quad (T_1)_{ij} = c_{2i-j}. \tag{5.11}$$

При $k \in \{0, \ldots, N\}$ c_k — соответствующий коэффициент масштабирующего уравнения, при прочих k полагаем $c_k = 0$. Обратно, если вектор-функция (5.9) удовлетворяет уравнению (5.10), то функция $\varphi(x)$ является решением соответствующего масштабирующего уравнения. Проверяется это непосредственной подстановкой, читатель без труда проведет доказательство самостоятельно. Аналогично показываем, что φ является L_p-решением тогда и только тогда, когда функция v принадлежит $L_p[0,1]$ и удовлетворяет уравнению (5.10) почти всюду.

Легко видеть, что в пространстве L_p гладкость функций φ и v одинакова. В пространстве $C(\mathbb{R})$ рассуждаем более аккуратно, так как проблемы могут быть на концах отрезка. Если φ непрерывна, то $\varphi(0) = \varphi(N) = 0$, поэтому ее гладкость в пространстве C на всей прямой равна гладкости на отрезке $[0,N]$ и, следовательно, равна гладкости функции v. Повторяя эти рассуждения для производных, заключаем, что если φ дифференцируема, то и v дифференцируема, и гладкость функции φ в $C^1(\mathbb{R})$ равна гладкости v в $C^1[0,1]$. Таким образом,

если масштабирующая функция принадлежит $C^m(\mathbb{R})$, $m \geqslant 0$ (*или* $W_p^m(\mathbb{R})$, $m \geqslant 0$, $p \in [1, +\infty]$), *то ее гладкость в этом пространстве совпадает с гладкостью вектор-функции* (5.9) *в пространстве* $C^m[0,1]$ (*соответственно* $W_p^m[0,1]$).

Теперь мы можем воспользоваться результатами о фрактальных кривых и перенести их на масштабирующие функции, но для этого необходимо установить, о каких аффинных пространствах в данном случае идет речь. Пусть сначала масштабирующая функция φ непрерывна. Тогда принимаем за A_n аффинную оболочку множества $\{v(x),\ x \in [0,1]\}$, т. е. минимальное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^N$, содержащее это множество. Из уравнения (5.10) следует, что $T_i A_n \subset A_n$, $i = 0, 1$. Теперь обозначаем $B_i = T_i|_{A_n}$. Из минимальности A_n (определение аффинной оболочки) следует, что набор операторов B_0, B_1 неприводим. Линейная часть этого аффинного пространства $\widetilde{A}_n$ является общим собственным подпространством операторов T_0, T_1. Аффинную плоскость A_n можно определить и в терминах операторов T_i. A_n — это минимальная аффинная плоскость, содержащая вектор

$$v_0 = \Bigl(0, \varphi(1), \ldots, \varphi(N-1)\Bigr)^T$$

(являющийся собственным вектором оператора T_0 с собственным значением 1) и инвариантная относительно обоих операторов T_0, T_1. Соответственно, $\widetilde{A}_n$ является наименьшим общим собственным линейным подпространством этих операторов, содержащим вектор $v_1 - v_0$. Заметим, что A_n всегда содержится в гиперплоскости

$$W = \left\{(y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N,\ \sum y_k = 1\right\}.$$

В самом деле, каждая суммируемая масштабирующая функция обладает свойством разбиения единицы (следствие 5.1.8), а, значит, $\sum\limits_{k=0}^{N} v(x+k) = 1$, поэтому $v(x) \in W$ для каждого $x \in [0,1]$. Таким образом, A_n не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^N$, и его размерность n не превосходит $N-1$. Для L_p-масштабирующих функций пространство A_n определяем как аффинную оболочку множества, состоящего из векторов

$$\left\{\left(2^k \int\limits_x^{x+2^{-k}} \varphi(t)\,dt,\ \ldots,\ 2^k \int\limits_x^{x+2^{-k}} \varphi(t+N-1)\,dt\right)^T\right\}$$

для всех $x \in [0,\ 1-2^{-k}]$, $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. В терминах операторов T_i: A_n является минимальной аффинной плоскостью, содержащей вектор

$$c = \left(\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt,\ \ldots,\ \int\limits_{N-1}^{N} \varphi(t)\,dt\right)^T$$

(являющийся собственным вектором оператора $\frac{1}{2}(T_0 + T_1)$ с собственным значением 1) и инвариантной относительно обоих операторов T_0, T_1; $\widetilde{A}_n$ — наименьшее общее собственное линейное подпространство этих операторов, содержащее вектор $T_0c - c = c - T_1c$. Из свойства разбиения единицы в данном случае также следует, что $A_n \subset W$. Легко показать, что для непрерывной масштабирующей функции два определения пространства A_n совпадают, поэтому мы будем использовать для них общий символ.

Итак, для масштабирующей функции φ функция $v(x)$ является фрактальной кривой для определенных выше операторов B_0, B_1 и пространства A_n. Заметим, что здесь перекрестное условие $B_0v_1 = B_1v_0$ выполнено автоматически. Действительно, нетрудно проверить, что для любой пары векторов

$$u_0 = (0, y_1, \ldots, y_{N-1})^T, \quad u_1 = (y_1, \ldots, y_{N-1}, 0)^T$$

(векторы v_0 и v_1 являются такой парой) имеем $B_0u_1 = B_1u_0$.

Применив теорему 5.1.4, получаем

Следствие 5.1.8. *Если масштабирующая функция φ непрерывна, то вектор-функция* (5.9) *является фрактальной кривой аффин-*

ных операторов B_0, B_1, *где* $B_i = T_i|_{A_n}$, $i = 0, 1$, *операторы* T_0, T_1 *определяются в* $\mathbb{R}^N$ *своими матрицами по формулам* (5.11), A_n — *наименьшая аффинная плоскость, содержащая точку* $v(0)$ *и инвариантная относительно операторов* T_0, T_1. *При этом* $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$ *и показатель гладкости Гёльдера в* $C(\mathbb{R})$ *функции* φ *равен*

$$\alpha_\varphi = -\log_2 \widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1).$$

Более того, если набор линейных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ *неприводим в* $\widetilde{A}_n$, *то*

$$C_1 t^{\alpha_\varphi} \leqslant \omega(\varphi, t) \leqslant C_2 t^{\alpha_\varphi}.$$

Обратно, если оператор T_0 *имеет собственный вектор* v_0 *с собственным значением* 1, *первая координата которого равна* 0, *и при этом* $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$ ($\widetilde{B}_i$ — *ограничение оператора* T_i *на наименьшее общее инвариантное подпространство операторов* T_0, T_1, *содержащее вектор* $v_1 - v_0$; v_1 *получается из* v_0 *левым сдвигом всех координат на* 1 *и добавлением нуля в качестве* N*-й координаты*), *то соответствующее масштабирующее уравнение имеет непрерывное решение. Значения масштабирующей функции даются формулой* (5.9), *где*

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} T_{d_1} T_{d_2} \times \ldots \times T_{d_k} v_0, \tag{5.12}$$

$d_1, d_2, \ldots$ — *цифры в двоичном разложении числа* x. *В частности, для двоично-рациональных* $x = 0, d_1 d_2 \ldots d_k$ *имеем*

$$v(x) = T_{d_1} T_{d_2} \times \ldots \times T_{d_k} v_0. \tag{5.13}$$

Для того чтобы найти непрерывное решение масштабирующего уравнения, нужно найти собственный вектор оператора T_0 с собственным значением 1 и первой координатой 0 (наличие такого вектора гарантируется существованием непрерывного решения), найти соответствующую аффинную плоскость A_n, и проверить, что на этой плоскости совместный спектральный радиус операторов T_0, T_1 строго меньше 1. Теперь мы можем вычислить функцию φ по формуле (5.13) во всех двоично-рациональных точках и продолжить ее по непрерывности на весь отрезок $[0, N]$.

Вообще говоря, у оператора T_0 может быть несколько неколлинеарных собственных векторов с собственным значением 1, каждый из них порождает свою плоскость A_n, однако лишь для одного из них

$$\widehat{\rho}(T_0|_{A_n}, T_1|_{A_n}) < 1,$$

для всех прочих векторов (и соответствующих плоскостей) это неравенство выполняться не будет. Иначе в силу следствия 5.1.8 у масштабирующего уравнения появится второе непрерывное решение, что невозможно (теорема 2.4.4). В главе 6 пространство A_n и вектор v_0 будут найдены для каждого масштабирующего уравнения в явном виде.

5.2. Фрактальные кривые в пространстве L_p

Функция $v:\ [0,1] \to A_n$, принадлежащая пространству $L_p[0,1]$ (т. е. все координатные функции отображения v принадлежат $L_p[0,1]$, $p \in [1,+\infty]$) называется *L_p-фрактальной кривой операторов* B_0, B_1, если она удовлетворяет уравнению (5.3) почти всюду на отрезке $[0,1]$.

Существование и гладкость L_p-фрактальной кривой данной пары операторов характеризуется с помощью обобщенного совместного спектрального радиуса с коэффициентом p, или *p-радиуса*.

Определение 5.2.1. Для данного $p \in [1,+\infty]$ *p-радиусом линейных операторов* $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ называется величина $\rho_p(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1)$, равная

$$\lim_{k\to\infty}\left(2^{-k}\sum_{\{d_1,\ldots,d_k\}\subset\{0,1\}^k}\left\|\widetilde{B}_{d_1}\times\ldots\times\widetilde{B}_{d_k}\right\|^p\right)^{1/pk}$$

для конечных p и

$$\lim_{k\to\infty}\max_{\{d_1,\ldots,d_k\}\subset\{0,1\}^k}\left\|\widetilde{B}_{d_1}\times\ldots\times\widetilde{B}_{d_k}\right\|^{1/k}$$

для $p=+\infty$.

Таким образом, совместный спектральный радиус $\widehat{\rho}$ равен p-радиусу при $p=+\infty$. Функция ρ_p — неубывающая относительно p. Для любого p имеем $\check{\rho} \leqslant \rho_p \leqslant \widehat{\rho}$.

Существует несколько эффективных алгоритмов приближенного вычисления ρ_p для данной пары операторов [115, 116]. Для целых четных значений p, начиная с $p=2$, величина ρ_p вычисляется как (обычный) спектральный радиус некоторого конечномерного оператора [115, 117, 118].

Доказательство следующей теоремы мало чем отличается от доказательства теоремы 5.1.4, и мы его не приводим.

Теорема 5.2.2. *Предположим, что $p \in [1,+\infty)$ и неприводимый набор аффинных операторов удовлетворяет двум условиям*

1) $\rho_p(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$;

2) *существует точка $c \in A_n$ такая, что $c = \frac{1}{2}\,B_0c + \frac{1}{2}\,B_1c$;*

тогда существует единственная функция $v:\ [0,1] \to A_n$, принадлежащая $L_p[0,1]$, удовлетворяющая равенству (5.3) *почти всюду на отрезке $[0,1]$. Более того,*

$$\int\limits_0^1 v(t)\,dt = c$$

и для любого двоично-рационального $x = 0,d_1\ldots d_k$ имеем

$$2^k\int\limits_x^{x+2^{-n}} v(t)\,dt = B_{d_1}\times\ldots\times B_{d_k}c,$$

т. е. среднее значение функции v на отрезке $[x, x+2^{-k}]$ равно $B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k} c$. Если обозначить через v^k кусочно-постоянную функцию, которая на каждом из 2^k двоичных отрезков $[x, x+2^{-k}]$, $x = 0, d_1 \ldots d_k$, тождественно равна $B_{d_1} \ldots B_{d_k} c$, то v^k стремится к v в метрике $L_p[0,1]$ при $k \to \infty$. Для конечных p показатель гладкости Гёльдера в $L_p[0,1]$ функции v равен

$$\alpha_{v,p} = \min\left\{1, -\log_2 \rho_p(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1)\right\}.$$

Более того, если набор линейных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ неприводим в $\widetilde{A}_n$, то

$$C_1 t^{\alpha_{v,p}} \leqslant \omega(v,t)_p \leqslant C_2 t^{\alpha_{v,p}}, \tag{5.14}$$

где C_1, C_2 — положительные константы.

Обратно, если для неприводимой пары аффинных операторов $\{B_0, B_1\}$ уравнение (5.3) *имеет L_p-решение, то выполняются условия* 1) *и* 2).

Вновь обратимся к масштабирующим функциям. Используя теорему 5.2.2, получаем, что если масштабирующая функция φ принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R})$, то вектор-функция (5.9) является L_p-фрактальной кривой аффинных операторов B_0, B_1, где $B_i = T_i|_{A_n}$, $i = 0, 1$, операторы T_0, T_1 определяются в $\mathbb{R}^N$ своими матрицами по формулам (5.11), A_n — наименьшая аффинная плоскость, содержащая точку

$$c = \left(\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt, \ldots, \int\limits_{N-1}^{N} \varphi(t)\,dt\right)^T$$

и инвариантная относительно операторов T_0, T_1. При этом в случае $p < \infty$ имеем

$$\rho_p(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$$

и показатель гладкости Гёльдера в $L_p[0, N]$ функции φ равен

$$\min\left\{-\log_2 \widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1),\ 1\right\}.$$

Обратно, если оператор $T_0 + T_1$ имеет собственный вектор c с собственным значением 2 и при этом

$$\rho_p(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) < 1$$

($\widetilde{B}_i$ — ограничение оператора T_i на наименьшее общее инвариантное подпространство операторов T_0, T_1, содержащее вектор $T_0 c - c$), то решение φ соответствующего масштабирующего уравнения принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. Более того, $\int\limits_0^1 v(t)\,dt = c$ и для любого двоично-рационального $x = 0, d_1 \ldots d_k$ имеем

$$2^k \int\limits_x^{x+2^{-n}} v(t)\,dt = B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k} c, \tag{5.15}$$

т. е. среднее значение функции v на отрезке $[x, x + 2^{-k}]$ равно $B_{d_1} \times \ldots$ $\ldots \times B_{d_k} c$.

Таким образом, для построения L_p-решения масштабирующего уравнения нужно найти собственный вектор оператора $T_0 + T_1$ с собственным значением 2, найти соответствующую аффинную плоскость A_n, и проверить, что на этой плоскости p-радиус операторов T_0, T_1 строго меньше 1. Теперь мы можем вычислить среднее значение функции φ на всех двоичных интервалах. Ясно, что функция таким образом определяется однозначно. Можно поступить иначе: взять кусочно-постоянную функцию $c(x)$, равную на каждом из интервалов $[k, k+1)$, $k = 0, \ldots, N-1$, k-й координате вектора c и применить к ней итерации оператора T (напомним, что $Tf(x) = \sum c_k f(2x - k)$). Тогда, в силу теоремы 5.2.2 имеем $T^m c(\cdot)$ сходится к φ в пространстве $L_p[0, N]$, причем скорость сходимости не меньше, чем $C \cdot (\rho_p)^m$. В качестве c можно взять произвольную точку плоскости A_n.

У оператора $T_0 + T_1$ также может быть несколько собственных векторов с собственным значением 2, и каждый из них порождает свою плоскость A_n, однако лишь для одного из них $\rho_p(T_0|_{A_n}, T_1|_{A_n}) < 1$.

Формулировку основных результатов о гладкости масштабирующих функций в пространстве L_p мы отложим до главы 7, когда будут найдены в явном виде пространства A_n и общий вид операторов T_0, T_1 на них.

5.3. Гладкость фрактальных кривых в пространствах W_p^r и C^r

Согласно следствию 5.1.5, если фрактальная кривая непрерывно дифференцируема, то $\widehat{\rho} = \dfrac{1}{2}$. Обратное, вообще говоря, не верно. Какие условия на аффинные операторы будут достаточны для непрерывной дифференцируемости?

Предложение 5.3.1. *Фрактальная кривая, соответствующая паре аффинных операторов B_0, B_1, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда каждый оператор $\widetilde{B}_i$, $i = 0, 1$, имеет собственный вектор $\widetilde{v}_i$, соответствующий собственному значению $\dfrac{1}{2}$ и при этом выполнены два условия*:

1) $\widetilde{B}_0 \widetilde{v}_1 = \widetilde{B}_1 \widetilde{v}_0$;

2) $\widehat{\rho}\left(\widetilde{B}_0|_{\widetilde{L}}, \widetilde{B}_1|_{\widetilde{L}}\right) < \frac{1}{2}$,
где $\widetilde{L}$ *— минимальное подпространство* $\widetilde{A}_n$, *инвариантное относительно* B_0 *и* B_1 *и содержащее вектор* $\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_0$.

Доказательство. Предположим, фрактальная кривая $v(t)$ дифференцируема. Представим аффинное пространство A_n как аффинную плоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, взяв в качестве начала координат произвольную точку вне A_n. Операторы B_i единственным образом продолжаются до линейных в $\mathbb{R}^{n+1}$. Продифференцировав уравнение (5.3) по x, получим

$$v'(x) = 2\widetilde{B}_i v'(2x - i), \quad x \in \left[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}\right], \quad i = 0, 1.$$

Таким образом, v' — аффинная кривая в пространстве

$$L = \operatorname{aff}\left\{v'(x), \quad x \in [0,1]\right\},$$

соответствующая операторам $2\widetilde{B}_0|_L$, $2\widetilde{B}_1|_L$. Теперь остается сослаться на теорему 5.1.4.

Обратно, если найдутся вектора $\widetilde{v}_i$, $i = 0, 1$, для которых $\widetilde{B}_i \widetilde{v}_i = \frac{1}{2}\widetilde{v}_i$ и выполнены свойства 1) и 2), то согласно теореме 5.1.4 существует фрактальная кривая $\widetilde{v} : [0,1] \to L$, где $L = \widetilde{v}_0 + \widetilde{L}$, L — минимальное подпространство $\widetilde{A}_n$, инвариантное относительно B_0 и B_1 и содержащее вектор $\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_0$. Тогда функция

$$v_0 + \int_0^x \widetilde{v}(t)\, dt$$

удовлетворяет (5.3) и, следовательно, (по теореме 5.1.4) совпадает с $v(x)$. Таким образом, v дифференцируема и

$$v'(x) = \widetilde{v}(x). \qquad \Diamond$$

Итак, если фрактальная кривая непрерывно дифференцируема, то ее производная — также фрактальная кривая. Размерность производной (т. е. размерность аффинной оболочки ее образа) на единицу меньше размерности самой кривой. Чтобы в этом убедиться, обратимся к доказательству предложения 5.3.1. Функция v является фрактальной кривой в A_n, а ее производная — в $L \subset A_n$. Эти два пространства не могут совпадать, поскольку совместный спектральный радиус операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ на всем пространстве $\widetilde{A}_n$ не меньше $\frac{1}{2}$ (замечание 5.1.7), а на пространстве $\widetilde{L}$ — меньше $\frac{1}{2}$ (предложение 5.1.3). Таким образом,

$$\dim L \leqslant \dim A_n - 1.$$

С другой стороны, $\dim L \geqslant \dim A_n - 1$, поскольку функция v получается из v' интегрированием

$$v(x) = v_0 + \int\limits_0^x v'(t)\,dt, \tag{5.16}$$

которое либо вообще не повышает размерность образа (если $v_0 \in L$), либо повышает его на 1 (если $v_0 \notin L$). Итак,

$$\dim\ \operatorname{Im} v' + 1 = \dim\ \operatorname{Im} v.$$

Верно и обратное: у каждой фрактальной кривой есть первообразная. Пусть v — фрактальная кривая в пространстве A_n, соответствующая неприводимой паре операторов B_0, B_1. Представим A_n как аффинную гиперплоскость в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $0 \notin A_n$. Тогда для произвольного $v_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \widetilde{A}_n$ функция

$$V(x) = V_0 + \int\limits_0^x v(x)\,dx \tag{5.17}$$

является фрактальной кривой для аффинных операторов

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{B}_i + b_i, \quad i = 0, 1,$$

где $\mathbf{B}_i$ — линейное расширение оператора B_i на $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$b_i = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}_i v_i - v_i, \quad V_1 = V(1).$$

Доказывается это прямой подстановкой в уравнение фрактальной кривой. Итак, мы получили

Следствие 5.3.2. *Если фрактальная кривая в A_n r раз непрерывно дифференцируема, то ее r-я производная является фрактальной кривой в A_{n-r}. Обратно, всякая фрактальная кривая в A_{n-r} является r-й производной подходящей фрактальной кривой в A_n.*

Из предложения 5.3.1 следует, что если фрактальная кривая v непрерывно-дифференцируема, то каждый из операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ имеет собственное значение $\frac{1}{2}$. Более того, в этом случае операторы имеют общее собственное $(n-1)$-мерное подпространство, на котором их совместный спектральный радиус строго меньше $\frac{1}{2}$ (это $\operatorname{span} \operatorname{Im} \mathrm{v}'$.) Применив индукцию, приходим к выводу: если фрактальная кривая r раз непрерывно дифференцируема, то соответствующие операторы $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ имеют собственные значения $\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^r}$, а их матрицы в подходящем базисе имеют вид

$$\widetilde{B}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & \dots & \frac{1}{2^r} & 0 & \dots & 0 \\ & * & & & \widetilde{D}_i & \\ & & & & & \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

причем $\widehat{\rho}(\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1) < \dfrac{1}{2^r}$ (операторы $2^r\widetilde{D}_0, 2^m\widetilde{D}_1$ порождают r-ю производную нашей кривой в пространстве A_{n-r}). В данном базисе плоскость k-й производной $\mathrm{span}\ \mathrm{Im}\ v^{(k)}$ имеет уравнение $x_1 = \ldots = x_k = 0$ (первые k координат — нулевые), а собственные вектора оператора B_0 (B_1), соответствующие собственным значениям $\dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2^r}$ есть не что иное как значения производных, с первой по r-ю, в точке $x = 0$ (соответственно $x = 1$).

Следствие 5.3.3. *Пусть l — максимальное целое число такое, что фрактальная кривая l раз непрерывно дифференцируема* ($0 \leqslant \leqslant l \leqslant n-1$). *Тогда гладкость кривой равна $l - \log_2 \widehat{\rho}(\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1)$, где матрицы $\widetilde{D}_i$ взяты из разложения* (5.18) *при $r = l$.*

В частности, если $l = n$, то разложение (5.18) пройдет по всей диагонали, и матрица B_i становится нижне-треугольной с элементами $\dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}$ на главной диагонали. «Аффинное пространство» A_0, в котором будет расположена n-я производная, будет иметь размерность нуль, т. е. выродится в точку, а сама производная — в тождественную константу. Исходная кривая, таким образом, является n-й первообразной константы, т. е. — полиномиальной кривой степени не выше n. Напомним, что полиномиальной кривой называется кривая $v\colon [0,1] \to A_n$, у которой все координатные компоненты — алгебраические полиномы на $[0,1]$. Таким образом, если гладкость фрактальной кривой строго больше n, то она (поскольку будет n раз непрерывно дифференцируемой) является полиномиальной. На самом деле верно чуть более сильное утверждение.

Предложение 5.3.4. *Гладкость n-мерной фрактальной кривой либо строго меньше n, либо бесконечна. В последнем случае кривая является полиномиальной степени не выше n. Если кривая невырождена* (*имеет полную размерность n*), *то ее степень равна n и существует базис в котором матрицы операторов B_0 и B_1 верхне-треугольные с диагональными элементами $\dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}$. k-я компонента кривой в этом базисе является полиномом степени k.*

В доказательстве нуждается лишь тот случай, когда гладкость равна n. Если кривая n раз непрерывно дифференцируема, то все уже доказано ранее. Остается лишь один случай: $v^{(n-1)}$ не является непрерывно дифференцируемой, но $\alpha_{v^{(n-1)}} = 1$. Покажем, что он невозможен. Пусть $v^{(n-1)}$ — фрактальная кривая в аффинной плоскости A_1, т. е. на прямой. Она порождена одномерными операторами

$$2^{n-1}\widetilde{D}_0, \quad 2^{n-1}\widetilde{D}_1$$

(разложение (5.18) при $r = n-1$), т. е. — сжатиями относительно двух точек прямой. Максимальный из коэффициентов сжатий — это по определению

$$\widehat{\rho}\,(\,2^{n-1}\widetilde{D}_0,\ 2^{n-1}\widetilde{D}_1\,) = 1/2,$$

так как

$$-\log_2 \widehat{\rho} = \alpha_{v^{(n-1)}} = 1 \Rightarrow \widehat{\rho} = 1/2$$

(следствие 5.3.3). Сумма этих коэффициентов равна 1 (из-за «перекрестного условия», замечание 5.1.7). Значит, каждый из них равен 1/2. Итак, $\widetilde{D}_0 = \widetilde{D}_1 = 2^{-n}$, а фрактальная кривая v^{n-1} порождена на прямой двумя сжатиями с коэффициентом 1/2, а значит, как легко видеть, является линейной функцией. Итак, v^{n-1} — линейная функция, следовательно, v — полиномиальная кривая.

В заключение отметим, что любая полиномиальная кривая является фрактальной. Это можно заключить из формулы 5.17 для первообразной. В самом деле, из тождественной константы за n переходов к первообразной можно получить любую полиномиальную кривую степени не выше n.

Легко формулируются аналоги предложения 5.3.1 и следствий 5.3.2, 5.3.3 для L_p-фрактальных кривых. Получаем, таким образом, критерий принадлежности фрактальной кривой пространству Соболева $W_p^r[0,1]$: функции $v, v', \ldots, v^{(r-1)}$ являются непрерывными фрактальными кривыми в пространствах $A_n, \ldots, A_{n-r+1}$, а производная $v^{(r)}$ является L_p-фрактальной кривой в A_{n-r}. Формулы для гладкости фрактальной кривой в пространстве W_p^r также полностью аналогичны.

Следствие 5.3.5. *Масштабирующая функция непрерывно дифференцируема на* $\mathbb{R}$ *(либо принадлежит* W_p^1, $p \in [1, +\infty)$*) тогда и только тогда когда каждый оператор* T_i, $i = 0, 1$, *имеет собственный вектор* v_i', *соответствующий собственному значению* $\frac{1}{2}$, *и при этом*

$$\widehat{\rho}\left(T_{0|L_1}, T_{1|L_1}\right) < \frac{1}{2},$$

соответственно

$$\rho_p\left(T_{0|L_1}, T_{1|L_1}\right) < \frac{1}{2},$$

где L_1 *— минимальное подпространство в* $\mathbb{R}^N$, *инвариантное относительно операторов* T_0 *и* T_1 *и содержащее вектор* $v_1' - v_0'$.

Масштабирующая функция принадлежит $C^r(\mathbb{R})$, $1 \leqslant r \leqslant N-1$ (*соответственно принадлежит* W_p^r) *тогда и только тогда, когда существует базис, в котором оба оператора* T_i, $i = 0, 1$, *имеют вид*

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \frac{1}{2} & \ldots & \vdots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & 0 & \vdots & \ldots & \vdots \\ * & \ldots & * & \frac{1}{2^{r-1}} & 0 & \ldots & 0 \\ & * & & & & \widetilde{D}_i & \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

матрица D_i *имеет собственный вектор* v_i^r *с собственным значением* $\dfrac{1}{2^r}$ *и при этом*

$$\widehat{\rho}\left(D_{0|L_r}, D_{1|L_r}\right) < \frac{1}{2^r},$$

соответственно

$$\rho_p\left(D_{0|L_r}, D_{1|L_r}\right) < \frac{1}{2^r},$$

где L_r — *минимальное подпространство в* $\mathbb{R}^{N-r}$, *инвариантное относительно операторов* D_0 *и* D_1 *и содержащее вектор* $v_1^r - v_0^r$.

Пусть r — *максимальное целое число такое, что масштабирующая функция принадлежит* C^r (*соответственно* W_p^r). *Тогда ее гладкость равна*

$$-\log_2 \widehat{\rho}\left(D_{0|L_r}, D_{1|L_r}\right),$$

а для $p < \infty$ *соответственно равна*

$$\min\left\{-\log_2 \rho_p\left(D_0|_{L_r}, D_1|_{L_r}\right),\ 2^{-r-1}\right\}.$$

При $r = N-1$ вновь получаем следствие 3.2.13: масштабирующая функция с носителем $[0, N]$ не может принадлежать пространству C^{N-1}: если она принадлежит W_p^{N-1}, то она совпадает с кардинальным B-сплайном порядка $N-1$.

Для доказательства сошлемся на предложение 5.3.1: если фрактальная кривая

$$v(t) = \Big(\varphi(t), \ldots, \varphi(t+N-1)\Big)^T$$

принадлежит C^{N-1}, то она является полиномиальной, следовательно, φ — кусочно полиномиальная функция степени не выше N с узлами в целых точках. Ее $(N-1)$-я производная кусочно постоянна. Поэтому, если она непрерывна на $\mathbb{R}$, то она — тождественный нуль. Следовательно, φ — полином с компактным носителем, т. е. опять-таки тождественный нуль, получили противоречие. Поэтому $\varphi^{(N-1)}$

не может быть непрерывна. Если же $\varphi^{(N-1)}$ кусочно постоянна (что соответствует случаю $\varphi \in W^{N-1}$), то применяем лемму 3.5.2. $\Diamond$

5.4. Локальная гладкость фрактальных кривых

Характерной особенностью фрактальных кривых является их дробная гладкость. При этом для многих фрактальных кривых локальная гладкость не постоянна и меняется от точки к точке. Напомним, что *показателем Гёльдера непрерывной функции* v в точке $x \in [0,1]$ называется величина

$$\alpha_v(x) = \sup\Big\{\alpha \mid \|v(x) - v(y)\| \leqslant C|x-y|^{\alpha},\ y \in [0,1]\Big\}.$$

Ясно, что $\alpha_v \geqslant \inf\limits_{x} \alpha_v(x)$, причем это неравенство, вообще говоря, строгое. Когда имеет место равенство $\alpha_v = \inf\limits_{x\in[0,1]} \alpha_v(x)$ мы будем говорить, что показатель Гёльдера достигается на отрезке $[0,1]$. Показатель Гёльдера достигается в некоторой точке x, если $\alpha_v = \alpha_v(x)$. Заметим, что в отличие от глобального показателя Гёльдера, локальная гладкость в точке может принимать любые неотрицательные значения, включая $+\infty$, даже если функция не равна константе ни на каком интервале. Гладкость в точке x справа определяется как

$$\alpha_v^+(x) = \sup\big\{\alpha \mid \|v(x) - v(y)\| \leqslant C|x-y|^{\alpha},\ y \geqslant x\big\}.$$

Аналогично определяется гладкость слева $\alpha_v^-(x)$.

Через $(x) = d_1, d_2, \ldots$ обозначим последовательность из нулей и единиц, $x = 0{,}d_1d_2\ldots$ — соответствующее число в двоичной записи. Число $x = 0{,}d_1d_2\ldots$ назовем *нормальным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что для каждого $m > N(\varepsilon)$ среди цифр d_k с номерами $k \in [m, m(1+\varepsilon)]$ найдутся две различные цифры. Таким образом, нормальные числа не могут слишком хорошо приближаться двоично-рациональными. Почти все (в мере Лебега) точки отрезка $[0,1]$ — нормальные. Все рациональные, но не двоично-рациональные, точки — нормальные.

Для данного набора $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и данной последовательности $(x) = d_1, d_2, \ldots$ из единиц и нулей обозначим

$$\widehat{\rho}_x = \widehat{\rho}_x(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) = \limsup_{k\to\infty} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}\|^{1/k}$$

(совместный спектральный радиус вдоль последовательности (x)).

Теорема 5.4.1. *Для любой точки $x = 0{,}d_1d_2\ldots$ имеем*

$$\alpha_v(x) \leqslant -\log_2 \widehat{\rho}_x.$$

Если точка x нормальная, то $\alpha_v(x) = -\log_2 \widehat{\rho}_x$.

Доказательство. Обозначим $a = v_1 - v_0$.

1. Докажем, что $\alpha_v(x) \leqslant -\log_2 \widehat{\rho}_x$. Если $\widehat{\rho}_x = 0$, то доказывать нечего. Считаем, что $\widehat{\rho}_x > 0$. Пусть $(x_k)_{m_k} = d_1, \ldots, d_{m_k}$ — конечные подпоследовательности (x) такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \|\Pi_{x_k}\|^{1/m_k} = \widehat{\rho}_x,$$

где $\Pi_{x_k} = \widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_{m_k}}$. Для любого $\beta \in (0, \widehat{\rho}_x)$ существует такая константа $C(\beta) > 0$, что

$$\|\Pi_{x_k}\| \geqslant C(\beta)\beta^{m_k}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как набор $\{B_0, B_1\}$ неприводим в пространстве A_n, то найдутся конечные последовательности $(y_r)_{l_r}$, $r = 1, \ldots, n$, для которых векторы $\Pi_{y_1}(a), \ldots, \Pi_{y_n}(a)$ линейно независимы. В силу эквивалентности всех норм в $\widetilde{A}_n$ существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $B \in \mathcal{L}(\widetilde{A}_n)$ найдется $l \in \{1, \ldots, n\}$, для которого

$$\|B\Pi_{y_l}(a)\| \geqslant \gamma\|B\|.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|\Pi_{x_k}\Pi_{y_l}(a)\| \geqslant \gamma C(\beta)\beta^{m_k}$$

(l зависит от k). Пусть z_0^k, z_1^k — двоично-рациональные числа, соответствующие последовательностям

$$(x_k y_l 0)_{m_k+l_k+1}, \qquad (x_k y_l 1)_{m_n+l_k+1}$$

соответственно. Для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_0(\varepsilon)$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$C_0(\varepsilon)|z_1^k - z_0^k|^{\alpha_v(x)-\varepsilon} \geqslant \|v(z_1^k) - v(z_0^k)\|.$$

С другой стороны,

$$\|v(z_1^k) - v(z_0^k)\| = \|\Pi_{x_k}\Pi_{y_l}(a)\| \geqslant \gamma C(\beta)\beta^{m_k}.$$

Тогда

$$\log_2 C_0(\varepsilon) + (\alpha_v(x) - \varepsilon)(-m_k - l_k) \geqslant \log_2(\gamma C(\beta)) + m_k \log_2 \beta.$$

При $k \to \infty$ получаем

$$\alpha_v(x) - \varepsilon \leqslant -\log_2 \beta.$$

Теперь при $\varepsilon \to 0$ и $\beta \to \widehat{\rho}_x$ получим требуемое.

2. Докажем, что в нормальных точках $\alpha_v(x) \geqslant -\log_2 \widehat{\rho}_x$. Берем любое $b > \widehat{\rho}_x$. Пусть $x = 0, d_1 d_2 \ldots$ Для любого k имеем

$$\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}\| \leqslant C(b)b^k,$$

Оценим гладкость функции v в точке x справа (гладкость слева оценивается аналогично). Берем произвольное $y > x$, пусть двоичные записи чисел x и y совпадают в первых m разрядах после запятой (возможно, $m = 0$), а цифры в следующем разряде не совпадают. Таким образом, $y = 0{,}d_1 \ldots d_m d'_{m+1} d'_{m+2} \ldots$, причем $d'_{m+1} = 1$, $d_{m+1} = 0$ (так как $y > x$). Пусть в записи числа x после цифры d_{m+1} следует ровно l единиц подряд (возможно, $l = 0$). Таким образом, $d_{m+l+2} = 0$. Пусть также в записи числа y после цифры d'_{m+1} следует ровно r нулей подряд (возможно $r = 0$). Не ограничивая общности, предположим $l \geqslant r$ (случай $l \leqslant r$ разбирается точно так же). Тогда

$$|y - x| \geqslant 2^{-m-r-2}.$$

Для данного k положим $x_k = 0, d_1 \ldots d_k$. Аналогично определяется y_k. По условию $y_{n+1} = y_{m+r+1}$. Положим

$$\Lambda_1 = \Big\{k \geqslant m + r + 2,\ d'_k = 1\Big\}.$$

Тогда

$$\|v(y) - v(y_{m+1})\| = \|v(y) - v(y_{m+r+1})\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k\in\Lambda_1} \|v(y_k) - v(y_{k-1})\| = \sum_{k\in\Lambda_1} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d'_{k-1}} a\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_m} \widetilde{B}_1 \widetilde{B}_0^r\| \cdot \sum_{k\in\Lambda_1} \|\widetilde{B}_{d_{m+r+2}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d'_{k-1}} a\|.$$

Выбрав произвольное $q \in (\widehat{\rho}, 1)$, имеем

$$\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}\| \leqslant C(q) q^k.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{k\in\Lambda_1} \|\widetilde{B}_{d_{m+r+2}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d'_{k-1}} a\|$$

мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем q, следовательно его сумма ограничена некоторой константой C, зависящей только от q. Таким образом,

$$\|v(y) - v(y_{m+1})\| \leqslant C\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_m} \widetilde{B}_1 \widetilde{B}_0^r\|. \tag{5.20}$$

Теперь заменим последовательность нулей в двоичной записи числа y_{m+1} последовательностью единиц: $y_{m+1} = 0{,}d_1 \ldots d_m 011 \ldots$ Учитывая, что $l \geqslant r$ и полагая

$$\Lambda_0 = \Big\{k \geqslant m + r + 2,\ d_k = 0\Big\},$$

имеем

$$\|v(x) - v(y_{m+1})\| \leqslant \sum_{k\in\Lambda_0} \|v(x_k) - v(x_{k-1})\| =$$

$$= \sum_{k\in\Lambda_0} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_{k-1}} a\| \leqslant \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_m} \widetilde{B}_0 \widetilde{B}_1^r\| \times$$

$$\times \sum_{k\in\Lambda_0} \|\widetilde{B}_{d_{m+r+2}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_{k-1}} a\| \leqslant C\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_m} \widetilde{B}_0 \widetilde{B}_1^r\|.$$

Таким образом,

$$\|v(x) - v(y_{m+1})\| \leqslant C\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_m} \widetilde{B}_0 \widetilde{B}_1^r\|. \tag{5.21}$$

По определению, для любого $b > \widehat{\rho}_x$ существует такая константа $C(b) > 0$, что

$$\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}\| \leqslant C(b)\, b^k$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда левая часть неравенства (5.21) оценивается сверху как $C \cdot C(b)\, b^{n+r+1}$. Левая часть неравенства (5.20) оценивается сверху как

$$C\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_m}\| \cdot \|\widetilde{B}_1 \widetilde{B}_0^r\| \leqslant C \cdot C(b)\, C(q)\, b^m q^{r+1}.$$

Складывая (5.21) и (5.20), получаем

$$\|v(x) - v(y)\| \leqslant \|v(x) - v(y_{m+1})\| + \|v(y) - v(y_{m+1})\| \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot C(b) b^m (b^{r+1} + C(q) q^{r+1}).$$

Учитывая, что $|y - x| \geqslant 2^{-m-r-2}$, получаем

$$\frac{\log_2 \|v(x) - v(y)\|}{\log_2 |y - x|} \geqslant -\frac{\log_2 C + \log_2 C(b) + n \log_2 b + \log_2(b^{r+1} + C(q) q^{r+1})}{m + r + 2}.$$

Так как точка x — нормальная, то $r/m \to 0$ при $m \to \infty$, следовательно,

$$\frac{\log_2(b^{r+1} + C(q) q^{r+1})}{m + r + 2} \to 0.$$

Таким образом, при $m \to \infty$ получаем

$$\frac{\log_2 \|v(x) - v(y)\|}{|y - x|} \geqslant -\log_2 b.$$

Устремив b к $\widehat{\rho}_x$, получаем требуемое. ◊

Если операторы $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ невырождены, а последовательность (x) — периодическая с периодом [1] $(d_1 \ldots d_k)$, то $\widehat{\rho}_x = \big(\rho(\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k})\big)^{1/k}$. Поэтому в рациональных точках x локальная гладкость выражается через обычный спектральный радиус.

[1] $(d_1 \ldots d_k)$ — последовательность цифр двоичного разложения.

Предложение 5.4.2. *Пусть операторы* $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_0$ *невырождены. Если* x — *рациональное, но не двоично-рациональное число с периодом* $(d_1 \dots d_k)$, $k \geqslant 2$, *то*

$$\alpha_v(x) = -\frac{1}{k} \log_2 \rho(\widetilde{B}_{d_1} \times \dots \times \widetilde{B}_{d_k}).$$

Если x — *двоично-рациональное, то*

$$\alpha_v^+(x) = -\log_2 \rho(\widetilde{B}_0); \qquad \alpha_v^-(x) = -\log_2 \rho(\widetilde{B}_1).$$

Доказательство. Для не двоично-рациональных чисел утверждение следует из теоремы 5.4.1. Пусть x — двоично-рациональное число. Неравенство

$$\alpha_v^+(x) \leqslant -\log_2 \rho(\widetilde{B}_0)$$

устанавливается точно также, как и при доказательстве теоремы 5.4.1. Докажем обратное неравенство

$$\alpha_v^+(x) \geqslant -\log_2 \rho(\widetilde{B}_0).$$

Оно не следует из теоремы 5.4.1, поскольку число x не является нормальным. Берем любое $b > \rho(\widetilde{B}_0)$. Пусть $x = 0, d_1 d_2 \dots d_n 00\dots$ Для любого k имеем

$$\|\widetilde{B}_{d_1} \times \dots \times \widetilde{B}_{d_k}\| \leqslant C(b) b^k.$$

Для произвольного

$$y \in (x,\, x + 2^{-m-1}), \quad y = 0, d_1 d_2 \dots d_m d_{m+1} \dots,$$

обозначим $\Lambda = \{k \geqslant m+1,\ d_k = 1\}$ и $r = \min \Lambda - m - 1$. Тогда

$$\|v(y) - v(x)\| = \|v(y_{m+r+1}) - v(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k \in \Lambda} \|v(y_k) - v(y_{k-1}\| = \sum_{k \in \Lambda} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \dots \times \widetilde{B}_{d_{k-1}} a\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\widetilde{B}_{d_1} \times \dots \times \widetilde{B}_{d_m} \widetilde{B}_0^r\| \cdot \sum_{k \in \Lambda} \|\widetilde{B}_{d_{m+r+2}} \times \dots \times \widetilde{B}_{d_{k-1}} a\|.$$

Ряд

$$\sum_{k \in \Lambda} \|\widetilde{B}_{d_{m+r+2}} \times \dots \times \widetilde{B}_{d_{k-1}} a\|$$

мажорируется рядом $\sum\limits_{l} C(q)\, q^l$, где $q \in (\widehat{\rho}, 1)$. Таким образом,

$$\|v(y) - v(x)\| \leqslant C \|\widetilde{B}_{d_1} \times \dots \times \widetilde{B}_{d_m} \widetilde{B}_0^r\| \leqslant C_1(b) b^r,$$

где $b > \rho(\widetilde{B}_0)$. Учитывая, что $|y - x| \geqslant 2^{-m-r-1}$, имеем

$$\frac{\log_2 \|v(x) - v(y)\|}{\log_2 |y - x|} \geqslant -\frac{\log_2 C_1(b) + n \log_2 b}{m + r + 1}.$$

Отсюда при $y \to x+0$ (и, следовательно, $r \to \infty$) получаем

$$\frac{\log \|v(x)-v(y)\|}{|y-x|} \geqslant -\log_2 b.$$

Устремив b к $\widehat{\rho}_x$, получаем требуемое.

Равенство $\alpha_v^-(x) = -\log_2 \rho(\widetilde{B}_1)$ устанавливается точно так же, с заменой последовательности нулей на конце двоичной записи x последовательностью единиц. $\Diamond$

Замечание 5.4.3. Условие невырожденности операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ в формулировке предложения 5.4.2 существенно. Если хотя бы один из операторов вырожден, то локальная гладкость может быть различна в разных двоично-рациональных точках.

Замечание 5.4.4. Из теоремы 5.4.1 следует, что неравенство

$$\alpha_v(x) \leqslant -\log_2 \widehat{\rho}_x$$

выполнено во всех точках отрезка $[0,1]$, в то время как обратное неравенство, вообще говоря, — только в нормальных точках. Единственное место в доказательстве, где использовалась нормальность числа x, — неравенства (5.20) и (5.21). Был использован тот факт, что в нормальных точках величины

$$\|\Pi_m \widetilde{B}_1 \widetilde{B}_0^r\|^{\frac{1}{m+r+1}}, \quad \|\Pi_m \widetilde{B}_0 \widetilde{B}_1^r\|^{\frac{1}{m+r+1}}$$

асимптотически эквивалентны при $m \to \infty$ для любого произведения $\Pi_m = \widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_m}$. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда для любого произведения Π_m имеем

$$\lim_{r\to\infty} \|\Pi_m \widetilde{B}_1 \widetilde{B}_0^r\|^{\frac{1}{m+r+1}} = \lim_{r\to\infty} \|\Pi_m \widetilde{B}_0 \widetilde{B}_1^r\|^{\frac{1}{m+r+1}}. \tag{5.22}$$

Необходимым условием для этого будет равенство $\rho(\widetilde{B}_0) = \rho(\widetilde{B}_1)$. Условие это не достаточно, даже если операторы невырождены. Можно сформулировать (довольно громоздкие) достаточные условия в терминах собственных векторов операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$. В дальнейшем мы ограничимся формулой локальной гладкости лишь в нормальных точках.

Замечание 5.4.5. Из доказательства теоремы 5.4.1 следует, что в нормальных точках, в отличие от двоично-рациональных, локальная гладкость одинакова слева и справа.

Из теоремы 5.4.1 можно сделать ряд выводов о распределении точек с данной локальной гладкостью на отрезке $[0,1]$. Здесь нам вновь придется ограничиться случаем невырожденных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$. Иначе множества точек данной локальной гладкости может иметь не столь регулярную структуру (замечание 5.4.11).

Здесь и далее через $\mathcal{D}$ обозначаем множество двоично-рациональных чисел прямой, таким образом, $\mathcal{D} = \left\{ \frac{k}{2^r} \;\middle|\; k, r \in \mathbb{Z},\ r \geqslant 0 \right\}$, $\mathcal{D}_r$ — множество двоично-рациональных чисел порядка r. Иначе говоря,

$$\mathcal{D}_0 = \mathbb{Z}, \quad \mathcal{D}_r = \left\{ \frac{k}{2^r}, \ \ k \text{ нечетно}, \ r \in \mathbb{N} \right\}.$$

Лемма 5.4.6. *Предположим, что операторы $\widetilde{B}_0$ и $\widetilde{B}_1$ невырождены. Тогда для любых $x, y \in [0,1]$ таких, что $2^r x - y \in \mathcal{D}$ при некотором целом r, локальная гладкость функции v в точках x и y одинакова.*

Иными словами, если двоичные записи чисел x и y оканчиваются одной и той же последовательностью нулей и единиц, то $\alpha_v(x) = \alpha_v(y)$.

Доказательство. Из формулы (5.3) следует, что ограничение кривой $v(x)$ на любой отрезок $[2^{-q}k,\, 2^{-q}(k+1)]$ аффинно подобно всей кривой $v(x)$. Именно,

$$v(x) = B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_q} v(2^q x - k)$$

для подходящего произведения $B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_q}$, причем оператор, задающий подобие, невырожден. Следовательно

$$\alpha_v(2^q x - k) = \alpha_v(x),$$

что завершает доказательство. $\Diamond$

Определение 5.4.7. Непустое подмножество отрезка $[0,1]$ назовем 0–1-*множеством*, если вместе с любой своей точкой x оно содержит все точки, двоичные разложения которых оканчиваются той же последовательностью нулей и единиц, что и x.

Иначе говоря, множество обладает свойством 0–1, если принадлежность к нему произвольной точки не зависит ни от какого конечного подмножества цифр в его двоичном разложении. Тогда 0–1-множеством точки x (обозначается $\mathcal{M}_x$) назовем множество всех чисел отрезка $[0,1]$, двоичная запись которых оканчивается той же последовательностью, что и двоичная запись x. Ясно, что $\mathcal{M}_x$ есть наименьшее по включению 0–1-множество, содержащее x. Легко видеть, что

$$\mathcal{M}_x = \{2^r x + p,\ r \in \mathbb{Z},\, p \in \mathcal{D}\} \bigcap [0,1].$$

Любое множество $\mathcal{M}_x$ является классом эквивалентности, поэтому весь отрезок $[0,1]$ разбивается на непересекающиеся 0–1-множества. Каждое 0–1-множество всюду плотно на отрезке $[0,1]$. Кроме того, если оно измеримо по Лебегу, то его мера равна либо 0, либо 1. В литературе этот факт называется «законом нуля и единицы» (см., например, [120]). Он напрямую следует из другого утверждения: если множество $A \in [0,1]$ имеет положительную меру и $\bigl(A + p\bigr) \bigcap [0,1] \subset A$ для любого двоично-рационального p, то A имеет меру 1 (читатель без труда докажет его самостоятельно).

Из леммы 5.4.6 следует, что множество точек, в которых локальная гладкость фрактальной кривой принимает данное значение либо пусто, либо является 0–1-множеством. Рассмотрим теперь локальную гладкость $\alpha_v(x)$ как функцию от x. Эта функция измерима. Если операторы $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ невырождены, то она ограничена почти всюду (так как в этом случае $\widehat{\rho}_x \geqslant \check{\rho} > 0$). Кроме того, все ее множества уровня, т. е. множества

$$\Big\{x \in [0,1] \;\Big|\; \alpha_v(x) \leqslant t\Big\}$$

являются 0–1-множествами. Поскольку измеримые функции, у которых все множества уровня имеют меру 0 или 1 суть константы, показатель $\alpha_v(x)$ почти во всех точках отрезка $[0,1]$ один и тот же. Этот показатель мы будем обозначать α_{av} и называть *средней гладкостью* v. Из теоремы 5.4.1 следует, что существование средней гладкости равносильно такому утверждению: для почти всех $t \in [0,1]$ показатель $\widehat{\rho}_x$ один и тот же. Обозначим этот показатель через $\overline{\rho}$, он известен в эргодической теории как показатель Ляпунова.

Определение 5.4.8. *Показателем Ляпунова линейных операторов* $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ называется величина

$$\overline{\rho} = \lim_{k\to\infty}\Bigg(\prod_{d_1,\ldots,d_k} \|\Pi_k\|\Bigg)^{1/2^k k}. \tag{5.23}$$

Данный предел существует и не зависит от нормы. Кроме того, имеет место следующий факт: для произвольной пары линейных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ предел $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Pi_k\|^{1/k}$ существует и равен $\overline{\rho}$ для почти всех $x \in [0,1)$, где

$$x = 0, d_1, d_2, \ldots, \quad \Pi_k = \widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}$$

(приложение А.6, предложение А.6.7). Обратившись к теореме 5.4.1, получаем

$$\alpha_{av} = -\log_2 \overline{\rho}. \tag{5.24}$$

Какие значения может принимать показатель локальной гладкости для различных x? Обратимся к формуле $\alpha_v(x) = -\log_2 \widehat{\rho}_x$. Очевидно, что $\check{\rho} \leqslant \widehat{\rho}_x \leqslant \widehat{\rho}$ для любого x. В самом деле, переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$\min_{d_1,\ldots,d_k \in \{0,1\}} \|\Pi_k\|^{1/k} \leqslant \left\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}\right\|^{1/k} \leqslant \max_{d_1,\ldots,d_k \in \{0,1\}} \|\Pi_k\|^{1/k},$$

получим требуемое. Следовательно (теорема 5.4.1), неравенство

$$\alpha_v(x) \leqslant -\log_2 \check{\rho}$$

выполнено для всех $x \in [0,1]$. Заметим, что $\check{\rho} > 0$, так как операторы невырождены. Следовательно,

$$-\log_2 \check{\rho} < \infty.$$

С другой стороны, локальная гладкость в любой точке не меньше глобальной гладкости, поэтому

$$\alpha_v(x) \geqslant -\log_2 \widehat{\rho}.$$

Таким образом, значения локальной гладкости во всех точках $x \in [0,1]$ принадлежат конечному отрезку

$$\Big[-\log_2 \widehat{\rho},\ -\log_2 \check{\rho}\Big].$$

Оказывается, что они заполняют весь отрезок, т. е. для каждого $\alpha \in [-\log_2 \widehat{\rho},\ -\log_2 \check{\rho}]$ существует такое $x \in [0,1]$ (а, значит, и 0–1-множество таких точек), что $\alpha_v(x) = \alpha$.

Лемма 5.4.9. *Пусть операторы $\widetilde{B}_0$ и $\widetilde{B}_1$ невырождены, и $\widehat{\rho}$, $\check{\rho}$ — их совместный спектральный радиус и нижний спектральный радиус соответственно. Тогда для каждого числа $a \in [\check{\rho},\ \widehat{\rho}]$ существует нормальная последовательность из нулей и единиц (x) такая, что совместный спектральный радиус вдоль этой последовательности равен a.*

Доказательство. По определению нижнего спектрального радиуса, существует последовательность операторных произведений $\check{\Pi}_k,\ k \in \mathbb{N}$ (длина $\check{\Pi}_k$ равна k), для которой

$$\check{\beta}_k = \|\check{\Pi}_k\|^{1/k} \to \check{\rho} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тогда

$$\left[\rho\left(\check{\Pi}_k\right)\right]^{1/k} \ \to\ \check{\rho}, \quad k \to \infty$$

(напомним, что символом ρ мы обозначаем обычный спектральный радиус). Так как операторы невырождены, то можно считать, что при $k \geqslant 3$ каждое произведение $\check{\Pi}_k$ содержит оба оператора $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$. В противном случае домножим каждое из них справа на $\widetilde{B}_0\widetilde{B}_1$, при этом свойство $\|\check{\Pi}_k\|^{1/k} \to \check{\rho}$ сохранится. Пользуясь леммой А.6.2, берем последовательность произведений $\widehat{\Pi}_k,\ k \in \mathbb{N}$, для которой

$$\widehat{\beta}_k = \left[\rho\left(\widehat{\Pi}_k\right)\right]^{1/k} \to\ \widehat{\rho}, \quad k \to \infty.$$

Вновь можем считать, что при всех достаточно больших k произведение Π_k содержит оба оператора $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$. Если, например, существуют сколь угодно длинные произведения, не содержащие $\widetilde{B}_1$, то

$$\widehat{\rho} = \lim_{k\to\infty} \|\widetilde{B}_0^k\|^{1/k} = \rho(\widetilde{B}_0).$$

Покажем, что существует такое $r \in \{1, \ldots, n\}$, что

$$\left[\rho(\widetilde{B}_0^{k-r}\widetilde{B}_1^r)\right]^{1/k} \to \ \widehat{\rho}$$

при $k \to \infty$. Тогда мы сможем положить

$$\Pi_k = \widetilde{B}_1^r \widetilde{B}_1^{k-r}, \quad k \geqslant r+1.$$

Пусть λ — собственное значение $\widetilde{B}_0$, для которого $|\lambda| = \widehat{\rho}$, u — соответствующий собственный вектор (возможно, комплексный). Обозначим через $L \subset \mathbb{R}^n$ линейную оболочку всех корневых подпространств, соответствующих собственным значениям, по модулю меньшим $\widehat{\rho}$. Ясно, что

$$L = \{v \in \mathbb{R}^n, \ \widetilde{B}_0^k v = o(\widehat{\rho}^k)\}.$$

Так как оператор $\widetilde{B}_1$ невырожденный, то один из векторов $\widetilde{B}_1 u, \ldots, \widetilde{B}_1^n u$ не принадлежит L. Пусть $\widetilde{B}_1^r u \notin L$. Тогда

$$\rho(\widetilde{B}_0^{k-r}\widetilde{B}_1^r) \geqslant C|\lambda|^k$$

для некоторого $C > 0$, что и требовалось.

Теперь будем строить искомую последовательность операторов из произведений $\breve{\Pi}_k, \widehat{\Pi}_k$. Для этого возьмем две произвольные последовательности положительных чисел $\{\breve{\varepsilon}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\widehat{\varepsilon}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, стремящиеся к нулю. Берем произведение $\breve{\Pi}_1$ (оно состоит из одного оператора) и наименьшее натуральное число p_1, для которого

$$\left\|\left(\breve{\Pi}_1\right)^{p_1}\right\|^{1/p_1} \leqslant \max\{a, \breve{\beta}_1\} + \breve{\varepsilon}_1.$$

Такое число обязательно найдется, поскольку

$$\lim_{p\to\infty}\left\|\left(\breve{\Pi}_1\right)^{p}\right\|^{1/p} = \breve{\beta}_1 \leqslant \max\{a, \breve{\beta}_1\} < \max\{a, \breve{\beta}_1\} + \breve{\varepsilon}_1.$$

Тогда началом нашей последовательности будет $\breve{\Pi}_1 \times \ldots \times \breve{\Pi}_1$ (p_1 сомножителей). Конечную последовательность операторов, соответствующую произведению $\breve{\Pi}_k$ мы будем обозначать тем же символом $\breve{\Pi}_k$. Итак, построен первый блок нашей последовательности, состоящий из p_1 операторов. Теперь берем произведение $\widehat{\Pi}_1$ и наименьшее натуральное число q_1, для которого

$$\left\|\left(\breve{\Pi}_1\right)^{p_1}\left(\widehat{\Pi}_1\right)^{q_1}\right\|^{1/(p_1+q_1)} \geqslant \min\{a, \widehat{\beta}_1\} - \widehat{\varepsilon}_1.$$

Такое число обязательно найдется, поскольку

$$\lim_{q\to\infty}\left\|\left(\breve{\Pi}_1\right)^{p_1}\left(\widehat{\Pi}_1\right)^{q}\right\|^{1/(p_1+q)} = \lim_{q\to\infty}\left\|\left(\widehat{\Pi}_1\right)^{q}\right\|^{1/(p_1+q)} =$$

$$= \lim_{q\to\infty}\left\|\left(\widehat{\Pi}_1\right)^{q}\right\|^{1/q} = \widehat{\beta}_1 \ \geqslant \ \min\{a, \widehat{\beta}_1\} \ > \ \max\{a, \breve{\beta}_1\} - \widehat{\varepsilon}_1.$$

Первое равенство в данной цепочке следует из того, что оператор $(\breve{\Pi}_1)^{p_1}$ невырожден, значит,

$$\left\|(\breve{\Pi}_1)^{p_1}(\widehat{\Pi}_1)^{q}\right\| \geqslant \left\|C(\widehat{\Pi}_1)^{q}\right\|$$

для некоторой константы C, не зависящей от q. Построен второй блок последовательности $\widehat{\Pi}_1 \times \ldots \times \widehat{\Pi}_1$, состоящий из q_1 операторов. Третий блок строится аналогично первому, но с использованием $\breve{\Pi}_2, \breve{\beta}_2, \breve{\varepsilon}_2$ вместо $\breve{\Pi}_1, \breve{\beta}_1, \breve{\varepsilon}_1$ соответственно. Третий блок: $\breve{\Pi}_2 \times \ldots \times \breve{\Pi}_2$ (p_2 сомножителя), где p_2-наименьшее натуральное число, для которого

$$\left\|(\breve{\Pi}_1)^{p_1}(\widehat{\Pi}_1)^{q_1}(\breve{\Pi}_2)^{p_2}\right\|^{1/(p_1+q_1+2p_2)} \leqslant \max\{a, \breve{\beta}_2\} + \breve{\varepsilon}_2.$$

Такое число существует, поскольку

$$\lim_{p\to\infty}\left\|(\breve{\Pi}_1)^{p_1}(\widehat{\Pi}_1)^{q_1}(\breve{\Pi}_2)^{p}\right\|^{1/(p_1+q_1+2p)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{p\to\infty}\left\|(\breve{\Pi}_1)^{p_1}(\widehat{\Pi}_1)^{q_1}\right\|^{1/(p_1+q_1+2p)}\left\|(\breve{\Pi}_2)^{p}\right\|^{1/(p_1+q_1+2p)} =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left\|(\breve{\Pi}_2)^{p}\right\|^{1/(p_1+q_1+2p)} = \lim_{p\to\infty}\left\|(\breve{\Pi}_2)^{p}\right\|^{1/(2p)} = \breve{\beta}_2 <$$

$$< \max\{a, \breve{\beta}_2\} + \breve{\varepsilon}_2.$$

Четвертый блок — $\widehat{\Pi}_2 \times \ldots \times \widehat{\Pi}_2$ (q_2 сомножителя), q_2 — наименьшее натуральное число, для которого

$$\left\|(\breve{\Pi}_1)^{p_1}(\widehat{\Pi}_1)^{q_1}(\breve{\Pi}_2)^{p_2}(\widehat{\Pi}_2)^{q_2}\right\|^{1/(p_1+q_1+2p_2+2q_2)} \geqslant \min\{a, \widehat{\beta}_2\} - \widehat{\varepsilon}_2.$$

Существование такого числа доказывается так же, как для второго блока. Продолжая построение, мы в результате получаем последовательность

$$(x) = \breve{\Pi}_1^{p_1} \times \ldots \times \breve{\Pi}_k^{p_k}\widehat{\Pi}_k^{q_k} \times \ldots$$

(через Π^m обозначаем последовательность $\Pi \times \ldots \times \Pi$ — m раз). Эта последовательность нормальна. Докажем, что $\widehat{\rho}_x = a$.

1. Покажем, что

$$\limsup_{m\to\infty}\|\widetilde{B}_{x_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\|^{1/m} \geqslant a.$$

Для этого возьмем последовательность

$$m_k = p_1 + q_1 + \ldots + p_k + q_k,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\|\widetilde{B}_{x_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_{m_k}}\|^{1/m_k} = \|\breve{\Pi}_1^{p_1} \times \ldots \times \breve{\Pi}_k^{p_k}\widehat{\Pi}_k^{q_k}\|^{1/m_k},$$

а это по построению не меньше, чем $\min\{a, \widehat{\beta}_k\} - \widehat{\varepsilon}_k$. Таким образом

$$\limsup_{m\to\infty} \|\widetilde{B}_{x_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\|^{1/m} \geqslant \limsup_{k\to\infty} \|\widetilde{B}_{x_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_{m_k}}\|^{1/m_k} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty} \Big[\min\{a, \widehat{\beta}_k\} - \widehat{\varepsilon}_k\Big] =$$

(так как $\widehat{\varepsilon}_k \to 0$, $\widehat{\beta}_k \to \widehat{\rho}$)

$$= \min\{a, \widehat{\rho}\} = a.$$

2. Покажем, что

$$\limsup_{m\to\infty} \|\widetilde{B}_{x_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\|^{1/m} \leqslant a.$$

Везде далее будем обозначать

$$\Pi_m = \widetilde{B}_{x_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}.$$

Кроме того, обозначим $b = \max\{1, \|\widetilde{B}_0\|, \|\widetilde{B}_1\|\}$. Нам придется рассмотреть два случая.

а). Последний оператор $\widetilde{B}_{x_m}$ принадлежит произведению $\widehat{\Pi}_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Иначе говоря,

$$p_1 + q_1 + \ldots + kp_k \ < \ m \ \leqslant \ p_1 + q_1 + \ldots + kp_k + kq_k.$$

Обозначим $n_k = p_1 + q_1 + \ldots + kp_k$. Заметим, что

$$\|\Pi_{n_k}\|^{1/n_k} \leqslant \max\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k.$$

Кроме того $n_k \geqslant k^2$, поскольку

$$n_k \geqslant 2 + 2\cdot 2 + \ldots + 2(k-1) + k = k^2.$$

Предположим сначала, что $m \leqslant n_k + q_k$, т. е. $\widetilde{B}_{x_m}$ принадлежит первому произведению в блоке

$$\widehat{\Pi}_k \times \ldots \times \widehat{\Pi}_k.$$

Тогда

$$\Big\|\widetilde{B}_{x_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\Big\|^{1/m} = \Big\|\Pi_{n_k}\widetilde{B}_{x_{n_k+1}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\Big\|^{1/m} \leqslant$$

$$\leqslant \|\Pi_{n_k}\|^{1/m} \Big\|\widetilde{B}_{x_{n_k+1}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\Big\|^{1/m} \leqslant \Big[\|\Pi_{n_k}\|^{1/n_k}\Big]^{n_k/m} \big(b^{m-n_k}\big)^{1/m} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\max\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k\Big]^{n_k/m} b^{(m-n_k)/m}.$$

Заметим, что $m - n_k \leqslant k$, а с другой стороны $m \geqslant k^2$, поэтому

$$b^{(m-n_k)/m} \leqslant b^{1/k} \ \to \ 1, \quad k \to \infty.$$

Аналогично, $1-\dfrac{1}{k} \leqslant n_k/m \leqslant 1$, а, кроме того,

$$\max\{a, \breve{\beta}_k\} + \breve{\varepsilon}_k \to a, \quad k \in \infty.$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\Big[\max\{a, \breve{\beta}_k\} + \breve{\varepsilon}_k\Big]^{n_k/m} b^{(m-n_k)/m} \leqslant a+\varepsilon$$

для всех достаточно больших k. Таким образом, для данного случая

$$\Big\|\widetilde{B}_{x_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\Big\|^{1/m} \leqslant a+\varepsilon$$

при больших k.

Теперь предположим, что $m > n_k + q_k$. Пусть s — наибольшее целое число, для которого $m > n_k + sq_k$, т. е. $\widetilde{B}_{x_m}$ принадлежит $(s+1)$-му произведению в блоке $\widehat{\Pi}_k \times \ldots \times \widehat{\Pi}_k$. По построению последовательности (x) имеем

$$\|\Pi_{n_k+sq_k}\|^{1/(n_k+sq_k)} < \min\{a, \breve{\beta}_k\} + \breve{\varepsilon}_k$$

(поскольку обратное неравенство было бы выполнено только если $\widehat{\Pi}_s$ — последнее произведение в блоке, а оно не последнее). Тогда

$$\|\Pi_m\|^{1/m} = \Big\|\Pi_{n_k+sq_k}\widetilde{B}_{x_{n_k+sq_k+1}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\Big\|^{1/m} \leqslant$$
$$\leqslant \|\Pi_{n_k+sq_k}\|^{1/m} \Big\|\widetilde{B}_{x_{n_k+sq_k+1}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\Big\|^{1/m} \leqslant$$
$$\leqslant \Big[\min\{a, \breve{\beta}_k\} + \breve{\varepsilon}_k\Big]^{(n_k+sq_k)/m} b^{(m-n_k-sq_k)/m}.$$

Поскольку

$$m \geqslant k^2 \quad \text{и} \quad m - n_k - sq_k \leqslant k,$$

имеем

$$b^{(m-n_k-sq_k)/m} \leqslant b^{1/k}.$$

С другой стороны

$$\min\{a, \breve{\beta}_k\} + \breve{\varepsilon}_k \to a, \quad k \to \infty,$$

а, кроме того, $1-\dfrac{1}{k} \leqslant (n_k+sk)/m \leqslant 1$. Следовательно,

$$[\min\{a, \rho\beta_k\} + \rho\varepsilon_k]^{(n_k+sk)/m} b^{(m-n_k-sk)/m} \leqslant a+\varepsilon$$

для достаточно больших k. Таким образом, для тех значений m, для которых имеет место случай а) верхний предел $\|\Pi_m\|^{1/m}$ не превосходит a.

б). Последний оператор $\widetilde{B}_{x_m}$ принадлежит произведению $\breve{\Pi}_{k+1}$ для некоторого k. Иначе говоря $n_k + kq_k < m \leqslant n_{k+1}$. Пусть s — наибольшее число, для которого $n_k + kq_k + s(k+1) < m$. По доказанному в пункте а) имеем

$$\|\Pi_{n_k+kq_k}\|^{1/(n_k+kq_k)} \leqslant a + \varepsilon$$

для всех достаточно больших k. Если $s = 0$, то

$$\|\Pi_m\|^{1/m} = \left\|\Pi_{n_k+kq_k}\widetilde{B}_{x_{n_k+kq_k+1}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\right\|^{1/m} \leqslant$$
$$\leqslant (a+\varepsilon)^{(n_k+kq_k)/m}\, b^{(m-n_k-kq_k)/m}.$$

Так как

$$(m - n_k - kq_k)/m \leqslant k/m < 1/k; \quad 1 - 1/k \leqslant (n_k + kq_k)/m \leqslant 1,$$

то получаем, что для достаточно больших k

$$\|\Pi_m\|^{1/m} \leqslant a + 2\varepsilon.$$

Если же $s \geqslant 1$, то имеем

$$\|\Pi_m\|^{1/m} = \|\Pi_{n_k+kq_k}\breve{\Pi}^{s}_{k+1}\widetilde{B}_{x_{n_k+q_k k+s(k+1)+1}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\|^{1/m} \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\Pi_{n_k+kq_k}\breve{\Pi}^{s}_{k+1}\right\|^{1/m} \|\widetilde{B}_{x_{n_k+q_k+s(k+1)+1}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\|^{1/m}.$$

Второй множитель оценим как и ранее:

$$\left\|\widetilde{B}_{x_{n_k+q_k k+s(k+1)+1}} \times \ldots \times \widetilde{B}_{x_m}\right\|^{1/m} \leqslant b^{(m-n_k+q_k k+s(k+1))/m} \leqslant b^{1/k}.$$

Для того чтобы оценить первый множитель, воспользуемся следующим неравенством: для любых операторов A, B и для любых $r, p \geqslant 1$ имеем

$$\|AB\|^{1/(r+p)} \leqslant \max\left\{\|A\|^{1/r}, \|B\|^{1/p}\right\}.$$

Для доказательства полагаем $\alpha = \|A\|^{1/r}$, $\beta = \|B\|^{1/p}$, и тогда

$$\ln\|AB\|^{1/(r+p)} \leqslant \frac{r}{r+p}\,\ln\alpha + \frac{p}{r+p}\,\ln\beta \leqslant \max\{\ln\alpha,\ \ln\beta\}.$$

Итак,

$$\left\|\Pi_{n_k+kq_k}\breve{\Pi}^{s}_{k+1}\right\|^{1/m} =$$
$$= \left[\left\|\Pi_{n_k+kq_k}\breve{\Pi}^{s}_{k+1}\right\|^{1/(n_k+q_k k+s(k+1))}\right]^{(n_k+q_k k+s(k+1))/m} \leqslant$$
$$\leqslant \max\left\{\|\Pi_{n_k+kq_k}\|^{1/(n_k+q_k k)},\ \left\|\breve{\Pi}^{s}_{k+1}\right\|^{1/(s(k+1))}\right\}^{(n_k+q_k k+s(k+1))/m}.$$

Имеем, таким образом, максимум из двух величин. Первая, как мы отмечали, не превосходит $a+\varepsilon$ (для больших k). Вторую можно оценить сверху так:

$$\left\|\breve{\Pi}_{k+1}^{s}\right\|^{1/s(k+1)} \leqslant \left\|\breve{\Pi}_{k+1}\right\|^{s\cdot\frac{1}{s(k+1)}} = \left\|\breve{\Pi}_{k+1}\right\|^{1/(k+1)} = \breve{\beta}_k.$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} \breve{\beta}_k = \breve{\rho} \leqslant a,$$

то для достаточно больших k эта величина также не превосходит $a+\varepsilon$. Так что наш максимум при больших k не превосходит $a+\varepsilon$. Таким образом,

$$\left\|\Pi_{n_k+kq_k}\breve{\Pi}_{k+1}^{s}\right\|^{1/m} \leqslant (a+\varepsilon)^{(n_k+q_k k+s(k+1))/m}$$

и, следовательно,

$$\|\Pi_m\|^{1/m} \leqslant (a+\varepsilon)^{(n_k+q_k k+s(k+1))/m} b^{1/k}.$$

Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} b^{1/k} = 1.$$

Заметим теперь, что

$$m-(k+1) \ \leqslant\ n_k+q_k k+s(k+1) \ \leqslant\ m,$$

так что для степени имеем оценку

$$1-\frac{k+1}{m} \leqslant \Big(n_k+q_k k+s(k+1)\Big)/m \leqslant 1.$$

Поскольку

$$m \ \geqslant\ n_k \ +\ q_k k \ \geqslant n_k+k \ \geqslant\ k^2+k = k(k+1),$$

получаем

$$1-\frac{1}{k} \leqslant \Big(n_k+q_k k+s(k+1)\Big)/m \leqslant 1,$$

значит, степень стремится к единице с ростом k. Следовательно, для всех достаточно больших k имеем

$$\|\Pi_m\|^{1/m} \leqslant a+2\varepsilon.$$

Итак, для всех достаточно больших m, для которых имеет место случай б), верно

$$\|\Pi_m\|^{1/m} \leqslant a+2\varepsilon.$$

Устремив ε к нулю, получаем, что для таких m верхний предел величины $\|\Pi_m\|^{1/m}$ не превосходит a. Таким образом, $\widehat{\rho}_x = a$. Лемма доказана. $\Diamond$

Соберем полученные результаты о распределении точек локальной гладкости в следующей теореме.

Теорема 5.4.10. *Пусть операторы $\widetilde{B}_0$ и $\widetilde{B}_1$ невырождены, и $\widehat{\rho}$, $\breve{\rho}$ — их совместный спектральный радиус и нижний спектральный радиус соответственно. Тогда*

$$\Big\{\alpha_v(x),\ x \in [0,1]\Big\} = [-\log_2 \widehat{\rho},\ -\log_2 \breve{\rho}].$$

Для каждого α из этого отрезка множество точек x, для которых $\alpha_v(x) = \alpha$ является непустым 0–1-множеством, в частности, оно всюду плотно на отрезке $[0,1]$. Для $\alpha_{av} = -\log \overline{\rho}$, где $\overline{\rho}$ — показатель Ляпунова, это множество имеет полную меру на $[0,1]$, для всех остальных значений α — меру нуль.

Замечание 5.4.11. Теоремы 5.1.4 и 5.4.1, дающие формулы для глобальной и локальной гладкости фрактальных кривых, верны при самых общих предположениях на операторы $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$. Совместный спектральный радиус должен быть строго меньше единицы (необходимое условие для непрерывности) и сумма операторов $\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1$ должна иметь собственное значение 1 (для выполнения перекрестного условия $B_0 v_1 = B_1 v_0$.) Эти условия выполнены всегда, когда непрерывная фрактальная кривая существует. С другой стороны, утверждения о распределении локальной гладкости (предложение 5.4.2 и теорема 5.4.10) верны, вообще говоря, только для невырожденных операторов.

В гл. 7 все эти результаты будут применены к масштабирующим функциям и всплескам. Однако для этого нужно будет доказать, что операторы T_0, T_1 (определенные формулой (5.11)) невырождены на пространстве V. Кроме того, для оценки модуля непрерывности (теорема 5.1.4, неравенство (5.6)) нужна неприводимость семейства T_0, T_1 на этом пространстве. Этим мы займемся в разделе 6.3. Пока же ограничимся тремя классическими примерами фрактальных кривыми.

5.5. Примеры

Пример 5.5.1 (кривая биномиального распределения). $A_n = \mathbb{R}$, $B_0 x = \lambda x$ — сжатие с коэффициентом λ относительно нуля, $B_1 x = (1-\lambda)x + \lambda$ — сжатие с коэффициентом $(1-\lambda)$ относительно единицы, $\lambda \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$. Операторы $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ коммутируют, поэтому

$$\widehat{\rho} = \max\{\rho(\widetilde{B}_0), \rho(\widetilde{B}_1)\} = \max\{\lambda,\ 1-\lambda\} = \lambda,$$

$$\widehat{\rho} = \min\{\lambda,\ 1-\lambda\} = 1-\lambda.$$

Таким образом,

$$\alpha_v = -\log_2 \lambda.$$

Положим

$$r(x) = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} d_j$$

— верхняя плотность единиц в последовательности (x). Так как

$$\widehat{\rho}_x = (1-\lambda)^{r(x)}\lambda^{1-r(x)},$$

то (теорема 5.2.2)

$$\alpha_v(x) = -r(x)\log_2(1-\lambda) - (1-r(x))\log_2\lambda$$

в каждой нормальной точке x. Так как $\rho(\widetilde{B}_0) \neq \rho(\widetilde{B}_1)$, то (замечание 5.4.4) формула локальной гладкости не распространяется на все точки $x \in [0,1]$. Гладкость в рациональных точках определяется из предложения 5.4.2, в частности, в двоично-рациональных точках гладкость слева равна $-\log_2(1-\lambda)$, а справа равна $-\log_2\lambda$. Значения локальной гладкости заполняют отрезок

$$[-\log_2\widehat{\rho},\ -\log_2\check{\rho}] = [-\log_2\lambda,\ -\log_2(1-\lambda)].$$

Для почти всех x гладкость равна

$$\alpha_{av} = -\log_2\widehat{\rho} = -\log_2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\,.$$

Заметим, что, $\alpha_{av} > 1$, в частности, функция $v(x)$ чисто сингулярна. Легко видеть, что

$$\rho_p = 2^{-1/p}(\lambda^p + (1-\lambda)^p)^{1/p}$$

для любого $p \in [1,+\infty)$. Поэтому из теоремы 5.2.2 заключаем, что

$$\alpha_{v,p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\log_2\Big(\lambda^p + (1-\lambda)^p\Big).$$

На отрезке $[0,1]$ функция $v(x)$ представляет функцию распределения ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k 2^{-k}$, где $\{\varepsilon_k\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $P\{\varepsilon_k = 0\} = \lambda$, $P\{\varepsilon_k = 1\} = 1-\lambda$. Обобщенная производная функции v, т.е. плотность распределения, задает так называемую *биномиальную меру на отрезке* $[0,1]$ (см., например, [123]).

Пример 5.5.2 (кривая Кох). $A_n = \mathbb{R}^2$, B_0, B_1 — операторы подобия:

$$\widetilde{B}_0 = \frac{1}{2\cos\gamma}\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\ \sin\gamma & -\cos\gamma\end{pmatrix}; \quad \widetilde{B}_1 = \frac{1}{2\cos\gamma}\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma\\ -\sin\gamma & -\cos\gamma\end{pmatrix},$$

где $\gamma \in \big(0,\ \frac{\pi}{4}\big)$. При этом начало координат является неподвижной точкой оператора B_0, а точка $(1,\,0)^T$ — неподвижной точкой оператора B_1. В отличие от предыдущего примера, операторы $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ не коммутируют. Однако каждый из них является композицией ортогонального преобразования и сжатия с коэффициентом $\dfrac{1}{2\cos\gamma}$. Следовательно, $\widehat{\rho}_x = \dfrac{1}{2\cos\gamma}$ для любого $x \in [0,1]$. В частности, $\widehat{\rho} = \overline{\rho} = \check{\rho} = \dfrac{1}{2\cos\gamma}$. Условие (5.22) из замечания 5.4.4 выполнено, следовательно, гладкость в любой точке $x \in [0,1]$ вычисляется по формуле $\alpha_v(x) = -\log \widehat{\rho}_x$. Таким образом, гладкость кривой Коха во всех точках одинакова и равна $1 + \log_2 \cos\gamma$. При уменьшении γ от $\frac{\pi}{4}$ до 0 гладкость кривой увеличивается от $\frac{1}{2}$ до 1. В частности, при $\gamma = \pi/6$ имеем $\alpha_v = \frac{1}{2}\log_2 3$. Поскольку ρ_p также равен $\frac{1}{2\cos\gamma}$, то гладкость кривой Коха во всех пространствах $L_p(\mathbb{R})$ одинакова и равна $1 + \log_2 \cos\gamma$. Так как набор операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ неприводим, то из теорем 5.1.4 и 5.2.2 следует, что $\omega(v,t) \asymp \omega(v,t)_p \asymp t^{1+\log_2\cos\gamma}$.

П р и м е р 5.5.3 (кривые де Рама). $A_n = \mathbb{R}^2$, операторы B_0, B_1 имеют следующие линейные части:

$$\widetilde{B}_0 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega & 1-2\omega \end{pmatrix}; \quad \widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1-2\omega & \omega \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

где $\omega \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. При этом оператор B_0 имеет неподвижную точку $(0,-1)^T$, а оператор B_1 — неподвижную точку $(1,0)^T$. В отличие от предыдущих примеров операторы $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ не являются композициями ортогональных преобразований и сжатий, что значительно осложняет исследование кривой. Тем не менее, можно доказать (см. [120]), что в этом случае

$$\widehat{\rho} = \max\left\{\rho(\widetilde{B}_0), \sqrt{\rho(\widetilde{B}_0\widetilde{B}_1)}\right\}; \quad \check{\rho} = \min\left\{\rho(\widetilde{B}_0), \sqrt{\rho(\widetilde{B}_0\widetilde{B}_1)}\right\}.$$

При этом

$$\rho(\widetilde{B}_0) = \rho(\widetilde{B}_1) = \begin{cases} 1-2\omega, & \text{если} \quad \omega \leqslant \frac{1}{3}; \\ \omega, & \text{если} \quad \omega \geqslant \frac{1}{3}, \end{cases}$$

$$\sqrt{\rho(\widetilde{B}_0\widetilde{B}_1)} = \frac{\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}}{2}.$$

Таким образом, глобальная гладкость α_v, а так же границы для локальной гладкости $-\log_2 \widehat{\rho}$ и $-\log_2 \check{\rho}$, явно вычисляются для каждого ω. При изменении ω от 0 до $\frac{1}{4}$ показатель α_v монотонно возрастает от 0 до 1, затем монотонно убывает до точки $\omega = \frac{4+\sqrt{2}}{14} = 0{,}3867\ldots$, в которой $\alpha_v = 0{,}8706\ldots$, далее вновь монотонно возрастает, и при $\omega \to 0{,}5$ имеем $\alpha_v \to 1$. Таким образом, только при $\omega = \frac{1}{4}$ гладкость равна 1 (в этом случае кривая де Рама является параболой), при остальных ω имеем $\alpha_v < 1$. Более того, из теоремы 5.4.10 следует, что $\alpha_v(x) = \alpha_v$ на всюду плотном множестве x, следовательно, ни при каком $\omega \neq \frac{1}{4}$ кривая де Рама не является кусочно-дифференцируемой.

Для всех $\omega \neq \frac{1}{4}$ имеем $\breve{\rho} \neq \widehat{\rho}$, следовательно, значения локальной гладкости заполняют отрезок. Локальная гладкость ищется по формуле $\alpha_v(x) = -\log_2 \widehat{\rho}_x$, которая верна для всех точек x, а не только в нормальных (можно показать, что условие (5.22) в данном случае выполнено при любом ω). На практике неясно, как вычислять локальную гладкость в произвольной точке; во всех рациональных точках она эффективно вычисляется с помощью предложения 5.4.2. Из формул для $\breve{\rho}$ и $\widehat{\rho}$ следует, что при $\omega \leqslant \frac{1}{4}$ наименьшая локальная гладкость достигается в двоично-рациональных точках x, а наибольшая — в точках вида $x = \frac{p}{3 \cdot 2^k}$ ($p \neq 0 \pmod 3$), т. е. в рациональных точках с периодом (01). При $\omega > \frac{1}{4}$ все наоборот: наименьшая гладкость — в точках вида $x = \frac{p}{3 \cdot 2^k}$, а наибольшая — в двоично-рациональных точках. Заметим также, что в двоично-рациональных точках гладкости с двух сторон одинаковы. Средняя гладкость α_{av} удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{1}{4} \log_2\bigl(\omega(1-2\omega)\bigr) \leqslant \alpha_{av} \leqslant -\frac{1}{3} \log_2\bigl(\omega(1-2\omega)\bigr)$$

(см. [120]), откуда, в частности, следует, что при $\omega \to 0$ и при $\omega \to \frac{1}{2}$ средняя гладкость стремится к $+\infty$. Для показателя Ляпунова операторов (5.25) существует интегральная формула, позволяющая приближенно вычислять среднюю гладкость α_{av} при любом ω [120]. В работе [124] исследовалась хаусдорфова размерность множества точек x, в которых локальная гладкость принимает заданные значения (так называемая мультифрактальная размерность).

Глава 6

ФАКТОРИЗАЦИЯ МАСШТАБИРУЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Операторы, соответствующие чистой маске

Пусть дано масштабирующее уравнение с маской

$$\mathbf{m}_0(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} c_k z^k,$$

при этом $\sum\limits_k c_k = 2$, $c_0 c_N \neq 0$. Полиному $\mathbf{m}_0(z)$ соответствует пара линейных операторов T_0, T_1, действующих в $\mathbb{R}^N$ и определенных своими $N \times N$-матрицами по формуле (5.11). Напомним, что пара чисел $\pm a \in \mathbb{C}$ называется парой симметричных корней $\mathbf{m}_0$, если $\mathbf{m}_0(a) = \mathbf{m}_0(-a) = 0$. Циклическое множество $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ называется циклом полинома $\mathbf{m}_0$, если $\mathbf{m}_0(-\mathbf{b}) = 0$; цикл $\mathbf{b} = \{1\}$ называется тривиальным, прочие — нетривиальными. Маску $\mathbf{m}_0$ назовем *чистой*, если она не имеет ни симметричных корней, ни циклов (в том числе — тривиальных).

Теорема 6.1.1. *Если маска $\mathbf{m}_0$ чистая, то линейные операторы T_0, T_1 невырождены и не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств.*

Обратное также верно, даже в более сильном смысле. Это следует из предложений 6.1.2 и 6.1.4, которые доказываются ниже. Теорема 6.1.1 является следствием двух этих предложений. Везде в этой главе мы обозначаем через $[z]$ вектор $\left(1, z, \ldots, z^{N-1}\right)^T \in \mathbb{R}^N$, где $z \neq 0$ — произвольное комплексное число.

Предложение 6.1.2. *Если маска $\mathbf{m}_0$ не имеет симметричных корней, то операторы T_0, T_1 невырождены. Если $\pm a$ — симметричные корни $\mathbf{m}_0$, то оба оператора вырождены и $T_0^*[\bar{a}^2] = T_1^*[\bar{a}^2] = 0$.*

Доказательство. Положим

$$p_0(z) = \sum_k \bar{c}_{2k} z^k \quad \text{и} \quad p_1(z) = \sum_k \bar{c}_{2k+1} z^k.$$

Если $\pm a$ — симметричные корни $\mathbf{m}_0$, то $p_0(\bar{a}^2) = p_1(\bar{a}^2) = 0$. Следовательно,

$$T_0^*[\bar{a}^2] = \big(p_0(\bar{a}^2), \bar{a}^2 p_1(\bar{a}^2), \bar{a}^2 p_0(\bar{a}^2), \ldots\big)^T = 0$$

и, аналогично, $T_1^*[\bar{a}^2] = 0$.

Предположим теперь, что оператор T_0^* невырожден. Покажем, что $\mathbf{m}_0$ имеет симметричные корни (все рассуждения с оператором T_1^* совершенно аналогичны). Пусть $T_0^* u = 0$ для некоторого ненулевого вектора $u = (u_1, \ldots, u_N)^T$. Умножая u на строчки матрицы T_0^* с нечетными номерами, получим

$$\sum_{s=0}^{l} \bar{c}_{2s} u_{s+j} = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, \left[\frac{N+1}{2}\right],$$

где l — наибольшее число, для которого $c_{2l} \neq 0$. Таким образом, последовательность $\{u_k\}$ удовлетворяет разностному уравнению с коэффициентами $\bar{c}_0, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_{2l}$. Общее решение этого уравнения дается следующей формулой: если $l = 0$, то $u_k = 0$, если же $l > 0$, то

$$u_k = \sum_{\nu,\, r_\nu} A_{\nu, r_\nu} k^{r_\nu - 1} \nu^k,$$

где ν — корни полинома $p_0(z)$, и целые числа r_ν принимают значения от 1 до кратностей соответствующих корней, A_{ν, r_ν} — некоторые константы. Данная формула верна для всех u_k, участвующих в разностном уравнении т. е. для $k = 1, \ldots, l + \left[\frac{N+1}{2}\right]$. Теперь умножим u на четные строки матрицы T_0^* и получаем

$$\sum_{s=l_1}^{l_2} \bar{c}_{2s+1} u_{s+j+1} = 0$$

для $j = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]$, где l_1 и l_2 — соответственно наименьшее и наибольшее числа, для которых $c_{2l_1+1} c_{2l_2+1} \neq 0$ (если $c_{2s+1} = 0$ для всех s, то $\mathbf{m}_0(z)$, очевидно, имеет симметричные корни). Из данного разностного уравнения заключаем, что $u_k = 0$, если $l_1 = l_2$, и $u_k = \sum\limits_{\mu,\, r_\mu} B_{\mu, r_\mu} k^{r_\mu - 1} \mu^k$, если $l_1 < l_2$, где μ — корни полинома $p_1(z)$. Эта формула верна для $k = l_1 + 2, \ldots, l_2 + \left[\frac{N}{2}\right] + 1$. Итак, первая формула выполняется для $l + \left[\frac{N+1}{2}\right]$ значений k, вторая формула — для $l_2 + \left[\frac{N}{2}\right] - l_1$ значений k. Поскольку $\left[\frac{N+1}{2}\right] + \left[\frac{N}{2}\right] = N$, имеем

$$l + \left[\frac{N+1}{2}\right] + \left(l_2 + \left[\frac{N}{2}\right] - l_1\right) - N = l + l_2 - l_1.$$

Если это нуль, то $l = 0$ и $l_1 = l_2$ и, следовательно, $u_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, N$, что противоречит предположению $u \neq 0$. Если же $l + l_2 -$

$-\, l_1 > 0$, то, по крайней мере, $l + l_2 - l_1$ последовательных элементов из $\{u_k\}$ удовлетворяют обеим формулам, т. е.

$$\sum_{\nu,\, r_\nu} A_{\nu, r_\nu} k^{r_\nu - 1} \nu^k = \sum_{\mu,\, r_\mu} B_{\mu, r_\mu} k^{r_\mu - 1} \mu^k.$$

Получили систему из, как минимум, $l + l_2 - l_1$ однородных линейных уравнений с переменными A_{ν, r_ν}, B_{μ, r_μ}. Число переменных равно суммарному числу ненулевых корней (считая с кратностью) полиномов p_0 and p_1. Полином p_0 имеет l корней, полином p_1 имеет $l_2 - l_1$ корней. Таким образом, число переменных равно $l + l_2 - l_1$, что не превосходит числа уравнений. Однако система имеет нетривиальное решение, поэтому она должна быть вырождена. Следовательно (приложение A.18, лемма A.18.1), среди множества чисел ν и μ есть равные. Таким образом, полиномы p_0 и p_1 имеют общий корень. Обозначим этот корень через z. Тогда $\pm\sqrt{\overline{z}}$ — пара симметричных корней $\mathbf{m}_0$. $\Diamond$

Замечание 6.1.3. Можно доказать, что ядра операторов T_0^*, T_1^* всегда совпадают. Более того, не только ядра этих операторов, но и все их корневые подпространства $E_i^k = \operatorname{Ker}\left([T_i^*]^k\right)$, $i = 0, 1$, также совпадают.

Теперь займемся общими собственными подпространствами. Если $\mathbf{m}_0$ имеет симметричные корни $\pm a$, то операторы T_0^*, T_1^* имеют общий вектор $[\overline{a}^{\,2}]$ в своих ядрах, следовательно, операторы T_0, T_1 имеют общую собственную гиперплоскость $[\overline{a}^{\,2}]^\perp$. Более того, каждый из них переводит все пространство $\mathbb{R}^N$ в эту гиперплоскость: $\operatorname{Im} T_i \subset [\overline{a}^{\,2}]^\perp$, $i = 0, 1$. Итак, если маска имеет симметричные корни, то набор T_0, T_1 приводим. Предположим теперь, что симметричных корней нет.

Предложение 6.1.4. *Предположим, что маска* $\mathbf{m}_0$ *не имеет симметричных корней. Тогда*

а) *если* $\mathbf{m}_0$ *имеет цикл* $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, *то операторы* T_0^*, T_1^* *имеют общее собственное подпространство* $U_{\mathbf{b}} = \operatorname{span}\left\{[\bar{b}_k],\ k = 1, \ldots \ldots, n\right\}$ *(и, следовательно,* T_0, T_1 *имеют общее собственное подпространство* $U_{\mathbf{b}}^\perp$*). Операторы* T_i^*, $i = 0, 1$, *на этом подпространстве циклические*:

$$T_0^*[\overline{b}_{k+1}] = \overline{\mathbf{m}_0(b_k)}[\overline{b}_k]; \quad T_1^*[\overline{b}_{k+1}] = \frac{1}{\overline{b}_k}\overline{\mathbf{m}_0(b_k)}[\overline{b}_k], \quad k = 1, \ldots, n; \tag{6.1}$$

б) *в каждом общем собственном подпространстве операторов* T_0^*, T_1^* *содержится подпространство* $U_{\mathbf{b}} = \operatorname{span}\left\{[\bar{b}_k],\ k = 1, \ldots, n\right\}$, *где* $\mathbf{b}$ *— цикл маски* $\mathbf{m}_0$; *операторы* T_i^*, $i = 0, 1$, *на этом подпространстве действуют по формуле* (6.1). *В частности, если* $\mathbf{m}_0$ *не имеет циклов, то пара операторов* T_0, T_1 *неприводима.*

Доказательство предложения основано на двух леммах.

Лемма 6.1.5. *Для любого* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *имеем*

$$\begin{aligned} T_0^*[\bar{z}^2] &= \overline{\mathbf{m}_0(z)}[\bar{z}] + \overline{\mathbf{m}_0(-z)}[-\bar{z}], \\ T_1^*[\bar{z}^2] &= \frac{1}{\bar{z}}\overline{\mathbf{m}_0(z)}[\bar{z}] - \frac{1}{\bar{z}}\overline{\mathbf{m}_0(-z)}[-\bar{z}]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Доказательство. Докажем первое равенство, второе устанавливается аналогично. Для данного $k = 1, \ldots, N$ k-я координата вектора $T_0^*[\bar{z}^2]$ равна

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{2j-k-1}(\bar{z}^2)^{j-1} = \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_{2j-k-1}\bar{z}^{2j-2} =$$

$$= \bar{z}^{k-1} \sum_{s \equiv (k-1) \pmod 2} \bar{c}_s \bar{z}^s = \bar{z}^{k-1}\overline{\mathbf{m}_0(z)} + (-\bar{z})^{k-1}\overline{\mathbf{m}_0(-z)},$$

что завершает доказательство. $\Diamond$

Лемма 6.1.6. *Если полином* $\mathbf{m}_0$ *не имеет симметричных корней, то все собственные векторы оператора* $T_0^*\,(T_1^*)^{-1}$ *имеют вид* (*с точностью до нормировки*) $[z]$ *для определенных* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Согласно предложению 6.1.2 операторы T_0^* и T_1^* невырождены, поэтому оператор $T_0^*\,(T_1^*)^{-1}$ корректно определен на $\mathbb{R}^N$ и невырожден. Для произвольного $v \in \mathbb{R}^N$ i-я координата вектора $T_0^* v$ равна $(i+1)$-й координате вектора $T_1^* v$ $(i = 1, \ldots, N-1)$. Следовательно, для любого $y = (y_1, \ldots, y_N)^T \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$T_0^*\,(T_1^*)^{-1}\,y = (y_2, \ldots, y_N, f(y))^T,$$

где $f(y) = \sum_k f_k y_k$ — линейный функционал на $\mathbb{R}^N$. Для того чтобы это доказать, достаточно положить $v = (T_1^*)^{-1} y$ и сравнить соответствующие координаты векторов $T_0^* v$ и $T_1^* v$. Линейность функционала f следует из линейности оператора $T_0\,(T_1^*)^{-1}$. Итак,

$$T_0^*\,(T_1^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ f_1 & f_2 & \ldots & & \ldots & f_N \end{pmatrix}.$$

Каждый собственный вектор такой матрицы имеет вид $[z]$ (с точностью до нормировки), где z — соответствующее собственное значение. Все собственные значения являются корнями многочлена

$$P(z) = z^N - \sum_{k=1}^{N} f_k z^{k-1}. \qquad \lozenge$$

Доказательство предложения 6.1.4. а). Если $\mathbf{m}_0$ имеет цикл $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, то подставляя $z = b_k$ в (6.2), получаем (6.1).

б). Если операторы T_0, T_1 имеют нетривиальное общее собственное подпространство, то его ортогональное дополнение (обозначим его через U) является общим инвариантным подпространством для T_0^*, T_1^*. Поскольку операторы невырождены, оператор $T_0^*(T_1^*)^{-1}$ также имеет инвариантное подпространство U и, следовательно, имеет хотя бы один собственный вектор в этом подпространстве. Согласно лемме 6.1.6 считаем, что собственный вектор имеет вид $[z_0]$ для некоторого $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Положим

$$A = \Big\{ z \in \mathbb{C}, \setminus \{0\},\ \mathbf{m}_0(\bar{z}) = 0 \Big\}, \quad B = \Big\{ z \in \mathbb{C}, \setminus \{0\},\ [z] \in U \Big\}.$$

Ясно, что оба множества конечны, причем B непусто, так как $z_0 \in \in B$. Заметим, что для любого $b \in B$ оба числа $\pm\sqrt{b}$ принадлежат $A \cup B$. В самом деле, если одно из чисел $\pm\sqrt{b}$ (обозначим его b_0) не принадлежит A, то подставив $z = \bar{b}_0$ в (6.2), получаем

$$[b_0] = \frac{1}{2\overline{\mathbf{m}_0(\bar{b}_0)}} \Big(T_0^*[b] + z_1 T_1^*[b] \Big),$$

следовательно, $[b_0] \in U$, значит, $b_0 \in B$. Применив теперь лемму 3.4.8, получаем, что либо $\mathbf{m}_0$ имеет пару симметричных корней (что исключено), либо $\mathbf{m}_0$ имеет цикл $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, причем $[\bar{b}_j] \in U$, $j = 1, \ldots, n$. $\lozenge$

6.2. Очистка маски

Таким образом, операторы T_0, T_1, соответствующие чистой маске, невырождены и не имеют общих собственных подпространств. Теперь мы должны привести маску произвольного уравнения к чистой маске.

В дальнейшем мы ограничимся лишь случаем, когда масштабирующая функция стабильна, поскольку для построения всплесков нужны только такие функции. Тогда (следствие 3.4.15) маска $\mathbf{m}_0$ может иметь только тривиальный цикл и симметричные корни вне единичной окружности.

Заметим, что уравнение с чистой маской не может иметь даже L_1-решения, поскольку для этого необходимо наличие тривиального цикла (теорема 3.4.16). Поэтому для уравнений, имеющих гладкие решения, набор операторов T_0, T_1 всегда приводим, и предварительная факторизация уравнения (приведение к чистой маске) всегда нужна.

Если маска $\mathbf{m}_0$ имеет симметричные корни $\pm a$ (в нашем случае $|a| \neq 1$), или тривиальный цикл $\mathbf{b} = \{1\}$, будем обозначать соответственно

$$\mathbf{m}_a(z) = \frac{z - a^2}{z^2 - a^2}\mathbf{m}_0(z); \quad \mathbf{m}_1(z) = \frac{2}{z+1}\mathbf{m}_0(z).$$

Легко показать, что $\mathbf{m}_a(1) = 1$ и $\mathbf{m}_1(1) = 1$. Следовательно, уравнения с масками $\mathbf{m}_0$ и $\mathbf{m}_1$ также имеют решения с компактным носителем, которые обозначим через φ_a и φ_1 соответственно. Обозначим также через $T_i^{(a)}$ $(i = 0, 1)$ линейные операторы (в пространстве $\mathbb{R}^{N-1}$), соответствующие маске $\mathbf{m}_a$, т. е. матрицы этих операторов определяются формулой (5.11) с коэффициентами маски $\mathbf{m}_a$. Аналогично определяются операторы $T_i^{(1)}$, соответствующие маске $\mathbf{m}_1$.

Из предложения 6.1.2 следует, что если маска имеет симметричные корни $\pm a$, то операторы T_0, T_1 имеют общее собственное подпространство $[\bar{a}^2]^{\perp}$, причем $\operatorname{Im} T_i \subset [\bar{a}^2]^{\perp}$, $i = 0, 1$. Сейчас мы выясним, как действуют операторы на этом подпространстве.

Предложение 6.2.1. *Если маска $\mathbf{m}_0$ имеет пару симметричных корней $\{\pm a\}$, то ограничения операторов T_0, T_1 на подпространство $[\bar{a}^2]^{\perp}$ изоморфны паре операторов $T_0^{(a)}, T_1^{(a)}$. В базисе*

$$\widetilde{e}_1 = (a^2, -1, 0, \ldots, 0)^T,\ \widetilde{e}_2 = (0, a^2, -1, 0, \ldots, 0)^T,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \widetilde{e}_{N-1} = (0, \ldots, 0, a^2, -1)^T$$

матрицы операторов $T_i|_{[\bar{a}^2]^{\perp}}$ имеют вид $T_i^{(a)}$ $(i = 0, 1)$; при этом

$$\varphi(x) = a^2\varphi_a(x) - \varphi_a(x-1). \tag{6.3}$$

Замечание 6.2.2. В равенстве (6.3) правильнее было бы нормировать функцию φ множителем $1/(a^2 - 1)$ для того, чтобы $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. Для простоты мы не стали этого делать.

Доказательство. Векторы $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_{N-1}$ составляют базис пространства $[\bar{a}^2]^{\perp}$. Рассмотрим $N \times (N-1)$-матрицу C_a, составленную из столбцов $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_{N-1}$. Прямым вычислением убеждаемся, что

$$C_a T_i^{(a)} = T_i C_a, \quad i = 0, 1$$

(это эквивалентно равенству $(z^2 - a^2)\mathbf{m}_a(z) = (z - a^2)\mathbf{m}_0(z)$), следовательно, матрицы операторов T_i в новом базисе совпадают с матрицами $T_i^{(a)}$. Далее,

$$\bigl(a^2 - e^{-4\pi i\xi}\bigr)\varphi_a(2\xi) = \bigl(a^2 - e^{-4\pi i\xi}\bigr)m_a(\xi)\varphi_a(\xi) =$$
$$= \bigl(a^2 - e^{-2\pi i\xi}\bigr)m_0(\xi)\varphi_a(\xi),$$

следовательно, функция $a^2\varphi_a(x) - \varphi(x-1)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению с маской $\mathbf{m}_0$, что доказывает (6.3). $\Diamond$

Если маска имеет тривиальный цикл, т. е. $\mathbf{m}_0(-1) = 0$, то операторы T_0, T_1 имеют общее собственное подпространство $U_1^{\perp}$, ортогональное вектору $[1]$ (предложения 6.1.2). Таким образом,

$$U_1^{\perp} = \Big\{(x_1, \ldots, x_N)^T, \quad \sum_i x_i = 0\Big\}.$$

Предложение 6.2.3. *Если $\mathbf{m}_0(-1) = 0$, то ограничения операторов T_0, T_1 на подпространство $U_1^{\perp}$ изоморфны операторам $\frac{1}{2}\,T_0^{(1)}, \frac{1}{2}\,T_1^{(1)}$. В базисе*

$$\widetilde{e}_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0)^T, \ \ldots, \ \widetilde{e}_{N-1} = (0, \ldots, 0, 1, -1)^T \in \mathbb{R}^N$$

матрицы операторов $T_i|_{U_1^{\perp}}$ совпадают с матрицами $\frac{1}{2}\,T_i^{(1)}$ $(i = 0, 1)$. При этом

$$\varphi = \varphi_1 * \chi_{[0,1]}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Векторы $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_{N-1}$ составляют базис пространства $U_1^{\perp}$. Рассмотрим $N \times (N-1)$-матрицу C_1, составленную из столбцов $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_{N-1}$. Имеем

$$C_1 T_i^{(1)} = 2T_i C_1, \quad i = 0, 1$$

(это эквивалентно равенству $(z+1)\mathbf{m}_1(z) = 2\mathbf{m}_0(z)$), следовательно, матрицы операторов T_i в новом базисе совпадают с матрицами $\frac{1}{2}\,T_i^{(1)}$. Далее, функция $\chi_{[0,1]}$ удовлетворяет масштабирующему уравнению с маской $\left(\frac{z+1}{2}\right)$, а функция φ_1 — масштабирующему уравнению с маской $\mathbf{m}_1$, следовательно, свертка этих функций удовлетворяет уравнению с маской $\left(\frac{z+1}{2}\right)\mathbf{m}_1(z)$, что доказывает равенство (6.4). $\Diamond$

Замечание 6.2.4. Предложения 6.1.2 и 6.1.4 позволяют для любой маски $\mathbf{m}_0$ явно найти все общие собственные подпространства операторов T_0, T_1. Вновь ограничимся случаем стабильной масштабирующей функции, когда маска $\mathbf{m}_0$ может иметь только тривиальный цикл и симметричные корни вне единичной окружности. Начнем с простого, но наиболее важного случая.

Предложение 6.2.5. *Пусть маска $\mathbf{m}_0$ не имеет симметричных корней и нетривиальных циклов, пусть также кратность тривиального цикла равна $L + 1 \geqslant 0$, т. е.*

$$\mathbf{m}_0(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^{L+1} q(z), \quad q(-1) \neq 0.$$

Тогда операторы T_0, T_1 *имеют систему вложенных инвариантных подпространств*

$$G_{L+1} \subset \ldots \subset G_1 \subset G_0 = \mathbb{R}^N.$$

При этом $\dim G_k = N - k$ *и*

$$G_k = \Big\{((x_1, \ldots, x_N)^T,\ \sum_k k^j x_j = 0,\ j = 0, \ldots, k-1\Big\}.$$

Кроме того,

$$\operatorname{spec}(T_i) = \Big\{1, 2^{-1}, \ldots, 2^{-L}, \operatorname{spec}(T_i|_{G_{L+1}})\Big\}.$$

Любое общее собственное подпространство операторов T_0, T_1 *совпадает с одним из* G_k.

Доказательство. Индукция по L. При $L = -1$ набор операторов T_0, T_1 неприводим (теорема 6.1.1), и утверждение теоремы верно (цепочка $\{G_k\}$ состоит из одного элемента $G_0 = \mathbb{R}^N$). Допустим оно верно для $L - 1$. Согласно предложению 6.1.4 операторы T_i имеют собственное значение 1 и собственное подпространство $U_1^{\perp} = G_1$. Операторы $T_i|_{G_1}$ изоморфны операторам $\dfrac{1}{2} T_i^{(1)}$ с матрицей перехода C_1 (предложение 6.2.3), по предположению для операторов $T_i^{(1)}$ утверждение верно. Пусть $\{G'_k\}$ соответствующая цепочка вложенных подпространств этих операторов. Пользуясь тем, что $G_k C_1 = G'_k$, заключаем, что $\{G_k\}$ — цепочка вложенных подпространств для T_i. Пусть теперь V — общее собственное подпространство операторов T_0, T_1. Докажем, что оно совпадает с одним из G_k. Так как $V^{\perp}$ — общее собственное подпространство сопряженных операторов T_i^*, то (предложение 6.1.4) оно содержит некоторое пространство $U_{\mathbf{b}}$. Поскольку $\mathbf{m}_0$ имеет только тривиальные циклы, $\mathbf{b} = \{1\}$, следовательно, $U_{\mathbf{b}} = [1]$. Итак, $[1] \subset V^{\perp}$, следовательно, $V \perp [1]$, значит, $V \subset G_1$. Теперь применяем предложение 6.2.3: либо $V \subset G_1$, либо V — нетривиальное собственное подпространство операторов $T_i|_{G_1}$. Последнее в силу индукции означает, что $V = G_k$ для некоторого $k = 2, \ldots, L+1$. ◊

Следствие 6.2.6. *В условиях предложения* 6.2.5 *каждое общее собственное подпространство операторов* T_0, T_1 *содержит подпространство* G_{L+1}.

Замечание 6.2.7. Предложение 6.2.5 характеризует все общие собственные подпространства операторов T_0, T_1 в случае отсутствия у маски симметричных корней. В общем случае также возможно классифицировать все общие собственные подпространства, однако подобная классификация будет несколько сложнее. Все общие собственные подпространства будут составлять уже не одну, а несколько цепочек, связанных между собой в несколько бинарных деревьев [125].

Используя предложения 6.2.1 и 6.2.3 можно последовательно уничтожить все пары симметричных корней $\pm a_1, \ldots, \pm a_r$, затем все тривиальные циклы, т. е. тривиальный цикл данной кратности $L+1$. В результате получаем чистую маску, которую мы обозначим через $\mathbf{m}_c$. Несложно показать, что результат — маска $\mathbf{m}_c$ — не зависит от того, в каком порядке уничтожались симметричные корни. На каждой итерации степень маски N (размерность пространства) уменьшается на единицу, матрицы операторов T_0, T_1 преобразуются по формулам, данным в предложениях 6.2.1 и 6.2.3. Обозначим через C_{a_k} соответствующую матрицу перехода к новому базису на k-й итерации. Это $(N-k+1) \times (N-k)$-матрица, составленная из столбцов

$$\left(a_k^2, -1, 0, \ldots, 0\right)^T, \ \ldots, \ \left(0, \ldots, 0, a_k^2, -1\right)^T \in \mathbb{R}^{N-k+1}.$$

После r итераций маска не будет иметь симметричных корней. Далее начинаем уничтожать тривиальный цикл кратности $L+1$. На $(r+j)$-й итерации $(j = 1, \ldots, L+1)$ осуществляется переход от пространства $\mathbb{R}^{N-r-j+1}$ к пространству $\mathbb{R}^{N-r-j}$ с новым базисом

$$\left(1, -1, 0, \ldots, 0\right)^T, \ \ldots, \ \left(0, \ldots, 0, 1, -1\right)^T.$$

Матрица перехода $C_{1,j}$ составлена из векторов-столбцов нового базиса. Таким образом, после k итераций $(k \leqslant r+L+1)$ мы ограничиваем операторы T_0, T_1 на $(N-k)$-мерное подпространство G_k с помощью матрицы перехода

$$C_k = \begin{cases} C_{a_1} \ldots C_{a_k}, & \text{если} \quad k \leqslant r, \\ C_{a_1} \ldots C_{a_r} C_{1,1} \ldots C_{1,k-r}, & \text{если} \quad k > r. \end{cases}$$

Подпространство G_k порождено, таким образом, столбцами матрицы C_k. В результате после $r+L+1$ итераций переходим на подпространство $\widetilde{G} = G_{r+L+1}$ с помощью матрицы перехода

$$\widetilde{C} = C_{r+L+1} = C_{a_1} \ldots C_{a_r} C_{1,1} \ldots C_{1,L+1}.$$

Получаем матрицы $2^{-L-1}\widetilde{T}_0$, $2^{-L-1}\widetilde{T}_1$, где матрицы $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$ соответствуют чистой маске $\mathbf{m}_c$. Согласно теореме 6.1.1 операторы $2^{-L-1}\widetilde{T}_0$, $2^{-L-1}\widetilde{T}_1$ невырождены и не имеют нетривиальных общих собственных подпространств. Подпространство $\widetilde{G}$, на котором первоначальные операторы T_i изоморфны операторам $2^{-L-1}\widetilde{T}_i$, дается в явном виде с помощью матрицы перехода $\widetilde{C}$ (оно натянуто на столбцы этой матрицы), необходимый базис в этом пространстве — столбцы $\widetilde{C}$.

Замечание 6.2.8. В литературе очистка маски чаще всего применяется к нестабильным масштабирующим функциям. В этом случае (следствие 3.4.15) маска имеет нетривиальные циклы и симметричные корни на единичной окружности. Используя предложения 6.2.1 и 6.2.3 можно по точно такой же схеме очистить маску от нетривиальных циклов и симметричных корней на единичной окружности, получив стабильную масштабирующую функцию φ_0. При этом функция φ_0 порождает целыми сдвигами то же пространство V_0, что и функция φ, но имеет меньший носитель. В терминах теории всплесков это означает, что функции φ и φ_0 генерируют один и тот же КМА. Поэтому с помощью очистки можно перейти от любой масштабирующей функции к стабильной, порождающей тот же КМА, т. е. найти масштабирующую функцию с наименьшим носителем для данного КМА. В этом смысле нестабильные функции бесполезны для построения всплесков, поскольку никаких новых КМА они не порождают. Это заставляет нас в данной книге ограничиться только стабильными масштабирующими функциями, хотя и нестабильные находят применение, например, в теории уточняющих схем, или теории вероятностей (см. [47, 126–129, 181]). Тем не менее, всякий раз имеет смысл продолжить процедуру очистки, применив ее к стабильным масштабирующим функциям. При этом КМА всякий раз будет меняться. Так, из соотношения (6.3) следует, что пространство V_0, порожденное функцией φ, содержится в пространстве, порожденном φ_a и не совпадает с ним (строгое включение). Поэтому, при уничтожении симметричного корня, не лежащего на единичной окружности, пространство V_0 расширяется. При уничтожении тривиального цикла мы и вовсе переходим к другому КМА; пространства, порожденные функциями φ и φ_1, не пересекаются (вернее, пересекаются по нулю), поскольку (формула (6.4)) функции φ и φ_1 имеют разную гладкость. Тем не менее, для стабильных функций очистка позволяет явно находить общие инвариантные подпространства операторов T_0, T_1, что применяется при вычислении показателей гладкости. Сейчас мы увидим, как для данного масштабирующего уравнения найти в явном виде пространство $\widetilde{A}_n$, на котором сосредоточена фрактальная кривая $v(x) = \big(\varphi(x), \ldots, \varphi(x+N-1)\big)^T$, и выписать матрицы операторов T_0, T_1 на этом подпространстве. Это позволит применить все результаты о гладкости фрактальных кривых (гл. 5) к масштабирующим функциям.

6.3. Пространство $\widetilde{A}_n$ и общий вид операторов T_0, T_1 на нем

Итак, пусть дано масштабирующее уравнение со стабильным решением. т. е. маска $\mathbf{m}_0$ не имеет нетривиальных циклов и симметричных корней на единичной окружности. Алгоритм очистки, изложенный в предыдущем параграфе, позволяет найти в явном виде подпространство

$$\widetilde{A}_n = \operatorname{span}\{v(x) - v(y),\ x, y \in [0,1]\},$$

где $v(x) = \big(\varphi(x), \ldots, \varphi(x+N-1)\big)^T$. Оказывается, что $\widetilde{A}_n = G_{r+1}$. Иными словами, пространство $\widetilde{A}_n$ получается после уничтожения всех симметричных корней и *одного* тривиального цикла (вспомним, что если $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, то маска имеет тривиальный цикл, следствие 3.4.17). Из этого следует, что $\widetilde{A}_n$ имеет размерность $N-r-1$ и порождено столбцами матрицы $C_{r+1} = C_{a_1} \times \ldots \times C_{a_r} C_{1,1}$. В частности, если маска не имеет симметричных корней, то

$$\widetilde{A}_n = U_1^{\perp} = \Big\{ (x_1, \ldots, x_N)^T, \quad \sum_k x_k = 0 \Big\},$$

а соответствующее аффинное пространство A_n совпадает с пространством

$$W = \Big\{ (x_1, \ldots, x_N)^T, \ \sum_k x_k = 1 \Big\} = v(0) + U_1^{\perp}.$$

Доказательство проведем сначала для непрерывной функции φ. Заметим сначала, что

$$T_i G_k \subset G_{k+1}, \quad i = 0, 1,$$

для каждого $k = 0, \ldots, r-1$ (мы обозначили $G_0 = \mathbb{R}^N$). В самом деле, так как $\pm a_1$ — симметричные корни $\mathbf{m}_0$, то $\mathrm{Im}\, T_i \perp [\bar{a}_1^2]$, следовательно, $T_i G_0 \subset [\bar{a}_1^2]^{\perp} = G_1$. Далее, на подпространстве G_1 операторы T_i изоморфны операторам T_i^a, соответствующим маске m_{a_1} (предложение 6.2.1). Так как $\pm a_2$ — симметричные корни $\mathbf{m}_{a_1}$, то точно так же показываем, что $\mathrm{Im}\, T_i^{(a)} \subset [\bar{a}_2^2]^{\perp}$, что в силу изоморфизма означает

$$T_i G_1 \subset G_2, \quad i = 0, 1.$$

Так последовательно доказываем включения $T_i G_k \subset G_{k+1}$ для всех $k = 0, \ldots, r-1$. Из этого следует, что G_r — общее инвариантное подпространство операторов T_0, T_1, причем любой собственный вектор T_0 с ненулевым собственным значением принадлежит этому подпространству. Следовательно (так как $T_0 v(0) = v(0)$), имеем $v(0) \in G_r$. Поскольку

$$\mathrm{span} \Big\{ v(x), \ x \in [0,1] \Big\} = \mathrm{span} \Big\{ v(0), \widetilde{A}_n \Big\}$$

— наименьшее подпространство, инвариантное относительно T_0 и T_1 и содержащее вектор $v(0)$, заключаем, что $\mathrm{span}\,\{v(0), \widetilde{A}_n\} \subset G_r$. Покажем, что на самом деле имеет место равенство $\mathrm{span}\,\{v(0), \widetilde{A}_n\} = G_r$. Действительно, так как $\mathrm{span}\,\{v(0), \widetilde{A}_n\}$ — общее собственное подпространство операторов $T_i, i = 0, 1$, то (предложение 6.2.5) либо $\mathrm{span}\,\{v(0), \widetilde{A}_n\} = G_r$, либо $\mathrm{span}\,\{v(0), \widetilde{A}_n\} \subset G_{r+1}$. Последнее невозможно, иначе спектр оператора T_0 на подпространстве G_{r+1} содержит 1 (поскольку $T_0 v(0) = v(0)$); этот спектр состоит из чисел $2^{-1}, \ldots, 2^{-L}$ и спектра оператора $T_0|_{\widetilde{G}}$ (предложение 6.2.5), следовательно, спектр $T_0|_{\widetilde{G}}$ также содержит 1. Но тогда $\widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{G}}, T_1|_{\widetilde{G}}) \geqslant 1$ (воспользовались леммой 5.1.2), значит,

$$\widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) \ \geqslant \ 1$$

(поскольку $\widetilde{G} \subset A_n$, так как в силу следствия 6.2.6, каждое общее инвариантное подпространство операторов T_0 и T_1 на G_r содержит $\widetilde{G}$). Получили противоречие: поскольку решение φ непрерывно, должно быть $\widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) < 1$. Итак, $\operatorname{span}\{v(0), \widetilde{A}_n\} = G_r$. Далее, $\widetilde{A}_n$ также является общим собственным подпространством T_0, T_1, а его размерность на 1 меньше, чем размерность $\operatorname{span}\{v(0), \widetilde{A}_n\} = G_r$. Поэтому, в силу все того же предложения 6.2.5 пространство $\widetilde{A}_n$ совпадает с G_{r+1}.

Для случая $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ доказательство полностью аналогично, только вместо вектора $v(0)$ берем

$$c = \left(\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt,\ \ldots,\ \int\limits_{N-1}^{N} \varphi(t)\,dt \right)^T$$

— собственный вектор оператора $\dfrac{1}{2}\bigl(T_0 + T_1\bigr)$ с собственным значением 1.

Таким образом, доказана

Теорема 6.3.1. *Пусть решение масштабирующего уравнения с маской* $\mathbf{m}_0(z) = \left(\dfrac{z+1}{2}\right)^{L+1} q(z)$ *стабильно*, T_0, T_1 — *соответствующие линейные операторы. Тогда пространство*

$$\widetilde{A}_n = \operatorname{span}\Bigl\{v(x) - v(y),\ x, y \in [0,1]\Bigr\}$$

совпадает с пространством G_{r+1}, *которое порождено столбцами матрицы*

$$C_{r+1} = C_{a_1} \times \ldots \times C_{a_r} C_{1,1}.$$

В частности, если $\mathbf{m}_0$ *не имеет симметричных корней, то*

$$\widetilde{A}_n = \Bigl\{(x_1, \ldots, x_N)^T,\ \sum x_i = 0\Bigr\}.$$

Матрицы операторов $T_i|_{\widetilde{A}_n}, i = 0, 1$ *в подходящем базисе имеют следующий вид: если* $L = 0$, *то* $T_i|_{\widetilde{A}_n} = \dfrac{1}{2}\widetilde{T}_i$; *если* $L \geqslant 1$, *то*

$$T_i|_{\widetilde{A}_n} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & 2^{-2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & 2^{-3} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & * & \ldots & 2^{-L} & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & * & \ldots & * & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & 2^{-L-1}\widetilde{T}_i & \\ * & * & * & \ldots & * & & & \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \tag{6.5}$$

где матрицы $\widetilde{T}_i$ *соответствуют чистой маске* $\mathbf{m}_c$.

Поскольку операторы $\widetilde{T}_i$ невырождены (теорема 6.1.1), получаем

Следствие 6.3.2. *Если решение масштабирующего уравнения стабильно, то операторы T_i на пространстве $\widetilde{A}_n$ невырождены.*

Замечание 6.3.3. Теорема 6.3.1 и следствие 6.3.2 верны для всех масштабирующих уравнений, без предположения о стабильности решения [125].

Следствие 6.3.4. *Если маска масштабирующего уравнения не имеет циклов и симметричных нулей, то $\widetilde{A}_n = \big\{(x_1, \ldots, x_N),\ \sum x_k = 0\big\}$.*

Замечание 6.3.5. Итак, для любого масштабирующего уравнения как пространство $\operatorname{span}\{v(0), \widetilde{A}_n\}$, содержащее образ кривой $v(x)$, так и пространство $\widetilde{A}_n$, находятся в явном виде: $\widetilde{A}_n = G_{r+1}$, оно натянуто на столбцы матрицы $C_{r+l} = C_{a_1} \ldots C_{a_r} C_{1,1}$. Каждая матрица $C_a, C_{1,1}$ в произведении выписывается по формулам, данным в предложениях 6.2.1 и 6.2.3. То же верно для пространства $\operatorname{span}\{v(0), V\} = G_r$, натянутого на столбцы матрицы C_r. Вектор $v(0)$, с которого начинается построение непрерывной масштабирующей функции φ может быть определен как единственный собственный вектор оператора $T_0|_{G_r}$ с собственным значением 1. Этот вектор единственный, в противном случае оператор $T_0|_{V_{r+1}} = T_0|_{\widetilde{A}_n}$ так же будет иметь собственное значение 1 и, следовательно, $\widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) \geqslant 1$, что противоречит непрерывности φ. Более того, несложно показать, что 1 является простым собственным значением не только оператора $T_0|_{\widetilde{A}_n}$, но и оператора T_0. В самом деле, при обратном переходе (от оператора $T_0|_{\widetilde{A}_n}$ к оператору T_0) к маске последовательно добавляются симметричные корни. Согласно предложению 6.2.1 каждое добавление симметричного корня увеличивает кратность собственного значения 0 и не меняет других собственных значений.

То же верно и для L_p-решения φ, в этом случае построение начинается с вектора c — единственного собственного вектора оператора $\frac{1}{2}\big(T_0 + T_1\big)$, соответствующего собственному значению 1. Такой вектор единственный, поскольку единица является простым собственным значением оператора $\frac{1}{2}\left(T_0 + T_1\right)\Big|_{\widetilde{A}_n}$, значит, и оператора $\frac{1}{2}\big(T_0 + T_1\big)$. В противном случае оператор $\frac{1}{2}\big(T_0 + T_1\big)|_{\widetilde{A}_n}$ также имеет собственное значение 1, откуда $\rho_p(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) \geqslant 1$. Последнее невозможно, так как $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$. Таким образом, доказано.

Следствие 6.3.6. *Если стабильная масштабирующая функция непрерывна, то оператор $T_i,\ i = 0, 1$, имеет простое собственное значение 1, а соответствующий собственный вектор равен $v(i)$. Все остальные собственные значения операторов T_i по модулю меньше единицы. Если стабильная масштабирующая функция суммируема, то оператор $\frac{1}{2}\Big(T_0 + T_1\Big)$ имеет простое собственное значение 1,* *а соответствующий собственный вектор равен c. Все остальные собственные значения этого оператора по модулю меньше единицы.*

Пример 6.3.7. Уравнение с маской

$$\mathbf{m}_0(z) = \Big(\frac{z+1}{2}\Big)\Big(\frac{z^2+2}{3}\Big)$$

имеет непрерывное решение φ, поскольку все его коэффициенты положительны [130]. Маска не имеет нетривиальных циклов и симметричных корней и на единичной окружности, таким образом, φ стабильна. Тем не менее, $\widetilde{A}_n \ne \{(x_1, x_2, x_3)^T,\ \sum x_i = 0\}$, поскольку $\mathbf{m}_0$ имеет пару симметричных корней $\pm a = \pm\sqrt{2}\,i$. Оба оператора T_i^* вырождены, их общее ядро имеет размерность 1 и порождено вектором $[-2] = (1, -2, 4)^T$. После уничтожения симметричного корня и тривиального цикла $\{1\}$ получаем чистую маску $\mathbf{m}_c(z) = \dfrac{1}{3}\,(z+2)$, операторы $\widetilde{T}_0 = \dfrac{4}{3}$, $\widetilde{T}_1 = \dfrac{2}{3}$ одномерные и, очевидно, неприводимые. Матрицы перехода:

$$C_a = \Big((-2,-1,0)^T, (0,-2,-1)^T\Big); \quad C_{1,1} = \Big(-1, 1\Big)^T.$$

Пространство $\widetilde{A}_n$ одномерно и порождено вектором $C_aC_{1,1} = (2, -1, -1)$.

Остается сформулировать последний вспомогательный результат, который понадобится в гл. 7 при вычислении гладкости всплесков. Следующая лемма является обобщением леммы А.6.4.

Лемма 6.3.8. *Пусть каждая из двух $N \times N$-матриц $B_i, i = 0, 1$, является нижне-треугольной с блоками $A_i^1, \dots, A_i^l$ на диагонали:*

$$B_i = \begin{pmatrix} A_i^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & A_i^2 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ * & \dots & \dots & * & A_i^l \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \tag{6.6}$$

и пары операторов A_0^j, A_1^j являются неприводимыми в $\mathbb{R}^{r_j}$ для каждого j $\Big(\sum\limits_{j=1}^{l} r_j = N\Big)$. Тогда для любого $p \in [1, +\infty]$ имеем

$$\rho_p(B_0, B_1) = \max_{j=1,\dots,l} \rho_p(A_0^j, A_1^j).$$

Более того, если максимум достигается на s элементах из данных l, то

$$c_1(\rho_p)^k \leqslant \Bigl(2^{-k}\sum_{d_1,\ldots,d_k}\|B_{d_1}\times\ldots\times B_{d_k}\|^p\Bigr)^{1/p} \leqslant c_2k^{s-1}(\rho_p)^k, \quad p<\infty,$$
$$c_1\widehat{\rho}^k \leqslant \max_{d_1,\ldots,d_k}\|B_{d_1}\times\ldots\times B_{d_k}\| \leqslant c_2k^{s-1}\widehat{\rho}^k, \qquad p=\infty, \tag{6.7}$$

где положительные константы c_1, c_2 не зависят от k. В частности, если $s=1$, то

$$\Bigl(2^{-k}\sum_{d_1,\ldots,d_k}\|B_{d_1}\times\ldots\times B_{d_k}\|^p\Bigr)^{1/p} \asymp (\rho_p)^k;$$
$$\max_{d_1,\ldots,d_k}\|B_{d_1}\times\ldots\times B_{d_k}\| \asymp \widehat{\rho}^k.$$

Доказательство. проведем индукцией по числу блоков l. Если $l=1$, то утверждение совпадает с леммой A.6.4. Предположим, утверждение верно для матриц, состоящих из $l-1$ блоков. Для $i=0,1$ обозначим через D_i $N\times N$-матрицу, первые r_1 строк и столбцов которой — нулевые, а остальные элементы совпадают с элементами матрицы B_i; через C_i — $N\times N$-матрицу, элементы которой в пересечении первых r_1 строк и последних $N-r_1$ столбцов совпадают с элементами B_i (остальные — нулевые); наконец, матрицу, совпадающую с B_i (т. е. фактически, с A_i^1) в пересечении первых r_1 строк и столбцов (остальные — нули) обозначим через A_i. Таким образом, $B_i = A_i + C_i + D_i$ и

$$B_{d_1}\times\ldots\times B_{d_k} = D_{d_1}\times\ldots\times D_{d_k} + D_{d_1}\times\ldots\times D_{d_{k-1}}C_{d_k} +$$
$$+ D_{d_1}\times\ldots\times D_{d_{k-2}}C_{d_{k-1}}A_{d_k} + \ldots + D_{d_1}C_{d_2}A_{d_3}\times\ldots\times A_{d_k} +$$
$$+ C_{d_1}A_{d_2}\times\ldots\times A_{d_k} + A_{d_1}\times\ldots\times A_{d_k}. \tag{6.8}$$

Так как

$$\|B_{d_1}\times\ldots\times B_{d_k}\| \geqslant \max\Bigl\{\|A_{d_1}\times\ldots\times A_{d_k}\|,\ \|D_{d_1}\times\ldots\times D_{d_k}\|\Bigr\},$$

но при этом

$$\max_{d_1,\ldots,d_k}\|A_{d_1}\times\ldots\times A_{d_k}\| \geqslant c_2\widehat{\rho}^k(A_0,A_1)$$

в силу леммы A.6.4, с другой стороны

$$\max_{d_1,\ldots,d_k}\|D_{d_1}\times\ldots\times D_{d_k}\| \geqslant c_2\widehat{\rho}^k(D_0,D_1))$$

по индуктивному предположению, то

$$\widehat{\rho} = \widehat{\rho}(B_0,B_1) \geqslant \max\{\widehat{\rho}(A_0,A_1),\ \widehat{\rho}(D_0,D_1)\}.$$

Далее, из леммы А.6.4 следует, что

$$\|A_{d_n} \times \ldots \times A_{d_k}\| \leqslant c_2 \widehat{\rho}^{k-n}(A_0, A_1);$$

по предположению индукции

$$\|D_{d_1} \times \ldots \times D_{d_{n-1}}\| \leqslant c_2 (n-1)^s \widehat{\rho}^{n-1}(D_0, D_1),$$

где

$$\widehat{\rho}(D_0, D_1) = \max_{j=2,\ldots,l} \Big\{ \widehat{\rho}(A_0^j, A_1^j) \Big\},$$

а s — количество тех j, при которых этот максимум достигается. Подставив в (6.8), получаем

$$\|B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k}\| \leqslant C \sum_{n=0}^{k} (n-1)^s \widehat{\rho}^{n-1}(D_0, D_1) \widehat{\rho}^{k-n}(A_0, A_1), \tag{6.9}$$

где $C > 0$ не зависит от k и от $d_1, \ldots, d_k$. Следовательно,

$$\widehat{\rho} \leqslant \max \Big\{ \widehat{\rho}(A_0, A_1), \widehat{\rho}(D_0, D_1) \Big\}.$$

Значит,

$$\widehat{\rho} = \max \Big\{ \widehat{\rho}(A_0, A_1), \widehat{\rho}(D_0, D_1) \Big\},$$

причем, если $\widehat{\rho} > \widehat{\rho}(D_0, D_1)$, то

$$\|B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k}\| \leqslant C \widehat{\rho}^k,$$

а если $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}(D_0, D_1)$, то

$$\|B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k}\| \leqslant C k^{s+1} \widehat{\rho}^k.$$

Это доказывает (6.7) при $p = \infty$. При $p < \infty$ оценка снизу производится аналогично: из неравенства

$$\|B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k}\| \geqslant \max \Big\{ \|A_{d_1} \times \ldots \times A_{d_k}\|, \|D_{d_1} \times \ldots \times D_{d_k}\| \Big\}$$

выводим, что $\rho_p \geqslant \max \Big\{ \rho_p(A_0, A_1), \rho_p(D_0, D_1) \Big\}$, и что

$$\left(2^{-k} \sum_{d_1,\ldots,d_k} \|B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k}\|^p \right)^{1/p} \geqslant c_1 (\rho_p)^k.$$

Для доказательства оценки сверху пользуемся (6.8):

$$2^{-k} \sum_{d_1,\ldots,d_k} \|B_{d_1} \times \ldots \times B_{d_k}\|^p \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=0}^{k} \left(2^{1-n} \sum_{d_1,\ldots,d_{n-1}} \|D_{d_1} \times \ldots \times D_{d_{n-1}}\|^p \right) \times$$

$$\times\left(2^{n-k}\sum_{d_n,\ldots,d_k}\|A_{d_n}\times\ldots\times A_{d_k}\|^p\right),$$

откуда по предположению индукции получаем:

$$\left(2^{-k}\sum_{d_1,\ldots,d_k}\|B_{d_1}\times\ldots\times B_{d_k}\|^p\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n=0}^{k}(n-1)^s\rho_p^{n-1}(D_0,D_1)\rho_p^{k-n}(A_0,A_1),$$

дальнейшие рассуждения проводятся так же как и в случае $p=\infty$. $\Diamond$

6.4. Факторизационные теоремы

Теорема 6.4.1. *Стабильная масштабирующая функция принадлежит $C^l(\mathbb{R})$ (соответственно $W_p^l(\mathbb{R})$), $l\geqslant 1$, тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$\varphi=B_{l-1}*\varphi_0, \tag{6.10}$$

где $\varphi_0\in C(\mathbb{R})$ $(L_p(\mathbb{R}))$ — масштабирующая функция.

При этом $\alpha_\varphi=l+\alpha_{\varphi_0}$ (соответственно $\alpha_{\varphi,p}=l+\alpha_{\varphi_0,p}$).

Доказательство. По теореме 3.4.16 маска уравнения имеет в точке $z=-1$ нуль порядка $\geqslant l+1$, т. е. представляется в виде

$$\mathbf{m}_0(z)=\left(\frac{z+1}{2}\right)^{l+1}q(z).$$

Тогда (предложение 6.2.3) можно осуществить l понижений порядка по формуле (6.4), получив масштабирующую функцию φ_0, которая удовлетворяет уравнению с маской $\left(\frac{z+1}{2}\right)q(z)$. При этом φ является сверткой φ_0 с l функциями $\chi_{[0,1]}$, т. е. с B-сплайном B_{l-1}. Так как свертка с функцией $\chi_{[0,1]}$ повышает гладкость ровно на единицу, получаем

$$\varphi_0\in C\ (L_p);\quad \alpha_\varphi=l+\alpha_{\varphi_0}$$

(соответственно, $\alpha_{\varphi,p}=l+\alpha_{\varphi_0,p}$). $\Diamond$

Замечание 6.4.2. Теорема 6.4.1 полностью сводит исследование гладких масштабирующих функций к исследованию непрерывных (соответственно, $L_p(\mathbb{R})$) масштабирующих функций. Для того чтобы повысить гладкость масштабирующей функции на некоторое целое число r, достаточно умножить маску на полином $\left(\frac{z+1}{2}\right)^r$, при этом функция заменится на ее свертку с B-сплайном B_{r-1}. При этом степень уравнения и длина носителя масштабирующей функции увеличатся на r. Из предложения 6.2.3 получаем формулы, по которым изменяются операторы T_0, T_1. Теорема 6.4.1 утверждает, что это единственный способ получать стабильные гладкие масштабирующие функции. Каждая такая функция факторизуется в свертку непрерывной (соответственно, $L_p(\mathbb{R})$) масштабирующей функции и B-сплайна.

Для нестабильных функций утверждение теоремы 6.4.1, вообще говоря, неверно. Как мы знаем, маска нестабильной масштабирующей функции не обязана обращаться в нуль в точке $z = -1$. Необходимое условие гладкости функции заменяется на наличие у маски блокирующего множество порядка l (следствие 3.2.11). Для нестабильных функций имеет место аналог теоремы 6.4.1: C^l (W_p^l)-масштабирующая функция представляется в виде свертки $S_{l-1} * \varphi_0$, где φ_0 — непрерывная (соответственно, L_p) масштабирующая функция, а

$$S_{l-1}(x) = \sum_{k=0}^{r} p_k B_{l-1}(x-k)$$

— сплайн порядка $l-1$, являющийся комбинацией целых сдвигов B-сплайна. Множители p_k являются коэффициентами некоторого полинома, зависящего от блокирующего множества маски $\mathbf{m}_0$ (см. [110, 127]).

Процесс факторизации маски можно продолжить, избавившись от всех тривиальных циклов и симметричных корней, получив, таким образом, масштабирующую функцию φ_c, соответствующую чистой маске.

Теорема 6.4.3. *Стабильная масштабирующая функция единственным образом представляется в виде свертки*

$$\varphi = S_{L-1} * \varphi_c, \tag{6.11}$$

где φ_c — масштабирующая функция, соответствующая чистой маске m_c, $S_L(x) = \sum\limits_{k=0}^{r} p_k B_L(x-k)$ — сплайн порядка L, являющийся комбинацией целых сдвигов B-сплайна B_L, L — порядок условий Стрэнга–Фикса, которым соответствует φ, в частности $L \geqslant \alpha_\varphi - 1$. Множители p_k являются коэффициентами полинома

$$P(z) = \sum_{k=0}^{r} p_k z^k = \prod_{j=1}^{r} (z - a_j^2),$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — симметричные корни, появляющиеся в процессе очистки маски.

Доказательство. Согласно теореме 3.4.16 маска уравнения имеет в точке $z = -1$ нуль порядка $L+1$. Воспользовавшись предложением 6.2.3, осуществим $L+1$ понижение порядка по формуле (6.4). Получаем разложение φ в свертку B-сплайна B_L и некоторой масштабирующей функции. Затем последовательно уничтожим все пары симметричных корней $\pm a_1, \ldots, \pm a_r$. При этом каждый раз осуществляется переход к новой масштабирующей функции по формуле (6.3). В результате получаем функцию φ_c, соответствующую чистой маске $\mathbf{m}_c$. $\Diamond$

Замечание 6.4.4. Теорема 6.4.3 дает окончательную факторизацию масштабирующей функции. Заметим, что функция φ_c всегда обобщенная и не может быть регулярной, поскольку маска уравнения $\mathbf{m}_c$ не имеет тривиального цикла, т. е. не обращается в нуль в точке $z = -1$. Можно доказать, что полином $P(z)$ не зависит от того, в каком порядке уничтожались симметричные корни. Это не вполне очевидно, поскольку после каждой итерации очистки могут появляться новые пары симметричных корней. Строгое доказательство см. монографию [47, раздел 8] и соответствующие ссылки в ней.

Представления (6.11) понадобится при вычислении гладкости масштабирующих функции. Все методы вычисления гладкости (матричный метод, скорость убывания преобразования Фурье) могут быть применены к чистым маскам, а потом, используя формулу (6.11), распространены на все масштабирующие функции.

Глава 7

ГЛАДКОСТЬ ВСПЛЕСКОВ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ

Нахождение показателей гладкости масштабирующих функций и всплесков с компактным носителем — одна из наиболее интригующих проблем теории всплесков. На сегодняшний день существует три подхода к этой проблеме. Все они были разработаны в 1989–1992 годах, затем многократно дорабатывались и совершенствовались. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Тем не менее, в общей ситуации ни один из методов не позволяет получить точный показатель гладкости в $C(\mathbb{R})$, или, скажем, в $L_1(\mathbb{R})$. Даже на «простейший» вопрос: является ли решение данного масштабирующего уравнения непрерывным, или суммируемым, мы не всегда можем дать исчерпывающий ответ.

7.1. Матричный метод

Матричным методом принято называть способ оценки гладкости с помощью совместного спектрального радиуса операторов T_0 и T_1. Сначала пользуемся факторизационной теоремой (теорема 6.4.1), и понижаем порядок уравнения. Так переходим от гладкой масштабирующей функции к непрерывной (соответственно, $L_p(\mathbb{R})$). Далее непрерывная масштабирующая функция представляется в виде фрактальной кривой в пространстве $\widetilde{A}_n$, соответствующей операторам T_0, T_1. Согласно результатам гл. 5 показатель гладкости вычисляется через совместный спектральный радиус операторов T_0 и T_1.

Одно из преимуществ матричного метода состоит в том, что он позволяет, по крайней мере теоретически, точно вычислять не только глобальную, но и локальную гладкость масштабирующих функций и всплесков в каждой точке. Для этого применяется теорема 5.4.1, выражающая локальную гладкость через спектральный радиус вдоль последовательности. Более того, оба оператора T_i на пространстве $\widetilde{A}_n$ невырождены (следствие 6.3.2). Поэтому применимо предложение 5.4.2 для вычисления гладкости в рациональных точках, а также теорема 5.4.10, характеризующая множества фиксированной локальной гладкости. Причем в силу теоремы 6.3.1 все вычисления сводятся к матрицам $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$, соответствующим чистой маске $\mathbf{m}_0$.

Итак, пусть дано масштабирующее уравнение с маской $\mathbf{m}_0$, имеющее стабильное решение, удовлетворяющее условиям Стрэнга–Фикса порядка L. Это означает, что маска не имеет нетривиальных циклов и симметричных корней на единичной окружности, а в точке $z=-1$ имеет нуль порядка $L+1$. Пусть также $\mathbf{m}_c$ — соответствующая чистая маска, а операторы $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$ определены своими матрицами, построенными по коэффициентам полинома $\mathbf{m}_c$ по формуле (5.11). Обозначим $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}(\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1)$, $\rho_p = \rho_p(\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1)$, $p \in [1, +\infty)$.

Теорема 7.1.1. а) *Масштабирующая функция φ принадлежит $C^k(\mathbb{R})$, $k \geqslant 0$, тогда и только тогда, когда*

$$L + 1 - \log_2 \widehat{\rho} > k.$$

При этом

$$\alpha_\varphi = L + 1 - \log_2 \widehat{\rho}.$$

Если α_φ не является целым числом, то

$$\omega(\varphi^{(l)}, h) \asymp h^{\alpha_\varphi - l},$$

где $l = [\alpha_\varphi]$. Если же $\alpha_\varphi = l + 1$ — целое число, то

$$C_1 h \leqslant \omega(\varphi^{(l)}, h) \leqslant C_2 h |\ln h|.$$

б) *Масштабирующая функция φ принадлежит $W_p^k(\mathbb{R})$, $k \geqslant 0$, $p \in [1, +\infty)$, тогда и только тогда, когда*

$$L + 1 - \log_2 \rho_p > k.$$

При этом

$$\alpha_{\varphi,p} = L + 1 - \log_2 \rho_p.$$

Если $\alpha_{\varphi,p}$ не является целым числом, то

$$\omega(\varphi^{(l)}, h)_p \asymp h^{\alpha_\varphi - l},$$

где $l = [\alpha_{\varphi,p}]$. Если же $\alpha_{\varphi,p} = l + 1$ — целое, то

$$C_1 h \leqslant \omega(\varphi^{(l)}, h)_p \leqslant C_2 h |\ln h|.$$

Доказательство. а) Пусть $l \geqslant 0$ — наибольшее целое, для которого $\varphi \in C^l$. Можно считать, что $l = 0$, иначе, применив теорему 6.4.1, разложим φ в свертку $B_{l-1} * \varphi_0$ и перейдем к функции φ_0, для которой $\alpha_{\varphi_0} = \alpha_\varphi - l$. Итак, $l = 0$, т. е. φ непрерывна, но не принадлежит C^1. Тогда $\alpha_\varphi = -\log_2 \widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n})$ по теореме 5.1.4. По теореме 6.3.1 матрицы операторов $T_i|_{\widetilde{A}_n}$ имеют блочный вид (6.5). Применив к ним предложение 6.2.5, получаем

$$\widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \max\{2^{-1}, \ldots, 2^{-L}, 2^{-L-1}\widehat{\rho}\}.$$

Если $2^{-L-1}\widehat{\rho} < 2^{-1}$, то матрицы $T_i|_{\widetilde{A}_n}$ удовлетворяют условиям предложения 5.3.1. В самом деле, по теореме 6.3.1 имеем $\widetilde{A}_n = G_{r+1}$ и

$$\widehat{\rho}(T_0|_{G_{r+2}}, T_1|_{G_{r+2}}) = \max\left\{2^{-2},\ \ldots,\ 2^{-L},\ 2^{-L-1}\widehat{\rho}\right\} < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, каждый оператор $T_i|_{\widetilde{A}_n}$, $i = 0, 1$ имеет единственный собственный вектор $\widetilde{v}_i$ с собственным значением $\frac{1}{2}$, кроме того, как следует из предложения 6.2.5 $\widetilde{L} \subset G_{r+2}$, значит, $\widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{L}}, T_1|_{\widetilde{L}}) < \frac{1}{2}$. Таким образом, все условия предложения 5.3.1 выполнены, поэтому $\varphi \in C^1$, что невозможно. Следовательно,

$$2^{-L-1}\widehat{\rho} \geqslant 2^{-1},$$

откуда

$$\widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = 2^{-L-1}\widehat{\rho},$$

что доказывает равенство

$$\alpha_\varphi = L + 1 - \log_2 \widehat{\rho}.$$

Обратно, если $L + 1 - \log_2 \widehat{\rho} > 0$, то $2^{-L-1}\widehat{\rho} < 1$, следовательно,

$$\widehat{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \max\left\{2^{-1},\ 2^{-2},\ \ldots,\ 2^{-L},\ 2^{-L-1}\widehat{\rho}\right\} < 1.$$

Поэтому в силу теоремы 5.1.4 имеем $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Предположим теперь, что для некоторого $k \geqslant 0$ выполнено $L + 1 - \log_2 \widehat{\rho} > k$. Докажем, что $\varphi \in C^k$. При $k = 0$ все уже доказано. В силу леммы 5.1.2 имеем $\log_2 \widehat{\rho} \geqslant 1$, следовательно, $L > k$. Тогда функция φ представима в виде $\varphi = B_{k-1} * \varphi_0$, причем функция φ_0 непрерывна (так как для нее имеет место уже доказанный случай $k = 0$). Следовательно, $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$.

Осталось доказать асимптотику модуля непрерывности $w_{\varphi,h}$. Вновь, не ограничивая общности, считаем $l = 0$. Если α_φ — не целое число, то $2^{-L-1}\widehat{\rho} > 2^{-1}$, а если целое, то $2^{-L-1}\widehat{\rho} = 2^{-1}$. Следовательно, максимум чисел

$$2^{-1},\ \ldots,\ 2^{-L},\ 2^{-L-1}\widehat{\rho}$$

в первом случае достигается на единственном элементе $2^{-L-1}\widehat{\rho}$, а во втором — на двух элементах: $2^{-L-1}\widehat{\rho}$ и 2^{-1}. Тогда в силу предложения 6.2.5 в первом случае

$$c_1\widehat{\rho}^k(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) \leqslant \max_{d_1,\ldots,d_k} \|T_{d_1}\ldots T_{d_k}|_{\widetilde{A}_n}\| \leqslant c_2\widehat{\rho}^k(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}), \tag{7.1}$$

а во втором

$$c_1\widehat{\rho}^k(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) \leqslant \max_{d_1,\ldots,d_k} \|T_{d_1}\ldots T_{d_k}|_{\widetilde{A}_n}\| \leqslant c_2 k\widehat{\rho}^k(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}). \tag{7.2}$$

Обратимся теперь к доказательству теоремы 5.1.4. Так как

$$\|T_{d_1}\ldots T_{d_k}(v_1 - v_0)\| \leqslant \|T_{d_1}\ldots T_{d_k}|_{\widetilde{A}_n}\| \cdot \|v_1 - v_0\|,$$

то, подставляя поочередно неравенства (7.1) и (7.2) в неравенство (5.7), получаем соответственно

$$\|v(y)-v(z)\| \leqslant C_2|y-z|^{-\log_2\widehat{\rho}} \quad \text{в первом случае,}$$
$$\|v(y)-v(z)\| \leqslant C_2|y-z|^{-\log_2\widehat{\rho}}\Big|\ln|y-z|\Big| \quad \text{во втором случае.}$$

Следовательно,

$$w_{\varphi,h} \leqslant C_2 h^{\alpha_\varphi}$$

при нецелом α_φ и

$$w_{\varphi,h} \leqslant C_2 h^{\alpha_\varphi}|\ln h|$$

при целом α_φ. Для доказательства обратных неравенств заметим, что вектор v_1-v_0 принадлежит $\widetilde{A}_n$ и не принадлежит никакому меньшему (по включению) общему собственному подпространству операторов T_0, T_1 (по определению $\widetilde{A}_n$). Из этого следует, что

$$\max_{d_1,\ldots,d_k}\|T_{d_1}\ldots T_{d_k}(v_1-v_0)\| \geqslant C\widehat{\rho}^k(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n})$$

(доказывается это так же, как в доказательстве теоремы 5.1.4). Следовательно, $w_{\varphi,h} \geqslant C_1 h$, что завершает доказательство теоремы 7.1.1 в случае а).

Доказательство пункта б) полностью аналогично. $\Diamond$

С л е д с т в и е 7.1.2. *Если $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$ $(k \geqslant 0)$, то $\alpha_\varphi > k$. Если $\varphi \in W_p^k(\mathbb{R})$ $(k \geqslant 0)$, то $\alpha_{\varphi,p} > k$.*

Таким образом, для построения непрерывной стабильной масштабирующей функции нужно:

1) найти порядок нуля маски $\mathbf{m}_0$ в точке $z=-1$ и убедиться, что маска не имеет симметричных нулей на единичной окружности и циклов. Затем с помощью операции очистки перейти к чистой маске $\mathbf{m}_c$;
2) вычислить совместный спектральный радиус $\widehat{\rho}$ операторов $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$, построенных по коэффициентам чистой маски. Функция φ непрерывна тогда и только тогда когда $\log_2\widehat{\rho} < L+1$. При этом $\alpha_\varphi = L+1-\log_2\widehat{\rho}$;
3) найти собственный вектор v_0 оператора T_0, соответствующий собственному значению 1 (такой вектор — единственный, следствие 6.3.6) и положить $v_0 = v(0) = (\varphi(0),\ldots,\varphi(N-1))^T$. Затем по формуле (5.13) последовательно находим значения φ в двоично-рациональных точках, после чего продолжаем функцию по непрерывности на весь отрезок.

Аналогично строится L_p-решение; $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда когда $\log_2\rho_p < L+1$. При этом

$$\alpha_{\varphi,p} = L+1-\log_2\rho_p.$$

Для построения функции φ находим собственный вектор c оператора $\frac{1}{2}(T_0 + T_1)$, соответствующий собственному значению 1, и полагаем

$$c = \int_0^1 v(x)\,dx = \left(\int_0^1 \varphi(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_{N-1}^{N} \varphi(x)\ \ dx \right)^T.$$

Этот вектор — единственный (следствие 6.3.6). Затем по формуле (5.15) последовательно находим значения интегралов функции φ на двоичных отрезках $[q2^{-r}, (q+1)2^{-r}]$, $q \in \mathbb{Z}$, $q2^{-r} \in [0, N]$, $r = 1, 2, \ldots$

Таким образом, *построение и вычисление показателей гладкости масштабирующих функций в пространствах C и L_p сводится к вычислению соответствующих спектральных радиусов пары операторов $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$, соответствующих чистой маске.*

7.2. Локальная гладкость всплесков

Для определения локальной гладкости функции $\varphi(x)$ в различных точках x нужно сделать обратный переход от чистой маски $\mathbf{m}_c(z)$ к маске исходного уравнения $\mathbf{m}_0(z)$. Будем определять локальную гладкость не самой функции φ, а вектор-функции

$$v(x) = \Big(\varphi(x), \varphi(x+1), \ldots, \varphi(x+N-1)\Big)^T, \quad x \in [0,1].$$

Для данной точки $x \in [0,1]$ локальная гладкость $\alpha_v(x)$ равна максимальной из локальных гладкостей функции φ в точках $x, x+1, \ldots, x+N-1$. Из формулы перехода (6.3) следует, что при уничтожении симметричного корня локальная гладкость функции $v(x)$ сохраняется во всех точках x, поэтому, не ограничивая общности, считаем, что маска не имеет симметричных корней. Тогда (следствие 6.3.4) пространство $\widetilde{A}_n$ совпадает с пространством

$$\widetilde{W} = \Big\{(x_1, \ldots, x_N),\ \sum x_k = 0\Big\},$$

а операторы $\widetilde{T}_i$ на этом пространстве имеют вид (6.5). Обозначим

$$\widehat{\rho}_x = \widehat{\rho}_x(\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1), \quad \widehat{\rho} = \widehat{\rho}(\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1),$$

где l — наибольшее целое число, для которого $\varphi \in C^l$ (иными словами $l = [\alpha_\varphi]$, если α_φ не целое, и $l = \alpha_\varphi - 1$, если α_φ — целое). Применяя теперь теорему 5.4.1 о гладкости фрактальных кривых, получаем следующую теорему.

Теорема 7.2.1. *Предположим, что стабильная масштабирующая функция непрерывна. Тогда*

а) *если $\widehat{\rho} < 2$, то $\alpha_{v^{(l)}}(x) \leqslant 1 - \log_2 \widehat{\rho}_x$ в любой точке $x \in [0,1]$; в нормальных точках имеем $\alpha_{v^{(l)}}(x) = 1 - \log_2 \widehat{\rho}_x$.*

б) *если* $\widehat{\rho} \geqslant 2$, *то*

$$\alpha_{v^{(l)}}(x) \leqslant \min\Big\{L - l + 1 - \log_2 \widehat{\rho}_x,\ 1\Big\}$$

в любой точке; *в нормальных точках имеем*

$$\alpha_{v^{(l)}}(x) = \min\Big\{L - l + 1 - \log_2 \widehat{\rho}_x,\ 1\Big\}.$$

Замечание 7.2.2. Условие $\widehat{\rho} < 2$ равносильно тому, что $l = L$, иными словами, φ имеет максимально возможное число непрерывных производных при данном порядке условий Стрэнга–Фикса.

Доказательству предпошлем следующий аналог леммы 6.3.8:

Лемма 7.2.3. *Пусть каждая из двух $N \times N$-матриц $B_i, i = 0, 1$ имеет блочную нижне-треугольную форму* (6.6). *Тогда для любого $x \in [0, 1]$ имеем*

$$\widehat{\rho}_x(B_0, B_1) = \max_{j=1,\dots,l}\ \widehat{\rho}_x(A_0^j, A_1^j).$$

В частности,

$$\overline{\rho}(B_0, B_1) = \max_{j=1,\dots,l}\ \overline{\rho}(A_0^j, A_1^j).$$

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 6.3.8. ◊

Замечание 7.2.4. Аналогичное равенство для нижнего спектрального радиуса $\breve{\rho}(B_0, B_1) = \max\limits_{j=1,\dots l} \breve{\rho}(A_0^j, A_1^j)$, вообще говоря, неверно (хотя это может показаться странным). Соответствующие примеры элементарны.

Доказательство теоремы 7.2.1. Как мы замечали выше, достаточно провести доказательство для маски, не имеющей симметричных корней. Как и в доказательстве теоремы 7.1.1 сводим все к случаю $l = 0$, иначе: если $l \geqslant 1$, применяем теорему 6.4.1 и раскладываем φ в свертку $B_{l-1} * \varphi_0$, после чего переходим к функции φ_0, для которой $l = 0$. Поскольку эта функция является комбинацией целых сдвигов функции $\varphi^{(l)}$, имеем

$$\varphi_{v^{(l)}}(x) = \varphi_{v_0(x)} - l$$

в каждой точке $x \in [0, 1]$. Итак, достаточно провести доказательство для случая $l = 0$. В силу теоремы 5.4.1

$$\alpha_v(x) \leqslant -\log_2\ \widehat{\rho}_x(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n})$$

во всех точках x, причем в нормальных точках выполняется точное равенство. Воспользуемся теоремой 6.3.1. В случае $\widehat{\rho} < 2$, что эквивалентно (замечание 7.2.2) равенству $L = 0$, имеем $T_i|_{\widetilde{A}_n} = \dfrac{1}{2}\widetilde{T}_i$, $i = 0, 1$. Следовательно,

$$\widehat{\rho}_x(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \frac{1}{2}\,\widehat{\rho}_x,$$

что завершает доказательство в случае $\widehat{\rho} < 2$. Если $\widehat{\rho} \geqslant 2$, т. е. $L \geqslant 1$, операторы T_i имеют блочную форму (6.5). Тогда в силу леммы 7.2.3 имеем

$$\widehat{\rho}_x(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \max\left\{2^{-1},\, \ldots,\, 2^{-L},\, 2^{-L-1}\widehat{\rho}_x\right\} = \\ = \max\left\{2^{-1},\, 2^{-L-1}\widehat{\rho}_x\right\},$$

откуда

$$-\log_2 \widehat{\rho}_x(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \min\Big\{L + 1 - \log_2 \widehat{\rho}_x\,,\ 1\Big\},$$

что завершает доказательство теоремы. ♢

Следствие 7.2.5. *Если гладкость масштабирующей функции не превосходит $L-1$, то $\alpha_{v^{(l)}} \leqslant 1$ во всех точках x.*

В случае $l = L$, локальная гладкость функции v может быть сколь угодно большой. В частности, она может больше единицы почти во всех (по мере Лебега) точках x.

Согласно следствию 6.3.2 оба оператора T_0, T_1 на пространстве $\widetilde{A}_n$ невырождены. Этот факт позволяет распространить все результаты главы 5 о локальной гладкости фрактальных кривых на масштабирующие функции. Сначала совместим теорему 7.2.1 с предложением 5.4.2 главы 5, получив формулу гладкости в рациональных точках.

Предложение 7.2.6. *Предположим, что стабильная масштабирующая функция непрерывна. Тогда*

а) *если $\widehat{\rho} < 2$, то в каждой рациональной точке x с периодом $(d_1 \ldots d_k)$, $k \geqslant 2$, имеем*

$$\alpha_{v^{(l)}}(x) = -\frac{1}{k}\log_2 \rho(\widetilde{T}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{T}_{d_k});$$

во всех двоично-рациональных точках имеем

$$\alpha^+_{v^{(l)}}(x) = 1 - \log_2 \rho(\widetilde{T}_0); \qquad \alpha^-_{v^{(l)}}(x) = 1 - \log_2 \rho(\widetilde{T}_1).$$

б) *если $\widehat{\rho} \geqslant 2$, то в каждой рациональной точке с периодом $(d_1 \ldots \ldots d_k)$, $k \geqslant 2$, имеем*

$$\alpha_{v^{(l)}}(x) = \min\Big\{1,\ L + 1 - l - \frac{1}{k}\log_2 \rho(\widetilde{T}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{T}_{d_k})\Big\};$$

во всех двоично-рациональных точках имеем

$$\alpha^+_{v^{(l)}}(x) = \min\Big\{1,\ L + 1 - l - \log_2 \rho(\widetilde{T}_0)\Big\};$$

$$\alpha^-_{v^{(l)}}(x) = \min\Big\{1,\ L + 1 - l - \log_2 \rho(\widetilde{T}_1)\Big\}.$$

Во всех рациональных (но не двоично-рациональных) точках x гладкости слева и справа одинаковы.

Таким образом, во всех рациональных точках локальная гладкость масштабирующей функции явно вычисляется через (обычный) спектральный радиус соответствующего произведения операторов $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$.

Теперь распространим результаты о распределении точек фиксированной локальной гладкости на масштабирующие функции. Так как операторы T_i на пространстве $\widetilde{A}_n$ всегда невырождены, то можно применить к функции φ теорему 5.4.10. При этом для показателя Ляпунова операторов $T_i|_{\widetilde{A}_n}$ согласно лемме 7.2.3 в случае $\widehat{\rho} < 2$ имеем

$$\overline{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \frac{1}{2}\overline{\rho},$$

а в случае $\widehat{\rho} \geqslant 2$ —

$$\overline{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \max\left\{\frac{1}{2},\ 2^{l-L-1}\overline{\rho}\right\}.$$

На нижний спектральный радиус лемма 7.2.3 не распространяется (замечание 7.2.4), тем не менее, для операторов $T_i|_{\widetilde{A}_n}$ аналогичное соотношение выполняется.

Лемма 7.2.7. *Если $\widehat{\rho} < 2$, то $\check{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \frac{1}{2}\check{\rho}$, а в случае $\widehat{\rho} \geqslant 2$ имеем*

$$\check{\rho}(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \max\left\{\frac{1}{2},\ 2^{l-L-1}\check{\rho}\right\}.$$

Доказательство. Если $\widehat{\rho} < 2$, то $l = L$, и по теореме 6.3.1 операторы $T_i|_{\widetilde{A}_n}$ изоморфны операторам $\widetilde{T}_i$, так что в этом случае доказывать нечего. Если $\widehat{\rho} \geqslant 2$, то согласно лемме 7.2.3 имеем

$$\widehat{\rho}_x(T_0|_{\widetilde{A}_n}, T_1|_{\widetilde{A}_n}) = \max\left\{\frac{1}{2},\ 2^{l-L-1}\widehat{\rho}_x\right\} \tag{7.3}$$

для любого $x \in [0, 1]$. Согласно лемме 5.4.9 главы 5 для любой пары невырожденных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ имеем

$$\check{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) = \inf_x \widehat{\rho}_x(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1).$$

Тогда, взяв inf от обеих частей равенства (7.3) по всем $x \in [0, 1]$, получим требуемое. ◊

Теперь применяем теорему 5.4.10 и получаем следующее общее утверждение о распределении точек локальной гладкости для масштабирующих функций.

Теорема 7.2.8. *Предположим, что стабильная масштабирующая функция φ непрерывна, и $l \geqslant 0$ — наибольшее целое, для которого $\varphi \in C^l(\mathbb{R})$. Пусть также $\widetilde{T}_i$, $i = 0, 1$, — операторы, соотвествующие чистой маске, $\widehat{\rho}$, $\check{\rho}$, $\overline{\rho}$ — их совместный спектральный радиус, нижний спектральный радиус и показатель Ляпунова соответственно. Тогда*

$$\left\{\alpha_{v^{(l)}}(x),\ x \in [0, 1]\right\} = \left[\, L + 1 - l - \log_2 \widehat{\rho},\ b\,\right],$$

где $b = 1 - \log_2 \check{\rho}$ в случае $l = L$ и $b = \min\left\{1,\ L + 1 - l - \log_2 \check{\rho}\right\}$ иначе.

Для каждого α из этого отрезка множество точек x, для которых $\alpha_{v^{(l)}}(x) = \alpha$ является непустым 0–1*-множеством, в частности, оно всюду плотно на отрезке* $[0,1]$. *Для показателя средней гладкости $\alpha = \alpha_{av}$, где*

$$\alpha_{av} = \begin{cases} 1 - \log_2 \overline{\rho}, & \textit{если} \quad l = L, \\ \min\Big\{ 1, \ L + 1 - l - \log_2 \overline{\rho} \Big\}, & \textit{если} \quad l < L, \end{cases}$$

это множество имеет полную меру на $[0,1]$, *для всех остальных значений α — меру нуль.*

Так как операторы $\widetilde{T}_i$ невырожденные, то $\breve{\rho} > 0$, откуда получаем

Следствие 7.2.9. *Для любой масштабирующей функции локальная гладкость функции $v(x)$ равномерно ограничена сверху.*

Замечание 7.2.10. Существенным недостатком может показаться то обстоятельство, что мы определяли локальную гладкость не самой функции φ в точке x, а вектор-функции

$$v(x) = \Big(\varphi(x), \varphi(x+1), \ldots, \varphi(x+N-1)\Big)^T, \qquad x \in [0,1],$$

т. е. максимальную из локальных гладкостей функции φ в точках x, $x+1$, …, $x+N-1$. Гладкость самой функции φ в данной точке x мы, вообще говоря, можем только оценить сверху:

$$\alpha_{\varphi^{(l)}}(x) \geqslant \alpha_{v^{(l)}}(x).$$

Данное неравенство может не обращаться в равенство в некоторых точках x. Существуют примеры масштабирующих функций, которые обращаются в тождественную константу на некотором единичном отрезке $[k, k+1]$ внутри носителя, поэтому для всех x из этого отрезка локальная гладкость $\varphi(x)$ обращается в $+\infty$, а локальная гладкость $v(x)$ ограничена (следствие 7.2.9). Следовательно, для всех x из этого отрезка имеет место строгое неравенство

$$\alpha_{\varphi^{(l)}}(x) > \alpha_{v^{(l)}}(x).$$

Более детальный анализ асимптотического поведения вектора $T_{d_1} T_{d_k}\big(v(1) - v(0)\big)$ (см. доказательство теоремы 5.4.1) позволяет определять, в каких точках x выполнено равенство $\alpha_{\varphi^{(l)}}(x) = \alpha_{v^{(l)}}(x)$ и как вычислять локальную гладкость $\alpha_{\varphi^{(l)}}(x)$ в случае, если равенства нет. Все результаты в этом направлении довольно громоздки, и мы оставляем их за рамками данной книги.

Обратимся к гладкости всплесков, порожденных масштабирующими функциями с компактным носителем, в частности, к гладкости всплесков с компактным носителем. Поскольку каждая такая всплеск-функция является комбинацией вида $\sum\limits_k a_k \varphi(x-k)$, ее гладкость совпадает с гладкостью функции φ. Поэтому гладкость всплесков также можно определять с помощью теоремы 7.1.1.

Теорема 7.2.11. *Пусть ψ — всплеск-функция, порожденная масштабирующей функцией с компактным носителем, $\mathbf{m}_0$ — маска масштабирующего уравнения, $\mathbf{m}_c$ — соответствующая чистая маска, $\widehat{\rho}$, ρ_p $(p < \infty)$ — совместный спектральный радиус и p-радиус операторов $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$, соответствующих маске $\mathbf{m}_c$. Тогда*

а) $\alpha_\psi = L + 1 - \log_2 \widehat{\rho}$. *Если α_ψ не является целым числом, то*

$$\omega(\psi^{(l)},\, h) \asymp h^{\alpha_\psi - l},$$

где $l = [\alpha_\psi]$. Если же $\alpha_\varphi = l + 1$ — целое число, то

$$C_1 h \leqslant \omega(\psi^{(l)},\, h) \leqslant C_2 h |\ln h|.$$

б) $\alpha_{\psi,p} = L + 1 - \log_2 \widehat{\rho}_p$. *Если $\alpha_{\psi,p}$ не является целым числом, то*

$$\omega(\psi^{(l)}, h)_p \asymp h^{\alpha_\psi - l},$$

где $l = [\alpha_{\psi,p}]$. Если же $\alpha_{\psi,p} = l + 1$ — целое, то

$$C_1 h \leqslant \omega(\psi^{(l)}, h)_p \leqslant C_2 h |\ln h|.$$

Следствие 7.2.12. *Пусть ψ — всплеск-функция, порожденная масштабирующей функцией с компактным носителем. Если $\psi \in C^k(\mathbb{R})$ $(k \geqslant 0)$, то $\alpha_\varphi > k$. Если $\psi \in W_p^k(\mathbb{R})$ $(k \geqslant 0)$, то $\alpha_{\varphi,p} > k$.*

Следствие 7.2.13. *Пусть ψ — всплеск-функция, порожденная масштабирующей функцией с компактным носителем. Если ее гладкость α_ψ не является целым числом, то $\omega(\psi^{(l)}, h) \asymp h^{\alpha_\psi - l}$, где $l = [\alpha_\psi]$. Аналогичный результат верен для гладкости в $L_p(\mathbb{R})$.*

Все результаты о локальной гладкости масштабирующих функций также распространяются на всплески без каких бы то ни было изменений. Мы сформулируем их для всплесков с компактным носителем ψ_n в теоремах 7.2.14 и 7.2.15. Напомним, что $N = 2n - 1$ и $\operatorname{supp} \psi_n \subset [0, N]$. При $n = 1$ всплеск-функция ψ_1 совпадает с хааровской функцией, случай $n = 2$ будет разобран отдельно, в примере 7.3.7. Поэтому мы сформулируем теоремы 7.2.14 и 7.2.15 для $n \geqslant 3$. Заметим, что в этом случае $l < L$, значит, $\widehat{\rho} \geqslant 2$, поэтому имеет место случай б) теоремы 7.2.1. Обозначим

$$u(x) = \Big(\psi_n(x),\ \ldots,\ \psi_n(x + N - 1)\Big)^T.$$

Как и ранее, обозначим через, $\mathbf{m}_0$ маску масштабирующей функции, порождающей ψ_n, $\mathbf{m}_c$ — соответствующую чистую маску, $\widehat{\rho}_x$, $\widehat{\rho}$, $\check{\rho}$, $\overline{\rho}$ — соответствующие спектральные радиусы операторов $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$.

Применяя теоремы 7.2.1, 7.2.8 и предложение 7.2.6, получаем следующую теорему.

Теорема 7.2.14. *Пусть ψ_n — всплеск-функция с компактным носителем, $n \geqslant 3$. Тогда для любой точки $x \in [0,1]$ имеем*

$$\alpha_{u^{(l)}}(x) \leqslant \min\Big\{L - l + 1 - \log_2 \widehat{\rho}_x,\ 1\Big\};$$

в нормальных точках —

$$\alpha_{u^{(l)}}(x) = \min\Big\{L - l + 1 - \log_2 \widehat{\rho}_x,\ 1\Big\}.$$

В частности, в каждой рациональной точке с периодом $(d_1 \dots d_k)$, $k \geqslant 2$, имеем

$$\alpha_{u^{(l)}}(x) = \min\Big\{1,\ L + 1 - l - \frac{1}{k}\log_2 \rho(\widetilde{T}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{T}_{d_k})\Big\};$$

во всех двоично-рациональных точках

$$\alpha^{+}_{v^{(l)}}(x) = \min\Big\{1,\ L + 1 - l - \log_2 \rho(\widetilde{T}_0)\Big\};$$

$$\alpha^{-}_{v^{(l)}}(x) = \min\Big\{1,\ L + 1 - l - \log_2 \rho(\widetilde{T}_1)\Big\}.$$

Теорема 7.2.15. *Пусть ψ_n — финитная всплеск-функция, $n \geqslant 3$. Тогда*

$$\Big\{\alpha_{u^{(l)}}(x),\ x \in [0,1]\Big\} = \Big[L + 1 - l - \log_2 \widehat{\rho},\ \min\Big\{1,\ L + 1 - l - \log_2 \breve{\rho}\Big\}\Big].$$

Для каждого α из этого отрезка множество точек x, для которых $\alpha_{u^{(l)}}(x) = \alpha$, является непустым 0–1-множеством, в частности, оно всюду плотно на отрезке $[0,1]$. Для показателя средней гладкости

$$\alpha_{av} \ = \ \min\Big\{1,\ L + 1 - l - \log_2 \overline{\rho}\Big\}$$

это множество имеет полную меру на $[0,1]$, для всех остальных значений α — меру нуль.

7.3. Частные случаи и примеры

Как видим, матричный метод позволяет вычислять гладкость масштабирующей функции в пространствах $C(\mathbb{R})$ и $L_p(\mathbb{R})$, а также локальную гладкость соответствующей вектор-функции во всех точках $x \in [0,1]$. Все сводится к нахождению совместных спектральных радиусов $\widehat{\rho}, \widehat{\rho}_p$ и $\widehat{\rho}_x$ и показателя Ляпунова матриц $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$, соответствующих чистой маске. На практике вычисление этих величин представляет значительные трудности. Сложность задачи резко возрастает с ростом размерности матриц, в данном случае — с ростом степени чистой маски. Разбор случаев начнем с низких степеней.

$\underline{\deg \mathbf{m_c} = \mathbf{0}}$. В этом случае чистая маска является константой $\mathbf{m}_c = 1$. Несложно показать, что все стабильные масштабирующие функции с такой чистой маской являются B-сплайнами. В самом деле, если маска $\mathbf{m}_0$ не имеет симметричных корней, то

$$\mathbf{m}_0(z) = \Big(\frac{z+1}{2}\Big)^{L+1},$$

следовательно, $\varphi(x) = B_L(x)$. Если же симметричные корни есть, то начнем от них избавляться, пользуясь предложением 6.2.1, и пусть $\pm a$ — последняя пара симметричных корней. Проведя последнюю итерацию, т. е. заменив эту пару на корень a^2 мы должны прийти к полиному $\big(\frac{z+1}{2}\big)^{L+1}$. Так как a^2 — его корень, то $a^2 = -1$, откуда $\pm a = \pm i$. Последнее невозможно, так как маска не может иметь симметричных корней на единичной окружности, поскольку масштабирующая функция стабильна.

Таким образом, данный случай соотвествует B-сплайнам $B_L(x)$ и только им. Несмотря на то, что показатель гладкости $\alpha_\varphi = L$ целый, имеем $\omega_{\varphi^{(L-1)}} \asymp h$ (сравним с теоремой 7.1.1). Гладкость φ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равна $L+1$ для всех $p \in [1, +\infty)$.

Заметим, что для нестабильных масштабирующих функций случай $\deg \mathbf{m}_c = 0$ соответствует не только B-сплайнам, но всевозможным масштабирующим сплайнам вида

$$\varphi = \sum_{k=0}^{r} a_k B_L(x-k), \tag{7.4}$$

где a_k — определенные коэффициенты. Полную классификацию масштабирующих сплайнов, а также их свойства см. [110, 127].

<u>$\deg \mathbf{m_c} = \mathbf{1}$</u>. В этом случае чистая маска является полиномом первой степени $\mathbf{m}_c(z) = \lambda + (1-\lambda)z$, где λ — произвольное комплексное число отличное от 0 и $\frac{1}{2}$ (иначе маска допускает понижение порядка до нулевой степени). При этом $\widetilde{T}_i$, $i = 0, 1$, — операторы умножения в $\mathbb{R}$, и для них имеем

$$\widehat{\rho} = 2\max\{|\lambda|, |1-\lambda|\}, \quad \widecheck{\rho} = 2\min\{|\lambda|, |1-\lambda|\},$$

$$\rho_p = 2^{1-\frac{1}{p}}\left(|\lambda|^p + |1-\lambda|^p\right)^{1/p}.$$

По теореме 7.1.1 получаем

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi &= L - \log_2\Big(\max\{|\lambda|, |1-\lambda|\}\Big), \\ \alpha_{\varphi,p} &= L + \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\Big(\log_2\left(|\lambda|^p + |1-\lambda|^p\right)\Big). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Займемся локальной гладкостью. Будем считать для определенности $|\lambda| \geqslant |1-\lambda|$, т. е. $\operatorname{Re}\lambda \geqslant -\frac{1}{2}$. Для произвольной последовательности x из нулей и единиц имеем $\widehat{\rho}_x = 2|\lambda|^{1-\overline{\delta}}|1-\lambda|^{\overline{\delta}}$, где

$$\overline{\delta} = \overline{\delta}(x) \ = \ \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} d_j$$

— верхняя плотность единиц в последовательности x. Применив теорему 7.2.1, получаем, что внутри круга $|\lambda| < 1$ (где $\widehat{\rho} < 2$) в любой нормальной точки $x \in [0,1]$ локальная гладкость функции $v^{(L)}$ равна

$$\alpha_{v^{(L)}}(x) = -(1-\overline{\delta})\log_2|\lambda| - \overline{\delta}\log_2|1-\lambda|.$$

В двоично-рациональных x гладкость справа и слева равна соответственно

$$\alpha^{+}_{v^{(L)}} = -\log_2|\lambda|; \qquad \alpha^{-}_{v^{(L)}} = -\log_2|1-\lambda|.$$

Таким образом, если $\operatorname{Re}\lambda \neq -\frac{1}{2}$, то во всех двоично-рациональных точках интервала $[0,1]$ гладкость слева не равна гладкости справа.

Так как $\overline{\rho} = 2\sqrt{|\lambda(1-\lambda)|}$, то

$$\alpha_{av} \ = -\frac{\log_2|\lambda| + \log_2|1-\lambda|}{2}.$$

В частности, если $|\lambda(1-\lambda)| < \frac{1}{4}$ (т. е. точка λ лежит внутри соответствующей лемнискаты с центром в точке $\frac{1}{2}$), то $\alpha_{av} > 1$, значит, $\varphi^{L+1}(x) \equiv 0$ почти всюду. При стремлении λ к точке 1 (оставаясь внутри круга $|\lambda| < 1$) средняя гладкость функции $\varphi^{(L)}$ стремится к бесконечности, хотя эта функция не будет даже всюду дифференцируема: ее локальная гладкость согласно теореме 7.2.8 заполняет отрезок $\bigl[-\log_2|\lambda|, -\log_2|1-\lambda|\bigr]$; при $\lambda \to 1$ левый конец отрезка стремится к 0.

Заметим, что для λ, принадлежащих множеству

$$\Gamma = \Bigl\{\lambda \in \mathbb{C},\ |1-\lambda| < \frac{1}{2},\ |\lambda| < 1\Bigr\}$$

(пересечение двух открытых кругов) гладкость слева больше 1, а справа — меньше. Значит, во всех двоично-рациональных точках функция $v^{(L)}$ справа не дифференцируема, а слева — дифференцируема, и ее левая производная равна 0.

В случае $l < L$, т. е. $|\lambda| \geqslant 1$, имеем случай б) теоремы 7.2.1:

$$\alpha_{v^{(l)}}(x) = \min\Bigl\{L - l - (1-\overline{\delta})\log_2|\lambda| - \overline{\delta}\log_2|1-\lambda|, \quad 1\Bigr\}.$$

В отличие от предыдущего случая ни в одной точке гладкость не может превосходить 1. В двоично-рациональных x гладкости справа и слева равны соответственно

$$\alpha^{+}_{v^{(l)}}(x) = \min\Bigl\{L - l - \log_2|\lambda|,\ 1\Bigr\};$$

$$\alpha^{-}_{v^{(l)}}(x) = \min\Big\{L - l - \log_2|1-\lambda|,\ 1\Big\}.$$

Для средней гладкости имеем

$$\alpha_{av}(x) = \min\Big\{L - l - \frac{\log_2|\lambda| + \log_2|1-\lambda|}{2},\quad 1\Big\}. \tag{7.6}$$

В частности, если $|\lambda(1-\lambda)| \leqslant 2^{2(L-l-1)}$, то $\varphi^{(L+1)}(x) = 1$ для почти всех x. В случае строгого неравенства

$$|\lambda(1-\lambda)| < 2^{2(L-l-1)}$$

этот факт легко объясним: в этом случае $\alpha_{\varphi^{(l)},1} > 1$ (формула 7.5), следовательно, $\varphi^{(l)} \in W_1^1$. Таким образом, функция $\varphi^{(l)}$ почти всюду дифференцируема и ее прозводная принадлежит L_1. В силу теоремы Лебега (приложение A.10) такая функция локально липшицева почти всюду, т. е. для почти всех x найдется константа $C(x)$, для которой

$$\left\|v^{(l)}(x+h) - v^{(l)}(x)\right\| = \left\|\int\limits_x^{x+h} v^{(l+1)}(t)\,dt\right\| \leqslant C(x)|h|.$$

Следовательно, $\alpha_{v^{(l)}} = 1$.

$\underline{\deg \mathbf{m_c} = \mathbf{2}}$. В этом случае мы имеем в качестве чистой маски полином второй степени

$$\mathbf{m}_c(z) = \frac{1}{2}\Big(c_2z^2 + c_1z + c_0\Big),$$

где $c_0 + c_1 + c_2 = 2$. В случае $c_1 = 1$ маска допускает дальнейшее понижение порядка, и все сводится к одному из предыдущих случаев, поэтому считаем, что $c_1 \neq 1$. Матрицы операторов $\widetilde{T}_i$ выглядят следующим образом:

$$\widetilde{T}_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{T}_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

Вычисление необходимых величин $\widehat{\rho}$, $\widehat{\rho}_p$, $\check{\rho}$, $\overline{\rho}$ теперь представляет значительные трудности. Мы разберем лишь случай вещественных коэффициентов c_0, c_1, c_2, и главным образом сосредоточимся на вычислении совместного спектрального радиуса $\widehat{\rho}$, отвечающего за непрерывность масштабирующей функции.

Лемма 7.3.1. *Если коэффициенты c_0, c_1, c_2 вещественны, то матрицы операторов $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$ одновременно симметризуемы (т. е. в подходящем базисе матрицы обоих операторов симметричны) тогда и только тогда когда*

$$c_0c_1c_2(c_1 - 1) \geqslant 0. \tag{7.7}$$

Доказательство будет несложным упражнением для читателя. $\Diamond$

Нетрудно изобразить на координатной плоскости множество пар коэффициентов (c_0, c_2), удовлетворяющих (7.7) (коэффициент c_1 выражается через c_0, c_2 как $c_1 = 2 - c_0 - c_2$). Для каждой точки этого множества вычисление совместного спектрального радиуса не представляет труда, поскольку для симметрических матриц

$$\widehat{\rho} = \max\{\rho(\widetilde{T}_0),\, \rho(\widetilde{T}_1)\}.$$

В самом деле, в силу (5.1) имеем $\widehat{\rho} \geqslant \max\{\rho(\widetilde{T}_0),\, \rho(\widetilde{T}_1)\}$. С другой стороны, очевидно, $\widehat{\rho} \leqslant \max\{\|\widetilde{T}_0\|,\, \|\widetilde{T}_1\|\}$, а для симметрических матриц $\|\widetilde{T}_i\| = \rho(\widetilde{T}_i)$ (норма евклидова). Следовательно,

$$\widehat{\rho} = \max\{\rho(\widetilde{T}_0),\, \rho(\widetilde{T}_1)\}.$$

Таким образом, $\widehat{\rho} = \max\{|c_0|,\, |c_1|,\, |c_2|\}$. Получаем

Предложение 7.3.2. *Если коэффициенты c_0, c_1, c_2 вещественны и*

$$c_0\, c_1\, c_2\, (c_1 - 1) \geqslant 0,$$

то

$$\widehat{\rho}(\widetilde{T}_0,\, \widetilde{T}_1) = \max\{|c_0|,\, |c_1|,\, |c_2|\}.$$

Заметим, однако, что одновременная симметризуемость матриц не дает возможности столь же легко вычислять нижний спектральный радиус $\check{\rho}$ или p-радиус ρ_p. Что же касается пар (c_0, c_2), не удовлетворяющих данному неравенству, то надежды на легкую вычисляемость совместного спектрального радиуса для них (пусть перебором не двух, но какого-то небольшого числа матричных произведений) не оправдалась. Расчеты, проведенные в работах [131, 132] показывают, что для некоторых пар (c_0, c_2) перебор всех матричных произведений длины $k = 20$ не дает точного значения совместного спектрального радиуса. Например, в случае $(c_0, c_2) = (1{,}2,\, -0{,}4)$ величина $\bigl(\max \rho(\Pi_k)\bigr)^{1/k}$ дает приближение $\widehat{\rho}$ с относительной погрешностью 10^{-3} при $k \geqslant 72$. То есть, вообще говоря, нужно перебрать более $6 \cdot 10^{19}$ матричных произведений! Не известно даже, можно ли для каждой точки (c_0, c_2) ограничиться конечным перебором. Иными словами, верна ли конечная гипотеза Лагариаса [133] для матриц $\widetilde{T}_0$, $\widetilde{T}_1$ с вещественными коэффициентами?

На этом фоне удачно выглядит лишь случай симметричной маски $(c_0 = c_2)$, в котором можно легко найти не только $\widehat{\rho}$, но и $\check{\rho}$.

Предложение 7.3.3. *Если коэффициенты c_0, c_1, c_2 вещественны и $c_0 = c_2$, то в случае $c_1 \in [0, 1]$ имеем*

$$\widehat{\rho} = \sqrt{\rho(\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1)}\,, \quad \check{\rho} = \max\{\rho(\widetilde{T}_0),\, \rho(\widetilde{T}_1)\}.$$

Если же $c_1 \notin [0, 1]$, то

$$\widehat{\rho} = \max\{\rho(\widetilde{T}_0),\, \rho(\widetilde{T}_1)\}, \quad \check{\rho} = \sqrt{\rho(\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1)}\,.$$

Таким образом, если $c_1 \leqslant 0$ или $c_1 \geqslant 1$, то

$$\widehat{\rho} = \max\{|c_0|,\ |c_1|,\ |c_2|\} = \max\left\{\ \left|c_1\right|,\ \left|1 - \frac{c_1}{2}\right|\ \right\}$$

(что согласуется с предложением 7.3.2), и

$$\breve{\rho} = \frac{1}{4}\max\left\{\left|2 - c_1 + \sqrt{4 + 12c_1 - 7c_1^2}\ \right|,\quad \left|2 - c_1 - \sqrt{4 + 12c_1 - 7c_1^2}\ \right|\right\}.$$

В случае $0 \leqslant c_1 \leqslant 1$ эти величины меняются местами.

Для доказательства предложения 7.3.3 понадобится один вспомогательный результат, на котором основан геометрический подход к проблеме вычисления совместного спектрального радиуса.

Предложение 7.3.4. *Пусть даны два линейных оператора $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$, действующих в $\mathbb{R}^n$, и положительное число λ. Тогда*

а) *если существует центрально-симметричное относительно нуля выпуклое тело (выпуклый компакт с непустой внутренностью) $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\widetilde{B}_i\mathcal{M} \subset \lambda\,\mathcal{M}$, то $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) \leqslant \lambda$;*

б) *если существует замкнутое множество $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, не содержащее нуль, для которого $\widetilde{B}_i\mathcal{Q} \subset \lambda\mathcal{Q}$, то $\breve{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) \geqslant \lambda$.*

Доказательство. а). Обозначим через $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ норму Минковского, соответствующую выпуклому телу $\mathcal{M}$. Так как $\|\widetilde{B}_i\|_{\mathcal{M}} \leqslant \lambda$, $i = 0, 1$, то норма любого произведения $\widetilde{B}_{d_1} \ldots \widetilde{B}_{d_k}$ не превосходит λ^k. Следовательно,

$$\max_{d_1,\ldots,d_k} \|\widetilde{B}_{d_1} \ldots \widetilde{B}_{d_k}\|_{\mathcal{M}}^{1/k} \leqslant \lambda$$

для любого k, поэтому $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) \leqslant \lambda$.

б). Пусть $h = \inf\{\|u\|,\ u \in \mathcal{Q}\}$. Ясно, что $h > 0$. Возьмем произвольную точку $a \in \mathcal{Q}$. Для любых $d_1, \ldots, d_k$ имеем $\widetilde{B}_{d_1} \ldots \widetilde{B}_{d_k} a \in \lambda^k\mathcal{Q}$, значит, $\|\widetilde{B}_{d_1} \ldots \widetilde{B}_{d_k} a\| \geqslant h\lambda^k$. Следовательно,

$$\min_{d_1,\ldots,d_k} \|\widetilde{B}_{d_1} \ldots \widetilde{B}_{d_k}\|^{1/k} \geqslant \left(\frac{h}{\|a\|}\right)^{1/k}\lambda$$

для любого k, поэтому

$$\breve{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) \geqslant \lambda. \qquad \diamondsuit$$

Идея доказательства предложения 7.3.3 очень проста. Предложение 7.3.4 дает возможность получать оценки сверху для $\widehat{\rho}$ и оценки снизу для $\breve{\rho}$. Для этого нужно лишь предъявить подходящее выпуклое тело $\mathcal{M}$ или, соответственно, замкнутое множество $\mathcal{Q}$. С другой стороны, лемма 5.1.2 дает обратные оценки. Согласно (5.1) для любого произведения Π_k величина $\big(\rho(\Pi_k)\big)^{1/k}$ является оценкой снизу для $\widehat{\rho}$ и оценкой сверху для $\breve{\rho}$. Если «повезет», и нижняя оценка совпадет с верхней, то точное значение $\widehat{\rho}$ (или $\breve{\rho}$) будет найдено. Для этого нужно предъявить подходящее произведение Π_k и множество $\mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{Q}$).

Доказательство предложения 7.3.3 разобьем на несколько случаев. Сначала вычислим $\widehat{\rho}$. Если $c_1 \leqslant 0$ или $c_1 \geqslant 1$, то коэффициенты удовлетворяют (7.7), и в силу предложения 7.3.2 имеем $\widehat{\rho} = \max\{\rho(\widetilde{T}_0),\, \rho(\widetilde{T}_1)\}$. Пусть теперь $0 < c_1 < 1$. Применив неравенство (5.1), получаем

$$\widehat{\rho} \geqslant \sqrt{\rho(\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1)}\,.$$

Для доказательства обратного неравенства воспользуемся предложением 7.3.4. Положим

$$y = \Bigl(\sqrt{c_0^2 + 4c_1c_0} - c_0\Bigr) \Big/ (2c_1), \quad b = \Bigl(1 + y\Bigl(\frac{c_1}{c_0} - 1\Bigr)\Bigr) \Big/ \Bigl(2 - \frac{c_1}{c_0}\Bigr).$$

Тогда искомым телом $\mathcal{M}$ является выпуклый шестиугольник с вершинами

$$(1, y),\ (-1, -y),\ (y, 1),\ (-y, -1),\ (-b, b),\ (b, -b).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\widetilde{T}_i\mathcal{M} \subset \lambda\mathcal{M}, \qquad i = 0, 1.$$

В самом деле, при $i = 0$ имеем

$$\widetilde{T}_0(\pm 1, \pm y) = \lambda(\pm y, \pm 1), \quad \widetilde{T}_0(\pm y, \pm 1) \in [\lambda(\pm y, \pm 1),\, \lambda(\pm b, \mp b)],$$
$$\widetilde{T}_0(\pm b, \mp b) \in \lambda\mathcal{M}.$$

При $i = 1$ все аналогично. Таким образом, $\widehat{\rho} = \lambda$.

Найдем теперь $\breve{\rho}$. Если $c_1 \leqslant -\dfrac{2}{7}$ или $c_1 \geqslant 2$, то у оператора $\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1$ собственные значения равны по модулю: $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Следовательно,

$$\sqrt{\rho(\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1)} = [\det{(\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1)}]^{1/4} = [\det \widetilde{T}_0]^{1/2}$$

(поскольку $\det \widetilde{T}_0 = \det \widetilde{T}_1$). Для любых $d_1, \ldots, d_k$ имеем

$$\bigl[\rho(\widetilde{T}_{d_1} \ldots \widetilde{T}_{d_k})\bigr]^{1/k} \geqslant \bigl[\det{(\widetilde{T}_{d_1} \ldots \widetilde{T}_{d_k})}\bigr]^{1/2k} = [\det \widetilde{T}_0]^{1/2}.$$

Следовательно, $\breve{\rho} \geqslant [\det \widetilde{T}_0]^{1/2}$. С другой стороны согласно лемме 5.1.2 имеем

$$\breve{\rho} \leqslant \bigl[\rho(\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1)\bigr]^{1/2} = [\det \widetilde{T}_0]^{1/2}.$$

Таким образом, $\breve{\rho} = \bigl[\rho(\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1)\bigr]^{1/2}$.

В случае $-\dfrac{2}{7} < c_1 < 2$ применяем предложение 7.3.4. Для $c_1 \in [0, 1]$ достаточно доказать, что

$$\breve{\rho} \geqslant \lambda = \max\Bigl\{\rho(\widetilde{T}_0),\, \rho(\widetilde{T}_1)\Bigr\}.$$

При $c_1 \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ берем $\mathcal{Q} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1, x_2 \geqslant 1\}$. При $c_1 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ в качестве $\mathcal{Q}$ подходит угол с вершиной в точке $(1, 1)$, стороны которого сонаправлены векторам $(2 - 3c_1,\ 2 - c_1)$ и $(2 - c_1,\ 2 - 3c_1)$.

Для $c_1 \in \left[-\frac{2}{7}, 0\right] \cup \bigl(1, 2\bigr)$ достаточно показать, что $\check{\rho} \geqslant \lambda = \sqrt{\rho(\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1)}$. При $c_1 \in (1, 2)$ в качестве $\mathcal{Q}$ берем фигуру, ограниченную отрезком $[(y, 1),\ (1, y)]$ (y определен выше) и двумя лучами, выпущенными из точек $(y, 1)$ и $(1, y)$ в направлении векторов $(c_1 - 2,\ 2c_1)$ и $(2c_1,\ c_1 - 2)$ соответственно. Наконец, при $c_1 \in \left[-\frac{2}{7}, 0\right]$ множество $\mathcal{Q}$ ограничено тем же отрезком $[(y, 1),\ (1, y)]$ и двумя лучами, выпущенными из его концов в направлении векторов

$$\left(2 - c_1 - \sqrt{4 + 12c_1 - 7c_1^2},\ -4c_1\right) \text{ и } \left(-4c_1,\ 2 - c_1 - \sqrt{4 + 12c_1 - 7c_1^2}\right)$$

соответственно. Предложение 7.3.3 доказано. $\Diamond$

Авторам не известно, существуют ли явные формулы для вычисления p-радиуса ρ_p при конечных p или показателя Ляпунова $\overline{\rho}$ при условиях предложения 7.3.3.

$\underline{\deg \mathbf{m_c} \geqslant \mathbf{3}}$. Случай высоких размерностей операторов $\widetilde{T}_i$ начинается с размерности 3. Здесь нам неизвестно, существуют ли способы явного вычисления совместных спектральных радиусов эти операторов, и речь может идти лишь об алгоритмах приближенного вычисления. На сегодняшний день существует несколько алгоритмов приближенного вычисления для $\widehat{\rho}, \check{\rho}, \rho_p, \overline{\rho}$. Вычислительная сложность этих алгоритмов (число арифметических операций, необходимых для нахождения данной величины с относительной погрешностью ε) сильно растет с ростом размерности n и с уменьшением ε. В [134] было показано, что даже для пары 2×2-матриц вычисление совместного спектрального радиуса $\widehat{\rho}$, вообще говоря, не сводится к вычислению обычного спектрального радиуса никакого конечного произведения этих матриц. Более того, в общем случае не существует алгоритма вычисления $\widehat{\rho}$, который был бы полиномиальным как по размерности n, так и по $\frac{1}{\varepsilon}$ [72, 135, 136]. Хотя есть алгоритмы (они будут упомянуты ниже), которые полиномиальны по $\frac{1}{\varepsilon}$ при фиксированной размерности n, а также алгоритмы, полиномиальные по n при фиксированном ε.

Нам неизвестно, можно ли в этих алгоритмах использовать специфику операторов $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$ для существенного снижения сложности; мы сформулируем все результаты в общем случае, для произвольной пары операторов $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_n$, действующих в $\mathbb{R}^n$. Согласно леммам 6.3.8 и 7.2.3, не ограничивая общности, можно предположить, что пара $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ неприводима; согласно теореме 6.1.1 операторы $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$ удовлетворяют этому условию.

1. *Вычисление $\breve{\rho}$, $\widehat{\rho}$, $\overline{\rho}$, ρ_p перебором матричных произведений.* Для любого $k \geqslant 1$ имеем

$$\max_{d_1,\ldots,d_k} \big(\rho(\Pi_k)\big)^{1/k} \leqslant \widehat{\rho} \leqslant \max_{d_1,\ldots,d_k} \big\|\Pi_k\big\|^{1/k}, \tag{7.8}$$

где $\Pi_k = \widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}$. Левая часть неравенства следует из леммы 5.1.2, доказательство правой части будет легким упражнением для читателя. Обе величины $\max\limits_{d_1,\ldots,d_k} \big(\rho(\Pi_k)\big)^{1/k}$ и $\max\limits_{d_1,\ldots,d_k} \big\|\Pi_k\big\|^{1/k}$ с разных сторон стремятся к $\widehat{\rho}$ при $n \to \infty$ (первая — согласно лемме А.6.2, вторая — по определению). Таким образом, при достаточно больших k совместный спектральный радиус будет зажат с обеих сторон с данной относительной погрешностью ε. При этом число k, вообще говоря, будет иметь порядок не ниже ε^{-1}, поэтому число матричных произведений для перебора будет порядка $2^{1/\varepsilon}$. Число операций растет экспоненциально по $1/\varepsilon$. В работах [137–139] предложен ряд модификаций этого алгоритма, позволяющих сократить перебор. Однако сложность по-прежнему остается экспоненциальной.

Аналогично, с помощью предельного соотношения

$$\breve{\rho} = \lim_{k\to\infty} \min_{d_1,\ldots,d_k} \big(\rho(\Pi_k)\big)^{1/k}$$

(лемма А.6.2) можно приближенно вычислять нижний спектральный радиус. В терминах масштабирующих функций это означает, что мы вычисляем максимальную и минимальную локальную гладкость перебором достаточно большого числа рациональных точек x (так как величина $-\log_2\big(\rho(\Pi_k)\big)^{1/k}$ равна локальной гладкости в каждой рациональной точке с периодом $(d_1 \ldots d_k)$, предложение 7.2.6).

Величины $\overline{\rho}$ и ρ_p вычисляются по определению (формула (5.23) и определение 5.2.1), сложность вычислений при этом также экспоненциальна и даже превосходит сложность вычисления $\widehat{\rho}$. Так же по определению приходится вычислять величины $\widehat{\rho}_x$ для нахождения локальной гладкости. Исключение составляют лишь рациональные точки x, в которых локальная гладкость вычисляется через обычный спектральный радиус (предложение 7.2.6).

2. *Вычисление ρ_p и оценка $\widehat{\rho}$ с помощью произведений Кронекера.* Оказывается, что p-радиус ρ_p может быть вычислен явно для целых четных значений $p = 2r$, задача сводится к вычислению обычного спектрального радиуса специальной матрицы размерности n^{2r}. При $r \to \infty$ получаем приближение для $\widehat{\rho}$. Впервые этот алгоритм был разработан в [115], затем независимо в работах [117] и [118]. Для простоты ограничимся случаем матриц с действительными коэффициентами.

Произведением Кронекера двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, первая из которых имеет размеры $m \times n$, а вторая $k \times l$ является $mk \times nl$-матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ \vdots & * & \vdots \\ a_{m1}B & \ldots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Обозначим $B^{\otimes k} = B \otimes \ldots \otimes B$ (k сомножителей). Тогда

$$\rho_p(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) = \big(\rho(\mathcal{A}_p)\big)^{1/p}, \tag{7.9}$$

где $\rho(\mathcal{A}_p)$ — спектральный радиус $n^p \times n^p$-матрицы

$$\mathcal{A}_p = \frac{1}{2}\left(\widetilde{B}_0^{\otimes 2r} + \widetilde{B}_1^{\otimes 2r}\right), \quad p = 2r,$$

— целое четное число (см. [115] или [117] за соответствующими доказательствами). В частности, при $r = 1$ оператор A_2 может быть представлен как оператор в пространстве $n \times n$-матриц, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_2 X = \frac{1}{2}\left(\widetilde{B}_0 X \widetilde{B}_0^* + \widetilde{B}_1 X \widetilde{B}_1^*\right). \tag{7.10}$$

Спектральный радиус этого оператора равен $(\rho_2)^2$ (приложение A.6, теорема A.6.6). Можно немного понизить размерность, и рассматривать ограничение оператора A_2 на пространство симметрических матриц размера $n \times n$ (размерность снизится с n^2 до $\dfrac{n(n+1)}{2}$), результат будет тот же [115].

Применив теперь теорему 7.1.1 пункт (б), получаем, что

гладкость масштабирующих функций и всплесков в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, т.е. показатель $\alpha_{\varphi,2}$ вычисляется через спектральный радиус $\dfrac{n(n+1)}{2}$-мерного оператора (7.10)*, равно как показатель $\alpha_{\varphi,2r}$ при любом $r \geqslant 1$ вычисляется через спектральный радиус оператора* (7.9).

Основное неудобство такого подхода — высокая размерность оператора $\mathcal{A}_{2r}$ при больших r.

Данный метод позволяет приближенно вычислять совместный спектральный радиус $\widehat{\rho}$ за полиномиальное время по размерности n (при фиксированном ε). Поскольку для любого p имеем

$$\rho_p \leqslant \widehat{\rho} \leqslant 2^{1/p} \rho_p,$$

величина ρ_p приближает совместный спектральный радиус $\widehat{\rho}$ с погрешностью $\varepsilon \asymp \dfrac{1}{p}$. Пользуясь (7.9), получаем, что величина $\bigl(\rho(\mathcal{A}_p)\bigr)^{1/p}$ приближает $\widehat{\rho}$ с погрешностью $\varepsilon \asymp \dfrac{1}{p}$. Так, для приближения совместного спектрального радиуса с точностью 70% достаточно взять $p = 2$ (независимо от размерности n) и вычислить спектральный радиус оператора (7.10). Взяв $p = 8$, получаем точность в 91%. Данный подход к вычислению совместного спектрального радиуса был разработан в [117] и [118]. При фиксированной погрешности ε он имеет полиномиальную сложность по n, общее число операций имеет порядок $n^{C/\varepsilon}$, где C — абсолютная константа. Метод удобно применять для получения грубых оценок на $\widehat{\rho}$ при высоких размерностях n. Кроме того, как показано в [116], функция $\rho_{1/x}$ выпукла по $x \in (0, 1)$, это свойство позволяет немного понизить верхнюю оценку сложности алгоритма.

3. *Геометрический метод вычисления $\widehat{\rho}, \check{\rho}$ и ρ_p.* Совместный спектральный радиус является точной нижней гранью чисел λ, для которых существует норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$, в которой $\|\widetilde{B}_i\| \leqslant \lambda$, $i = 0, 1$ (см. доказательство предложения 5.1.3). Для неприводимой пары операторов этот инфимум всегда достигается, причем существует, в некотором смысле, наименьшая из норм со свойством $\|\widetilde{B}_i\| \leqslant \lambda$, $i = 0, 1$. Имеет место следующая

Теорема 7.3.5. *Для произвольной неприводимой пары линейных операторов* $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ *существует выпуклое тело* M (*выпуклый компакт с непустой внутренностью*), *симметричное относительно нуля*, *и положительное число* λ *такие*, *что*

$$\operatorname{Conv}(\widetilde{B}_0 M \cup \widetilde{B}_1 M) = \lambda M.$$

Более того, *для любого выпуклого тела с таким свойством имеем* $\lambda = \widehat{\rho}$.

Доказательство см. в [119]. ♢

В дальнейшем будем называть такое тело M инвариантным. Для данной пары операторов инвариантное тело не обязательно единственно. Норма Минковского, соответствующая инвариантному телу является наименьшей нормой в $\mathbb{R}^n$, для которой $\|\widetilde{B}_i\| \leqslant \lambda$, $i = 0, 1$. На теореме 7.3.5 основан геометрический алгоритм вычисления совместного спектрального радиуса, разработанный в [119]. Он состоит в последовательном приближении инвариантного тела многогранниками. При фиксированной размерности n алгоритм полиномиальный по $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Например, при $n = 2$ его сложность не превосходит $C\varepsilon^{-3/2}$. Для малых размерностей n он позволяет вычислять совместный спектральный радиус с высокой точностью. При больших размерностях он практически неприменим, так как его сложность растет экспоненциально с размерностью.

В некоторых случаях удается искусственно подобрать инвариантное тело M, что позволяет найти точное значение $\widehat{\rho}$. Также, подбором множеств $\mathcal{M}$, $\mathcal{Q}$ из предложения 7.3.4 можно получить оценки на величины $\widehat{\rho}$ и $\widecheck{\rho}$, а иногда даже находить их точные значения, как это сделано нами в предложении 7.3.3.

Теорема 7.3.5 может быть распространена на p-радиусы для всех $p \in [1, +\infty)$. Для этого вместо операции Conv взятия выпуклой оболочки используется сложение по Фирею $\overset{p}{\oplus}$ (называемое также L_p-сложением выпуклых тел). Это — бинарная операция на множестве центрально-симметричных выпуклых множеств. По определению равенство $M_3 = M_1 \overset{p}{\oplus} M_2$ означает, что

$$\varphi_{M_3} = \big\|(\varphi_{M_1}, \varphi_{M_2})\big\|_p,$$

где $\varphi_M(x) = \sup\limits_{y \in M}(x, y)$ — опорная функция M, а $\|\cdot\|_p$ — L_p-норма в $\mathbb{R}^d$. Так, например, при $p = \infty$ сложение по Фирею совпадает со взятием выпуклой оболочки, а при $p = 1$ оно является обычным сложением выпуклых множеств по Минковскому.

Теорема 7.3.6. *Для произвольной неприводимой пары линейных операторов* $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ *при любом* $p \in [1, +\infty)$ *существует выпуклое тело* $M \subset \mathbb{R}^n$, *симметричное относительно нуля*, *и положительное число* λ *такие*, *что*

$$\widetilde{B}_0 M \overset{p}{\oplus} \widetilde{B}_1 M = \lambda M.$$

Более того, *для любого выпуклого тела с таким свойством имеем* $\lambda = 2^{1/p}\rho_p$.

Доказательство см. в [115]. ♢

Будем называть такое тело M инвариантным и обозначать M_p. Геометрический алгоритм вычисления ρ_p состоит в последовательном приближении инвариантного тела M_p p-зонотопами (суммами Фирея конечного числа отрезков). Он также является полиномиальным относительно $\frac{1}{\varepsilon}$; его сложность не превосходит $C(n)\varepsilon^{2-2n}$ (см. [115]).

При целых четных значениях p существует интересная связь между инвариантным телом M_p и оператором $\mathcal{A}_p$. Данный оператор всегда имеет инвариантный конус $K \in \mathbb{R}^{n^p}$ [115, 118]. Следовательно, по теореме Перрона–Фробениуса (см., например, [26]) он имеет действительный собственный вектор $U_p \in K$ с собственным значением $\rho(\mathcal{A}_p) = (\rho_p)^p$. Вектор U_p естественным образом представляется в виде набора из n^{p-1} векторов из $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $M_U \subset \mathbb{R}^n$ соответствующий зонотоп, т. е. $\overset{p}{\oplus}$-сумму всех этих векторов. Тогда $M_U = M_p$ — инвариантное тело операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$. Таким образом, инвариантные тела соответствуют собственным векторам оператора $\mathcal{A}_p$ с собственным значением $\rho(\mathcal{A}_p)$. В частности, если такой вектор единственный, то и инвариантное тело единственно. Для $p = 2$, оператор $\mathcal{A}_2$ дается формулой (7.10), множество неотрицательно определенных симметрических матриц является его инвариантным конусом. Поэтому соответствующий собственный вектор U_2 также является неотрицательно (на самом деле даже — положительно) определенной симметрической матрицей. Следовательно, U_2 определяет эллипсоид в $\mathbb{R}^n$. Этот эллипсоид и будет инвариантным телом M_2 относительно L_2-сложения $\overset{2}{\oplus}$. Все доказательства могут быть найдены в [115].

Пример 7.3.7 (всплеск-функция Добеши ψ_2). Всплеск-функция Добеши $\psi_2(x)$ (индекс 2 далее будем опускать) определяется с помощью масштабирцющей функции φ, удовлетворяющей следующему уравнению (индекс 2 в дальнейшем опускаем)

$$\varphi(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\,\varphi(2x) + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\,\varphi(2x-1) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\,\varphi(2x-2) + \\ + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\,\varphi(2x-3). \quad (7.11)$$

Для данной маски имеем: $L = 1$, так как $\mathbf{m}(-1) = \mathbf{m}'(-1) = 0$, чистая маска дается формулой

$$\mathbf{m}_c(z) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,z + \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом,

$$\alpha_\psi = \alpha_\varphi = 1 - \log_2\Bigl(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Bigr) = 0{,}5500\ldots$$

Следовательно, функция ψ непрерывна, но не принадлежит C^1. Так как показатель гладкости — не целый, то $\omega(\psi, t) \asymp t^{0{,}5500\ldots}$. Производная ψ' суммируема, но не из $L_2(\mathbb{R})$. В самом деле,

$$\alpha_{\psi,1} = 2 - \log_2\sqrt{3} = 1{,}2075\ldots,$$

таким образом, гладкость ψ' в пространстве L_1 равна $1 - \log_2 \sqrt{3} = 0{,}2075\ldots$ С другой стороны, $\alpha_{\psi,2} = 1$, так что $\psi' \notin L_2(\mathbb{R})$.

Вычислим локальную гладкость функции

$$v(x) = \bigl(\psi(x), \ldots, \psi(x+3)\bigr)^T.$$

Согласно (7.6) для почти всех $x \in [0,1]$ имеем

$$\alpha_v(x) = \min\left\{1 - \log_2 \frac{1}{2},\ 1\right\} = \min\{2, 1\} = 1$$

(это, впрочем, следует уже из принадлежности ψ к пространству W_1^1). Величина $\alpha_v(x)$ при $x \in [0,1]$ заполняет отрезок

$$\left[1 - \log_2 \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ 1\right] = \bigl[0{,}550\ldots;\ 1\bigr].$$

В двоично-рациональных точках x имеем

$$\alpha_v(x-0) = \min\left\{1 - \log_2 \frac{\sqrt{3}-1}{2},\ 1\right\} = \min\{2{,}4499\ldots; 1\} = 1;$$

$$\alpha_v(x+0) = \min\left\{1 - \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ 1\right\} = \min\{0{,}5500\ldots;\ 1\} = 0{,}5500\ldots$$

Итак, во всех двоично-рациональных точках правая производная бесконечна. Несложно показать, что левая производная определена и и конечна.

П р и м е р 7.3.8 (третья всплеск-функция Добеши ψ_3). Третья всплеск-функция Добеши определяется с помощью масштабной функции, удовлетворяющей уравнению пятой степени с коэффициентами

$$\begin{aligned}
c_0 &= [1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\,]/16,\\
c_1 &= [5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\,]/16,\\
c_2 &= [10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\,]/16,\\
c_3 &= [10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\,]/16,\\
c_4 &= [5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\,]/16,\\
c_5 &= [1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\,]/16.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

В данном случае $L = 2$. Чистая маска (коэффициенты даем приближенно):

$$\mathbf{m}_c(z) = \frac{1}{2}\Bigl((0{,}398\,538\ldots)z^2 - (2{,}162\,272\ldots)z + (3{,}763\,736\ldots)\Bigr).$$

Коэффициенты удовлетворяют (7.7), поэтому по лемме 7.3.1 имеем

$$\widehat{\rho}(\widetilde{T}_0,\, \widetilde{T}_1) = \max\{\rho(\widetilde{T}_0);\, \rho(\widetilde{T}_1)\} = \\ = \max\{0{,}398\,538;\; 2{,}162\,272;\; 3{,}763\,736\} = 3{,}763\,736.$$

Тогда

$$\alpha_\psi = L + 1 - \log_2 \widehat{\rho} = 3 - \log_2(3{,}763\,736) = 1{,}087\,833\ldots$$

Таким образом, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, ее производная непрерывна с показателем Гёльдера $\alpha_{\psi'} = 0{,}087\,833\ldots$ В силу теоремы 7.2.11 имеем

$$\omega(\psi', t) \asymp t^{\alpha_\psi - 1} = t^{0{,}087\,833}.$$

Наименьшую гладкость функция ψ имеет в двоично-рациональных точках. В самом деле,

$$\alpha_{v'}(x+0) = 2 - \log_2 \rho(\widetilde{T}_0) = 2 - \log_2(3{,}763\,736) = 0{,}087\,833.$$

Заметим, что

$$\alpha_{v'}(x-0) = 2 - \log_2 \rho(\widetilde{T}_1) = 2 - \log_2(2{,}162\,272) = 0{,}887\,451.$$

Как видим, в двоично-рациональных точках гладкости слева и справа различны. Гладкость слева равна минимальной локальной гладкости функции ψ'. Оказывается, что гладкость справа равна максимальной гладкости. Иными словами, $\breve{\rho}(\widetilde{T}_0,\, \widetilde{T}_1) = \rho(\widetilde{T}_1) = 2{,}162\,272\ldots$ Для того, чтобы это показать, воспользуемся предложением 7.3.4 (пункт б). В качестве $\mathcal{Q}$ подходит объединение двух углов: первый имеет вершину в точке $(1,0)$ и стороны, сонаправленные векторам $(5,1)$ и $(5,-1)$; второй симметричен ему относительно начала координат.

Таким образом локальная гладкость $v'(x)$ не превосходит $0{,}887\,451\ldots$ в каждой точке. В частности, $v'(x)$ нигде не дифференцируема.

Пример 7.3.9 (всплеск-функция Добеши ψ_4). Соответствующее масштабирующее уравнение степени $N = 7$ имеет коэффициенты (приближенно):

$$\begin{aligned} c_0 &= 0{,}325\,802, & c_4 &= -0{,}264\,507,\\ c_1 &= 1{,}010\,945, & c_5 &= 0{,}043\,616,\\ c_2 &= 0{,}892\,200, & c_6 &= -0{,}046\,503,\\ c_3 &= -0{,}039\,575, & c_7 &= -0{,}014\,976. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Для него $L = 4$, после очистки получаем уравнение третьей степени с коэффициентами

$$\widetilde{c}_0 = 5{,}2128, \quad \widetilde{c}_1 = -4{,}6762, \quad \widetilde{c}_2 = 1{,}7032, \quad \widetilde{c}_3 = -0{,}2397.$$

Матрицы операторов $\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1$:

$$\widetilde{T}_0 = \begin{pmatrix} 5{,}2128 & 0 & 0 \\ 1{,}7032 & -4{,}6762 & 0 \\ 0 & -0{,}2397 & 1{,}7032 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{T}_1 = \begin{pmatrix} -4{,}6762 & 5{,}2128 & 0 \\ -0{,}2397 & 1{,}7032 & -4{,}6762 \\ 0 & 0 & -0{,}2397 \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц имеем $\widehat{\rho} = \rho(\widetilde{T}_0) = 5{,}2128$. В самом деле, с одной стороны $\widehat{\rho} \geqslant \rho(\widetilde{T}_0)$. Для доказательства обратной оценки сделаем линейную замену с матрицей перехода

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}1447 & 0{,}3154 & -8{,}1258 \\ -0{,}4669 & 2{,}6559 & -2{,}2413 \end{pmatrix}$$

после замены матрица $B\widetilde{T}_0B^{-1}$ становится диагональной, а у матрицы $B\widetilde{T}_1B^{-1}$ евклидова норма, вычисляемая как $\|A\| = \sqrt{\rho(AA^T)}$, равна $4{,}7369\ldots$, что меньше, чем $\rho(\widetilde{T}_0)$. Итак, в евклидовой норме

$$\|B\widetilde{T}_0B^{-1}\| = \rho(\widetilde{T}_0), \quad \|B\widetilde{T}_1B^{-1}\| < \rho(\widetilde{T}_0),$$

следовательно, $\widehat{\rho} = \rho(\widetilde{T}_0)$.

Таким образом, $\alpha_\psi = 4 - \log_2 \rho(\widetilde{T}_0) = 1{,}6179\ldots$ Следовательно, $\psi_4 \in C^1(\mathbb{R})$, но при этом $\psi_4 \notin C^2(\mathbb{R})$. Так как показатель — не целый, то

$$\omega(\varphi', t) \asymp t^{0{,}6179\ldots}.$$

Наименьшая локальная гладкость достигается в двоично-рациональных точках справа. Гладкость в тех же точках слева равна

$$4 - \log_2 \rho(\widetilde{T}_1) = 1{,}8513\ldots$$

Для нижнего спектрального радиуса имеем, например, оценку

$$\check{\rho} \leqslant \min \|\widetilde{T}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{T}_{d_6}\|^{1/6} = \|\widetilde{T}_0^3\widetilde{T}_1\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1\|^{1/6} = 3{,}907\ldots$$

Поскольку $4 - \log_2 3{,}907 = 2{,}0339\ldots$, наибольшая локальная гладкость функции ψ_4' равна 1 (теорема 7.2.14). В частности, ψ_4 дважды дифференцируема на всюду плотном множестве точек, например, во всех рациональных точках x с периодом $(000\,101)$.

Итак, для всплеск-функций ψ_r при $r = 2, 3, 4$ имеем следующие показатели гладкости:

r	α
2	0,5500
3	1,0878
4	1,6179

(7.14)

Приведем также несколько других примеров масштабирующих функций.

Пример 7.3.10. Уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\,\varphi(2x) + \frac{1}{3}\,\varphi(2x-1) + \frac{2}{3}\,\varphi(2x-2) + \frac{2}{3}\,\varphi(2x-3) \qquad (7.15)$$

имеет маску $\mathbf{m}_0(z) = \frac{1}{6}\,(z+1)(2z^2+1)$. Маска имеет пару симметричных нулей $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому целые сдвиги функции φ линейно зависимы. Однако, функция стабильна, так как симметричных нулей на единичной окружности нет, и нет нетривиальных циклов. Имеем $L = 0$. После очистки получаем маску $\mathbf{m}_c(z) = \frac{2}{3}\,z + \frac{1}{3}$. Поэтому

$$\alpha_\varphi = -\log_2(2/3) = 0{,}5849\ldots$$

Следовательно, φ непрерывна, но не принадлежит $C^1(\mathbb{R})$. Таким образом, $l = L = 0$. Показатель гладкости — не целый, поэтому $\omega(\varphi, t) \asymp t^{\alpha_\varphi}$. Пользуясь (7.5), заключаем, что производная φ' не принадлежит $L_p(\mathbb{R})$ ни для какого $p \geqslant 1$. Так, например,

$$\alpha_{\varphi,1} = 1, \quad \alpha_{\varphi,2} = 1 + \log_2 0{,}9 = 0{,}8479\ldots$$

Согласно (7.6), для средней гладкости имеем

$$\alpha_{av} = \log_2\sqrt{4{,}5} = 1{,}0849\ldots$$

Таким образом, $\varphi'(x) = 0$ для почти всех x, следовательно, φ чисто сингулярна. Несложно показать, что φ имеет ограниченную вариацию. Далее, величина $\alpha_v(x)$ заполняет отрезок

$$[\log_2 3 - 1,\ \log_2 3] = [0{,}5849\ldots;\ 1{,}5849\ldots].$$

В двоично-рациональных точках имеем

$$\alpha_v(x+0) = \log_2 3 - 1 = 0{,}5849\ldots; \quad \alpha_v(x-0) = \log_2 3 = 1{,}5849\ldots$$

Итак, во всех двоично-рациональных точках правая производная бесконечна, а левая равна нулю.

Пример 7.3.11 (кривая постоянной локальной гладкости). Рассмотрим следующее уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\beta}{2}\,\varphi(2x) + \varphi(2x-1) + \frac{1 - i\,\mathrm{tg}\,\beta}{2}\,\varphi(2x-2), \qquad (7.16)$$

где β — произвольный параметр из интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Для этого уравнения $L = 0$, после очистки маски получаем

$$\mathbf{m}_c(z) = \frac{1 - i\operatorname{tg}\beta}{2}\, z + \frac{1 + i\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Заметим, что $\left|\dfrac{1 - i\operatorname{tg}\beta}{2}\right| = \left|\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\beta}{2}\right| = \dfrac{1}{2\cos\beta}$. Локальная гладкость функции $v(x)$ во всех точках x одинакова и равна $\log_2(2\cos\beta)$. В частности, v непрерывна и $\alpha_v = \log_2(2\cos\beta)$, однако она не дифференцируема ни в одной точке. На этом примере мы видим, что отрезок $[1 - \log_2 \widehat{\rho},\ 1 - \log_2 \widecheck{\rho}]$, являющийся областью значений локальной гладкости, может обращаться в точку.

Пользуясь (7.5), получаем, что гладкость φ в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при всех p также равна $\log_2(2\cos\beta)$.

Пример 7.3.12 (почти липшицевая функция). Возьмем уравнение из предыдущего примера, и повысим его порядок на единицу. Получим уравнение с $L = 1$ и той же чистой маской $\mathbf{m}_c$. Теперь положим в нем $\beta = \dfrac{\pi}{3}$. Маска уравнения примет вид

$$\mathbf{m}_0(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 \left(e^{-\frac{\pi i}{3}} z + e^{\frac{\pi i}{3}}\right), \tag{7.17}$$

и чистая маска, соответственно,

$$\mathbf{m}_c(z) \ = \ e^{-\frac{\pi i}{3}} z + e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

Имеем $\alpha_\varphi = 1$ и $\alpha_{\varphi,p} = 1$ для всех p. Локальная гладкость $\alpha_v(x)$ равна 1 в каждой точке x отрезка $[0, 1]$. Тем не менее, функция v_φ не является липшицевой. В некоторых точках отрезка $[0, 1]$ она не является даже локально липшицевой. Например, в точке $x = \dfrac{2}{3} = 0{,}101\,010\ldots$ имеем

$$\sup_{s\in[0,t]} \|v(x+s) - v(x)\| \geqslant C\, t\, |\ln t|. \tag{7.18}$$

Это, в частности, показывает, что в случае целого показателя Гёльдера оценка $\omega(\varphi, t) \leqslant Ct|\ln t|$ неулучшаема даже локально. Пусть $x_k = 0{,}10101\ldots01$ (после запятой k пар (1, 0) и единица). Докажем, что

$$\|v(x_k) - v(x_{k-1})\| \geqslant Ck2^{-2k},$$

где константа $C > 0$ не зависит от k. Из этого следует (7.18).

Применив (5.10), получаем

$$v(x_k) - v(x_{k-1}) = \Big(T_1 T_0\Big)^k (v(1) - v(0)). \tag{7.19}$$

Ясно, что

$$v(1) - v(0) \in W = \left\{ y \in \mathbb{R}^3, \sum_{j=1}^{3} y_j = 0 \right\}.$$

Несложно проверить, что оператор $T_1T_0|_W$ имеет собственное значение $\lambda = 1/2$ кратности 2. При этом он имеет лишь один, с точностью до нормировки, собственный вектор. Поэтому жорданова форма соответствующей матрицы имеет одну жорданову клетку размерности 2. Следовательно,
$$\left\|\Bigl(T_1T_0\Bigr)^k\Bigl(v(1) - v(0)\Bigr)\right\| \geqslant Ck2^{-k}.$$

Пример 7.3.13. Для уравнения
$$\varphi(x) = -\frac{1}{4}\,\varphi(2x) - \frac{1}{4}\,\varphi(2x-1) + \frac{3}{4}\,\varphi(2x-2) + \frac{5}{4}\,\varphi(2x-3) + \\ + \frac{1}{2}\,\varphi(2x-4), \quad (7.20)$$
имеем $L = 2$, а чистая маска $\mathbf{m}_c(z) = 2z - 1$. Таким образом,
$$\alpha_\varphi = 2 - \log_2 2 = 1.$$
Следовательно, $l = 0$. Далее, $\alpha_{\varphi,1} = 3 - \log_2 3 = 1{,}4150\ldots$ Таким образом, $\varphi \in W_1^1(\mathbb{R})$. Более того, $\varphi \in W_p^1(\mathbb{R})$ для всех конечных p. В самом деле,
$$\alpha_{\varphi,p} = 2 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\log_2(2^p + 1) = 1 + \frac{1}{p}\log_2\frac{2\cdot 2^p}{2^p+1} > 1.$$
Несложно показать, что $\varphi \in W_\infty^1$. Следовательно, функция φ липшицева с константой $\|\varphi'\|_\infty$.

Итак, $\omega(\varphi, t) \asymp t$, несмотря на то, что показатель Гёльдера является целым числом.

Пример 7.3.14 (интерполяционная схема Дюбука). В примере 3.5.5 мы рассматривали интерполяционную схему, введеную С. Дюбуком и соответствующую масштабирующую функцию φ, удовлетворяющую уравнению (3.31) с маской (3.32). Для этой маски $L = 3$, $\mathbf{m}_c = -0{,}5 + 2z - 0{,}5z^2$. Таким образом, чистое уравнение имеет коэффициенты $c_0 = -1$, $c_1 = 4$, $c_2 = -1$. Маска симметрична, поэтому, пользуемся предложением 7.3.3 и получаем $\widehat{\rho} = 4$, $\breve{\rho} = 2$. Итак,
$$\alpha_\varphi = L + 1 - \log_2\widehat{\rho} = 2,$$
таким образом $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, но $\varphi \notin C^2(\mathbb{R})$. Более того, производная $\varphi'(x)$ почти липшицева. В каждой двоично-рациональной точке $x \in [0,1]$ имеем
$$C_1|\ln t| \leqslant \sup_{|s|\leqslant t}\|v'(x+s) - v'(s)\| \leqslant C_2\,t\,|\ln t|. \quad (7.21)$$
Показывается это так же как в примере 7.3.12. Обе матрицы T_0, T_1 имеют жорданову клетку размерности 2, соответствующую собственному значению $\lambda = \dfrac{1}{4}$. Поэтому в двоично-рациональных $x \in [0,1)$ имеем
$$|\varphi(x + 2^{-k}) - \varphi(x)| \geqslant C(x)k2^{-k},$$

аналогично для $x \in (0,1]$ получаем

$$|\varphi(x - 2^{-k}) - \varphi(x)| \geqslant C(x)k2^{-k}.$$

Отсюда следует (7.21). Более того, в каждой двоично-рациональной точке $x \in (0,1)$ функция $v'(x)$ почти липшицева с каждой стороны. Заметим, однако, что поскольку $|c_0| = |c_1| = 1$, функция $\varphi'(x)$ в точках 0 и 6 липшицева, более того $\alpha_{\varphi'}(0) = \alpha_{\varphi'}(6) = 3$. Так, например, $|\varphi'(t)| \leqslant Ct^2$ при $t \to +0$. В то же время, в остальных целых точках отрезка $[0,6]$ функция $\varphi'(x)$ почти липшицева. Это еще раз иллюстрирует тот факт, что компоненты вектор-функции $v(x)$ не обязательно имеют одинаковую локальную гладкость. В некоторых точках x какие-то из компонент могут иметь гладкость большую, чем $\alpha_{v'}(x)$.

Хотя $\varphi \notin C^2(\mathbb{R})$, тем не менее, φ почти всюду дважды дифференцируема. Более того, $\varphi'' \in L_p(\mathbb{R})$ при всех конечных p. Чтобы это показать, достаточно установить, что $\rho_p(\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1) < 4$. В L_1-норме ($\|v\|_1 = |v_1| + |v_2|$) имеем

$$\|[\widetilde{T}_0]^2\|_1 = \|[\widetilde{T}_1]^2\|_1 = 16, \quad \|\widetilde{T}_0\widetilde{T}_1\|_1 = \|\widetilde{T}_1\widetilde{T}_0\|_1 = 8.$$

Тогда

$$2^{-2k} \sum_{d_1,\ldots,d_{2k}} \|\widetilde{T}_{d_1} \ldots \widetilde{T}_{d_{2k}}\|_1^p \leqslant 2^{-2k} \sum_{d_1,\ldots,d_{2k}} \|\widetilde{T}_{d_1}\widetilde{T}_{d_2}\|_1^p \ldots \|\widetilde{T}_{d_{2k-1}}\widetilde{T}_{d_{2k}}\|_1^p = \\ = 2^{-2k}(16^p + 16^p + 8^p + 8^p)^k,$$

откуда

$$\rho_p(\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1) \leqslant [(16^p + 8^p)/2]^{1/2p} = 2\left(2^{2p-1} + 2^{p-1}\right)\frac{1}{2p}.$$

Таким образом,

$$\alpha_{\varphi,p} \geqslant 4 - \log_2 2\left(2^{2p-1} + 2^{p-1}\right)\frac{1}{2p} = 3 - \frac{1}{2p}\log_2\left(2^{2p-1} + 2^{p-1}\right) > 2.$$

Следовательно, $\varphi \in W_p^2(\mathbb{R})$ для всех конечных p. Вместе с тем, $\varphi \notin W_\infty^2(\mathbb{R})$, поскольку функция $\varphi'(x)$ не является липшицевой.

Пример 7.3.15 (симметричное уравнение третьей степени). Уравнение $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} c_k\varphi(2x - k)$, коэффициенты которого действительны и симметричны $\left(c_0 = c_3,\ c_1 = c_2\right)$ может быть точно исследовано на непрерывность решения. Если маска имеет цикл или пару симметричных корней, то чистая маска будет иметь степень 1 или 0, и исследование сводится к ранее рассмотренным случаям. Поэтому будем считать, что циклов и симметричных корней нет. Тогда для существования регулярного решения должно быть выполнено необходимое условие $c_0 + c_2 = c_1 + c_3 = 1$. Уравнение можно записать следующим образом:

$$\varphi(x) = \omega\varphi(2x) + (1-\omega)\varphi(2x-1) + (1-\omega)\varphi(2x-2) + \omega\varphi(2x-3), \tag{7.22}$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ — параметр. При $\omega \in (0,1)$ это уравнение задает кривые де Рама (примеры 3.5.4 и 5.5.3).

Понизив порядок на единицу, получаем чистую маску

$$\mathbf{m}_c(z) = \omega z^2 + (1-2\omega)z + \omega.$$

Маска симметрична, поэтому с помощью предложения 7.3.3 находим гладкость решения при любом ω. Масштабирующая функция φ непрерывна тогда и только тогда когда $\omega \in (0,1)$, т. е. когда все коэффициенты уравнения (7.22) положительны. При этом

$$\alpha_\varphi = \begin{cases} -\log_2(1-2\omega) & \text{для} \quad 0 < \omega \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ 1 - \log_2\left(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}\right) & \text{для} \quad \dfrac{1}{4} \leqslant \omega \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ -\log_2 \omega & \text{для} \quad \dfrac{1}{2} \leqslant \omega < 1 \end{cases} \tag{7.23}$$

При $\omega = \dfrac{1}{4}$ функция $\varphi(x) = B_2(x)$ — кардинальный B-сплайн, он принадлежит $C^1(\mathbb{R})$. При $\omega = \dfrac{1}{4}$ имеем

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,2]}$$

— кусочно линейная функция, таким образом $\varphi \in W^1_\infty(\mathbb{R})$. При остальных ω имеем $\alpha_\varphi < 1$, а, значит, функция φ не является липшицевой. Аналогично вычисляется максимальная локальная гладкость $\alpha_\varphi^{\max}$. При $\omega > \dfrac{1}{2}$ имеем

$$\alpha_\varphi^{\max} = 1 - \log_2\left(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}\right) \ < \ 1,$$

в частности, функция v_φ нигде не дифференцируема. Напротив, при $0 < \omega < \dfrac{1}{2}$ функция φ дифференцируема почти всюду, причем при $\omega \neq \dfrac{1}{4}$ она чисто сингулярна ($\varphi'(x) \equiv 0$ почти всюду).

При переходе к отрицательным ω функция φ теряет непрерывность, но продолжает оставаться регулярной функцией. Так, применив формулу (7.10) при $p = 2$, получаем, что $\rho_2(\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1)$ равен квадратному корню из (обычного) спектрального радиуса оператора A_2, ограниченного на трехмерный конус симметрических положительно определенных матриц. Из этого следует, что (оставляем подробности в качестве упражнения для читателя) ρ_2 равен спектральному радиусу следующего оператора в $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 8\omega + 12\omega^2 & 4\omega^2 \\ 4\omega - 8\omega^2 & 4\omega - 8\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что при $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ при $\omega > -0{,}1963\ldots$ Для того чтобы определить, при каких ω функция $\varphi \in L_1$, надо оценить ρ_1. Применив, как и в предыдущем примере, формулу для L_1-нормы в $\mathbb{R}^2$ и взяв $k=1$, получим, что $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ при $\omega \geqslant (3-\sqrt{17})/8 = -0{,}140\ldots$, что даже хуже, чем для $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. Однако уже для $k=5$ получаем, что $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ при $\omega \geqslant -0{,}22$. С другой стороны, при $\omega \leqslant -\dfrac{1}{2}$ имеем $\varphi \notin L_1(\mathbb{R})$. Показывается это точно так же, как в случае $\omega > 1$ именно

$$\breve{\rho} = |\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}\,| \geqslant 2.$$

Таким образом, где-то на отрезке $[-0{,}5;\ -0{,}22]$ находится граница ω_0 между регулярными и сингулярными φ. Интересно было бы найти это граничное значение ω_0. Авторам, например, не известно, будет ли φ суммируемой при $\omega = -0{,}25$?

7.4. Метод поточечной оценки преобразования Фурье

Матричный метод, как мы видели, позволяет, по крайней мере теоретически, точно вычислять показатель глобальной гладкости всплесков, а также получать довольно полную информацию о локальной гладкости. Основным его недостатком является сложность применения при больших размерностях N. Для больших размерностей более удобны два других метода, основанные на оценке скорости убывания преобразования Фурье. Ни один из них не в состоянии точно находить показатель Гёльдера, и этот недостаток непреодолим. Они также неприменимы для оценки локальной гладкости. Тем не менее, на данный момент они являются единственными эффективными методами для оценки гладкости при больших N, а также для получения асимптотических оценок при $N \to \infty$. Первый метод основан на поточечной оценке преобразования Фурье.

Для данной функции $g(x)$ положим

$$\vartheta = \vartheta(g) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \bigl\{\beta \in \mathbb{R} \,\big|\, |g(\xi)| \leqslant C(|\xi|+1)^{-\beta}\bigr\}.$$

Следующий результат, связывающий гладкость функции и поточечную оценку убывания ее преобразования Фурье, общеизвестен: для непрерывной функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ выполнено неравенство

$$\vartheta - 1 \leqslant \alpha_f \leqslant \vartheta, \tag{7.24}$$

где $\vartheta = \vartheta(\widehat{f})$. Доказательство см. в приложении А.7, теорема А.7.1.

З а м е ч а н и е 7.4.1. Уже для масштабирующих функций обе оценки в (7.24) неулучшаемы. Например, для кардинального сплайна $\varphi(x) = B_L(x)$ при $L \geqslant 1$ имеем $\alpha_\varphi = L$, в то время как $\vartheta(\widehat{\varphi}) = L+1$, поскольку

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| = \left|\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right|^{L+1}.$$

С другой стороны, для данного $L \geqslant 0$ рассмотрим семейство масок

$$\mathbf{m}_\gamma(z) = \Big(\frac{z+1}{2}\Big)^{L+1}\mathbf{m}_{c,\gamma}(z),$$

где $\mathbf{m}_{c,\gamma}(z) = \gamma z + 1 - \gamma$, и параметр γ лежит на интервале $(0,1)$. Применив неравенство (3.14) для соответствующей масштабирующей функции φ_γ, получаем для любого k

$$\big|\widehat{\varphi}_\gamma(n2^k+\delta)\big| > C\big|\widehat{\varphi}_\gamma(n+2^{-k}\delta)\big|,$$

где n — произвольное целое, а δ достаточно мало. Далее,

$$\big|\widehat{\varphi}_\gamma(n+2^{-k}\delta)\big| = \left|\frac{\sin\,\pi(n+2^{-k}\delta)}{\pi(n+2^{-k}\delta)}\right|^{L+1}\prod_{j=1}^{\infty} m_{c,\gamma}\big(2^{-j}(n+2^{-k}\delta)\big).$$

Если $\gamma \neq \dfrac{1}{2}$, то произведение в правой части не обращается в нуль при всех достаточно малых δ, поэтому

$$|\widehat{\varphi}_\gamma(n+2^{-k}\delta)| \geqslant C(n,\delta)2^{-k(L+1)}.$$

Таким образом,

$$|\widehat{\varphi}_\gamma(n2^k+\delta)| > C_{n,\delta}C2^{-k(L+1)}$$

и, следовательно, $\vartheta \leqslant L+1$. На самом деле $\vartheta \geqslant L+1$, поскольку $|m_{c,\gamma}(\xi)| \leqslant 1$ для всех ξ, значит,

$$|\widehat{\varphi}_\gamma(\xi)| \leqslant |\widehat{B}_L(\xi)|.$$

Итак, $\vartheta \leqslant L+1$ при любом $\gamma \neq \dfrac{1}{2}$. Для гладкости функции φ_γ имеем (формула (7.5))

$$\alpha_\varphi = L - \log_2\big(\max\{\gamma,\ 1-\gamma\}\big).$$

При $\gamma \to \dfrac{1}{2}$ имеем $\alpha_\varphi \to L+1 = \vartheta$. Следовательно, второе неравенство в (7.24) также неулучшаемо для масштабирующих функций.

Наша следующая цель — выразить величину ϑ для произвольной маски m_0 через показатель $\vartheta(m_c)$ соответствующей чистой маски. Заметим прежде всего, что для чистой маски преобразование Фурье $\widehat{\varphi}_c$ не может стремиться к нулю на бесконечности, в частности, $\vartheta(m_c) \leqslant 0$. В самом деле, так как функция m_c не имеет циклов и симметричных нулей, то функция $\widehat{\varphi}_c(\xi)$ не имеет периодических нулей. Поэтому, найдется нечетное число q, для которого $|\widehat{\varphi}_c(q/2)| > 0$. Учитывая, что $m_c(1/2) \neq 0$ имеем

$$\Big|\widehat{\varphi}_c(2^{k-1}q)\Big| = \Big|m_c(2^{k-2}q)\times\ldots\times m_c(q)m_c(q/2)\widehat{\varphi}_c(q/2)\Big| =$$
$$= \Big|m_c^{k-1}(0)m_c(1/2)\widehat{\varphi}_c(q/2)\Big| = \Big|m_c(1/2)\widehat{\varphi}_c(q/2)\Big| > 0$$

для любого $k \geqslant 1$.

Лемма 7.4.2. *Для любой маски m_0 имеем*

$$\vartheta(m_0) = L + 1 + \vartheta(m_c),$$

где m_c — соответствующая чистая маска.

В качестве следствия получаем, что $\vartheta(m_0) \leqslant L + 1$ для любой маски m_0. Таким образом, скорость убывания преобразования Фурье масштабирующей функции не превосходит порядка условия Стрэнга–Фикса, которому она удовлетворяет. Несмотря на кажущуюся простоту леммы 7.4.2 ее доказательство представляет определенные технические сложности.

Доказательство леммы 7.4.2 проведем только для случая стабильной масштабирующей функции, когда маска не имеет циклов и симметричных нулей на единичной окружности. Далее, если есть симметричный нуль $\{\pm a\}$ вне единичной окружности, то перейдем на предыдущий уровень, получив новую функцию φ_α, где $e^{-2\pi i\alpha} = a$. Согласно предложению 6.2.1

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (1 - e^{-4\pi i(\alpha+\xi)})\,\widehat{\varphi}_\alpha(\xi).$$

Поскольку $\alpha \notin \mathbb{R}$, множитель $1 - e^{-4\pi i(\alpha+\xi)}$ ограничен по модулю с обеих сторон положительными константами. Следовательно, $\vartheta(m_\alpha) = \vartheta(m_0)$. Итак, переход на предыдущий уровень не меняет скорости убывания преобразования фурье масштабирующей функции. Сделав при необходимости несколько таких переходов, можем считать, что маска не имеет симметричных корней, таким образом,

$$m_0(\xi) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi} + 1}{2}\right)^{L+1} m_c(\xi) \quad \text{и} \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi} - 1}{-2\pi i\xi}\right)^{L+1} \varphi_c(\xi).$$

Неравенство $\vartheta(m_0) \geqslant L + 1 + \vartheta(m_c)$ очевидно. Доказательство обратного неравенства осложняется тем, что множитель $(e^{-2\pi i\xi} - 1)^{L+1}$ имеет нули порядка $L + 1$ в целых точках, эти нули могут «гасить» максимумы функции $(1 + |\xi|)^{-L-1}\widehat{\varphi}_c(\xi)$. Везде далее обозначаем $\vartheta(m_c) = \vartheta$. Рассмотрим отдельно случаи $\vartheta < 0$ и $\vartheta = 0$. Пусть $\vartheta < 0$. Для любого $\beta \in (\vartheta, 0)$ найдутся сколь угодно большие ξ, для которых

$$\bigl|\widehat{\varphi}_c(\xi)\bigr| \geqslant C_\beta|\xi|^{-\beta}.$$

Возьмем такое ξ и представим его в виде $\xi = 2^k q + \delta$, где q нечетно, и $\delta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (число $2^k q$ — ближайшее целое к числу ξ). Имеем

$$C_\beta|\xi|^{-\beta} \leqslant |\widehat{\varphi}_c(\xi)| = \Bigl| m_c(2^{k-1}q + 2^{-1}\delta) \times \ldots$$
$$\ldots \times m_c(q + 2^{-k}\delta) m_c(2^{-1}q + 2^{-k-1}\delta)\widehat{\varphi}_c(2^{-1}q + 2^{-k-1}\delta)\Bigr| =$$

$$= \Bigl|\prod_{j=1}^{k} m_c(2^{-j}\delta)\Bigr| \cdot \Bigl|m_c\bigl(\frac{1}{2} + 2^{-k-1}\delta\bigr)\Bigr| \cdot \Bigl|\widehat{\varphi}_c(2^{-1}q + 2^{-k-1}\delta)\Bigr|.$$

Произведения $\Bigl|\prod\limits_{j=1}^{k} m_c(2^{-j}\delta)\Bigr| \cdot \Bigl|m_c(2^{-1}q + 2^{-k-1}\delta)\Bigr|$ равномерно по всем k ограничены сверху некоторой константой C_1, следовательно,

$$\bigl|\widehat{\varphi}_c(2^{-1}q + 2^{-k-1}\delta)\bigr| \geqslant \frac{C_\beta}{C_1}\,|\xi|^{-\beta}.$$

При этом, если брать $\xi \to \infty$, то также и $q \to \infty$, иначе (поскольку $\beta < 0$) непрерывная функция φ_c была бы неограниченной на отрезке. Кроме того, очевидно, $|\xi| > |q/2|$. Итак, существуют сколь угодно большие q для которых

$$\Bigl|\widehat{\varphi}_c\Bigl(2^{-1}q + 2^{-k-1}\delta\Bigr)\Bigr| \ > \ C|q/2|^{-\beta}.$$

Но тогда

$$\left|\frac{e^{-2\pi i(2^{-1}q+2^{-k-1}\delta)} - 1}{-2\pi i(2-1q + 2^{-k-1}\delta)}\right|^{L+1} \Bigl|\varphi_c(2^{-1}q + 2^{-k-1}\delta)\Bigr| > C|q/2|^{-\beta-L-1}$$

для некоторой константы C (поскольку $|e^{-2\pi i(2^{-1}q+2^{-k-1}\delta)} - 1| \geqslant \sqrt{2}$ при $\xi \in \bigl[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\bigr]$). Следовательно,

$$\Bigl|\widehat{\varphi}(2^{-1}q + 2^{-k-1}\delta)\Bigr| > C|q/2|^{-\beta-L-1},$$

поэтому $\vartheta(m_0) \leqslant \vartheta(m_c) + L + 1$.

В случае $\vartheta = 0$ возьмем нечетное q для которого $\widehat{\varphi}_c(q/2) \neq 0$ и для любого $k \geqslant 1$ получим

$$\widehat{\varphi}_c\Bigl(2^k q + \frac{q}{2}\Bigr) = \widehat{\varphi}_c\Bigl(\frac{q}{2} + 2^{-k-2}q\Bigr) \prod_{j=1}^{k+1} m_c(2^{k-j}q + 2^{-j-1}q) =$$

$$= \widehat{\varphi}_c\Bigl(\frac{q}{2} + 2^{-k-2}q\Bigr) \prod_{j=1}^{k} m_c(2^{-j-1}q) m_c\Bigl(\frac{q}{2} + 2^{-k-2}q\Bigr) =$$

$$= \widehat{\varphi}_c\Bigl(\frac{q}{2} + 2^{-k-2}q\Bigr)\, \frac{m_c(\frac{1}{2} + 2^{-k-2}q)\widehat{\varphi}_c(q/2)}{\widehat{\varphi}_c(2^{-k-2}q)}.$$

При $k \to \infty$ эта дробь стремится к $m_c\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)\widehat{\varphi}_c^2(q/2) \neq 0$. Следовательно, при больших k величина $\Bigl|\widehat{\varphi}_c\Bigl(2^k q + \frac{q}{2}\Bigr)\Bigr|$ ограничена снизу некоторой положительной константой. Тогда

$$\left|\varphi\Big(2^k q+\frac{q}{2}\Big)\right| = \left|\frac{e^{-2\pi i\left(2^k q+\frac{q}{2}q\right)}-1}{-2\pi i(2^k q+\frac{q}{2})}\right|^{L+1}\left|\varphi_c\big(2^k q+\frac{q}{2}\big)\right| > C|2^k q|^{-L-1}, \tag{7.25}$$

что и требовалось доказать. ♢

Следствие 7.4.3. *Для любой масштабирующей функции* φ *имеем*

$$\alpha_\varphi \in [\vartheta+L,\ \vartheta+L+1],$$

где $\vartheta=\vartheta(m_c)$.

Теперь задача нахождения величины ϑ для произвольной маски m_0 сводится к соответствующей чистой маске m_c. Для оценки этой величины введем еще одно обозначение. Для произвольного $k \geqslant 1$ положим

$$\vartheta_k = -\frac{1}{k}\log_2\left\|m_c(\xi)\dots m_c(2^{k-1}\xi)\right\|_\infty.$$

Предложение 7.4.4. *Для произвольной чистой маски* m_c *имеем*

$$\vartheta(m_c) = \lim_{k\to\infty}\vartheta_k = \sup_{k\in\mathbb{N}}\vartheta_k.$$

Более того, существует константа $C>0$ *и последовательность* $\xi_j\to\infty$ *такие, что*

$$|\widehat{\varphi}_c(\xi_j)| \geqslant C|\xi_j|^{-\vartheta}, \qquad j\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. По лемме Фекете (приложение A.6, лемма A.6.1) последовательность $\{a_k\}$, обладающая свойством

$$(k+n)a_{k+n} \leqslant ka_k + na_n, \qquad k,n\in\mathbb{N}$$

сходится, причем

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k.$$

Легко видеть, что последовательность $a_k=-\vartheta_k$ этим свойством обладает, поэтому она сходится и $\lim\vartheta_k=\sup\vartheta_k$. Обозначим пока этот предел через b и покажем, что $b=\vartheta$. Докажем, что $\vartheta\geqslant\vartheta_k$ для любого k, из этого будет следовать, что $\vartheta\geqslant b$. Возьмем достаточно большое ξ (для определенности — положительное) и обозначим через l целое число, для которого $2^{k(l-1)}\leqslant\xi\leqslant 2^{kl}$. Имеем

$$|\widehat{\varphi}_c(\xi)| = \left|\prod_{s=1}^{l}\Big(\prod_{j=1}^{k} m_c(2^{j-ks-1}\xi)\Big)\right|\cdot\left|\widehat{\varphi}_c(2^{-kl}\xi)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-kl\vartheta_k}\left\|\widehat{\varphi}_c\right\|_\infty \leqslant \xi^{-\frac{l}{l-1}\,\vartheta_k}\left\|\widehat{\varphi}_c\right\|_\infty.$$

При $l\to\infty$ получаем, что $\vartheta\geqslant\vartheta_k$, что и требовалось. Осталось доказать, что существует константа $C>0$ и последовательность $\xi_j\to\infty$

такие, что $|\widehat{\varphi}_c(\xi_j)| \geqslant C|\xi_j|^{-b}$. Из этого будет следовать, что $\vartheta \leqslant b$ и что $|\widehat{\varphi}_c(\xi_j)| \geqslant C|\xi_j|^{-\vartheta}$. Заметим, что в случае $b = \vartheta = 0$ существование такой последовательности уже было доказано (7.25). Осталось провести доказательство для случая $b < 0$. Предположим обратное:

$$\xi^b \widehat{\varphi}(\xi) \to 0, \quad \xi \to \infty. \tag{7.26}$$

Пусть модуль функции $f_k(\xi) = \prod\limits_{j=1}^{k} m_c(2^{j-1}\xi)$ достигает наибольшего значения в точке $\xi_k \in [0,\, 1]$. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что ξ_k сходится к некоторому $\xi_0 \in [0,\, 1]$. Как мы знаем $|f_k(\xi_k)| = 2^{-k\vartheta_k} \geqslant 2^{-kb}$. Для любого k имеем

$$|\widehat{\varphi}_c(2^k\xi_k)| = |f_k(\xi_k)\widehat{\varphi}_c(\xi_k)| \geqslant 2^{-kb}|\widehat{\varphi}(\xi_k)|. \tag{7.27}$$

При этом $2^k\xi_k \to \infty$, иначе из (7.26) следовало бы, что функция $\widehat{\varphi}_c$ неограничена на некотором компакте. Совместив теперь (7.26) с (7.27) для $\xi = 2^k\xi_k$, получаем $\widehat{\varphi}(\xi_k) \to 0$, $k \to \infty$, следовательно $\widehat{\varphi}_c(\xi_0) = 0$. Взяв произвольное целое n и проведя те же рассуждения с последовательностью $\{\xi_k + n\}_{k\in\mathbb{Z}}$, получаем $\widehat{\varphi}_c(\xi_0 + n) = 0$. Следовательно, функция φ_c имеет периодический нуль, что невозможно (маска m_c чистая). Предложение доказано. $\Diamond$

Таким образом, при каждом k величина ϑ_k дает оценку снизу на ϑ, причем эта оценка стремится к ϑ при увеличении k. Соответственно (следствие 7.4.3) эта же величина дает оценку снизу на гладкость масштабирующей функции.

Теорема 7.4.5. *Для любой масштабирующей функции φ имеем*

$$\alpha_\varphi \geqslant \vartheta_k + L$$

при любом $k \geqslant 1$.

Как мы знаем, это, вообще говоря, лишь оценка гладкости с точностью до единицы, и она не становится точной даже при $k \to \infty$. В этом заключается непреодолимый недостаток метода поточечной оценки. Тем не менее, при больших значениях степени чистой маски n данный метод часто применяется ввиду его простоты. Уже при $k = 1$ (т. е. $\vartheta_1 = -\log_2 \|m_c\|_\infty$) он в ряде случаев дает приемлемые оценки.

Следствие 7.4.6.

$$\alpha_\varphi \geqslant L - \log_2 \|m_c\|_\infty.$$

Мы разберем подробно лишь один пример — семейство масштабирущих функций $\{\varphi_r\}$, порождающее всплески Добеши и построенное в гл. 4 (здесь мы вынуждены заменить индекс n на r, поскольку n теперь зарезервирован за степенью чистой маски).

П р и м е р 7.4.7 (всплески Добеши ψ_r). Для масштабирующей функции φ_r и соответствующей маски m_r имеем (формулы (4.10) и (4.11))

$$|m_r(\xi)|^2 = \left(\cos^2 \pi\xi\right)^r P_r\left(\sin^r \pi\xi\right),$$

где

$$P_r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1+k}{k} x^k.$$

Таким образом, квадрат чистой маски $m_{c,r}$ равен

$$|\mathbf{m}_{c,r}(\xi)|^2 = P_r\left(\sin^2 \pi\xi\right). \tag{7.28}$$

Установим некоторые элементарные свойства полинома P_r.

Л е м м а 7.4.8. *Функция* $x^{-r+1}P_r(x)$ *является убывающей по* x. *Кроме того, для любого* $x \in [0,1]$ *имеем*:

$$P_r(x) \leqslant 2^{r-1}\Big(\max\{1,\, 2x\}\Big)^{r-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $0 \leqslant x \leqslant y$, то

$$x^{-r+1}P_r(x) = x^{-r+1}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1+k}{k}x^k = \sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1+k}{k}x^{-(r-k-1)} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1+k}{k}y^{-(r-k-1)} = y^{-r+1}P_r(y).$$

Далее, поскольку полином P_r — есть решение уравнения

$$(1-x)^n P_r(x) + x^n P_r(1-x) = 0,$$

после подстановки $x = \dfrac{1}{2}$ получаем $P_r(1/2) = 2^{r-1}$. Так как $P_r(x)$ — возрастающая функция, то $P_r(x) \leqslant P_r(1/2) = 2^{r-1}$ при $x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Если же $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, то используем первое утверждение леммы:

$$P_r(x) \leqslant x^{r-1}2^{r-1}P_r(1/2) = 2^{r-1}(2x)^{r-1}. \qquad \Diamond$$

Заметим, что

$$\|m_{c,r}\|_\infty = \left[\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1+k}{k}\right]^{1/2} < \left[2^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1+k}{k}2^{-k}\right]^{1/2} =$$

$$== \Big[2^{r-1}P_r(1/2)\Big]^{1/2} = 2^{r-1}. \tag{7.29}$$

Следствие 7.4.6 дает $\alpha_{\varphi_r} > 0$. Таким образом, начиная с $r = 2$ все всплеск-функции Добеши ψ_r, как минимум, непрерывны.

Для более точного анализа постараемся оценить ϑ_2. Имеем

$$\vartheta_2 = -\frac{1}{2}\log_2\Big\|m_{c,r}(\xi)m_{c,r}(2\xi)\Big\|_\infty = -\frac{1}{4}\log_2\Big(\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} P_r\big(x\big)P_r\big(4x(1-x)\big)\Big)$$

(так как $\sin^2 2\pi\xi = 4\sin^2(\pi\xi)\big(1-\sin^2(\pi\xi)\big)$). В случаях $x \leqslant \frac{1}{2}$ и $x \geqslant \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\Big($т. е. $4x(1-x) \leqslant \frac{1}{2}\Big)$ из леммы 7.4.8 выводим

$$P_r\big(x\big)P_r\big(4x(1-x)\big) \leqslant 2^{3(r-1)}.$$

На оставшемся интервале $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}$ имеем

$$P_r\big(x\big)P_r\big(4x(1-x)\big) \leqslant 2^{2(r-1)}[16x^2(1-x)]^{r-1} \leqslant 2^{6(r-1)}\Big(\frac{4}{27}\Big)^{r-1}$$

(поскольку $x^2(1-x) \leqslant \frac{4}{27}$ на отрезке $[0,1]$). Итак,

$$\vartheta_2 \geqslant -\frac{1}{4}\,\log_2\Big(2^{8(r-1)}3^{-3(r-1)}\Big) = -2r+2+(r-1)\frac{3}{4}\log_2 3. \tag{7.30}$$

Таким образом,

$$\vartheta(m_r) \geqslant 1 + (r-1)\Big(\frac{3}{4}\log_2 3\, -\, 1\Big)$$

и, следовательно,

$$\alpha_{\varphi_r} \geqslant (r-1)\Big(\frac{3}{4}\log_2 3\, -\, 1\Big). \tag{7.31}$$

Асимптотически при больших r это дает $\alpha_{\varphi_r} \geqslant \mu r$, где $\mu = 0{,}1887\ldots$ Совсем немного не хватает для доказательства оценки $\alpha_{\varphi_r} \geqslant 0{,}2\,r$ (теорема 4.1.6). Можно было бы продолжить, оценив ϑ_3 и т. д. Более эффективно однако применить следующую модификацию метода поточечной оценки, которая использует циклические множества. Для всплесков Добеши она позволяет вычислить точное значение ϑ.

7.5. Оценка с помощью инвариантных циклов

Конечное множество точек периода $b = \{\beta_1,\ldots,\beta_k\} \subset \mathbb{T}$ называется *циклом* по отношению к операции удвоения $\beta \to 2\beta$, если $\beta_{j+1} \equiv 2\beta_j \pmod 1$, $j = 1,\ldots,k$ (при этом полагаем $\beta_{k+1} = \beta_1$). Данное определение перекликается с понятием циклического множества, введенным в параграфе 3.4. Если $b = \{\beta_1,\ldots,\beta_k\}$ — цикл, то подмножество единичной окружности $\mathbf{b} = \{e^{-2\pi i\beta_1},\ldots,e^{-2\pi i\beta_k}\}$ — циклическое, и наоборот. Простейший цикл $b = \{0\}$ будем называть *тривиальным* по аналогии с тривиальным циклическим множеством $\mathbf{b} = \{1\}$. Множество всех циклов, включая тривиальный, обозначим $\mathcal{B}$. Для произвольной маски m_c и цикла $b = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ положим

$$\Theta_b = \Theta_b(m_c) = -\frac{1}{k}\log_2\left|\prod_{j=1}^{k} m_c(\beta_j)\right|.$$

Таким образом, величина $-\Theta_b$ равна среднему значению логарифма модуля чистой маски в точках цикла b.

Теорема 7.5.1. *Для произвольной чистой маски m_c имеем*

$$\vartheta(m_c) = \inf_{b\in\mathcal{B}} \Theta_b(m_c).$$

Доказательство. Покажем вначале, что $\Theta_b(m_c) \geqslant \vartheta(m_c)$ для любого цикла b (в дальнейшем символ m_c будем опускать). Выберем произвольный элемент цикла $\beta \in b$. Так как маска m_c чистая, то найдется целое s, для которого $\widehat{\varphi}_c\bigl(\beta + s\bigr) \neq 0$ (иначе функция $\widehat{\varphi}_c(\xi)$ имела бы периодический нуль, см. параграф 3.4). Если цикл b нетривиальный, то $\beta + s \neq 0$. Если же $b = \{0\}$, то найдется ненулевое $s \in \mathbb{Z}$, для которого $\widehat{\varphi}_c(s) \neq 0$. Иначе функция φ_c удовлетворяла бы условию Стрэнга–Фикса, что невозможно, так как маска m_c чистая (теорема 3.2.10, параграф 3.4). Итак, $\beta + s \neq 0$. Тогда для любого p имеем

$$\widehat{\varphi}_c\Bigl(2^{kp}(\beta + s)\Bigr) = \widehat{\varphi}_c\bigl(\beta + s\bigr)\prod_{r=1}^{kp} m_c\bigl(2^{kp-r}(\beta + s)\bigr) =$$

$$= \widehat{\varphi}_c\bigl(\beta + s\bigr)\left(\prod_{j=1}^{k} m_c(\beta_j)\right)^{p}.$$

Таким образом,

$$\left|\widehat{\varphi}_c\Bigl(2^{kp}(\beta + s)\Bigr)\right| \geqslant C2^{-kp\Theta_b}$$

для любого k, где $C = |\widehat{\varphi}_c\bigl(\beta + s\bigr)| > 0$. Следовательно, $\Theta_b \geqslant \vartheta$.

Итак, $\inf\limits_{b\in\mathcal{B}} \Theta_b \geqslant \vartheta$. Осталось доказать, что существуют циклы b, для которых разность $\Theta_b - \vartheta_b$ принимает сколь угодно малые значения. Согласно предложению 7.4.4 существует последовательность $\xi_j \to \infty$, для которой $|\widehat{\varphi}_c(\xi_j)| \geqslant\ C|\xi_j|^{-\vartheta}$. Рассмотрим сначала случай, когда маска $m_0(\xi)$ не обращается в нуль на действительной оси, т. е. $\inf\limits_{\xi\in\mathbb{T}} |m_0(\xi)| = a > 0$. Выберем достаточно большое ξ_j и обозначим через n натуральное число, для которого $2^{n-1} < \xi_j \leqslant 2^n$. Далее, найдется целое число r такое, что

$$\left|\xi_j - \frac{2^n r}{2^n - 1}\right| < 1.$$

Положим $\beta = \dfrac{r}{2^n-1}$. По построению $\beta \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$. Так как $2^n\beta \equiv \beta \pmod 1$, то множество $\{2^s\beta\}_{s=0,\dots,n-1}$ либо само является циклом, либо является объединением p одинаковых циклов $b = \{2^s\beta\}_{s=0}^{k}$, $n = pk$. Положим $\beta_i = 2^{i-1}\beta$, $i = 1,\dots,k$. Имеем

$$\widehat{\varphi}_c(2^{pk}\beta) = \widehat{\varphi}(\beta)\left(\prod_{i=1}^{k} m_c(\beta_i)\right)^p.$$

Таким образом,

$$|\widehat{\varphi}_c(2^n\beta)| = |\widehat{\varphi}(\beta)|\, 2^{-n\Theta_b} \leqslant C_0 2^{-n\Theta_b}, \tag{7.32}$$

где $C_0 = \sup\limits_{1/3\leqslant\xi\leqslant4/3} |\widehat{\varphi}(\xi)|$. Далее, пользуясь неравенством

$$|m_c(\xi+h)| \leqslant |\mathbf{m}_c(\xi)| + \|m_c'\|_\infty |h|,$$

получаем

$$|\widehat{\varphi}_c(\xi_j)| = \prod_{s=1}^{\infty}\left|m_c(2^{-s}\xi_j)\right| \leqslant \prod_{s=1}^{\infty}\left(\left|m_c(2^{n-s}\beta)\right| + 2^{-s}\|m_c'\|_\infty\right) =$$

$$= \left(\prod_{s=1}^{\infty}\left|m_c(2^{n-s}\beta)\right|\right)\cdot\prod_{s=1}^{\infty}\left|1 + \frac{2^{-s}\|m_c'\|_\infty}{|m_c(2^{n-s}\beta)|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\widehat{\varphi}_c(2^n\beta)|\prod_{s=1}^{\infty}\left(1 + \frac{2^{-s}\|m_c'\|_\infty}{a}\right).$$

Так как $\left(1 + \dfrac{2^{-s}\|m_c'\|}{a}\right) \leqslant e^{\|m_c'\|/a}$, то имеем

$$|\widehat{\varphi}_c(\xi_j)| \leqslant e^{\|m_c'\|/a}\,|\widehat{\varphi}_c(2^n\beta)|,$$

что вместе с (7.32) дает $|\widehat{\varphi}_c(\xi_j)| \leqslant C_1 2^{-n\Theta_b}$, где C_1 — константа, не зависящая от j и n. Таким образом,

$$2^{-n\Theta_b} \geqslant C_2|\xi_j|^{-\vartheta}.$$

Логарифмируя и вспоминая, что $\log_2|\xi_j| > n-1$, получаем

$$n\Theta_b \leqslant (n-1)\vartheta - \log_2 C_2,$$

что при $n\to\infty$ дает $\Theta_b \leqslant \vartheta$. $\Diamond$

Замечание 7.5.2. Если маска не является чистой, то утверждение теоремы 7.5.1 может не выполняться. Так, если маска имеет цикл b, т. е. $m_0\left(b+\dfrac{1}{2}\right) = 0$, то величина Θ_b может быть строго меньше ϑ. Этот феномен является причиной того, что уточняющая схема, соответствующая непрерывной масштабирующей функции, может быть расходящейся [126].

Итак, каждый цикл дает верхнюю оценку для показателя убывания $\widehat{\varphi}(\xi)$. С другой стороны (предложение 7.4.4), при каждом k величина ϑ_k дает оценку снизу. Равенство

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \vartheta_k \;=\; \vartheta \;=\; \inf_{b\in\mathcal{B}} \Theta_b, \tag{7.33}$$

теоретически дает возможность находить показатель убывания ϑ с любой точностью обычным перебором (нужного числа циклов и величин ϑ_k). Кроме того, равенство 7.33 доказывает следующий полезный факт.

Следствие 7.5.3. *Показатель $\vartheta(m_0)$ является непрерывной функцией от коэффициентов маски в каждой точке $m_0 \sim (c_0,\ldots \ldots, c_N)$ такой, что маска m_0 — чистая.*

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и найдем такое k и такой цикл b, что $\Theta_b(m_0) - \vartheta_k(m_0) < \varepsilon/2$ (это возможно в силу (7.33)). Если маска чистая, то обе функции Θ_b и ϑ_k непрерывны в точке m_0. Значит, существует настолько малое $\delta > 0$, что при условии $|\widetilde{c}_i - c_i| < \delta$, $i = 0,\ldots,N$, маска $\widetilde{m}_0$ с коэффициентами $\widetilde{c}_i$ — чистая и

$$|\Theta_b(\widetilde{m}_0) - \Theta_b(m_0)| < \varepsilon/2, \qquad |\vartheta_k(\widetilde{m}_0) - \vartheta_k(m_0)| < \varepsilon/2.$$

Итак, точка $\vartheta(m_0)$ лежит на отрезке $[\vartheta_k(m_0),\,\Theta_b(m_0)]$, а точка $\vartheta(\widetilde{m}_0)$ — на отрезке $[\vartheta_k(\widetilde{m}_0),\,\Theta_b(\widetilde{m}_0)]$, причем расстояния от концов первого отрезка до соответствующих концов второго меньше $\varepsilon/2$. Следовательно $|\vartheta(\widetilde{m}_0) - \vartheta(m_0)| < \varepsilon$. $\Diamond$

Замечание 7.5.4. Если маска m_0 не является чистой, то функция $\vartheta(m_0)$ в такой точке может быть разрывной. Показатель убывания преобразования Фурье может скачкообразно меняться в таких точках. Например, для маски $m_0(\xi) = \left(\dfrac{e^{-2\pi i\xi}+1}{2}\right)^n$, соответствующей кардинальному B-сплайну B_{n-1}, имеем $\vartheta = n$. Немного пошевелив коэффициенты маски так, чтобы она стала чистой (например, положив $m_0 = \left(\dfrac{e^{-2\pi i\xi}+1+\alpha}{2+\alpha}\right)^n$, $\alpha \to 0$), получим $\vartheta(m_0) \leqslant 0$.

Во многих случаях для оценки показателя убывания применяют такой прием: оценку сверху берут из равенства (7.33), т.е. верхние оценки получаем из циклов; для оценки снизу вместо перебора величин ϑ_k применяют следующий результат:

Лемма 7.5.5. *Предположим $[0,1] = D_1 \cup \ldots \cup D_k$ и существует такое $q > 0$, что*

$$\begin{aligned}
&|m_c(\xi)| \leqslant q, && \xi \in D_1;\\
&|m_c(\xi)m_c(2\xi)| \leqslant q^2, && \xi \in D_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&\\
&|m_c(\xi)\times\ldots\times m_c(2^{k-1})| \leqslant q^k, && \xi \in D_k;
\end{aligned}$$

Тогда $\vartheta \geqslant\ -\log_2 q$.

Доказательство. Возьмем достаточно большое n и оценим величину $\left|\prod_{s=0}^{n-1} m_c(2^{-s}\xi)\right|$. Так как $\eta = 2^{-n+1}\xi \in D_m$ для некоторого $m \in \{1, \ldots, k\}$, то

$$\left|\prod_{s=0}^{n-1} m_c(2^{-s}\xi)\right| = \left|\prod_{l=0}^{n-1} m_c(2^{l}\eta)\right| \leqslant q^m \left|\prod_{l=m}^{n-1} m_c(2^{l}\eta)\right|,$$

далее применяем то же неравенство к $2^l\eta$, и т. д. В результате получим

$$\left|\prod_{s=0}^{n-1} m_c(2^{-s}\xi)\right| \leqslant q^{n-r} \left|\prod_{s=0}^{r} m_c(2^{-s}\xi)\right|,$$

где $r \leqslant k-1$. Таким образом,

$$\left|\prod_{s=0}^{n-1} m_c(2^{-s}\xi)\right| \leqslant q^{j-r}(\|m_c\|_\infty)^{k-1}.$$

Возьмем теперь в качестве n такое число, что $2^{n-1} < |\xi| \leqslant 2^n$. Получаем

$$|\varphi_c(\xi)| \leqslant q^{j-r}(\|m_c\|_\infty)^{k-1}\|\varphi_c\|_{C[1,2]},$$

откуда при $|\xi| \to \infty$ следует требуемое неравенство. $\Diamond$

На практике при вычислении показателя убывания для конкретных масштабирующих уравнений иногда удается подобрать такой цикл b и такое разбиение $[0,1] = D_1 \cup \ldots \cup D_k$ (как правило, связанное с этим циклом), что $q = -\log_2 \Theta_b$, и следовательно обе величины равны $\vartheta(m_c)$. В частности, этот прием прекрасно работает для масштабирующих функций φ_r, порождающих всплески Добеши. Для них достаточно взять цикл $b = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ и разбиение $D_1 = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$, $D_2 = \left[0, \frac{1}{6}\right]$, $\left[\frac{5}{6}, 1\right]$.

Пример 7.5.6 (всплески Добеши ψ_r). Положим

$$q^2 = \left|m_c\left(\frac{1}{3}\right)m_c\left(\frac{2}{3}\right)\right|.$$

Ясно, что $Q_b(m_c) = -\log_2 q$, где $b = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. Мы докажем, что для масок всплесков Добеши выполнено

$$\begin{aligned} &|m_c(\xi)| \leqslant q, && \xi \in D_1;\\ &|m_c(\xi)m_c(2\xi)| \leqslant q^2, && \xi \in D_2, \end{aligned} \tag{7.34}$$

где множества D_1, D_2 определены выше. Тогда из леммы 7.5.5 будет следовать, что $\vartheta(m_c) = -\log_2 q$, и показатель убывания для масштабирующих функций Добеши будет вычислен.

Заметим сначала, что для масок $m_{c,r}$ имеем $m_{c,r}(\xi) = m_{c,r}(1-\xi)$. Поэтому $q = \left|m_{c,r}\bigl(\frac{1}{3}\bigr)\right| = \left|m_{c,r}\bigl(\frac{2}{3}\bigr)\right|$. Начнем с того, что установим несколько свойств полинома $P_r(x)$.

Л е м м а 7.5.7. *Для всех $r \geqslant 1$ полином $P_r(x) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \binom{r-1+k}{k} x^k$ удовлетворяет условию*

$$P_r'(x) = \frac{r}{1-x}\Bigl[P_r(x) - x^{r-1}P_r(1)\Bigr]. \tag{7.35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$P_r'(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1+k}{k} r x^k = r \sum_{k=0}^{r-2} \binom{r+k}{k} x^k =$$
$$= r\left[P_{r+1}(x) - \binom{2r}{r} x^r - \binom{2r-1}{r-1} x^{r-1}\right]. \tag{7.36}$$

Далее,

$$(1-x)P_{r+1}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{r} \left[\binom{r+k}{k} - \binom{r-1+k}{k-1}\right] x^k - \binom{2r}{r} x^r =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r-1+k}{k} x^k - \binom{2r}{r} x^r = P_r(x) + \binom{2r-1}{r} x^r(1-2x). \tag{7.37}$$

Объединяя (7.36) и (7.37), получаем

$$(1-x)P_r'(x) = r\left[P_r(x) - \binom{2r-1}{r} x^{r-1}\right].$$

Учитывая, что

$$P_r(1) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1+k}{k} = \binom{2r-1}{r},$$

получаем (7.35). $\Diamond$

Л е м м а 7.5.8. *Для всех $r \geqslant 1$ полином $P_r(x) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \binom{r-1+k}{k} x^k$ удовлетворяет условиям*

$$P_r(x) \leqslant P_r\Bigl(\frac{3}{4}\Bigr), \qquad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4};$$
$$P_r(x)P_r\bigl(4x(1-x)\bigr) \leqslant \left[P_r\Bigl(\frac{3}{4}\Bigr)\right]^2, \quad \text{при } \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1.$$

Доказательство. Первое неравенство следует из того, что функция $P_r(x)$ возрастает на интервале $x \in [0, 1]$. Докажем второе неравенство. Положим $f(x) = P_r(x) P_r\big(4x(1-x)\big)$. Из леммы 7.5.7 следует, что

$$f'(x) = \frac{r}{(1-x)(2x-1)}\, g(x),$$

где

$$g(x) = (6x-5) P_r(x) P_r\big(4x(1-x)\big) - \\ - x^{r-1}(2x-1) P_r(1) P_r\big(4x(1-x)\big) + 4(1-x)\big[4x(1-x)\big]^{r-1} P_r(1) P_r(x). \tag{7.38}$$

Заметим, что $4x(1-x) \leqslant x$ при $x \geqslant \dfrac{3}{4}$. Так как функция $x^{-r+1}P_r(x)$ убывает по x (лемма 7.4.8), имеем

$$x^{-r+1} P_r(x) \leqslant \big[4x(1-x)\big]^{-r+1} P_r\big(4x(1-x)\big),$$

или

$$\big[4(1-x)\big]^{r-1} P_r(x) \leqslant\leqslant P_r\big(4x(1-x)\big).$$

Подставив это неравенство в (7.38), получаем

$$g(x) \leqslant (6x-5) P_r\big(4x(1-x)\big)\Big[P_r(x) - x^{r-1} P_r(1)\Big].$$

Величина в квадратных скобках равна $\dfrac{1}{r}(1-x)P_r'(x) \geqslant 0$ для всех $x \leqslant 1$, следовательно $g(x) \leqslant 0$ при $\dfrac{3}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{5}{6}$. Итак, функция $P_r(x)P_r\big(4x(1-x)\big)$ возрастает на интервале $\Big[\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}\Big]$, что доказывает требуемое неравенство

$$P_r(x) P_r\big(4x(1-x)\big) \leqslant \Big[P_r\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big]^2$$

на этом интервале.

Теперь займемся интервалом $\dfrac{5}{6} \leqslant x \leqslant 1$. Так как

$$P_r(x) \leqslant \Big(\frac{4x}{3}\Big)^{r-1} P_r\Big(\frac{3}{4}\Big),$$

вследствие леммы 7.4.8 достаточно доказать, что

$$\Big(\frac{4x}{3}\Big)^{r-1} P_r\big(4x(1-x)\big) \leqslant P_r\Big(\frac{3}{4}\Big). \tag{7.39}$$

Заметим вначале, что

$$(1-x)^r P_r(x) = 1 - x^r P_r(1-x) \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$P_r\big(4x(1-x)\big) \leqslant \Big[1-4x(1-x)\Big]^{-r} = (2x-1)^{-2r}.$$

Далее, из леммы 7.4.8 и оценки

$$P_r(1) = \binom{2r-1}{r} = \frac{1}{2}\binom{2r}{r} \geqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\,4^{r-1}$$

следует, что

$$P_r\Big(\frac{3}{4}\Big) \geqslant \Big(\frac{3}{4}\Big)^{r-1} P_r(1) \geqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\,3^{n-1}. \tag{7.40}$$

Итак, для того, чтобы установить неравенство (7.39), достаточно показать, что

$$\Big[\frac{x}{(2x-1)^2}\Big]^{r-1} (2y-1)^{-2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}\Big(\frac{9}{4}\Big)^{r-1}. \tag{7.41}$$

Это просто: так как функции $(2x-1)^{-2}$ и $x(2x-1)^{-2}$ убывают на интервале $\Big[\dfrac{5}{6},\,1\Big]$, достаточно проверить, что (7.41) выполняется в точке $x=\dfrac{5}{6}$, иначе говоря, что $\Big(\dfrac{5}{6}\Big)^{r-1} \leqslant \dfrac{4}{9\sqrt{r}}$. Это верно при $r \geqslant 13$. Таким образом, для $r \geqslant 13$ лемма доказана. Осталось доказать ее для $r=1,\ldots,12$. Для этого рассмотрим два случая.

1). $\dfrac{5}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$. В этом случае имеем $4x(1-x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, откуда по лемме 7.4.8 получаем

$$P_r\big(4x(1-x)\big) \leqslant \big[8x(1-x)\big]^{r-1} P_r\Big(\frac{1}{2}\Big) = \big[16x(1-x)\big]^{r-1}.$$

Аналогично, $P_r(x) \leqslant \Big(\dfrac{6x}{5}\Big)^{r-1} P_r\Big(\dfrac{5}{6}\Big)$, поэтому

$$P_r(x)P_r\big(4x(1-x)\big) \leqslant \Big(\frac{6}{5}\Big)^{r-1} P_r\Big(\frac{5}{6}\Big)\big[16x^2(1-x)\big]^{r-1} \leqslant \Big(\frac{20}{9}\Big)^{r-1} P_r\Big(\frac{5}{6}\Big)$$

(использовали убывание функции $x^2(1-x)$ на интервале $\dfrac{5}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$). Численно проверяется, что

$$\Big(\frac{20}{9}\Big)^{r-1} P_r\Big(\frac{5}{6}\Big) \leqslant \Big[P_r\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big]^2$$

при $r \leqslant 12$.

2). $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \leqslant x \leqslant 1$. Положим $x_0 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$. Пользуясь оценками

$$P_r\big(4x(1-x)\big) \leqslant (2x-1)^{-2r}; \quad P_r(x) \leqslant \Big(\frac{x}{x_0}\Big)^{r-1} P_r(x_0),$$

получаем

$$P_r\big(4x(1-x)\big)P_r(x) \leqslant x_0^{-r+1}P_r(x_0)\Big[\frac{x}{(2x-1)^2}\Big]^{r-1}.$$

Последнее выражение не превосходит $2^r P_r(x_0)$ (так как обе функции $(2x-1)^{-2}$ и $x(2x-1)^{-2}$ убывают на интервале $[x_0,\,1]$). Численно проверяется, что $2^r P_r(x_0)$ меньше, чем $\Big[P_r\big(\frac{3}{4}\big)\Big]^2$ при $r = 5, \ldots, 12$.

Осталось доказать лемму для $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \leqslant x \leqslant 1$ и $r = 1, 2, 3, 4$. При этих r степень полинома $P_r(x)P_r\big(4x(1-x)\big) - \Big[P_r\Big(\dfrac{3}{4}\Big)\Big]^2$ не превосходит 9. Численно оценивая его корни, получаем, что ни один из них не лежит на интервале $\Big(\dfrac{3}{4},\,1\Big)$, что завершает доказательство леммы, так как требуемое неравенство выполнено в точке $x = 1$. Лемма 7.5.8 доказана. $\diamondsuit$

Итак, для любого r маска $m_{c,r}$ удовлетворяет (7.34), следовательно $\vartheta(m_{c,r}) = -\log_2 q$, где $q = \Big|m_{c,r}\Big(\dfrac{1}{3}\Big)\Big|$. Таким образом,

$$\vartheta(m_{c,r}) = -\frac{1}{2}\log_2 P_r\Big(\frac{3}{4}\Big) \tag{7.42}$$

Оценим $\vartheta(m_{c,r})$ асимптотически при $r \to \infty$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\,3^{r-1} \leqslant P_r\Big(\frac{3}{4}\Big) \leqslant 3^{r-1}$$

(верхняя оценка следует из леммы 7.4.8, нижняя — из леммы 7.5.7), имеем

$$\frac{1}{2}\log_2 P_r\Big(\frac{3}{4}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\log_2 3\Big)\cdot r\Big(1 - O(r^{-1}\log r)\Big).$$

Таким образом,

$$\vartheta(m_{c,r}) \sim (-0{,}79348\ldots)r.$$

Отсюда немедленно получаем, что при больших r

$$\alpha_{\varphi_r} \geqslant \mu r,$$

где $\mu = 1 - 0{,}79348\ldots = 0{,}2075\ldots$ Это дает обещанное доказательство теоремы 4.1.6) (для больших r неравенство $\alpha_{\varphi_r} \geqslant 0{,}2r$ следует из нашей асимптотической оценки, для малых — проверяется непосредственно с помощью матричного метода, примеры 7.3.7–7.3.9). Для малых r данный метод дает следующие значения гладкости:

$$\begin{array}{c|c} r & \alpha \\ \hline 2 & 0{,}339 \\ 3 & 0{,}636 \\ 4 & 0{,}913 \\ 5 & 1{,}177 \\ 6 & 1{,}432 \\ 7 & 1{,}682 \\ 8 & 1{,}927 \\ 9 & 2{,}168 \\ 10 & 2{,}406 \end{array} \tag{7.43}$$

Как мы знаем, метод поточечной оценки убывания определяет показатель гладкости лишь с точностью до единицы. Сравнив результаты с точными показателями, полученными для $r \leqslant 4$ матричным методом (табл. 7.14), видим, что, действительно, точность данного метода оценки невысока.

Глава 8

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВСПЛЕСКИ

8.1. Общая теория нестационарных всплесков

Ранее рассмотренные системы всплесков

$$\{\psi_{jk}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j + k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

в этой главе мы будем называть стационарными. Изучим теперь *нестационарные системы всплесков* $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, которые в отличие от стационарных порождаются некоторой последовательностью всплеск-функций $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, при этом символ ψ_{jk} имеет новый смысл:

$$\psi_{jk}(t) := \psi_j(t + k2^{-j}), \quad j,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Если нестационарная система всплесков образует базис (ортонормированный базис) в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, то мы будем называть ее *нестационарным базисом* (*ортонормированным базисом*) *всплесков* и будем говорить, что этот базис порожден функциями $\{\psi_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Замечание 8.1.1. В стационарном случае роль функций $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ играют сжатия одной функции $\psi_j(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t)$.

Приведем аналог теоремы 1.3.3 для нестационарного случая.

Теорема 8.1.2. *Пусть последовательность функций* $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\psi_j \in L_2(\mathbb{R})$, $\|\psi_j\| = 1$, *для любого компактного множества* $K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_K \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2\, d\xi < \infty. \tag{8.1}$$

Функции $\{\psi_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$, *порождают нестационарный ортонормированный базис всплесков тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2 = 1 \quad \text{п. в.}; \tag{8.2}$$

и

$$\sum_{p=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{j-p}(\xi)\overline{\widehat{\psi}_{j-p}(\xi + l2^j)} = 0 \quad \text{п. в.} \tag{8.3}$$

для всех нечетных $l \in \mathbb{Z}$ *и всех* $j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Достаточность. Поскольку $\|\psi_{jk}\| = 1$, ясно что система $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом тогда и только тогда, когда для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2. \tag{8.4}$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ ограничено и имеет компактный носитель, содержащийся в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. По лемме 1.2.11

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 = 2^j \int_0^{2^j} \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + l2^j)\overline{\widehat{\psi}_j(\xi + l2^j)} \right|^2 d\xi. \tag{8.5}$$

Продолжая преобразования, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 = 2^j \int_0^{2^j} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi + l2^j)|^2 |\widehat{\psi}_j(\xi + l2^j)|^2 \, d\xi +$$

$$+ 2^j \int_0^{2^j} \sum_{\substack{l_1,l_2\in\mathbb{Z}\\ l_1\neq l_2}} \widehat{f}(\xi + l_1 2^j)\overline{\widehat{f}(\xi + l_2 2^j)\widehat{\psi}_j(\xi + l_1 2^j)}\widehat{\psi}_j(\xi + l_2 2^j)\, d\xi =$$

$$= 2^j \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2 \, d\xi + 2^j \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi + l2^j)\widehat{\psi}_j(\xi)}\widehat{\psi}_j(\xi + l2^j)\, d\xi. \tag{8.6}$$

Таким образом,

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2 \, d\xi +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi + l2^j)\widehat{\psi}_j(\xi)}\widehat{\psi}_j(\xi + l2^j)\, d\xi. \tag{8.7}$$

Любое число $l \neq 0$ можно записать в виде $k2^p$, где k — нечетное, а p — неотрицательное целое число. Предполагая возможным применение теоремы Фубини (это будет обосновано позднее), получим

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi + l2^j)\widehat{\psi}_j(\xi)}\widehat{\psi}_j(\xi + l2^j)\, d\xi =$$

$$= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\,-\,\text{нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{\infty} 2^j \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi+k2^{j+p})\widehat{\psi}_j(\xi)}\widehat{\psi}_j(\xi+k2^{j+p})\,d\xi =$$

$$= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\,-\,\text{нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi+k2^j)} \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}\overline{\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)}\widehat{\psi_{j-p}}(\xi+k2^j)\,d\xi. \tag{8.8}$$

Полученное равенство вместе с (8.7) означает, что из (8.2) и (8.3) следует (8.4).

Поскольку множество ограниченных функций с компактным спектром, содержащимся в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, достаточность будет доказана после проверки правомерности применения теоремы Фубини. Применим несколько раз неравенство Коши:

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\,-\,\text{нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^j)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}|\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)||\widehat{\psi}_{j-p}(\xi+k2^j)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\,-\,\text{нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^j)| \times$$

$$\times \left(\sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}|\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}|\widehat{\psi}_{j-p}(\xi+k2^j)|^2\right)^{1/2} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\,-\,\text{нечетное}}} \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^j)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}|\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^j)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}|\widehat{\psi}_{j-p}(\xi+k2^j)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\,-\,\text{нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^j)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}|\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\,-\,\text{нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{f}(\xi-k2^j)||\widehat{f}(\xi)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}|\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\,-\,\text{нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^j)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}|\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)|^2\,d\xi =$$

$$= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\text{ — нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^{j+p})| 2^j |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2\, d\xi.$$

Аналогично можно доказать, что для любого симметричного относительно 0 множества нечетных чисел I и произвольного $J \subseteq \mathbb{Z}$

$$\sum_{k\in I} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^j)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} |\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)||\widehat{\psi}_{j-p}(\xi+k2^j)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in I} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^j)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} |\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)|^2\, d\xi. \quad (8.9)$$

Ясно, что $|\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}((\xi+k2^l))| = 0$, если $|k2^l| > \operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\widehat{f}))$. Поэтому

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\text{ — нечетное}}} \sum_{p=0}^{\infty} 2^j |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^{j+p})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \|\widehat{f}\|_\infty^2 \operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\widehat{f})) 2^{-p} = 2\|\widehat{f}\|_\infty^2 \operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\widehat{f})).$$

Окончательно получаем в силу (8.1)

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\text{ — нечетное}}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)||\widehat{f}(\xi+k2^{j+p})| 2^j |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C\|\widehat{f}\|_\infty^2 \int_{\operatorname{supp}(\widehat{f})} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Необходимость. Зафиксируем $\xi_0 \neq 0$ и определим в образах Фурье функции $\widehat{f_\delta} = \delta^{-1/2}\chi_{(\xi_0,\xi_0+\delta)}$ для $0 < \delta < |\xi_0|$. Из (8.5) следует, что для любого $J \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\delta} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\delta} \sum_{j=-J}^{J} 2^j |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2 \leqslant 1,$$

откуда получаем, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2 \leqslant 1. \quad (8.10)$$

Очевидно, что из

$$|\widehat{f_\delta}(\xi)| \cdot |\widehat{f_\delta}(\xi+k2^{j+p})| \neq 0$$

следует, что $|k2^{j+p}| < \delta$. Поэтому

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\text{ — нечетное}}} \sum_{p=0}^{\infty} 2^j |\widehat{f}_\delta(\xi)||\widehat{f}_\delta(\xi + k2^{j+p})| \leqslant C\chi_{(\xi_0,\xi_0+\delta)}(\xi).$$

Учитывая (8.7) и (8.10), имеем

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\delta} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2 = 1,$$

откуда следует (8.2).

Осталось доказать (8.3). Рассмотрим для произвольных $\xi_0 \neq 0$, $j_0 \in \mathbb{Z}$, нечетного $k_0 \in \mathbb{Z}$ и комплексного α, $|\alpha| = 1$, функции

$$\widehat{g}_\delta := \delta^{-1/2}\chi_{(\xi_0,\xi_0+\delta)} + \alpha\delta^{-1/2}\chi_{(\xi_0+k_0 2^{j_0},\ \xi_0+k_0 2^{j_0}+\delta)}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=\pm k_0} \widehat{g}_\delta(\xi)\overline{\widehat{g}_\delta(\xi + k2^{j_0})} \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}\overline{\widehat{\psi}_{j_0-p}(\xi)}\widehat{\psi}_{j_0-p}(\xi + k2^{j_0})\, d\xi =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\delta} \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\delta} \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}\widehat{\psi}_{j_0-p}(\xi)\overline{\widehat{\psi}_{j_0-p}(\xi + k_0 2^{j_0})}\, d\xi \right).$$

Таким образом, для доказательства (8.3) достаточно показать, что

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sum_{k=\pm k_0} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}} 2^j |\widehat{g}_\delta(\xi)||\widehat{g}_\delta(\xi + k2^j)| \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} |\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)||\widehat{\psi}_{j-p}(\xi + k2^j)|\, d\xi = 0 \quad (8.11)$$

и

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm k_0\}\\ k\text{ — нечетное}}} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j |\widehat{g}_\delta(\xi)||\widehat{g}_\delta(\xi + k2^j)| \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} |\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)||\widehat{\psi}_{j-p}(\xi + k2^j)|\, d\xi = 0. \quad (8.12)$$

В силу (8.9)

$$\sum_{k=\pm k_0} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}} 2^j |\widehat{g}_\delta(\xi)||\widehat{g}_\delta(\xi + k2^j)| \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} |\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)| |\widehat{\psi}_{j-p}(\xi + k2^j)| \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=\pm k_0} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}} 2^j |\widehat{g}_\delta(\xi)| |\widehat{g}_\delta(\xi + k2^j)| \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} |\widehat{\psi}_{j-p}(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=\pm k_0} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0-p\}} 2^j |\widehat{g}_\delta(\xi)| |\widehat{g}_\delta(\xi + k2^{j+p})| \right) \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}_l(\xi)|^2 \right) d\xi.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=\pm k_0} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0-p\}} 2^j |\widehat{g}_\delta(\xi)| |\widehat{g}_\delta(\xi + k2^{j+p})| \leqslant$$

$$\leqslant C\chi_{(\xi_0,\xi_0+\delta)} + \chi_{(\xi_0+k_0 2^{j_0},\ \xi_0+k_0 2^{j_0}+\delta)},$$

поэтому из (8.1) следует (8.11).

Равенство (8.12) доказывается аналогично. $\Diamond$

З а м е ч а н и е 8.1.3. В стационарном случае условие (8.1) выполняется автоматически. Пусть $0 < a < b < \infty$. Тогда

$$\int_a^b \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}_j(\xi)|^2 \, d\xi = \int_a^b \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} |\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \, d\xi = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{a2^{-j}}^{b2^{-j}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_{[a2^{-j}, b2^{-j}]}(\xi) |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_{[a2^{-j}, b2^{-j}]}(\xi) \leqslant \log_2(b/a).$$

Как и в стационарном случае основным методом построения нестационарных всплесков является нестационарный аналог кратномасштабного анализа.

О п р е д е л е н и е 8.1.4. Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *нестационарным кратномасштабным анализом* (далее НКМА), если выполнены следующие условия (аксиомы):

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR2. $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$;

MR3. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

MR4. Для любого j существует функция $\varphi_j \in V_j$ такая, что последовательность $\{\varphi_j(\,\cdot + k2^{-j})\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в V_j. Последовательность $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется *масштабирующей последовательностью* для данного НКМА.

Если обозначить через P_j ортогональный проектор на V_j, то из условия MR2 следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} P_j f = f$ для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$). Из MR4 следует, что для любой функции $f \in V_j$ функция $f(\,\cdot + 2^{-j}k)$ также принадлежит V_j при любом $k \in \mathbf{Z}$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\{\varphi_j(\,\cdot + k2^{-j})\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированный базис в V_j. Ортогонализация проводится аналогично стационарному случаю (см. теорему 1.1.14) переходом к функциям $\varphi_j^\sharp$, определяемым в образах Фурье равенствами

$$\widehat{\varphi_j^\sharp}(\xi) := \frac{\widehat{\varphi}_j(\xi)}{\Big(2^j \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(\xi + 2^j k)|^2\Big)^{1/2}}. \tag{8.13}$$

Как и ранее будем использовать обозначения: $\psi_{jk}(t) := \psi_j(t + k2^{-j})$. Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 1.3.1.

Теорема 8.1.5. *Если $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — НКМА, то существует нестационарный ортонормированный базис всплесков $\{\psi_{jk}\}_{j,\,k\in\mathbf{Z}}$ такой, что для любой функции f из $L_2(\mathbb{R})$*

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk}. \tag{8.14}$$

Доказательство. Пусть W_j — это ортогональное дополнение V_j до V_{j+1}: $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$. В силу MR1

$$W_j \perp W_{j_1} \text{ при } j \neq j_1 \tag{8.15}$$

и при любых $j_0 < j$

$$V_j = V_{j_0} \oplus \left(\bigoplus_{l=j_0}^{j-1} W_l\right). \tag{8.16}$$

Из MR2 и MR4 следует, что

$$L_2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j. \tag{8.17}$$

Формула (8.14) эквивалентна тому, что при фиксированном j последовательность $\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в W_j. В силу (8.17) последнее означает, что $\{\psi_{jk}\}_{j,\,k\in\mathbf{Z}}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$. Таким образом, задача построения нестационарного базиса всплесков со свойством (8.14) сводится к нахождению функций ψ_j таких, что последовательность $\{\psi_j(\,\cdot + k2^{-j})\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в W_j.

При построении функций ψ_j используются следующие свойства φ_j и W_j. Так как $\varphi_j \in V_j \subset V_{j+1}$ и $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в V_{j+1}, то

$$\varphi_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{j+1,k}\, \varphi_{j+1,k}, \tag{8.18}$$

где

$$h_{j+1,k} := \langle \varphi_j,\, \varphi_{j+1,k}\rangle, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h_{j+1,k}|^2 = 1. \tag{8.19}$$

Равенства (8.18) являются нестационарными аналогами масштабирующего тождества. Переходя к образам Фурье, имеем

$$\widehat{\varphi_j}(\xi) = m_{j+1}(\xi 2^{-j-1})\widehat{\varphi_{j+1}}(\xi), \tag{8.20}$$

где $m_{j+1}(\xi) := \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} h_{j+1,k}e^{2\pi i k\xi}$. Функции m_j называются *нестационарными масками*.

В силу предложения 1.1.12

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_j}(\xi + 2^j l)|^2 = 2^{-j} \tag{8.21}$$

для почти всех ξ. Если подставить (8.20) в (8.21), то получим, что

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} |m_{j+1}(\xi 2^{-j-1} + l/2)\widehat{\varphi}_{j+1}(\xi + 2^j l)|^2 = 2^{-j}.$$

Разбив сумму на две (по четным и по нечетным l), учитывая 1-периодичность m_{j+1}, имеем, что

$$|m_{j+1}(\xi)|^2 + |m_{j+1}(\xi + 1/2)|^2 = 2. \tag{8.22}$$

Охарактеризуем подпространства W_j в терминах преобразования Фурье. Любая функция f из W_j принадлежит V_{j+1} и ортогональна V_j. Первое свойство означает, что

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \varphi_{j+1,k},$$

где $f_k = \langle f,\, \varphi_{j+1,k}\rangle$. В образах Фурье имеем

$$\widehat{f}(\xi) = m_f(\xi 2^{-j-1})\, \widehat{\varphi}_{j+1}(\xi), \tag{8.23}$$

где $m_f(\xi) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} f_k\, e^{2\pi i k\xi}$ — 1-периодическая функция из $L_2[0,\, 1]$. Условие ортогональности f к V_j эквивалентно тому, что $f \perp \varphi_{jk}$ для любого $k \in \mathbf{Z}$, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\varphi_j}(\xi)}\, e^{\pi i k 2^{1-j}\xi}\, d\xi = 0.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\varphi_j}(\xi)}\, e^{\pi i k 2^{1-j}\xi}\, d\xi = \int\limits_0^{2^j} e^{\pi i k 2^{1-j}\xi} \sum_{l\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(\xi+2^j l)\overline{\widehat{\varphi_j}}(\xi+2^j l)\, d\xi = 0. \tag{8.24}$$

Так как равенство (8.24) имеет место для любого $k \in \mathbf{Z}$, то

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+2^j l)\overline{\widehat{\varphi_j}}(\xi+2^j l) = 0. \tag{8.25}$$

Ряд в (8.25) сходится абсолютно в $L([0,\,1])$. Подставляя (8.20) и (8.23) в (8.25) и группируя суммы с четными и нечетными l, получим, учитывая (8.21), что

$$2^{j+1}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+2^j l)\overline{\widehat{\varphi_j}}(\xi+2^j l) = m_f(\xi 2^{-j-1})\overline{m}_{j+1}(\xi 2^{-j-1}) + \\ + m_f(\xi 2^{-j-1}+1/2)\overline{m}_{j+1}(\xi 2^{-j-1}+1/2) = 0.$$

В силу (8.22) $\overline{m}_{j+1}(\xi)$ и $\overline{m}_{j+1}(\xi+1/2)$ не могут обратиться в нуль одновременно, поэтому существует 1-периодическая функция $\lambda(\xi)$ такая, что

$$m_f(\xi) = \lambda(\xi)\overline{m}_{j+1}(\xi+1/2) \quad \text{п. в.} \tag{8.26}$$

и $\lambda(\xi)+\lambda(\xi+1/2)=0$. Последнее равенство можно переписать, как $\lambda(\xi)=e^{-2\pi i\xi}\nu(2\xi)$, где ν — некоторая 1-периодическая функция. Таким образом, преобразование Фурье произвольной функции из W_j имеет вид

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi i\xi 2^{-j}}\,\overline{m}_{j+1}(\xi 2^{-j-1}+1/2)\,\nu(\xi 2^{-j})\widehat{\varphi}_{j+1}(\xi), \tag{8.27}$$

где ν — некоторая 1-периодическая функция. Кроме того,

$$\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2 = \\ = \int\limits_0^{2^j} |\nu(\xi 2^{-j})|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |m_{j+1}(\xi 2^{-j-1}+(l+1)2)\widehat{\varphi}_{j+1}(\xi+2^j l)|^2\, d\xi = \\ = \|\nu\|_{L_2([0,\,1])}.$$

Таким образом, 1-периодическая функция ν является квадратично суммируемой.

Имея описание (8.27) пространства W_j, нетрудно найти функцию $\psi_j \in W_j$, сдвиги которой $\{\psi_j(\,\cdot+k2^{-j})\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образуют ортонормированный базис в W_j. Пусть ψ_j — искомая функция. Тогда

$$\widehat{\psi}_j(\xi) = e^{-\pi i\xi 2^{-j}}\,\overline{m}_{j+1}(\xi 2^{-j-1}+1/2)\nu_{\psi_j}(\xi 2^{-j})\widehat{\varphi}_{j+1}(\xi).$$

Подставляя это выражение в (8.21), получаем, используя (8.22), что

$$|\nu_{\psi_j}(\xi)|^2 \equiv 1 \quad \text{п. в.} \tag{8.28}$$

Проще всего положить $\nu_{\psi_j}(\xi) \equiv 1$. В силу (8.27) сдвиги функции ψ_j, определяемой равенством

$$\widehat{\psi}_j(\xi) = e^{-\pi i \xi 2^{-j}} \overline{m}_{j+1}(\xi 2^{-j-1} + 1/2)\widehat{\varphi}_{j+1}(\xi), \tag{8.29}$$

будут базисом в W_j. Действительно, если

$$\nu(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, e^{2\pi i k\xi},$$

то

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, e^{\pi i k 2^{1-j}\xi}\right)\widehat{\psi}_j(\xi)$$

или

$$f(\cdot) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, \psi_j(\cdot + k2^{-j}).$$

Заметим, что в силу (8.28) образ Фурье любой функции, целые сдвиги которой образуют ортонормированный базис в W_j, отличается от образа Фурье функции ψ_j из (8.29) лишь некоторым 1-периодическим множителем по модулю равным 1.

Таким образом, имея нестационарный кратномасштабный анализ $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$, порождаемый масштабирующей последовательностью $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, всегда можно построить нестационарный ортонормированный базис всплесков $\{\psi_{jk}\}_{j,\,k\in\mathbf{Z}}$ в $L_2(\mathbf{R})$, обладающий свойством (8.14). $\Diamond$

Из формулы (8.29) следует, что

$$\psi_j(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{k-1} h_{j+1,-k+1} \cdot \varphi_{j+1,k}(t). \tag{8.30}$$

Для сокращения записей будем использовать

$$\psi_j(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{k} h_{j+1,-k+1} \cdot \varphi_{j+1,k}(t). \tag{8.31}$$

В нестационарном случае формула для проектора P_j имеет следующий вид.

Теорема 8.1.6. *Пусть $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — масштабирующая последовательность некоторого НКМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Тогда ортогональные проекторы P_j, $j \in \mathbb{Z}$, на V_j удовлетворяют соотношениям*

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + l2^j)\overline{\widehat{\varphi_j}(\xi + l2^j)}\right)\widehat{\varphi_j}(\xi), \quad f \in L_2(\mathbb{R}). \tag{8.32}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\widehat{\varphi_{jk}}(\xi) = e^{\pi i \xi k 2^{1-j}}\widehat{\varphi_j}(\xi).$$

Поэтому

$$\langle f, \varphi_{jk}\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi_{jk}}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi i \xi k 2^{1-j}} \overline{\widehat{\varphi_j}(\xi)}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{2^j} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + l2^j) \overline{\widehat{\varphi_j}(\xi + l2^j)} \right) e^{-\pi i \xi k 2^{1-j}}\, d\xi.$$

Поменять порядок суммирования и интегрирования в последнем равенстве можно в силу того, что $|\widehat{f}| \cdot |\widehat{\varphi_j}| \in L(\mathbb{R})$ по неравенству Коши–Буняковского. В силу того же неравенства

$$\left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + l2^j) \overline{\widehat{\varphi_j}(\xi + l2^j)} \right|^2 \leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi + l2^j)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_j}(\xi + l2^j)|^2.$$

Поэтому $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\,\cdot + l2^j) \overline{\widehat{\varphi_j}(\,\cdot + l2^j)} \in L_2([0, 2^j])$ и

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk}\rangle \widehat{\varphi_{jk}}(\xi) =$$

$$= \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_0^{2^j} (\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(v + l2^j) \overline{\widehat{\varphi_j}(v + l2^j)}) e^{-\pi i v k 2^{1-j}}\, dv \right) \cdot e^{\pi i \xi k 2^{1-j}} \right] \widehat{\varphi_j}(\xi) =$$

$$= \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + l2^j) \overline{\widehat{\varphi_j}(\xi + l2^j)} \right) \widehat{\varphi_j}(\xi). \quad \Diamond$$

Повторяя почти дословно доказательство теоремы 2.3.4, получаем следующий результат.

Теорема 8.1.7. *Пусть последовательность* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *удовлетворяет свойствам* MR1 *и* MR4. *Тогда* $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L_2(\mathbf{R})$ *тогда и только тогда, когда* $\Omega_0 := \bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} \operatorname{supp} \widehat{\varphi}_j = \mathbf{R}$.

8.2. Нестационарные бесконечно дифференцируемые ортонормированные всплески с компактным носителем

В этом параграфе описывается метод построения нестационарных ортонормированных базисов всплесков. Метод позволяет получить нестационарные ортонормированные бесконечно дифференцируемые всплески с компактным носителем. Более того, длина носителя генератора j-го уровня в этой системе меньше чем $2T(j+2)2^{-j}$, где $\{T(j)\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{j\to\infty} T(j) = \infty, \quad T(j) \leqslant T(j+1) \leqslant T(j)+1, \quad T(1) = 1.$$

Прежде всего отметим, что подобная конструкция невозможна в стационарной ситуации.

Теорема 8.2.1. *Не существует стационарного ортогонального базиса всплесков, состоящего из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.*

Доказательство. Предположим противное: пусть ψ — ортогональная бесконечно дифференцируемая всплеск-функция с компактным носителем. Тогда в силу теоремы 1.7.7

$$\int_{\mathbb{R}} t^l \psi(t)\, dt = 0$$

для всех $l \in \mathbb{N}$, что эквивалентно тому, что

$$\widehat{\psi}^{(l)}(0) = 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Последнее невозможно, так как по теореме Пэли–Винера (см. приложение A.7) $\widehat{\psi}$ — целая функция. $\Diamond$

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 8.2.2. *Пусть* $\{T(N)\}_{N=1}^{\infty}$ *— произвольная последовательность натуральных чисел таких, что*

$$\lim_{N\to\infty} T(N) = \infty, \tag{8.33}$$

$$T(N) \leqslant T(N+1) \leqslant T(N)+1, \quad T(1) = 1. \tag{8.34}$$

Тогда существует система нестационарных всплесков

$$\Psi := \{\varphi_{0k}, \quad \psi_{jk}, \quad j,k \in \mathbb{Z}, \quad j \geqslant 0\}$$

со следующими свойствами:

i) Ψ *— ортонормированный базис в* $L_2(\mathbb{R})$;

ii) $\varphi_{0k}(t) = \varphi_{00}(t+k)$;
$\psi_{jk}(t) = \psi_{j0}(t+k2^{-j})$; $\quad t \in \mathbb{R}; \quad j,k \in \mathbb{Z}, \quad j \geqslant 0$;

iii) $\Psi \subset C^{\infty}(\mathbb{R})$;

iv) $\operatorname{supp} \varphi_{00} \subset [-2T(1)-1, 0]$;
$\operatorname{supp} \psi_{j0} \subset [-(T(j+2)+1)2^{-j}, (2T(j+1)-1)2^{-j-1}]$,
$j \in \mathbb{Z},\ j \geqslant 0$.

Доказательство этой теоремы содержится в приведенных ниже леммах 8.2.7–8.2.10.

Сначала опишем построение системы Ψ. Пусть

$$d_N(\xi) = 2^{-1/2}\sum_{l=0}^{2N-1} h_N(l)e^{2\pi i l\xi}, \quad h_N(l)\in\mathbb{R}, \quad N\in\mathbb{N},$$

— маски Добеши (см. (4.17)). Ясно, что

$$d_N(\xi) = \Big(\frac{1+\exp(2\pi i\xi)}{2}\Big)^N Q_N(\exp(2\pi i\xi)),$$

где тригонометрический полином

$$Q_N(\xi) = \sum_{l=0}^{N-1} q_n(l)\xi^l, \quad q_n(0)\neq 0, \tag{8.35}$$

удовлетворяет тождеству

$$|Q_N(\exp(2\pi i\xi))|^2 = P_N(\sin^2(\pi\xi)) = \sum_{l=0}^{N-1}\binom{N-1+l}{l}\sin^{2l}(\pi\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{8.36}$$

З а м е ч а н и е 8.2.3. Полиномы Q_N определены не однозначно, но это не имеет значения для конструкции (см. замечание 4.1.5).

Как обычно положим $h_N(l)=0$ при $l\notin\{0,1,\ldots,2N-1\}$. Тождество

$$|d_N(\xi)|^2 + |d_N(\xi+1/2)|^2 = 1 \tag{8.37}$$

эквивалентно следующим свойствам коэффициентов $h_N(l)$:

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} h_N(l) = 2^{1/2}, \tag{8.38}$$

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} h_N(l)h_N(l+2m) = \delta_{0,m}, \quad m\in\mathbb{Z}. \tag{8.39}$$

Л е м м а 8.2.4. *Бесконечные произведения*

$$G_j(\xi) := \prod_{N=j+1}^{\infty} d_{T(N)}(2^{-N}\xi), \quad j\in\mathbb{Z}_+, \tag{8.40}$$

поточечно сходятся для всех $\xi\in\mathbb{R}$. Сходимость равномерная на компактных множествах.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (8.38) и (8.39) имеем

$$|d_N(\xi)-1| \leqslant 2^{-1/2}\sum_{l=0}^{2N-1} |h_N(l)(\exp(2\pi i l\xi)-1)| =$$

$$= 2^{1/2}\sum_{l=0}^{2N-1} |h_N(l)\sin(\pi l\xi)| \leqslant \pi 2^{1/2}\sum_{l=0}^{2N-1} l\,|h_N(l)\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \pi 2^{1/2}\left(\sum_{l=0}^{2N-1} l^2\right)^{1/2}\left(\sum_{l=0}^{2N-1}(h_N(l))^2\right)^{1/2}|\xi| \leqslant \pi 2^{3/2}N^{3/2}|\xi|. \quad (8.41)$$

Условие (8.34) означает, что

$$T(N) \leqslant N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (8.42)$$

поэтому неравенство (8.41) влечет сходимость $G_j(\xi)$ при любых $\xi \in \in \mathbb{R}$. Ясно, что из (8.41), (8.42) следует равномерная сходимость на компактах. $\Diamond$

Обозначим $I_r := [2^{r-2},\ 2^{r-1}]$, $r \in \mathbb{N}$.

Л е м м а 8.2.5. *Пусть* $j \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $|\xi| \in I_r$ *с* $r > j$, $r \in \mathbb{N}$, *то*

$$|G_j(\xi)| \leqslant \alpha_j \exp\left(-\beta \sum_{N=j+1}^{r} T(N)\right), \quad (8.43)$$

где $\beta > 0$, *а* $\alpha_j > 0$ *зависит только от* j.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем натуральное число $r > j$ и положим

$$G_{jr}(\xi) := \prod_{N=j+1}^{r} d_{T(N)}(\xi 2^{-N});$$

$$A_{jr}(\xi) := \prod_{N=j+1}^{r}\left|\frac{1+\exp(\pi i\xi 2^{1-N})}{2}\right|^{T(N)} = \prod_{N=j+1}^{r} |\cos \pi\xi 2^{-N}|^{T(N)};$$

$$B_{jr}(\xi) := \prod_{N=j+1}^{r} |P_{T(N)}(\sin^2(\pi\xi 2^{-N}))|^{1/2}.$$

В силу (8.37) имеем

$$|G_j(\xi)| \leqslant |G_{jr}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}; \quad j, r \in \mathbb{Z}_+, \quad r > j. \quad (8.44)$$

Применяя тождество $\sin 2\xi = 2\sin\xi\cos\xi$, получим

$$A_{jr}(\xi) = \prod_{N=j+1}^{r}\left|\frac{\sin \pi\xi 2^{1-N}}{2\sin \pi\xi 2^{-N}}\right|^{T(N)} = 2^{-\sum\limits_{N=j+1}^{r} T(N)} \times$$

$$\times |\sin \pi\xi 2^{-j}|^{T(j+1)} \prod_{N=j+2}^{r} |\sin \pi\xi 2^{1-N}|^{T(N)-T(N-1)} |\sin \pi\xi 2^{-r}|^{-T(r)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\sum\limits_{N=j+1}^{r} T(N)} |\sin \pi\xi 2^{-r}|^{-T(r)}. \quad (8.45)$$

Если $|\xi| \in I_r$, то $|\sin \pi 2^{-r}\xi| \geqslant 2^{-1/2}$. В связи с этим

$$A_{jr}(\xi) \leqslant 2^{-\sum\limits_{N=j+1}^{r} T(N)+T(r)/2}, \quad \xi \in I_r. \tag{8.46}$$

Поскольку $\binom{N-1+l}{l} \leqslant \binom{N+l}{l}$, $l = 0,\ 1, \ldots, N-1$, то для любого $y \geqslant 0$

$$P_N(y) \leqslant P_{N+1}(y), \quad N \in \mathbb{N}. \tag{8.47}$$

В (7.29) и (7.30) доказано, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |P_r(\sin^2 \pi t) P_r(\sin^2 2\pi t)| \leqslant 2^{4(r-1)} d^{r-1}, \tag{8.48}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|P_r(\sin^2 \pi t)\right| < 2^{2(r-1)}, \tag{8.49}$$

где $d := 16/27$. Если $r - j = 2l$ для некоторого целого l, то в силу (8.34), (8.47), (8.48) и (8.34) имеем

$$\begin{aligned} B_{jr}(\xi) &= \\ &= \prod_{N=1}^{l} |P_{T(j+2N-1)}(\sin^2(\pi\xi 2^{-j-2N+1})) P_{T(j+2N)}(\sin^2(\pi\xi 2^{-j-2N}))|^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \prod_{N=1}^{l} 2^{2(T(j+2N)-1)} d^{(T(j+2N)-1)/2} \leqslant \prod_{N=j+1}^{r} 2^{T(N)} d^{(T(N)-1)/4}. \end{aligned} \tag{8.50}$$

Если $r - j = 2l - 1$ для некоторого целого l, то в силу (8.47), (8.48), (8.49) и (8.34) получаем, что

$$\begin{aligned} B_{jr}(\xi) &= |P_{T(j+1)}(\sin^2(\pi\xi 2^{-j-1})) \times \\ &\times \prod_{N=1}^{l-1} P_{T(j+2N)}(\sin^2(\pi\xi 2^{-j-2N})) P_{T(j+2N+1)}(\sin^2(\pi\xi 2^{-j-2N-1}))|^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant 2^{T(j+1)-1} \prod_{N=1}^{l-1} 2^{2(T(j+2N+1)-1)} d^{(T(j+2N+1)-1)/2} \leqslant \\ &\leqslant d^{(1-T(j+1))/4} \prod_{N=j+1}^{r} 2^{T(N)} d^{(T(N)-1)/4}. \end{aligned} \tag{8.51}$$

Используя (8.46), (8.50) и (8.51), получаем (8.43). $\Diamond$

С л е д с т в и е 8.2.6. *Функции G_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, убывают на бесконечности быстрее любой степени.*

Доказательство. Условие (8.33) означает, что

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{N=1}^{r} T(N)/r = \infty.$$

Таким образом утверждение следует из (8.43). $\Diamond$

Определим последовательность функций $\{\varphi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z},\ j\geqslant 0}$ через преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} &\widehat{\varphi}_j(\xi) := 2^{-j/2} G_j(\xi), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ &\varphi_{jk}(t) := \varphi_j(t + k2^{-j}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.52}$$

В лемме 8.2.9 будет доказано, что последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ является нестационарной масштабирующей последовательностью (см. определение 8.1.4). Нестационарные всплески ψ_{jk}, $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, определяются равенствами

$$\begin{aligned} &\widehat{\psi}_j(\xi) := 2^{1/2} \exp(-i\xi 2^{-j-1}) d_{T(j+1)}(-\xi 2^{-j-1} - 1/2) \widehat{\varphi}_{j+1}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ &\psi_{jk}(t) := \psi_j(t + k2^{-j}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{8.53}$$

в соответствии с теоремой 8.1.5. Таким образом, построение системы Ψ завершено. Положим

$$\Psi := \{\varphi_{0k}, \quad \psi_{jk}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Займемся теперь свойствами системы Ψ.

Лемма 8.2.7. *Функции φ_{jk} и ψ_{jk}, $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, бесконечно дифференцируемы.*

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость функции эквивалентна убыванию на бесконечности быстрее любой степени преобразования Фурье этой функции, поэтому утверждение получается на основе следствия 8.2.6. $\Diamond$

Лемма 8.2.8. *Для любых $j \in \mathbb{Z}_+$, $k,\ k' \in \mathbb{Z}$, имеем*

$$\langle \varphi_{jk}, \varphi_{jk'} \rangle = \delta_{k,k'}, \tag{8.54}$$

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{jk'} \rangle = \delta_{k,k'}. \tag{8.55}$$

Доказательство. Зафиксируем целое число $j \geqslant 0$ и целое число $r > j$. Обозначим для $\nu = 1, \ldots, r - j$ вспомогательные функции

$$\eta_{r\nu}^{(j)}(\xi) := 2^{-j/2} \prod_{l=1}^{\nu} d_{T(r-\nu+l)}(\xi 2^{-j-l}) \chi_{[-1/2,1/2]}(2^{-j-\nu}\xi),$$

$$\widehat{\varphi_{r\nu}^{(j)}} := \eta_{r\nu}^{(j)}, \quad \varphi_{r,\nu,k}^{(j)}(t) = \varphi_{r\nu}^{(j)}(t + k2^{-j}).$$

Заметим, что

$$\eta^{(j)}_{r,\nu+1}(\xi) = d_{T(r-\nu)}(\xi 2^{-j-1})\eta^{(j)}_{r\nu}(\xi/2)$$

или

$$\varphi^{(j)}_{r,\nu+1}(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2T(r-\nu)-1} h_{T(r-\nu)}(k)\varphi^{(j)}_{r\nu}(2t + k2^{-j}). \tag{8.56}$$

В силу (8.37) для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\langle \varphi^{(j)}_{r,1,0}, \varphi^{(j)}_{r,1,k}\rangle =$$
$$= 2^{-j}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-ik\pi\xi 2^{1-j}\right)|d_{T(r)}(\xi 2^{-j-1})|^2 \chi_{[-1/2,1/2]}(2^{-j-1}\xi)d\xi =$$
$$= \int_0^1 \exp\left(-ik2\pi\xi\right)\left(|d_{T(r)}(\xi)|^2 + |d_{T(r)}(\xi + 1/2)|^2\right)d\xi = \delta_{k,0}.$$

С другой стороны, если

$$\langle \varphi^{(j)}_{r,\nu,0}, \varphi^{(j)}_{r,\nu,k}\rangle = \delta_{k,0},$$

то в силу (8.56) и (8.39)

$$\langle \varphi^{(j)}_{r,\nu+1,0}, \varphi^{(j)}_{r,\nu+1,k}\rangle = 2\sum_{l,m\in\mathbb{Z}} h_{T(r-\nu)}(l)h_{T(r-\nu)}(m)\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(j)}_{r\nu}(2t + m2^{-j})\varphi^{(j)}_{r\nu}(2t + l2^{-j} + 2k2^{-j})\,dt =$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{T(r-\nu)}(l)h_{T(r-\nu)}(l+2k) = \delta_{k,0}.$$

По индукции получаем, что

$$\langle \varphi^{(j)}_{r,r-j,0}, \varphi^{(j)}_{r,r-j,k}\rangle = \delta_{k,0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, (8.55) будет доказано, если

$$\lim_{r\to\infty} \eta^{(j)}_{r,r-j} = \widehat{\varphi_j}$$

в смысле сходимости в $L_2(\mathbb{R})$. Из оценок, полученных в лемме 8.2.5 и из (8.39) следует, что для любого $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\sup_{r>j} |\eta^{(j)}_{r,r-j}| \in L_2(\mathbb{R}).$$

Так как $\eta^{(j)}_{r,r-j}$ поточечно сходится к $\widehat{\varphi_j}$ по лемме 8.2.4, то по теореме Лебега о доминированной сходимости $\eta^{(j)}_{r,r-j}$ сходится к $\widehat{\varphi_j}$ в $L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, (8.55) доказано.

Пусть $j \in \mathbb{Z}_+$ и $g_j(l) := (-1)^l h_j(1-l)$, $l \in \mathbb{Z}$. В силу (8.38) и (8.39) имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{l\in Z} g_j(l) h_j(l+2k) = 0, \\ &\sum_{l\in Z} g_j(l) g_j(l+2k) = \delta_{k,0}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{8.57}$$

Из определения φ_{jk} и ψ_{jk} следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}(t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{T(j+1)}(l+2k)\varphi_{j+1,l}(t), \\ \psi_{jk}(x) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} g_{T(j+1)}(l+2k)\varphi_{j+1,l}(t), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{8.58}$$

Используя (8.55), (8.57) и (8.58), получаем (8.55). $\Diamond$

Рассмотрим подпространства

$$V_j := \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\}}, \quad W_j := \overline{\operatorname{span}\{\psi_{jk},\ k \in Z\}}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{8.59}$$

По лемме 8.2.8 системы $\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{\psi_{jk}\}_{k\in Z}$ являются ортонормированными базисами в V_j и W_j, соответственно, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 8.2.9. *Для любых* $j \in \mathbb{Z}_+$

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad V_j \oplus W_j = V_{j+1}, \tag{8.60}$$

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R}). \tag{8.61}$$

Доказательство. Вложения $V_j \subset V_{j+1}$ и $W_j \subset V_{j+1}$ следуют из (8.58). В силу (8.39) и (8.57) имеем для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ и для любого $m \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_{j+1,m} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(h_{T(j+1)}(m+2l)\varphi_{jl} + g_{T(j+1)}(m+2l)\psi_{jl}\right).$$

Это равенство вместе с (8.55) завершает доказательство (8.60). Что касается (8.61), то это следует из теоремы 8.1.7. $\Diamond$

Лемма 8.2.10. *Функции* φ_j *и* ψ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, *имеют компактный носитель, причем*

$$\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq [-(2T(j+1)+1)2^{-j},\, 0], \tag{8.62}$$

$$\operatorname{supp}\psi_j \subseteq [-(T(j+2)+1)2^{-j},\ (2T(j+1)-1)2^{-j-1}]. \tag{8.63}$$

Доказательство. Докажем, что $G_j(\xi)$ является целой функцией экспоненциального типа:

$$|G_j(\xi)| \leqslant C_1 \qquad \text{для} \quad \operatorname{Im}\xi \geqslant 0, \quad (8.64)$$

$$|G_j(\xi)| \leqslant C_2 \exp(-\pi(2T(j+1)+1)2^{1-j}\operatorname{Im}\xi) \quad \text{для} \quad \operatorname{Im}\xi < 0, \quad (8.65)$$

для некоторых констант C_1, C_2. По теореме Пэли–Винера (см. приложение A.7) из этих оценок следует (8.62). Прежде всего отметим следующие неравенства, основанные на (8.38). Если $\operatorname{Im}\xi \geqslant 0$, то

$$|d_N(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{2N-1} |h_N(l)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{l=0}^{2N-1} |h_N(l)|^2 \right)^{1/2} (2N-1)^{1/2} \leqslant N^{1/2}; \tag{8.66}$$

$$|d_N(\xi) - d_N(\operatorname{Re}\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{2N-1} |h_N(l)| \cdot |\exp(-2\pi l \operatorname{Im}\xi) - 1| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\,\pi \sum_{l=0}^{2N-1} |h_N(l)| \cdot l \cdot \operatorname{Im}\xi \leqslant 4\pi N^{3/2} \operatorname{Im}\xi.$$

Последнее неравенство вместе с (8.37) влечет для $\operatorname{Im}\xi \geqslant 0$

$$|d_N(\xi)| \leqslant 1 + 4\pi N^{3/2} \operatorname{Im}\xi. \tag{8.67}$$

Если $\operatorname{Im}\xi \geqslant 1$, то

$$|d_N(\xi)| \leqslant 2^{-1/2} \left(\sum_{l=0}^{2N-1} |h_N(l)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{l=0}^{2N-1} \exp(-4\pi l) \right)^{1/2} \leqslant a < 1, \tag{8.68}$$

где $a := (2(1-\exp(-4\pi)))^{-1/2}$.

Теперь все готово для доказательства (8.64). Зафиксируем натуральное число N_1 такое, что для любого $N > N_1$,

$$T(N) \geqslant 2, \tag{8.69}$$
$$(N + 2\log_2 N)^{3/2} \leqslant N^2, \tag{8.70}$$
$$2\log_2 N \leqslant N, \tag{8.71}$$
$$\log_2 N \ln 2N \leqslant (1-N)\ln a. \tag{8.72}$$

Если $\operatorname{Im}\xi \in [0, 2^{N_1}]$, то в силу (8.67)

$$|G_0(\xi)| \leqslant \prod_{N=1}^{\infty} \left(1 + 4\pi (T(N))^{3/2} 2^{N_1 - N}\right). \tag{8.73}$$

Пусть теперь $\operatorname{Im}\xi > 2^{N_1}$. Зафиксируем минимальное целое число N_2 такое, что $\operatorname{Im}\xi \leqslant 2^{N_2}$. Тогда в силу (8.68) имеем

$$\prod_{N=1}^{N_2-1} |d_{T(N)}(\xi 2^{-N})| \leqslant a^{N_2-1}. \tag{8.74}$$

Пусть N_3 — минимальное целое число, такое, что

$$(N_3)^{3/2} 2^{-N_3} \operatorname{Im}\xi < 1. \tag{8.75}$$

В силу (8.70) получаем

$$N_3 \leqslant N_2 + 2\log_2 N_2. \tag{8.76}$$

Используя (8.66), (8.42), (8.71) и (8.76), имеем

$$\prod_{N=N_2}^{N_3-1} |d_{T(N)}(\xi 2^{-N})| \leqslant \prod_{N=N_2}^{N_3-1} (T(N))^{1/2} \leqslant N_3^{(N_3-N_2)/2} \leqslant \\ \leqslant \exp(\ln 2 N_2 \log_2 N_2) \leqslant a^{1-N_2}. \tag{8.77}$$

Из (8.67), (8.75) и (8.69) следует, что

$$\prod_{N=N_3}^{\infty} |d_{T(N)}(\xi 2^{-N})| \leqslant \prod_{N=N_3}^{\infty} (1 + 4\pi (T(N))^{3/2} 2^{-N} \operatorname{Im}\xi) \leqslant \\ \leqslant \prod_{N=N_3}^{\infty} \left(1 + \pi 2^{2+N_3-N} \left(\frac{N}{N_3}\right)^{3/2}\right) \leqslant \prod_{N=2}^{\infty} \left(1 + \pi 2^{4-N} \left(\frac{N}{2}\right)^{3/2}\right). \tag{8.78}$$

Неравенства (8.73), (8.74), (8.77) и (8.78) влекут (8.64) для $j = 0$. Доказательство (8.64) для $j > 0$ совершенно аналогично.

Заметим, что в силу (8.34)

$$\sum_{N=j+1}^{\infty} (2T(N) - 1) 2^{-N} \leqslant 2^{-j}(2T(j+1) + 1).$$

Таким образом, оценка (8.65) следует из равенства

$$G_j(\xi) = \prod_{N=j+1}^{\infty} 2^{-1/2} \exp\left(\pi i \xi 2^{1-N}(2T(N) - 1)\right) \times \\ \times \sum_{l=0}^{2T(N)-1} h_N(l) \exp\left(\pi i (l - (2T(N) - 1)) \xi 2^{1-N}\right) =$$

$$= \exp\left(\pi i\xi \sum_{N=j+1}^{\infty} 2^{2-N}(2T(N)-1)\right) \times$$
$$\times \prod_{N=j+1}^{\infty} 2^{-1/2} \sum_{l=0}^{2T(N)-1} h_N(l) \exp\left(\pi i(l-(2T(N)-1))\xi 2^{1-N}\right).$$

Вложение (8.63) доказывается аналогично. $\Diamond$

Замечание 8.2.11. Используя тензорные произведения элементов Ψ, можно построить нестационарный ортонормированный базис всплесков в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d > 1$, состоящий из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

8.3. Скорость убывания преобразований Фурье элементов нестационарных масштабирующих последовательностей

Скоростью убывания данной функции $g(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ (обозначение $\mathbf{d}(g)$) назовем наибольшее целое число l такое, что $g(\xi) = o(\xi^{-l})$ при $|\xi| \to \infty$; если g убывает быстрее всякой степени, то полагаем $\mathbf{d}(g) = +\infty$, если же таких целых l вовсе не существует, то $\mathbf{d}(g) = -\infty$. Для произвольной последовательности тригонометрических полиномов $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такой, что $m_k(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, определим нестационарную масштабирующую функцию φ по формуле

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi). \tag{8.79}$$

Каждый из полиномов имеет вид $m_k(\xi) = \sum\limits_{s=0}^{N_k} c_s^{(k)} e^{-2\pi i s}$, где $c_{N_k}^{(k)} \neq 0$, а $N_k = \deg m_k$ — степень полинома. При некоторых, довольно общих условиях (например, когда нормы и степени всех полиномов равномерно ограничены) произведение (8.79) сходится равномерно на каждом компакте и, следовательно, представляет аналитическую функцию. Насколько быстро эта функция может убывать на бесконечности? Если последовательность $\{m_k\}$ стационарна, т. е. все полиномы равны, то наибольшая скорость убывания соответствует полиному $m(\xi) = w_{n-1}(\xi) = \left(\dfrac{e^{-2\pi i}+1}{2}\right)^n$ — маске уравнения для B-сплайна B_{n-1} (в данном параграфе мы будем обозначать эту маску w_{n-1}). В этом случае, напомним, $\mathbf{d} = n-1$; более того, $\widehat{B}_{n-1}(\xi) = O(\xi^{-n})$, $n \to \infty$ (см. следствие 3.2.14 и пример 3.5.1). Возникает вопрос, насколько быстро может убывать функция (8.79) в общем случае, когда полиномы m_k, $k \in \mathbb{N}$, различны и выбираются произвольно? Можно ли получить более быстрый рост за счет выбора подходящей последовательности полиномов степени не выше n? Мы докажем теорему 8.3.1, согласно которой ответ на данный вопрос отрицательный. Оказывается, что скорость убывания не только не может быть бесконечной, но и по-прежнему не может превосходить $n-1$. Это означает, в частности, что гладкость нестационарных всплесков не может превосходить максимальной из длин носителей функций $\varphi_j(2^{-j}t)$, $j \geqslant 0$. Таким образом, в нестационарном случае ситуация подобна той, которую мы имеем для стационарных всплесков.

Максимальная гладкость B-сплайнов распространяется, таким образом, на широкий класс полиномиальных произведений: на произведения вида (8.79) для всех возможных последовательностей полиномов $\{m_k\}$ (с равномерно ограниченными степенями и нормами).

Теорема 8.3.1. *Предположим, что нам дана последовательность тригонометрических полиномов* $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *и числа* $n \in \mathbb{N}$, $M \geqslant 1$ *такие, что*

$$m_k(0) = 1,\ \deg m_k \leqslant n,\ \|m_k(\cdot)\|_\infty \leqslant M \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда скорость убывания функции $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi)$ *не превосходит* $n-1$. *Более того, если скорость убывания равна* $n-1$, *то* $m_k \to w_{n-1}$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. . Предположим, что скорость убывания не меньше, чем $n-1$. Это означает, что

$$\xi^{n-1}\widehat{\varphi}(\xi) \to 0 \quad \text{при } |\xi| \to \infty. \tag{8.80}$$

Положим $\sigma = \dfrac{1}{4\pi n M}$. Для каждого $\xi \in [-\sigma, \sigma]$, $j \geqslant 0$ и $N \in \mathbb{N}$ либо $N = +\infty$ имеем

$$\left|\prod_{k=1}^{N} m_{j+k}(2^{-k}\xi)\right| > \frac{1}{2}. \tag{8.81}$$

Действительно, в силу неравенства Бернштейна $\|m'_{j+k}\|_\infty \leqslant 2\pi n M$, поэтому

$$\begin{aligned}\left|m_{j+k}(2^{-k}\xi)\right| \geqslant |m_{j+k}(0)| - 2^{-k}|\xi| \cdot \|m'_{j+k}\|_\infty \geqslant \\ \geqslant 1 - 2\pi n M 2^{-k}|\xi| \geqslant 1 - 2\pi n M 2^{-k}\sigma = 1 - 2^{-k-1}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left|\prod_{k=1}^{N} m_{j+k}(2^{-k}\xi)\right| \geqslant \prod_{k=1}^{N}\left(1 - 2^{-k-1}\right) > \frac{1}{2}.$$

Обозначим через p наименьшее целое число, для которого $2^p \geqslant 8\pi n M$. Теперь для произвольных $\delta \in (0, \sigma)$ и $l \in \mathbb{N}$ получаем

$$\widehat{\varphi}(2^l + \delta) = \prod_{k=1}^{l} m_k \left(2^{l-k} + 2^{-k}\delta\right) \prod_{k=1}^{p} m_{l+k} \left(2^{-k} + 2^{-l-k}\delta\right) \times \\ \times \prod_{k=1}^{\infty} m_{l+p+k} \left(2^{-p-k} + 2^{-l-p-k}\delta\right).$$

Применив (8.81) для $\xi = \delta$, $j = 0$ и $N = l$ получим

$$\left|\prod_{k=1}^{l} m_k \left(2^{l-k} + 2^{-k}\delta\right)\right| = \left|\prod_{k=1}^{l} m_k \left(2^{-k}\delta\right)\right| > \frac{1}{2};$$

теперь применим (8.81) для $\xi = 2^{-p} + 2^{-l-p}\delta$, $j = l + p$ и $N = +\infty$, получив

$$\left|\prod_{k=1}^{\infty} m_{l+p+k} \left(2^{-p-k} + 2^{-l-p-k}\delta\right)\right| > \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\left|\widehat{\varphi}(2^l + \delta)\right| \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{4}\left|m_{l+1}\left(\frac{1}{2} + 2^{-l-1}\delta\right) m_{l+2}\left(\frac{1}{4} + 2^{-l-2}\delta\right) \ldots m_{l+p}\left(2^{-p} + 2^{-l-p}\delta\right)\right|. \tag{8.82}$$

По предположению $2^{l(n-1)} f(2^l + \delta) \to 0$ при $l \to \infty$, следовательно

$$2^{l(n-1)} m_{l+1}\left(\frac{1}{2} + 2^{-l-1}\delta\right) m_{l+2}\left(\frac{1}{4} + 2^{-l-2}\delta\right) \ldots m_{l+p}\left(2^{-p} + 2^{-l-p}\delta\right) \to 0 \tag{8.83}$$

при $l \to \infty$. Последнее выполнено для всех $\delta \in (0, \sigma)$. Теперь зададим положительное R и окружим каждую точку $\left\{e^{-2^{1-k}\pi i}\right\}_{k=1}^{p}$ и $\left\{e^{-3 \cdot 2^{1-k}\pi i}\right\}_{k=1}^{p}$ замкнутым кругом радиуса R (с центром в этой точке). Обозначим эти круги через $\left\{\beta_k\right\}_{k=1}^{p}$ и $\left\{\gamma_k\right\}_{k=1}^{p}$ соответственно. Таким образом мы получаем семейство из $2p$ одинаковых кругов, в котором два круга β_1 и γ_1 совпадают. Сделаем радиус R настолько малым, чтобы все остальные круги не пересекались.

Возьмем произвольное $l \geqslant 0$ и рассмотрим цепочку соответствующих алгебраических полиномов $\mathbf{m}_{l+1}, \ldots, \mathbf{m}_{l+p}$. Пусть круг β_k содержит s_k корней полинома $\mathbf{m}_{l+k}$ (с учетом кратности корней). Если $s_k > 0$, то обозначим эти корни через $z_1^{(k)}, \ldots, z_{s_k}^{(k)}$, а все остальные корни $\mathbf{m}_{l+k}$ через $z_{s_k+1}^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}$, где $n_k = \deg \mathbf{m}_{l+k}$. Имеем

$$\mathbf{m}_{l+k}(z) = A_k \mathbf{f}_k(z) \mathbf{q}_k(z),$$

где
$$\mathbf{f}_k(z) = \prod_{j=1}^{s_k}(z - z_j^{(k)}), \qquad \mathbf{q}_k(z) = \prod_{\nu=s_k+1}^{n_k}\Bigl(\frac{z-b_k}{z_\nu^{(k)}-b_k} - 1\Bigr),$$

$b_k = e^{-2^{1-k}\pi i}$ — центр круга β_k, и A_k — некоторая константа (в случае $s_k = 0$ полагаем $\mathbf{f}_k = 1$, если же $s_k = n_k$, то $\mathbf{q}_k = 1$). Конечно же, величины s_k, A_k и полиномы $\mathbf{f}_k, \mathbf{q}_k$ зависят не только от k, но и от l. Мы не будем записывать это для краткости обозначений. Для любой точки z на единичной окружности имеем $|z - z_j| \leqslant 1 + R$ для $j = 1, \ldots$ $\ldots, s_k$ и
$$\Bigl|\frac{z-b_k}{z_\nu^{(k)}-b_k} - 1\Bigr| < \frac{2}{R} + 1$$
для $\nu = s_k + 1, \ldots, n_k$. Следовательно,
$$\|\mathbf{f}_k\|_\infty \leqslant (1+R)^{s_k}$$
и
$$\|\mathbf{q}_k\|_\infty \leqslant \Bigl(\frac{2}{R} + 1\Bigr)^{n_k - s_k}.$$
Здесь мы обозначаем через $\|\mathbf{p}(\cdot)\|_\infty$ норму алгебраического полинома на единичной окружности: $\|\mathbf{p}(\cdot)\|_\infty = \bigl\{|\mathbf{p}(z)|,\ |z| = 1\bigr\}$. Теперь, применив неравенство $\|\mathbf{m}_{l+k}\|_\infty \geqslant |\mathbf{m}_{l+k}(1)| = 1$, получим
$$|A_k| \geqslant \frac{\|\mathbf{m}_{l+k}\|_\infty}{\|\mathbf{f}_k\|_\infty \cdot \|\mathbf{q}_k\|_\infty} \geqslant \frac{1}{(1+R)^{s_k}\Bigl(\dfrac{2}{R}+1\Bigr)^{n_k-s_k}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{(1+R)^{n}\Bigl(\dfrac{2}{R}+1\Bigr)^{n}} = \Bigl(\frac{2}{R} + R + 3\Bigr)^{-n}. \tag{8.84}$$

Наконец, обозначим через $\overline{\beta}_k$ замкнутый круг радиуса $R/2$ с центром в точке b_k. Для каждого $z \in \overline{\beta}_k$, $\nu = s_k + 1, \ldots, n_k$ имеем
$$\Bigl|\frac{z-b_k}{z_\nu^{(k)}-b_k}\Bigr| < \frac{1}{2},$$
поэтому $|\mathbf{q}_k(z)| > 2^{-n}$. Совместив с (8.84), получаем
$$|\mathbf{m}_{l+k}(z)| \geqslant 2^{-n}\Bigl(\frac{2}{R} + R + 3\Bigr)^{-n}|f_k(z)| \quad \text{для каждого} \quad z \in \overline{\beta}_k.$$
Из этого следует, что для достаточно больших l, а именно, для которых $2\pi \cdot 2^{-l}\sigma \leqslant R$, имеем
$$\Bigl|\prod_{k=1}^{p} m_{l+k}\left(2^{-k} + 2^{-l-k}\delta\right)\Bigr| \geqslant$$
$$\geqslant \Bigl[2^{-n}\Bigl(\frac{2}{R} + R + 3\Bigr)^{-n}\Bigr]^p \Bigl|\prod_{k=1}^{p} f_k\left(2^{-k} + 2^{-l-k}\delta\right)\Bigr|,$$

где f_k — тригонометрический полином соответствующий полиному $\mathbf{f}_k$, т. е. $f(\xi) = \mathbf{f}_k(e^{-2\pi i\xi})$. Подставив в (8.83), получим

$$2^{l(n-1)} \prod_{k=1}^{p} f_k \left(2^{-k} + 2^{-l-k}\delta\right) \to 0 \quad \text{при } l \to \infty. \tag{8.85}$$

Мы приходим к заключительному шагу в доказательстве. Окружим каждый корень полинома $\prod\limits_{k=1}^{p} \mathbf{f}_k(z)$ кругом радиуса $r = \dfrac{\sigma}{2^{l+p-1}S}$, где $S = \sum\limits_{k=1}^{p} s_k$. Каждый из этих кругов высекает на единичной окружности дугу длиной меньше πr. Поэтому общая длина множества

$$\Delta_1 = \left\{\delta \in (0,\sigma), \quad \exists\ j \leqslant s_1 \ \ |e^{-2\pi i(\frac{1}{2}+\delta 2^{-l})} - z_j^{(1)}| < r\right\}$$

меньше, чем $2^l r s_1$. Точно так же показываем, что при любом $k = 2, \ldots$ $\ldots, p$ общая длина множества

$$\Delta_k = \left\{\delta \in (0,\sigma), \quad \exists\ j \leqslant s_k \ \ |e^{-2\pi i(2^{-k}+\delta 2^{-l-k+1})} - z_j^{(k)}| < r\right\}$$

меньше, чем $2^{l+k-1} r s_k$. Итак, общая длина всех множеств $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$ меньше, чем

$$2^l r \sum_{k=1}^{p} 2^{k-1} s_k \leqslant 2^l r 2^{p-1} \sum_{k=1}^{p} s_k = 2^{l+p-1} r S = \sigma.$$

Следовательно, существует точка $\delta_0 \in (0,\sigma)$, не принадлежащая ни одному из этих множеств. Для этой точки имеем

$$\left|\prod_{k=1}^{p} f_k \left(2^{-k} + 2^{1-l-k}\delta_0\right)\right| \geqslant r^S.$$

Поскольку S не превосходит общего числа корней полиномов $\{\mathbf{m}_{l+k}\}_{k=1}^{p}$, значит, $S \leqslant np$, имеем

$$r^S = \left(\frac{\sigma}{2^{l+p-1}S}\right)^S = \left(2^{l+p+1} Mn\pi S\right)^{-S} \geqslant$$
$$\geqslant 2^{-S(l+p+1)}\left(Mn\pi np\right)^{-np} \geqslant 2^{-Sl}\left(2^{p+1}Mn^2\pi p\right)^{-np}.$$

Итак,

$$\left|\prod_{k=1}^{p} f_k(2^{-k} + \delta_0 2^{1-l-k})\right| \geqslant 2^{-Sl}\left(2^{p+1}Mn^2\pi p\right)^{-np}.$$

Теперь, применив (8.85), имеем

$$2^{l(n-1)} \cdot 2^{-lS} \to 0 \quad \text{при} \quad l \to +\infty,$$

поэтому $S \geqslant n$.

Напомним, что мы подсчитали число всех корней полинома $\mathbf{m}_{l+k}$ в круге β_k и вычислили сумму S этих чисел для k от 1 до p. Мы показали, что для каждого $l \geqslant 0$ эта сумма не меньше n. Точно так же доказывается, что аналогичная сумма, посчитанная для кругов $\{\gamma_k\}_{k=1}^{p}$, также больше или равна n. Теперь совместим два этих факта: рассмотрим общее число корней полиномов $\mathbf{m}_{l+k}$ в кругах β_k и γ_k и вычислим сумму S_l таких чисел для всех k от 1 до p. Как мы показали, для каждого $l \geqslant 0$ возможны только два случая:

1) $S_l = n$, в этом случае все соответствующие корни лежат в круге β_0;

2) $S_l \geqslant n+1$.

Докажем, что для достаточно больших l имеет место случай 1). Для этого возьмем целое N и оценим общее число корней полиномов $\mathbf{m}_{l+1}, \ldots, \mathbf{m}_{l+p+N}$. Очевидно, всего корней не более $n(p+N)$. С другой стороны, число корней не меньше $\sum\limits_{j=0}^{N} S_j$, поскольку каждый корень в этой сумме считается только один раз.

Предположим теперь, что для M цепочек полиномов $\{\mathbf{m}_{l+j+k}\}_{k=1}^{p}$ имеет место случай 2). Тогда $\sum\limits_{j=0}^{N} S_l \geqslant n(N+1)+M$, поэтому $n(p+{}$ ${}+N) \geqslant n(N+1)+M$. Таким образом, $M \leqslant n(p-1)$. Следовательно, начиная с некоторого номера l_0 для всех цепочек имеет место случай 1). Таким образом, для каждого $k \geqslant l_0$ полином $\mathbf{m}_k$ имеет ровно n корней в круге β_0. По условиям теоремы это означает, что полином $\deg \mathbf{m}_k$ имеет степень n, и все его n корней лежат в круге β_0. Итак, при каждом $R > 0$ существует номер $l_0(R)$ такой, что при любом $k \geqslant l_0(R)$ полином $\mathbf{m}_k$ имеет степень n, и все n его корней лежат в круге $|z+1| \leqslant R$. Таким образом, все n корней полинома $\mathbf{m}_k$ стремятся к точке -1 при $k \to \infty$. Но поскольку для всех k $\mathbf{m}_k(1) = 1$, из этого следует, что $\mathbf{m}_k \to \left(\dfrac{1+z}{2}\right)^n$, и соответственно $m_k \to w_{n-1}$ при $k \to \infty$.

Если теперь предположить, что скорость убывания функции $f(\xi)$ не меньше n, то применив те же рассуждения, устанавливаем, что $m_k \to$ $\to w_n$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\deg m_k \geqslant n+1$ для всех достаточно больших k. Полученное противоречие завершает доказательство. $\Diamond$

Замечание 8.3.2. Фактически, мы доказали чуть более сильное утверждение: если скорость убывания функции $\widehat{\varphi}$ *с одной стороны* не меньше $n-1$, т. е. $\widehat{\varphi}(\xi) = o(\xi^{1-n})$ при $\xi \to +\infty$, или при $\xi \to -\infty$, то $m_k \to w_{n-1}$.

Замечание 8.3.3. Из нашей конструкции нестационарных всплесков следует, что если степени полиномов m_k не ограничены, то скорость убывания функции $\widehat{\varphi}$ может быть бесконечна. Существуют последовательности полиномов, степени которых растут сколь угодно медленно, а функция $\widehat{\varphi}$ убывает быстрее любой степени (см. теоремы 8.2.2).

Замечание 8.3.4. Согласно теореме 8.3.1 для любой ограниченной по норме последовательности тригонометрических полиномов степени n функция $\widehat{\varphi}$ не может убывать быстрее, чем $O(\xi^{-n})$. Эта максимальная скорость убывания достигается для стационарной последовательности $m_k = w_{n-1}$, $k \in \mathbb{N}$, но не только для нее. Например, для произвольного $a > 0$ последовательность $m_k(\xi) = \left(\dfrac{e^{-2\pi i\xi} + a^{(1/2)^k}}{1 + a^{(1/2)^k}}\right)^n$ обладает тем же свойством быстрейшего убывания. В упражнении 8.3.12 мы предлагаем читателю доказать критерий максимального убывания для последовательностей полиномов.

Замечание 8.3.5. Возникает естественный вопрос, насколько существенно в формулировке теоремы 8.3.1 условие равномерной ограниченности полиномов по норме? Нельзя ли заменить его более слабым условием равномерной сходимости произведения $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi)$ на каждом компакте? Ответ отрицательный. Это может показаться парадоксальным. Если для ограниченной последовательности произведение $\widehat{\varphi}(\xi)$ не может убывать слишком быстро, то для неограниченной последовательности это произведение должно быть еще больше и, соответственно, убывать еще медленнее. Тем не менее, в упражнении 8.3.9 мы увидим, что существует последовательность $\{m_k\}$, для которой $\deg m_k = 2$, $m_k(0) = 1$ при всех $k \geqslant 1$, и произведение $\widehat{\varphi}(\xi)$ убывает экспоненциально при $|\xi| \to \infty$.

Упражнение 8.3.6. Докажите следующий аналог теоремы 8.3.1 для алгебраических полиномов: для произвольной последовательности алгебраических полиномов $\{\mathbf{p}_k\}$ с равномерно ограниченными степенями и нормами (на единичной окружности) и со свойством $\mathbf{p}_k(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$ соответствующее произведение $f(x) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k(2^{-k}x)$ не может стремиться к нулю при $x \to \infty$.

Однако опять, как и в случае тригонометрических полиномов, без предположения равномерной ограниченности норм этот аналог теоремы 8.3.1 не верен.

Упражнение 8.3.7. Для произвольного $\alpha \in (1, 2)$ рассмотрим семейство алгебраических полиномов первой степени $Q_k(x) = 1 - \dfrac{2^k}{k^\alpha}\, x$, $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что произведение

$$f_Q(x) = \prod_{k=1}^{\infty} Q_k(2^{-k}x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k^\alpha}\right)$$

сходится равномерно на каждом компакте и при этом для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|f_Q(x)| \leqslant C(\varepsilon) e^{x^{1/\alpha}\left(b(\alpha)+\varepsilon\right)}, \tag{8.86}$$

где
$$b(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \ln|1 - t^{-\alpha}|dt$$
(эта величина отрицательна при любом $\alpha \in (1, 2)$.)

Упражнение 8.3.8. Пользуясь результатом упражнения 8.3.7, докажите, что для произвольного четного числа $d \geqslant 2$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует последовательность алгебраических полиномов $\{\mathbf{p}_k\}$ такая, что $\deg \mathbf{p}_k \leqslant d$, $\mathbf{p}_k(0) = 1$ для всех $k \geqslant 1$, произведение
$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{p}_k(2^{-k}x)$$
сходится равномерно на каждом компакте и при этом
$$|f(x)| \leqslant Ce^{-|x|^{d-\varepsilon}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Упражнение 8.3.9. Для произвольного $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ рассмотрим последовательность полиномов
$$\left\{ m_k(\xi) = e^{-2\pi i\xi} \frac{\cos 2\pi\xi - \cos \dfrac{k^\beta}{2^k}}{1 - \cos \dfrac{k^\beta}{2^k}} \right\}_{k\in\mathbb{N}}.$$
Легко видеть, что $\deg m_k = 2$, $m_k(0) = 1$ для каждого $k \geqslant 1$. Докажите, что соответствующее произведение $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi)$ сходится на каждом компакте и $\widehat{\varphi}(\xi) = O\big(e^{-|\xi|^{2-\varepsilon(\beta)}}\big)$.

Упражнение 8.3.10. Финитна ли функция φ, построенная в упражнении 8.3.9?

Теперь сформулируем условия, при которых функция $\varphi(\xi)$ имеет максимально возможную скорость убывания (замечание 8.3.3). Мы будем говорить, что последовательность тригонометрических полиномов $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию $(*)$, если существует положительная константа C_0 такая, что для всех достаточно больших k имеем $\deg m_k = n$ и все n корней соответствующего алгебраического полинома $\mathbf{m}_k$ лежат в круге $|z + 1| \leqslant C_0 2^{-k}$.

Упражнение 8.3.11. Покажите, что если $m_k(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, то из условия $(*)$ следует, что $\|m_k - w_{n-1}\|_\infty = O(2^{-k})$, но, вообще говоря, не наоборот.

Оказывается, что условие $(*)$ эквивалентно максимальному убыванию.

Упражнение 8.3.12. Докажите, что в условиях теоремы 8.3.1 имеем $\widehat{\varphi}(\xi) = O(\xi^{-n})$ в том и только том случае, когда последовательность $\{m_k\}$ удовлетворяет условию $(*)$.

8.4. Константы неопределенности для Ψ

У системы Ψ имеется один существенный недостаток: константы неопределенности нестационарных всплесков ψ_j неограниченно возрастают с ростом j. В этом параграфе приводятся соответствующие оценки.

Пусть Φ_j — автокорреляционная функция для φ_j. Тогда

$$\widehat{\Phi}_j(\xi) := 2^{-j} \prod_{N=j+1}^{\infty} B_{T(N)}(\cos(\xi 2^{-N})).$$

Технически удобнее оценивать константы неопределенности автокорреляционных функций, приведенных к нулевому масштабу:

$$\Phi_j^0(t) := 2^j \Phi_j(2^{-j}t).$$

В этом параграфе мы опять используем описание масок Добеши при помощи полиномов Бернштейна (см. (4.26)):

$$|d_N(\xi)|^2 = \mathcal{D}_N(\cos 2\pi\xi), \tag{8.87}$$

где

$$\mathcal{D}_N(t) := \sum_{l=N}^{2N-1} \binom{2N-1}{l} \left(\frac{1+t}{2}\right)^l \left(\frac{1-t}{2}\right)^{2N-1-l}.$$

Из-за обилия индексов ниже вместо Δ_Φ будем писать $\Delta(\Phi)$.

Теорема 8.4.1. *Для системы $\{\varphi_j\}$ имеем*

$$\lim_{j\to\infty} \|\widehat{\Phi_j^0} - \chi_{[-1/2,1/2]}\|_{L_p} = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta(\widehat{\Phi_j^0}) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$\lim_{j\to\infty} \Delta(\Phi_j^0) = \infty$$

и, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} \Delta(\widehat{\Phi_j^0})\Delta(\Phi_j^0) = \infty.$$

Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 4.3.3, и состоит из следующих лемм.

Лемма 8.4.2. *В условиях теоремы* 8.4.1 *имеем*

$$\lim_{j\to\infty} \widehat{\Phi_j^0}(\xi) = \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi) \ \ \text{для любых} \ \ \xi \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/2\}. \tag{8.88}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\widehat{\Phi_j^0}(\xi) := \prod_{N=1}^{\infty} D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N})$$

(см. (8.52) и (8.87)). В силу свойств полиномов Бернштейна

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{D}_N(\xi)=\chi_{[0,1]}(\xi)\ \text{для любого}\ \xi\in[-1,1]\setminus\{0\}. \tag{8.89}$$

Зафиксируем ξ и выберем $L\in\mathbb{N}$ так, чтобы $|\xi|<2^{L-2}$. Тогда

$$\prod_{N=L+1}^{\infty}\chi_{[0,1]}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))=1;$$

$$\prod_{N=1}^{L}\chi_{[0,1]}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))=\chi_{[0,1]}(\cos\pi\xi)\chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Поэтому

$$\widehat{\Phi_j^0}(\xi)-\chi_{[-1/2,1/2]}(\xi))=$$

$$=\Bigg(\Bigg(\prod_{N=1}^{L}D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N}))-\prod_{N=1}^{L}\chi_{[0,1]}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))\Bigg)\times$$
$$\times\prod_{N=L+1}^{\infty}D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N})\Bigg)-\Bigg(1-\prod_{N=L+1}^{\infty}D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N})\Bigg)\times$$
$$\times\chi_{[0,1]}(\cos\pi\xi)\chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Введем обозначения

$$I_{j,1}(\xi):=\Bigg(\prod_{N=1}^{L}D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N}))-\prod_{N=1}^{L}\chi_{[0,1]}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))\Bigg)\times$$
$$\times\prod_{N=L+1}^{\infty}D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N});$$

$$I_{j,2}(\xi):=\Bigg(1-\prod_{N=L+1}^{\infty}D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N})\Bigg)\chi_{[0,1]}(\cos\pi\xi)\chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Очевидно, что

$$0\leqslant\prod_{N=L+1}^{\infty}D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N})\leqslant 1.$$

Поэтому из (8.89) следует, что $|I_{j,1}(\xi)|\to 0$ при $j\to\infty$.

Для оценки $I_{j,2}$ воспользуемся неравенствами (4.29) и (4.30). Тогда имеем

$$|I_{j,2}(\xi)|\leqslant\sum_{N=L+1}^{\infty}\frac{1-D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N})}{D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N})}.$$

Так как $|\xi| < 2^{L-2}i$, то $|\xi 2^{-N-L}| \leqslant 1/4$ для любого $N \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$|D_{T(j+N)}(\xi 2^{-N-L}))| \geqslant D_{T(j+N)}(1/4) \geqslant \frac{1}{2}. \qquad (8.90)$$

Так как $\mathcal{D}_N(t) + \mathcal{D}_N(-t) = 1$, то в силу леммы 2.2.5 имеем

$$|1 - \mathcal{D}_{T(j+N)}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))| \leqslant \sin^{2T(j+N)}(\pi\xi 2^{1-N}). \qquad (8.91)$$

Из (8.90) и (8.91) следует, что $|I_{j,2}(\xi)| \to 0$ при $j \to \infty$. ◊

Лемма 8.4.3. *При* $1 \leqslant p < \infty$

$$\lim_{j\to\infty} \|\widehat{\Phi_j^0} - \chi_{[-1/2,1/2]}\|_p = 0. \qquad (8.92)$$

Доказательство. В силу теоремы Лебега из (8.88) следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \widehat{\Phi_j^0}(\xi)\, d\xi = \int\limits_{-1}^{1} \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi)\, d\xi = 1.$$

Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi_j^0}(\xi)\, d\xi = \Phi_j^0(0) = 1,$$

то

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \widehat{\Phi_j^0}(\xi)\, d\xi = 0.$$

Так как $|\widehat{\Phi_j^0}(\xi)| \leqslant 1$, то $|\widehat{\Phi_j^0}(\xi)|^p \leqslant |\widehat{\Phi_j^0}(\xi)|$ и

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\widehat{\Phi_j^0}(\xi)|^p\, d\xi = 0$$

для любого $p \in [1, \infty)$. ◊

Лемма 8.4.4. *В условиях теоремы* 8.4.1 *имеем*

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta_{\widehat{\Phi_j^0}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}. \qquad (8.93)$$

Доказательство. Используя (8.88), (8.92) и теорему Лебега, имеем

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta_{\widehat{\Phi_j^0}} = \liminf_{j\to\infty} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\widehat{\Phi_j^0}(\xi)\right|^2 d\xi \right\}^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{j\to\infty} \left\{ \int\limits_{-1/2}^{1/2} \xi^2 \left|\widehat{\Phi_j^0}(\xi)\right|^2 d\xi \right\}^{1/2} = \left\{ \int\limits_{-1/2}^{1/2} \xi^2 d\xi \right\}^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad ◊$$

Лемма 8.4.5. *В условиях теоремы* 8.4.1 *имеем*

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta_{\Phi_j^0} = \infty. \tag{8.94}$$

Доказательство. Из (8.92) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\Phi_j^0(t) - \frac{\sin \pi t}{\pi t}\right|^2 dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\Phi_j^0}(\xi) - \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi)\right|^2 d\xi \to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty.$$

Поэтому по лемме Фату

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta^2_{\Phi_j^0} = \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} t^2 \left|\Phi_j^0(t)\right|^2 dt \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} t^2 \left|\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right|^2 dt = \infty. \qquad \Diamond$$

Можно дать точную по порядку оценку роста радиусов автокорреляционных функций Φ_j^0, используя нестационарные аналоги лемм 1.5.9, 1.5.11.

Лемма 8.4.6. *Пусть* $\widehat{F}(\xi) := \prod\limits_{l=1}^{\infty} f_l(\xi 2^{-l})$, *где* $f_l(t)$ — *некоторые неотрицательные* 1*-периодические функции, причем бесконечное произведение сходится абсолютно и допускает почленное дифференцирование. Обозначим*

$$\widehat{F_j^0}(\xi) := \prod_{l=1}^{\infty} f_{j+l}(\xi 2^{-l}). \tag{8.95}$$

Предположим, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{F_j^0}(\xi+k)\right|^2 \leqslant 1. \tag{8.96}$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} t^2 |F_j^0(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \leqslant 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l/2} \left(\int\limits_{-1/2}^{1/2} |f'_{j+l}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Так как $\widehat{xF_j^0(x)}(\xi) = -2\pi i \widehat{F_j^0}'(\xi)$, то в силу тождества Планшереля имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} t^2 |F_j^0(t)|^2\, dt = 4\pi^2 \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{F_j^0}'(\xi)|^2 d\xi.$$

Из (8.95) следует, что

$$\widehat{F_j^0}'(\xi) = \left(\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l} \frac{f'_{j+l}(2^{-l}\xi)}{f_{j+l}(2^{-l}\xi)}\right) \prod_{p=1}^{\infty} f_{j+p}(2^{-p}\xi).$$

Из (8.96) следует, что $f_l(\xi) \leqslant 1$, поэтому

$$|\widehat{F_j^0}'(\xi)| \leqslant \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}|f'_{j+l}(2^{-l}\xi)|\left|\prod_{p=l+1}^{\infty} f_{j+p}(2^{-p}\xi)\right|$$

и, используя неравенство треугольника в $L_2(\mathbb{R})$, имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{F_j^0}'(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}\left(\int_{\mathbb{R}} |f'_{j+l}(2^{-l}\xi)|^2\left|\prod_{p=l+1}^{\infty} f_{j+p}(2^{-p}\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l/2}\left(\int_{\mathbb{R}} |f'_{j+l}(\xi)|^2\left|\prod_{p=1}^{\infty} f_{j+l+p}(2^{-p}\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Учитывая 1-периодичность функций f_l и тождество (8.96), имеем

$$\int_{\mathbb{R}} |f'_{j+l}(\xi)|^2\left|\prod_{p=1}^{\infty} f_{j+l+p}(2^{-p}\xi)\right|^2 d\xi =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} |f'_{j+l}(\xi)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{F_{j+l}^0}(\xi+l)\right|^2\,d\xi \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} |f'_{j+l}(\xi)|^2 d\xi. \quad \diamond$$

Следующая лемма является нестационарным аналогом леммы 1.5.11.

Лемма 8.4.7. *Пусть*

$$\widehat{F}(\xi) := \prod_{l=1}^{\infty} f_l(\xi 2^{-l}),$$

где $f_l(t)$ — некоторые неотрицательные четные 1-периодические функции, убывающие на $[0,1/2]$. Тогда

$$\left(\int_{\mathbb{R}} t^2|F(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \geqslant \sqrt{2}\,\pi \prod_{l=2}^{\infty} f_l(\xi 2^{-l})\left(\int_{-1/2}^{1/2} |f'_1(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Определим функцию F_1 в образах Фурье

$$\widehat{F_1}(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} f_{1+l}(\xi 2^{-l}).$$

Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{F}'(\xi)|^2 d\xi \geqslant \int\limits_{-1}^{1} |\widehat{F}'(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left|\frac{1}{2}\, f_1'(\xi/2)\widehat{F_1}(\xi/2) + \frac{1}{2}\, f_1(\xi/2)\widehat{F_1}'(\xi/2)\right|^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left|f_1'(\xi)\widehat{F_1}(\xi) + f_1(\xi)\widehat{F_1}'(\xi)\right|^2 d\xi.$$

По условию $f_l(\xi)$ — четные функции и $f_l'(\xi) \leqslant 0$ при $\xi \in [0, 1/2]$. Тогда $\widehat{F_1}'(\xi) \leqslant 0$ при $\xi \in [0, 1/2]$ и

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \Big(f_1'(\xi)\widehat{F_1}(\xi) + f_1(\xi)\widehat{F_1}'(\xi)\Big)^2 d\xi =$$

$$= 2 \int\limits_{0}^{1/2} \Big(f_1'(\xi)\widehat{F_1}(\xi) + f_1(\xi)\widehat{F_1}'(\xi)\Big)^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant 2 \int\limits_{0}^{1/2} \Big(f_1'(\xi)\widehat{F_1}(\xi)\Big)^2 d\xi \geqslant (\widehat{F_1}(1/2))^2 \int\limits_{-1/2}^{1/2} \big(f_1'(\xi)\big)^2 d\xi. \quad \diamondsuit$$

Следующая лемма дает асимптотику радиуса квадрата модуля масштабирующей маски Добеши.

Л е м м а 8.4.8. *Для маски D_N функции Добеши имеем*

$$\|\sin(2\pi\xi)\mathcal{D}_N'(\cos 2\pi\xi)\|_{L_2[-1/2,1/2]} \sim N^{1/4}. \tag{8.97}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что

$$\mathcal{D}_N'(\cos 2\pi\xi) = \frac{1}{2}\,\frac{(2N+1)!}{4^N (N!)^2} \sin^{2N}(2\pi\xi) = \sqrt{\frac{N}{\pi}}\,(1 + O(N^{-2}))\sin^{2N}(2\pi\xi).$$

Теперь остается воспользоваться тем, что

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \sin^{2N}(2\pi\xi) d\xi = \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} \sim \sqrt{\frac{\pi}{N}}\,. \qquad \diamondsuit$$

Следствие 8.4.9.

$$\Delta_{\Phi_j^0} \sim T(j+1)^{1/4}.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $t \in [0,1]$

$$\mathcal{D}_N(t) \geqslant \frac{1+t}{2}.$$

Поэтому при любом j

$$\widehat{\Phi_j^0}(1/2) \geqslant \prod_{N=1}^{\infty} \frac{1+\cos(\pi 2^{-N})}{2} = \prod_{N=1}^{\infty} \cos^2(\pi 2^{-N-1}) = \left(\frac{\sin \pi/2}{\pi/2}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}.$$

Поэтому в силу леммы 8.4.7 и (8.97)

$$\Delta_{\Phi_j^0} \geqslant CT(j+1)^{1/4}.$$

Обратная оценка следует из (8.97) и леммы 8.4.6. $\Diamond$

8.5. Нестационарные всплески с модифицированными масками Добеши

Неограниченность констант неопределенности нестационарных всплесков, построенных на основе масок Добеши, может быть устранена, если использовать модифицированные маски Добеши. В данном параграфе приводится описание этой конструкции.

Пусть $\{T(N)\}_{N=1}^{\infty}$ произвольная последовательность натуральных чисел таких, что

$$\begin{gathered} \lim_{N\to\infty} T(N) = \infty, \\ T(N) \leqslant T(N+1) \leqslant T(N)+1, \quad T(1)=1, \end{gathered} \tag{8.98}$$

и m_N^a — модифицированные маски Добеши, определенные в (4.42).

Аналогично лемме 8.2.4, доказывается

Лемма 8.5.1. *Бесконечные произведения*

$$G_j^a(\xi) := \prod_{N=j+1}^{\infty} m_{T(N)}^a(\xi 2^{-N}), \quad j \in N_0, \tag{8.99}$$

поточечно сходятся для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Сходимость равномерная на компактных множествах.

Для доказательства аналога леммы 8.2.5 нам потребуются некоторые уточнения обозначений и оценок из параграфа 4.3.2. Пусть $b_N(a)$ корень уравнения

$$2^{a+2/N}(1-b)^{(1-a)/2}(1+b)^{(1+a)/2} = 1, \quad b \in (0,1). \tag{8.100}$$

Производная функции $(1-t)^{(1-a)/2}(1+t)^{(1+a)/2}$ равна $(a-t)\times$ $\times (1-t)^{(-1-a)/2}(1+t)^{(-1+a)/2}$ и неположительна при $t \in [a,1]$. Так как $2^{-a-2/N}$ возрастает с ростом N, то $b_N(a)$ монотонно убывает при $N \to \infty$, стремясь к $b(a)$ — корню уравнения

$$2^a(1-b)^{(1-a)/2}(1+b)^{(1+a)/2} = 1, \quad b \in (0,1).$$

В уточненных обозначениях оценка (4.60) выглядит следующим образом:

$$(B_N^a(\cos 2\pi\xi))^{1/N} \leqslant \\ \leqslant \begin{cases} 1, & |\xi| \leqslant \xi_N(a); \\ 2^{1+a+\frac{2}{N}} \cos^{1-a}(\pi\xi)|\sin(\pi\xi)|^{1+a}, & |\xi| \in (\xi_N(a), 1/2); \end{cases} \tag{8.101}$$

где $\xi_N(a) \in [1/4, 1/2]$ и $\cos(2\pi\xi_N(a)) = -b_N(a)$. Так как $b_N(a)$ монотонно убывает, то и $\xi_N(a)$ монотонно убывает при $N \uparrow \infty$, стремясь к $\xi(a)$, определяемому условиями

$$\xi(a) \in [1/4, 1/2], \quad \cos(2\pi\xi(a)) = -b(a).$$

Докажем, что

$$(B_{N+2}^a(\cos 2\pi\xi))^{\frac{1}{N}} \leqslant \\ \leqslant \begin{cases} 1, & |\xi| \leqslant \xi_N(a); \\ 2^{1+a+\frac{2}{N}} \cos^{1-a}(\pi\xi)|\sin(\pi\xi)|^{1+a}, & |\xi| \in (\xi_N(a), 1/2). \end{cases} \tag{8.102}$$

Это очевидно для $|\xi| \leqslant \xi_N(a)$, так как $\xi_{N+2}(a) < \xi_N(a)$, а в случае, когда $|\xi| \in (\xi_N(a), 1/2] \subset (\xi_{N+2}(a), 1/2]$, имеем

$$B_{N+2}^a(\cos 2\pi\xi) \leqslant 2^{(N+2)(1+a)+2}(\cos^{1-a}(\pi\xi)|\sin(\pi\xi)|^{1+a})^{N+2}.$$

Поэтому

$$(B_{N+2}^a(\cos 2\pi\xi))^{1/N} \leqslant \\ \leqslant 2^{1+a+\frac{2}{N}} \cos^{1-a}(\pi\xi)|\sin(\pi\xi)|^{1+a}(2^{1+a}\cos^{1-a}(\pi\xi)|\sin(\pi\xi)|^{1+a})^{2/N}.$$

Теперь (8.102) следует из того, что при $|\xi| \in (\xi_N(a), 1/2] \subset (\xi(a), 1/2]$

$$2^{1+a}\cos^{1-a}(\pi\xi)|\sin(\pi\xi)|^{1+a} \leqslant 1.$$

Таким образом, при оценке B_{N+2}^a можно использовать такую же оценку, как и для B_N^a. Поэтому, рассуждая также как при доказательстве (4.66), получаем, что

$$(B_{N+2}^a(\cos 2\pi\xi)B_N^a(\cos 4\pi\xi))^{1/N} \leqslant \alpha 2^{2\beta}|\cos\pi\xi|^\beta|\cos 2\pi\xi|^\beta, \tag{8.103}$$

где $\alpha \in (0,1)$ и $\beta := 1-a$.

Обозначим $I_r := [2^{r-2},\ 2^{r-1}]$, $r \in \mathbb{N}$.

Лемма 8.5.2. *Пусть* $j \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $|\xi| \in I_r$ *с* $r > j$, $r \in \mathbb{N}$, *то*

$$|G_j^a(\xi)| \leqslant \gamma_j \exp\biggl(-\mu \sum_{N=j+1}^{r} T(N)\biggr), \tag{8.104}$$

где константа $\mu > 0$ *зависит только от* a, *а константы* $\gamma_j > 0$ — *только от* j *и* a.

Доказательство. Зафиксируем натуральное число $r > j$ и положим

$$G_{jr}^a(\xi) := \prod_{N=j+1}^{r} m_{T(N)}^a(\xi 2^{-N}).$$

В силу (4.44) $|G_j^a(\xi)| \leqslant |G_{jr}^a(\xi)|$. Пусть $r - j = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Учитывая (8.103), имеем

$$|G_{jr}^a(\xi)|^2 = \prod_{N=j+1}^{r} |m_{T(N)}^a(\xi 2^{-N})|^2 =$$

$$= \prod_{N=1}^{l} B_{2T(j+2N-1)-1}^a(\cos \pi\xi 2^{-j-2N+2}) B_{2T(j+2N)-1}^a(\cos \pi\xi 2^{1-j-2N}) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{N=1}^{l} (\alpha 2^{2\beta})^{2T(j+2N-1)-1} |\cos \pi\xi 2^{-j-2N} \cos \pi\xi 2^{-j-2N+1}|^{\beta(2T(j+2N-1)-1)}.$$

Определим последовательность $T'(N)$ следующим образом:

$$T'(j + 2N - 1) := T'(j + 2N) := 2T(j + 2N - 1) - 1.$$

Тогда, используя (8.46), при $|\xi| \in I_r$ имеем

$$\prod_{N=1}^{l} \left|\cos \pi\xi 2^{-j-2N} \cos \pi\xi 2^{-j-2N+1}\right|^{2T(j+2N-1)-1} =$$

$$= \prod_{N=j+1}^{r} \left|\cos \pi\xi 2^{-N}\right|^{T'(N)} \leqslant 2^{-\sum\limits_{N=j+1}^{r} T'(N) + T'(r)/2} =$$

$$= 2^{-2\sum\limits_{N=1}^{l} (2T(j+2N-1)-1) + T(r-1) - 1/2}.$$

Окончательно получаем

$$|G_{jr}^a(\xi)|^2 \leqslant \alpha^{2\sum\limits_{N=1}^{l} (2T(j+2N-1)-1)} 2^{2\beta \sum\limits_{N=1}^{l} (2T(j+2N-1)-1)} \times$$

$$\times 2^{-2\beta \sum\limits_{N=1}^{l}(2T(j+2N-1)-1)} 2^{\beta(T(r-1)-1/2)} =$$

$$= \alpha^{\sum\limits_{N=1}^{l}(2T(j+2N-1)-1)} 2^{\beta(T(r-1)-1/2)}, \quad (8.105)$$

откуда следует (8.104).

Случай $r - j = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$, тоже следует из (8.105) и очевидного в силу (4.44) неравенства

$$|G^a_{jr}(\xi)| \leqslant |G^a_{j+1,r}(\xi)|. \quad \Diamond \qquad (8.106)$$

Из леммы 8.5.2 получаем аналог следствия 8.2.6.

С л е д с т в и е 8.5.3. *Функции* G^a_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, *убывают на бесконечности быстрее любой степени.*

Определим последовательность функций $\{\varphi^a_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z},\ j\geqslant 0}$ через преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi^a_j}(\xi) &:= 2^{-j/2} G^a_j(\xi), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \\ \varphi^a_{jk}(t) &:= \varphi^a_j(t + k2^{-j}), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \qquad (8.107)$$

Функции ψ^a_{jk}, $\quad j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, определяются равенствами

$$\widehat{\psi^a_j}(\xi) := 2^{1/2} \exp(\pi i \xi 2^{-j-1}) m^a_{T(j+1)}(-\xi 2^{-j-1} - 1/2) \widehat{\varphi^a_{j+1}}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$
$$\psi^a_{jk}(t) := \psi^a_j(t + k2^{-j}),$$

Таким образом, построение системы Ψ^a завершено. Полагаем

$$\Psi^a := \{\varphi^a_{0k}, \quad \psi^a_{jk}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Свойства системы Ψ^a аналогичны свойствам Ψ (см. с. 353).

Л е м м а 8.5.4. *Функции* φ^a_{jk} *и* ψ^a_{jk}, $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, *бесконечно дифференцируемы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о получается на основе следствия 8.5.3. $\Diamond$

Точно так же, как леммы 8.2.8, 8.2.9, 8.2.10, доказываются следующие утверждения.

Л е м м а 8.5.5. *Для любых* $j \in \mathbb{Z}_+$, k, $k' \in \mathbb{Z}$,

$$\langle \varphi^a_{jk}, \varphi^a_{jk'} \rangle = \delta_{k,k'}, \qquad (8.108)$$

$$\langle \psi^a_{jk}, \psi^a_{jk'} \rangle = \delta_{k,k'}, \quad \langle \varphi^a_{jk}, \psi^a_{jk'} \rangle = 0. \qquad (8.109)$$

Рассмотрим подпространства

$$V_j^a := \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{jk}^a,\ k\in\mathbb{Z}\}},\quad W_j^a := \overline{\operatorname{span}\{\psi_{jk}^a,\ k\in Z\}},\quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{8.110}$$

По лемме 8.5.5 системы $\{\varphi_{jk}^a\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{\psi_{jk}^a\}_{k\in Z}$ являются ортонормированными базисами соответственно в пространствах V_j^a и W_j^a, $j\in\mathbb{Z}_+$.

Лемма 8.5.6. *Для любых* $j\in\mathbb{Z}_+$

$$V_j^a\subset V_{j+1}^a,\quad V_j^a\oplus W_j^a = V_{j+1}^a, \tag{8.111}$$

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j^a} = L_2(\mathbb{R}). \tag{8.112}$$

Лемма 8.5.7. *Функции* φ_j^a *и* ψ_j^a, $j\in\mathbb{Z}_+$, *имеют компактный носитель, причем*

$$\operatorname{supp}\varphi_j^a\subset[-(2T(j+1)+1)2^{-j},\,0], \tag{8.113}$$

$$\operatorname{supp}\psi_j^a\subset[-(T(j+2)+1)2^{-j},\ (2T(j+1)-1)2^{-j-1}]. \tag{8.114}$$

8.6. Константы неопределенности для Ψ^a

Пусть Φ_j^a — автокорреляционная функция для φ_j^a. Тогда

$$\widehat{\Phi}_j^a(\xi) := 2^{-j}\prod_{N=j+1}^{\infty} B_{2T(N)-1}^a(\cos(\pi\xi 2^{1-N})).$$

Так же как и в § 8.4 удобнее оценивать константы неопределенности автокорреляционных функций, приведенных к нулевому масштабу:

$$\Phi_j^{a,0}(t) := 2^j\Phi_j^a(2^{-j}t).$$

Тогда

$$\widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi) := \prod_{N=1}^{\infty} B_{2T(j+N)-1}^a(\cos(\pi\xi 2^{1-N})).$$

Как и в § 4.3.2, φ^M обозначает масштабирующую функцию Мейера, определенную в (4.74), а Φ^M — ее автокорреляционную функция.

Теорема 8.6.1. *Если функция* f_a *удовлетворяет условиям*

$$(f_a)''(t)\geqslant 0,\quad \textit{если}\quad t\leqslant 0,\qquad (f_a)''(t)\leqslant 0,\quad \textit{если}\quad t>0,$$

$$(f_a)'(t)\leqslant C\sqrt{f_a(t)}\quad \textit{для некоторой константы}\quad C,$$

то

$$\lim_{j\to\infty} \|\widehat{\Phi_j^{a,0}} - \widehat{\Phi}^M\|_p = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

$$\lim_{j\to\infty} \Delta(\widehat{\Phi_j^{a,0}}) = \Delta(\widehat{\Phi^M});$$

$$\lim_{j\to\infty} \Delta(\Phi_j^{a,0}) \leqslant \frac{8\pi^2\sqrt{2}\,C}{(\sqrt{2}-1)\|\Phi^M\|_2} \tag{8.115}$$

и, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} \Delta(\widehat{\Phi_j^{a,0}})\Delta(\Phi_j^{a,0}) \leqslant \frac{8\pi^2\sqrt{2}\,C\Delta(\widehat{\Phi^M})}{(\sqrt{2}-1)\|\Phi^M\|_2} < \infty.$$

Доказательство разбито на следующие леммы.

Л е м м а 8.6.2. *В условиях теоремы* 8.6.1 *имеем*

$$\lim_{j\to\infty} \widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi) = f_a(\cos(\pi\omega))\chi_{[-1,1]}(\xi). \tag{8.116}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство аналогично доказательству леммы 8.4.2. В силу свойств полиномов Бернштейна

$$\lim_{N\to\infty} B_N(\xi) = f_a(\xi) \text{ для любого } \xi \in [-1,1]. \tag{8.117}$$

Зафиксируем ξ и выберем $L \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|\xi| < 2^{L-2}$. Тогда

$$f_a(\cos(\pi\xi))\chi_{[-1,1]}(\xi) = \prod_{l=1}^{L} f_a(\cos(\pi\omega 2^{1-l}))$$

и, следовательно,

$$\widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi) - f_a(\cos(\pi\xi))\chi_{[-1,1]}(\xi) =$$

$$= \left\{\left(\prod_{N=1}^{L} B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N})) - \prod_{N=1}^{L} f_a(\cos(\pi\omega 2^{1-l}))\right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{N=L+1}^{\infty} B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))\right\} -$$

$$- \left\{\left(1 - \prod_{N=L+1}^{\infty} B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))\right) f_a(\cos(\pi\xi))\chi_{[-1,1]}(\xi)\right\}.$$

Обозначим

$$I_{j,1}(\xi) := \left(\prod_{N=1}^{L} B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N})) - \prod_{N=1}^{L} f_a(\cos(\pi\omega)2^{1-l})\right) \times$$

$$\times \prod_{N=L+1}^{\infty} B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}));$$

$$I_{j,2}(\xi) := \left(1 - \prod_{N=L+1}^{\infty} B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))\right) f_a(\cos(\pi\xi))\chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Очевидно, что $0 \leqslant \widehat{\Phi^{a,0}_j}(\xi) \leqslant 1$. Поэтому из (8.117) следует, что $|I_{j,1}(\xi)| \to 0$ при $j \to \infty$.

Для оценки $I_{j,2}$ воспользуемся неравенствами (4.29) и (4.30). Тогда имеем

$$|I_{j,2}(\xi)| \leqslant \sum_{N=L+1}^{\infty} \frac{1 - B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))}{B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))}.$$

Так как $|\xi| < 2^{L-2}$, то $\left|\xi 2^{1-N}\right| \leqslant 1/4$ для любого $N > L$. Поэтому

$$|B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))| \geqslant \frac{1}{2}, \quad N > L. \tag{8.118}$$

Используя (4.44) и (4.60), имеем

$$|1 - B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N}))| \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(2T(j+N)-1)(1+a)+2} \sin^{(2T(j+N)-1)(1+a)}(\pi\xi 2^{-N}). \tag{8.119}$$

Из (8.118) и (8.119) следует, что $|I_{j,2}(\xi)| \to 0$ при $j \to \infty$. $\Diamond$

Л е м м а 8.6.3. *Для любого* $p \in [1, \infty)$

$$\lim_{j\to\infty} \|\widehat{\Phi^{a,0}_j} - \widehat{\Phi^M}\|_p = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство аналогично доказательству леммы 8.92. В силу теоремы Лебега из (8.116) следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \int_{-1}^{1} \widehat{\Phi^{a,0}_j}(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} f_a(\cos(\pi\xi)\, d\xi = 1.$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi^{a,0}_j}(\xi)\, d\xi = \Phi^{a,0}_j(0) = 1,$$

имеем

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \widehat{\Phi^{a,0}_j}(\xi)\, d\xi = 0.$$

А из $|\widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi)| \leqslant 1$ следует, что $|\widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi)|^p \leqslant |\widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi)|$, значит,

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi)|^p\, d\xi = 0$$

для любого $p \in [1, \infty)$. $\Diamond$

Л е м м а 8.6.4. *В условиях теоремы* 8.6.1 *имеем*

$$\lim_{j\to\infty} \Delta_{\widehat{\Phi_j^{a,0}}} = \Delta_{\widehat{\Phi^M}}. \tag{8.120}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (4.44) для любого $L \in \mathbb{N}$

$$|\widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi)| \leqslant \prod_{N=1}^{2L} B^a_{2T(j+N)-1}(\cos(\pi\xi 2^{1-N})). \tag{8.121}$$

В силу (8.105) для $|\xi| \in [2^{2L-2}, 2^{2L-1}]$ имеем

$$|\widehat{\Phi_j^{a,0}}(\xi)| \leqslant \alpha^{\sum\limits_{N=1}^{L}(2T(j+2N-1)-1)} 2^{\beta(T(j+2L-1)-1/2)}. \tag{8.122}$$

Из этой оценки следует, что существует такое натуральное число L_0, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{|\xi|\geqslant 2^{L_0}\}} \xi^2\, |\Phi_j^{a,0}(\xi)|^2\, d\xi = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{|\xi|\geqslant 2^{L_0}\}} |\Phi_j^{a,0}(\xi)|^2\, d\xi = 0. \tag{8.123}$$

Используя теперь (8.123), (8.116) и теорему Лебега, получаем (8.120). $\Diamond$

Оценку (8.115) получим из следующей леммы.

Л е м м а 8.6.5. *В условиях теоремы* 8.6.1 *имеем*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t\Phi_j^{a,0}(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{8\pi^2\sqrt{2}\,C}{\sqrt{2}-1}. \tag{8.124}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 8.4.6 и (4.89)

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} t^2 |\Phi_j^{a,0}(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l/2} \left(\int\limits_{-1/2}^{1/2} |(B^a_{2T(j+l)-1})'(\cos 2\pi\xi)\sin 2\pi\xi|^2\, d\xi\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\pi^2\sqrt{2}\,C}{\sqrt{2}-1}. \quad \Diamond$$

8.7. Базисы нестационарных всплесков в пространствах Соболева

Параграф посвящена доказательству того, что системы нестационарных бесконечно дифференцируемых всплесков с компактными носителями, построенные в параграфах 8.2 и 8.5, образуют безусловные базисы во всех пространствах Соболева одновременно.

Теорема 8.7.1. *Системы*

$$\Psi := \{\varphi_{0k}, \quad \psi_{jk}, \quad j,k \in \mathbb{Z}, \quad j \geqslant 0\}$$

и

$$\Psi^a := \{\varphi^a_{0k}, \quad \psi^a_{jk}, \quad j,k \in \mathbb{Z}, \quad j \geqslant 0\}$$

являются безусловными базисами в пространстве Соболева W_2^s *при любом* $s \geqslant 0$. *Если функция*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi(x-k) + \sum_{j\geqslant 0, k\in\mathbb{Z}} d_{jk}\psi_{jk}(x) = \\ = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^a_k \varphi^a(x-k) + \sum_{j\geqslant 0, k\in\mathbb{Z}} d^a_{jk}\psi^a_{jk}(x)$$

принадлежит W_2^r, *то ее всплеск-разложения сходятся в* W_2^s *при всех* $s \in [0,r]$, *и имеет место эквивалентность*

$$\|f\|^2_{W_2^r} \sim \sum_k |c_k|^2 + \sum_{j,k} 2^{2rj}|d_{jk}|^2 \sim \sum_k |c^a_k|^2 + \sum_{j,k} 2^{2rj}|d^a_{jk}|^2. \tag{8.125}$$

Более того, $2^{j(r-s)}\|P_j f - f\|_{W_2^s} \to 0$ *и* $2^{j(r-s)}\|P^a_j f - f\|_{W_2^s} \to 0$ *при* $j \to +\infty$ *для любой функции* $f \in W_2^r$, *где* P_j *и* P^a_j *соответственно ортогональные проекторы пространства* $L_2(\mathbb{R})$ *на* V_j *и* V^a_j *нестационарных кратномасштабных анализов, определенных в* (8.59) *и* (8.110).

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 8.7.2. *Пусть*

$$u(\xi) := \prod_{l=1}^{\infty} |q(2^{-l}\xi)|^{T(l)}, \tag{8.126}$$

$$v_j(\xi) := |q(\xi/2+\pi)|^{T(j+1)} \prod_{l=2}^{\infty} |q(2^{-l}\xi)|^{T(l)}, \; j \in \mathbb{N}, \tag{8.127}$$

где $q(\xi) := \sqrt{Q(\xi)}$, *а* Q — *функция, определенная в лемме* 2.2.5. *Тогда*

$$|\widehat{\varphi}_j(\xi)| \leqslant 2^{-j/2} u(2^{-j}\xi) \tag{8.128}$$

для всех $j \geqslant 0$, *и*

$$|\widehat{\psi}_j(\xi)| \leqslant 2^{\frac{1-j}{2}} v_n(2^{-j}\xi) \tag{8.129}$$

для всех $j \geqslant n > 0$.

Доказательство. В силу (8.40) и (8.52)

$$\widehat{\varphi}_j(\xi) = 2^{-j/2} \prod_{l=j+1}^{\infty} d_{T(l)}(2^{-l}\xi),$$

значит, по лемме 2.2.5

$$|\widehat{\varphi}_j(\xi)| \leqslant \left| 2^{-j/2} \prod_{l=j+1}^{\infty} (q(2^{-l}\xi))^{T(l)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-j/2} \prod_{l=j+1}^{\infty} (q(2^{-l+j}2^{-j}\xi))^{T(l-j)} = 2^{-j/2} u(2^{-j}\xi),$$

где последнее неравенство основано на том, что $q(\xi) \leqslant 1$ и $T(l)$ монотонно возрастает (см. (8.34)).

Аналогично для всех $j \geqslant n > 0$ имеем

$$|\widehat{\psi}_j(\xi)| = 2^{\frac{1-j}{2}} \left| d_{T(j+1)}(-\xi 2^{-j-1} - 1/2) \prod_{l=j+2}^{\infty} d_{T(l)}(2^{-l}\xi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1-j}{2}} \left| (q(-\xi 2^{-j-1} - 1/2))^{T(j+1)} \prod_{l=j+2}^{\infty} (q(2^{-l+j}2^{-j}\xi))^{T(l-j)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1-j}{2}} v_n(2^{-j}\xi). \quad \diamondsuit$$

Лемма 8.7.3. *Функции* u, v_j, $j \in \mathbb{N}$, *убывают на бесконечности быстрее любой степени.*

Доказательство. Из тождества $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ и монотонного возрастания $T(l)$ следует, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\prod_{l=1}^{N} |\cos(2^{-l}\pi\xi)|^{T(l)} \leqslant \prod_{l=1}^{N} \left| \frac{\sin \pi\xi 2^{1-l}}{2 \sin \pi\xi 2^{-l}} \right|^{T(l)} \leqslant 2^{-\sum\limits_{l=1}^{N} T(l)} |\sin \pi\xi 2^{-N}|^{-T(N)}. \tag{8.130}$$

В силу леммы 2.2.5

$$u(\xi) \leqslant \prod_{l=1}^{\infty} |\cos(2^{-l}\pi\xi)|^{T(l)} (\widetilde{q}(2^{-l}\xi))^{T(l)}, \tag{8.131}$$

где $\widetilde{q}(\xi) := \sqrt{\widetilde{Q}(\xi)}$, а функция $\widetilde{Q}$ определена в лемме 2.2.5. Из (8.34) следует, что

$$\frac{T(l)+T(l+1)}{2} \geqslant T(l).$$

Поэтому в силу (4.19) имеем

$$\prod_{l=1}^{N} (\widetilde{q}(2^{-l}\xi))^{T(l)} \leqslant \sup_{\xi} \widetilde{q}(\xi) (\sqrt{\sigma_2}\,)^{\frac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{N} T(l)}. \tag{8.132}$$

Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$ и пусть $|\xi| \in [2^{l-2},\ 2^{l-1})$. Тогда $|\sin 2^{-l}\pi\xi| \geqslant 2^{-1/2}$ и неравенства (8.130–8.132) означают, что

$$\prod_{l=1}^{N} |\cos(2^{-l}\pi\xi)|^{T(l)} (\widetilde{q}(2^{-l}\xi))^{T(l)} \leqslant \sup_{\xi} \widetilde{q}(\xi) 2^{(\frac{\log_2 \sigma_2}{4} - 1)\sum\limits_{l=1}^{N} T(l) + \frac{T(N)}{2}}. \tag{8.133}$$

Из (8.33) и (8.34) следует, что $T(l) \leqslant l$ и

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} T(l) = \infty.$$

Кроме того, $0 \leqslant q(\xi) \leqslant 1$. Поэтому из (8.133) следует, что u убывает на бесконечности быстрее любой степени.

Быстрое убывание функций v_j, $j \in \mathbb{N}$, доказывается аналогично. $\Diamond$

Лемма 8.7.4 (неравенство Бернштейна). *Для любого $r \geqslant 0$ существует $K(r)$ такое, что для всех $f \in V_j$, $j \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство*

$$\|f\|_{W_2^0} \leqslant \|f\|_{W_2^r} \leqslant K(r) 2^{rj} \|f\|_{W_2^0}. \tag{8.134}$$

Доказательство. Пусть

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_{jk}, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

Тогда, используя (8.23), имеем (см. приложение А.13)

$$\|f\|^2_{W_2^r} = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i 2^{-j} k\xi} \right|^2 |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^r \, d\xi. \tag{8.135}$$

Используя (8.128), получаем

$$\|f\|^2_{W_2^r} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k\xi} \right|^2 |u(\xi)|^2 (1+|\xi|^2 2^{2j})^r \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2rj} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k\xi} \right|^2 |u(\xi)|^2 (1+|\xi|^r)^r \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant (K(r))^2 2^{2rj} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k\xi} \right|^2 d\xi \leqslant (K(r))^2 2^{2rj} \|f\|^2_{W_2^0},$$

где

$$(K(r))^2 := \sup_{\xi\in[-1/2,1/2]} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (1+|\xi+l|^2)^r u^2(\xi+l) < \infty$$

в силу леммы 8.7.3. $\Diamond$

Лемма 8.7.5. *Пусть*

$$u^a(\xi) := \prod_{l=1}^{\infty} |q_a(2^{-2l}\xi)|^{2T(2l)-1}, \tag{8.136}$$

$$v_j^a(\xi) := |p_{j+1}(\xi - 1/2)|^{T(j+1)} \prod_{l=1}^{\infty} |q_a(2^{-2l-1}\xi)|^{2T(2l-1)-1}, \tag{8.137}$$

где

$$q_a(\xi) := \min\left\{1, \sqrt{\alpha}\, 2^{\beta} (|\cos \pi\xi| \cdot |\cos 2\pi\xi|)^{\beta/2}\right\}, \tag{8.138}$$

$$p_N(\xi) := \begin{cases} 1, & |\xi| \leqslant \xi_N(a); \\ 2^{\frac{1+a}{2}+\frac{1}{N}} |\cos(\pi\xi)|^{\frac{1-a}{2}} |\sin(\pi\xi)|^{\frac{1+a}{2}}, & |\xi| \in (\xi_N(a), 1/2); \end{cases} \tag{8.139}$$

где $\beta := 1-a$, $\alpha \in (0,1)$ *определено в* (8.103); $\xi_N(a) \in [1/4, 1/2]$ *и* $\cos 2\pi\xi_N(a) = -b_N(a)$, *а* $b_N(a)$ — *корень уравнения* (8.100). *Тогда*

$$|\widehat{\varphi}_j^a(\xi)| \leqslant 2^{-j/2} u^a(2^{-j}\xi) \tag{8.140}$$

для всех $j \geqslant 0$, *и*

$$|\widehat{\psi}_j^a(\xi)| \leqslant 2^{\frac{1-j}{2}} v_n^a(2^{-j}\xi) \tag{8.141}$$

для всех $j \geqslant n > 0$.

Доказательство. В силу (8.99) и (8.107)

$$\widehat{\varphi}_j^a(\xi) = 2^{-j/2} \prod_{l=j+1}^{\infty} m^a_{T(l)}(2^{-l}\xi).$$

Из оценок (8.103) и $q_a(\xi) \leqslant 1$, принимая во внимание монотонное возрастание $T(l)$ (см. (8.34)), получаем

$$|\widehat{\varphi}_j^a(\xi)| \leqslant \left| 2^{-j/2} \prod_{l=1}^{\infty} (q_a(2^{-j-2l}\xi))^{2T(j+2l-1)-1} \right| \leqslant 2^{-j/2} u^a(2^{-j}\xi).$$

Аналогично для всех $j \geqslant n > 0$, используя (8.101), имеем

$$|\widehat{\psi}^a_j(\xi)| = 2^{\frac{1-j}{2}} \left| m^a_{T(j+1)}(-\xi 2^{-j-1} - 1/2) \prod_{l=j+2}^{\infty} m^a_{T(l)}(2^{-l}\xi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1-j}{2}} \left| (p^a_{j+1}(-\xi 2^{-j-1} - 1/2))^{T(j+1)} \prod_{l=1}^{\infty} (q_a(2^{-j-2l-1}\xi))^{2T(j+2l)-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1-j}{2}} v^a_n(2^{-j}\xi). \quad \diamondsuit$$

Л е м м а 8.7.6. *Функции u^a, v^a_j, $j \in \mathbb{N}$, быстро убывают на бесконечности.*

Это утверждение доказывается так же, как следствие 8.5.3.

Л е м м а 8.7.7 (неравенство Бернштейна). *Для любого $r \geqslant 0$ существует $K_a(r)$ такое, что для всех $f \in V^a_j$, $j \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство*

$$\|f\|_{W^0_2} \leqslant \|f\|_{W^r_2} \leqslant K_a(r) 2^{rj} \|f\|_{W^0_2}. \tag{8.142}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^a_k \varphi^a_{jk}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c^a_k|^2 < \infty.$$

Тогда

$$\|f\|^2_{W^r_2} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^a_k e^{\pi i 2^{1-j} k\xi} \right|^2 |\widehat{\varphi^a_j}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^r \, d\xi. \tag{8.143}$$

Используя (8.140), получаем

$$\|f\|^2_{W^r_2} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^a_k e^{2\pi i k\xi} \right|^2 |u^a(\xi)|^2 (1+|\xi|^2 2^{2j})^r \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2rj} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^a_k e^{2\pi i k\xi} \right|^2 |u^a(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^r \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant (K_a(r))^2 2^{2rj} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^a_k e^{2\pi i k\xi} \right|^2 d\xi \leqslant (K_a(r))^2 2^{2rj} \|f\|^2_{W^0_2},$$

где

$$(K_a(r))^2 := \sup_{\xi\in[-1/2,1/2]} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (1+|\xi+l|^2)^r \, (u^a)^2(\xi+l) < \infty$$

в силу быстрого убывания u^a. $\diamondsuit$

Доказательство теоремы 8.7.1. Пусть $f \in W_2^r$, выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $T(n) < 2r + 2 \leqslant T(n+1)$. Пусть R_j — ортогональный проектор из $L_2(\mathbb{R})$ на пространство всплесков $W_j := \overline{\operatorname{span}\{\psi_{jk},\ k \in \mathbb{Z}\}}$. Ясно, что

$$\|P_0 f\|^2_{W_2^0} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{2rj}\|R_j f\|^2_{W_2^0} \leqslant C(r)\|f\|^2_{W_2^0}, \tag{8.144}$$

где

$$C(r) := 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{2rj}.$$

Для $j \geqslant n$, используя лемму 1.2.11, имеем

$$\|R_j f\|^2_{W_2^0} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 = 2^{2j}\int\limits_0^1 \left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(2^j(\xi+l)\right)\overline{\widehat{\psi}_j\left(2^j(\xi+l)\right)}\right|^2 d\xi.$$

Применяя (8.129) и неравенство Коши, получаем

$$\|R_j f\|^2_{W_2^0} \leqslant 2^{1+j}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(2^j(\xi+l))v_n(\xi+l)|\right)^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1+j}A\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(2^j(\xi+l))|^2 v_n(\xi+l)\right)d\xi \leqslant A\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 v_n(2^{-j}\xi)d\xi,$$

где

$$A := \sup_{\xi}\left[\sum_{l\in\mathbb{Z}} v_n(\xi+l)\right] < +\infty$$

в силу леммы 8.7.3.

Так как $2r + 2 \leqslant T(n+1)$, то

$$B(r) := \sup_{\xi}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{-j}\xi|^{-2r} v_n(2^{-j}\xi)\right) < \infty,$$

поскольку v_n имеет нуль кратности $T(n+1)$ в нуле. Суммируя по $j \geqslant n$ предыдущие оценки, имеем

$$\sum_{j=n}^{\infty} 2^{2rj}\|R_j f\|^2_{W_2^0} = 2A\sum_{j=n}^{\infty} 2^{2rj}\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 v_n(2^{-j}\xi)d\xi =$$

$$= 2A\sum_{j=n}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2r}|\widehat{f}(\xi)|^2|2^{-j}\xi|^{-2r}v_n(2^{-j}\xi)d\xi \leqslant 2\,A\,B(r)\|f\|^2_{W_2^r}. \tag{8.145}$$

Окончательно, из (8.144) и (8.145) получаем

$$\sum_k |c_k|^2 + \sum_{j,k} 2^{2rj}|d_{jk}|^2 \leqslant [2\,A\,B(r) + C(r)]\|f\|^2_{W_2^r}. \tag{8.146}$$

Теперь докажем противоположное неравенство. Положим $f_0 = P_0 f$ и $f_j = R_{j-1} f$ для $j > 0$. Ясно, что из сходимости ряда

$$\|P_0(f)\|^2_{W_2^0} + \sum_j 2^{2jr}\|R_j(f)\|^2_{W_2^0}$$

следует, что в пространстве W_p^m имеет место разложение $f = \sum\limits_j f_j$. По лемме 8.7.4

$$\left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^m f_j\right\|_{W_2^0} \leqslant \|f_j\|_{W_2^m} \leqslant K(m)2^{mj}\|f_j\|_{W_2^0} = \varepsilon_j 2^{(m-r)j}. \tag{8.147}$$

где $\varepsilon_j := 2^{rj}\|f_j\|_{W_2^0} K(m)$, Отсюда следует (см. приложение A.13), что

$$\|f\|^2_{W_2^r} \leqslant D(r)(\|P_0(f)\|^2_{W_2^0} + \sum_j 2^{2jr}\|R_j(f)\|^2_{W_2^0}), \tag{8.148}$$

где $D(r) = 2^{2r}K^2(m)$, и первое отношение эквивалентности в (8.125) доказано полностью.

Используем (8.148) и (8.146) для оценки $\|P_j f - f\|^2_{W_2^s}$ при $f \in W_2^r$, $r > s$. Имеем

$$\|P_j f - f\|^2_{W_2^s} \leqslant D(s)\sum_{l=j}^{\infty} 2^{2ls}\|R_l(f)\|^2_{W_2^0} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2j(s-r)}D(s)\sum_{l=j}^{\infty} 2^{2lr}\|R_l(f)\|^2_{W_2^0} \leqslant 2^{2j(s-r)}K(r,s)\|f\|^2_{W_2^r}\varepsilon(j,f),$$

где $K(r,s) = D(s)(A(r)B(r) + C(r))$, $\varepsilon(j,f) \in [0,1]$ стремится к 0 при $j \to \infty$.

Доказательство утверждений теоремы для системы Ψ^a проведем по той же схеме с некоторыми техническими изменениями. Рассмотрим функцию $f \in W_2^r$ и выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\left[\frac{T(n)(1-a)}{2}\right] < 2r + 2 \leqslant \left[\frac{T(n+1)(1-a)}{2}\right].$$

Пусть R_j^a — ортогональный проектор из $L_2(\mathbb{R})$ на пространство всплесков $W_j^\alpha := \overline{\operatorname{span}\{\psi_{jk}^\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}}$. Ясно, что

$$\|P_0^a f\|^2_{W_2^0} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{2rj}\|R_j^a f\|^2_{W_2^0} \leqslant C(r)\|f\|^2_{W_2^0}, \tag{8.149}$$

где
$$C(r) := 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{2rj}.$$

Для $j \geqslant n$, используя лемму 1.2.11, имеем
$$\|R_j^\alpha f\|^2_{W_2^0} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk}^\alpha\rangle|^2 = 2^{2j} \int_0^1 \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(2^j(\xi+l)\right) \overline{\widehat{\psi}_j^\alpha\left(2^j(\xi+l)\right)} \right|^2 d\xi.$$

Применяя (8.141) и неравенство Коши, получаем
$$\|R_j^a f\|^2_{W_2^0} \leqslant 2^{1+j} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(2^j(\xi+l)) v_n^a(\xi+l)| \right)^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1+j} A_a \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(2^j(\xi+l))|^2 v_n^a(\xi+l) \right) d\xi \leqslant$$
$$\leqslant 2A_a \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 v_n^a(2^{-j}\xi) d\xi,$$

где
$$A_a := \sup_\xi \left[\sum_{l\in\mathbb{Z}} v_n^a(\xi+l) \right] < +\infty$$

в силу леммы 8.7.6. Так как
$$2r+2 \leqslant \left[\frac{T(n+1)(1-a)}{2} \right],$$

то
$$B_a(r) := \sup_\xi \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |2^{-j}\xi|^{-2r} v_n^a(2^{-j}\xi) \right) < \infty,$$

поскольку v_n^a имеет нуль кратности $\left[\dfrac{T(n+1)(1-a)}{2}\right]$ в нуле. Суммируя по $j \geqslant n$ предыдущие оценки, имеем
$$\sum_{j=n}^\infty 2^{2rj} \|R_j^a f\|^2_{W_2^0} = 2A_a \sum_{j=n}^\infty 2^{2rj} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 v_n^a(2^{-j}\xi) d\xi =$$
$$= 2A_a \sum_{j=n}^\infty \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2r} |\widehat{f}(\xi)|^2 |2^{-j}\xi|^{-2r} v_n^a(2^{-j}\xi) d\xi \leqslant 2\, A_a\, B_a(r) \|f\|^2_{W_2^r}. \tag{8.150}$$

Окончательно из (8.149) и (8.150) получаем

$$\sum_k |c_k|^2 + \sum_{j,k} 2^{2rj}|d^a_{jk}|^2 \leqslant [2\,A_a\,B_a(r) + C(r)]\|f\|^2_{W^r_2}. \tag{8.151}$$

Положим $f^a_0 = P^a_0 f$ и $f^a_j = R^a_{j-1} f$ для $j > 0$. Ясно, что из сходимости ряда

$$\|P^a_0(f)\|^2_{W^0_2} + \sum_j 2^{2jr}\|R^a_j(f)\|^2_{W^0_2}$$

следует, что в пространстве W^m_p имеет место разложение $f = \sum\limits_j f_j$. По лемме 8.7.7

$$\left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m f^a_j\right\|_{W^0_2} \leqslant \|f^a_j\|_{W^m_2} \leqslant K_a(m)2^{mj}\|f^a_j\|_{W^0_2} = \varepsilon_j 2^{(m-r)j}, \tag{8.152}$$

где $\varepsilon_j := 2^{rj}\|f^a_j\|_{W^0_2}K_a(m)$. Отсюда получаем (см. приложение А.13), что

$$\|f\|^2_{W^r_2} \leqslant D_a(r)(\|P^a_0(f)\|^2_{W^0_2} + \sum_j 2^{2jr}\|R^a_j(f)\|^2_{W^0_2}), \tag{8.153}$$

где $D_a(r) := 2^{2r}K^2_a(m)$. Это завершает доказательство второго отношения эквивалентности в (8.125).

Оценка скорости аппроксимации по системе Ψ^a осуществляется также как и для системы Ψ на основе (8.153) и (8.151). Для $f \in W^r_2$, $r > s$ имеем

$$\|P^a_j f - f\|^2_{W^s_2} \leqslant D_a(s)\sum_{l=j}^{\infty} 2^{2ls}\|R^a_l(f)\|^2_{W^0_2} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2j(s-r)}D_a(s)\sum_{l=j}^{\infty} 2^{2lr}\|R^a_l(f)\|^2_{W^0_2} \leqslant 2^{2j(s-r)}K_a(r,s)\|f\|^2_{W^0_2}\varepsilon(j,f),$$

где $K_a(r,s) := D_a(s)(A_a(r)B_a(r) + C(r))$, $\varepsilon(j,f) \in [0,1]$ стремится к 0 при $j \to \infty$. $\lozenge$

Глава 9

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ

9.1. ПКМА и масштабирующая последовательность

Если ортонормированный базис всплесков в $L_2(\mathbb{R})$ периодизировать естественным образом, что возможно при достаточно быстром убывании всплеск-функции на бесконечности, то мы получим ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{T})$, который называют периодической системой всплесков. Эта система будет состоять из сдвигов функций ψ_j, однако ψ_j, вообще говоря, уже не будет растяжением функции ψ_0 (за исключением системы Хаара). Аналогично, периодизируя двоичные растяжения масштабирующей функции и натягивая подпространства на их сдвиги, мы можем получить структуру, напоминающую кратномасштабный анализ, но не являющуюся его полным аналогом. В ряде книг периодические базисы всплесков определяются по такой схеме (детальнее мы ее обсудим в следующем параграфе). Однако такой подход к периодическим объектам не очень естественен, тем более, что не все базисы, «заслуживающие» называться системами всплесков, подходят под такое определение. Мы будем следовать стандартной схеме описания систем всплесков, исходя из кратномасштабных анализов, которые, в отличие от непериодического случая, будут определены не только в L_2.

Теорию периодических всплесков мы сразу будем излагать для многомерного несепарабельного случая. Как и в гл. 2, коэффициентом растяжения будет фиксированная целочисленная матрица M размера $d \times d$, все собственные числа которой по модулю больше единицы, m обозначает модуль ее определителя. Напомним, что для такой матрицы $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, и справедливы соотношения (2.5), (2.6), (2.8).

Под пространством X будем понимать либо $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, либо $C(\mathbb{T}^d)$. Определим на X оператор сдвига S_p^j, $p \in \mathbb{Z}^d$, $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$S_p^j f(x) := f(x + M^{-j} p). \tag{9.1}$$

Определение 9.1.1. Пусть $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что совокупность $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ является *периодическим кратномасштабным анализом* (*далее ПКМА*) в X, если выполнены следующие свойства (аксиомы):

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$;

MR2. $\overline{\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} V_j} = X$;

MR3. $\dim V_j = m^j$;

MR4. $\dim \{f \in V_j \colon S_n^j f = \lambda_n f \ \forall \ \ n \in \mathbb{Z}^d\} \leqslant 1$ для любого набора комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$;

MR5. $f \in V_j \Leftrightarrow S_n^j f \in V_j$ для всех $n \in \mathbb{Z}^d$;

MR6. a) $f \in V_j \Rightarrow f(M\cdot) \in V_{j+1}$;

b) $f \in V_{j+1} \Rightarrow \sum\limits_{s \in D(M)} f(M^{-1} \cdot + M^{-1}s) \in V_j$.

Замечание 9.1.2. Из-за периодичности функции f в условиях MR4 и MR5 вместо всех $n \in \mathbb{Z}^d$ можно рассматривать только цифры матрицы M^j, т. е. эти условия могут быть заменены на следующие.

MR4$'$. $\dim \{f \in V_j \colon S_r^j f = \lambda_r f \quad \forall \ \ r \in D(M^j)\} \leqslant 1$ для любого набора комплексных чисел $\{\lambda_r\}_{r \in D(M^j)}$;

MR5$'$. $f \in V_j \Leftrightarrow S_n^j f \in V_j$ для всех $n \in D(M^j)$.

Отметим, что в случае $d = 1$, $M = 2$ условие MR4$'$ примет вид: $\dim \{f \in V_j \colon S_1^j f = \lambda f\} \leqslant 1$ для любого комплексного числа λ, т. е. оно означает, что размерность любого собственного подпространства оператора сдвига на 2^{-j} пространства V_j не превосходит 1.

Определение 9.1.3. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ — ПКМА в X. Последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\varphi \in V_j$, называется *масштабирующей*, если функции $S_n^j \varphi_j$, $n \in D(M^j)$, образуют базис пространства V_j.

Теорема 9.1.4. *Функции $\varphi_j \in X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, образуют масштабирующую последовательность для некоторого ПКМА в X тогда и только тогда, когда*

Ф1. $\widehat{\varphi}_0(k) = 0$ *для всех* $k \neq 0$;

Ф2. *для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ и для любого $n \in \mathbb{Z}^d$ существует $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$ такое, что $\widehat{\varphi}_j(k) \neq 0$*;

Ф3. *для любого $k \in \mathbb{Z}^d$ существует $j \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $\widehat{\varphi}_j(k) \neq 0$*;

Ф4. *для любых $j \in \mathbb{N}$, $\ \ n \in \mathbb{Z}^d$, существует число μ_n^j такое, что $\widehat{\varphi}_{j-1}(k) = \mu_n^j \widehat{\varphi}_j(k)$ для всех $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$*;

Ф5. *для любых $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}^d$, существует число $\gamma_n^j \neq 0$ такое, что $\gamma_n^j \widehat{\varphi}_j(k) = \widehat{\varphi}_{j+1}(M^* k)$ для всех $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$*.

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 9.1.5. *Пусть $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, и выполнены аксиомы* MR1, MR2, MR3, MR6(b) *определения* 9.1.1. *Тогда пространство V_0 состоит только из констант.*

Доказательство. По свойству MR3 пространство V_0 одномерное. Пусть $f \in V_0$, $\|f\| \neq 0$. Покажем, что $\widehat{f}(\mathbf{0}) \neq 0$. Предположим, что $\widehat{f}(\mathbf{0}) = 0$. Введем оператор $A:\quad Af = \sum\limits_{s\in D(M)} f(M^{-1}\cdot + M^{-1}s)$ и положим $g = Af$. По лемме 2.2.5

$$\widehat{g}(\mathbf{0}) = \sum_{s\in D(M)} \int_{\mathbb{T}^d} f(M^{-1}x + M^{-1}s)\,dx =$$

$$= m \sum_{s\in D(M)} \int_{M^{-1}\mathbb{T}^d + M^{-1}s} f(z)\,dz = m \int_{\mathbb{T}^d} f(z)\,dz = m\widehat{f}(0).$$

Пусть $g_0 \in V_j$, тогда по MR6(b) $g_1 := Ag_0 \in V_{j-1}, \ldots, g_j := Ag_{j-1} \in V_0$. Если $\widehat{g}_j(\mathbf{0}) \neq 0$, то это противоречит одномерности V_0, так как $\widehat{f}(\mathbf{0}) = 0$. А если $\widehat{g}_0(\mathbf{0}) = 0$, то любая функция из любого V_j имеет нулевое среднее, что противоречит аксиоме MR2.

Теперь предположим, что $\widehat{f}(n) \neq 0$ для некоторого $n \neq \mathbf{0}$. Так как $f \in V_0$, используя MR1, имеем $f \in V_1$, и, значит, $g \in V_0$ по MR6(b). Поскольку V_0 одномерно, $g = \lambda f$, что влечет $\widehat{g}(n) = \lambda \widehat{f}(n)$, но $\lambda = m$, так как $\widehat{g}(0) = m\widehat{f}(0)$. С другой стороны, непосредственный подсчет с использованием леммы 2.2.5 дает

$$\widehat{g}(n) = \sum_{s\in D(M)} \int_{\mathbb{T}^d} f(M^{-1}x + M^{-1}s) e^{2\pi i(x,n)} dx =$$

$$= m \sum_{s\in D(M)} \int_{M^{-1}\mathbb{T}^d + M^{-1}s} f(z) e^{2\pi i(Mz - s, n)} dz = m \int_{\mathbb{T}^d} f(z) e^{2\pi i(Mz,n)} dz =$$

$$= m\widehat{f}(M^* n).$$

Следовательно,

$$\widehat{f}(n) = \widehat{f}(M^* n) = \ldots = \widehat{f}(M^{*l} n) = \ldots,$$

но так как коэффициенты Фурье функции $f \in X$ стремятся к нулю с ростом модуля их номера, принимая во внимание (2.8), получаем противоречие. $\Diamond$

Определим рекурсивно операторы ω_n^j, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}^d$, заданные на X:

$$\begin{aligned} \omega_n^0 f &:= f, \\ \omega_n^{j+1} f(x) &:= \frac{1}{m} \sum_{s\in D(M)} e^{-2\pi i(M^{-j-1}s, n)} \omega_n^j f(x + M^{-j-1}s). \end{aligned}$$

Лемма 9.1.6. *Пусть $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, и выполнена аксиома* MR5 *определения* 9.1.1. *Если $f \in V_{j_0}$, то $\omega_n^j f \in V_{j_0}$ для всех $j = 0, \ldots, j_0$, $n \in \mathbb{Z}^d$, и*

$$\omega_n^j f \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j} m + n) e^{2\pi i(M^{*j} m + n, \cdot)}, \tag{9.2}$$

т. е. $\widehat{\omega_n^j f}(k) = \widehat{f}(k)$ *при* $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$ *и* $\widehat{\omega_n^j f}(k) = 0$ *при* $k \not\equiv n \pmod{M^{*j}}$.

Доказательство. Проведем индукцию по j. База для $j = 0$ очевидна. Пусть $\omega_n^j f \in V_{j_0}$, $0 \leqslant j < j_0$, и для всех $n \in \mathbb{Z}^d$ выполнено (9.2). Тогда из MR5 следует

$$\omega_n^j f(\cdot + M^{-j-1}s) = \omega_n^j f(\cdot + M^{-j_0}(M^{j_0-j-1}s) \in V_{j_0}),$$

что влечет $\omega_n^{j+1} f \in V_{j_0}$. Далее имеем

$$\widehat{\omega_n^{j+1} f}(k) = \frac{1}{m} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \sum_{s \in D(M)} e^{-2\pi i(M^{-j-1}s,n)} \omega_n^j f(x + M^{-j-1}s) e^{-2\pi i(x,k)} dx =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{s \in D(M)} e^{-2\pi i(M^{-j-1}s,n)} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \omega_n^j f(t) e^{-2\pi i(t-M^{-j-1}s,k)} dt =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{s \in D(M)} e^{-2\pi i(M^{-j-1}s,n-k)} \widehat{\omega_n^j f}(k).$$

Если $k \equiv n \pmod{M^{*j+1}}$, то сумма справа, очевидно, равна m, значит, $\widehat{\omega_n^{j+1} f}(k) = \widehat{\omega_n^j f}(k)$. Если $k \not\equiv n \pmod{M^{*j+1}}$ и $n \equiv k \pmod{M^{*j}}$, т. е. $n - k = M^{*j} l$, где вектор l не сравним с нулем по модулю M^*, то по лемме 2.2.6 последняя сумма равна нулю. Наконец, если $k \not\equiv n \pmod{M^{*j}}$, то по индукционному предположению $\widehat{\omega_n^j f}(k) = 0$, значит, и $\widehat{\omega_n^{j+1} f}(k) = 0$. $\Diamond$

Лемма 9.1.7. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ — *ПКМА в* X. *Тогда в каждом пространстве* V_j *существует базис* $\{v_n^j\}_{n \in D(M^{*j})}$, *удовлетворяющий условиям*:

V1. $\widehat{v}_n^j(k) = 0$ *для всех* $k \not\equiv n \pmod{M^{*j}}$;

V2. *Если* $\widehat{v}_n^j(k) \neq 0$, *то* $\widehat{v}_n^j(\ell) = \widehat{v}_n^{j+1}(\ell)$ *для всех* $\ell \equiv k \pmod{M^{*j+1}}$;

V3. $\widehat{v}_n^j(k) = \widehat{v}_{M^*n}^{j+1}(M^*k)$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}^d$.

Для удобства положим $v_l^j := v_n^j$, если $l \equiv n \pmod{M^j}$.

Доказательство. Проведем индукцию по j. База для $j = 0$ очевидна, так как все целочисленные векторы сравнимы между собой. Предположим, что в пространствах V_j, $j = 0, \ldots, j_0$ существуют базисы, удовлетворяющие V1, V2, V3. Введем пространства

$$V_j^{(n)} := \{f \in V_j \colon \widehat{f}(k) = 0 \ \ \forall \ k \not\equiv n \pmod{M^{*j}}\}.$$

Пусть $F \in V_j$, тогда

$$F = \sum_{n \in D(M^{*j})} \omega_n^j F = \sum_{n \in D(M^{*j})} F_n, \quad F_n \in V_j^{(n)}.$$

Это означает, что $V_j = \sum\limits_{n\in D(M^{*j})} V_j^{(n)}$. Следовательно,

$$m^j = \dim V_j \leqslant \sum_{n\in D(M^{*j})} \dim V_j^{(n)}. \tag{9.3}$$

Найдем размерность пространства $V_j^{(n)}$. Если $f \in V_j^{(n)}$, то

$$f(x) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j}m+n)e^{2\pi i(M^{*j}m+n,x)}.$$

Применяя оператор сдвига, получим

$$(S_p^j f)(x) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j}m+n)e^{2\pi i(M^{*j}m+n,x+M^{-j}p)} \sim e^{2\pi i(n,M^{-j}p)}f(x),$$

т. е. $S_p^j f(x) = e^{2\pi i(n,M^{-j}p)}f(x)$ для всех $p\in\mathbb{Z}^d$. Отсюда в силу MR4, принимая во внимание (9.3), получаем $\dim V_j^{(n)} = 1$.

Построим базис $\{v_n^{j_0+1}\}$. Если $\widehat{v}_k^{j_0}(k) \neq 0$, то положим

$$v_k^{j_0+1} := \omega_k^{j_0+1}v_k^{j_0},$$

и свойства V1, V2 будут выполнены в силу леммы 9.1.6. Проверим V3. Пусть $k\equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$, $n\equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$, тогда по индукционному предположению

$$\widehat{v}_k^{j_0+1}(n) = \widehat{v}_k^{j_0}(n) = \widehat{v}_{M^{*-1}k}^{j_0-1}(M^{*-1}n) = \widehat{v}_{M^{*-1}k}^{j_0}(M^{*-1}n).$$

Таким образом определены базисные функции с номерами k, для которых существует такое $n\equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$, что $\widehat{v}_k^{j_0}(n)\neq 0$. Пусть теперь $\widehat{v}_k^{j_0}(n) = 0$ для всех $n\equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$ и $k\equiv\mathbf{0} \pmod{M^*}$, тогда положим $v_k^{j_0+1}(x) := v_{M^{*-1}k}^{j_0}(Mx)$. Используя лемму 2.2.5, имеем

$$\widehat{v}_k^{j_0+1}(n) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} v_k^{j_0+1}(x)e^{-2\pi i(x,n)}dx = \int\limits_{\mathbb{T}^d} v_{M^{*-1}k}^{j_0}(Mx)e^{-2\pi i(x,n)}dx =$$

$$= \sum_{s\in D(M)} \int\limits_{M^{-1}\mathbb{T}^d+M^{-1}s} v_{M^{*-1}k}^{j_0}(Mx)e^{-2\pi i(x,n)}dx =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{s\in D(M)} \int\limits_{\mathbb{T}^d+s} v_{M^{*-1}k}^{j_0}(t)e^{-2\pi i(t,M^{*-1}n)}dt = \widehat{v}_{M^{*-1}k}^{j_0}(M^{*-1}n).$$

Ясно, что свойство V3 выполнено, V1 выполнено по индукционному предположению, V2 не требует проверки. Наконец, пусть $\widehat{v}_k^{j_0}(n) = 0$ для всех $n\equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$ и $k\not\equiv\mathbf{0} \pmod{M^*}$. В этом случае в качестве $v_k^{j_0+1}$ берем любой ненулевой элемент пространства $V_{j_0+1}^{(k)}$. Свойство V1 следует из определения $V_{j_0+1}^{(k)}$, V2 и V3 не требуют проверки. $\Diamond$

Замечание 9.1.8. Если для пространств $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, выполнены только аксиомы MR1, MR3, MR4, MR5 определения 9.1.1, то в каждом пространстве V_j существует базис $\{v_n^j\}_{n\in D(M^{*j})}$, удовлетворяющий условиям V1, V2. Доказательство можно провести по той же схеме, взяв в качестве v_0^0 любой ненулевой элемент пространства V_0, а в качестве $v_k^{j_0+1}$ в случае, когда $\widehat{v}_k^{j_0}(n) = 0$ для всех $n \equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$ и $k \equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$, любой ненулевой элемент пространства $V_{j_0+1}^{(k)}$.

Лемма 9.1.9. *Если в каждом пространстве $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, существует базис $\{v_n^j\}_{n\in D(M^{*j})}$, удовлетворяющий условию* V1 *леммы* 9.1.7, *то выполнена аксиома* MR4 *определения* 9.1.1.

Доказательство. Учитывая замечание 9.1.2, достаточно проверить выполнение условия MR4$'$. Пусть $r \in D(M^j)$, f — собственный вектор оператора S_r^j, т. е. $S_r^j f = \lambda_r f$, и пусть

$$f = \sum_{n\in D(M^{*j})} \alpha_n^j v_n^j.$$

Поскольку выполнено V1, оператор S_r^j действует на v_n^j как оператор умножения на $e^{2\pi i (M^{*-j}n, r)}$. Применив оператор S_r^j к функции f, получим

$$S_r^j f(x) = \sum_{n\in D(M^{*j})} \alpha_n^j S_n^j v_n^j(x) = \sum_{n\in D(M^{*j})} \alpha_n^j e^{2\pi i (M^{*-j}n, r)} v_n^j(x).$$

Принимая во внимание, что функция f — собственный вектор оператора S_r^j, имеем

$$0 = S_r^j f(x) - \lambda_r f(x) = \sum_{n\in D(M^{*j})} \alpha_n^j [e^{2\pi i (M^{*-j}n, r)} - \lambda_r] v_n^j(x).$$

Из линейной независимости v_n^j следует, что $\alpha_n^j [e^{2\pi i (M^{*-j}n, r)} - \lambda_r] = 0$ для всех $n \in D(M^{*j})$. Предположим, что $\alpha_{n_0}^j \neq 0$, $\alpha_{n_1}^j \neq 0$ для двух различных цифр n_0, n_1. Тогда, вычитая, получим

$$(e^{2\pi i (M^{*-j}n_0, r)} - \lambda_r) - (e^{2\pi i (M^{*-j}n_1, r)} - \lambda_r) = 0$$

или $e^{2\pi i (M^{*-j}(n_0-n_1), r)} = 1$. Если теперь f — собственный вектор всех операторов S_r^j, $r \in D(M^j)$, просуммировав эти равенства по всем r, имеем

$$\sum_{r\in D(M^j)} e^{2\pi i (M^{*-j}(n_0-n_1), r)} = m^j. \tag{9.4}$$

С другой стороны, так как n_0 не сравнимо с n_1 по модулю M^{*j}, по лемме 2.2.6

$$\sum_{r\in D(M^{*j})} e^{2\pi i (M^{*-j}(n_0-n_1), r)} = 0, \tag{9.5}$$

что противоречит (9.4). Таким образом α_n^j может быть отлично от нуля только при $n = n_0$, значит, f пропорционально $v_{n_0}^j$. Кроме того, из приведенных рассуждений следует

$$\lambda_r = e^{2\pi i (M^{*-j} n_0, r)}, \quad r \in D(M^j). \tag{9.6}$$

Предположим, что $g = \sum\limits_n \beta_n^j v_n^j$ — другой собственный вектор всех операторов S_r^j, $r \in D(M^j)$. Для него также единственное β_n^j отлично от нуля. Предположим, что $\beta_{n_1}^j \neq 0$, $n_1 \neq n_0$. Тогда аналогично (9.6) имеем $\lambda_r = e^{2\pi i (M^{*-j} n_1, r)}$, $r \in D(M^j)$. Отсюда и из (9.6) получаем $e^{2\pi i (M^{*-j}(n_0 - n_1), r)} = 1$ для любого $r \in D(M^j)$. Просуммировав эти равенства по всем r, получаем (9.4), что противоречит (9.5). Следовательно, g тоже пропорционально $v_{n_0}^j$, и подпространство, состоящее не более, чем из всех таких функций, будет иметь размерность не больше 1. $\Diamond$

Предложение 9.1.10. *Пусть V_j — ПКМА в X. Для того, чтобы последовательность $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset X$ была маситабирующей, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi_j = \sum_{n \in D(M^{*j})} \alpha_n^j v_n^j, \quad \alpha_n^j \neq 0 \quad \forall n \in D(M^{*j}), \tag{9.7}$$

где $\{v_n^j\}_{n \in D(M^{*j})}$ — базис пространства V_j, определенный в лемме 9.1.7.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ маситабирующая последовательность, и пусть α_n^j, $n \in D(M^{*j})$ — коэффициенты разложения φ_j по базису $\{v_n^j\}_{n \in D(M^{*j})}$. Применяя к φ_j оператор сдвига S_r^j, $r \in D(M^j)$, имеем

$$S_r^j \varphi_j = \sum_{n \in D(M^{*j})} \alpha_n^j e^{2\pi i (M^{*-j} n, r)} v_n^j. \tag{9.8}$$

Предположим, что $\alpha_{n_0}^j = 0$ при каком-то n_0, тогда

$$V_j = \operatorname{span}\{S_r^j \varphi_j, \quad r \in D(M^j)\} = \operatorname{span}\{v_n^j, \quad n \in D(M^{*j}),\ n \neq n_0\},$$

что противоречит минимальности базиса $\{v_n^j\}_{n \in D(M^{*j})}$.

Достаточность. Пусть функции φ_j определены по формуле (9.7). Как и выше

$$S_r^j \varphi_j = \sum_{n \in D(M^{*j})} \alpha_n^j e^{2\pi i (M^{*-j} n, r)} v_n^j, \quad r \in D(M^j).$$

Посмотрим на эти равенства как на систему уравнений с неизвестными $\alpha_n^j v_n^j$. По следствию 2.2.7 матрица такой системы унитарна (с точностью до множителя). Так как функции $\alpha_n^j v_n^j$ образуют базис, а базис переходит в базис при унитарном преобразовании, функции $S^j_r\varphi_j$, $r\in D(M^j)$, образуют базис пространства V_j. $\Diamond$

Следствие 9.1.11. *Если* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *масштабирующая последовательность, то* $\omega^j_n\varphi_j=\alpha^j_n v^j_n$, *где* $\alpha^j_n\neq 0$. *В частности, функции* $\{\omega^j_n\varphi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ *образуют базис пространства* V_j.

Утверждение следует из того, что $\dim V_j^{(n)}=1$ ($V_j^{(n)}$ — пространства, определенные в лемме 9.1.7), и (9.2).

Следствие 9.1.12. *В любом ПКМА существует масштабирующая последовательность.*

Для доказательства достаточно положить $\alpha^j_n=1$ в (9.7).

Доказательство теоремы 9.1.4. Необходимость. Свойство Ф1 следует из леммы 9.1.5. Для доказательства Ф2 воспользуемся следствием 9.1.11. Из равенства $\omega^j_n\varphi_j=\alpha^j_n v^j_n$ имеем

$$\widehat{\varphi}_j(k)=\widehat{\omega^j_k\varphi_j}(k)=\alpha^j_n\widehat{v}^j_n(k)$$

для любого $k\equiv n \pmod{M^{*j}}$. Существование k, сравнимого с n по модулю M^{*j}, для которого $\widehat{v}^j_n(k)\neq 0$ следует из того, что $v^j_n\not\equiv 0$ (так как v^j_n — базисный вектор) и $\widehat{v}^j_n(\ell)=0$ для всех $\ell\not\equiv n \pmod{M^{*j}}$. Принимая во внимание, что $\alpha^j_n\neq 0$, получаем $\widehat{\varphi}_j(k)\neq 0$. Свойство Ф3 докажем от противного. Предположим, что $\widehat{\varphi}_j(k)=0$ для всех $j\in\mathbb{Z}_+$. Это означает, что у всех функций φ_j отсутствует гармоника $e^{2\pi i(k,x)}$. Тогда ее нет и во всех сдвигах $S^j_k\varphi_j$, т. е. для любой функции $f\in\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}V_j$ скалярное произведение

$$\langle f, e^{2\pi i(k,\cdot)}\rangle=0,$$

а это противоречит полноте объединения пространств V_j (аксиома MR4). Для доказательства Ф4 возьмем произвольное $n\in\mathbb{Z}^d$. Рассмотрим сначала случай, когда существует такое $k\equiv n \pmod{M^{*j}}$, что $\widehat{\varphi}_{j-1}(k)\neq 0$. По следствию 9.1.11 $\omega^j_n\varphi_j=\alpha^j_n v^j_n$, $\omega^j_n\varphi_{j-1}=\omega^j_n\omega^{j-1}_n\varphi_{j-1}=\alpha^{j-1}_n\omega^j_n v^{j-1}_n$, $\alpha^j_n,\alpha^{j-1}_n\neq 0$. Отсюда, принимая во внимание свойство V2 из леммы 9.1.7, имеем

$$\widehat{\varphi}_{j-1}(\ell)=\frac{\alpha^{j-1}_n}{\alpha^j_n}\,\widehat{\varphi}_j(\ell),$$

для всех $\ell\equiv n \pmod{M^{*j}}$. Осталось положить $\mu^j_n=\alpha^{j-1}_n/\alpha^j_n$. Если $\widehat{\varphi}_{j-1}(k)=0$ для любого $k\equiv n \pmod{M^{*j}}$, то положим $\mu^j_n=0$. Для доказательства Ф5 опять воспользуемся следствием 9.1.11. Для $k\equiv n \pmod{M^{*j}}$ имеем

$$\widehat{\varphi}_{j+1}(M^*k)=\widehat{\omega^{j+1}_{M^*n}\varphi_{j+1}}(M^*k)=\alpha^{j+1}_{M^*n}\widehat{v}^{j+1}_{M^*n}(M^*k),$$

где $\alpha^{j+1}_{M^*n} \neq 0$. С другой стороны, $\widehat{\varphi}_j(n) = \alpha^j_k \widehat{v}^j_n(k)$, $\alpha^j_n \neq 0$. Отсюда, принимая во внимание свойство V3 из леммы 9.1.7, получаем

$$\widehat{\varphi}_{j+1}(M^*k) = \frac{\alpha^{j+1}_{M^*n}}{\alpha^j_n}\,\widehat{\varphi}_j(k).$$

Осталось положить $\gamma^j_n = \alpha^{j+1}_{M^*n}/\alpha^j_n$.

Достаточность. Пусть функции $\varphi_j \in X$, удовлетворяют свойствам Ф1–Ф5. Положим $V_j = \operatorname{span}\{S^j_n\varphi_j,\ \ n \in D(M^j)\}$ и покажем, что $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ — ПКМА в X, а $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ — масштабирующая последовательность. Сначала проверим MR5. Пусть $f \in V_j$, тогда $f = \sum\limits_{k\in D(M^j)} \alpha_k S^j_k\varphi_j$. Применив к этому равенству оператор сдвига S^j_p, $p \in D(M^j)$ имеем,

$$S^j_p f = \sum_{k\in D(M^j)} \alpha_k S^j_p S^j_k \varphi_j. \tag{9.9}$$

Из периодичности функции f следует, что $S^j_p S^j_n f = S^j_r f$, где $r \in D(M^j)$, $r \equiv (p+n) \pmod{M^j}$. Подставляя эти равенства в (9.9), по определению V_j получаем $S^j_p f \in V_j$. Если теперь $S^j_p f \in V_j$, то по уже доказанному $f = S^j_{-p} S^j_p f \in V_j$. Теперь докажем MR3. Аналогично (9.8), принимая во внимание лемму 9.1.6, имеем

$$S^j_r\varphi_j = \sum_{n\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}n,r)}\omega^j_n\varphi_j, \tag{9.10}$$

Отсюда следует $V_j = \operatorname{span}\{\omega^j_n\varphi_j,\ \ n \in D(M^{*j})\}$. Покажем, что функции $\omega^j_n\varphi_j$, $n \in D(M^{*j})$ образуют базис V_j. Предположим, что они линейно зависимы, тогда существуют такие числа α_k, $k \in D(M^{*j})$, $\alpha_{k_0} \neq 0$, что $\sum\limits_{k\in D(M^{*j})} \alpha_k\omega^j_k\varphi_j = 0$. По лемме 9.1.6 отсюда получаем:

$$\widehat{\omega^j_n\varphi_j}(k) = \widehat{\varphi}_j(k) = 0$$

для всех $k \equiv k_0 \pmod{M^{*j}}$, что противоречит Ф2.

Для доказательства MR3 осталось заметить, что количество функций $\omega^j_n\varphi_j$ равно m^j. Поскольку функций $S^j_n\varphi_j, n \in D(M^j)$ тоже ровно m^j штук, мы также установили что $\{S^j_n\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ — базис пространства V_j. Для доказательства MR1 надо проверить, что $f \in V_j$ влечет $f \in V_{j+1}$. Достаточно ограничится рассмотрением базисных функций $\omega^j_n\varphi_j, n \in D(M^{*j})$. Из лемм 9.1.6 и 2.2.3 следует

$$\omega^j_n\varphi_j = \sum_{p\in D(M^*)} \omega^{j+1}_{n+M^{*j}p}\omega^j_n\varphi_j. \tag{9.11}$$

Используя лемму 9.1.6 и Ф4, принимая во внимание M^{*j+1}-периодичность последовательности μ_n^{j+1} по нижнему индексу, имеем

$$\begin{aligned}
&\omega_{n+M^{*j}p}^{j+1}\omega_n^j\varphi_j \sim \\
&\quad\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\omega_n^j\varphi_j}(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p)e^{2\pi i(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p,x)} = \\
&\quad= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}_j(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p)e^{2\pi i(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p,x)} = \\
&\quad= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mu_{M^{*j+1}k+n+M^{*j}p}^{j+1}\widehat{\varphi}_{j+1}(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p) \times \\
&\qquad\qquad\times e^{2\pi i(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p,x)} = \\
&\quad= \mu_{n+M^{*j}p}^{j+1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}_{j+1}(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p)e^{2\pi i(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p,x)}.
\end{aligned}$$

Правая часть этого равенства является рядом Фурье функции

$$\mu_{n+M^{*j}p}^{j+1}\omega_{n+M^{*j}p}^{j+1}\varphi_{j+1}.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_n^j\varphi_j = \sum_{p\in D(M^*)} \mu_{n+M^{*j}p}^{j+1}\omega_{n+M^{*j}p}^{j+1}\varphi_{j+1}. \tag{9.12}$$

Осталось заметить, что $\omega_{n+M^{*j}p}^{j+1}\varphi_{j+1} \in V_{j+1}$ по лемме 9.1.6.

Прежде, чем переходить к доказательству остальных свойств, покажем, что в V_j существует базис удовлетворяющий свойствам леммы 9.1.7. Определим числа α_n^j, $j\in\mathbb{Z}_+$, $n\in D(M^{*j})$ рекурсивно по j: $\alpha_0^0 := 1$;

если $\mu_n^j \neq 0$, то $\alpha_n^j := \alpha_n^{j-1}/\mu_n^j$;

если $\mu_n^j = 0$, $n\equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$, то $\alpha_n^j := \alpha_{M^{*-1}n}^{j-1}\gamma_{M^{*-1}n}^{j-1}$;

если $\mu_n^j = 0$, $n\not\equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$, то $\alpha_n^j := 1$.

Из построения ясно, что $\alpha_n^j \neq 0$. Положим $v_n^j = \omega_n^j\varphi_j/\alpha_n^j$. Как уже показано, $\omega_n^j\varphi_j$ образуют базис пространства V_j, поэтому $\{v_n^j\}_{n\in D(M^{*j})}$ — тоже базис, и нетрудно проверить, что выполнены свойства V1–V3 леммы 9.1.7. Из леммы 9.1.9 следует свойство MR4. Для доказательства MR6 достаточно установить, что оно выполняется для функций $\{v_n^j\}_{n\in D(M^{*j})}$. Используя лемму 9.1.6 и V3, имеем

$$\begin{aligned}
v_n^j(Mx) &\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{v}_n^j(k)e^{2\pi i(k,Mx)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{v}_{M^*n}^{j+1}(M^*k)e^{2\pi i(M^*k,x)} = \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d,\ l\equiv\mathbf{0} \pmod{M^*}} \widehat{v}_{M^*n}^{j+1}(l)e^{2\pi i(l,x)} \sim v_{M^*n}^{j+1}(x).
\end{aligned}$$

Для доказательства MR6(a) осталось заметить, что $v^{j+1}_{M^*n} \in V_{j+1}$. Проверим выполнение MR6(b). Рассмотрим сначала случай $n \equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$. Используя V3, получаем

$$\sum_{k\in D(M)} v^{j+1}_n(M^{-1}x + M^{-1}k) = \sum_{k\in D(M)} v^j_{M^{*-1}n}(x+k) \in V_j.$$

Пусть теперь $n \not\equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$, тогда функция

$$\sum_{k\in D(M)} v^{j+1}_n(M^{-1}x + M^{-1}k)$$

имеет ряд Фурье

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in D(M)} \widehat{v}^{j+1}_n(M^{*j+1}l + n)e^{2\pi i(M^{*j+1}l+n, M^{-1}x+M^{-1}k)} =$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widehat{v}^{j+1}_n(M^{*j+1}l + n)e^{2\pi i(M^{*j+1}l+n, M^{-1}x)} \sum_{k\in D(M)} e^{2\pi i(M^{*j}l+M^{*-1}n, k)},$$

но последняя сумма равна нулю по лемме 2.2.6, т. е. MR6(b) тоже выполнено. Осталось доказать MR2. Поскольку тригонометрические полиномы плотны в X, достаточно проверить, что любой тригонометрический полином можно приблизить функциями из $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} V_j$. Это в свою очередь достаточно проверить для одной гармоники. Положим $f_r(x) = e^{2\pi i(r,x)}$, $r \ne \mathbf{0}$. Из свойства Ф3 следует существование такого j_0, что $\widehat{\varphi}_{j_0}(r) \ne 0$, и $\widehat{\varphi}_j(r) \ne 0$ в силу Ф4, а, следовательно, и $\widehat{v}^j_r(r) \ne 0$ для всех $j \geqslant j_0$. Введем функции h_j для $j \geqslant j_0$:

$$h_j(x) := 1 - \frac{v^j_r(x)}{\widehat{v}^j_r(r)}\, e^{-2\pi i(r,x)},$$

тогда

$$\widehat{h}_j(n) = \delta_{n0} - \frac{\widehat{v}^j_r(r-n)}{\widehat{v}^j_r(r)}, \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Таким образом, $\widehat{h}_j(n)$ отлично от нуля только, когда $n \ne \mathbf{0}$ и $n \equiv \mathbf{0} \pmod{M^{*j}}$, значит, $\widehat{h}_j(n) = 0$ для всех целых n из $M^{*j}(-1,1)^d$. Выделим подпоследовательность вложенных параллелепипедов $M^{*j_k}(-1,1)^d$. Из (2.5) следует, что существует такое n_0, что $\|M^{*-n_0}\| \leqslant 1/2$. Положив $j_{k+1} = j_k + n_0$, будем иметь $\|M^{*j_{k+1}}x\| \geqslant 2\|M^{*j_k}x\|$ для любого $x \in \mathbb{R}^d$. При достаточно больших k в каждый косоугольный параллелепипед $M^{*j_k}(-1,1)^d$ можно вписать куб K_{j_k} с центром в начале координат и ребрами параллельными координатным осям длины a_k так, чтобы a_k были целыми четными числами и монотонно неограниченно возрастали с ростом k. Для удобства дальше будем писать K_j уже для подпоследовательности.

Как было отмечено выше, $\widehat{h}_j(n) = 0$ для всех целых n из K_j, значит частные суммы ряда Фурье по K_j для функции h_j равны нулю, но тогда и соответствующие средние Фейера $\sigma_{K_j}(h_j)$ по тем кубам тоже будут равны нулю. Далее нам понадобится следующее равенство при $j \geqslant j_0$

$$h_j(x) = m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} h_{j_0}(x + M^{-j}n). \tag{9.13}$$

Для доказательства, применяя лемму 9.1.6, видим, что ряд Фурье функции

$$m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} h_{j_0}(x + M^{-j}n) =$$

$$= m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} \left[1 - \frac{v_r^{j_0}(x + M^{-j}n)}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)}\, e^{-2\pi i(r,\ x+M^{-j}n)}\right]$$

равен

$$-\frac{m^{j_0-j}}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} e^{-2\pi i(r,\ x+M^{-j}n)} \times$$

$$\times \sum_{l\in\mathbb{Z}^d,\ l\neq\mathbf{0}} \widehat{v}_r^{j_0}(M^{*j_0}l + r)e^{2\pi i(M^{*j_0}l+r,\ x+M^{-j}n)} =$$

$$= -\frac{m^{j_0-j}}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d,\ l\neq\mathbf{0}} \widehat{v}_r^{j_0}(M^{*j_0}l + r)e^{2\pi i(M^{*j_0}l,\ x)} \times$$

$$\times \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} e^{-2\pi i(M^{*(j_0-j)}l,\ n)}.$$

По лемме 2.2.6 внутренняя сумма в правой части равна m^{j-j_0} при $l \equiv \mathbf{0} \pmod{M^{j-j_0}}$ и равна нулю в противном случае. Это означает, что во внешней сумме отличными от нуля будут только слагаемые с номерами $l \equiv \mathbf{0} \pmod{M^{j-j_0}}$, и ее можно переписать в виде суммы

$$-\frac{m^{j_0-j}}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d,\ k\neq\mathbf{0}} \widehat{v}_r^{j_0}(M^{*j}k + r)e^{2\pi i(M^{*j}k+r,\ x)}e^{-2\pi i(r,\ x)},$$

которая является рядом Фурье функции

$$1 - \frac{v_r^j(x)}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)}\, e^{-2\pi i(r,\ x)}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что по свойству V2 $\widehat{v}_r^{j_0}(r) = \widehat{v}_r^j(r)$ при $j \geqslant j_0$ и $\widehat{v}_r^{j_0}(r) \neq 0$, получаем (9.13). Из этого равенства и линейности средних Фейера следует

$$\|h_j\| = \|h_j - \sigma_{K_j}(h_j)\| =$$

$$= \|m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} [h_{j_0}(x+M^{-j}n) - \sigma_{K_j}(h_{j_0})(x+M^{-j}n)]\| \leqslant$$

$$\leqslant m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} \|h_{j_0}(x+M^{-j}n) - \sigma_{K_j}(h_{j_0})(x+M^{-j}n)\| =$$

$$= m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} \|h_{j_0} - \sigma_{K_j}(h_{j_0})\|.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $j \to \infty$, так как средние Фейера функции из X сходятся к ней по норме (см. приложение A.16). Таким образом, мы установили, что

$$\lim_{j\to\infty} \left\| f_r(x) - \frac{v_r^j(x)}{\widehat{v}_r^j(r)} \right\| = \lim_{j\to\infty} \|h_j(x)\| = 0,$$

т. е. f_r аппроксимируется функциями $\dfrac{v_r^j(x)}{\widehat{v}_r^j(r)} \in V_j$. $\Diamond$

Из доказательства теоремы и из замечания 9.1.8 ясно, что если из определения ПКМА исключить аксиому MR6, то масштабирующая последовательность будет характеризоваться свойствами Ф2–Ф4, т. е. имеет место следующее утверждение.

Теорема 9.1.13. *Пусть* $\varphi_j \in X$, $j \in \mathbb{Z}_+$,

$$V_j := \operatorname{span}\{S_n^j\varphi_j, \quad n \in D(M^j)\}.$$

Для совокупности пространств $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, *аксиомы* MR1–MR5 *определения* 9.1.1 *выполнены тогда и только тогда, когда функции* φ_j *удовлетворяют условиям* Ф2 – Ф4 *теоремы* 9.1.4.

Пример 9.1.14. Положим $\varphi_0 \equiv 1$, и возьмем в качестве φ_1 произвольную функцию из пространства X, у которой $\widehat{\varphi}_1(\mathbf{0}) = 1$, $\widehat{\varphi}_1(k) = 0$ для всех $k \equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$, $k \neq \mathbf{0}$, и $\widehat{\varphi}_1(k) \neq 0$ для всех остальных $k \in \mathbb{Z}^d$. Положим $v_n^1 = \omega_n^j\varphi_1$, $n \in D(M^*)$, и определим функции v_n^j, $j > 1$, $n \in D(M^{*j})$, задав их коэффициенты Фурье по условиям V1–V3 леммы 9.1.7. Наконец, для $j > 1$ положим

$$\varphi_j = \sum_{n\in D(M^{*j})} v_n^j.$$

Из построения ясно, что для последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ выполнены аксиомы Ф1–Ф5 теоремы 9.1.4, т. е. эта последовательность является масштабирующей и порождает ПКМА. $\Diamond$

Пример 9.1.15. Пусть $d = 1$, $M = 2$. Возьмем в качестве членов масштабирующей последовательности ядра Дирихле с минимально возможным симметричным спектром:

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=-2^{j-1}}^{2^{j-1}} e^{2\pi ikx}. \tag{9.14}$$

Нетрудно проверить, что аксиомы Ф1–Ф5 теоремы 9.1.4 выполнены, т. е. эта последовательность является масштабирующей и порождает полиномиальный ПКМА, который является периодическим аналогом КМА Котельникова–Шеннона (порождаемость ПКМА непериодической масштабирующей функцией мы обсудим подробнее в параграфе 9.4). Из результатов параграфа 9.2 будет понятно, что если первое и последнее слагаемые в сумме (9.14) взять с коэффициентом $\sqrt{2}/2$, то базисы $\varphi_j(\,\cdot + 2^{-j}n)$, $n \in \mathbb{Z}$, будут ортонормированными. $\diamondsuit$

9.2. Построение всплеск-функций

В этом параграфе по стандартной схеме мы определим пространства всплесков и всплеск-функции, сдвиги которых образуют базисы в этих пространствах. В ортогональном случае, который может иметь место только при $X = L_2(\mathbb{T}^d)$, пространство всплесков есть ортогональная относительно V_j проекция пространства V_{j+1}. В биортогональном случае мы имеем дело с двумя кратномасштабными анализами, и пространство V_{j+1} одного анализа, проектируется ортогонально относительно соответствующей компоненты $\widetilde{V}_j$ другого анализа. При этом, конечно, должно иметь смысл скалярное умножение функций из V_j на функции из $\widetilde{V}_j$.

Будем рассматривать пары ПКМА с первой компонентой $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ в $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $C(\mathbb{T}^d)$ для $p = \infty$, и второй компонентой $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ в $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, $C(\mathbb{T}^d)$ для $p = 1$. Их будем называть (p, q)-парами.

Предложение 9.2.1. *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют (p, q)-пару, $\varphi \in V_j$, $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{V}_j$. Для того чтобы системы $\{S_n^j \varphi\}_{n \in D(M^j)}$, $\{S_k^j \widetilde{\varphi}\}_{k \in D(M^j)}$ были биортонормированными, необходимо и достаточно, чтобы для всех $r \in \mathbb{Z}^d$ выполнялись равенства*

$$\langle\, \omega_r^j \varphi,\ \omega_r^j \widetilde{\varphi}\,\rangle = m^{-j}. \tag{9.15}$$

Доказательство. По лемме 9.1.6, имеем

$$\langle S_n^j\varphi,\ S_k^j\widetilde{\varphi}\rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_{r\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}r,\ n)}\omega_r^j\varphi,\ \sum_{s\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}s,\ k)}\omega_s^j\widetilde{\varphi}\Big\rangle =$$

$$= \sum_{r\in D(M^{*j})}\sum_{s\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}r,\ n)}e^{-2\pi i(M^{*-j}s,\ k)}\langle \omega_r^j\varphi,\ \omega_s^j\widetilde{\varphi}\rangle .$$

Поскольку спектры функций $\omega_r^j\varphi$, $\omega_s^j\widetilde{\varphi}$ дизъюнктны при $r\ne s$, соответствующие слагаемые в последней сумме равны нулю. Таким образом,

$$\langle S_n^j\varphi,\ S_k^j\widetilde{\varphi}\rangle = \sum_{r\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}r,\ n-k)}c_r, \tag{9.16}$$

где $c_r := \langle \omega_r^j\varphi,\ \omega_r^j\widetilde{\varphi}\rangle$. Отсюда и из леммы 2.2.6 следует достаточность.

Предположим теперь, что $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ и $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ — биортонормированные системы. Рассмотрим равенства (9.16) при какомнибудь фиксированном $n\in D(M^j)$ и всех $k\in D(M^j)$ как систему уравнений относительно неизвестных c_r. В силу следствия 2.2.7 решение $c_p = m^{-j}$, $p\in D(M^{*j})$, единственно. Осталось заметить, что $c_p = c_{p+M^{*j}}$, т. е. $c_p = m^{-j}$ при всех $p\in\mathbb{Z}^d$, что и доказывает необходимость. ◊

Отметим, что в случае $X = L_2(\mathbb{T}^d)$ формула (9.15) дает простой метод ортогонализации произвольной масштабирующей последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$. Из предложения 9.2.1 следует, что для функций

$$\varphi_j^\sharp := m^{-j/2}\sum_{r\in D(M^{*j})}\frac{\omega_r^j\varphi_j}{\|\omega_r^j\varphi_j\|},$$

которые в силу предложения 9.1.10 тоже образуют масштабирующую последовательность, системы $\{S_n^j\varphi_j^\sharp\}_{n\in D(M^j)}$ ортогональны при всех $j\in\mathbb{Z}_+$. Такую масштабирующую последовательность будем называть ортогонализированной.

Следствие 9.2.2. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ *образуют* (p,q)*-пару с масштабирующими последовательностями* $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$, *и пусть* μ_n^j, $\widetilde{\mu}_n^j$ *— соответствующие множители из свойства* Ф4 *теоремы* 9.1.4. *Если системы* $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ *являются биортонормированными, то*

$$\sum_{k\in D(M^*)} \mu^j_{p+M^{*j-1}k}\overline{\widetilde{\mu}^j_{p+M^{*j-1}k}} = m. \tag{9.17}$$

для всех $p\in\mathbb{Z}^d$ *и для всех* $j\in\mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Аналогично равенству (9.12) имеем

$$m^{-j+1} = \langle\, \omega_p^{j-1}\varphi_{j-1},\ \omega_p^{j-1}\widetilde{\varphi}_{j-1}\,\rangle =$$

$$= \Bigg\langle \sum_{k\in D(M^*)} \mu^j_{p+M^{*j-1}k}\omega^j_{p+M^{*j-1}k}\varphi_{j-1},$$

$$\sum_{l\in D(M^*)} \widetilde{\mu}^j_{p+M^{*j-1}l}\omega^j_{p+M^{*j-1}l}\widetilde{\varphi}_{j-1} \Bigg\rangle =$$

$$= \sum_{k\in D(M^*)} \mu^j_{p+M^{*j-1}k}\overline{\widetilde{\mu}^j_{p+M^{*j-1}k}}\langle\, \omega^j_{p+M^{*j-1}k}\varphi_j,\ \omega^j_{p+M^{*j-1}k}\widetilde{\varphi}_j\,\rangle =$$

$$= m^{-j} \sum_{k\in D(M^*)} \mu^j_{p+M^{*j-1}k}\overline{\widetilde{\mu}^j_{p+M^{*j-1}k}},$$

и остается домножить обе части равенства на m^{-j}. $\Diamond$

Приступаем к построению пространств и базисов всплесков. Сначала рассмотрим ортогональный случай. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ — ПКМА в $L_2(\mathbb{T}^d)$ с масштабирующей последовательностью $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, порождающей ортонормированные базисы сдвигов $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ в пространствах V_j. Наша цель — найти в пространстве V_{j+1} функции $\psi^{(\nu)}$, $\nu = 1,\ldots,m-1$, такие, что соответствующие системы $\{S_n^j\psi_j^{(\nu)}\}_{n\in D(M^j)}$ являются ортонормированными, ортогональными пространству V_j и дополняют $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ до базиса пространства V_{j+1}. Для этого нам потребуется достраивать матрицу до унитарной по ее первой строке. Пусть комплексные числа $a_{00},\ldots,a_{0m}$ (первая строка будущей унитарной матрицы A) удовлетворяют условию

$$\sum_{r=1}^{m} |a_{0r}|^2 = 1. \tag{9.18}$$

Если $a_{00} = 1$, то $a_{01},\ldots,a_{0m} = 0$, и в качестве A берем единичную матрицу. Если $a_{00} \neq 1$, то остальные элементы A дают преобразование Холсхолдера:

$$a_{k0} = \overline{a_{0k}}\frac{1-a_{00}}{1-\overline{a_{00}}}, \qquad a_{kl} = \delta_{kl} - \frac{a_{0l}\overline{a_{0k}}}{1-\overline{a_{00}}}, \qquad k,l = 1,\ldots,m-1. \tag{9.19}$$

Зафиксируем $j\in\mathbb{Z}_+$ и $n\in D(M^{*j})$. Пусть s_k, $k = 0,\ \ldots, m-1$, — перенумерованные элементы множества $D(M^*)$. Положим

$$a_{0k} = \mu^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}/\sqrt{m}\,, \quad k = 0,\ldots,m-1,$$

где μ^j_k — множители из свойства Ф4 теоремы 9.1.4. По следствию 9.2.2 эти числа удовлетворяют соотношению (9.18), поэтому мы можем достроить эту строку до унитарной матрицы A. Положим

$\alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k} = \sqrt{m}\, a_{\nu k}$. Если n пробегает все множество $D(M^{*j})$, то по лемме 2.2.3 векторы $n + M^{*j}s_k$, $k = 0, \ldots, m-1$, будут пробегать все $D(M^{*j+1})$, т. е. мы определили числа $\alpha^{\nu,j}_s$ для всех $s \in D(M^{*j+1})$. Распространим эту последовательность (по нижнему индексу) на $\mathbb{Z}^d$, положив $\alpha^{\nu,j}_l = \alpha^{\nu,j}_s$ для всех $l \equiv s \pmod{M^{*j+1}}$. Определим теперь для каждого $\nu = 1, \ldots, m-1$ всплеск-функции $\psi^{(\nu)}$, задав их коэффициенты Фурье по формулам

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}_j(l) = \alpha^{\nu,j}_s \widehat{\varphi}_{j+1}(l), \quad l \in \mathbb{Z}^d,$$

и пространства всплесков

$$W^{(\nu)}_j := \operatorname{span}\{S^j_n \psi^{(\nu)}_j\colon \quad n \in D(M^j)\}.$$

Теорема 9.2.3. *Пусть $\{V_j\}$ — ПКМА в $L^2(\mathbb{T}^d)$ с масштабирующей последовательностью $\{\varphi_j\}$, и пусть $S^j_n\varphi_j$, $n \in D(M^j)$, — ортонормированная система при любом $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$V_{j+1} = V_j \oplus W^{(1)}_j \oplus \ldots \oplus W^{(m-1)}_j, \qquad j \in \mathbb{Z}_+,$$

а система $\{S^j_n \psi^{(\nu)}_j\}_{n \in D(M^j)}$ является ортонормированным базисом пространства $W^{(\nu)}_j$, $\nu = 1, \ldots, m-1$.

Доказательство этой теоремы будет получено как следствие теоремы 9.2.4.

Рассмотрим биортогональный случай. Пусть дана (p,q)-пара, удовлетворяющая условиям следствия 9.2.2. Для построения всплеск-функций нам потребуется достраивать две подходящих строки до двух взаимно обратных матриц. Пусть даны числа $a_{00}, \ldots, a_{0m-1}$ и $\widetilde{a}_{00}, \ldots, \widetilde{a}_{0m-1}$ (соответственно первые строки будущих матриц A и $\widetilde{A}$), такие что

$$\sum_{r=0}^{m-1} a_{0r}\overline{\widetilde{a}_{0r}} = 1. \tag{9.20}$$

Предположим сначала, что $a_{00} = \overline{\widetilde{a}_{00}} \neq 1$. Тогда для $k, l = 1, \ldots, m-1$ остальные элементы определим по формулам

$$a_{l0} = \overline{\widetilde{a}_{0l}}, \qquad a_{lk} = \delta_{lk} - \frac{\overline{\widetilde{a}_{0l}}\, a_{0k}}{1 - a_{00}}, \tag{9.21}$$

$$\widetilde{a}_{l0} = \overline{a_{0l}}, \qquad \widetilde{a}_{lk} = \delta_{lk} - \frac{\overline{a_{0l}}\, \widetilde{a}_{0k}}{1 - \overline{a_{00}}}. \tag{9.22}$$

Нетрудно проверить, что

$$A\widetilde{A}^* = E_m. \tag{9.23}$$

Теперь предположим, что $a_{00}\widetilde{a}_{00} \neq 0$. Рассмотрим числа $a'_{0k} = Ca_{0k}$, $\widetilde{a}'_{0k} = \widetilde{a}_{0k}/\overline{C}$, $k = 0, \ldots, m-1$, выбрав C из условия $a'_{00} = \overline{\widetilde{a}'_{00}} \neq 1$. Это нетрудно сделать, положив $C = \sqrt{\overline{\widetilde{a}_{00}}/a_{00}}$ и взяв при этом то комплексное значение корня, при котором $a'_{00} \neq 1$. Новые строки удовлетворяют всем требованиям предыдущего случая, и мы можем их достроить до матриц A', $\widetilde{A}'$ таких, что $A'\widetilde{A}'^{*} = E_m$. Заменив в этих матрицах первые строки на исходные, получим требуемые матрицы A, $\widetilde{A}$. Наконец предположим, что $a_{00}\widetilde{a}_{00} = 0$. Из (9.20) следует, что существует такое r_0, что $a_{0r_0}\widetilde{a}_{0r_0} \neq 0$. Поменяв местами a_{0r_0} с a_{00} и $\widetilde{a}_{0r_0}$ с $\widetilde{a}_{00}$, сведем к предыдущему случаю. Достроив новые строки до взаимно обратных матриц и поменяв в этих матрицах столбцы с номерами 0 и r_0, получим требуемые матрицы A, $\widetilde{A}$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{Z}_+$ и $n \in D(M^{*j})$. Как и выше, перенумерованные элементы множества $D(M^*)$ обозначим через s_k, $k = 0, \ldots, m-1$. Положим

$$a_{0k} = \mu^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}/\sqrt{m}\,, \quad \widetilde{a}_{0k} = \widetilde{\mu}^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}/\sqrt{m}\,, \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

По следствию 9.2.2 эти числа удовлетворяют (9.20), поэтому мы можем достроить эти строки до матриц A, $\widetilde{A}$, удовлетворяющих (9.23). Положим $\alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k} = \sqrt{m}\,a_{\nu k}$, $\widetilde{\alpha}^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k} = \sqrt{m}\,\widetilde{a}_{\nu k}$. Из (9.23) следует

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k}\overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}} = 0, \quad \sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k}\overline{\mu^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}} = 0, \tag{9.24}$$

для всех $\nu = 1, \ldots, m-1$.

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{l,j}_{n+M^{*j}s_k}\overline{\widetilde{\alpha}^{p,j}_{n+M^{*j}s_k}} = m\delta_{lp} \tag{9.25}$$

для всех $l, p = 1, \ldots, m-1$. Если n пробегает все множество $D(M^{*j})$, то по лемме 2.2.3 векторы $n + M^{*j}s_k$, $k = 0, \ldots, m-1$, будут пробегать множество $D(M^{*j+1})$, т. е. мы определили числа $\alpha^{\nu,j}_s$, $\widetilde{\alpha}^{\nu,j}_s$ для всех $s \in D(M^{*j+1})$. Распространим эти последовательности (по нижнему индексу) на $\mathbb{Z}^d$, положив $\alpha^{\nu,j}_l = \alpha^{\nu,j}_s$, $\widetilde{\alpha}^{\nu,j}_l = \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_s$, для всех $l \equiv s$ $(\mathrm{mod}\ M^{*j+1})$. Определим теперь для каждого $\nu = 1, \ldots, m-1$ всплеск-функции $\psi^{(\nu)}$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)}$ задав их коэффициенты Фурье по формулам

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}_j(l) = \alpha^{\nu,j}_l\widehat{\varphi}_{j+1}(l), \quad \widehat{\widetilde{\psi}}{}^{(\nu)}_j(l) = \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_l\widehat{\widetilde{\varphi}}_{j+1}(l), \quad l \in \mathbb{Z}^d,$$

и пространства всплесков

$$W^{(\nu)}_j := \mathrm{span}\,\{S^j_n\psi^{(\nu)}_j : \quad n \in D(M^j)\},$$
$$\widetilde{W}^{(\nu)}_j := \mathrm{span}\,\{S^j_n\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j : \quad n \in D(M^j)\}.$$

Конечно, приведенный способ достраивания матриц A, $\widetilde{A}$ далеко не единственный, соответственно и наборы всплеск-функций и пространств всплесков определяются не однозначно.

Задача построения всплеск-функций существенно облегчается, когда $m=2$. В этом случае, чтобы построить единственную при каждом j пару всплеск-функций $\psi_j = \psi_j^{(1)}$, $\widetilde{\psi}_j = \widetilde{\psi}_j^{(1)}$ нам надо достроить до унитарной матрицы строку

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mu_n^{j+1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mu_{n+M^{*j}s^*}^{j+1}\right), \quad n \in D(M^{*j}),$$

где s^* — ненулевая цифра матрицы M^*. Используя следствие 2.2.7, нетрудно проверить, что в качестве второй строки такой матрицы можно взять

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2\pi i(M^{-j-1}s,n)}\overline{\widetilde{\mu}_{n+M^{*j}s^*}^{j+1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{2\pi i(M^{-j-1}s,n+M^{*j}s^*)}\overline{\widetilde{\mu}_n^{j+1}}\right),$$

где s — ненулевая цифра матрицы M. Таким образом, коэффициенты Фурье функций $\psi_j, \widetilde{\psi}_j$ могут быть найдены по формулам

$$\widehat{\psi}_j(k) = e^{2\pi i(k,M^{-j-1}s)}\overline{\widetilde{\mu}_{k+M^{*j}s^*}^{j+1}}\widehat{\varphi}_{j+1}(k),$$
$$\widehat{\widetilde{\psi}}_j(k) = e^{2\pi i(k,M^{-j-1}s)}\overline{\mu_{k+M^{*j}s^*}^{j+1}}\widehat{\widetilde{\varphi}}_{j+1}(k).$$

Теорема 9.2.4. *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют (p,q)-пару с масштабирующими последовательностями соответственно $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ такими, что $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{n\in D(M^j)}$ — биортонормированные системы. Тогда*

(i) $W_j^{(\nu)} \subset V_{j+1}$ *для всех* $\nu = 1, \ldots, m-1$;

(ii) *любое* $f \in V_{j+1}$ *можно представить в виде* $f = f_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{m-1} f_\nu$, *где* $f_0 \in V_j$, $f_\nu \in W_j^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$;

(iii) $W_j^{(\nu)} \perp \widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}_j^{(\nu)} \perp V_j$ *для всех* $\nu = 1, \ldots, m-1$;

(iv) $W_j^{(\nu)} \perp \widetilde{W}_j^{(\varkappa)}$ *для всех* $\nu \neq \varkappa$, ν, $\varkappa = 1, \ldots, m-1$.

(v) $(S_n^j\psi_j^{(\nu)},\ S_k^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}) = \delta_{nk}$ *для всех* $\nu = 1,\ldots,m-1$, $k \in D(M^j)$.

Доказательство. При фиксированных n и j из (9.12) имеем

$$\omega_n^j\varphi_j(x) = \sum_{l\in D(M^*)} \mu_{n+M^{*j}l}^{j+1}\omega_{n+M^{*j}l}^{j+1}\varphi_{j+1}(x). \tag{9.26}$$

И, аналогично,

$$\omega_n^j\psi_j^{(\nu)}(x) = \sum_{l\in D(M^*)} \alpha_{n+M^{*j}l}^{\nu,j}\omega_{n+M^{*j}l}^{j+1}\varphi_{j+1}(x), \quad \nu = 1,\ldots,m-1. \tag{9.27}$$

Рассмотрим равенства (9.26), (9.27) как систему m уравнений относительно m неизвестных $\{\omega_{n+M^{*j}l}^{j+1}\varphi_{j+1}\}$, $l \in D(M^*)$. По построению чисел $\{a_{\nu k}\}$ матрица этой системы имеет обратную, значит, ее определитель не равен нулю. Поэтому неизвестные $\omega^{j+1}_{n+M^{*j}l}\varphi_{j+1}$ могут быть выражены через $\omega^j_n\varphi_j \in V_j$ и $\omega^j_n\psi^{(\nu)}_j \in W^{(\nu)}_j$ что влечет (i). С другой стороны, аналогично (9.10) имеем

$$S^j_r\psi^{(\nu)}_j = \sum_{n\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}n,r)}\omega^j_n\psi^{(\nu)}_j, \quad \nu = 1,\ldots,m-1.$$

Отсюда, принимая во внимание следствие 2.2.7, каждое $\omega^j_n\psi^{(\nu)}_j$ можно выразить через $S^j_r\psi^{(\nu)}_j$ $r \in D(M^j)$. Для доказательства (ii) осталось отметить, что $\{\omega^{j+1}_{n+M^{*j}l}\varphi_{j+1}\}$ — базис пространства V_{j+1}. Кроме того, поскольку функции $\omega^j_n\psi^{(\nu)}_j$, $n \in D(M^{*j})$ линейно независимы, из этих рассуждений и свойства MR3 определения 9.1.1 следует, что $\dim W^{(\nu)}_j = m^j$, т. е. обе системы $\{\omega^j_n\psi^{(\nu)}_j\}_{n\in D(M^{*j})}$ и $\{S^j_r\psi^{(\nu)}_j\}_{r\in D(M^j)}$ являются базисами в $W^{(\nu)}_j$. Для доказательства (iii) достаточно проверить, что базисные функции пространства $\widetilde{V}_j$ ортогональны базисным функциям пространств $W^{(\nu)}_j$, $\nu = 1,\ldots,m-1$. Используя равенство (9.24) и предложение 9.2.1, имеем

$$\langle\, \omega^j_n\psi^{(\nu)}_j,\ \omega^j_k\widetilde{\varphi}_j\,\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}l}\omega^{j+1}_{n+M^{*j}l}\varphi_{j+1},\ \sum_{k\in D(M^*)} \widetilde{\mu}^{j+1}_{n+M^{*j}k}\omega^{j+1}_{n+M^{*j}k}\widetilde{\varphi}_{j+1} \right\rangle =$$

$$= \sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}l}\overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{n+M^{*j}l}}\langle\, \omega^{j+1}_{n+M^{*j}l}\varphi_{j+1},\ \omega^{j+1}_{n+M^{*j}l}\widetilde{\varphi}_{j+1}\,\rangle =$$

$$= m^{-j-1}\sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}l}\overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{n+M^{*j}l}} = 0.$$

Аналогично, на основании (9.25)

$$\langle\, \omega^j_n\psi^{(\nu)}_j,\ \omega^j_n\widetilde{\psi}^{(\varkappa)}_j\,\rangle = m^{-j-1}\sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}l}\overline{\widetilde{\alpha}^{\varkappa,j}_{n+M^{*j}l}} = m^{-j}\delta_{\nu\varkappa}.$$

Отсюда сразу следует (iv) и, принимая во внимание предложение 9.2.1, получаем (v). $\Diamond$

9.3. Пакеты всплесков

Основная идея построения ортогональных систем всплесков с помощью кратномаштабного анализа состоит в том, что пространство V_{j+1}, в котором имеется ортонормированный базис сдвигов, раскладывается в прямую сумму пространства V_j и нескольких пространств всплесков $W_j^{(\nu)}$, в которых тоже оказываются ортонормированные базисы сдвигов. Используя эту идею, можно аналогично раскладывать в прямую сумму каждое пространство всплесков, в результате чего мы получим бо́льшее количество всплеск-функций, сдвиги которых образуют ортонормированный базис всего пространства. Такие базисы, бывают полезными, как для теоретических исследований, так и для приложений. В частности, мы их будем использовать в гл. 11.

Мы ограничимся рассмотрением только ортогонального случая и матриц M, для которых $m = 2$. Пусть дан ПКМА в $L_2(\mathbb{T}^d)$, порожденный масштабирующей последовательностью $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, система $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ является ортонормированной, $\{S_n^j\psi_j\}_{n\in D(M^j)}$ — соответствующий ортнормированный базис всплесков в пространстве W_j.

Положим
$$\lambda_r^j = e^{2\pi i(M^{-j}\sigma,r)}\mu^j_{r+M^{*j-1}\sigma^*},$$
где σ,σ^* — ненулевые цифры матриц M, M^* соответственно, а μ_k^j — множители из свойства Ф4 теоремы 9.1.4. В силу следствия 9.2.2 имеют место равенства
$$|\mu_r^j|^2 + |\lambda_r^j|^2 = |\mu_r^j|^2 + |\mu^j_{r+M^{*j-1}\sigma^*}|^2 = |\lambda_r^j|^2 + |\lambda_{r+M^{*j-1}\sigma^*}|^2 = 2, \tag{9.28}$$
и, очевидно,
$$\mu_r^j\overline{\lambda_r^j} + \mu^j_{r+M^{*j-1}\sigma^*}\overline{\lambda^j_{r+M^{*j-1}\sigma^*}} = 0. \tag{9.29}$$
Пусть $r\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, обозначим через Δ_k и Λ_k мультипликаторы, заданные на $L_2(\mathbb{T}^d)$ и определяемые равенствами
$$\widehat{\Delta_k f}(r) = \mu_r^k\widehat{f}(r), \quad \widehat{\Lambda_k f}(r) = \lambda_r^k\widehat{f}(r).$$

Зафиксируем натуральное s. Для целого $j \geqslant s$ и $\nu = (\nu_{j-s+1},\ldots,\nu_j)$, где ν_k принимает значения 0 и 1, положим
$$\psi_j^{(\nu)} = \psi_j^{(\nu,s)} = \prod_{k=j-s+1}^{j}\Delta_k^{\nu_k}\Lambda_k^{1-\nu_k}\psi_j,$$
$$W_j^{(\nu)} = \operatorname{span}\{S_n^{j-s}\psi_j^{(\nu)}, \quad n\in D(M^{*j-s})\}.$$
Поскольку обе последовательности $\{\mu_r^j\}$, $\{\lambda_r^j\}$ M^j-периодичны по нижнему индексу, имеем
$$\omega_r^j\psi_j^{(\nu)}(x) =$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\prod_{k=j-s+1}^{j}(\mu^k_{M^jl+r})^{\nu_k}(\lambda^k_{M^jl+r})^{1-\nu_k}\widehat{\psi}_j(M^jl+r)e^{2\pi i(M^jl+r,x)} =$$
$$= \prod_{k=j-s+1}^{j}(\mu_r^k)^{\nu_k}(\lambda_r^k)^{1-\nu_k}\omega_r^j\psi_j(x). \tag{9.30}$$

Отсюда, рассуждая как при доказательстве теоремы 9.2.4, устанавливаем включение $W_j^{(\nu)} \subset W_j$. Теперь покажем, что $W_j^{(\nu)} \perp W_j^{(\nu')}$ при $\nu \neq \nu'$, и при каждом ν система функций $\{S_{j-s}^n \psi_j^{(\nu)}\}_{n=0}^{2^{j-s}-1}$ является ортонормированным базисом пространства $W_j^{(\nu)}$. В силу предложения 9.2.1 для этого достаточно установить, что

$$\langle \omega_r^{j-s} \psi_j^{(\nu)}, \omega_r^{j-s} \psi_j^{(\nu')} \rangle = 0 \tag{9.31}$$

при $\nu \neq \nu'$ и

$$\|\omega_r^{j-s} \psi_j^{(\nu)}\|^2 = 2^{-j+s}. \tag{9.32}$$

Для доказательства этих равенств проведем индукцию по s. Пусть сначала $s = 1$. Применяя (9.30), имеем

$$\begin{aligned}\langle \omega_r^{j-1} \psi_j^{(\nu)}, \omega_r^{j-1} \psi_j^{(\nu')} \rangle &= \langle \omega_r^j \psi_j^{(\nu)}, \omega_r^j \psi_j^{(\nu')} \rangle + \langle \omega_{r'}^j \psi_j^{(\nu)}, \omega_{r'}^j \psi_j^{(\nu')} \rangle = \\ &= (\mu_r^j)^{\nu_j} (\overline{\mu_r^j})^{\nu'_j} (\lambda_r^j)^{1-\nu_j} (\overline{\lambda_r^j})^{1-\nu'_j} \|\omega_r^j \psi_j\|^2 + \\ &\quad + (\mu_{r'}^j)^{\nu_j} (\overline{\mu_{r'}})^{\nu'_j} (\lambda_{r'}^j)^{1-\nu_j} (\overline{\lambda_{r'}})^{1-\nu'_j} \|\omega_{r'}^j \psi_j\|^2,\end{aligned}$$

где $r' = M^{*j-1}\sigma^* + r$. Отсюда, учитывая, что $\|\omega_k^j \psi_j\|^2 = 2^{-j}$ и применяя равенства (9.28), (9.29), получаем (9.31), (9.32) для $s = 1$. Теперь предположим, что равенства (9.31), (9.32) верны для всех $s < s_0$. Пусть $\nu = (\nu_{j-s_0+1}, \ldots, \nu_j)$, $\nu' = (\nu'_{j-s_0+1}, \ldots, \nu'_j)$, положим $\gamma = (\nu_{j-s_0+2}, \ldots, \nu_j)$, $\gamma' = (\nu'_{j-s_0+2}, \ldots, \nu'_j)$, $\varkappa = \nu_{j-s_0+1}$, $\varkappa' = \nu'_{j-s_0+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}&\langle \omega_r^{j-s_0} \psi_j^{(\nu)}, \omega_r^{j-s_0} \psi_j^{(\nu')} \rangle = \\ &\quad = \langle \omega_r^{j-s_0+1} \psi_j^{(\nu)}, \omega_r^{j-s_0+1} \psi_j^{(\nu')} \rangle + \langle \omega_{r'}^{j-s_0+1} \psi_j^{(\nu)}, \omega_{r'}^{j-s_0+1} \psi_j^{(\nu')} \rangle = \\ &\quad = (\mu_r^{j-s_0+1})^{\varkappa} (\overline{\mu_r^{j-s_0+1}})^{\varkappa'} (\lambda_r^{j-s_0+1})^{1-\varkappa} (\overline{\lambda_r^{j-s_0+1}})^{1-\varkappa'} \times \\ &\qquad \times \langle \omega_r^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma)}, \omega_r^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma')} \rangle + \\ &\quad + (\mu_{r'}^{j-s_0+1})^{\varkappa} (\overline{\mu_{r'}^{j-s_0+1}})^{\varkappa'} (\lambda_{r'}^{j-s_0+1})^{1-\varkappa} (\overline{\lambda_{r'}^{j-s_0+1}})^{1-\varkappa'} \times \\ &\qquad \times \langle \omega_{r'}^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma)}, \omega_{r'}^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma')} \rangle,\end{aligned}$$

где $r' = M^{*j-s_0}\sigma^* + r$. По индукционному предположению

$$\langle \omega_k^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma)}, \omega_k^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma')} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad \gamma \neq \gamma', \\ 2^{j-s_0+1}, & \text{при} \quad \gamma = \gamma'. \end{cases}$$

Отсюда, применяя равенства (9.28), (9.29), получаем (9.31), (9.32) для $s = s_0$.

Таким образом, доказано, что

$$W_j = \bigoplus_{\nu} W_j^{(\nu)}, \tag{9.33}$$

и система функций $\{S_n^{j-s}\psi_j^{(\nu)}\}_{n,\nu}$ является ортонормированным базисом пространства W_j. Эта система называется *пакетом всплесков*.

9.4. Порождающая функция

Широкий класс ПКМА можно построить по следующей схеме: масштабирующая последовательность получается периодизацией некоторой функции φ, заданной на $\mathbb{R}^d$, по формулам

$$\varphi_j(x) = m^j \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi\left(M^j x + M^j k\right), \tag{9.34}$$

где сходимость ряда может пониматься в различных смыслах. Будем говорить, что такой ПКМА *порожден функцией* φ. Пусть для $\varphi \in$ $\in L_2(\mathbb{R}^d)$ выполнены условия:

(i) функция $\widehat{\varphi}$ непрерывна в нуле и $\widehat{\varphi}(\mathbf{0}) \ne 0$;

(ii) существуют такие положительные постоянные A, B, что

$$A \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\xi+m)|^2 < B \quad \text{для п. в. } \ \xi\in\mathbb{R}^d;$$

(iii) существует такая функция $m_0 \in L_2(\mathbb{T}^d)$, что

$$\widehat{\varphi}(M^*\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{для п. в. } \ \xi\in\mathbb{R}^d.$$

Из результатов параграфа 2.3 следует, что φ является масштабурующей функцией для некоторого КМА в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если дополнительно предположить, что φ достаточно быстро убывает на бесконечности, например,

$$\varphi(x) = O\Big(\frac{1}{(1+|x|)^{d+\varepsilon}}\Big), \quad \varepsilon > 0,$$

то $\varphi_j \in L_2(\mathbb{T}^d)$, и по формуле суммирования Пуассона

$$\varphi_j(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(M^{*-j}m)e^{2\pi i(m,x)}. \tag{9.35}$$

Нетрудно проверить, что функции φ_j удовлетворяют условиям Ф1–Ф5 теоремы 9.1.4.

Обсудим вопрос порождаемости ПКМА непериодической функцией в произвольном пространстве X. Ограничимся изучением случая $d = 1$, $M = 2$. Ряд в правой части (9.34) сходится в $L(\mathbb{R})$, и его сумма φ_j принадлежит пространству $L(\mathbb{T})$ для любой функции $\varphi \in L(\mathbb{R})$, но равенство (9.35) выполнено почти везде не всегда, для этого надо потребовать, чтобы сумма ряда в правой части (9.35) принадлежала пространству $L(\mathbb{T})$ (тем более достаточно предположить, что эта сумма принадлежит X). При выполнении этого требования порождаемость ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ функцией φ можно перефразировать так: функции

$$\varphi_j(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}k)e^{2\pi ikt}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.36}$$

образуют масштабирующую последовательность для $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$. Отметим, что условие $\varphi_j \in X$ равносильно тому, что $\omega_n^j\varphi_j \in X$, $n = 0, \ldots, 2^j - 1$. Конечно не всякая функция φ, для которой выполнены эти требования, породит ПКМА, нужно предположить еще что-то типа условий (i)–(iii).

Предложение 9.4.1. *Пусть функция $\varphi \in L(\mathbb{R})$ обладает следующими свойствами*:

G1. $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$;

G2. *для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ и $n = 0, \ldots, 2^j - 1$ функции*

$$u_n^j(t) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(m + n2^{-j})e^{2\pi i(2^jm+n)t}$$

принадлежат пространству X, и $A \leqslant \|u_n^j\| \leqslant B$, где A, B — положительные постоянные;

G3. *существует 1-периодическая ограниченная функция m_0, такая что $\widehat{\varphi}(2x) = m_0(x)\widehat{\varphi}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Тогда φ порождает ПКМА в X.

Доказательство. Проверим, что функции φ_j, определенные равенством (9.36), удовлетворяют условиям Ф1–Ф5 теоремы 9.1.4. Для доказательства Ф1 заметим, что по G3 и G1, $m_0(n) = m_0(0) = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому, если $\widehat{\varphi}_0(k) = \widehat{\varphi}(k) \neq 0$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, то $\widehat{\varphi}_0(2^\ell k) = \widehat{\varphi}_0(k) \neq 0$ для всех $\ell \in \mathbb{Z}_+$, что противоречит включению $\varphi_0 \in X$, которое следует из G2. Свойства Ф2–Ф4 очевидны, при этом $\mu_k^j = m_0(2^{-j}k)$. Чтобы убедиться в справедливости Ф5, достаточно положить $\gamma_k^j = 1$. $\Diamond$

Замечание 9.4.2. Масштабирующая последовательность $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, построенная в предложении 9.4.1, обладает свойствами:

g1. $\gamma_k^j = 1$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, где γ_k^j множители из условия Ф5 теоремы 9.1.4;

g2. Существуют постоянные $A, B > 0$ такие, что $A \leqslant \|\omega_n^j\varphi_j\| \leqslant B$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, $n = 0, \ldots 2^j - 1$.

Отметим, что в каждом ПКМА существуют масштабирующие последовательности, удовлетворяющие g1, g2. Например, можно взять

$$\varphi_j(x) = \sum_{n=0}^{2^j-1} (L_n^jv_n^j)^{-1}v_n^j,$$

где v_n^j — функции из леммы 9.1.7, L_n^j — линейные функционалы на X такие, что

$$B^{-1}\|f\| \leqslant |L_n^j f| \leqslant A^{-1}\|f\|$$

для всех $f \in X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n = 0, \ldots 2^j - 1$ и $L_{2n}^{j+1}(v_{2n}^{j+1}) = L_n^j(v_n^j)$. В частности, мы можем положить $L_n^j f = \|f\|$. Такие функции φ_j будет образовывать масштабирующую последовательность в силу предложения 9.1.10.

Теорема 9.4.3. *Для того чтобы ПКМА в X был порожден некоторой функцией $\varphi \in L(\mathbb{R})$, обладающей свойствами* G1–G3, *необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала масштабирующая последовательность $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, удовлетворяющая* g1, g2, *такая что*

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{j\geqslant \log 2|x|} \int\limits_{2^{-j}|x|\leqslant|t|\leqslant 1/2} |\varphi_j(t)|\,dt = 0. \tag{9.37}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ — ПКМА, порожденный функцией $\varphi \in L(\mathbb{R})$, обладающей свойствами G1–G3. Тогда по предложению 9.4.1 и замечанию 9.4.2 функции φ_j, определенные соотношением (9.36), образуют масштабирующую последовательность, для которой выполнены g1, g2. Рассмотрим функцию $\sum\limits_{\ell\in\mathbb{Z}} \varphi(x + 2^j\ell\,)$ (здесь и далее под сходимостью ряда мы понимаем сходимость по норме в $L(\mathbb{R})$), которая является 2^j-периодической, и по формуле суммирования Пуассона ее k-й коэффициент Фурье равен $2^{-j}\widehat{\varphi}(2^{-j}k)$. Следовательно,

$$\varphi_j(2^{-j}x) = 2^j \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \varphi(x + 2^j\ell\,)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Положим

$$g_j(x) = 2^{-j}\varphi_j\left(2^{-j}x\right)\Big|_{[-2^{j-1},2^{j-1}]}, \tag{9.38}$$

тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi - g_j| \leqslant \int\limits_{|t|\geqslant 2^{j-1}} |\varphi(t)|\,dt + \sum_{\ell\neq 0} \int\limits_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}} |\varphi(t + 2^j\ell\,)|\,dt = 2 \int\limits_{|t|\geqslant 2^{j-1}} |\varphi(t)|\,dt.$$

С другой стороны,

$$\sup_j \int\limits_{|t|\geqslant|x|} |g_j(t)|\,dt = \sup_{j\geqslant \log_2|2x|} \int\limits_{|t|\geqslant|x|} |g_j(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{j\geqslant \log_2|2x|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g_j(t) - \varphi(t)|\,dt + \int\limits_{|t|\geqslant|x|} |\varphi(t)|\,dt,$$

но для $j \geqslant \log_2|2x|$

$$\int\limits_{|t|\geqslant 2^{j-1}} |\varphi(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{|t|\geqslant |x|} |\varphi(t)|\,dt \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом, доказано соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{Z}_+}\int\limits_{|t|\geqslant|x|}|g_j(t)|\,dt = 0,$$

которое, очевидно, влечет (9.37).

Достаточность. Предположим, что в некотором ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ в X существует масштабирующая последовательность $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, удовлетворяющая g1, g2 и (9.37). Покажем, что последовательность функций g_j, определенных равенством (9.38), является фундаментальной в пространстве $L(\mathbb{R})$. Возьмем $j_1 < j_2$ и рассмотрим 2^{j_1}-периодическую функцию $\sum\limits_{\ell\in\mathbb{Z}} g_{j_2}(x+2^{j_1}\ell\,)$. Нетрудно видеть, что k-й коэффициент Фурье этой функции равен $2^{-j_1}\widehat{\varphi}_{j_2}(2^{j_2-j_1}k)$. Но согласно g1, $\widehat{\varphi}_{j_2}(2^{j_2-j_1}k) = \widehat{\varphi}_{j_1}(k)$ для всех $k\in\mathbb{Z}$. Следовательно,

$$g_{j_1}(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} g_{j_2}(x+2^{j_1}\ell\,)\Big|_{[-2^{j_1-1},2^{j_1-1}]}$$

для почти всех $x\in\mathbb{R}$. Используя эти равенства и (9.37), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g_{j_1}-g_{j_2}| \leqslant \int\limits_{|t|\geqslant 2^{j_1-1}}|g_{j_2}(t)|\,dt + \sum_{\ell\neq 0}\int\limits_{-2^{j_1-1}}^{2^{j_1-1}}|g_{j_2}(t+2^{j_1}\ell)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_j \int\limits_{|t|\geqslant 2^{j_1}-1}|g_j(t)|\,dt = 2\sup_{j\geqslant j_1}\int\limits_{2^{j_1-j-1}\leqslant|t|\leqslant 1/2}|\varphi_j(t)|\,dt \underset{j_1\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом, $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$ сходится в $L(\mathbb{R})$ к некоторой функции $\varphi \in\in L(\mathbb{R})$. Покажем, что φ обладает свойствами G1–G3 и порождает ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$. Положим

$$\phi_j(x) = 2^j\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\varphi(2^j(x+\ell\,)).$$

Из сходимости g_j к φ в пространстве $L(\mathbb{R})$ имеем

$$\widehat{\phi}_{j_0}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-2\pi i2^{-j_0}kt}\,dt =$$

$$= \lim_{j\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_j(t)e^{-2\pi i2^{-j_0}kt}\,dt = \lim_{j\to\infty}\widehat{\varphi}_j(2^{j-j_0}k).$$

Из g1 следует
$$\widehat{\varphi}_j(2^{-j+j_0}k) = \widehat{\varphi}_{j_0}(k).$$

Таким образом, функции φ_j и ϕ_j имеют одни и те же наборы коэффициентов Фурье, и по формуле суммирования Пуассона
$$\widehat{\varphi}_j(k) = \widehat{\phi}_j(k) = \widehat{\varphi}(2^{-j}k) \tag{9.39}$$
для всех $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, значит,
$$\varphi_j(x) = \phi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}k)e^{2\pi ikx} \tag{9.40}$$
для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Это означает, что $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ порождено функцией φ. Свойство $G2$, очевидно, выполнено ввиду g2. В силу (9.39) и Φ1 для всех $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$,
$$\widehat{\varphi}(k) = \widehat{\varphi}_0(k) = 0. \tag{9.41}$$

Отсюда, принимая во внимание Φ2, получаем $G1$. Чтобы проверить $G3$, нужно определить функцию m_0. Сначала зададим и исследуем ее на множестве $Q = \{x = 2^{-j}r,\ j, r \in \mathbb{Z}, j \geqslant 0,\ \widehat{\varphi}(x) \neq 0\}$. Положим $m_0(x) = \widehat{\varphi}(2x)/\widehat{\varphi}(x)$ для $x \in Q$, и покажем, что m_0 — 1-периодическая ограниченная функция. Пусть $x = 2^{-j}r \in Q$, $r = 2^j m + n$, $n = 0, \ldots$ $\ldots, 2^j - 1$, тогда по следствию 9.1.11 и (9.39),
$$|m_0(x)| = \frac{|\widehat{v}^j_{n_1}(2^j m_1 + n_1)|\|v^j_n\|\|u^j_{n_1}\|}{|\widehat{v}^j_n(2^j m + n)|\|u^j_n\|\|v^j_{n_1}\|}, \tag{9.42}$$
где $m_1 = 2m$, $n_1 = 2n$, если $n < 2^{j-1}$ и $m_1 = 2m + 1$, $n_1 = 2n - 2^j$, если $n \geqslant 2^{j-1}$, v^j_n, u^j_n — соответственно функции из леммы 9.1.7 и условия G2. Мы имеем: либо $\widehat{v}^j_{n_1}(2^j m_1 + n_1) \neq 0$, и тогда по условиям V2, V3 леммы 9.1.7
$$\widehat{v}^j_{n_1}(2^j m_1 + n_1) = \widehat{v}^{j+1}_{2n}(2^j m_1 + n_1) = \widehat{v}^j_n(2^j m + n),$$
либо $\widehat{v}^j_{n_1}(2^j m_1 + n_1) = 0$, и тогда по V3 имеем $\widehat{v}^j_{n_1}(2^{j+1}\ell + 2^j m_1 + n_1) =$ $= 0$ для всех $\ell \in \mathbb{Z}$. Таким образом, правая часть (9.42) не зависит от m. Следовательно,
$$m_0(x) = m_0(2^{-j}(2^j m + n)) = m_0(2^{-j}(2^j(m + 1) + n)) = m_0(x + 1), \tag{9.43}$$
как только $x, x + 1 \in Q$, т. е. m_0 — 1-периодическая функция на Q. Теперь докажем, что
$$|m_0(x)| \leqslant B/A \tag{9.44}$$
для всех $x \in Q$. Если $\widehat{v}^j_{n_1}(2^j m_1 + n_1) = 0$, то $m_0(x) = 0$, в этом случае (9.44) тривиально. Предположим, что $\widehat{v}^j_{n_1}(2^j m_1 + n_1) \neq 0$, тогда, используя те же рассуждения, что и выше, из свойства G2 получаем
$$|m_0(x)| = \frac{\|v^j_n\|\|u^j_{n_1}\|}{\|u^j_n\|\|v^j_{n_1}\|} \leqslant \frac{B\|v^j_n\|}{A\|v^j_{n_1}\|}.$$

Из свойства V3 леммы 9.1.7 следует $v_n^j(x) = v_{2n}^{j+1}(x/2)$, что влечет $\|v_n^j\| = \|v_{2n}^{j+1}\|$, а используя V2, имеем

$$v_{n_1}^j(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_{n_1}^j(2^j\ell + 2n)e^{2\pi i(2^j\ell+2n)x} =$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_{2n}^{j+1}(2^{j+1}\ell + 2n)e^{2\pi i(2^{j+1}\ell+2n)x} +$$

$$+ \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_{n_1}^j(2^j(2\ell+1) + 2n)e^{2\pi i(2^j(2\ell+1)+2n)x} = v_{2n}^{j+1}(x) + v(x).$$

Возьмем $h \in X^*$ такое, что $\|h\|_{X^*} \leqslant 1$,

$$\|v_{2n}^{j+1}\| = \left|\int_0^1 v_{2n}^{j+1}h\right|$$

и положим $h_1 = \omega_{2n}^{j+1}h$. Из определения операторов ω_n^j следует, что $\|h_1\|_{X^*} \leqslant \|h\|_{X^*}$, а, значит, $\|h_1\|_{X^*} \leqslant 1$. Спектры функций $h - h_1$ и v_{2n}^{j+1} дизъюнктны, поэтому

$$\|v_{2n}^{j+1}\| = \int_0^1 v_{2n}^{j+1}h_1.$$

С другой стороны, спектры функций v и h_1 дизъюнктны, следовательно,

$$\|v_{n_1}^j\| \geqslant \left|\int_0^1 v_{n_1}^j h_1\right| = \left|\int_0^1 (v_{2n}^{j+1} + v)h_1\right| = \left|\int_0^1 v_{2n}^{j+1}h_1\right| = \|v_{2n}^{j+1}\| = \|v_n^j\|,$$

что и требовалось для доказательства (9.44).

Если $\widehat{\varphi}(x_0) = 0$ и $x_0 \in \overline{Q}$, то $\widehat{\varphi}(2x_0) = 0$ ввиду непрерывности $\widehat{\varphi}$ и (9.44). Пусть $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \overline{Q}$, тогда существует интервал $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такой, что $\widehat{\varphi}(x) = 0$ для всех $x \in I$. Но, если $\widehat{\varphi}(x) = 0$, $x = 2^{-j}r$, $j, r \in \mathbb{Z}$, $j \geqslant 0$, то по Ф4, Ф5 и (9.39) имеем $\widehat{\varphi}(2x) = 0$. Отсюда $\widehat{\varphi}(x) = 0$ для всех $x \in (2x_0 - 2\delta, 2x_0 + 2\delta)$, в частности, $\widehat{\varphi}(2x_0) = 0$. Принимая во внимание, что $x_0 \in \overline{Q}$ как только $\widehat{\varphi}(x_0) \neq 0$, в силу непрерывности $\widehat{\varphi}$. мы можем определить m_0 на $\mathbb{R} \setminus Q$ следующим способом: если существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $\widehat{\varphi}(x+k) \neq 0$, то

$$m_0(x) = \lim_{t \in Q,\, t \to x+k} m_0(t)$$

в противном случае $m_0(x) = 1$. Из приведенных выше рассуждений ясно, что мы построили 1-периодическую функцию, и (9.44) выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

П р и м е р 9.4.4. Пусть 1-периодические функции φ_j определены на $[0,1)$ равенствами

$$\varphi_j = 2^j \chi_{[0,2^{-j}]}.$$

Эти функции образуют масштабирующую последовательность, удовлетворяющую g1, g2, и для любого $x > 1$

$$\int\limits_{2^{-j}x \leqslant |t| \leqslant 1/2} |\varphi_j(t)|\, dt = 0,$$

т. е. выполнено условие (9.37). Нетрудно догадаться, что порождающей является масштабирующая функция для КМА Хаара.

Мы исследовали условия, при которых ПКМА в X порождается некоторой суммируемой функцией. Однако ПКМА может быть порожден и не суммируемой функцией. Например, функция

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \tag{9.45}$$

является масштабирующей для КМА Котельникова–Шеннона, и, хотя $\varphi \notin L(\mathbb{R})$, ее периодизация возможна, так как ряд (9.34) сходится в смысле главного значения. В результате такой периодизации мы получим ПКМА, описанный в примере 9.1.15. Однако не любой ПКМА порожден и в таком смысле.

П р и м е р 9.4.5. Построим ПКМА, в котором ортогонализированная масштабирующая последовательнось не может быть получена периодизацией какой-либо функции φ в смысле главного значения.

Определим ПКМА, задав базисы $\{v_n^j\}_{n=0}^{2^j-1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, из леммы 9.1.7. Положим

$$v_1^1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \left(e^{2\pi i(2k+1)x} + e^{-2\pi i(2k+1)x}\right),$$

где $q \in (0,1)$. Поскольку у v_1^1 все нечетные коэффициенты Фурье отличны от нуля, то тем самым однозначно определены и все функции v_n^j. Ортогонализированная масштабирующая последовательность, удовлетворяющая условиям g1, g2, имеет вид

$$\varphi_j := \sum_{n=-2^{j-1}}^{2^{j-1}} \frac{v_n^j}{\|v_n^j\|}.$$

Предположим, что существует такая функция ϕ, заданная на $\mathbb{R}$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\phi(x+k) + \phi(x-k)\right)$$

абсолютно сходится, и

$$\varphi_j(x) = 2^j \left(\phi(2^j x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\phi(2^j x + 2^j k) + \phi(2^j x - 2^j k) \right) \right)$$

для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функции g_j, определенные равенством 9.38, сходятся к ϕ на $\mathbb{R}$.

Пусть n — нечетное, $0 < n < 2^j$. Непосредственный счет дает

$$v_n^j(x) = q^{\frac{-n-1}{2}} e^{2\pi i n x} \frac{q^{2^{j-1}} e^{-2\pi i 2^j x}}{1 - q^{2^{j-1}} e^{-2\pi i 2^j x}} + q^{\frac{n-1}{2}} e^{2\pi i n x} \frac{1}{1 - q^{2^{j-1}} e^{2\pi i 2^j x}},$$

откуда, принимая во внимание равенство $v_n^j = v_{n+2^j}^j$, видим, что при нечетных n, $|n| < 2^{j-1}$,

$$v_n^j(x) = q^{\frac{|n|-1}{2}} e^{2\pi i n x} + \alpha_{jn}(x),$$

где последовательность $\alpha_{jn}(x)$ стремится к нулю при $j \to \infty$ равномерно по всем x и n. Отсюда ясно, что

$$\frac{v_n^j}{\|v_n^j\|} = e^{2\pi i n x} + \beta_{jn}(x),$$

где последовательность $\beta_{jn}(x)$ стремится к нулю при $j \to \infty$ равномерно по всем x и n, причем в силу свойства V3 леммы 9.1.7 эти соотношения будут выполняться и для четных n, но тогда

$$\lim_{j\to\infty} g_j(x) = \lim_{j\to\infty} 2^{-j} \sum_{n=-2^{j-1}}^{2^{j-1}-1} \frac{v_n^j(2^{-j}x)}{\|v_n^j\|} = \\ = \lim_{j\to\infty} \frac{e^{-\pi i 2^{-j} x} \sin \pi x}{2^j \sin \pi 2^{-j} x} = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \varphi(x).$$

Однако, как мы знаем, функция φ порождает ПКМА, отличный от рассматриваемого.

9.5. Система Котельникова–Шеннона

Построим пример ПКМА в $L^2(\mathbb{T}^2)$ с масштабирующей последовательностью, состоящей из тригонометрических полиномов с минимально возможными симметричными спектрами. В случае $d = 1$, $M = 2$ таким свойством будет обладать ПКМА, полученный периодизацией КМА Котельникова–Шеннона, для которого, как уже отвечалось в параграфе 9.4, последовательность ядер Дирихле является масштабирующей, а функция (9.45) — порождающей.

В качестве коэффициента растяжения возьмем $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Отметим, что $m = 4$, $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{*-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, и зафиксируем множество $D(M^*)$, состоящее из векторов

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; s_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть Ω_j обозначает параллелограмм $M^{*j}[-1,1]^2$, из которого исключены вершины. Положим $a_j := M^{*j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_j := M^{*j}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, и определим функции φ_j, задав их коэффициенты Фурье: $\widehat{\varphi}_0(k) := \delta_{k0}$ для всех $k \in \mathbb{Z}^2$, для $j \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\varphi}_j(k) := \begin{cases} 2^{-j}, & k \in \Omega_{j-1} \setminus \{a_{j-1}, b_{j-1}\}, \\ 2^{-j-1/2}, & k = a_{j-1} \text{ или } k = b_{j-1}, \\ 0, & k \notin \Omega_{j-1}. \end{cases} \tag{9.46}$$

Для того чтобы показать, что эта последовательность является масштабирующей, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.5.1. *Количество целых точек в Ω_j равно $4^{j+1} + 1$ и все целые точки из Ω_j за исключением точки a_j принадлежат разным классам смежности матрицы M^{*j+1}, а точка a_j сравнима с b_j по модулю M^{*j+1}.*

Доказательство. Покажем сначала, что на средних линиях Ω_j нет целых точек, за исключением граничных точек и нуля. Средние линии Ω_j — это отрезки, соединяющие точку $M^{*j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ с $M^{*j}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и точку $M^{*j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ с $M^{*j}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Эти отрезки проходят через начало координат и симметричны относительно него, поэтому достаточно доказать утверждение леммы для половин отрезков. Докажем для одного полуотрезка (для второго аналогично), т.е. покажем, что на интервале $\left(\mathbf{0}, M^{*j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ нет целых точек. Положим $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} := M^{*j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^*\begin{pmatrix} x_{j-1} \\ y_{j-1} \end{pmatrix}$. Для всех $j > 0$ первая координата этого вектора будет четной, а вторая — нечетной, значит, x_j и y_j не могут иметь общих делителей, кратных 2. Из формул

$$x_{j-1} = \frac{x_j - 2y_j}{4}, \quad y_{j-1} = \frac{x_j + 2y_j}{4}$$

видно, что если бы x_j и y_j имели общий делитель не кратный 2, то x_{j-1} и y_{j-1} имели бы тот же общий делитель. Но $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$ не имеют общих делителей, значит, по индукции, общих делителей нет ни у x_j, ни y_j для любого $j \in \mathbb{Z}_+$. Зафиксируем j и запишем отрезок $\left(\mathbf{0},\ M^{*j}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = tx_j, \\ y = ty_j, \end{cases} \quad t \in (0, 1).$$

Предположим, что существует целая точка $(x^0,\ y^0)$, принадлежащая этому отрезку, т. е. существует $t^0 \in (0, 1)$ такое, что $x^0 = t^0 x_j$, $y^0 = t^0 y_j$, причем $x^0,\ y^0,\ x_j,\ y_j \in \mathbb{Z}$. Значит, t^0 не может быть иррациональным числом. Но рациональным t^0 тоже не может быть, так как, если предположить, что $t^0 = p/q$, то x_j и y_j делятся на q, т. е. у них есть общий делитель, что невозможно.

Отметим, что множество целых точек, попавших в $M^{*j}[0,1)^2$, можно взять в качестве $D(M^{*j})$, так как, рассмотрев любые два элемента из $M^{*j}[0,1)^2 \cap \mathbb{Z}^2$, их разность $M^{*j}r_1 - M^{*j}r_2$, где $r_1,\quad r_2 \in [0,1)^2$, может быть сравнима с нулем по модулю M^{*j} только если r_1 и r_2 совпадают. А количество целых векторов, попавших в $M^{*j}[0,1)^2$, равно m^j, т. е. столько, сколько и в множестве $D(M^{*j})$. Так как на средних линиях Ω_j нет целых точек, за исключением граничных и нуля, значит, число целых точек в Ω_j складывается из целых внутренних точек множества $M^{*j}[0,1)^2$ (а их $4^j - 1$, так как из множества $M^{*j}[0,1)^2$ исключена одна цифра, соответствующая нулевому классу смежности), взятых по 4 раза, нуля и граничных. Количество граничных точек равно 4, потому что границы средних линий — целые, вершины не входят в Ω_j, а других целых на границе нет, так как каждое ребро отличается от соответствующей средней линией сдвигом на целый вектор. Таким образом, количество целых точек, попавших в Ω_j, равно $4(4^j - 1) + 1 + 4 = 4^{j+1} + 1$.

Проверим, что все точки из Ω_j, кроме a_j, принадлежат разным классам смежности матрицы M^{*j+1}, и $a_j \equiv b_j \pmod{M^{*j+1}}$. По лемме 2.2.5 множество $\bigcup\limits_{k=0}^{3}\left(M^{*-1}[0,1)^2 + M^{*-1}s_k\right)$ сравнимо с множеством $[0,1)^2$ по модулю $\mathbb{Z}^2$. Но, поскольку

$$\bigcup_{k=0}^{3}\left(M^{*-1}[0,1)^2 + M^{*-1}s_k\right) = \bigcup_{k=0}^{3}\left(M^{*-1}\left([0,1)^2 + s_k\right)\right) = \\ = M^{*-1}[-1,1)^2,$$

получаем, что $M^{*-1}[-1,1)^2$ сравнимо с $[0,1)^2$ по модулю $\mathbb{Z}^2$. Зафиксируем $j \in \mathbb{Z}_+$ и, подействовав на каждое множество оператором M^{*j+1}, устанавливаем, что множество $M^{*j}[-1,1)^2$ сравнимо с множеством $M^{*j+1}[0,1)^2$ по модулю M^{*j+1}. Из того, что в множестве $M^{*j+1}[0,1)^2$ все целые точки принадлежат разным классам смежности матрицы

M^{*j+1}, следует, что все целые точки из $M^{*j}[-1,1)^2$ также принадлежат разным классам смежности M^{*j+1}.

На рис. 9.1 изображены области $M^*[-1,1]^2$ — внутренний параллелограмм, $M^{*2}[-1,1]^2$ — внешний, выделенный параллелограмм — множество $M^{*2}[0,1]^2$. Целые точки из множества Ω_1 выделены неярко,

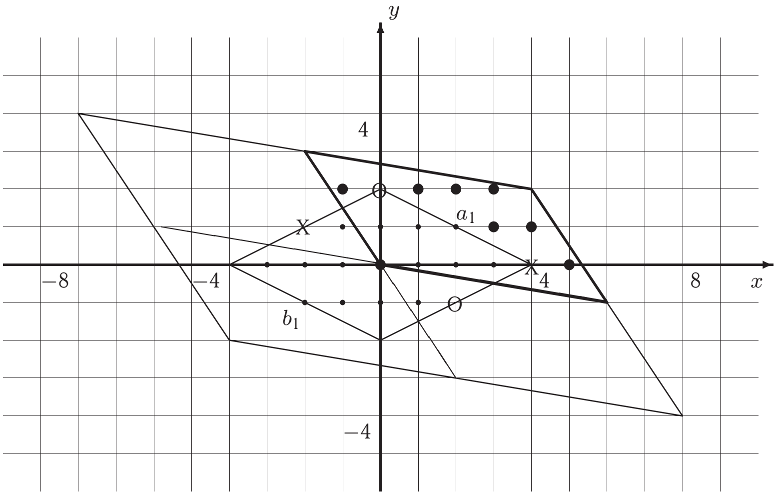


Рис. 9.1. Внутренний параллелограмм соответствует Ω_1, внешний — Ω_2

а ярко выделены точки из множества $M^{*2}[0,1]^2$, которые не попали в Ω_1, т. е. для которых существуют точки из $M^{*1}[-1,1]^2$, сравнимые с ними по модулю M^{*2}. Разбивая, как показано на рисунке, большой параллелограмм на 4 маленьких, и накладывая каждый из них на правый верхний, получим, что те точки, которые совпадут при таком перемещении, и будут сравнимы между собой по модулю M^{*4}. Видно, что точки a_3 и b_3 сравнимы между собой по модулю M^{*4}, а также соответственно сравнимы точки, обозначенные крестиками и ноликами. Множество целых точек, попавших в $M^{*j}[-1,1)^2$, отличается от множества целых точек из Ω_j тем, что в Ω_j нет точки $M^{*j}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, но есть точки $M^{*j}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $a_j = M^{*j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Осталось заметить, что $M^{*j}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \equiv M^{*j}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \pmod{M^{*j+1}}$ и $a_j \equiv b_j \pmod{M^{*j+1}}$. $\Diamond$

Проверим, что последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, определенная в (9.46), удовлетворяет условиям теоремы 9.1.4. Пункт Ф1 следует из определения, Ф2 — из леммы 9.5.1, Ф3 — из соотношения (2.8), которое имеет место, так как модуль собственных чисел матрицы M равен 2. Для того чтобы проверить Ф4, найдем коэффициенты μ_k^j из условия $\widehat{\varphi}_j(k) = \mu_k^{j+1}\widehat{\varphi}_{j+1}(k)$. Отметим, что Ω_j строго содержится в Ω_{j+1} для любого $j \in \mathbb{Z}_+$, т. е. все точки границы Ω_j. Для $j = 0$ вложение очевидно, а далее, применив оператор M^{*j} к $\Omega_0 \subset \Omega_1$, воспользуемся тем, что отображение M^{*j} невырожденное и, значит, сохраняется характер вложения. Взяв в качестве $D(M^{*j+1})$ все целые точки из Ω_j, кроме точки a_j, для $k \in D(M^{*j+1})$ имеем: $\mu_k^{j+1} = 2$, если $k \in \Omega_{j-1} \setminus \{a_{j-1}, b_{j-1}\}$; $\mu_k^{j+1} = \sqrt{2}$, если $k = a_{j-1}$ или $k = b_{j-1}$; $\mu_k^{j+1} = 0$, если $k \notin \Omega_{j-1}$. Нетрудно видеть, что M^{*j+1}-периодическое продолжение μ_k^{j+1} по нижнему индексу является последовательностью, удовлетворяющей Ф4. В качестве чисел γ_k^j из Ф5 теоремы 9.1.4 возьмем $\gamma_k^j = 1/2$. Ясно, что $\gamma_k^j \widehat{\varphi}_j(n) = \widehat{\varphi}_{j+1}(M^* n)$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}^2$ и $n \equiv k \pmod{M^{*j}}$. Таким образом, последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ удовлетворяет всем пунктам теоремы 9.1.4, значит, эта последовательность является масштабирующей, причем функции φ_j являются тригонометрическими полиномами с минимально возможными симметричными спектрами. Далее, нетрудно проверить, что

$$\|\omega_r^j \varphi_j\|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}_j(M^{*j} l + r)|^2 = 4^{-j},$$

а, значит, по предложению 9.2.1 системы функций $\{S_n^j \varphi\}_{n \in D(M^j)}$ ортонормированные.

Теперь построим последовательности всплеск-функций. Зафиксируем $j \in \mathbb{Z}_+$ и множество $D(M^{*j})$, совпадающее с множеством $\Omega_{j-1} \setminus \{a_{j-1}\}$. Как и выше, множество $D(M^*)$ состоит из s_0, s_1, s_2, s_3. Пусть $n \in D(M^{*j})$. Если $n \neq b_{j-1}$, то $\mu_{n+M^{*j}s_0}^{j+1} = 2$, а $\mu_{n+M^{*j}s_k}^{j+1} = 0$ для $k = 1, 2, 3$, так как векторы $n + M^{*j} s_k$ не содержатся в Ω_{j-1} и, более того, не сравнимы ни с одним элементом из Ω_{j-1} по модулю M^{*j+1}, соответствующая унитарная матрица размера 4×4 будет диагональной с двойками на диагонали. Если $n = b_{j-1}$, то $\mu_{n+M^{*j}s_k}^{j+1} = \sqrt{2}$ при $k = 0$ и $k = 3$ (вектор $b_{j-1} + M^{*j} s_3$ сравним с a_{j-1} по модулю M^{*j+1}, что проверяется непосредственно), и $\mu_{n+M^{*j}s_k}^{j+1} = 0$ при $k = 1$ и $k = 2$, так как векторы $n + M^{*j} s_k$, $k = 1, 2$, не содержатся в Ω_{j-1} и не сравнимы ни с одним элементом из Ω_{j-1} по модулю M^{*j+1}. Соответствующая унитарная матрица будет следующей

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

По лемме 2.2.3 векторы вида $n + M^{*j} s_k$, где $s_k \in D(M^*)$, а $n \in D(M^{*j})$, пробегают множество $D(M^{*j+1})$, поэтому достаточно определить коэффициенты Фурье всплеск-функций для всех целых векторов l, сравнимых с векторами вида $n + M^{*j}s_k$ по модулю M^{*j+1}:

$$\widehat{\psi}_j^{(1)}(l) := \begin{cases} 2^{-j}, & l \equiv n + M^{*j}s_1 \pmod{M^{*j+1}}, l \in \Omega_j \setminus \{a_j, b_j\}, \\ 2^{-j-1/2}, & l \equiv n + M^{*j}s_1 \pmod{M^{*j+1}}, l \in \{a_j, b_j\}, \end{cases}$$

если $n \in D(M^{*j})$, и $\psi_j^{(1)}(l) = 0$ в противном случае;

$$\widehat{\psi}_j^{(2)}(l) := \begin{cases} 2^{-j}, & l \equiv n + M^{*j}s_2 \pmod{M^{*j+1}}, l \in \Omega_j \setminus \{a_j, b_j\}, \\ 2^{-j-1/2}, & l \equiv n + M^{*j}s_2 \pmod{M^{*j+1}}, l \in \{a_j, b_j\}, \end{cases}$$

если $n \in D(M^{*j})$, и $\psi_j^{(1)}(2) = 0$ в противном случае;

$$\widehat{\psi}_j^{(3)}(l) := \begin{cases} 2^{-j}, & l \equiv n + M^{*j}s_3 \pmod{M^{*j+1}},\ l \in \Omega_j \setminus \{a_j, b_j\}, \\ 2^{-j-1/2}, & l \equiv n + M^{*j}s_3 \pmod{M^{*j+1}}, l \in \{a_j, b_j\}, \end{cases}$$

если $n \in D(M^{*j})$, $n \neq b_{j-1}$,

$$\widehat{\psi}_j^{(3)}(l) := \begin{cases} 2^{-j-1/2}, & l \equiv b_{j-1} \pmod{M^{*j+1}},\ l \in \Omega_j \setminus \{a_j, b_j\}, \\ -2^{-j-1/2}, & l \equiv a_{j-1} \pmod{M^{*j+1}},\ l \in \Omega_j \setminus \{a_j, b_j\}, \end{cases}$$

и $\psi_j^{(1)}(3) = 0$ в противном случае.

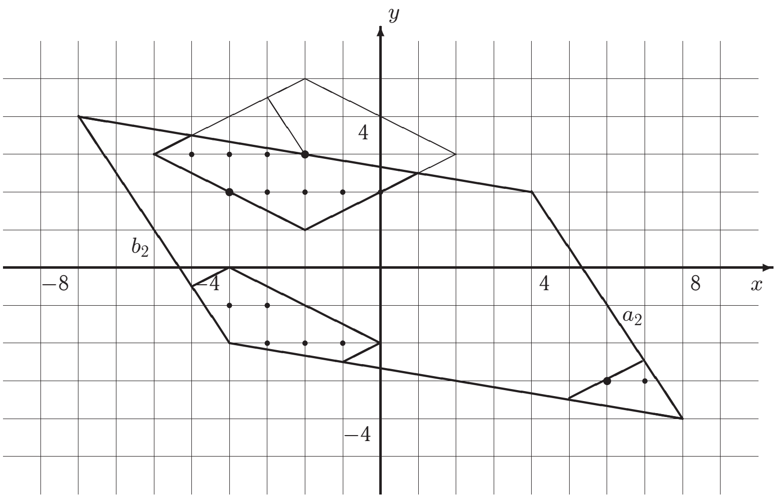


Рис. 9.2. Точками обозначен спектр функции $\psi_2^{(1)}$, причем во всех выделенных точках значение $\widehat{\psi}_2^{(1)}$ равно 2^{-2}

На рис. 9.2 изображены области: Ω_2 — большой параллелограмм, сдвинутая на M^*s_1 область Ω_1 — малый параллелограмм. Весь спектр

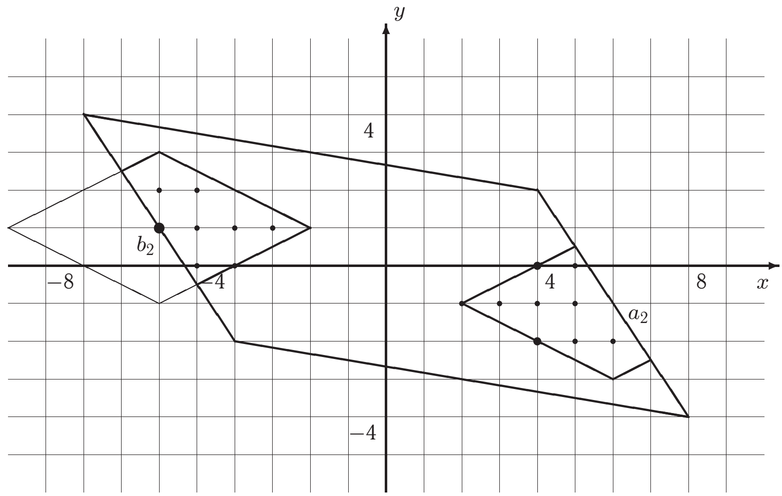


Рис. 9.3. Точками обозначен спектр функции $\psi_2^{(2)}$, причем во всех выделенных точках, кроме точки $b_2 = (-6, 1)$, значение $\widehat{\psi}_2^{(2)}$ равно 2^{-2}, а $\widehat{\psi}_2^{(2)}(b_2) = 2^{-5/2}$

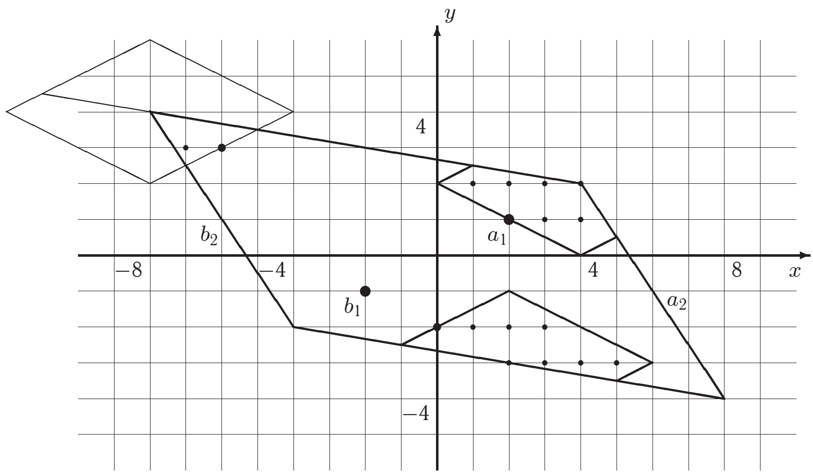


Рис. 9.4. Точками обозначен спектр функции $\psi_2^{(3)}$, причем во всех выделенных точках, кроме точек $a_1 = (2, 1)$ и $b_1 = (-2, -1)$, значение $\widehat{\psi}_2^{(3)}$ равно 2^{-2}, $\widehat{\psi}_2^{(3)}(a_1) = -2^{-5/2}$ и $\widehat{\psi}_2^{(3)}(b_1) = 2^{-5/2}$

функции $\psi^{(1)}$ заключен в трех выделенных областях внутри большого параллелограмма, которые образуют множество, сравнимое с малым параллелограммом по модулю M^{*2}. Аналогично на рисунках 9.3 и 9.4 соответственно изображены спектры функций $\psi^{(2)}$ и $\psi^{(3)}$.

Глава 10

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВСПЛЕСКАМИ

10.1. Сходимость всплеск-разложений по норме

В этой главе мы займемся изучением различных видов сходимости периодических всплеск-разложений.

Зафиксируем (p,q)-пару, удовлетворяющую условиям теоремы 9.2.4. Тогда по этой теореме системы всплесков

$$\{S_r^j\psi_j^{(\nu)},\ j\in\mathbb{Z}_+,\ r\in D(M^j),\nu=1,\ldots,m-1\},$$
$$\{S_r^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)},\ j\in\mathbb{Z}_+,\ r\in D(M^j),\nu=1,\ldots,m-1\}$$

являются биортонормированными. Для функций $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$ мы можем рассматривать разложения в соответствующий ряд Фурье

$$\langle\, f,\widetilde{\varphi}_0\,\rangle\,\varphi_0+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{r\in D(M^j)}\langle\, f,S_r^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\,\rangle\,S_r^j\psi_j^{(\nu)}. \tag{10.1}$$

Перенумеровав произвольным образом множества цифр $D(M^j)=\{r_l\}_{l=0}^{m^j-1}$, обозначим частичные суммы этого ряда через $s_N(f)$ и будем понимать под сходимостью всплеск-разложения сходимость последовательности $s_N(f)$.

Пусть $N=(\varkappa+1)m^j+n+1,\ j\in\mathbb{Z}_+,\ \varkappa=0,\ldots,m-2,\ n=0,\ldots \ldots,m^j-1$, тогда частичная сумма $s_N(f,x)$ ряда (10.1) представима в виде

$$\begin{aligned}s_N(f)=\langle\, f,\widetilde{\varphi}_0\,\rangle\,\varphi_0+\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{r\in D(M^i)}\langle\, f,S_r^i\widetilde{\psi}_i^{(\nu)}\,\rangle\,S_r^i\psi_i^{(\nu)}+\\+\sum_{\nu=1}^{\varkappa}\sum_{r\in D(M^j)}\langle\, f,S_r^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\,\rangle\,S_r^j\psi_j^{(\nu)}+\sum_{l=0}^{n}\langle\, f,S_{r_l}^j\widetilde{\psi}_j^{(\varkappa+1)}\,\rangle\,S_{r_l}^j\psi_j^{(\varkappa+1)}=\\=s_N^{(0)}(f)+\sum_{\nu=1}^{\varkappa}s_N^{(\nu)}(f)+s_N^{(\varkappa+1)}(f).\end{aligned} \tag{10.2}$$

Поскольку $s_N^{(0)}$ — проекционный оператор на пространство V_j, сумму $s_N^{(0)}(f)$ в правой части можно переразложить по сдвигам функции φ_j:

$$s_N^{(0)}(f) = \sum_{r\in D(M^j)} \langle\, f, S_r^j\widetilde{\varphi}_j\,\rangle\, S_r^j\varphi_j. \tag{10.3}$$

Лемма 10.1.1. *Пусть η — четная ограниченная суммируемая и убывающая на $[0,+\infty)$ функция. Тогда для всех $u, v\in\mathbb{R}^d$*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\prod_{l=1}^{d}\eta(u_l+k_l)\eta(v_l+k_l) \leqslant A\eta\left(2^{-3-d/2}|u-v|\right), \tag{10.4}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\prod_{l=1}^{d}\eta(u_l+k_l)\eta(v_l+k_l) \leqslant B\prod_{l=1}^{d}\eta\left(\frac{u_l-v_l}{8}\right), \tag{10.5}$$

где A, B — постоянные, зависящая только от η и d.

Доказательство. На основании леммы 1.7.1, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\prod_{l=1}^{d}\eta(u_l+k_l)\eta(v_l+k_l) = \prod_{l=1}^{d}\sum_{k_l\in\mathbb{Z}}\eta(u_l+k_l)\eta(v_l+k_l) \leqslant$$
$$\leqslant C^d\prod_{l=1}^{d}\eta\left(\frac{u_l-v_l}{8}\right),$$

из чего следует (10.5). Для доказательства (10.4) осталось заметить, что из монотонности функции η следует

$$\prod_{l=1}^{d}\eta\left(\frac{u_l-v_l}{8}\right) \leqslant (\eta(0))^{d-1}\eta\left(\frac{\max\limits_{1\leqslant l\leqslant d}|u_l-v_l|}{8}\right) \leqslant$$
$$\leqslant (\eta(0))^{d-1}\eta\left(2^{-3-d/2}|u-v|\right). \quad \Diamond$$

Теорема 10.1.2. *Пусть ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ образуют (p,q)-пару с масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ такими, что $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ и $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{n\in D(M^j)}$ — биортонормированные системы, и пусть $\{\psi_j^{(\nu)}\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j=0}^\infty$, $\nu=1,\ldots,m-1$, — соответствующие последовательности всплеск-функций. Если существует четная ограниченная убывающая на $[0,\infty)$ функция η такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\eta(|x|)\,dx < \infty \tag{10.6}$$

и

$$\left|m^{-\frac{j}{p}}\varphi_j(x)\right|,\ \left|m^{-\frac{j}{p}}\psi_j^{(\nu)}(x)\right|,\ \left|m^{-\frac{j}{q}}\widetilde{\varphi}_j(x)\right|,\ \left|m^{-\frac{j}{q}}\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}(x)\right| \leqslant \eta(|M^j x|) \tag{10.7}$$

для всех $x \in [-1/2, 1/2]^d$, *тогда для каждой* $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ ($f \in C(\mathbb{T}^d)$ *при* $p = \infty$) *ряд* (10.1) *сходится по норме в* L_p (*равномерно сходится при* $p = \infty$) *к* f.

Доказательство. Положим

$$g_j(t) = \begin{cases} \varphi_j(M^{-j}t), & t \in M^j\left([-1/2, 1/2]^d\right), \\ 0, & t \notin M^j\left([-1/2, 1/2]^d\right), \end{cases}$$

и аналогично определим функции $\widetilde{g}_j$ Ясно, что

$$|m^{-\frac{j}{p}} g_j(x)| \leqslant \eta(|x|), \quad |m^{-\frac{j}{q}}\widetilde{g}_j(x)| \leqslant \eta(|x|) \tag{10.8}$$

и

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g_j(M^j x + M^j k), \quad \widetilde{\varphi}_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widetilde{g}_j(M^j x + M^j k) \tag{10.9}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^d$. Оценим норму суммы $s_N^{(0)}$ из равенства (10.2). Используя (10.3), (10.9), (10.8) имеем

$$|s_N^{(0)}(f, x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t) \sum_{l=0}^{m^j-1} \widetilde{\varphi}_j(t + M^{-j} r_l)\varphi_j(x + M^{-j} r_l)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(t)| \sum_{l=0}^{m^j-1} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \times$$

$$\times |g_j(|M^j(t + k + k') + r_l|)\widetilde{g}_j(|M^j(x + k') + r_l|)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant m^j \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \sum_{l=0}^{m^j-1} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \eta(|M^j(t + k') + r_l|)\eta(|M^j(x + k') + r_l|)\, dt =$$

$$= m^j \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta(|M^j t + k|)\eta(|M^j x + k|)\, dt.$$

Отсюда и из леммы 10.1.1 получаем

$$\|s_N^{(0)}(f)\|_p \leqslant A m^j \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta(2^{-3-d/2}|M^j(t - \cdot)|)\, dt \right\|_p =$$

$$= Am^j \left\| \int_{\mathbb{R}^d} |f(t+\cdot)| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \eta(2^{-3-d/2}|M^j t|)\, dt \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant A\|f\|_p \int_{\mathbb{R}^d} \eta(2^{-3-d/2}|t|)\, dt.$$

Из (10.6) следует, что интеграл конечен. Таким образом, мы установили, что при $\nu = 0$ операторы $s_N^{(\nu)}$, действующие из $L_p(\mathbb{T}^d)$ в $L_p(\mathbb{T}^d)$ (из $C(\mathbb{T}^d)$ в $C(\mathbb{T}^d)$ при $p = \infty$), равномерно ограничены по норме. Аналогично доказывается равномерная ограниченность операторов $s_N^{(\nu)}$ для $\nu = 1, \ldots, m-1$. Следовательно,

$$\|s_N(f)\|_p \leqslant C, \tag{10.10}$$

где C — абсолютная постоянная.

Зададим $\varepsilon > 0$. По свойству **MR2** определения 9.1.1 существует функция $F \in V_{j_0}$ такая, что

$$\|f - F\|_p < \varepsilon.$$

На основании теоремы 9.2.4 $s_N(F) = F$ для $N \geqslant m^{j_0}$. Следовательно, по (10.10) мы имеем

$$\|f - s_N(f)\|_p = \|f - F - s_N(f - F)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant (C+1)\|f - F\|_p \leqslant (C+1)\varepsilon. \quad \Diamond$$

Замечание 10.1.3. Если ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ порождены непериодическими функциями, то условие сходимости естественно дать в терминах этих функций. Пусть $\varphi, \widetilde{\varphi} \in L(\mathbb{R}^d)$ — масштабирующие функции для некоторых КМА в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с биортонормированными целыми сдвигами, а $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m$, — соответствующие наборы всплеск-функций, и они тоже суммируемы на $\mathbb{R}^d$. Предположим, что функции

$$\varphi_j(x) = m^{j/p} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(M^j x + M^j l), \tag{10.11}$$

$$\widetilde{\varphi}_j(x) = m^{j/q} \sum_{l,\in\mathbb{Z}} \widetilde{\varphi}(M^j x + M^j l) \tag{10.12}$$

образуют масштабирующие последовательности для некоторой (p,q) пары, и выполнено условие (9.15) предложения 9.2.1, а функции

$$\psi_j^{(\nu)}(x) = m^{j/p} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi^{(\nu)}(M^j x + M^j l), \tag{10.13}$$

$$\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}(x) = m^{j/q} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widetilde{\psi}^{(\nu)}(M^j x + M^j l) \tag{10.14}$$

образуют последовательности всплеск-функций в этих ПКМА. Повторяя в этой ситуации рассуждения доказательства теоремы 10.1.2 заменив функции $g_j, \widetilde{g}_j$ соответственно на φ, $\widetilde{\varphi}$ в (10.8), (10.9), мы установим, что утверждения теоремы 10.1.2 будет выполнено, если вместо (10.7) предположить, что

$$|\varphi(x)|, |\psi^{(\nu)}(x)|, |\widetilde{\varphi}(x)|, |\widetilde{\psi}^{(\nu)}(x)| \leqslant \eta(|x|)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^d$. Нетрудно видеть, что при таком предположении ряды в правых частях равенств (10.11)–(10.14) равномерно сходятся, значит, функции $\varphi_j, \psi_j^{(\nu)}, \widetilde{\varphi}_j, \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}$ ограничены.

В случае $(p,q) = (\infty, 1)$ требование на функции $\widetilde{\varphi}_j, \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}$ в условиях теоремы 10.1.2 можно ослабить.

Теорема 10.1.4. *Пусть ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют $(\infty,1)$-пару с масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ такими, что $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ и $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{n\in D(M^j)}$ — биортонормированные системы, и пусть $\{\psi_j^{(\nu)}\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j=0}^{\infty}$, $\nu = 1,\ldots,m-1$, — соответствующие последовательности всплеск-функций. Если*

$$\sup_j \|\widetilde{\varphi}_j\|_1, \sup_{j,\nu} \|\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\|_1 < \infty \tag{10.15}$$

и существует четная ограниченная убывающая на $[0,\infty)$ функция η, удовлетворяющая условию (10.6) такая, что

$$|\varphi_j(x)|, \left|\psi_j^{(\nu)}(x)\right| \leqslant \eta(|M^j x|) \tag{10.16}$$

для всех $x \in [-1/2, 1/2]^d$, тогда для каждой $f \in C(\mathbb{T}^d)$ ряд (10.1) равномерно сходится к f.

Доказательство. Используя (10.3), имеем

$$|s_N^{(0)}(f,x)| = \left| \int_{\mathbb{T}^d} f(t) \sum_{l=0}^{m^j-1} \widetilde{\varphi}_j(t + M^{-j}r_l)\varphi_j(x + M^{-j}r_l)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \sup_j \|\widetilde{\varphi}_j\|_1 \sum_{l=0}^{m^j-1} |\varphi_j(x + M^{-j}r_l)|.$$

Пусть g_j имеет тот же смысл, что и в теореме 10.1.2. Соотношения (10.8), (10.9) для функций g_j, φ_j дают

$$\sum_{l=0}^{m^j-1} |\varphi_j(x + M^{-j}r_l)| \leqslant \sum_{l=0}^{m^j-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \eta(|M^j x + M^j k + r_l|) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \eta(|M^j x + k|).$$

Из монотонности η и (10.6) следует равномерная ограниченность этой суммы. Таким образом, приняв во внимание (10.15), мы устанавливаем, что при $\nu=0$ операторы $s_N^{(\nu)}$, действующие $C(\mathbb{T}^d)$ в $C(\mathbb{T}^d)$, равномерно ограничены по норме. Аналогично доказывается равномерная ограниченность операторов $s_N^{(\nu)}$ для $\nu = 1, \ldots, m-1$. Следовательно,

$$\|s_N(f)\|_\infty \leqslant C,$$

где C — абсолютная постоянная. Для доказательства равномерной сходимости ряда (10.1) осталось повторить рассуждения в конце доказательство теоремы 10.1.2. $\Diamond$

З а м е ч а н и е 10.1.5. Если ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$, образующие $(\infty, 1)$ пару, порождены непериодическими функциями $\varphi, \widetilde{\varphi}$, а функции $\varphi_j, \widetilde{\varphi}_j$, $\psi_j^{(\nu)}, \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}$ определены соответственно равенствами (10.11), (10.12), (10.13), (10.14), утверждения теорем 10.1.4, 10.1.6 будет выполнено, если вместо (10.16) предположить, что

$$|\varphi(x)|, |\psi^{(\nu)}(x)| \leqslant \eta(|x|)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^d$. При этом соотношение (10.15) будет следовать из условия $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)} \in L(\mathbb{R}^d)$.

Т е о р е м а 10.1.6. *В условиях теоремы* 10.1.4 *для любой функции* $g \in L(\mathbb{T}^d)$ *ряд*

$$\langle\, g, \varphi_0 \,\rangle\, \widetilde{\varphi}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r \in D(M^j)} \langle\, g, S_r^j \psi_j^{(\nu)} \,\rangle\, S_r^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)} \tag{10.17}$$

сходится к g *по норме в* $L(\mathbb{T}^d)$.

Эта теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 10.1.4, при этом в оценках сумм $s_N^{(\nu)}(f)$ функции φ_j, $\psi_j^{(\nu)}$ и переменная x соответственно меняются ролями с функциями $\widetilde{\varphi}_j$, $\widetilde{\psi}_j$ и переменной t.

10.2. Сходимость всплеск-разложений почти всюду

Будем рассматривать системы всплесков, порожденные непериодической масштабирующей функцией сепарабельного КМА в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ — масштабирующая функция, целые сдвиги которой образуют ортонормированную систему, ψ — соответствующая всплеск-функция. Мы будем предполагать, что при всех $t \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(t)|, |\psi(t)| \leqslant \eta(|t|), \tag{10.18}$$

где η — ограниченная убывающая и суммируемая на $[0, \infty)$ функция.

Введем обозначения:

$$E = \{1, \ldots, d\}; \quad \mathcal{E} = \{e \subset E, e \neq E\};$$

$$g^e(x) = g^e(\varphi, \psi, x) = \prod_{l \in e} \varphi(x_l) \prod_{l \in E \setminus e} \psi(x_l), \quad x \in \mathbb{R}^d, \ \ e \subset E;$$

$$\Phi_{jn}(x) = 2^{dj/2} g^E(2^j x + n), \quad n \in \mathbb{Z}^d, \ \ x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\Psi^e_{jn}(x) = 2^{dj/2} g^e(2^j x + n), \quad n \in \mathbb{Z}^d, \ \ x \in \mathbb{R}^d, \ \ e \in \mathcal{E}.$$

Из результатов параграфа 2.1 следует, что Φ_{00} — масштабирующая функция, и при каждом фиксированном j функции Φ_{jn}, $n \in \mathbb{Z}^d$, образуют ортонормированную систему, а Ψ^e_{00}, $e \in \mathcal{E}$, — соответствующий набор всплеск-функций. Функции Φ_{0n}, Ψ^e_{jn}, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}^d$, $e \in \mathcal{E}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В результате их периодизации, которая возможна в стандартном смысле ввиду условия (10.18), получим набор 1-периодических по каждой переменной функций

$$\psi^E_{jn}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \Phi_{jn}(x + l),$$

$$\psi^e_{jn}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \Psi^e_{jn}(x + l), \quad e \in \mathcal{E}.$$

Нетрудно видеть, что $\{\psi^E_{j0}\}_{j=0}^{\infty}$ — ортогонализованная масштабирующая последовательность для некоторого ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ в $L_2(\mathbb{T}^d)$, где коэффициентом растяжения является диагональная матрица M с двойками на диагонали, для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ и любого $e \subset E$ функции $\psi^e_{jn}(x)$, $n \in \mathbb{Z}^d \bigcap [0, 2^j)^d$ образуют ортонормированные базисы в соответствуюших пространствах всплесков W^e_j.

Таким образом, функции ψ^E_{00}, ψ^e_{jn}, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}^d \bigcap [0, 2^j)^d$, $e \in \mathcal{E}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{T}^d)$. Поскольку, кроме того, из (10.18) следует, что эти функции ограничены, ряд Фурье по такому базису имеет смысл не только для функций из $L_2(\mathbb{T}^d)$, но и для всех $f \in L(\mathbb{T}^d)$, и мы можем обсуждать его сходимость.

Определим частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ по системе всплесков $\{\psi^e_{jn}\}$. Пусть $j \in \mathbb{Z}_+$, для каждого $e \in \mathcal{E}$ зафиксируем произвольное подмножество $\Omega^e = \Omega^e_j$ множества $[0, 2^j)^d$, и положим $\Omega = \Omega_j = \{\Omega^e\}_{e \in \mathcal{E}}$,

$$s_{j\Omega}(f) = \langle f, \psi^E_{00} \rangle \psi^E_{00} + \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d \bigcap [0, 2^j)^d} \langle f, \psi^e_{in} \rangle \psi^e_{in} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d \bigcap \Omega^e} \langle f, \psi^e_{jn} \rangle \psi^e_{jn}.$$

Мы будем говорить, что ряд

$$\langle f, \psi^E_{00} \rangle \psi^E_{00} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d \cap [0, 2^j)^d} \sum_{e \in \mathcal{E}} \langle f, \psi^e_{jn} \rangle \psi^e_{in} \tag{10.19}$$

сходится, если его частичные суммы $s_{j\Omega_j}(f)$ сходятся при $j \to \infty$ равномерно по всем последовательностям $\{\Omega_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Лемма 10.2.1. *Имеет место тождество*

$$s_{j\Omega}(f,x) = 2^{dj} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \sum_{e \subset E} \sum_{r \in \Omega^e} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g^e(2^j(t+k)+r) g^e(2^j(x+k)+r)\, dt,$$

где $\Omega^E = [0, 2^j)^d$.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\langle f, \psi_{00}^E \rangle \psi_{00}^E(x) + \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{r \in [0,2^i)^d} \langle f, \psi_{ir}^e \rangle \psi_{ir}^e(x) = \sum_{r \in [0,2^j)^d} \langle f, \psi_{jr}^E \rangle \psi_{jr}^E(x). \tag{10.20}$$

Если $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$, то равенство (10.20) очевидно, поскольку его левая и правая части являются разложениями ортогональной проекции функции f на V_j по двум различным ортонормированным базисам. Принимая во внимание, что в силу (10.18) функции ψ_{ir}^e ограничены, и аппроксимируя $f \in L(\mathbb{T}^d)$ функциями из $L_2(\mathbb{T}^d)$ в метрике пространства L, мы убеждаемся в справедливости (10.20) для произвольной $f \in L(\mathbb{T}^d)$. Таким образом, частичные суммы могут быть записаны в виде:

$$s_{j\Omega}(f,x) = \sum_{e \subset E} \sum_{r \in \Omega^e} \langle f, \psi_{jr}^e \rangle \psi_{jr}^e(x) =$$

$$= 2^{dj} \sum_{e \subset E} \sum_{r \in \Omega^e} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g^e(2^j(t+k)+r)\, dt \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} g^e(2^j(x+l)+r) =$$

$$= 2^{dj} \sum_{e \subset E} \sum_{r \in \Omega^e} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) g^e(2^j t + r) g^e(2^j(x+l)+r)\, dt.$$

Для доказательства леммы осталось произвести замену переменной в интеграле и поменять порядок суммирования и интегрирования. $\Diamond$

Теорема 10.2.2. *Пусть φ и ψ удовлетворяют условию* (10.18), *где η — четная ограниченная убывающая на $[0,\infty)$ функция такая, что*

$$\int\limits_0^{\infty} \rho^{d-1} \eta(\rho)\, d\rho < \infty. \tag{10.21}$$

Тогда для любой функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ ряд (10.19) *сходится к f в каждой точке Лебега. В частности, имеет место сходимость почти всюду.*

Доказательство. Пусть x — точка Лебега функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$. Поскольку пространство V_0 состоит из констант, $s_{j\Omega}(f) = f$ для $f \equiv$

$\equiv \mathrm{const}$, и, не умаляя общности, мы можем считать, что $f(x) = 0$. Положим

$$\mathcal{N}(u, v) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \prod_{s=1}^{d} \eta(u_s + l_s)\eta(v_s + l_s).$$

По лемме 10.2.1 и (10.18)

$$|s_{j\Omega}(f, x)| \leqslant 2^{d(j+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x+t)|\mathcal{N}(2^j(x+t), 2^j x)\, dt =$$

$$= 2^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d + k} |f(x + 2^{-j}t)|\mathcal{N}(2^j x + t, 2^j x)\, dt. \quad (10.22)$$

По определению точки Лебега для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{1}{h^d} \int\limits_{[-h/2, h/2]^d} |f(x+t)|\, dt < \varepsilon$$

для всех $h \in (0, \delta)$. Возьмем такое j_0, что $2^{-j_0/2} < \delta$ и

$$\int\limits_{2^{-2+j/2}}^{\infty} \tau^{d-1}\eta(\tau/2^{3+d/2})\, d\tau \leqslant \varepsilon.$$

В силу леммы 10.1.1 и (10.22) для всех $j \geqslant j_0$ имеем

$$|s_{j\Omega}(f, x)| \leqslant A 2^d \Bigg(\eta(0) \int\limits_{[-1/2, 1/2]^d} |f(x + 2^{-j}t)|\, dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \eta(2^{i-4-d/2}) \int\limits_{[-2^j, 2^j]^d \setminus [-2^{j-1}, 2^{j-1}]^d} |f(x + 2^{-j}t)|\, dt \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant A 2^d \Bigg(\varepsilon \eta(0) + \varepsilon \sum_{0 \leqslant i \leqslant j/2} 2^{id} \eta(2^{i-4-d/2}) + \|f\|_1 \sum_{i > j/2} 2^{id} \eta(2^{i-4-d/2}) \Bigg).$$

Применив неравенство

$$2^{id}\eta(2^{i-4-d/2}) \leqslant 2^{2d} \int\limits_{2^{i-2}}^{2^{i-1}} \tau^{d-1}\eta(2^{-3-d/2}\tau)\, d\tau,$$

получим

$$|s_{j\Omega}(f, x)| \leqslant A 2^{3d} \Bigg[\Bigg(\eta(0) + 2^{d(3+d/2)} \int\limits_{0}^{\infty} \tau^{d-1}\eta(\tau)\, d\tau \Bigg) \varepsilon +$$

$$+ \|f\|_1 \int\limits_{2^{-2+j/2}}^{\infty} \tau^{d-1}\eta(2^{-3-d/2}\tau)\, d\tau\Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant A2^{3d}\varepsilon\left(\eta(0) + 2^{d(3+d/2)}\int\limits_0^{\infty} \tau^{d-1}\eta(\tau)\, d\tau + \|f\|_1\right).$$

Отсюда следует, что для каждой последовательности $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ выполняется соотношение $\lim\limits_{j\to\infty} s_{j\Omega_j}(f,x) = 0$ равномерно по всем $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$. Сходимость почти всюду следует из теоремы Лебега (см. приложение А.9). $\diamondsuit$

Замечание 10.2.3. Условия (10.18), (10.21), налагаемые на функции φ, ψ, в теореме 10.2.2 нельзя заменить на $|\varphi(t)|, |\psi(t)| \leqslant Ct^{-d}$. Можно показать, что для масштабирующей функции Мейера, заданной равенством

$$\widehat{\varphi}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } |u| < 1/3,\\ \left|\sin\dfrac{3\pi u}{2}\right|, & \text{если } 1/3 < |u| < 2/3,\\ 0, & \text{если } |u| > 2/3, \end{cases}$$

существует функция $f \in L(\mathbb{T}^2)$, для которой ряд (10.19) (при $d = 2$) расходится в некоторой точке Лебега, хотя и φ, и соответствующие всплеск-функции на бесконечности имеют порядок убывания u^{-2}.

Таким образом, невозможно существенно ослабить требования на φ, ψ, сохранив сходимость ряда (10.19) для каждой функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ в каждой ее точке Лебега. Однако для обеспечения сходимости почти везде требования могут быть ослаблены. Для этого займемся изучением сходимости на обобщенных лебеговых множествах (см. приложение А.9).

Теорема 10.2.4. *Пусть* φ *и* ψ *удовлетворяют* (10.18), *где* η — *ограниченная убывающая на* $[0,\infty]$ *функция такая, что*

$$\int\limits_1^{\infty} (\log\rho)^{d-1+\alpha}\eta(\rho)\, d\rho < \infty, \quad \alpha > 0. \tag{10.23}$$

Тогда для любой функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ *ряд* (10.19) *сходится к* f *почти везде.*

Доказательство. Пусть $f \in L(\mathbb{T}^d)$,

$$I_j(f,x,r,h) := h^{-d}\int\limits_{-h}^{h} dt_d \prod_{\ell=1}^{d-1} 2^{j_\ell} \int\limits_{-2^{-j_\ell}h}^{2^{-j_\ell}h} dt_\ell \left|f(x) - f\left(x + Q_r t\right)\right|,$$

где Q_r — невырожденное линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^d$, меняющее ролями координаты с номерами r и d. Как и в теореме 10.2.2, мы можем считать, что $f(x) = 0$. По теореме А.9.2 (см. приложение А.9) при почти всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполняются соотношения

$$\lim_{h\to 0} \sup_{l\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} \prod_{k=1}^{d-1} (l_k+1)^{-1-\alpha/(d-1)} I_j(f,x,r,h) = 0, \tag{10.24}$$

$$\sup_{h>0} \sup_{l\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} \prod_{k=1}^{d-1} (l_k+1)^{-1-\alpha/(d-1)} I_j(f,x,r,h) = C_0 < \infty, \tag{10.25}$$

где $r = 1, \ldots d$. Для всех x, удовлетворяющих (10.24), (10.25), и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{r} \sup_{l\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} \prod_{k=1}^{d-1} (l_k+1)^{-1-\alpha/(d-1)} I_l(f,x,r,h) < \varepsilon \tag{10.26}$$

для всех $h \in (0, \delta)$. Возьмем натуральное j_0, для которого $2^{1-j_0/2} < \delta$ и

$$\int\limits_{2^{-3+j_0/2}}^{\infty} \eta(\tau/8) \log^{d-1+\alpha} 16\tau \, d\tau \leqslant \varepsilon. \tag{10.27}$$

Для $i \in \mathbb{Z}_+^d$ положим $K(i) = \{k \in \mathbb{Z}^d; [2^{i_s-1}] \leqslant |k_s| < 2^{i_s}, s = 1 \ldots d\}$, где $[a]$ — целая часть числа a. Из (10.22) и леммы 10.1.1 следует, что для всех $j \geqslant j_0$

$$|S_{j\Omega}(f,x)| \leqslant B2^d \sum_{i\in\mathbb{Z}_+^d} \sum_{s\in K(i)} \int\limits_{\mathbb{T}^2+s} |f(x+2^{-j}t)| \prod_{k=1}^{d} \eta(|t_k|/8)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant B2^d \sum_{i\in\mathbb{Z}_+^d} \prod_{k=1}^{d} \eta([2^{i_k-5}]) \int\limits_{-2^{i_1+1}}^{2^{i_1+1}} dt_1 \ldots \int\limits_{-2^{i_d+1}}^{2^{i_d+1}} |f(x+2^{-j}t)|\, dt_d.$$

В силу симметрии достаточно оценить сумму

$$\sum_{i_d=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{i_d} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{i_d} \prod_{k=1}^{d} \eta([2^{i_k-5}]) \int\limits_{-2^{i_1+1}}^{2^{i_1+1}} dt_1 \ldots \int\limits_{-2^{i_d+1}}^{2^{i_d+1}} |f(x+2^{-j}t)|\, dt_d =$$

$$= \sum_{i_d=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{i_d} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{i_d} \prod_{k=1}^{d} \eta([2^{i_k-5}]) 2^{i_k+1} I_{i^*}(f,x,d,2^{i_d-j+1}),$$

где $i^* = (i_d - i_1, \ldots, i_d - i_{d-1})$. Разобьем сумму по i_d на две части: $i_d \leqslant j/2$ и $i_d > j/2$.

Поскольку $2^{i_d-j+1} \leqslant \delta$ для $i_d \leqslant j/2$, по (10.26) первая часть не превосходит

$$B2^d\varepsilon \sum_{0\leqslant i_d\leqslant j/2} 2^{i_d+1}\eta([2^{i_d-5}]) \prod_{k=1}^{d-1} \Bigg[(d-1+i_d)^{1+\alpha}\eta(0) + \\ + \sum_{i_k=2}^{i_d}(1+i_d-i_k)^{1+\alpha}\int\limits_{2^{i_k-3}}^{2^{i_k-2}} \eta(\tau/8)\,d\tau\Bigg]. \quad (10.28)$$

Поскольку для $i_d \geqslant 2$

$$\sum_{i_k=2}^{i_d}(1+i_d-i_k)^{1+\alpha}\int\limits_{2^{i_k-3}}^{2^{i_k-2}} \eta(\tau/8)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^\infty \eta(\tau/8)\,d\tau(i_d+1)^{\alpha+1},$$

(10.28) не превосходит

$$B2^d\varepsilon\Bigg(\eta(0)+\int\limits_0^\infty \eta(\tau/8)\log^{1+\alpha}16\tau\,d\tau\Bigg)\Bigg(\eta(0)+\int\limits_0^\infty \eta(\tau/8)\,d\tau\Bigg)^{d-1}.$$

Аналогично, применяя (10.25) вместо (10.26), вторую часть оценим через

$$BC_0 2^d\Bigg(\int\limits_{2^{-3+j/2}}^\infty \eta(\tau/8)\log^{d-1+\alpha}16\tau\,d\tau\Bigg)\Bigg(\eta(0)+\int\limits_0^\infty \eta(\tau/8)\,d\tau\Bigg)^{d-1} \leqslant \\ \leqslant C\varepsilon\Bigg(\eta(0)+\int\limits_0^\infty \eta(\tau/8)\;d\tau\Bigg)^{d-1}.$$

Отсюда и из (10.27), ясно, что для каждой последовательности $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ выполняется соотношение $\lim\limits_{j\to\infty} S_{j\Omega_j}(f,x)=0$, и сходимость равномерна по всем таким последовательностям. $\Diamond$

Упражнение 10.2.5. Пусть φ удовлетворяет условиям теоремы 10.2.4, $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — сепарабельный КМА в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный масштабирующей функцией $\Phi := \varphi\otimes\ldots\otimes\varphi$, P_j — проекционный оператор на пространство V_j. Доказать, что $P_j(f) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f$ почти везде для любой $f\in L(\mathbb{R}^d)$.

Теперь займемся изучением сходимости ряда (10.19) в сильных точках Лебега функции f (см. приложение А.9). В отличие от обычных точек Лебега и рассмотренных в теореме 10.2.4 точек, удовлетворяющих условиям (10.24), (10.25), не для всех функций $f\in L(\mathbb{T}^d)$ множество сильных точек Лебега имеет полную меру. Однако при

$f \in L\log L(\mathbb{T}^d)$, тем более, при $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $p > 1$, почти все точки являются сильными точками Лебега функции f. Таким образом, доказав сходимость ряда (10.19) в каждой сильной точке Лебега, мы установим его сходимость почти везде для достаточно широкого класса функций.

Теорема 10.2.6. *Если φ и ψ удовлетворяют* (10.18), *где η — четная ограниченная суммируемая и убывающая на $[0,\infty)$ функция. Тогда для любой функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ ряд* (10.19) *сходится к f в каждой сильной точке Лебега.*

Доказательство. Пусть x — сильная точка Лебега функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$. Как и в теореме 10.2.2, мы можем считать, что $f(x) = 0$. По определению сильной точки Лебега для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\frac{1}{h_1 \dots h_d} \int\limits_{-h_1}^{h_1} \dots \int\limits_{-h_d}^{h_d} |f(x+t)|\,dt < \varepsilon, \ \text{ для всех } |h_i| < \delta, \quad i = 1 \dots d,$$

$$\frac{1}{h_1 \dots h_d} \int\limits_{-h_1}^{h_1} \dots \int\limits_{-h_d}^{h_d} |f(x+t)|\,dt \leqslant C_0 \ \text{ для всех } h_i > 0, \quad i = 1 \dots d,$$

Возьмем столь большое натуральное j_0, что $2^{1-j_0/2} < \delta$ и

$$\int\limits_{2^{-3+j_0/2}}^{\infty} \eta(\tau/8)\,d\tau < \varepsilon.$$

Из (10.22) и леммы 10.1.1 следует, что для всех $j \geqslant j_0$

$$|s_{j\Omega}(f,x)| \leqslant B2^d \sum_{i\in\mathbb{Z}^d_+} \prod_{s=1}^{d} \eta([2^{i_s-5}]) \sum_{k\in K(i)} \int\limits_{\mathbb{T}^d+k} |f(x+2^{-j}t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant B2^d\Bigg(\varepsilon \sum_{i\in\mathbb{Z}^d_+\bigcap j\mathbb{T}^d} \prod_{s=1}^{d} \eta([2^{i_s-5}])2^{i_s+1} + C_0 \sum_{i\in\mathbb{Z}^d_+\setminus j\mathbb{T}^d} \prod_{s=1}^{d} \eta([2^{i_s-5}])2^{i_s+1}\Bigg).$$

Мы использовали здесь обозначения теоремы 10.2.4. Применяя для $i_s \geqslant 3$ неравенство

$$\eta([2^{i_s-5}])2^{i_s+1} \leqslant 16 \int\limits_{2^{i_s-3}}^{2^{i_s-2}} \eta(\tau/8)\,d\tau,$$

имеем

$$|s_{j\Omega}(f,x)| \leqslant B2^{5d}\Bigg((\eta(0)+L)^d\varepsilon + C_0(\eta(0)+L)^{d-1} \int\limits_{2^{-3+j/2}}^{\infty} \eta(\tau/8)\,d\tau\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant B2^{5d}(\eta(0)+L+C_0)(\eta(0)+L)^{d-1}\varepsilon,$$

где $L=\int\limits_0^\infty \eta(\tau)\,d\tau$. Отсюда ясно, что для каждой последовательности $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ выполняется соотношение $\lim\limits_{j\to\infty} s_{j\Omega_j}(f,x)=0$, причем сходимость равномерна по всем $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$. ◊

Остановимся на случае $d=1$, $M=2$. В этом случае предположения теорем 10.2.2 и 10.2.6 совпадают, т. е. для сходимости почти везде достаточно иметь мажоранту η со скоростью убывания, обеспечиваюей ее суммируемость. Распространим это утверждение на произвольные ПКМА (не обязательно, порожденные непериодической функцией).

В одномерном случае нам будет удобнее нумеровать функции $S_k^j\psi_j$, $S_k^j\widetilde{\psi}_j$ естественным образом по возрастанию индексов. Тогда для некоторой (p,q)-пары ряд Фурье функции f имеет вид

$$\langle f,\widetilde{\varphi}_0\rangle\varphi_0+\sum_{j=0}^\infty\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f,S_k^j\widetilde{\psi}_j\rangle S_k^j\psi_j, \tag{10.29}$$

а его частичной суммой порядка $N=2^j+n$, $0\leqslant n<2^j$, будет

$$s_N(f)=\langle f,\widetilde{\varphi}_0\rangle\varphi_0+\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{2^i-1}\langle f,S_k^i\widetilde{\psi}_i\rangle S_k^i\psi_i+\sum_{k=0}^{n}\langle f,S_k^j\widetilde{\psi}_j\rangle S_k^j\psi_j.$$

Теорема 10.2.7. *Пусть ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ образуют (p,q)-пару с масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$, такими что $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ и $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{n\in D(M^j)}$ — биортонормированные системы, и пусть $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty,\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=0}^\infty$, — соответствующие последовательности всплеск-функций. Если существует четная ограниченная убывающая и суммируемая на $[0,\infty)$ функция η, такая что*

$$|2^{-j/p}\varphi_j(x)|,\ |2^{-j/p}\psi_j(x)|,\ |2^{-j/q}\widetilde{\varphi}_j(x)|,\ |2^{-j/q}\widetilde{\psi}_j(x)|\leqslant\eta(2^jx) \tag{10.30}$$

для всех $x\in[-1/2,1/2]$, тогда для каждой функции $f\in L(\mathbb{T})$ ряд (10.29) *сходится к f в каждой точке Лебега. В частности, имеет место сходимость почти везде.*

Доказательство. В первую очередь отметим, что в силу (10.30) всплеск-функции ограничены. Поэтому (10.29) имеет смысл для всех $f\in L(\mathbb{T})$. Пусть x — точка Лебега функции f. Поскольку пространство V_0 состоит только из констант, $s_m(f,x)=f$ для всех $f\equiv\mathrm{const}$ и всех $m\in\mathbb{Z}_+$. Отсюда имеем

$$|f(x)-s_N(f,x)| = \Bigg|\int\limits_0^1 (f(x)-f(x+t)) \times$$

$$\times \left(\sum_{r=0}^{2^j-1} S_r^j \widetilde{\varphi}_j(t+x) S_r^j \varphi_j(x) + \sum_{r=0}^{n} S_r^j \widetilde{\psi}_j(t+x) S_r^j \psi_j(x) \right) dt \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 |f(x)-f(x+t)| \sum_{r=0}^{2^j-1} \left| S_r^j \widetilde{\varphi}_j(t+x) S_r^j \varphi_j(x) \right| dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 |f(x)-f(x+t)| \sum_{r=0}^{2^j-1} \left| S_r^j \widetilde{\psi}_j(t+x) S_r^j \psi_j(x) \right| dt = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (10.31)$$

Покажем, что

$$\Sigma_1 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (10.32)$$

Положим

$$g_j(t) = \begin{cases} \varphi_j(2^{-j}t), & t \in [-2^{j-1}, 2^{j-1}], \\ 0, & t \notin [-2^{j-1}, 2^{j-1}], \end{cases}$$

и аналогично определим функции $\widetilde{g}_j$. Ясно, что

$$\varphi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_j(2^j x + 2^j k), \quad \widetilde{\varphi}_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{g}_j(2^j x + 2^j k) \quad (10.33)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и, значит,

$$\Sigma_1 = \int\limits_0^1 |f(x)-f(x+t)| \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{2^j-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| g_j\left(2^j(x+k)+r\right)\right| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left| \widetilde{g}_j\left(2^j(x+t+l+k)+r\right)\right| dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)-f(x+t)| \sum_{r=0}^{2^j-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| g_j\left(2^j(x+k)+r\right)\right| \times$$

$$\times \left| \widetilde{g}_j\left(2^j(x+t+k)+r\right)\right| dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)-f(x+t)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \widetilde{g}_j\left(2^j(x+t)+k\right)\right| \left| g_j\left(2^j x+k\right)\right| dt.$$

Из (10.30) следует, что

$$\left|2^{-j/p} g_j(u)\right|, \left|2^{-j/q} \widetilde{g}_j(u)\right| \leqslant \eta(u)$$

для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in \mathbb{R}$, поэтому

$$\Sigma_1 \leqslant 2^j \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x+t)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta\left(2^j(x+t)+k\right)\eta\left(2^j x + k\right)\, dt.$$

Отсюда, применяя лемму 10.1.1, имеем

$$\Sigma_1 \leqslant B2^j \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x+t)|\eta\left(2^{j-3}t\right)\, dt. \tag{10.34}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем такое δ, что

$$\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} |f(x+t) - f(x)|\, dt < \varepsilon \tag{10.35}$$

для всех $h \in (0, \delta)$. Пусть $2^{-j} < \delta$, $2^{k_0} \leqslant \delta < 2^{k_0+1}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Разобьем интеграл в правой части (10.34) по схеме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \int\limits_{|t|<2^{-j}} + \int\limits_{2^{-j}<|t|<2^{k_0+1}} + \int\limits_{|t|>2^{k_0+1}} =: I_0 + I_1 + I_2.$$

Используя монотонность функции η и (10.35), получаем

$$I_0 \leqslant B2^j \int\limits_{|t|<2^{-j}} |f(x+t) - f(x)|\eta(2^{j-3}(t))\, dt \leqslant 2B\eta(0)\varepsilon;$$

$$I_1 \leqslant B2^j \sum_{k=-j}^{k_0} \int\limits_{2^k<|t|<2^{k+1}} |f(x+t) - f(x)|\eta(2^{j-3}(t))\, dt =$$

$$= B2^j \sum_{k=-j}^{k_0} \int\limits_{2^k<|t|<2^{k+1}} |f(x+t) - f(x)|\eta(2^{j-3}t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant B \sum_{k=-j}^{k_0} 2^{-k-2} \int\limits_{-2^{k+1}}^{2^{k+1}} |f(x+t) - f(x)|\, dt 2^{j+k+2}\eta(2^{j+k-3}) \leqslant$$

$$\leqslant 2B\varepsilon \sum_{k=-j}^{k_0} 2^{j+k}\eta(2^{j+k-3}) \leqslant 64B\varepsilon \int\limits_0^{\infty} \eta(t)\, dt.$$

Таким образом, I_0 и I_1 малы при достаточно больших j. Для оценки I_2 опять воспользуемся монотонностью функции η:

$$I_2 \leqslant B2^j \sum_{k=k_0}^{\infty} \int\limits_{2^k<|t|<2^{k+1}} |f(x+t)-f(x)|\eta(2^{j-3}(t))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant B \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{j+k}\eta(2^{j+k_0-3})\,(\|f\|_1+f(x)) \leqslant$$

$$\leqslant 32B\,(\|f\|_1+f(x)) \int\limits_{2^{j+k_0-4}}^{\infty} \eta(t)\,dt.$$

Интеграл в правой части стремится к нулю с ростом j ввиду суммируемости η, что завершает доказательство соотношения (10.32). Аналогично доказывается, что $\Sigma_2 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Сопоставляя эти соотношения с (10.31), имеем

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f,x) = f(x). \qquad \lozenge$$

10.3. Прямые и обратные теоремы

Теперь займемся изучением аппраксимационных свойств рядов Фурье по системам периодических всплесков в зависимости от структурных свойств аппроксимируемой функции. Мы ограничимся рассмотрением одномерных ПКМА, порожденных масштабирующей функцией φ с двоичным коэффициентом растяжения и достаточно быстрым убыванием, целые сдвиги которой образуют ортонормированную систему. Ортогонализированная масштабирующая последовательность φ_j в таком ПКМА имеет вид

$$\varphi_j(x) = 2^{j/2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j x + 2^j l).$$

Если соответствующая всплеск-функция ψ также имеет достаточно быстрое убывание, то функции

$$\psi_j(x) = 2^{j/2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi(2^j x + 2^j l)$$

образуют последовательность всплеск-функций, и $\{S_k^j\psi_j\}_{k=0}^{2^j-1}$ — также ортонормированная система. Элементы этой системы нам удобнее будет нумеровать однократным индексом, поэтому введем для них новые обозначения:

$$w_0 = \varphi_0, \quad w_{2^j+n} = S_n^j\psi_j, \quad n = 0,\ldots,2^j-1.$$

Если функции w_n ограничены, то разложение в ряд Фурье по такой системе имеет смысл для всех $f \in L(\mathbb{T})$.

Обозначим частичные суммы ряда Фурье функции f по системе всплесков w_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, через

$$s_N(f) = \sum_{n=0}^{N} \langle f, w_n \rangle w_n$$

и введем *наилучшие приближения* всплесками порядка N:

$$E_N(f) = E_N(f)_p = \inf \|f - T\|_p,$$

где нижняя грань берется по всем функциям вида $T = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k w_k$, в частности, при $N = 2^j$ по всем элементам пространства V_j. Поскольку пространства V_j, W_j конечномерны, наилучшие приближения достигаются, т. е. для любого N существует *всплеск-полином наилучшего приближения* $T_N = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k w_k$ порядка N функции f. Отметим следующие очевидные свойства наилучших приближений:

В1. $E_n(f) \leqslant \|f\|$;

В2. $E_{n+1}(f) \leqslant E_n(f)$;

В3. Если $g = cf$, где $c \in \mathbb{R}$, то $E_n(g) = |c| E_n(f)$;

В4. $E_n(f+g) \leqslant E_n(f) + E_n(g)$.

Поведение наилучших приближений характеризует конструктивные свойства функций. Стремление к нулю последовательности наилучших приближений означает возможность аппроксимации функции всплеск-полиномами, скорость стремления к нулю говорит о величине аппроксимационной погрешности. Наша цель — установить двухстороннюю связь между степенью гладкости функции (структурное свойство функции) и ее конструктивными свойствами. В качестве структурной характеристики гладкости функции f будем использовать модули непрерывности $\omega_r(f, h)$, $r \in \mathbb{N}$ (см приложение А.14).

Теорема 10.3.1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m+1$, $r \leqslant m+1$, $r < n-1$, $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\psi \in C^m(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$,

$$|\varphi(x)| = O\Big(\frac{1}{1+|x|^{1+\varepsilon}}\Big),$$
$$|\psi(x)| = O\Big(\frac{1}{1+|x|^{n+\varepsilon}}\Big).$$

Тогда для всех $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ *при* $p = \infty$) *и для всех натуральных* N *выполняется неравенство*

$$E_N(f)_p \leqslant \|f - s_N(f)\|_p \leqslant C\omega_r\left(f, \frac{1}{N}\right)_p, \tag{10.36}$$

где C зависит только от r, p, ε и постоянных, входящих в символы O.

Эта теорема является аналогом классической теоремы Джексона для тригонометрических полиномов (см приложение A.15). Однако в отличие от тригонометрического случая модуль непрерывности мажорирует не только наилучшее приближение, но и норму уклонения функции от частичной суммы ее ряда Фурье.

Следствие 10.3.2. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, φ –маситабирующая функция Мейера с бесконечно дифференцируемым преобразованием Фурье. Тогда для всех $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ при $p = \infty$) и для всех натуральных N и r выполняется неравенство*

$$\|f - s_N(f)\|_p \leqslant C\omega_r\left(f, \frac{1}{N}\right)_p, \tag{10.37}$$

где C зависит только от r и p.

Доказательство. Поскольку $m_0(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi)$ при $\xi \in [-1/2, 1/2]$ и $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ при $|\xi| > (1-\varepsilon)/2$, из бесконечной дифференцируемости $\widehat{\varphi}$ следует бесконечная дифференцируемость маски m_0, а, значит, и функции $\widehat{\psi}$. Поэтому

$$|\varphi(x)|, |\psi(x)| = O\Big(\frac{1}{1+|x|^n}\Big)$$

при любом $n \in \mathbb{N}$. Из компактности носителей функций $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$ следует, что $\psi \in C^m(\mathbb{R})$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, условия теоремы 10.3.1 выполнены для любого $r \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

Доказательство теоремы 10.3.1. Первое неравенство в (10.36) тривиально. Для доказательства второго неравенства предположим сначала, что f — тригонометрический полином, и покажем, что

$$\|f - s_N(f)\| \leqslant C_1 \frac{\|f^{(r)}\|}{N^r}. \tag{10.38}$$

Если $2^j \leqslant N < 2^{j+1}$, то для каждого $k \geqslant j$

$$f - s_N(f) = (f - s_{2^k-1}(f)) + (s_{2^j-1}(f) - s_N(f)) + \\ + \sum_{i=j}^{k-1}(s_{2^{i+1}-1}(f) - s_{2^i-1}(f)).$$

Из теоремы 10.1.4 и замечания 10.1.5 следует соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \|f - s_{2^k-1}(f)\| = 0,$$

поэтому для доказательства (10.38) достаточно проверить, что

$$\|s_{2^j+L}(f) - s_{2^j-1}(f)\| \leqslant C_2 2^{-jr}\|f^{(r)}\|$$

для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, $L = 0, \ldots, 2^j - 1$. Обозначим через $\mathbb{Z}(j, L)$ множество всех чисел вида $2^j l + k$, $l \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \ldots, L$. Используя лемму 10.2.1, формулу Тейлора

$$f(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k + \frac{1}{(r-1)!}\int_x^t f^{(r)}(\tau)(t-\tau)^{r-1}\,d\tau$$

и теорему 1.7.7, имеем

$$s_{2^i+L}(f,x) - s_{2^i-1}(f,x) =$$

$$= 2^j \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{L} \sum_{l' \in \mathbb{Z}} \psi(2^j x + 2^j l' + k) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^j t + 2l + k)\,dt =$$

$$= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}(j,L)} \psi(2^j x + \nu)\psi(2^j t + \nu)\,dt =$$

$$= \frac{2^j}{(r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^t f^{(r)}(\tau)(t-\tau)^{r-1}\,d\tau \sum_{\nu \in \mathbb{Z}(j,L)} \psi(2^j x + \nu)\psi(2^j t + \nu)\,dt.$$

Мы могли поменять порядок суммирования и интегрирования на основании теоремы Лебега. Положим $\eta(u) = 1/(1 + |u|^{n+\varepsilon})$. По лемме 10.1.1

$$\left| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}(j,L)} \psi(u+\nu)\psi(v+\nu)\,dt \right| \leqslant B\eta\left(\frac{u-v}{8}\right)$$

для всех $u, v \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$|s_{2^i+L}(f,x) - s_{2^i-1}(f,x)| \leqslant$$

$$\leqslant C_3 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_x^t f^{(r)}(\tau)(t-\tau)^{r-1}\,d\tau \right| \eta(2^{j-3}(t-x))\,dt =$$

$$= C_3 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_x^{x+t} \left| f^{(r)}(\tau) \right| |t + x - \tau|^{r-1}\,d\tau \right| \eta(2^{j-3}t)\,dt. \quad (10.39)$$

Отсюда, используя неравенство Иенсена, для $p < \infty$ получаем

$$\|s_{2^i+L}(f) - s_{2^i}(f)\| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 2^j \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \eta(2^{j-3}t) \left(\int_0^1 \left| \int_x^{x+t} \left| f^{(r)}(\tau) \right| |x + t - \tau|^{r-1}\,d\tau \right|^p dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 2^j \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\eta(2^{j-3}t)\left(\int\limits_0^1 |t|^{r(p-1)} \left|\int\limits_x^{x+t} \left|f^{(r)}(\tau)\right|^p |x+t-\tau|^{r-1}\,d\tau\right|\,dx\right)^{1/p}. \tag{10.40}$$

Если $|t| \geqslant 1$, то, принимая во внимание периодичность функции $f^{(r)}$, имеем

$$\left|\int\limits_x^{x+t} \left|f^{(r)}(\tau)\right|^p |x+t-\tau|^{r-1}\,d\tau\right| \leqslant |t|^{r-1}\left|\int\limits_x^{x+t} \left|f^{(r)}\right|^p\right| \leqslant 2|t|^r\|f^{(r)}\|^p.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 dx \left|\int\limits_x^{x+t} \left|f^{(r)}(\tau)\right|^p |x+t-\tau|^{r-1}\,d\tau\right| \leqslant C_5|t|^r\|f^{(r)}\|^p. \tag{10.41}$$

Если $0 \leqslant t < 1$, то

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{x+t} \left|f^{(r)}(\tau)\right|^p |x+t-\tau|^{r-1}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{t+1} \left|f^{(r)}(\tau)\right|^p\,d\tau \int\limits_{\tau-t}^{\tau} (t+x-\tau)^{r-1}\,dx \leqslant \frac{2}{r}\|f^{(r)}\|^p t^r.$$

Таким образом, (10.41) также имеет место в этом случае. Аналогично, если $-1 < t < 0$, то

$$\left|\int\limits_x^{x+t} \left|f^{(r)}(\tau)\right|^p |x+t-\tau|^{r-1}\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_t^1 \left|f^{(r)}(\tau)\right|^p\,d\tau \int\limits_{\tau}^{\tau-t} (\tau-x-t)^{r-1}\,dx \leqslant \frac{2}{r}\|f^{(r)}\|^p|t|^r.$$

Опять отсюда следует (10.41).

Сопоставляя (10.41) с (10.40), получаем

$$\|s_{2^i+L}(f) - s_{2^i-1}(f)\| \leqslant C_6\|f^{(r)}\|2^j \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^r\eta(2^j t)\,dt$$

для $p < \infty$. Для $p = \infty$ неравенство

$$\|s_{2^i+L}(f) - s_{2^i-1}(f)\|_\infty \leqslant C_7\|f^{(r)}\|_\infty 2^j \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^r\eta(2^j t)\,dt$$

легко следует из (10.39). Это соотношение влечет (10.38) после замены переменных в интеграле, если принять во внимание, что функции η, $|t|^r\eta(t)$ суммируемы на $\mathbb{R}$. Таким образом, соотношение (10.38) справедливо для всех тригонометрических полиномов.

Теперь рассмотрим произвольную функцию $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ при $p = \infty$) и ее среднее Валле Пуссена $v_N(f)$ (см. приложение A.15). Поскольку $v_N(f)$ — тригонометрический полином, применяя к нему неравенство (10.36), имеем

$$\|f - s_N(f)\| \leqslant \|f - v_N(f)\| + \|s_N(f - v_N(f))\| + \\ + \|v_N(f) - s_N(v_N(f))\| \leqslant (\|s_N\| + 1)\|f - v_N(f)\| + C_1 \frac{(v_N(f))^{(r)}}{N^r}.$$

Из (A.24) при $h = \pi/2N$ и очевидного свойства конечных разностей $\|\Delta_h^r f\| \leqslant 2^r\|f\|$ следует

$$\frac{(v_N(f))^{(r)}}{N^r} \leqslant 2^{-r}\|\Delta_h^r v_N(f)\| \leqslant 2^{-r}\left(\|\Delta_h^r(f - v_N(f))\| + \|\Delta_h^r f\|\right) \leqslant \\ \leqslant \|f - v_N(f)\| + 2^{-r}\omega_r\left(f, \frac{2}{N}\right).$$

сопоставляя эти неравенства, используя (A.25) и принимая во внимание, что $\|s_N\| \leqslant C_8$ в силу теоремы 10.1.4, получаем

$$\|f - s_N(f)\| \leqslant C_9\omega_r\left(f, \frac{1}{N}\right) + 2^{-r}\omega_r\left(f, \frac{2}{N}\right) \leqslant (C_9 + 1)\omega_r\left(f, \frac{1}{N}\right).$$

В заключение отметим, что если условие теоремы выполнено для некоторых r, m, n, то оно выполнено и для r, $n' = r + 2m$, $m' = r - 1$, поэтому константы, формально зависящие от n, m, можно считать зависящими только от r. $\Diamond$

Теорема 10.3.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C^m(\mathbb{R})$,

$$|\varphi(x)|, |\varphi^{(m)}(x)| = O\Big(\frac{1}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}\Big).$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant m$, *и для всех* $f \in V_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *выполняется неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_p \leqslant B2^{jk}\|f\|_p, \tag{10.42}$$

где B *зависит только от* p, m, ε *и постоянной, входящей в символ* O.

Доказательство. В первую очередь заметим, что ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi^{(m)}(2^j x + 2k)|$$

равномерно сходится, поэтому элементы масштабирующей последовательности φ_j, значит, и все элементы пространств V_j имеют непрерывную производную порядка m. Из обобщенного неравенства Ландау (см. приложение А.19) следует, что все промежуточные производные имеют тот же порядок убывания на бесконечности, что и функции φ, $\varphi^{(m)}$. Поэтому достаточно доказать теорему для $k = m$. Пусть $f \in V_j$, тогда $f = s_{2^j-1}(f)$ и

$$f(x) = 2^j \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l' \in \mathbb{Z}} \varphi(2^j t + 2^j l' + k) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(2^j x + 2^j l + k)\, dt. \tag{10.43}$$

Продифференцированная формально m раз правая часть принимает вид

$$2^{j(m+1)} \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l' \in \mathbb{Z}} \varphi^{(m)}(2^j x + 2^j l' + k) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(2^j t + 2^j l + k)\, dt =$$

$$= 2^{jm} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \varphi^{(m)}(2^j x + \nu) \varphi(2^j t + \nu)\, dt.$$

Положим $\eta(u) = 1/(1 + |u|^{1+\varepsilon})$. По лемме 10.1.1,

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\varphi^{(m)}(u + \nu) \varphi(v + \nu)|\, dt \leqslant C \eta(u - v)$$

для всех $u, v \in \mathbb{R}$. Отсюда следует возможность почленного дифференцирования и оценка

$$\|f^{(m)}\| \leqslant C 2^{jm} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \eta(x - t)\, dt \right\| =$$

$$= C 2^{jm} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \eta(t)\, dt \right\| \leqslant C 2^{jm} \|f\| \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)\, dt = B 2^{jm} \|f\|. \quad \lozenge$$

С л е д с т в и е 10.3.4. *В условиях теоремы* 10.3.3 *для всех* $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant m$, *и для всех* $f \in V_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *выполняется неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_p \leqslant \widetilde{B} 2^{jk} \omega_k \left(f, 2^{-j}\right)_p, \tag{10.44}$$

где $\widetilde{B}$ *зависит только от* p, m, ε *и постоянной, входящей в символ* O.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из тех же соображений, что и в теореме 10.3.3, достаточно доказать утверждение для $k = m$. Нетрудно видеть, что

$$\|f^{(m)}\| \leqslant 2^j \left\| \int\limits_0^{2^{-j}} \Delta_t^m f^{(m)}\,dt \right\| + 2^j \left\| \int\limits_0^{2^{-j}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k f^{(m)}(\cdot + kt)\,dt \right\|,$$

где Δ_t^m — конечная разность порядка m (см. приложение А.14). Из теоремы 10.3.3 следует

$$\left\| \int\limits_0^{2^{-j}} |\Delta_t^m f^{(m)}|\,dt \right\| \leqslant \int\limits_0^{2^{-j}} \|\Delta_t^m f^{(m)}\|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant B2^{jm} \int\limits_0^{2^{-j}} \|\Delta_t^m f\| \leqslant B2^{j(m-1)} \omega_m\left(f, 2^{-j}\right).$$

Простые вычисления дают

$$\int\limits_0^{2^{-j}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k f^{(m)}(x + kt)\,dt = \Delta_{2^{-j}}^m f^{(m-1)}(x).$$

Опять применив теорему 10.3.3, получим

$$\left\|\Delta_{2^{-j}}^m f^{(m-1)}\right\| \leqslant B2^{j(m-1)} \left\|\Delta_{2^{-j}}^m f\right\| \leqslant B2^{j(m-1)} \omega_m\left(f, 2^{-j}\right).$$

Сопоставление полученных оценок дает требуемое неравенство. ◊

Неравенство (10.42) является аналогом неравенства Бернштейна для тригонометрических полиномов (см. приложение А.15). На неравенстве Бернштейна базируются доказательства обратных теорем. По той же схеме, используя теорему 10.3.3, мы докажем следующие утверждения.

Теорема 10.3.5. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *функция* φ *удовлетворяет условиям теоремы* 10.3.3. *Тогда для любого* $h > 0$ *и для всех* $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ *при* $p = \infty$) *выполняется неравенство*

$$\omega_m(f,h)_p \leqslant N h^m \sum_{0 \leqslant l \leqslant h^{-1}} (l+1)^{m-1} E_l(f)_p, \tag{10.45}$$

где N *зависит только от* p, m, ε *и постоянной, входящей в символ* O.

Доказательство. Пусть T_n — всплеск-полином наилучшего приближения порядка n функции f. Для доказательства неравенства (10.45) в случае $h > 1$ достаточно заметить, что $T_0 \equiv \mathrm{const}$, поскольку пространство V_0 состоит из констант, и, следовательно, по свойству М3 модулей непрерывности (см. приложение А.14)

$$\omega_m(f,h) = \omega_m(f - T_0, h) \leqslant 2^m \|f - T_0\| = 2^m E_0(f).$$

Пусть теперь $h \leqslant 1$. Выберем неотрицательное целое k такое, что

$$2^k \leqslant \frac{1}{h} < 2^{k+1}. \tag{10.46}$$

Из свойств M3, M6, M7 модулей непрерывности имеем

$$\begin{gathered}\omega_m(f,h) \leqslant \omega_m(f - T_{2^k}, h) + \omega_m(T_{2^k}, h) \leqslant \\ 2^m \|f - T_{2^k}\| + h^m \|T_{2^k}^{(m)}\| = 2^m E_{2^k}(f) + h^m \|T_{2^k}^{(m)}\|.\end{gathered} \tag{10.47}$$

Поскольку $T_0^{(m)} \equiv 0$, функцию $T_{2^k}^{(m)}$ можно представить в виде

$$T_{2^k}^{(m)} = T_2^{(m)} - T_0^{(m)} + \sum_{i=2}^{k} \left(T_{2^i}^{(m)} - T_{2^{i-1}}^{(m)}\right). \tag{10.48}$$

Используя теорему 10.3.3 и свойство B2 наилучших приближений, оценим по норме одно слагаемое этой суммы:

$$\begin{aligned}&\|T_{2^i}^{(m)} - T_{2^{i-1}}^{(m)}\| \leqslant B2^{im} \|T_{2^i} - T_{2^{i-1}}\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant B2^{im} \left(\|T_{2^i} - f\| + \|T_{2^{i-1}} - f\|\right) = B2^{im} \left(E_{2^i}(f) + E_{2^{i-1}}(f)\right) \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant B2^{i(m-1)+3} \sum_{l=2^{i-2}+1}^{2^{i-1}} E_l(f) \leqslant B2^{2m+1} \sum_{l=2^{i-2}+1}^{2^{i-1}} (l+1)^{m-1} E_l(f).\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\|T_2^{(m)} - T_0^{(m)}\| \leqslant B2^m \left(E_2(f) + E_0(f)\right).$$

Из этих оценок и (10.48) получаем

$$\|T_{2^k}^{(m)}\| \leqslant B2^{2m+2} \sum_{l=0}^{2^k} (l+1)^{m-1} E_l(f). \tag{10.49}$$

Кроме того, из (10.46) и B2 следует

$$\begin{aligned}E_{2^k}(f) \leqslant h^m 2^{(k+1)m} E_{2^k}(f) \leqslant h^m 2^{m+1} 2^{k(m-1)} \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} E_l(f) \leqslant \\ \leqslant 2^{2m} h^m \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} (l+1)^{m-1} E_l(f).\end{aligned} \tag{10.50}$$

Соотношения (10.46), (10.47), (10.49) и (10.50) влекут (10.45). $\diamondsuit$

Условия теорем 10.3.1, 10.3.3, 10.3.5 выполнены, например, для всплесков, порожденных гладкой масштабирующей функцией с компактным носителем. Несложное сопоставление этих теорем для таких всплесков дает следующее утверждение.

Следствие 10.3.6. *Пусть* $\varphi, \psi \in C^m(\mathbb{R})$ — *функции с компактными носителями*, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r \leqslant m-1$, $\alpha \in [0,1)$, $\alpha^2 + r^2 > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, ($f \in C(\mathbb{T})$ *для* $p = \infty$). *Тогда эквивалентны соотношения*: $E_N(f)_p = O(1/N^{r+\alpha})$, $\|f - s_N(f)\|_p = O(1/N^{r+\alpha})$, $\omega_{r+1}(f,h)_p = O(h^{r+\alpha})$.

Упражнение 10.3.7. Пусть числа r, α и функции φ, ψ удовлетворяют условиям следствия 10.3.6. Доказать, что эквивалентны соотношения: $\omega_{r+1}(f,h)_\infty = O(h^{r+\alpha})$ и $\langle f, w_N \rangle = O(2^{-j(r+\alpha+1/2)})$, где $N = 2^j + n$, $n = 0, \ldots, 2^j - 1$.

Лемма 10.3.8. *Пусть* f_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — *абсолютно непрерывные на* $[0,1]$ *функции такие, что* $f_n' \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$. *Если последовательность* $\{f_n\}$ *сходится к* f *по норме в* L, *а последовательность* $\{f_n'\}$ *сходится по норме в* L_p, *то функция* f *эквивалентна некоторой абсолютно непрерывной на* $[0,1]$ *функции* F, *для которой* $F' \in L_p$.

Доказательство. В первую очередь заметим, что последовательность $\{f_n(0)\}$ является фундаментальной. Действительно, из равенства
$$f_n(0) = f_n(x) - \int_0^x f_n'$$
имеем
$$|f_n(0) - f_m(0)| = |f_n(0) - f_m(0)| \int_0^1 dx \leqslant \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx +$$
$$+ \int_0^1 dx \int_0^x |f_n'(t) - f_m'(t)|\, dt \leqslant \|f_n - f_m\|_1 + \|f_n' - f_m'\|_1 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Таким образом, последовательность $\{f_n(0)\}$ сходится, обозначим через a ее предел. Пусть g — предел последовательности $\{f_n'\}$ в L_p. Покажем, что функция
$$F(x) := a + \int_a^x g$$
является требуемой. По теореме A.10.2 (см. приложение A.10), F абсолютно непрерывна и $F'(x) = g(x)$ для почти всех x. Кроме того, мы имеем
$$\int_0^1 |f(x) - F(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 \left| f(x) - a - \int_0^x f_n' \right| dx + \int_0^1 dx \int_0^x |f_n' - g| \leqslant$$
$$\leqslant |a - f_n(o)| + \|f - f_n\|_1 + \|g - f_n'\|_1,$$
что влечет эквивалентность функций f и F. ◊

Теорема 10.3.9. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *функция* φ *удовлетворяет условиям теоремы* 10.3.3, *а функция* ψ — *условиям теоремы* 10.3.1, $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ *при* $p = \infty$) *и*

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{m-1} E_l(f)_p < \infty, \tag{10.51}$$

Тогда f *имеет производную порядка* m *почти везде* (*в каждой точке при* $p = \infty$), $f^{(m)} \in L_p(\mathbb{T})$ ($f^{(m)} \in C(\mathbb{T})$ *при* $p = \infty$) *и для любого* $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant m$, *выполняется неравенство*

$$\omega_{m-k}\left(f^{(k)}, h\right)_p \leqslant M\left(h^{-k}\omega_m(f,h)_p + \sum_{l=[1/2h]}^{\infty} (l+1)^{k-1} E_l(f)_p\right), \tag{10.52}$$

где M *зависит только от* p, m, ε *и постоянных, входящих в символы* O.

Доказательство. Пусть T_n — всплеск-полином наилучшего приближения порядка n функции f. Из теоремы 10.3.1 и свойств M1, M2 модулей непрерывности (см. приложение A.14), следует, что $\|f - T_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому при $n > 0$

$$f - T_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left(T_{2^i n} - T_{2^{i-1} n}\right), \tag{10.53}$$

где ряд в правой части сходится по норме. Как уже было отмечено в доказательстве теоремы 10.3.3, все элементы пространств V_j имеют непрерывную производную порядка m, в частности, и всплеск-полиномы T_n. Используя теорему 10.3.3 и свойство B2 наилучших приближений, оценим по норме m-ю производную i-го слагаемого этой суммы. При $i > 1$ мы имеем

$$\left\|T_{2^i n}^{(m)} - T_{2^{i-1} n}^{(m)}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant B 2^{(i+1)m} n^m \left\|T_{2^i n} - T_{2^{i-1} n}\right\| \leqslant 2B 2^{(i+1)m} n^m E_{2^{i-1} n}(f) \leqslant$$

$$\leqslant 16 B 2^{(i+1)(m-1)} n^{m-1} \sum_{k=2^{i-2}n+1}^{2^{i-1}n} E_k(f) \leqslant B 2^{3m+1} \sum_{k=2^{i-2}n+1}^{2^{i-1}n} k^{m-1} E_k(f).$$

Аналогично,

$$\left\|T_{2n}^{(m)} - T_n^{(m)}\right\| \leqslant B 2^{2m+1} n^m E_n(f) \leqslant$$

$$\leqslant B2^{2m+2}n^{m-1}\sum_{k=[n/2]}^{n}E_k(f)\leqslant B2^{3m+1}\sum_{k=[n/2]}^{n}(k+1)^{m-1}E_k(f).$$

Отсюда и из (10.51) устанавливаем, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|T^{(m)}_{2^in}-T^{(m)}_{2^{i-1}n}\right\|$$

сходится. Следовательно, ряд, полученный формальным m-кратным дифференцированием правой части (10.53), сходится по норме. Из леммы 10.3.8 следует, что левая часть (10.53) имеет почти всюду производную порядка m, которая принадлежит $L_p(\mathbb{T})$ ($C(\mathbb{T})$ при $p=\infty$) и

$$\left\|f^{(m)}-T_n^{(m)}\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left\|T^{(m)}_{2^in}-T^{(m)}_{2^{i-1}n}\right\|\leqslant B2^{3m+1}\sum_{k=[n/2]}^{\infty}(k+1)^{m-1}E_k(f). \tag{10.54}$$

Аналогично, используя равенство

$$f-T_0=T_1-T_0+\sum_{i=1}^{\infty}(T_{2^j}-T_{2^{j-1}})$$

вместо (10.53), получим оценку

$$\left\|f^{(m)}\right\|\leqslant B2^{3m+1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{m-1}E_k(f). \tag{10.55}$$

Таким образом, доказано (10.52) для $k=m$.

Пусть теперь $k<m$, $h>0$, $n_0=[1/h]$. Сначала рассмотрим случай $n_0>0$. Из свойств M3, M6, M7 модулей непрерывности имеем

$$\omega_{m-k}\left(f^{(k)},h\right)\leqslant 2^{m-k}\|f^{(k)}-T^{(k)}_{n_0}\|+h^{m-k}\|T^{(m)}_{n_0}\|. \tag{10.56}$$

Применим (10.54) (взяв k в качестве m) к первому слагаемому правой части (10.56):

$$\|f^{(k)}-T^{(k)}_{n_0}\|\leqslant B2^{3k+1}\sum_{l=[n_0/2]}^{\infty}(l+1)^{k-1}E_l(f)\leqslant$$

$$\leqslant B2^{3k+1}\sum_{l=[1/2h]}^{\infty}(l+1)^{k-1}E_l(f).$$

Из теоремы 10.3.1, следствия 10.3.4 и свойств M3, M4, M7 модулей непрерывности следует

$$h^{m-k}\|T^{(m)}_{n_0}\|\leqslant\widetilde{B}h^{m-k}(2n_0)^m\omega_m\left(T_{n_0},\frac{1}{n_0}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 4^m \widetilde{B} h^{-k} \left(\omega_m \left(T_{n_0} - f, \frac{1}{n_0}\right) + \omega_m \left(f, \frac{1}{n_0}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4^m \widetilde{B} h^{-k} \left(2^m E_{n_0}(f) + \omega_m \left(f, \frac{1}{n_0}\right)\right) \leqslant 8^m \widetilde{B}\,(2^m C + 1)\, h^{-k} \omega_m(f, h),$$

что завершает доказательство (10.52) при $n_0 > 0$. Если $n_0 = 0$, то по свойству M3 модулей непрерывности имеем

$$\omega_{m-k}\left(f^{(k)}, h\right) \leqslant 2^{m-k} \|f^{(k)}\|.$$

Осталось применить (10.55). ♢

Доказанные прямые и обратные теоремы позволяют охарактеризовать некоторые важные пространства функций в терминах отклонений функции от частичных сумм ее всплеск-разложений.

Введем пространство Липшица $\mathrm{Lip}_p^{r,\alpha}$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < \alpha < 1$, $r \in \mathbb{N}$, состоящее из 1-периодических функций f, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$, и таких, что $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{T})$ и $\omega\left(f^{(r)}, h\right)_p \leqslant K h^{\alpha}$.

Теорема 10.3.10. *Пусть $\varphi, \psi \in C^m(\mathbb{R})$ — функции с компактными носителями, $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant m-1$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant p < \infty$. Для того чтобы функция $f \in L_p(\mathbb{T})$ принадлежала пространству $\mathrm{Lip}_p^{r,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|f - s_n(f)\|_p = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{10.57}$$

Доказательство. Если $f \in H_p^{r,\alpha}$, то из теоремы 10.3.1 и свойства M6 модулей непрерывности имеем

$$\|f - s_n(f)\| \leqslant C\omega_{r+1}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{C}{n^r}\, \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{CK}{n^{r+\alpha}},$$

что влечет необходимость. Если выполнено (10.57), то из теорем 10.3.5 и 10.3.9 следует

$$\omega\left(f^{(r)}, h\right) \leqslant C_1 \Bigg(h \sum_{0 \leqslant l \leqslant h^{-1}} (l+1)^r \|f - s_l(f)\| +$$

$$+ \sum_{l=[1/2h]}^{\infty} (l+1)^{r-1} \|f - s_l(f)\| \Bigg) \leqslant C_2 h^{\alpha}. \quad ♢$$

Пусть $\alpha > 0$, $1 \leqslant p, q < \infty$, $r := [\alpha] + 1$. *Пространством Бесова* B_{qp}^{α} называется класс функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, для которых

$$\int\limits_0^{\infty} t^{q\alpha} \omega_r^q(f, t)_p \frac{dt}{t} < \infty. \tag{10.58}$$

Теорема 10.3.11. *Пусть $\varphi, \psi \in C^m(\mathbb{R})$ — функции с компактными носителями, $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant m$, $1 \leqslant p$, $q < \infty$, $r - 1 \leqslant \alpha < r$. Для того чтобы функция $f \in L_p(\mathbb{T})$ принадлежала пространству B^{α}_{qp}, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\alpha-1} \|f - s_n(f)\|^q. \tag{10.59}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что соотношение (10.58) имеет место тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\alpha-1} \omega_r^q \left(f, \frac{1}{n}\right)_p, \tag{10.60}$$

поэтому достаточность следует из теоремы 10.3.1. Докажем необходимость. Рассмотрим сначала случай, когда $r, q > 1$. Положим $\varepsilon = \dfrac{r-\alpha}{2}$, применяя теорему 10.3.5 и неравенство Гёльдера, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\alpha-1} \omega_r^q \left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(\alpha-r)-1} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{r-1} \|f - s_k(f)\| \right)^q \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(\alpha-r)-1} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q\varepsilon}{q-1}-1} \right)^{q-1} \sum_{k=1}^{n} k^{q(r-\varepsilon)-1} \|f - s_k(f)\|^q \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(\alpha-r+\varepsilon)-1} \sum_{k=1}^{n} k^{q(r-\varepsilon)-1} \|f - s_k(f)\|^q =$$

$$= C_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^{q(r-\varepsilon)-1} \|f - s_k(f)\|^q \sum_{n=k}^{\infty} n^{q(\alpha-r+\varepsilon)-1} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{q\alpha-1} \|f - s_k(f)\|^q.$$

В случае $r = 1$ для оценки суммы (10.60) воспользуемся неравенством,

$$\omega_1^q \left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{2^{q-1}}{n^q} \|f - s_0(f)\|^q + \frac{2^{q-1}}{n^q} \left(\sum_{k=1}^{n} \|f - s_k(f)\| \right)^q.$$

Для второго слагаемого повторим рассуждения, проведенные для случая $r > 1$, а ряд, соответствующий первому слагаемому, очевидно, сходится. Случай $q = 1$ доказывается аналогично, но без использования неравенства Гёльдера. $\Diamond$

10.4. Сходимость всплеск-разложений в индивидуальной точке

В этом параграфе мы опять ограничимся случаем $d = 1$, $M = 2$. Теорема 10.2.7 дала достаточное условие, при котором ряд Фурье функции f по периодическим всплеском сходится в каждой ее точке Лебега. При этом ничего не говорилось о скорости сходимости. Теперь мы будем изучать приближение функций, обладающих локальной гладкостью несколько большей, чем в точках Лебега, и установим для них оценки скорости сходимости.

Как и ранее, будем нумеровать функции $S_k^j\psi_j$, $S_k^j\widetilde{\psi}_j$ естественным образом по возрастанию индексов. Для некоторой (p, q)-пары ряд Фурье функции f имеет вид

$$\langle f, \widetilde{\varphi}_0\rangle\varphi_0 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f, S_k^j\widetilde{\psi}_j\rangle S_k^j\psi_j, \tag{10.61}$$

а $s_N(f)$ обозначает его частичную сумму порядка N.

Определение 10.4.1. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Функция f принадлежит классу $\mathcal{L}_\alpha(x_0)$, если существует такое число s, что

$$\frac{1}{h}\int\limits_{|x-x_0|\leqslant h}|f(x) - s|\,dx = O(h^\alpha) \text{ при } h \to 0. \tag{10.62}$$

Теорема 10.4.2. *Пусть $f \in \mathcal{L}_\alpha(x_0)$, $\alpha > 0$, ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ образуют (p, q)-пару с масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$, такими, что $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{n\in D(M^j)}$ — биортонормированные системы, и пусть $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{\psi}_j\}_{j=0}^\infty$ — соответствующие последовательности всплеск-функций. Если*

$$|\varphi_j(x)| \leqslant \frac{C2^{j/2}}{1 + (2^j|x|)^m}, \quad |\widetilde{\varphi}_j(x)| \leqslant \frac{C2^{j/2}}{1 + (2^j|x|)^m}, \quad m > 1, \tag{10.63}$$

для всех $x \in [-1/2, 1/2]$, то

$$s_{2^j-1}(f, x_0) - s = O\left(2^{-j\min\{\alpha, m-1\}}\right), \ j \to \infty, \tag{10.64}$$

при $\alpha \neq m - 1$, и

$$s_{2^j-1}(f, x_0) - s = O\left(j2^{-j\alpha}\right), \ j \to \infty, \tag{10.65}$$

при $\alpha = m - 1$. Если, кроме того,

$$|\psi_j(x)| \leqslant \frac{C2^{j/2}}{1 + (2^j|x|)^n}, \quad |\widetilde{\psi}_j(x)| \leqslant \frac{C2^{j/2}}{1 + (2^j|x|)^n}, \quad n > 1, \tag{10.66}$$

для всех $x \in [-1/2, 1/2]$, *то*

$$s_N(f, x_0) - s = O\left(N^{-\min\{\alpha, n-1\}}\right), \; N \to \infty, \tag{10.67}$$

при $\alpha \neq n-1$, *и*

$$s_N(f, x_0) - s = O\left(N^{-\alpha} \log N\right), \; N \to \infty, \tag{10.68}$$

при $\alpha = n-1$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\alpha \neq m-1$, $\alpha \neq n-1$. Заметим, что из (10.63), (10.66) следует, что функции $\widetilde{\varphi}_j$, $\widetilde{\psi}_j$ ограничены, значит, (10.61) имеет смысл для всех $f \in L(\mathbb{T})$. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 10.2.7, имеем

$$|s_{2^j-1}(f, x_0) - s| = \left|\int_0^1 (f(x) - s) \sum_{k=0}^{2^j-1} S_k^j \varphi_j(x_0) \overline{S_k^j \widetilde{\varphi}_j}(x)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - s| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{g}_j\left(2^j(x_0) + k\right)\right| \left|g_j\left(2^j x + k\right)\right|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant B2^j \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - s| \eta\left(2^{j-3}(x - x_0)\right)\, dx,$$

где $\eta(u) = C_1(1 + |u|^m)^{-1}$. Пусть j_0 натуральное число, такое что

$$\frac{1}{h} \int_{|x-x_0|\leqslant h} |f(x) - s|\, dx \leqslant C_2 h^\alpha \tag{10.69}$$

при всех $h \in (0, 2^{-j_0}]$. Из монотонности функции η, следует, что при $j \geqslant j_0$

$$|s_{2^j-1}(f, x_0) - s| \leqslant B2^j \Bigg(\eta(0) \int_{|x-x_0|<2^{-j}} |f(x) - s|\, dx +$$

$$+ \sum_{k=-j}^{\infty} \eta(2^{j+k-3}) \int_{2^k \leqslant |x-x_0| \leqslant 2^{k+1}} |f(x) - s|\, dx\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant B2^j \Bigg(\eta(0) \int_{|x-x_0|<2^{-j}} |f(x) - s|\, dx +$$

$$+ \sum_{k=-j+1}^{-j_0} 2^{j+1} \eta(2^{j+r}) \int_{|x-x_0|<2^k} |f(x) - s|\, dx +$$

$$+ \sum_{k=-j_0+1}^{\infty} 2^{j+1}\eta(2^{j+k}) \int\limits_{|x-x_0|<2^k} |f(t)-s|\,dx\Bigg) = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (10.70)$$

Используя (10.69), имеем

$$\Sigma_0 = O(2^{-j\alpha}) = O(2^{-j\min\{\alpha,m-1\}}), \quad (10.71)$$

$$\Sigma_1 = O(1)2^j \sum_{k=-j}^{-j_0} 2^{k(\alpha+1)} 2^{(j+k)m} =$$

$$= O\Bigg(2^{j(1-m)} \sum_{k=-j+1}^{-j_0} 2^{k(\alpha+1-m)}\Bigg) = O\left(2^{-j\min\{\alpha,m-1\}}\right). \quad (10.72)$$

Для оценки Σ_2, заметим, что функция $I(h) = h^{-1} \int\limits_{|t-x_0|<h} |f(t)-s|\,dt$ ограничена на $(0,\infty)$, поэтому

$$\Sigma_2 = O(1) \sum_{k=-j_0+1}^{\infty} 2^{j+k}\eta(2^{j+k}) = O(1) \sum_{k=-j_0+1}^{\infty} 2^{(j+k)(1-m)} =$$

$$= O(1)2^{j(1-m)} \sum_{k=-j_0+1}^{\infty} 2^{k(1-m)} = O\left(2^{-j(m-1)}\right) = O\left(2^{-j\min\{\alpha,m-1\}}\right). \quad (10.73)$$

Сопоставляя (10.70) с (10.71)–(10.73), получаем (10.64). В частности, из (10.64) следует, что последовательность $\{s_{2^j-1}(f,x_0)\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к s. Отсюда следует

$$f(x_0) - s_N(f,x_0) = (s_{2^j-1}(f,x_0) - s_N(f,x_0)) +$$

$$+ \sum_{i=j}^{\infty} (s_{2^{i+1}-1}(f,x_0) - s_{2^i-1}(f,x_0)), \quad (10.74)$$

где $2^j \leqslant N < 2^{j+1}$. Поэтому для доказательства (10.67) достаточно проверить соотношение

$$s_{2^j+L}(f,x_0) - s_{2^j-1}(f,x_0) = O\left(2^{-j\min\{\alpha,m-1\}}\right) \quad (10.75)$$

для всех $j = 0,1,\ldots,$ $L = 0,\ldots,2^j-1$. Поскольку пространство $\widetilde{W}_j$ ортогонально пространству V_0, состоящему из констант, то левая часть этого равенства представима в виде

$$\int_0^1 (f(t) - s) \sum_{k=0}^{L} S_k^j \psi_j(x_0) \overline{S_k^j \widetilde{\psi}_j}(t)\, dt,$$

и, оценив ее точно так же, как $|s_{2^j-1}(f, x_0) - s|$, мы докажем (10.67). При $\alpha = m - 1$ или $\alpha = n - 1$ доказательство аналогично. $\Diamond$

Следствие 10.4.3 (принцип локализации). *Если в условиях теоремы* 10.4.2 *функция f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки x_0, то*

$$|s_N(f, x_0)| = O\left(N^{1-n}\right).$$

Теорема 10.4.4. *Пусть $f \in \mathcal{L}_\alpha(x_0)$, $\alpha > 0$, ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ образуют (p, q)-пару и порождены соответственно масштабирующими функциями φ, $\widetilde{\varphi}$, с биортонормированными целыми сдвигами, и пусть ψ, $\widetilde{\psi}$ — соответствующие всплеск-функции. Если*

$$|\varphi(x)|, |\widetilde{\varphi}(x)| \leqslant \frac{C}{1 + |x|^m}, \quad m > 1,$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$|s_{2^j-1}(f, x_0) - s| = O\left(2^{-j\min\{\alpha, m-1\}}\right), \ j \to \infty, \tag{10.76}$$

при $\alpha \neq m - 1$,

$$|s_{2^j-1}(f, x_0) - s| = O\left(j 2^{-j\alpha}\right), \ j \to \infty, \tag{10.77}$$

при $\alpha = m - 1$. Если, кроме того,

$$|\psi(x)|, |\widetilde{\psi}(x)| \leqslant \frac{C}{1 + |x|^n}, \quad n > 1,$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$|s_N(f, x_0) - s| = O\left(N^{-j\min\{\alpha, n-1\}}\right), \ N \to \infty, \tag{10.78}$$

при $\alpha \neq n - 1$,

$$|s_N(f, x_0) - s| = O\left(N^{-\alpha} \log N\right), \ N \to \infty, \tag{10.79}$$

при $\alpha = n - 1$.

Эту теорему можно доказать аналогично теореме 10.4.2 с использованием равенств

$$\varphi_j(x) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(2^j x + 2^j l), \quad \widetilde{\varphi}_j(x) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widetilde{\varphi}(2^j x + 2^j l),$$

$$\psi_j(x) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^j x + 2^j l), \quad \widetilde{\psi}_j(x) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widetilde{\psi}(2^j x + 2^j l).$$

Далее мы покажем неулучшаемость теорем 10.4.2, 10.4.4 в различных смыслах. Рассмотрим случай $n-1>\alpha$, $m-1>\alpha$. Он имеет место, например, если φ, ψ — функции с компактным носителем. В этом случае

$$|s_N(f,x_0)-s| = O\left(N^{-\alpha}\right). \tag{10.80}$$

Следующие примеры показывают, что оценка (10.80) точна по порядку.

Рассмотрим систему Хаара, которая является системой периодических всплесков, порожденных функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{10.81}$$

а соответствующая всплеск-функция (см. параграф 1.4) имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x < 1/2, \\ -1, & \text{если } 1/2 \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Возьмем $f \in L(\mathbb{T})$ такое, что $f(t)=t^\alpha$ на $[0,\delta]$, $f(x)=0$ на $[-\delta,0]$. Ясно, что f удовлетворяет (10.62) при $s=0$, $x_0=0$. Рассмотрим (2^j-1)-ю частичную сумму:

$$s_{2^j-1}(f,x) = 2^j \int\limits_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j x + 2^j l + k) \sum_{l'\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j t + 2^j l' + k)\, dt.$$

Если $x \in [0, 2^{-j})$, то $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j x + 2^j l) = 1$ и $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j x + 2^j l + k) = 0$ для $k = 1, \ldots, 2^j-1$. Для достаточно больших j

$$|s_{2^j-1}(f,0)| = 2^j \int\limits_0^{2^{-j}} f(t)\,dt = 2^j \int\limits_0^{2^{-j}} t^\alpha\,dt = \frac{1}{\alpha} 2^{-j\alpha}.$$

Поэтому правую часть соотношения (10.80) нельзя заменить на $o(N^{-\alpha})$.

Теперь покажем, что теоремы 10.4.2, 10.4.4 неулучшаемы в случаях $\alpha = n-1$ или $\alpha = m-1$. Зададим функцию φ следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } |u| < 1/3, \\ \left|\sin \dfrac{3\pi u}{2}\right|, & \text{если } 1/3 < |u| < 2/3, \\ 0, & \text{если } |u| > 2/3. \end{cases}$$

Такая φ является масштабирующей функцией КМА Мейера (см. параграф 1.4). Простые вычисления дают явную формулу:

$$\varphi(u) = \frac{\sin 2\pi u/3}{2\pi u} + \frac{6\cos 4\pi u/3 + 8u \sin 2\pi u/3}{\pi(9-16u^2)}.$$

Ясно, что $\varphi(u)$ убывает как u^{-2}. Можно также вычислить явно ψ, используя формулу $\widehat{\psi}(u) = e^{i\pi u}(\widehat{\varphi}(u+1) + \widehat{\varphi}(u-1))\widehat{\varphi}(u/2)$, которая следует из (1.66) и (1.47), и показать, что $\psi(u) = O\left(u^{-2}\right)$. Таким образом, φ порождает ПКМА, и функции φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы 10.4.4 при $n = m = 2$. Покажем, что для любой $\gamma(u) = o(u \log u)$, $u \to +0$, существует 1-периодическая функция $f \in L(\mathbb{T})$, удовлетворяющая (10.62) при $x_0 = 0$, $s = 0$, $\alpha = 1$ и такая, что

$$\limsup_{j\to\infty} |\gamma^{-1}(2^{-j}) s_{2^j-1}(f, 0)| = \infty.$$

В силу теоремы Банаха–Штейнгауза достаточно найти последовательность натуральных $\{M_j\}$, $M_j \to \infty$, и последовательность функций $\{f_j\}$, $f_j \in L(\mathbb{T})$, для которых

$$\sup_{h>0} \frac{1}{h^2} \int_0^h |f_j| \leqslant C, \tag{10.82}$$

где C — абсолютная постоянная, и $|\gamma^{-1}(2^{-j}) s_{2^j-1}(f_j, 0)| \geqslant M_j$ для некоторой подпоследовательности натуральных j. Положим $N_j = 2^j - 1$, где j — четное. По формуле суммирования Пуассона

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j(x+l)+k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}n) e^{2\pi i n x} e^{2\pi i n k 2^{-j}}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\sum\limits_{k=0}^{2^j-1} e^{2\pi i k m 2^{-j}} = 0$ для всех $m \neq 2^j l$, $l \in \mathbb{Z}$, и $\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \cap \operatorname{supp} \widehat{\varphi}(\,\cdot + k) = 0$ для $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \geqslant 2$, получаем

$$s_{N_j}(f, x) = \int_0^1 f(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}n) e^{2\pi i n(t-x)} (\widehat{\varphi}(2^{-j}n) + \\ + \widehat{\varphi}(2^{-j}n - 1) e^{2\pi i 2^j x} + \widehat{\varphi}(2^{-j}n + 1) e^{-2\pi i 2^j x})\, dt$$

для всех $f \in L(\mathbb{T})$. Следовательно,

$$s_{N_j}(f, 0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda\left(2^{-j}n\right) \widehat{f}(n),$$

где $\lambda(u) = \widehat{\varphi}^2(u) + \widehat{\varphi}(u)(\widehat{\varphi}(u-1) + \widehat{\varphi}(u+1))$. Нетрудно проверить, что $\widehat{\lambda}(u) = \alpha(u) + \beta(u)$, где

$$\alpha(u) = \frac{9(\sin 2\pi u/3 + \sin 4\pi u/3)}{2\pi u(9 - 4u^2)},$$

$$\beta(u) = \frac{3(\cos 2\pi u/3 + \cos 4\pi u/3)}{\pi(9 - 4u^2)}.$$

Положим $\sigma_N(f,x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(\frac{n}{N})\widehat{f}(n)e^{2\pi inx}$. Последовательность средних $\sigma_N(f)$ представляет собой линейный метод суммирования рядов Фурье с суммируемой $\widehat{\lambda}$. Хорошо известно, что такие линейные методы суммирования представимы в виде

$$\sigma_N(f,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{t}{N}\right)\widehat{\lambda}(t)\,dt.$$

Поскольку $\sigma_{2^j}(f,0) = s_{N_j}(f,0)$, мы имеем

$$s_{N_j}(f,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(2^{-j}t)\widehat{\lambda}(t)\,dt. \tag{10.83}$$

Положим $e_k = [3k, 3k+1/2]$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$\omega = \left\{k_r = 2^{r+j/2},\ldots,2^{r+j/2}+2^{2r-1},\ r=1,\ldots,\frac{j}{2}-2\right\},\quad \Omega = \bigcup_{k\in\omega} e_k.$$

Нетрудно видеть, что $\Omega\subset[0,2^{j-1}]$ и $e_k\cap e_l\neq\varnothing$ для всех $k,l\in\omega$, $k\neq l$, при $j\geqslant 4$. Определим четные 1-периодические функции f_j, задав их на $[0,1/2]$ равенством

$$f_j(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } 2^jx\in\Omega,\\ \ \ 0, & \text{если } 2^jx\in[0,2^{j-1}]\setminus\Omega.\end{cases}$$

Поскольку $f_j\equiv 0$ на $[0,\cdot 2^{1-j/2}]$, соотношение (10.82) очевидно выполнено при $h<2^{1-j/2}$. Если $2^{l-j/2}\leqslant h<2^{l+1-j/2}$, $l\leqslant\frac{j}{2}-2$, то

$$\int\limits_0^h |f_j| = \int\limits_{\Omega\cap[0,h]} |f_j| \leqslant \sum_{r=1}^{l}\sum_{k_r=2^{r+j/2}}^{2^{2r-1}+2^{r+j/2}} 2^{-j-1} \leqslant 2^{-j-1}\sum_{r=1}^{l}2^{2r-1} =$$

$$= O\left(2^{2l-j}\right) = O(h^2).$$

Ясно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(2^{-j}t)\widehat{\lambda}(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(2^{-j}t)\beta(t)\,dt + O(2^{-j}) =$$

$$= -\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} f_j(2^{-j}t)P(t)\frac{dt}{t^2} + O(2^{-j}),$$

где $P(t) = \cos\dfrac{2\pi t}{3} + \cos\dfrac{4\pi t}{3}$. Далее имеем

$$-\int_0^\infty f_j(2^{-j}t)P(t)\frac{dt}{t^2} = \int_\Omega P(t)\frac{dt}{t^2} + O(2^{-j}).$$

Поскольку $P(t)$ — 3-периодическая неотрицательная на Ω функция, то для всех четных $j > 6$

$$\int_\Omega P(t)\frac{dt}{t^2} = \sum_{r=1}^{\frac{j}{2}-2} \sum_{k_r=2^{r+j/2}}^{2^{r+j/2}+2^{2r-1}} \int_{e_{k_r}} P(t)\frac{dt}{t^2} \geqslant \sum_{r=1}^{\frac{j}{2}-2} \int_{2^{r+j/2}+1}^{2^{r+j/2}+2^{2r-1}+1} \frac{dt}{9t^2}\int_{e_0} P \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{r=1}^{\frac{j}{2}-2} \frac{2^{2r-1}}{(2^{r+j/2}+1)(2^{2r-1}+2^{r+j/2}+1)}\int_{e_0} P \geqslant 2^{-j-7}\left(\frac{j}{2}-2\right)\int_{e_0} P \geqslant$$

$$\geqslant Mj2^{-j},$$

где M — абсолютная постоянная. Наконец, используя (10.83), получаем

$$\left|\gamma^{-1}(1/N_j)s_{N_j}(f_j,0)\right| \geqslant M\frac{\log N_j/N_j}{|\gamma(1/N_j)|} = M_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

что и требовалось доказать.

Следующий пример показывает, что условие $m > 1$ в (10.63) не может быть опущено. Более того, если мы заменим его на предположение

$$|\varphi_j(x)| \leqslant \frac{C2^{j/2}}{1+(2^j|x|)^{m_1}},$$

$$|\widetilde{\varphi}_j(x)| \leqslant \frac{C2^{j/2}}{1+(2^j|x|)^{m_2}},$$

то ни одно из ограничений $m_1 > 1$ и $m_2 > 1$, не может быть опущено. Рассмотрим следующую пару ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$. Вторая компонента $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ есть ПКМА Хаара, порожденный функцией φ, определенной соотношением (10.81). Функции

$$\widetilde{\varphi}_j(x) = 2^{j/2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi(2^jx+2^jl) = 2^{-j/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(2^{-j}k)e^{2\pi ikx}, \quad j\in\mathbb{Z}_+,$$

образуют его масштабирующую последовательность. Первая компонента $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ определяется масштабирующей последовательностью

$$\varphi_j(x) = 2^{-j/2}\sum_{k=-2^{j-1}}^{2^{j-1}}{}' \overline{\left(\widehat{\varphi}(2^{-j}k)\right)^{-1}}e^{2\pi ikx},$$

где символ $\sum'$ означает, что первое и последнее слагаемые в сумме берутся с коэффициентом $1/2$. Поскольку для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ последовательности $S_j^k \varphi_j$, $S_j^k \widetilde{\varphi}_j$ удовлетворяют условию (9.15), значит, являются биортонормированными, и соответствующие системы всплесков $S_j^k \psi_j$, $S_j^k \widetilde{\psi}_j$ также биортонормированные по теореме 9.2.4. Функции φ_j, $\widetilde{\varphi}_j$, очевидно, принадлежат $L_\infty(\mathbb{T})$. Поэтому для любой функции $f \in L(\mathbb{T})$ можно рассматривать оба разложения: (10.61) и

$$\langle f, \varphi_0 \rangle \widetilde{\varphi}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_j^n \psi_j \rangle S_j^n \widetilde{\psi}_j. \tag{10.84}$$

Пусть $s_N(f), \widetilde{s}_N(f)$ обозначают частичные суммы порядка N рядов (10.61), (10.84) соответственно. Поскольку φ финитна, (10.63) выполнено для $\widetilde{\varphi}_j$ при любом $m > 1$. Покажем, что (10.63) выполнено для φ_j при $m = 1$. Простые вычисления дают

$$2^{j/2} \varphi_j(x) = \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \pi x \sin \pi 2^j x + {\sum_{k=0}^{2^{j-1}}}' \gamma_k \cos 2\pi k x, \tag{10.85}$$

где $\gamma_k = \dfrac{\pi 2^{-j} k}{\sin \pi 2^{-j} k} - \dfrac{\pi}{2}$. После применения двукратного преобразования Абеля последняя сумма примет вид

$$\frac{1}{2 \sin^2 \pi x} \left(\sum_{k=0}^{2^{j-1}-2} \Delta^2 \gamma_k \sin^2 \pi (k+1) x - \Delta \gamma_{2^{j-1}-1} \sin^2 \pi 2^{j-1} x \right) = O\Big(\frac{2^{-j}}{x^2}\Big). \tag{10.86}$$

Сопоставляя (10.85), (10.86) с тривиальным соотношением $\varphi_j = O(2^{j/2})$, имеем

$$|\varphi_j(x)| \leqslant \frac{C\, 2^{j/2}}{1 + 2^j |x|}.$$

Пусть $\gamma(u) = o(1)$, $u \to \infty$. Покажем, что существуют такие функции $f_1, f_2 \in L(\mathbb{T})$ с носителями на $[1/4, 1/2]$, что

$$\gamma^{-1}(2^j) s_{2^j-1}(f_1, 0) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

$$\gamma^{-1}(2^j) \widetilde{s}_{2^j-1}(f_2, 0) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

По теореме Банаха–Штейнгауза достаточно найти последовательность функций $f_1^{(j)}, f_2^{(j)} \in L(\mathbb{T})$ с носителями на $[1/4, 1/2]$ таких, что $\|f_1^{(j)}\| \leqslant 1$, $\|f_2^{(j)}\| \leqslant 1$,

$$\limsup_{j \to \infty} |\gamma^{-1}(2^j) s_{2^j-1}(f_1^{(j)}, 0)| = \infty, \tag{10.87}$$

$$\limsup_{j\to\infty} |\gamma^{-1}(2^j)\widetilde{s}_{2^j-1}(f_2^{(j)}, 0)| = \infty. \tag{10.88}$$

Определим эти последовательности на отрезке $[-1/2, 1/2]$:

$$f_1^{(j)}(x) = \begin{cases} (-1)^l, & \text{для } x \in [2^{-j}l, 2^{-j}(l+1)], 2^{j-2} \leqslant l \leqslant \frac{1}{3}2^{j-1}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$f_2^{(j)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\cos\pi 2^j x, & \text{для } x \in [1/4, 1/3], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По (10.85), (10.86), имеем

$$s_{2^j-1}(f_1^{(j)}, 0) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}} \langle f_1^{(j)}, S_j^k\widetilde{\varphi}_j\rangle \varphi_j(2^{-j}k) =$$

$$= 2^{-j}\frac{\pi}{4} \sum_{2^{j-2}\leqslant k\leqslant \frac{1}{3}2^{j-1}} \operatorname{ctg}\pi 2^{-j}(k+1/2) + O\left(\sum_{k=2^{j-2}}^{2^{j-1}} \frac{1}{k^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-j}\frac{\pi}{4} \sum_{2^{j-2}\leqslant k\leqslant \frac{1}{3}2^{j-1}} \frac{1/2}{\pi 2^{-j}(k+1/2)} + O\left(2^{-j}\right) \geqslant \frac{1}{16} + O(2^{-j}).$$

Отсюда следует (10.87). Принимая во внимание, что $S_j^k\widetilde{\varphi}_j(0) = 0$ для всех $k = 1, \ldots, 2^j - 1$, и снова по (10.85), (10.86), получаем для $j > 2$

$$s_{2^j-1}(f_2^{(j)}, 0) = \langle f_2^{(j)}, \widetilde{\varphi}_j\rangle =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{1/4}^{1/3} \operatorname{ctg}\pi(y + 2^{-j-1})|\cos\pi 2^j y|\, dy + O(2^{-j}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{24}\int_{1/4}^{1/3} |\cos\pi 2^j y|\, dy + O(2^{-j}) \geqslant M + O(2^{-j}),$$

где M — положительная постоянная.

Классы $\mathcal{L}_\alpha(x_0)$ состоят их функций, у которых интегральные средние уклонений функции от некоторой постоянной достаточно быстро стремятся к нулю. Введем обобщение таких классов, заменив константу на алгебраический полином.

Определение 10.4.5. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant r \leqslant \alpha$. Функция f принадлежит классу $\mathcal{L}_{r,\alpha}(x_0)$, если существует полином P порядка r такой, что

$$\frac{1}{h}\int_{|x-x_0|\leqslant h} |f(x) - P(x - x_0)|\, dx = O(h^\alpha).$$

Теорема 10.4.6. *Пусть ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ порожден масштабирующей функций φ с ортонормированными целыми сдвигами, ψ — соответствующая всплеск-функция, $\psi \in C^m(\mathbb{R})$,*

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}}, \ \varepsilon > 0, \quad |\psi(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^{n}}, \ n > m+1,$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Если $f \in \mathcal{L}_{r,\alpha}(x_0)$, $\alpha > 0$, $r < m$, то

$$|s_N(f, x_0) - P(0)| = O\left(N^{-\min\{\alpha, n-1\}}\right), \ N \to \infty, \tag{10.89}$$

при $\alpha \neq n-1$,

$$|s_N(f, x_0) - P(0)| = O\left(N^{-\alpha} \log N\right), \ N \to \infty, \tag{10.90}$$

при $\alpha = n-1$.

Доказательство. В условиях теоремы масштабирующая последовательность φ_j, соответствующая функции φ, представима в виде

$$\varphi_j(x) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(2^j x + 2^j l),$$

а системы $S_k^j \varphi_j$, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$, являются ортонормированными. Последовательность соответствующих всплеск-функций ψ_j представима в виде

$$\psi_j(x) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^j x + 2^j l),$$

и системы $S_k^j \psi_j$, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$, также являются ортонормированными.

Ясно, что x_0 — точка Лебега функции f, значит, по теореме 10.2.2 последовательность $s_N(f, x_0)$ сходится к $P(0)$. Поэтому

$$f(x_0) - s_N(f, x_0) =$$

$$= (s_{2^j-1}(f, x_0) - s_N(f, x_0)) + \sum_{i=j}^{\infty} (s_{2^{i+1}-1}(f, x_0) - s_{2^i-1}(f, x_0)),$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$s_{2^j+L}(f, x_0) - s_{2^j-1}(f, x_0) = O\left(2^{-j\min\{\alpha, 1-n\}}\right) \tag{10.91}$$

при всех достаточно больших $j \in \mathbb{Z}_+$ и $L = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$. Используя леммы 10.2.1, 10.1.1 и теорему 1.7.7, мы имеем

$$|s_{2^j+L}(f, x_0) - s_{2^j-1}(f, x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant 2^j \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - P(x - x_0)| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\psi(2^j x + \nu)| |\psi(2^j x_0 + \nu)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1 2^j \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - P(x - x_0)| \eta(2^{j-3}(x - x_0))\, dx, \quad (10.92)$$

где $\eta(u) = C(1 + |u|^n)^{-1}$. Выберем такое натуральное j_0, чтобы

$$\frac{1}{h} \int\limits_{|x-x_0| \leqslant h} |f(x) - P(x - x_0)|\, dx \leqslant C\, h^\alpha, \quad 0 < h \leqslant 2^{-j_0}.$$

Из монотонности η следует, что для всех $j \geqslant j_0$

$$|s_{2^j+L}(f, x_0) - s_{2^j-1}(f, x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant A 2^j \Bigg(\eta(0) \int\limits_{|x-x_0| \leqslant 2^{-j}} |f(x) - P(x - x_0)|\, dt +$$

$$+ \sum_{k=-j+1}^{-j_0} \eta(2^{j+k-3}) \int\limits_{|x-x_0| \leqslant 2^k} |f(x) - P(x - x_0)|\, dt +$$

$$+ \sum_{k=-j_0+1}^{\infty} \eta(2^{j+k-3}) \int\limits_{|x-x_0| \leqslant 2^k} |f(x) - P(x - x_0)|\, dt \Bigg) =: \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (10.93)$$

Суммы Σ_0, Σ_1 оцениваются так же, как аналогичные суммы в (10.70),

$$\Sigma_0 + \Sigma_1 = O\left(2^{-j \min\{\alpha, n-1\}}\right). \quad (10.94)$$

Используя очевидные соотношения

$$\int\limits_{|x-x_0| \leqslant h} |f(x) - P(x - x_0)|\, dt = O(h), \quad 0 < h \leqslant 1,$$

$$\int\limits_{|x-x_0| \leqslant h} |f(x) - P(x - x_0)|\, dt = O(h^{r+1}), \quad h \geqslant 1,$$

имеем

$$\Sigma_2 = O(1) \Bigg(\sum_{k=-j_0+1}^{-1} 2^{j+k} \eta(2^{j+k-3}) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{j+k(r+1)} \eta(2^{j+k-3}) \Bigg) +$$

$$+ O(1) \Bigg(2^{j(1-n)} \sum_{k=-j_o+1}^{\infty} 2^{k(1-n)} + 2^{j(1-n)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(r-n+1)} \Bigg) =$$

$$= O\left(2^{-j \min\{\alpha, n-1\}}\right).$$

Отсюда, учитывая (10.92)–(10.94), получаем (10.91). $\Diamond$

Глава 11

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСОВ ВСПЛЕСКОВ

11.1. Безусловные базисы всплесков

В этом параграфе мы будем обсуждать базисы всплесков в $L_2(\mathbb{R})$. В теореме 1.1.5 было установлено, что любой базис Рисса является безусловным в $L_2(\mathbb{R})$. Теперь мы докажем, что для широкого класса всплеск-функций такие базисы будут также безусловными и в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. При этом речь пойдет не только о базисах всплесков, порожденных некоторым КМА, но и о всевозможных базисах вида $\{\psi_{jk}\}$ с сопряженной системой $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}$, где ψ, $\widetilde{\psi}$ — функции, принадлежащие пространству $L_p(\mathbb{R})$ при любом $p \in (1, \infty)$.

Теорема 11.1.1. *Пусть $\{\psi_{jk}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}$ — биортонормированные системы, $j, k \in \mathbb{Z}$, $\{\psi_{jk}\}$ — базис Рисса в $L_2(\mathbb{R})$ и пусть существует четная ограниченная убывающая на $[0, \infty)$ функция η, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^\infty \eta(x) \ln(1+x)\, dx < \infty \tag{11.1}$$

и такая, что

$$|\psi(x)|,\ |\widetilde{\psi}(x)| \leqslant \eta(x) \tag{11.2}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда система $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ является безусловным базисом в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Основная трудность доказательства этой теоремы состоит в проверке равномерной ограниченности операторных норм из $L_p(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$ конечных частичных сумм ряда

$$\sum_{jk} \varepsilon_{jk} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk} =: U_\varepsilon f$$

по всем последовательностям знаков $\varepsilon = \{\varepsilon_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $\varepsilon_{jk} = \pm 1$ (см. приложение A.1). Доказательство этого факта будет проводиться по следующей схеме. Сначала рассмотрим функции $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Для таких функций имеет место разложение

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk},$$

где ряд сходится по норме в $L_2(\mathbb{R})$. Ясно, что оператор U_ε определен и ограничен по норме в $L_2(\mathbb{R})$ (см. следствие 1.8.6 и теорему 1.1.2). Мы установим, что сужение оператора U_ε на $L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$ имеет слабый тип $(1,1)$, а затем применим интерполяционную теорему Марцинкевича, из которой будет следовать, что этот оператор имеет сильный тип (p,p) при всех $p\in(1,2)$ (см. приложение А.4). Далее несложно проверить, что операторные нормы из $L_p(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$ конечных частичных сумм будут равномерно ограничены постоянной, не зависящей от ε, и это свойство сохранится при продолжении на все пространство $L_p(\mathbb{T})$, $1<p<2$. Из общих свойств базисности следует, что достаточно разобраться со случаем $p\in(1,2)$.

Приведем ряд вспомогательных утверждений. Во всех последующих рассуждениях будем предполагать, что функции ψ, $\widetilde{\psi}$ и η удовлетворяют условиям теоремы 11.1.1. Условимся обозначать через $C, C_1, C_2, \ldots$ постоянные, зависящие только от ψ, $\widetilde{\psi}$ и η.

Определим операторы P_j, Q_j, действующие из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, равенствами

$$P_j f := \sum_{i<j}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{ik}\rangle \psi_{ik}, \quad Q_j f := \sum_{i\geqslant j}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{ik}\rangle \psi_{ik}.$$

Ясно, что операторы P_j и Q_j — проекционные операторы соответственно на пространства

$$\overline{\operatorname{span}\{\psi_{ik},\ i<j;\ k,j\in\mathbb{Z}\}} \quad \text{и} \quad \overline{\operatorname{span}\{\psi_{ik},\ i\geqslant j;\ k,j\in\mathbb{Z}\}},$$

коммутируют с оператором U_ε, и для всех $f\in L_2(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$Q_j f := f - P_j f. \tag{11.3}$$

Л е м м а 11.1.2. *Если* $f\in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{supp} f\subset[0,1]$, *то при* $|x|>10$ *выполняется неравенство*

$$|U_\varepsilon Q_0 f(x)| \leqslant C\|f\|_1 \sum_{j\geqslant 0} 2^j \eta(2^{j-4}x). \tag{11.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, отметим, что ввиду компактности носителя функция f суммируема на $\mathbb{R}$. Имеем

$$U_\varepsilon Q_0 f(x) = \sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{jk}\langle f, \widetilde{\psi}_{jk}\rangle \psi_{jk}.$$

Разобьем эту сумму по схеме

$$\sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} = \sum_{j\geqslant 0}\sum_{|k|<5\cdot 2^j} + \sum_{j\geqslant 0}\sum_{|k|\geqslant 5\cdot 2^j} =: \Sigma_1(x) + \Sigma_2(x), \tag{11.5}$$

и оценим каждую из сумм. Заметим, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widetilde{\psi}(2^j t + k)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(2^j t + k) \leqslant 2\eta(0) + \|\eta\|_1, \tag{11.6}$$

при всех $j \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ и

$$|\psi(2^j x + k)| \leqslant \eta(2^j x + k) \leqslant \eta(2^{j-1}x) \tag{11.7}$$

при $|k| < 5 \cdot 2^j$, $|x| > 10$. Из этих соотношений следует

$$|\Sigma_1(x)| \leqslant \sum_{j\geqslant 0} \sum_{|k|<5\cdot 2^j} \int_{\mathbb{R}} |f(t) 2^{j/2} \psi(2^j t + k)|\, dt\, 2^{j/2} \eta(2^j x + k) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 0} 2^j \eta(2^{j-1}x) \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \sum_{|k|<5\cdot 2^j} |\widetilde{\psi}(2^j t + k)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (2\eta(0) + \|\eta\|_1) \sum_{j\geqslant 0} 2^j \eta(2^{j-1}x) \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt \leqslant C_1 \|f\|_1 \sum_{j\geqslant 0} 2^j \eta(2^{j-4}x).$$

Теперь оценим сумму $\Sigma_2(x)$:

$$|\Sigma_2(x)| \leqslant \sum_{j\geqslant 0} \sum_{|k|\geqslant 5\cdot 2^j} 2^j \int_0^1 |f(t)||\psi(2^j t + k)|\, dt\, |\psi(2^j x + k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 0} \sum_{|k|\geqslant 5\cdot 2^j} 2^j \|f\|_1 \sup_{t\in[0,1]} \eta(2^j t + k)\, \eta(2^j x + k) \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_1 \sum_{j\geqslant 0} 2^j \left(\sum_{k\geqslant 5\cdot 2^j} \eta(k)\eta(2^j x + k) + \sum_{k\leqslant -5\cdot 2^j} \eta(k + 2^j)\eta(2^j x + k) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_1 \sum_{j\geqslant 0} 2^j \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(k)\eta(2^j x + k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(k)\eta(2^j(x-1) + k) \right).$$

Применяя к правой части лемму 1.7.1 и принимая во внимание, что $\eta(2^{j-3}(x-1)) \leqslant \eta(2^{j-4}x)$ при $|x| > 10$, получим

$$|\Sigma_2(x)| \leqslant C_2 \|f\|_1 \sum_{j\geqslant 0} 2^j \eta(2^{j-4}x). \qquad \diamondsuit$$

Лемма 11.1.3. *Функция* $F(x) := \sum\limits_{j\geqslant 0} 2^j \eta(2^j x)$ *является четной, убывает на* $(0, \infty)$, *суммируема и ограничена на каждом интервале* $[\delta, \infty)$, $\delta > 0$.

Доказательство. Пусть $x > \delta$. Из монотонности η следует

$$\sum_{j\geqslant 0} 2^j \eta(2^j x) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \eta(2^j x) = 2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta(2^j x) \int_{2^{j-1}}^{2^j} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int\limits_{2^{j-1}}^{2^j}\eta(tx)\,dt \leqslant 2\int\limits_0^\infty \eta(tx)\,dt \leqslant \frac{1}{x}\|\eta\|_1 \leqslant \frac{1}{\delta}\|\eta\|_1. \qquad (11.8)$$

Поскольку $\eta(x)$ — четная неотрицательная убывающая на $(0,\infty)$ функция, теми же свойствами будет обладать и функция F. Осталось показать, что $\int\limits_\delta^\infty F(x)\,dx < \infty$ для любого $\delta > 0$. Используя монотонность η и (11.1), считая $\delta < 1$, имеем

$$\int\limits_\delta^\infty F(x)\,dx = \sum_{j\geqslant 0}\int\limits_\delta^\infty \eta(2^j x)2^j\,dx = \sum_{j\geqslant 0}\int\limits_{2^j\delta}^\infty \eta(u)\,du =$$

$$= \sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\geqslant j}\int\limits_{2^k\delta}^{2^{k+1}\delta}\eta(u)\,du = \sum_{k\geqslant 0}(k+1)\int\limits_{2^k\delta}^{2^{k+1}\delta}\eta(u)\,du \leqslant$$

$$\leqslant (1-\log\delta)\|\eta\|_1 + \sum_{k\geqslant 0}\log 2^k\delta\int\limits_{2^k\delta}^{2^{k+1}\delta}\eta(u)\,du \leqslant$$

$$\leqslant C_1(\delta) + \int\limits_\delta^\infty \log(u+1)\eta(u)\,du =: C_2(\delta). \quad \Diamond$$

Далее нам понадобятся двоичные интервалы, введем для них обозначение

$$I_{jk} := [-2^{-j}k, 2^{-j}(1-k)], \quad j,k\in\mathbb{Z}.$$

Условимся отождествлять интервал I_{jk} с упорядоченной парой его номеров (j,k).

Следствие 11.1.4. *Пусть* $j,k\in\mathbb{Z}$, $|2^j x + k| \geqslant 10$, $f\in L_1(\mathbb{R})\cap\cap L_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f\subset I_{jk}$. *Тогда*

$$|U_\varepsilon Q_j f(x)| \leqslant C\|f\|_1 2^j\alpha(2^j x + k), \qquad (11.9)$$

где $\alpha(x)$ *— четная суммируемая и убывающая на* $[10,\infty)$ *функция.*

Доказательство. С помощью подходящей замены переменной в (11.9) сведем доказываемое утверждение к случаю $j=0$, $k=0$. В этом случае утверждение следствия мгновенно вытекает из сопоставления лемм 11.1.2 и 11.1.3, если положить $\alpha(x) = \sum\limits_{l\geqslant 0}2^l\eta(2^l x)$ при $|x|\geqslant 10$. $\Diamond$

Лемма 11.1.5. *Пусть* $f\in L_1(\mathbb{R})$, *тогда*

$$\|U_\varepsilon P_j f\|_\infty \leqslant C\cdot 2^j\cdot\|f\|_1. \qquad (11.10)$$

Доказательство. С помощью подходящей замены переменной в (11.10) сведем доказываемое утверждение к случаю $j=0$. Используя ограниченность η и (11.6), имеем

$$|U_\varepsilon P_0 f(x)| \leqslant \sum_{i<0} 2^i \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)||\widetilde{\psi}(2^i t+k)|\,dt\,|\psi(2^i x+k)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{i<0} 2^i \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widetilde{\psi}(2^i t+k)|\,dt \leqslant C\sum_{i<0} 2^i \|f\|_1 = C\|f\|_1. \quad \lozenge$$

Лемма 11.1.6. *Пусть $f\in L_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f\subset I_{jk}$. Тогда*

$$|P_j f(x)| \leqslant 2^j \|f\|_1 \beta(2^j x+k), \tag{11.11}$$

где β — четная, убывающая и суммируемая на $[0,\infty)$ функция, обладающая свойством

$$\beta(2^l x) \leqslant 2^{4-l}\beta(x) \quad \text{при} \quad l\in\mathbb{Z}, \quad |x|\leqslant 1. \tag{11.12}$$

Доказательство. С помощью подходящей замены переменной в (11.11) сведем доказываемое утверждение к случаю $j=0$, $k=0$. Положим $\beta(x)=\mathrm{const}$ при $|x|<10$. При этом можно считать, что эта константа больше $\alpha(10)$, где α — функция из следствия 11.1.4. При $|x|>10$ из равенства (11.3) мы имеем $P_0 f(x) = -Q_0 f(x)$. Положив $\beta(x)=\alpha(x)$ при $|x|\geqslant 10$, из леммы 11.1.5 и следствия 11.1.4 получим (11.11). Соотношение (11.12) следует из очевидного неравенства $\alpha(2x)\leqslant \frac{1}{2}\,\alpha(x)$ при $|x|\geqslant 10$. $\lozenge$

Далее сужение функции f на двоичный интервал I_{jk} будем обозначать через f^{jk}, т. е. $f^{jk} := f_{\chi I_{jk}}$.

Лемма 11.1.7. *Пусть $f\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}$ — множество попарно дизъюнктных двоичных интервалов I_{jk}, для любого $(j,k)\in\mathcal{S}$ выполняется неравенство $\|f^{jk}\|_1 \leqslant 2^{1-j}\lambda$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{(j,k)\in\mathcal{S}} P_j f^{jk} \Big|^2 \leqslant C\lambda \|f\|_1. \tag{11.13}$$

Доказательство. Перепишем левую часть (11.13) в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{(j,k)\in S} \sum_{(j',k')\in S} P_j f^{jk}\,\overline{P_{j'} f^{j'k'}} := J.$$

Используя лемму 11.1.6 и заменяя переменную в интеграле, имеем

$$J \leqslant 2 \sum_{(j',k')\in S} \sum_{\substack{(j,k)\in S\\ j\geqslant j'}} \int_{\mathbb{R}} \Big| P_{j'} f^{j'k'}(x) P_j f^{jk}(x) \Big|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{(j',k')\in S} 2^{j'} \|f^{j'k'}\|_1 \sum_{\substack{(j,k)\in S\\ j\geqslant j'}} 2^j \|f^{jk}\|_1 \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(2^{j'}x+k')\beta(2^jx+k)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 4\lambda \sum_{(j',k')\in S} 2^{j'} \|f^{j'k'}\|_1 \sum_{\substack{(j,k)\in S\\ j\geqslant j'}} 2^j \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(2^{j'}x+k')\beta(2^jx+k)\,dx =$$

$$= 4\lambda \sum_{(j',k')\in S} \|f^{j'k'}\|_1 \sum_{\substack{(j,k)\in S'\\ j\geqslant 0}} 2^j \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(x)\beta(2^jx+k)\,dx, \qquad (11.14)$$

где множество $S' = S'(j',k')$ состоит из двоичных интервалов $I_{j-j',k-2^{j-j'}k'}$, $(j,k)\in S$. Ясно, что эти интервалы попарно дизъюнктны.

Докажем равномерную ограниченность внутренней суммы в правой части (11.14). Обозначим через S_{nj} множество двоичных интервалов I_{jk}, $j\geqslant 0$, $(j,k)\in S'$, содержащихся в отрезке $[n,n+1]$, и пусть $\varkappa_{nj}$ — количество элементов в S_{nj}. Тогда

$$\sum_{\substack{(j,k)\in S'\\ j\geqslant 0}} 2^j \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(x)\beta(2^jx+k)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(j,k)\in S_{nj}} \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(x)\beta(2^jx+k)\,dx =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(j,k)\in S_{nj}} \beta(x)\beta(2^jx+k)\,dx.$$

Разобьем последний интеграл по схеме

$$\int\limits_{\mathbb{R}} = \int\limits_{n-1}^{n+2} + \int\limits_{-\infty}^{n-1} + \int\limits_{n+2}^{\infty} =: J_{n1} + J_{n2} + J_{n3}.$$

Из неравенства

$$J_{n1} \leqslant \max_{[n-1,n+2]} \beta \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(j,k)\in S_{nj}} \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(2^jx+k)\,dx =$$

$$= \max_{[n-1,n+2]} \beta \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\varkappa_{nj} \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(x)\,dx \leqslant \max_{[n-1,n+2]} \beta \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(x)\,dx,$$

принимая во внимание монотонность и суммируемость функции β, получаем равномерную ограниченность суммы $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} J_{n1}$. Для оценки интегралов J_{n2}, J_{n3} заметим, что из включения $I_{jk}\subset[n,n+1]$ следует неравенство $-2^j < 2^jn+k \leqslant 0$. Если $x\leqslant n-1$, то $2^j(x-n)\leqslant -2^j$, значит, $0 < 2^jx+k = 2^j(x-n)+2^jn+k \leqslant 2^j(x-n) \leqslant 2^{j-1}(x-n)$, что влечет

$$\beta(2^jx+k) \leqslant \beta(2^{j-1}(x-n)). \qquad (11.15)$$

Если $x \geqslant n+2$, то $2^j(x-n) \geqslant 2^{j+1}$, значит, $2^jx+k = 2^j(x-n)+2^jn+ + k \geqslant 2^{j-1}(x-n) > 0$, что опять влечет (11.15). Применяя (11.15) и (11.12), имеем

$$J_{n2} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(j,k)\in S_{nj}} \int\limits_{-\infty}^{n-1} \beta(x)\beta(2^{j-1}(n-x))\,dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(j,k)\in S_{nj}} \int\limits_{1}^{\infty} \beta(n-x)\beta(2^{j-1}x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{5-j}\varkappa_{nj} \int\limits_{1}^{\infty} \beta(n-x)\beta(x)\,dx \leqslant 2^5 \int\limits_{1}^{\infty} \beta(n-x)\beta(x)\,dx.$$

Отсюда, учитывая монотонность и суммируемость функции β, получаем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{n2} \leqslant 2^5 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{1}^{\infty} \beta(n-x)\beta(x)\,dx \leqslant C.$$

И аналогично,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{n3} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(j,k)\in S_{nj}} \int\limits_{2}^{\infty} \beta(n+x)\beta(2^{j-1}x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^5 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{2}^{\infty} \beta(n+x)\beta(x)\,dx \leqslant C.$$

Сопоставляя полученные оценки с (11.14), получаем требуемое утверждение. $\Diamond$

Л е м м а 11.1.8 (разложение Кальдерона–Зигмунда). *Для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и для любого $\lambda > 0$ существует множество $\mathcal{S}$ попарно дизъюнктных двоичных интервалов I_{jk} такое, что*

$$\lambda < \frac{1}{\mu I_{jk}} \int\limits_{I_{jk}} |f(x)|\,dx \leqslant 2\lambda \tag{11.16}$$

при $(j,k) \in \mathcal{S}$, а при $(j,k) \notin \mathcal{S}$

$$|f(x)| \leqslant \lambda \tag{11.17}$$

для почти всех $x \in I_{jk}$.

Доказательство. Выберем такое $j_0 \in \mathbb{Z}$, что $2^{j_0}\|f\|_1 \leqslant \lambda$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\mu I_{j_0 k}} \int\limits_{I_{j_0 k}} |f(x)|\, dx \leqslant \lambda.$$

Каждый интервал $I_{j_0 k}$ является объединением дизъюнктных интервалов $I_{j_0+1,2k}$ и $I_{j_0+1,2k-1}$. Пусть I — один из этих двух интервалов. Для него может быть два случая:

(i) $\frac{1}{\mu I}\int\limits_I |f(x)|\, dx > \lambda$,

(ii) $\frac{1}{\mu I}\int\limits_I |f(x)|\, dx \leqslant \lambda$.

В случае (i) интервал I можно включить в множество $\mathcal{S}$, так как

$$\lambda < \frac{1}{\mu I}\int\limits_I |f(x)|\, dx \leqslant \frac{2}{\mu I_{j_0 k}} \int\limits_{I_{j_0 k}} |f(x)|\, dx \leqslant 2\lambda.$$

В случае (ii) для I повторим ту же процедуру, что и для $I_{j_0 k}$. Продолжая этот процесс, получим либо бесконечную, либо конечную (если на каком-то шаге приходим к случаю (i)) последовательность вложенных интервалов, не попавших в $\mathcal{S}$. Включим эти интервалы в множество $\mathcal{S}'$. Повторим те же действия с каждым интервалом $I_{j_0 k}$, затем с каждым интервалом $I_{(j_0+1)k}$, который еще не вошел ни в $\mathcal{S}$, ни в $\mathcal{S}'$, и т. д. Введем множество $F = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathcal{S}} I_{jk}$. Для любого $x \in F$ существует последовательность пар $(j, k_j) \in \mathcal{S}'$, $j = j_0, j_0+1, \ldots$, такая, что x принадлежит каждому интервалу $I_{j,k_j} =: I'_j$. Если x — точка Лебега функции $|f|$, то

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{\mu I'_j}\int\limits_{I'_j} (|f(t)| - |f(x)|)\, dt\right| = 0.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $j \in \mathbb{N}$, что

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\mu I'_j}\int\limits_{I'_j} |f(t)|\, dt + \varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε влечет (11.17). Осталось заметить, что по теореме Лебега почти все x являются точками Лебега суммируемой функции $|f|$. $\Diamond$

Лемма 11.1.9. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. Тогда*

$$\mu\{x \in \mathbb{R} : |U_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1. \tag{11.18}$$

Доказательство. Пусть S — множество двоичных интервалов из леммы 11.1.8. Из (11.16) следует, что

$$\mu\Big(\bigcup_{(j,k)\in\mathcal{S}} I_{jk}\Big) \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_1. \tag{11.19}$$

Положим $F = \mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathcal{S}} I_{jk}$. Представим f в виде суммы функций

$$g := f\cdot\chi_F + \sum_{(j,k)\in\mathcal{S}} P_j(f^{jk}) \tag{11.20}$$

и

$$h := f - g = \sum_{(j,k)\in\mathcal{S}} f^{jk} - P_j(f^{jk}). \tag{11.21}$$

Ясно, что

$$\mu\{x : |U_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \leqslant \\ \leqslant \mu\{x : |U_\varepsilon g(x)| > \lambda/2\} + \mu\{x : |U_\varepsilon h(x)| > \lambda/2\}. \tag{11.22}$$

Из (11.17) следует

$$\int\limits_F |f(x)|^2\,dx \leqslant \lambda\int\limits_F |f(x)|\,dx \leqslant \lambda\|f\|_1.$$

Отсюда и из леммы 11.1.7 получаем $\|g\|_2 \leqslant C_1\sqrt{\lambda\|f\|_1}$. Используя неравенство (A.3) (см. приложение A.4), имеем

$$\mu\{x:\ |U_\varepsilon g(x)| > \lambda/2\} = \mu\{x:\ |U_\varepsilon g(x)|^2 > \lambda^2/4\} \leqslant \\ \leqslant \frac{4}{\lambda^2}\|U_\varepsilon g\|_2^2 \leqslant \frac{4}{\lambda^2}\|g\|_2^2 \leqslant \frac{C_2}{\lambda^2}\,\lambda\|f\|_1 = \frac{C_2}{\lambda}\|f\|_1. \tag{11.23}$$

Положим $A = \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathcal{S}}\ \bigcup\limits_{l=-9}^{10} I_{j,k+l}$. Из (11.19) следует, что

$$\mu A \leqslant \frac{20}{\lambda}\|f\|_1. \tag{11.24}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A} |U_\varepsilon h| \leqslant \sum_{(j,k)\in\mathcal{S}}\ \int\limits_{\mathbb{R}\setminus A} |U_\varepsilon Q_j(f^{jk})| \leqslant \sum_{(j,k)\in\mathcal{S}}\ \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{l=-9}^{10} I_{j,k+l}} |U_\varepsilon Q_j(f^{jk})|.$$

Применив следствие 11.1.4, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A} |U_\varepsilon h| \leqslant C_3 \sum_{(j,k)\in\mathcal{S}} \|f^{jk}\|_1 \leqslant C_3\|f\|_1. \tag{11.25}$$

Используя (A.3) и соотношения (11.24) (11.25), имеем

$$\mu\{x:\ |U_\varepsilon h(x)| > \lambda/2\} \leqslant \mu A + \mu\{x \in \mathbb{R}\setminus A:\ |U_\varepsilon h(x)| > \lambda/2\} \leqslant \\ \leqslant \frac{20}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{2C_3}{\lambda}\|f\|_1 = \frac{C_4}{\lambda}\|f\|_1. \quad (11.26)$$

Для доказательства леммы осталось сопоставить (11.22) с (11.23) и (11.26). ♢

Следствие 11.1.10. *Пусть* $U_{\varepsilon,\Omega} f := \sum\limits_{(j,k)\in\Omega} \varepsilon_{jk}\langle f, \widetilde{\psi}_{jk}\rangle \psi_{jk}$, $p \in \in (1,2)$. *Существует постоянная* M, *зависящая только от* p *и функций* ψ *и* η *такая, что*

$$\|U_{\varepsilon,\Omega} f\|_p \leqslant M\|f\|_p \quad (11.27)$$

для всех конечных множеств $\Omega \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, *функций* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *и последовательностей знаков* ε.

Доказательство. Сначала предположим, что $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap \cap L_p(\mathbb{R})$. В этом случае (11.27) следует из леммы 11.1.9, теоремы A.4.2 и замечания A.4.3 (см. приложение A.4), поскольку оператор $U_{\varepsilon,\Omega}$ представим в виде полусуммы операторов $U_{\varepsilon'}$, $U_{\varepsilon''}$. Произвольную функцию $f \in L_p(\mathbb{R})$ можно аппроксимировать функциями из $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$. Поскольку, ввиду конечности Ω, оператор $U_{\varepsilon,\Omega}$ ограничен в $L_p(\mathbb{R})$, то, перейдя к пределу, получим (11.27) для f. ♢

Доказательство теоремы 11.1.1. В силу теоремы A.1.8 (см. приложение A.1) нам достаточно проверить, что система $\{\psi_{jk}\}$ является полной, минимальной и что операторные нормы из $L_p(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$ конечных частичных сумм ряда

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{jk}\langle f, \widetilde{\psi}_{jk}\rangle \psi_{jk}$$

равномерно ограничены. Последнее свойство было установлено в следствии 11.1.10. Минимальность следует из биортонормированности систем $\{\psi_{jk}\}$ и $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}$ (см. приложение A.1, теорема A.1.3). Осталось доказать полноту.

Пусть $p \in (1,2)$. Положим

$$\sigma_j(f,x) = \sum_{|i|<j}\sum_{|k|<2^j} \langle f, \widetilde{\psi}_{ik}\rangle \psi_{ik}$$

и покажем, что для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$

$$\|f - \sigma_j(f)\|_p \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (11.28)$$

Отметим, что при $p = 2$ это соотношение имеет место, так как $\{\psi_{jk}\}$ — безусловный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Сначала предположим, что функция f

непрерывна и финитна, $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$, тогда из неравенства Гёльдера следует

$$\int\limits_{-2R}^{2R} |f(x) - \sigma_j f(x)|^p \, dx \leqslant (4R)^{1-p/2} \|f - \sigma_j\|_2^p \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{11.29}$$

и

$$\int\limits_{|x|>2R} |f(x) - \sigma_j f(x)|^p \, dx \leqslant \|f - \sigma_j\|_2^{(p-1)} \Bigg(\int\limits_{|x|>2R} |f(x) - \sigma_j f(x)|^q \, dx \Bigg)^{1/q}, \tag{11.30}$$

где $q = 2/(3-p)$. Проверим равномерную по j ограниченность интегралов

$$\int\limits_{|x|>2R} |f(x) - \sigma_j f(x)|^q \, dx.$$

Используя лемму 1.7.1 и учитывая монотонность функции η, имеем

$$\int\limits_{|x|>2R} |f(x) - \sigma_j f(x)|^q \, dx = \int\limits_{|x|>2R} |\sigma_j f(x)|^q \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x|>2R} dx \Bigg(\int\limits_{-R}^{R} |f(y)| \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^i \eta(2^i x + k) \eta(2^i y + k) \, dy \Bigg)^q \leqslant$$

$$\leqslant C_1^q \int\limits_{|x|>2R} dx \Bigg(\int\limits_{-R}^{R} |f(y)| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^i \eta\left(2^{i-3}(x-y)\right) \, dy \Bigg)^q \leqslant$$

$$\leqslant (C_1 \|f\|_1)^q \int\limits_{|x|>2R} \Bigg(\sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^i \eta\left(2^{i-4} x\right) \Bigg)^q dx.$$

Отсюда, применив (11.8), получим

$$\int\limits_{|x|>2R} |f(x) - \sigma_j f(x)|^q \, dx \leqslant (C_2 \|f\|_1 \|\eta\|_1)^q \int\limits_{|x|>2R} \frac{dx}{|x|^q}.$$

Для доказательства (11.28) в общем случае осталось произвольную функцию $f \in L_p(\mathbb{R})$ аппроксимировать по норме в $L_p(\mathbb{R})$ финитными непрерывными функциями и принять во внимание следствие 11.1.10.

Мы установили справедливость теоремы при $p \in (1, 2)$. Ввиду следствия 1.8.6 система $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}$ тоже является базисом Рисса в $L_2(\mathbb{R})$, поэтому, поменяв системы ролями, получаем аналогичные утверждения для $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}$. Из теоремы A.1.6 (см. приложение A.1) и биортонормированности систем $\{\psi_{jk}\}$ и $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}$ следует ее справедливость и при $2<p<\infty$. $\Diamond$

11.2. Оптимальные полиномиальные базисы в пространстве $C(\mathbb{T})$

В этом параграфе мы построим ортогональные базисы в пространстве непрерывных периодических функций, состоящие из тригонометрических полиномов с минимально возможным ростом степеней.

Пусть $0<\varepsilon\leqslant 1/6$, $\varphi^M=\varphi$ — масштабирующая функция для КМА Мейера (см. параграф 1.4) с преобразованием Фурье $\widehat{\varphi}\in C^2(\mathbb{R})$, и пусть ψ — соответствующая всплеск-функция. Напомним, что φ обладает свойствами:

$$\operatorname{supp}\widehat{\varphi}\subset\left[-\frac{1}{2}(1+2\varepsilon),\frac{1}{2}(1+2\varepsilon)\right], \tag{11.31}$$

$\widehat{\varphi}\equiv 1$ на $\left[-\frac{1}{2}(1-2\varepsilon),\frac{1}{2}(1-2\varepsilon)\right]$, $\widehat{\varphi}^2(\xi)+\widehat{\varphi}^2(\xi+1)=1$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$, есть 1-периодическая функция, заданная на $[-1/2,1/2]$ равенством

$$m_0(\xi)=\widehat{\varphi}(2\xi), \tag{11.32}$$

является ее маской, и

$$\widehat{\psi}(\xi)=e^{\pi ix}m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{11.33}$$

По предложению 9.4.1 φ порождает ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ в $L_2(\mathbb{T})$, при этом функции

$$\varphi_j(x):=2^{-j/2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(2^{-j}l)e^{2\pi ilx}$$

образуют ортогонализированную масштабирующую последовательность, а функции

$$\psi_j(x):=2^{-j/2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\psi}(2^{-j}l)e^{2\pi ilx}$$

— соответствующую последовательность всплеск-функций. В силу соотношения (11.31) функции φ_j являются тригонометрическими полиномами, причем $\deg\varphi_j\leqslant 2^{j-1}(1+2\varepsilon)$.

Пусть $j,s\in\mathbb{N}$, $s\leqslant j$, ν — бинарный вектор с координатами ν_k, равными 1 или 0, $k=j-s+1,\dots,j$, определим функции $\psi^{j,s,\nu}$ равенствами

$$\widehat{\psi}^{j,s,\nu}(\xi)=2^{s/2}\prod_{k=j-s+1}^{j}(m_0(2^{j-k}\xi))^{\nu_k}\Big(e^{2\pi i2^{j-k}\xi}m_0\Big(2^{j-k}\xi+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{1-\nu_k}\widehat{\psi}(\xi) \tag{11.34}$$

и введем их периодизации

$$\psi_j^{s,\nu}(x) := 2^{-j/2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}^{j,s,\nu}(2^{-j}l)e^{2\pi i l x}. \tag{11.35}$$

Из результатов параграфа 9.3 следует, что функции $\psi_j^{s,\nu}$ порождают пакет всплесков (при мультипликаторах Δ_k, Λ_k, определяемых равенствами $\widehat{\Delta_k f}(r) = \sqrt{2}\, m_0(2^{-k}r)\widehat{f}(r)$, $\widehat{\Lambda_k f}(r) = \sqrt{2}\, e^{2\pi i 2^{-k} r} m_0(2^{-k}r + 1/2)\widehat{f}(r))$, т. е. всплеск-пространства W_j раскладываются в прямую сумму

$$W_j = \bigoplus_{\nu} W_j^{\nu}, \tag{11.36}$$

где

$$W_j^{\nu} = \operatorname{span}\{S_n^{j-s}\psi_j^{s,\nu}, n = 0, \ldots, 2^{j-s}-1\},$$

а система функций $\{S_n^{j-s}\psi_j^{s,\nu}\}_{n,\nu}$ является ортонормированным базисом в W_j.

Пусть T — тригонометрический полином, $\deg T \leqslant m2^{k-1}(1+2\varepsilon)$, где $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \leqslant 1/4m$. Из того, что функция m_0 тождественно равна нулю на множестве

$$\left\{\left[l + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-2\varepsilon), l + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1-2\varepsilon)\right], l \in \mathbb{Z}\right\}$$

следуют неравенства: $\deg \Delta_k T \leqslant (m2^{k-1} - 2^{k-2})(1+2\varepsilon)$ при нечетных m и $\deg \Lambda_k T \leqslant (m2^{k-1} - 2^{k-2})(1+2\varepsilon)$ при четных m. Отсюда, принимая во внимание, что $\deg \psi_j \leqslant 2^j(1+2\varepsilon)$, и считая $2\varepsilon \leqslant 2^{-s-2}$, нетрудно понять, что функции $\psi_j^{s,\nu}$ (для фиксированных j, s) можно перенумеровать одномерным индексом $l = 1, \ldots, 2^s$ таким образом, чтобы

$$\deg \psi_j^{s,l} \leqslant (2^{j-1} + l2^{j-s-1})(1+2\varepsilon), \tag{11.37}$$

положив $l = 2^s - (\alpha_1 2^{s-1} + \alpha_2 2^{s-2} + \ldots + \alpha_s)$, где

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu_j = 1, \\ 1, & \text{если } \nu_j = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_k = 1, \nu_{j-k} = 0, \text{ или } \ \alpha_k = 0, \nu_{j-k} = 1, \\ 1, & \text{если } \alpha_k = 0, \nu_{j-k} = 0, \text{ или } \ \alpha_k = 1, \nu_{j-k} = 1. \end{cases}$$

Теперь для данного $s \in \mathbb{N}$ определим следующую последовательность тригонометрических полиномов:

$$T_1 := \varphi_0, \tag{11.38}$$

при $j < s$, $n = 1, \ldots, 2^j$ имеем

$$T_{2^j+n} := \psi_j^{j,n}, \tag{11.39}$$

при $j \geqslant s$, $l = 1, \ldots, 2^s$, $n = 1, \ldots, 2^{j-s}$ —

$$T_{2^j+(l-1)2^{j-s}+n} := S_{n+1}^{j-s}\psi_j^{s,l}. \tag{11.40}$$

Неравенство (11.37), очевидно, влечет $\deg T_N \leqslant \frac{1}{2}N(1+2\varepsilon)$ при $N \leqslant 2^s$. Представляя натуральное $N > 2^s$ в виде $N = 2^j + m2^{j-s} + n$, где $j \geqslant s$, $m = 0, \ldots, 2^s - 1$, $n = 1, \ldots, 2^{j-s}$, из (11.37) получаем

$$\deg T_N \leqslant (2^{j-1} + (m+1)2^{j-s-1})(1+2\varepsilon) = \\ = \frac{1}{2}(2^j + m2^{j-s} + 2^{j-s})(1+2\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}N(1+2^{-s})(1+2\varepsilon).$$

По любому заданному $\varepsilon_0 > 0$ можно подобрать столь большое натуральное s и столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы для всех N выполнялось неравенство

$$\deg T_N \leqslant \frac{1}{2}N(1+\varepsilon_0). \tag{11.41}$$

В соответствии с описанной выше перенумерацией функций $\psi_j^{s,\nu}$ в обозначениях пространств W_j^ν и функций $\psi^{j,s,\nu}$ также заменим ν на одномерный индекс $l = 1, \ldots, 2^s$.

В новых обозначениях при $j \geqslant s$ мы имеем

$$W_j^l = \operatorname{span}\{T_{2^j+(l-1)2^{j-s}+1}, \ldots, T_{2^j+l2^{j-s}}\}, \quad l = 1, \ldots, 2^s, \tag{11.42}$$

$$W_j = \bigoplus_{l=1}^{2^s} W_j^l = \operatorname{span}\{T_{2^j+1}, \ldots, T_{2^{j+1}}\}, \tag{11.43}$$

а при $j < s$

$$W_j^l = \operatorname{span}\{T_{2^j+l}\}, \quad l = 1, \ldots, 2^j, \tag{11.44}$$

$$W_j = \bigoplus_{l=1}^{2^j} W_j^l = \operatorname{span}\{T_{2^j+1}, \ldots, T_{2^{j+1}}\}. \tag{11.45}$$

По построению функции $T_{2^j+1}, \ldots, T_{2^{j+1}}$ образуют пакет всплесков, значит, является ортонормированным базисом в W_j. Отсюда, получаем в силу теоремы 9.2.3 и свойства MR2 определения 9.1.1

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad L_2(\mathbb{T}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \tag{11.46}$$

Теперь, воспользовавшись равенством $V_0 = \operatorname{span}\{T_1\}$, устанавливаем, что тригонометрические полиномы T_n, $n = 1, 2 \ldots$, образуют ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{T})$. Для любой функции $f \in L(\mathbb{T})$ имеет смысл ее разложение в ряд Фурье по этому базису

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, T_n\rangle T_n. \tag{11.47}$$

Частичные суммы этого ряда будем обозначать через $\sigma_N(f)$, $N \in \mathbb{N}$.

Дальнейшая наша цель — показать, что система T_n, $n = 1, 2 \ldots$, является базисом и в пространстве $C(\mathbb{T})$.

Теорема 11.2.1. *Для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ ряд* (11.47) *равномерно сходится, и для любого $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$\|f - \sigma_N(f)\| \leqslant C\mathcal{E}_{[N/8]}(f)_\infty, \tag{11.48}$$

где C — абсолютная постоянная, а $\mathcal{E}_k(f)_\infty$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка k (*см приложение* А.15).

Доказательство. Пусть $N = 2^j + m\, 2^{j-s} + r$, $m = 0, \ldots, 2^s - 1$, $r = 0, \ldots, 2^{j-s} - 1$, тогда

$$\sigma_N(f) = \sum_{n=1}^{N} \langle f, T_n\rangle T_n = \sum_{n=1}^{2^j} \langle f, T_n\rangle T_n + \\ + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{2^{j-s}-1} \langle f, S_n^{j-s}\psi_j^{s,k+1}\rangle S_n^{j-s}\psi_j^{s,k+1} + \\ + \sum_{n=0}^{r} \langle f, S_n^{j-s}\psi_j^{s,m+1}\rangle S_n^{j-s}\psi_j^{s,m+1}. \tag{11.49}$$

Из соотношений (11.43), (11.45), (11.46) следует, что первая сумма в правой части является ортогональной проекцией функции f на пространство V_j. Переразложенная по ортонормированному базису $S_n^j\varphi_j$, $n = 0, \ldots, 2^j - 1$, она примет вид

$$\sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_n^j\varphi_j\rangle S_n^j\varphi_j =: \sigma_N^{(1)}(f).$$

Пусть $\nu \in \mathbb{Z}$, $|\nu| \leqslant 2^{j-2}$, $f_\nu(x) := e^{2\pi i\nu x}$, из построения функций φ_j, $\psi_j^{s,k}$ и свойств φ следует, что $\widehat{\psi}_j^{s,k}(\nu) = 0$ при $k = 1, \ldots, 2^s$, $\widehat{\varphi}_j(\nu) = 2^{-j/2}$, $\widehat{\varphi}_j(\nu + 2^j n) = 0$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, поэтому

$$\sigma_N(f_\nu) = \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f_\nu, S_n^j\varphi_j\rangle S_n^j\varphi_j = \\ = 2^{-j} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_j(l)\langle f_\nu, f_l\rangle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_j(k) f_k \sum_{n=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} n(k-l)}.$$

Из этого равенства, ортонормированности тригонометрической системы и соотношения (2.7) следует $\sigma_N(f_\nu) = f_\nu$. Таким образом, оператор σ_N не изменяет тригонометрические многочлены степени не выше 2^{j-2}, в частности, не изменяет и полином T наилучшего приближения функции f порядка 2^{j-2}, что влечет

$$\|f - \sigma_N(f)\| \leqslant \|f - T - \sigma_N(f - T)\| \leqslant (1 + \|\sigma_N\|)\mathcal{E}_{2^{j-2}}(f)_\infty,$$

где $\|\sigma_N\|$ операторная норма для σ_N из $C(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$. Для доказательства теоремы осталось проверить ограниченность последовательности $\|\sigma_N\|$. Из предположения $\widehat{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$ и соотношений (11.31)–(11.34) следует, что

$$|\varphi(x)|, |\psi^{j,s,l}(x)| = O\left(\frac{1}{1+x^2}\right). \tag{11.50}$$

Из этого соотношения, теоремы 10.1.2 и замечания 10.1.3 следует равномерная оценка для $\|\sigma_N^{(1)}\|$. Аналогично оцениваются нормы операторов, соответствующих другим суммам по n в правой части (11.49). $\lozenge$

Следствие 11.2.2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует базис в пространстве* $C(\mathbb{T})$, *состоящий из тригонометрических полиномов* T_n, $n = 1, 2\ldots$, *таких, что* $\deg T_n \leqslant \frac{n}{2}(1+\varepsilon)$.

Это утверждение вытекает из теоремы 11.2.1 (см. приложение А.1) и неравенства (11.41).

Порядок роста полиномов в следствии 11.2.2 не может быть уменьшен.

Теорема 11.2.3. *Если тригонометрические полиномы* T_n *образуют базис в* $C(\mathbb{T})$, *то существует такое* $\varepsilon > 0$, *что степень* T_n *не меньше* $\frac{n}{2}(1+\varepsilon)$ *для* $n \geqslant n_0$.

Доказательство этого факта приведено в статье [240].

11.3. Оптимальные полиномиальные базисы в пространстве $C[-1, 1]$

Теперь мы построим ортогональные базисы в пространстве непрерывных на отрезке функций, состоящие из алгебраических многочленов с минимально возможным ростом степеней.

Пусть $\mathcal{L}_n$, $n = 0, 1, \ldots$, — ортонормированные многочлены Лежандра (см. приложение А.20). Положим $X_0 = \mathcal{L}_0$, $X_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{L}_{2n} + i\mathcal{L}_{2n-1})$, $X_{-n} = \overline{X_n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в $L_2[-1,1]$. Будем использовать символ $\deg P$ для обозначения степени алгебраического многочлена P, рассматриваемого как полином по системе X_n, т. е. $\deg P = n$ для многочленов степени $2n$ и $2n-1$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{I}$, действующий из $L_2(\mathbb{T})$ в $L_2[-1,1]$, осуществляющий изоморфизм этих пространств так, что $X_n = \mathcal{I}f_n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $f_n(x) = e^{2\pi i n x}$. Тогда, очевидно, для любого тригонометрического полинома $T = \sum\limits_{n=-N}^{N} \alpha_n f_n$ его образ является алгебраическим многочленом вида $\mathcal{I}T = \sum\limits_{n=-N}^{N} \alpha_n X_n$, $\deg T = \deg \mathcal{I}T$, и из ортогональности функций $T_1, T_2 \in L_2(\mathbb{T})$ следует, что $\mathcal{I}T_1$ и $\mathcal{I}T_2$ ортогональны в $L_2[-1,1]$. Пусть $\varphi_j, \psi_j, \psi_j^{s,l}$ — функции из параграфа 11.2, положим

$$G_j := \mathcal{I}\varphi_j, \quad H_j := \mathcal{I}\psi_j, \quad H_j^{s,l} := \mathcal{I}\psi_j^{s,l}$$

для всех значений индексов, при которых правые части имеют смысл, и определим линейные операторы S_n^j, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n = 0, \ldots, 2^j - 1$, на $L_2[-1,1]$ равенствами

$$S_n^j X_k = e^{2\pi i 2^{-j} nk} X_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что системы $\{S_n^j G_j\}_n$, $\{S_n^j H_j\}_n$, $\{S_n^{j-s} H_j^{s,l}\}_{n,l}$, $s \leqslant j$, являются ортонормированными для любого $j \in \mathbb{Z}_+$, и

$$\begin{aligned}
&\operatorname{span}\{S_n^j G_j,\ n = 0, \ldots, 2^j - 1\} = \mathcal{I}(V_j) =: \mathcal{V}_j,\\
&\operatorname{span}\{S_n^j H_j,\ n = 0, \ldots, 2^j - 1\} = \mathcal{I}(W_j) =: \mathcal{W}_j,\\
&\operatorname{span}\{S_n^{j-s} H_j^{s,l},\ n = 0, \ldots, 2^{j-s} - 1,\ \} = \mathcal{I}(W_j^l) =: \mathcal{W}_j^l.
\end{aligned}$$

Из соотношений (11.45), (11.46) следует, что

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j, \quad \mathcal{W}_j = \mathcal{W}_j^1 \oplus, \ldots, \oplus \mathcal{W}_j^{2^s}, \tag{11.51}$$

$$L_2[-1,1] = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \ldots. \tag{11.52}$$

Теперь положим $P_n := \mathcal{I}T_n$, где T_n — тригонометрические полиномы, определенные равенствами (11.38)–(11.40), в которых параметры s и ε выбраны так, чтобы по заданному $\varepsilon_0 > 0$ обеспечить неравенство (11.41). Тогда многочлены P_n, $n \in \mathbb{N}$, образуют ортонормированный базис в $L_2[-1,1]$,

$$\deg P_n \leqslant \frac{n}{2}(1 + \varepsilon_0), \tag{11.53}$$

и при $j \geqslant s$

$$\mathcal{W}_j^l = \operatorname{span}\{P_{2^j + (l-1)2^{j-s} + 1}, \ldots, P_{2^j + l2^{j-s}}\}, \quad l = 1, \ldots, 2^s, \tag{11.54}$$

а при $j < s$

$$\mathcal{W}_j^l = \operatorname{span}\{P_{2^j + l}\}, \quad l = 1, \ldots, 2^j, \tag{11.55}$$

Итак, с помощью оператора $\mathcal{I}$ мы, отправляясь от ПКМА, индуцировали аналогичную структуру в пространстве $L_2[-1,1]$, а отправляясь от тригонометрического базиса $\{T_n\}_n$ — базис $\{P_n\}_n$ из алгебраических многочленов, унаследовавший ряд свойств своего прообраза. Далее будет показано, что эти многочлены унаследовали и свойство базисности в пространстве непрерывных функций. Однако доказательство аналога теоремы 11.2.1 оказалось существенно более сложным в техническом плане. Прежде, чем перейти к этому утверждению, докажем ряд вспомогательных фактов.

Лемма 11.3.1. *Пусть $\theta \in (0,1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, тогда $X_n(\cos\pi\theta)$ есть сумма двух слагаемых вида*

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\left[A_1(\theta)\xi_1(n)e^{2\pi in\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)e^{-2\pi in\theta}\right] + O\left(\frac{1}{|n|(\sin\pi\theta)^{3/2}}\right), \tag{11.56}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\left[A_1(\theta)\xi_1(n)e^{2\pi in\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)e^{-2\pi in\theta}\right] + \\ + \frac{1}{n(\sin\pi\theta)^{3/2}}\left[A_3(\theta)\xi_3(n)e^{2\pi in\theta} + A_4(\theta)\xi_4(n)e^{-2\pi in\theta}\right] + \\ + O\left(\frac{1}{n^2(\sin\pi\theta)^{5/2}}\right), \tag{11.57}$$

или

$$\int\limits_0^\theta \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau - \cos\pi\theta}}\left[\sqrt{n}\,A_5(\tau)\xi_5(n)e^{2\pi in\tau} + \sqrt{n}\,A_6(\tau)\xi_6(n)e^{-2\pi in\tau} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{n}}A_7(\tau)\xi_7(n)e^{2\pi in\tau} + \frac{1}{\sqrt{n}}A_8(\tau)\xi_8(n)e^{-2\pi in\tau}\right] + O\left(\frac{1}{|n|^{3/2}}\right), \tag{11.58}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\left[A_1(\theta)\xi_1(n)e^{2\pi in\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)e^{-2\pi in\theta} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\int\limits_\theta^{1/2}\frac{dt}{\sin^{3/2}\pi t}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau - \cos\pi t}}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}A_9(t)\xi_9(n)e^{2\pi in(\tau+t-\theta)} + \right. \\ + \frac{1}{\sqrt{n}}A_{10}(t)\xi_{10}(n)e^{-2\pi in(\tau+t-\theta)} + n^{-3/2}A_{11}(t)\xi_{11}(n)e^{2\pi in(\tau+t-\theta)} + \\ \left. + n^{-3/2}A_{12}(t)\xi_{12}(n)e^{-2\pi in(\tau+t-\theta)} + O\left(\frac{1}{|n|^{5/2}}\right)\right], \tag{11.59}$$

где $x^a = |z|^a e^{ia\arg z}$, $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, ξ_l — функции, постоянные на интервалах $(0,\infty)$ и $(-\infty,0)$, $|A_l(\theta)| \leqslant C$.

Представления (11.56)–(11.58) легко выводятся соответственно из соотношений (A.42), (A.43), (A.39) приложения A.20, если применить формулы Эйлера и произвести элементарные тригонометрические преобразования. Аналогично (11.59) следует из сопоставления (A.40) с (A.39).

Лемма 11.3.2. *Пусть* $\gamma \in C^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\gamma \subset [-\Delta, \Delta]$, $\theta \in \mathbb{R}$, *тогда*

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l)e^{2\pi il\theta} = O\left(\frac{1}{|\sin\pi\theta|}\right), \tag{11.60}$$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l)e^{2\pi il\theta} = O\left(\frac{1}{2^j|\sin\pi\theta|^2}\right), \tag{11.61}$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l)e^{2\pi il\theta}\right| d\theta = O(1). \tag{11.62}$$

Доказательство. Для доказательства (11.60) применим к левой части преобразование Абеля и воспользуемся явным представлением ядра Дирихле. Для доказательства (11.61) дважды применим к левой части преобразование Абеля, используем явное представлением ядра Фейера, неравенство (см. приложение A.14)

$$|\Delta_h^2\gamma(x)| \leqslant h^2\|\gamma^{(2)}\|_\infty$$

и стуктурные свойства γ. Для доказательства (11.62) заметим, что

$$|\widehat{\gamma}(u)| = O\left(\frac{1}{1+u^2}\right),$$

и, значит, в силу формулы суммирования Пуассона

$$\int_0^1 \left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l)e^{2\pi il\theta}\right| d\theta \leqslant 2^j \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\gamma}(2^jx + 2^jk)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\gamma}(x)|\, dx. \quad \Diamond$$

Лемма 11.3.3. *В условиях леммы* 11.3.2

$$\int_0^1 \left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l)e^{2\pi il\theta}\right| \sqrt{|\sin\pi\theta|}\, d\theta = O(2^{-j/2}), \tag{11.63}$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l)e^{2\pi il\theta}\right| \frac{d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}} = O(2^{j/2}). \tag{11.64}$$

Доказательство. Для доказательства (11.63) разобьем интеграл по схеме:

$$\int_0^1 = \int_{-1/2}^{1/2} = \int_{|\theta|\leqslant 2^{-j}} + \sum_{s=1}^{j-1} \int_{2^{-j+s-1}\leqslant|\theta|\leqslant 2^{-j+s}} = \sum_{s=0}^{j-1} I_s.$$

Из (11.62) следует $I_0 = O(2^{-j/2})$. При $s > 0$, применяя к подынтегральному выражению (11.61), имеем

$$\sum_{s=1}^{j-1} I_s \leqslant C 2^{-j} \sum_{s=1}^{j-1} 2^{\frac{j-s}{2}} = O(2^{-j/2}).$$

Аналогично, используя (11.60) вместо (11.61) и очевидное соотношение $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l)\, e^{2\pi i l\theta} = O(2^j)$ вместо (11.62), получаем (11.64). $\Diamond$

Введем обозначения: $e_\tau := \{t \in \mathbb{R}\colon\ |\sin \pi t| \leqslant |\sin \pi\tau|\}$, для фиксированного $\phi \in [0, 1/2]$ положим

$$h_1(t) = \chi_{e_{2\phi}}(t) \cos \pi t, \quad h_2(t) = \cos \pi t - h_1(t).$$

Л е м м а 11.3.4. *Пусть* $\gamma \in C^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\gamma \subset [-\Delta, \Delta] \setminus [-\delta, \delta]$, $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\sigma^{\pm}_{\alpha,\nu}(\theta) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l)(2^{-j}l)^{\alpha} \xi_\nu(2^{-j}l) e^{2\pi i l(\tau\pm\theta)},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, ξ_ν — *функции из леммы* 11.3.1. *Тогда*

$$\int_0^1 \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l) e^{2\pi i l\tau} X_l(\cos\pi\theta) \right| dh_1(\theta) \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sqrt{\phi} \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \left(\left|\sigma^{+}_{0,1}(\theta)\right| + \left|\sigma^{-}_{0,2}(\theta)\right| \right) d\theta + O(1) \right\}, \qquad (11.65)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}l) e^{2\pi i l\tau} X_l(\cos\pi\theta) \right| dh_2(\theta) \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_{-1/2}^{1/2} \left(\left|\sigma^{+}_{0,1}(\theta)\right| + \left|\sigma^{-}_{0,2}(\theta)\right| \right) \frac{|h_2'(\theta)|\, d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}} +$$

$$+ C_3 2^{-j} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\left|\sigma^{-}_{-1,3}(\theta)\right| + \left|\sigma^{-}_{-1,4}(\theta)\right| \right) \frac{|h_2'(\theta)|\, d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|^3}} + O(2^{-j/2}). \qquad (11.66)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение (11.65) несложно вывести из (11.56), если при оценке остаточного члена принять во внимание структуру носителя функции γ и учесть периодичность функций $\sigma^{\pm}_{\alpha,\nu}$. Для доказательства (11.66) разобьем интеграл в левой части по схеме:

$$\int\limits_{[0,1]\setminus e_{2\phi}} = \int\limits_{\left(e_{2^{-j}} \setminus e_{2\phi}\right) \bigcap [0,1]} + \int\limits_{[0,1]\setminus e_{2^{-j}}} = I_1 + I_2.$$

Если $\phi \geqslant 2^{-j-1}$, то $I_1 = 0$. Если $\phi \leqslant 2^{-j-1}$, то те же рассуждения, которые применялись для доказательства (11.65), дают

$$I_1 \leqslant C\left\{\int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(\left|\sigma^+{}_{0,1}(\theta)\right| + \left|\sigma^-{}_{0,2}(\theta)\right|\right) \frac{|h_2'(\theta)|\,d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}} + O(2^{-j/2})\right\}.$$

Аналогично, чтобы оценить I_2, применим (11.57). Снова, учитывая структуру носителя γ при оценке остатка, получаем (11.66). $\Diamond$

Пусть $\psi \in L(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nu = 1, \ldots, 8$. Положим

$$s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau) = s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau,\psi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(n2^{-j}\pm\tau)l}(2^{-j}l)^{\alpha}\xi_\nu(2^{-j}l)\widehat{\psi}(2^{-j}l),$$

где ξ_ν — функции из леммы 11.3.1.

Л е м м а 11.3.5. *Пусть $|\tau| \leqslant 1/4$, $|\gamma| \leqslant 1/2$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\widehat{\psi} \in C^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset [-\Delta,\Delta]\setminus[-\delta,\delta]$. Тогда*

$$I = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)||s^{\pm}_{n,\beta,\mu}(\theta\pm\tau)||\sin\pi\theta|^{\gamma}\,d\theta = O\left(2^{(1-\gamma)j}\right),$$

где знаки + или − в выражениях $s^{\pm}_{n,\beta,\mu}$ и $\theta\pm\tau$ согласованы таким образом, что τ входит во все экспоненты подынтегрального выражения с одним и тем же знаком.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не умаляя общности, можно ограничиться рассмотрением знаков + вместо каждого из трех $\pm$. Кроме того оставим только первую половину слагаемых в подынтегральной сумме. Для второй половины оценка проводится с помощью аналогичных рассуждений. Функции $g_{\alpha,\nu}$, $g_{\beta,\mu}$, определяемые равенствами $\widehat{g}_{\alpha,\nu}(u) = \widehat{\psi}(u)\xi_\nu(u)u^{\alpha}$, $\widehat{g}_{\beta,\mu}(u) = \widehat{\psi}(u)\xi_\mu(u)u^{\beta}$, очевидно, имеют тот же порядок убывания, что и ψ, поэтому

$$|g_{\alpha,\nu}(u)|, |g_{\beta,\mu}(u)| = O\left(\frac{1}{1+u^2}\right), \tag{11.67}$$

и по формуле суммирования Пуассона

$$\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} |s^{+}_{n,\alpha,\nu}(\tau)||s^{+}_{n,\beta,\mu}(\theta+\tau)| =$$

$$= 2^{2j}\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} g_{\alpha,\nu}(2^j\tau + 2^j l + n)\right|\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_{\beta,\mu}(2^j(\theta+\tau) + 2^j k + n)\right|. \tag{11.68}$$

Поскольку в силу (11.67)

$$\sum_{l\neq 0}|g_{\alpha,\nu}(2^j\tau+2^jl+n)|=O(2^{-2j}),$$

$$\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{\beta,\mu}(2^j(\theta+\tau)+2^jk+n)|=O(1),$$

правая часть (11.68) не превосходит

$$2^{2j}\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{\alpha,\nu}(2^j\tau+n)||g_{\beta,\mu}(2^j(\theta+\tau)+2^jk+n)|+O(1).$$

Отсюда, из леммы 1.7.1 и (11.68) следует

$$\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}|s^+_{n,\alpha,\nu}(\tau)||s^+_{n,\beta,\mu}(\theta+\tau)||\sin\pi\theta|^\gamma=$$
$$=O\left(1+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2^{2j}|\theta|^\gamma}{1+(2^j(\theta+k))^2}\right)=O\left(1+\frac{2^{2j}|\theta|^\gamma}{1+(2^j(\theta))^2}\right). \quad (11.69)$$

Разбивая интеграл I по схеме

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}=\int\limits_{|\theta|\leqslant 2^{-j}}+\sum_{s=0}^{j-1}\int\limits_{2^{-j+s-1}\leqslant|\theta|\leqslant 2^{-j+s}}$$

и применяя (11.69) к подынтегральному выражению в каждом слагаемом, получаем

$$I=O\left(2^{j(1-\gamma)}+2^{j(1-\gamma)}\sum_{s=0}^{j-1}2^{-s(1-\gamma)}\right)=O\left(2^{j(1-\gamma)}\right). \qquad \diamondsuit$$

Следствие 11.3.6. *В условиях леммы* 11.3.5 *выполняется соотношение*

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^\pm_{n,\alpha,\nu}(\tau)||s^\pm_{n,\beta,\mu}(\theta)|\,d\theta=O\left(2^j\right).$$

Утверждение следствия является частным случаем леммы 11.3.5, если произвести замену переменной $\theta=\theta'\pm\tau$ и принять во внимание периодичность подынтегральной функции.

Лемма 11.3.7. *Пусть функция* ψ *удовлетворяет условиям леммы* 11.3.5, $H_j := 2^{-j/2}\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\psi}(2^{-j}l)X_l$, $j\in\mathbb{Z}_+$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $n=0,\ldots,2^j-1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\left|S^j_nH_j(\cos\pi\theta)\right|\,dh_1(\theta)\leqslant$$

$$\leqslant C_12^{-j/2}\sqrt{\phi}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\,(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}_{n,0,2}(\theta)|)\,d\theta+$$

$$+O\left(2^{j/2}\sqrt{\phi}\right). \qquad (11.70)$$

$$\int\limits_0^1\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\left|S^j_nH_j(\cos\pi\theta)\right|\,dh_2(\theta)\leqslant$$

$$\leqslant C_22^{-j/2}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\,(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}_{n,0,2}(\theta)|)\,\frac{|h_2'(\theta)|\,d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}}+$$

$$+C_32^{-3j/2}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\,(|s^{+}_{n,-1,3}(\theta)|+|s^{-}_{n,-1,4}(\theta)|)\,\frac{|h_2'(\theta)|\,d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|^3}}+$$

$$+O\left(1\right). \qquad (11.71)$$

Доказательство. На основании (11.56), (11.57), принимая во внимание, что $\widehat{\psi}(2^{-j}l)$ отлично от нуля лишь при $2^j\delta\leqslant|l|\leqslant2^j\Delta$, имеем

$$|S^j_nH_j(\cos\pi\theta)|\leqslant C_1\left(\frac{2^{-j}}{\sin\pi\theta}\right)^{1/2}(|s^{+}{}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}{}_{n,0,2}(\theta)|)+$$

$$+O\Big(\frac{2^{-j/2}}{\sin^{3/2}\pi\theta}\Big), \qquad (11.72)$$

$$|S^j_nH_j(\cos\pi\theta)|\leqslant C_2\left(\frac{2^{-j}}{\sin\pi\theta}\right)^{1/2}(|s^{+}{}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}{}_{n,0,2}(\theta)|)+$$

$$+C_3\left(\frac{2^{-j}}{\sin\pi\theta}\right)^{3/2}(|s^{+}{}_{n,-1,3}(\theta)|+|s^{-}{}_{n,-1,4}(\theta)|)+O\Big(\frac{2^{-3j/2}}{\sin^{5/2}\pi\theta}\Big).$$

$$(11.73)$$

Пусть $g_{\alpha,\nu}$ — функция, определенная в лемме 11.3.5. Из формулы суммирования Пуассона и (11.67) следует

$$\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}{}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|=2^j\sum_{n=0}^{2^j-1}\Big|\sum_{l\in\mathbb{Z}}g_{\alpha,\nu}(\pm2^j\tau+2^jl+n)\Big|=O\left(2^j\right). \qquad (11.74)$$

Соотношения (11.72) и (11.74) влекут (11.70), если принять во внимание периодичность функций $s^{\pm}{}_{n,\eta,\varkappa}(\theta)$. Для доказательства (11.71) разобьем интеграл в левой части по схеме

$$\int\limits_{[0,1]\setminus e_{2\phi}} = \int\limits_{(e_{2-j}\setminus e_{2\phi})\bigcap[0,1]} + \int\limits_{[0,1]\setminus e_{2-j}} = I_1 + I_2.$$

Если $|\phi| \geqslant 2^{-j-1}$, то $I_1 = 0$. Если $|\phi| \leqslant 2^{-j-1}$, то те же рассуждения, которые применялись для доказательства (11.70), дают

$$I_1 \leqslant C_4 2^{-j/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)| \left(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)| + |s^{-}_{n,0,2}(\theta)|\right) \frac{|h_2'(\theta)|\, d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}} + O(1).$$

Аналогично, чтобы оценить I_2, применим (11.73) и (11.74). Осталось заметить, что

$$2^{-j/2} \int\limits_{[0,1]\setminus e_{2-j}} \frac{dh_2(\theta)}{\sin^{5/2}\pi\theta} = O(1). \qquad \Diamond$$

Лемма 11.3.8. *Пусть функции ψ, H_j удовлетворяют условиям леммы* 11.3.7, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n = 0, \ldots, 2^j - 1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 |S_j^n H_j(\cos\pi\theta)|\, d\cos\pi\theta = O\left(2^{-j/2}\right).$$

Доказательство. На основании (11.72) имеем

$$\int\limits_0^1 |S_n^j H_j(\cos\pi\theta)|\, d\cos\pi\theta \leqslant$$

$$\leqslant C 2^{-j/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(|s^{+}{}_{n,0,1}(\theta)| + |s^{-}{}_{n,0,2}(\theta)|\right) d\theta + O\left(2^{-j/2}\right).$$

Пусть $g_{0,\nu}$, $\nu = 1, 2$ — функции, определенные в лемме 11.3.5. По формуле суммирования Пуассона

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} |s^{\pm}{}_{n,0,\nu}(\theta)|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2^j \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int\limits_{-1/2}^{1/2} |g_{0,\nu}(\pm 2^j\theta + 2^j l + n)|\, d\theta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g_{0,\nu}(\pm\theta)|\, d\theta.$$

Осталось заметить, что интеграл в правой части этого равенства конечен в силу (11.67). $\Diamond$

Лемма 11.3.9. *Для всех $N \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{2n} \mathcal{L}_k(x)\mathcal{L}_k(t) \right| dt = O(1).$$

Доказательство. Поскольку функции Лебега сумм Фейера–Лежандра равномерно ограничены (см. приложение А.20), в силу равенства

$$\sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k(x)\mathcal{L}_k(t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{2n} \mathcal{L}_k(x)\mathcal{L}_k(t) + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2n+1} \mathcal{L}_k(x)\mathcal{L}_k(t) =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2n} \mathcal{L}_k(x)\mathcal{L}_k(t) + \sum_{k=0}^{2N} \mathcal{L}_k(x)\mathcal{L}_k(t) + \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{L}_{2n+1}(x)\mathcal{L}_{2n+1}(t) =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{2n} \mathcal{L}_k(x)\mathcal{L}_k(t) - \sum_{n=0}^{N} \mathcal{L}_{2n}(x)\mathcal{L}_{2n}(t)$$

достаточно доказать соотношение

$$I = \frac{1}{N} \int_{-1}^{1} \left| \sum_{n=0}^{N} \mathcal{L}_{2n}(x)\mathcal{L}_{2n}(t) \right| dt = O(1). \tag{11.75}$$

Положим $t = \cos\pi\theta$, $x = \cos\pi\phi$, $\phi, \theta \in [0,1]$. Поскольку $\mathcal{L}_{2n}$ — четная функция, достаточно ограничиться рассмотрением случая $\phi \in [0, 1/2]$. Применяя (A.42) к $\mathcal{L}_{2n}(\cos\pi\theta)$ и используя (A.38) при оценке остаточного члена, имеем

$$I = \frac{\sqrt{2}}{N\sqrt{\pi}} \int_{0}^{1} \left| \sum_{n=0}^{N} \mathcal{L}_{2n}(\cos\pi\phi) \cos\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\theta - \frac{\pi}{4}\right] \right| \frac{d\cos\pi\theta}{\sqrt{\sin\pi\theta}} + O(1).$$

Интеграл в правой части разобьем по схеме

$$\int_{0}^{1} d\cos\pi\theta = \int_{0}^{1} dh_1(\theta) + \int_{0}^{1} dh_2(\theta) = I_1 + I_2.$$

Для оценки I_2 при $\phi \neq 0$ применим к $\mathcal{L}_{2n}(\cos\pi\phi)$ формулу Дирихле–Мелера (A.39). После перестановки интегралов получим

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2} \int_{0}^{\phi} \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau - \cos\pi\phi}} \int_{0}^{1} \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i n(\theta+\tau)} \sqrt{n + \frac{1}{4}} \right| + \right.$$

$$+\left|\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi in(\theta-\tau)}\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right| + \left|\sum_{n=0}^{N} e^{-2\pi in(\theta+\tau)}\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right| +$$

$$+\left|\sum_{n=0}^{N} e^{-2\pi in(\theta-\tau)}\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right|\Bigg\}\frac{dh_2(\theta)}{\sqrt{\sin\pi\theta}}. \quad (11.76)$$

Производя преобразование Абеля в каждой из сумм и используя хорошо известные свойства ядер Дирихле, устанавливаем, что эти суммы имеют порядок $O(\sqrt{N}\,|\sin\pi(\theta\pm\tau)|^{-1})$. Таким образом, внутренний интеграл в (11.76) не превосходит суммы четырех слагаемых вида

$$C_1\sqrt{N}\int_0^1 \frac{dh_2(\theta)}{|\sin\pi(\theta\pm\tau)|\sqrt{\sin\pi\theta}}. \quad (11.77)$$

Поскольку $\tau\leqslant\phi$, то $|\sin\pi(\theta\pm\tau)|^{-1} = O\left((\sin\pi\theta)^{-1}\right)$ при $\theta\geqslant 2\phi$. Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{dh_2(\theta)}{|\sin\pi(\theta\pm\tau)|\sqrt{\sin\pi\theta}} \leqslant C_2\int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\pi\theta}} = O(1).$$

Сопоставляя это соотношение с (11.77) и (11.76), получаем

$$I_2 = O(\sqrt{N}\,). \quad (11.78)$$

Для $\phi=0$ интеграл I_2 можно оценить точно так же, используя вместо формулы Дирихле–Мелера равенство (A.38). Теперь оценим I_1 в случае, когда $\phi\leqslant 1/N$. Для $\phi\neq 0$ снова воспользуемся формулой Дирихле–Мелера:

$$I_1 \leqslant C_3\int_0^{\phi}\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi\phi}}\int_0^1\sum_{n=0}^{N}\sqrt{n+\frac{1}{4}}\,\frac{g_1'(\theta)}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\,d\theta.$$

Учитывая, что $g_1'(\theta)\sin\pi\theta^{-1/2}\leqslant C\sqrt{\phi} = O\left(N^{-1/2}\right)$, получаем

$$I_1 = O(N). \quad (11.79)$$

Аналогично, (11.79) следует из (A.38) при $\phi=0$. Наконец, рассмотрим случай $\phi\geqslant 1/N$. Сопоставляя соотношения (A.39) и (A.40), имеем

$$(\sin\pi\phi)^{1/2}\mathcal{L}_{2n}(\cos\pi\phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\phi-\frac{\pi}{4}\right] -$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}\int_{\phi}^{1/2}\frac{\sin\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)(t-\phi)}{4\sin^{3/2}\pi t}\,dt\int_0^t\frac{\cos\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi t}}\,d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $g_1'(\theta)(\sin\pi\theta)^{-1/2} = O\left(\phi^{1/2}\right)$ и $\phi^{-1} \leqslant N$, получаем

$$I_1 \leqslant C_4 \int\limits_{\phi}^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} + O(1) = O\left(\sqrt{\frac{N}{\phi}} + 1\right) = O(N).$$

Эта оценка вместе с (11.78) и (11.79) с дает (11.75). $\Diamond$

Теперь вернемся к рассмотрению построенного в начале параграфа ортонормированного базиса $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$. Для любой непрерывной на $[-1,1]$ функции f имеет смысл ее разложение в ряд Фурье по этому базису

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, P_n\rangle P_n. \tag{11.80}$$

Частичные суммы этого ряда будем обозначать через $\sigma_N(f)$, $N \in \mathbb{N}$.

Теорема 11.3.10. *Для любой функции $f \in [-1,1]$ ряд (11.80) равномерно сходится на $[-1,1]$, и для любого $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$\|f - \sigma_N(f)\| \leqslant C\mathcal{A}_{[N/4]}(f)_\infty, \tag{11.81}$$

где C — абсолютная постоянная, $\mathcal{A}_k(f)_\infty = \inf \|f - P\|_\infty$, инфимум берется по всевозможным алгебраическим многочленам P степени не выше k.

Доказательство. Из сопоставления определений функций $G_j, H_j, H_j^{s,l}$ и $\varphi_j, \psi_j, \psi_j^{s,l}$ следуют равенства

$$G_j = 2^{-j/2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}l) X_l,$$
$$H_j = 2^{-j/2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(2^{-j}l) X_l,$$
$$H_j^{s,l} = 2^{-j/2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}^{s,\nu}(2^{-j}l) X_l.$$

Используя эти равенства и соотношения (11.51), (11.52), (11.54), (11.55), повторив дословно рассуждения начала доказательства теоремы 11.3.10, получим оценку

$$\|f - \sigma_N(f)\| \leqslant (1 + \|\sigma_N\|)\mathcal{A}_{[N/4]}(f)_\infty,$$

где $\|\sigma_N\|$ — операторная норма для σ_N из $C[-1,1]$ в $C[-1,1]$. Получаем представление частичной суммы σ_N с номером $N = 2^j + m2^{j-s} + r$, $m = 0, \ldots, 2^s - 1$, $r = 0, \ldots, 2^{j-s} - 1$, в виде

$$\sigma_N(f) = \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_n^j G_j\rangle S_n^j G_j + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{2^{j-s}-1} \langle f, S_n^{j-s} H_j^{s,k+1}\rangle S_n^{j-s} H_j^{s,k+1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{r}\langle f, S_n^{j-s}H_j^{s,m+1}\rangle S_n^{j-s}H_j^{s,m+1}.$$

Для доказательства теоремы нам надо проверить ограниченность последовательности $\|\sigma_N\|$. Для этого достаточно убедиться в равномерной (по $x\in[-1,1]$) ограниченности интегралов

$$J(x)=\int_{-1}^{1}\left|\sum_{n=0}^{2^j-1}S_n^jG_j(x)\overline{S_n^jG_j(t)}\right|dt,$$

$$J^m(x)=\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{2^{j-s}-1}\left|S_n^{j-s}H_j^{s,m}(x)S_n^{j-s}H_j^{s,m}(t)\right|dt,\quad m=1,\ldots,2^s.$$

Зафиксируем m и займемся оценкой J^m. Переобозначим функции $H_j^{s,m}$, $\psi^{s,m}$ через H_j, ψ (выше эти обозначения имели другой смысл, но они уже больше не будут использоваться). Отметим, что функция $\widehat{\psi}$ удовлетворяет условиям леммы 11.3.5. Ясно, что

$$J^m(x)\leqslant\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{2^j-1}|S_n^jH_j(x)S_n^jH_j(t)|\,dt=I.$$

Ограничимся рассмотрением случая $x\in[0,1]$, для $x\in[-1,0]$ доказательство аналогично. Положим $x=\cos\pi\phi$, $\phi\in[0,1/2]$. Пусть сначала $\phi\in[1/4,1/2]$. Применяя к $S_n^jH_j(\cos\pi\phi)$ неравенства (11.72) и (11.74), получим

$$I\leqslant C_12^{j/2}\max_n\int_{-1}^{1}|S_n^jH_j(t)|\,dt.$$

Отсюда и из леммы 11.3.8 следует $I=O(1)$.

Теперь рассмотрим случай $\phi\in(0,1/4]$. Произведем в интеграле I замену переменной $t=\cos\pi\theta$, $\theta\in[0,1]$ и разобьем его по схеме

$$I=\int_0^1 dh_1(\theta)+\int_0^1 dh_2(\theta)=I_1+I_2.$$

При $\phi\geqslant 2^{-j}$ для доказательства ограниченности I_1 оценим $S_n^jH_j(\cos\phi)$, используя (11.59) и учитывая структуру носителя функции $\widehat{\psi}$:

$$|S_n^jH_j(\cos\phi)|\leqslant C_2\,\frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}}\Big[|s^+{}_{n,0,1}(\phi)|+|s^-{}_{n,0,2}(\phi)|+$$

$$+ 2^{-j/2} \int\limits_{\phi}^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} \int\limits_{0}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau - \cos\pi t}} \big(|s^{+}{}_{n,-1/2,9}(\tau + t - \phi)| +$$

$$+ |s^{-}{}_{n,-1/2,10}(\tau + t - \phi)|\big) + O(2^{-j/2})\Bigg]. \quad (11.82)$$

В каждом слагаемом внеинтегральной и подынтегральной сумм присутствует выражение вида $s^{\pm}{}_{n,\alpha,\nu}(u)$. Соответствующее слагаемое в I_1 оценится через интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s^{\pm}{}_{n,\alpha,\nu}(u)||S_n^j H_j(\cos\pi\theta)|\, dh_1(\theta) = I_1^{\alpha,\nu}.$$

Применяя к этому интегралу неравенство (11.70), а затем к каждому слагаемому правой части (11.70) следствие к лемме 11.3.5, устанавливаем, что $I_1^{\alpha,\nu} = O\left(2^{j/2}\sqrt{\phi}\right)$. Отсюда, учитывая при оценке остаточного члена лемму 11.3.8, получаем $I_1 = O\left(1 + (2^j\phi)^{-1/2}\right) = O(1)$. Для доказательства ограниченности I_2 при $\phi \neq 0$ оценим $S_n^j H_j(\cos\phi)$, используя (11.58):

$$|S_n^j H_j(\cos\phi)| \leqslant C_3 \int\limits_{0}^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{\cos\pi t - \cos\pi\phi}} \big(|s^{+}{}_{n,1/2,5}(t)| + |s^{-}{}_{n,1/2,6}(t)| +$$

$$+ |s^{+}{}_{n,-1/2,7}(t)| + |s^{-}{}_{n,-1/2,8}(t)| + O\left(2^{-j/2}\right)\big). \quad (11.83)$$

В каждом слагаемом подынтегральной суммы присутствует выражение вида $s^{\pm}{}_{n,\alpha,\nu}(t)$. Соответствующее слагаемое в I_2 оценивается через интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s^{\pm}{}_{n,\alpha,\nu}(t)||S_n^j H_j(\cos\pi\theta)|\, dh_2(\theta) = I_2^{\alpha,\nu}.$$

Применим к этому интегралу неравенство (11.71) и произведем в каждом слагаемом правой части (11.71) замену переменной $\theta' = \theta \pm t$, выбирая знак $+$ или $-$ так, чтобы t входило во все экспоненты подынтегрального выражения с одним и тем же знаком. Учитывая, что при $t \leqslant \phi$

$$|h_2'(\theta)||\sin\pi\theta|^{-1\pm1/2} \leqslant C_4 |\sin\pi\theta'|^{\pm1/2}, \quad (11.84)$$

на основании леммы 11.3.5 при $\gamma = \pm1/2$ получаем $I_2^{\alpha,\nu} = O(1)$. Отсюда, с учетом леммы 11.3.8 при оценке остаточного члена, устанавливаем ограниченность I_2. Теперь оценим I_1 при $\phi \in (0, 2^{-j})$. Те же рассуждения, что и для случая $\phi \geqslant 2^{-j}$, дают

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s^{\pm}{}_{n,\alpha,\nu}(u)||S_n^j H_j(\cos\pi\theta)|\, dh_1(\theta) = O\left(2^{j/2}\sqrt{\phi}\right).$$

Сопоставляя это с (11.83), учитывая, что $\sqrt{\phi} = O\left(2^{-j/2}\right)$, и принимая во внимание лемму 11.3.8, опять получаем $I_1 = O(1)$. При $\phi = 0$ интеграл I_1 отсутствует, а I_2 можно оценить по той же схеме, используя вместо (11.58) следующее равенство:

$$X_l(1) = \sqrt{2il} + \frac{1}{4\sqrt{2il}} + O\left(\frac{1}{|l|^{3/2}}\right), \tag{11.85}$$

где $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\arg z}{2}}$, $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$. Таким образом, доказана ограниченность J^m.

Для оценки J преобразуем подынтегральное выражение:

$$\sum_{n=0}^{2^j-1} \overline{S_n^j G_j(t)} S_n^j G_j(x) =$$

$$= 2^{-j} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}l)\overline{X_l(t)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}k) X_k(x) \sum_{n=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} n(k-l)} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}l)\overline{X_l(t)}\widehat{\varphi}(2^{-j}l + m) X_{l+2^j m}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \omega_m(t,x).$$

Поскольку $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset [-1/2 - \varepsilon/2, 1/2 + \varepsilon/2]$, то $\omega_m(t,x) = 0$ для всех $m \neq 0,\ 1, -1$. Покажем, что

$$\int_{-1}^{1} |\omega_m(t,x)|\, dt = O(1) \tag{11.86}$$

для $m = 0, 1, -1$. Перепишем $\omega_0(t,x)$ в вещественном виде:

$$\omega_0(t,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}^2(2^{-j}n)\left(\mathcal{L}_{2n-1}(x)\mathcal{L}_{2n-1}(t) + \mathcal{L}_{2n}(x)\mathcal{L}_{2n}(t)\right).$$

После двукратного применения преобразования Абеля к этой сумме на основании леммы 11.3.9 получаем (11.86) для $m = 0$.

Пусть θ, ϕ имеют тот же смысл, что и выше, опять ограничимся рассмотрением случая $\phi \in [0, 1/2]$. Положим $\gamma_{\pm}(u) = \widehat{\varphi}(u)\widehat{\varphi}(u \pm 1)$, тогда

$$\int_0^1 |\omega_{\pm 1}(t,x)|\, dt = \int_0^1 \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}l)\overline{X_l(\cos\pi\theta)} X_{l\pm 2^j}(\cos\pi\phi) \right| d\cos\pi\theta.$$

Разобьем этот интеграл по схеме

$$\int\limits_0^1 d\cos\pi\theta = \int\limits_0^1 dh_1(\theta) + \int\limits_0^1 dh_2(\theta) = i_1 + i_1.$$

При $\phi \neq 0$ применим (11.58) к $X_{l\pm 2^j}(\cos\pi\phi)$. Используя неравенство (A.38) и учитывая структуру носителя функции $\gamma_\pm$ при оценке остатка, имеем

$$i_2 \leqslant C\,2^{j/2}\int\limits_0^\phi \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi\phi}}\times$$
$$\times\int\limits_0^1\Biggl\{\Biggl|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}l)\xi_5(2^{-j}l\pm 1)(2^{-j}l)^{1/2}e^{2\pi il\tau}X_l(\cos\pi\theta)\Biggr| +$$
$$+\Biggl|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}l)\xi_6(2^{-j}l\pm 1)(2^{-j}l)^{1/2}e^{-2\pi il\tau}X_l(\cos\pi\theta)\Biggr| +$$
$$+\Biggl|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}l)\xi_7(2^{-j}l\pm 1)(2^{-j}l)^{-1/2}e^{2\pi il\tau}X_l(\cos\pi\theta)\Biggr| +$$
$$+\Biggl|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}l)\xi_8(2^{-j}l\pm 1)(2^{-j}l)^{-1/2}e^{-2\pi il\tau}X_l(\cos\pi\theta)\Biggr|\Biggr\}\,dh_2(\theta) + O(1).$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $\gamma(u) = \gamma_\pm(u)\xi_\nu(u\pm 1)(u)^\alpha$ удовлетворяет условиям леммы 11.3.4. К внутреннему интегралу применим (11.66) и произведем в каждом слагаемом правой части (11.66) замену переменной $\theta' = \tau \pm \theta$. Учитывая, что при $\tau \leqslant \phi$ выполнено (11.84), на основании леммы 11.3.3 получаем $i_2 = O(1)$. При $\phi = 0$ это соотношение доказывается так же с использованием равенства (11.85) вместо (11.58). Аналогично воспользуемся (11.58) для оценки i_1 при $\phi \in (0, 2^{-j})$. Применив затем (11.65) и (11.62), получим $i_1 = O(1)$. Наконец, чтобы доказать ограниченность i_1 при $\phi \in (2^{-j}, 1/2)$, применим к $X_{l\pm 2^j}(\cos\pi\phi)$ соотношение (11.59). Используя неравенство (A.38) и учитывая структуру носителя функции $\gamma_\pm$ при оценке остаточных членов, имеем

$$i_1 \leqslant C_5\frac{1}{\sqrt{\phi}}\int\limits_0^1\Biggl\{\Biggl|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}l)\xi_1(2^{-j}l\pm 1)e^{2\pi il\phi}X_l(\cos\pi\theta)\Biggr| +$$
$$+\Biggl|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}l)\xi_2(2^{-j}l\pm 1)e^{-2\pi il\phi}X_l(\cos\pi\theta)\Biggr|\Biggr\}\,dh_1(\theta) + O\left(\frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}}\right) +$$

$$+ C_6 \frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}} \int\limits_{\phi}^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} \int\limits_{0}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau - \cos\pi t}} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left\{ \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}l)\xi_9(2^{-j}l \pm 1)(2^{-j}l)^{-1/2} e^{2\pi i l(\tau+t-\phi)} X_l(\cos\pi\theta) \right| + \right.$$

$$+ \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}l)\xi_{10}(2^{-j}l \pm 1)(2^{-j}l)^{-1/2} e^{-2\pi i l(\tau+t-\phi)} X_l(\cos\pi\theta) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}l)\xi_{11}(2^{-j}l \pm 1)(2^{-j}l)^{-3/2} e^{2\pi i l(\tau+t-\phi)} X_l(\cos\pi\theta) \right| +$$

$$+ \left. \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}l)\xi_{12}(2^{-j}l \pm 1)(2^{-j}l)^{-3/2} e^{-2\pi i l(\tau+t-\phi)} X_l(\cos\pi\theta) \right| \right\} dh_1(\theta) +$$

$$+ O\left(\frac{2^{-j}}{\phi}\right).$$

Осталось применить к внутренним интегралам (11.65) и (11.62). $\Diamond$

Следствие 11.3.11. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует базис в пространстве $C[-1,1]$ из алгебраических многочленов P_n, $n = 1, 2\ldots$, таких, что степень P_n не превосходит $n(1+\varepsilon)$.*

Это утверждение вытекает из теоремы 11.3.10 (см. приложение А.1) и неравенства (11.53).

Порядок роста многочленов в следствии 11.3.11 не может быть уменьшен.

Теорема 11.3.12. *Если алгебраические многочлены P_n образуют базис в $C[a,b]$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что степень P_n не меньше $n(1+\varepsilon)$ для $n \geqslant n_0$.*

Доказательство этого факта приведено в статье [240].

11.4. Базисы всплесков в пространствах Бесова и Лизоркина–Трибеля

Важной областью применения всплесков является конструктивное описание различных функциональных пространств и построение безусловных базисов в них.

Целью данного параграфа является построение безусловного базиса в анизотропных пространствах Бесова и Лизоркина–Трибеля. В качестве следствия получается безусловный базис в анизотропных пространствах Соболева $W_p^{(s)}$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $p \in (1, \infty)$. Конструкция базисов использует всплески Мейера–Давида, которые наиболее отвечают методу декомпозиции для пространств анизотропной гладкости.

11.4.1. Определения и предварительные сведения. В этом параграфе мы будем рассматривать функции, заданные на $\mathbb{R}^n$, и использовать следующие обозначения:

$$a^m := \prod_\lambda a_\lambda^{m_\lambda}$$

для $a = (a_1, \ldots, a_n)$ с $a_\lambda > 0$ и $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$; если $\alpha = (\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}$, то

$$|\alpha| := \sum_\lambda \alpha_\lambda$$

— порядок мультииндекса α, $D^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.

Напомним, что F и F^{-1} — операторы, сопоставляющие функции соответственно ее прямое и обратное преобразования Фурье. Запись $A(t) \ll B(t)$ означает, что $A(t) \leqslant C\,B(t)$ с константой C, не зависящей от t. Запись $A(t) \sim B(t)$ эквивалентна $A(t) \ll B(t) \ll A(t)$. Через $|x, X|$ мы в этом параграфе обозначаем $\|x\|_X$.

Приведем определение всплесков Мейера–Давида. Пусть $h \in \mathbb{N}$ — фиксированное натуральное число, а $\vartheta_h(\xi)$ — нечетная бесконечно дифференцируемая функция, равная $\dfrac{\pi}{4}$ и $-\dfrac{\pi}{4}$ при $\xi \geqslant \dfrac{h}{2(2h+1)}$ и $\xi \leqslant -\dfrac{h}{2(2h+1)}$ соответственно. Определим для неотрицательных ξ функцию $\theta_h(\xi)$ следующим равенством:

$$\theta_h(\xi) := \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \vartheta_h\left(\xi - \dfrac{h}{2}\right), & \xi \in \left[\dfrac{h^2}{2h+1}, \dfrac{h(h+1)}{2h+1}\right); \\ \dfrac{\pi}{4} - \vartheta_h\left(\dfrac{h\xi}{h+1} - \dfrac{h}{2}\right), & \xi \in \left[\dfrac{h(h+1)}{2h+1}, \dfrac{(h+1)^2}{2h+1}\right); \\ 0, & \xi \notin \left[\dfrac{h^2}{2h+1}, \dfrac{(h+1)^2}{2h+1}\right), \quad \xi \geqslant 0. \end{cases}$$

На отрицательные ξ функция $\theta_h(\xi)$ продолжается четным образом для нечетных h и нечетным — для четных h.

Наконец, определим всплеск Мейера–Давида $\psi_h(t) \in S(\mathbb{R}^n)$ и соответствующую масштабирующую функцию $\varphi_h(t) \in S(\mathbb{R}^n)$ в образах Фурье:

$$F\psi_h(\xi) := e^{-i\pi\xi} \sin\theta_h(\xi);$$

$$F\varphi_h(\xi) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{h}} \cos\theta_h(\xi), & |\xi| \leqslant \dfrac{h(h+1)}{2h+1}; \\ 0, & |\xi| > \dfrac{h(h+1)}{2h+1}. \end{cases} \qquad (11.87)$$

Пусть $b := \dfrac{h+1}{h}$, тогда легко проверяется, что функции

$$b^{j/2}\psi_h(b^j t + k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

В случае $n > 1$ в построении ортонормированного базиса в $L_2(\mathbb{R}^n)$ используется и функция $\varphi_h(t)$; это построение описано ниже.

Приведем определение анизотропных пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля. Пусть $(s) := (s_1, \ldots, s_n)$, причем все s_λ либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны, либо все равны нулю.

Зафиксируем произвольные числа $C_\lambda > 1$ и $\gamma > 1$. При $s_\lambda > 0$ введем обозначения

$$\begin{aligned} &\gamma_\lambda := \gamma^{1/s_\lambda}, \quad (\gamma) := (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \\ &\Pi_j := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi_\lambda| \leqslant C_\lambda \gamma_\lambda^j\}, \quad j \in \mathbb{N}, && (11.88) \\ &\Gamma_1 := \Pi_2, \quad \Gamma_j := \Pi_{j+1} \setminus \Pi_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots && (11.89) \end{aligned}$$

Рассмотрим множество Φ гладких анизотропных разбиений единицы, т. е. множество систем $\Sigma = \{\sigma_j(\xi)\}_{j=1}^{\infty}$ неотрицательных функций $\sigma_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что:

$$\operatorname{supp} \sigma_j \subset \Gamma_j;$$

$$(\gamma)^{j\alpha} |D^\alpha \sigma_j(\xi)| \leqslant c_\alpha \quad \forall\ j \in \mathbb{N}, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n;$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(\xi) \equiv 1.$$

Обозначим $V_j(x) := (F^{-1}\sigma_j)(x)$.

О п р е д е л е н и е 11.4.1. *Анизотропное пространство Лизоркина–Трибеля* $F_{pq}^{(s)}(\mathbb{R}^n) = F_{pq}^{(s)}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, — это (квази) банахово пространство функций $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна (квази) норма

$$|f, F_{pq}^{(s)}| = |\{\gamma^j |f * V_j|\}_{j=1}^{\infty},\ L_p(l_q)|. \tag{11.90}$$

Добавка (квази) соответствует случаю $\min(p, q) < 1$.

Ясно, что при $s_\lambda = s_0$ для любого λ получаются (см. предложение 11.4.8) изотропные пространства $F_{pq}^{s_0}$.

Пространства $F_{\infty q}^{(s)}$ требуют иного подхода.

Пусть для $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$

$$Q_{jk}^{(s)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x_\lambda \in [k_\lambda \gamma_\lambda^{-j},\ (k_\lambda + 1)\gamma_\lambda^{-j})\};$$

$$\mathcal{Q}^{(s)} := \{Q_{jk}^{(s)} : \quad j \geqslant 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^n\};$$

$$\dot{\mathcal{Q}}^{(s)} := \{Q_{jk}^{(s)} : \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Определение 11.4.2. *Анизотропное пространство Лизоркина–Трибеля* $F^{(s)}_{\infty q}(\mathbb{R}^n) := F^{(s)}_{\infty q}$, $0 < q \leqslant \infty$, — это (квази) банахово пространство функций $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна (квази) норма

$$|f, F^{(s)}_{\infty q}| := \sup_{Q^{(s)}_{jk} \in \mathcal{Q}^{(s)}} \left(|Q^{(s)}_{jk}|^{-1} \int\limits_{Q^{(s)}_{jk}} \sum_{\nu=j}^{\infty} \gamma^{\nu q} |(f * V_\nu)(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

с естественным видоизменением при $q = \infty$.

Замечание 11.4.3. Если $s_\lambda < 0$, то вес γ^j в определениях 11.4.1 и 11.4.2 следует заменить на γ^{-j}, а числа γ_λ определить как $\gamma_\lambda := \gamma^{-1/s_\lambda}$.

Определение 11.4.4. Заменяя в (11.90) норму в $L_p(l_q)$ на норму в $l_q(L_p)$ (и не оговаривая особо случай $p = \infty$), определяются *пространства Бесова* $B^{(s)}_{pq}(\mathbb{R}^n) := B^{(s)}_{pq}$, $0 < p$, $q \leqslant \infty$.

Пусть, далее, система параллелепипедов (11.88) рассматривается для $j \in \mathbb{Z}$ и коридоры $\dot{\Gamma}_j$, определяются равенствами:

$$\dot{\Gamma}_j := \Pi_{j+1} \setminus \Pi_j, \ \ j \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через $\dot{\Phi}$ совокупность систем $\dot{\Sigma} = \{\dot{\sigma}_j(\xi)\}_{-\infty}^{\infty}$ неотрицательных функций $\dot{\sigma}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{Z}$, таких, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} \dot{\sigma}_j \subset \dot{\Gamma}_j; \\ &a^{j\alpha} |D^\alpha \dot{\sigma}_j(\xi)| \leqslant c_\alpha \quad \forall \ j \in \mathbb{Z}, \quad \forall \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad \forall \ \xi \in \mathbb{R}^n; \\ &\sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\sigma}_j(\xi) \equiv 1, \quad \forall \ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Дадим определение однородных анизотропных пространств $\dot{F}^{(s)}_{pq}$ и $\dot{B}^{(s)}_{pq}$.

Определение 11.4.5. $\dot{F}^{(s)}_{pq}(\mathbb{R}^n) := \dot{F}^{(s)}_{pq}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, — это (*квази*) *банахово пространство* элементов $f \in S'(\mathbb{R}^n)/P(\mathbb{R}^n)$, ($P(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех многочленов на $\mathbb{R}^n$), для которых конечна (квази) норма

$$|f, \dot{F}^{(s)}_{pq}| = |\{\gamma^{\pm j} |f * \dot{V}_j|\}_{j=-\infty}^{\infty}, L_p(l_q)|,$$

где $\dot{V}_j(x) = (F^{-1}\dot{\sigma}_j)(x)$; вес γ^j относится к случаю $s_\lambda > 0$; γ^{-j} — к случаю $s_\lambda < 0$.

Если норму в $L_p(l_q)$ заменить на норму в $l_q(L_p)$, то получим *пространства* $\dot{B}^{(s)}_{pq}$ (случай $p = \infty$ при этом не исключается).

Определение 11.4.6. *Пространства* $\dot{F}^{(s)}_{\infty q}(\mathbb{R}^n) := \dot{F}^{(s)}_{\infty q}$, $0 < q \leqslant \leqslant \infty$, определим аналогично определению 11.4.2:

$$\dot{F}^{(s)}_{\infty q} = \Bigg\{ f \in S'(\mathbb{R}^n)/P(\mathbb{R}^n):$$

$$|f, \dot{F}^{(s)}_{\infty q}| := \sup_{Q^{(s)}_{jk} \in \dot{\mathcal{Q}}^{(s)}} \Bigg(|Q^{(s)}_{jk}|^{-1} \int\limits_{Q^{(s)}_{jk}} \sum_{\nu=j}^{\infty} \gamma^{\nu q} |(f * \dot{V}_\nu)(x)|^q dx \Bigg)^{1/q} < \infty \Bigg\}.$$

В некоторых случаях удобно использовать следующий частный случай выбора параметров C_λ и γ .

Пусть при $(s) \neq 0$ $(a) := (a_1, \ldots, a_n)$ — вектор с координатами $a_\lambda := s/s_\lambda$, где s определяется соотношением

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{n} \Bigg(\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{s_\lambda} \Bigg).$$

При $(s) = 0$ число s полагается равным 0, а все a_λ полагаются равными единице.

Число s называется средней гладкостью, а вектор (a) — вектором анизотропии.

Введем обозначения:

$\|x\|_{(a)} := \max\limits_{\lambda} |x_\lambda|^{1/a_\lambda}$ — анизотропное расстояние;

$|\alpha|_{(a)} := \sum\limits_{\lambda} \alpha_\lambda a_\lambda$ — анизотропный порядок мультииндекса;

$t \circ x := (t^{a_1} x_1, \ldots, t^{a_n} x_n)$.

Положим $\gamma := 2^s$, $C_\lambda := C^{a_\lambda}$, где $C > 1$ — произвольное фиксированное число. Тогда множества Π_j и Γ_j, определенные в (11.88) и (11.89), можно описать следующим образом:

$$\Pi_j := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \quad \|\xi\|_{(a)} \leqslant C 2^j\}, \qquad j \in \mathbb{N}; \tag{11.91}$$

$$\Gamma_1 := \Pi_2; \quad \Gamma_j := \Pi_{j+1} \setminus \Pi_{j-1}, \qquad j \geqslant 2. \tag{11.92}$$

Условия на гладкое анизотропное разбиение единицы в этом случае выглядят следующим образом: $\{\sigma_j(\xi)\}_1^\infty$ — последовательность неотрицательных функций $\sigma_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что

$\operatorname{supp} \sigma_j \subset \Gamma_j$;

$2^{j|\alpha|_{(a)}} \left| D^\alpha_\xi \sigma_j(\xi) \right| \leqslant c_\alpha$ для любых мультииндексов α, $j \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$$\sum_1^\infty \sigma_j(\xi) \equiv 1.$$

Сформулируем теперь ряд утверждений, которые доказываются так же, как и их изотропные аналоги.

Предложение 11.4.7. *Пусть* $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — *последовательность целых функций экспоненциального типа* $\mu_k = (\mu_{k1}, \ldots, \mu_{kn})$. *Тогда при* $\varkappa > \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{\min(p,q)}$ *для любой системы функций* $M_k(\xi)$, $\xi \in R^n$, $M_k \in H_2^{\varkappa}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$|\{F^{-1}(M_k F f_k)\}_{k=0}^{\infty},\ L_p(l_q)| \ll \\ \ll |\{M_l(\mu_{l1}\xi_1, \ldots, \mu_{\ln}\xi_n)\}_{l=0}^{\infty},\ l_\infty(H_2^{\varkappa})| \cdot |\{f_k\}_{k=0}^{\infty},\ L_p(l_q)|,$$

где $H_2^{\varkappa}$ — *пространство бесселевых потенциалов* $(:= F_{22}^{\varkappa})$, *а константа не зависит от* f_k *и* M_k.

Из предложения 11.4.7 и его скалярного аналога вытекает

Предложение 11.4.8. *С точностью до эквивалентности норм пространства* $F_{pq}^{(s)}$, $\dot{F}_{pq}^{(s)}$ *и* $B_{pq}^{(s)}$, $\dot{B}_{pq}^{(s)}$ *не зависят от конкретного выбора системы* $\Sigma \in \Phi$ *и* $\dot{\Sigma} \in \Phi$.

Предложение 11.4.9. *Пусть* $q \in [1, \infty)$, *тогда* $(F_{1q}^{(s)})' = F_{\infty q'}^{(-s)}$, *где* $q' := q/(q-1)$.

Предложение 11.4.10. *Пусть* $v \in (0, \infty)$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_\lambda > 0$, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *и* $\operatorname{supp} Ff \subseteq \{\xi \in R^n\colon\ |\xi_\lambda| \leqslant d_\lambda\}$. *Тогда для любого мультииндекса* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$|(D^\alpha f)(x)| \leqslant c^{|\alpha|} d^\alpha \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{f(x-z)}{1 + \|(d_1 z_1, \ldots, d_n z_n)\|^{n/v}},$$

где константа c *не зависит от* f *и* d.

11.4.2. Конструкция базиса всплесков. Система всплесков с компактными спектрами будет безусловным базисом в пространствах Бесова и Лизоркина–Трибеля, если спектры функций системы образуют совокупность коридоров, близкую к $\{\Gamma_j\}$, фигурирующей в определении пространств. В изотропном случае это легко достигается за счет тензорных произведений всплесков Мейера. Анизотропная ситуация была бы аналогична изотропной, если бы существовали системы всплесков одной переменной, получающиеся растяжением исходной функции в b^j раз, $j \in \mathbb{Z}$, для любого $b > 1$. В этом случае искомый безусловный базис получался бы путем тензорного перемножения систем всплесков, которые по переменной x_λ имеют показатель растяжения γ_λ. Однако системы всплесков с компактным спектром построены только для показателей растяжения $b = \dfrac{h+1}{h}$, $h \in \mathbb{N}$, поэтому приходится строить безусловный базис всплесков в анизотропных пространствах Бесова и Лизоркина–Трибеля, группируя в блоки всплески Мейера–Давида.

Пусть h_λ — натуральное число, для которого

$$\frac{h_\lambda + 1}{h_\lambda} \leqslant \gamma_\lambda. \tag{11.93}$$

В этом разделе допускается произвольный выбор h_λ, удовлетворяющего (11.93); уточнения по этому поводу см. в замечании 11.4.24. Обозначим

$$b_\lambda := \frac{h_\lambda + 1}{h_\lambda}, \quad (b) = (b_1, \ldots, b_n), \quad r_\lambda := \frac{h_\lambda^2}{1 + 2h_\lambda}. \tag{11.94}$$

Для $j = 2, 3, \ldots$ определим числа $l_j^{(\lambda)}$ как наименьшие из целых чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$\log_{b_\lambda} C_\lambda + (j-1)\log_{b_\lambda} \gamma_\lambda - \log_{b_\lambda} r_\lambda \leqslant l_j^{(\lambda)} + 1 < \\ < \log_{b_\lambda} C_\lambda + j \log_{b_\lambda} \gamma_\lambda - \log_{b_\lambda} r_\lambda. \tag{11.95}$$

Так как разность между правой и левой частью в (11.95) равна $\log_{b_\lambda} \gamma_\lambda \geqslant 1$, то такие числа существуют при любом $j \geqslant 2$. Кроме того, из (11.95) следует, что $l_j^{(\lambda)} \uparrow \infty$ при $j \to \infty$ и

$$\log_{b_\lambda} \gamma_\lambda - 1 < l_{j+1}^{(\lambda)} - l_j^{(\lambda)} < \log_{b_\lambda} \gamma_\lambda + 1, \quad j \geqslant 2. \tag{11.96}$$

Пусть далее $\mathcal{N}_j$, $j \geqslant 2$, — это множество пар (m, ε) n-мерных векторов $m \in \mathbb{Z}^n$; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$; $\varepsilon_\lambda = 0, 1$; $\varepsilon \neq 0$, таких, что координата m_λ принимает фиксированное значение $m_\lambda = l_j^{(\lambda)} + 1$, если $\varepsilon_\lambda = 0$, и пробегает все значения из множества $\{l_j^{(\lambda)} + 1, \ldots, l_{j+1}^{(\lambda)}\}$, если $\varepsilon_\lambda = 1$.

Например, при $n = 2$ множество $\mathcal{N}_2$ состоит из элементов

$$\Big((l_2^{(1)} + 1, l_2^{(2)} + 1); (0,1)\Big), \quad \Big((l_2^{(1)} + 1, l_2^{(2)} + 2); (0,1)\Big), \ldots, \\ \Big((l_2^{(1)} + 1, l_3^{(2)}); (0,1)\Big),$$

$$\Big((l_2^{(1)} + 1, l_2^{(2)} + 1); (1,0)\Big), \quad \Big((l_2^{(1)} + 2, l_2^{(2)} + 1); (1,0)\Big), \ldots, \\ \Big((l_3^{(1)}, l_2^{(2)} + 1); (1,0)\Big),$$

$$\Big((l_2^{(1)} + 1, l_2^{(2)} + 1); (1,1)\Big), \quad \Big((l_2^{(1)} + 2, l_2^{(2)} + 1); (1,1)\Big), \\ \Big((l_2^{(1)} + 1, l_2^{(2)} + 2); (1,1)\Big), \ldots, \Big((l_3^{(1)}, l_3^{(2)}); (1,1)\Big).$$

Из (11.96) очевидным образом вытекает

Предложение 11.4.11. *Число элементов в любом множестве $\mathcal{N}_j$ не превосходит*

$$N^* := \prod_\lambda ([\log_{b_\lambda} \gamma_\lambda] + 2) < \infty. \tag{11.97}$$

Пусть

$$\mathcal{N}_1 := \{((l_2^{(1)}+1,\ldots,l_2^{(n)}+1);(0,\ldots,0))\}, \quad \mathcal{N} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}_j.$$

Рассмотрим теперь множество троек n-мерных векторов:

$$\mathcal{M}_1 := \left\{\Big((l_2^{(1)}+1,\ldots,l_2^{(n)}+1),k,(0,\ldots,0)\Big):\ k\in\mathbb{Z}^n\right\};$$

$$\mathcal{M}_j := \{(m,k,\varepsilon):\ (m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j,\ k\in\mathbb{Z}^n\}, \quad j\geqslant 2;$$

$$\mathcal{M} := \bigcup_{j=1}^{\infty}\mathcal{M}_j.$$

Пусть $\psi^{(\lambda,\varepsilon_\lambda)}(t)$ — это $\psi_{h_\lambda}(t)$ при $\varepsilon_\lambda=1$ и $\varphi_{h_\lambda}(t)$ при $\varepsilon_\lambda=0$.

Рассмотрим функции

$$\psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x) := \prod_\lambda b_\lambda^{\frac{m_\lambda}{2}}\psi^{(\lambda,\varepsilon_\lambda)}(b_\lambda^{m_\lambda}x_\lambda - k_\lambda^{(\varepsilon_\lambda)}) =$$

$$= (b)^{m/2}\prod_\lambda \psi^{(\lambda,\varepsilon_\lambda)}(b_\lambda^{m_\lambda}x_\lambda - k_\lambda^{(\varepsilon_\lambda)}), \quad m,k\in\mathbb{Z}^n,$$

где

$$k_\lambda^{(\varepsilon_\lambda)} := \begin{cases} k_\lambda, & \varepsilon_\lambda=1;\\ k_\lambda/h_\lambda, & \varepsilon_\lambda=0.\end{cases}$$

Определение 11.4.12. Назовем *слоем* множество $\{\psi_{mk}^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ при фиксированных m и ε, а множество

$$\Psi_j^{(s)} := \{\psi_{mk}^{(\varepsilon)}\}_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j}$$

назовем *j-блоком*.

Функции одного слоя имеют один и тот же спектр. Следующее утверждение, доказательство которого следует сразу из выбора чисел b_λ и $l_j^{(\lambda)}$, объясняет, почему данные функции объединены в один блок.

Предложение 11.4.13. *Для любого $j\in\mathbb{N}$ имеет место вложение*

$$\bigcup_{\mathcal{M}_j}\operatorname{supp} F\psi_{mk}^{(\varepsilon)} \subset \Gamma_j\cup\Gamma_{j+1}.$$

Легко показать, что

$$\bigcup_{\mathcal{M}_1}\operatorname{supp} F\psi_{mk}^{(\varepsilon)} = \left\{\xi\in\mathbb{R}^n:\ |\xi_\lambda|<r_\lambda b_\lambda^{l_2+2}\right\};$$

$$\bigcup_{\mathcal{M}_j} \operatorname{supp} F\psi_{mk}^{(\varepsilon)} =$$
$$= \bigl\{\xi \in \mathbb{R}^n\colon\ |\xi_\lambda| < r_\lambda b_\lambda^{l_{j+1}+2}\bigr\} \setminus \bigl\{\xi \in \mathbb{R}^n\colon\ |\xi_\lambda| < r_\lambda b_\lambda^{l_j+1}\bigr\}, \quad j \geqslant 2.$$

Эти множества образуют коридоры, которые могут с точностью до эквивалентности (см. теоремы 11.4.15 и 11.4.16) служить основой для определения пространств B и F. Спектры произведений, состоящих из функций ψ_{h_λ}, заполняют углы коридора, а спектры произведений, в которых участвуют функции φ_{h_λ}, заполняют параллелепипеды, соединяющие эти углы.

Обозначим через $\Psi^{(s)}$ систему функций

$$\Psi^{(s)} := \{\psi_{mk}^{(\varepsilon)}\}_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}}.$$

Для произвольного $j \in \mathbb{Z}$ рассмотрим наименьшие целые числа $\dot{l}_j^{(\lambda)}$, удовлетворяющие (11.95), а множества $\dot{\mathcal{N}}_j$ и $\dot{\mathcal{M}}_j$ определим так же, как множества $\mathcal{N}_j$ и $\mathcal{M}_j$, но уже для $j \in \mathbb{Z}$. Положим

$$\dot{\mathcal{M}} := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\mathcal{M}}_j, \qquad \dot{\Psi}^{(s)} := \{\psi_{mk}^{(\varepsilon)}\}_{(m,k,\varepsilon)\in\dot{\mathcal{M}}}.$$

Стандартными рассуждениями устанавливается следующее

Предложение 11.4.14. *Системы $\Psi^{(s)}$ и $\dot{\Psi}^{(s)}$ образуют ортонормированные базисы в $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

В заключении этого раздела приведем один важный для дальнейшего частный случай описанной выше конструкции , соответствующий выбору параметров C_λ и γ, описанному на с. 502.

Пусть h выбрано так, что

$$\frac{h+1}{h} \leqslant \min_\lambda 2^{a_\lambda}. \tag{11.98}$$

Рассмотрим базис всплесков, который получается при выборе всех h_λ равными h.

В этом случае числа $l_j^{(\lambda)}$, $j \geqslant 2$, — это наименьшие из целых чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$\log_b C_\lambda + (j-1)a_\lambda \log_b 2 - \log_b r \leqslant l_j^{(\lambda)} + 1 <$$
$$< \log_b C_\lambda + j a_\lambda \log_b 2 - \log_b r, \tag{11.99}$$

где $b := \dfrac{h+1}{h}$, $r := \dfrac{h^2}{1+2h}$.

Множества $\mathcal{N}_j^{(a)}$, $j \geqslant 2$, — это множества пар (m, ε) n-мерных векторов $m \in \mathbb{Z}^n$; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$; $\varepsilon_\lambda = 0, 1$; $\varepsilon \neq 0$, таких, что координата

m_λ принимает фиксированное значение $m_\lambda = l_j^{(\lambda)} + 1$, если $\varepsilon_\lambda = 0$, и пробегает все значения из множества $\{l_j^{(\lambda)} + 1, \ldots, l_{j+1}^{(\lambda)}\}$, если $\varepsilon_\lambda = 1$.

В силу предложения 11.4.11 число элементов в каждом множество $\mathcal{N}_j^{(a)}$, $j \geqslant 2$, конечно и не превосходит числа $\prod\limits_\lambda([a_\lambda \log_b 2] + 2)$. Обозначим

$$\mathcal{M}_1^{(a)} := \mathcal{N}_1^{(a)} := \left\{ \Big((l_2^{(1)} + 1, \ldots, l_2^{(n)} + 1), (0, \ldots, 0) \Big) \right\},$$

$$\mathcal{M}_j^{(a)} := \left\{ (m, k, \varepsilon) \colon \ (m, \varepsilon) \in \mathcal{N}_j^{(a)}, \ k \in \mathbb{Z}^n \right\}, \quad j \in \mathbb{N}, \ j \geqslant 2,$$

$$\mathcal{M}^{(a)} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}_j^{(a)}.$$

Пусть $\psi^{(\varepsilon_\lambda)}(t)$ — это $\psi_h(t)$ при $\varepsilon_\lambda = 1$ и $\varphi_h(t)$ при $\varepsilon_\lambda = 0$, где $\psi_h(t)$ и $\varphi_h(t)$ — всплески Мейера–Давида для h из (11.98), определенные в (11.87).

Рассмотрим всплески

$$\psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x) := \prod_\lambda b^{m_\lambda/2} \psi^{(\varepsilon_\lambda)}(b^{m_\lambda} x_\lambda + k_\lambda^{(\varepsilon_\lambda)}),$$

где $m, k \in \mathbb{Z}^n$,

$$k_\lambda^{(\varepsilon_\lambda)} := \begin{cases} k_\lambda, & \varepsilon_\lambda = 1; \\ k_\lambda / h_\lambda, & \varepsilon_\lambda = 0. \end{cases}$$

Через $\psi^{(\varepsilon)}(x)$ обозначим $\psi_{00}^{(\varepsilon)}(x)$. Множество $\Psi_j^{(a)} := \{\psi_{mk}^{(\varepsilon)}\}_{(m,k,\varepsilon) \in \mathcal{M}_j^{(a)}}$ является j-блоком, $\Psi^{(a)} := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Psi_j^{(a)}$. В силу предложения 11.4.13

$$\bigcup_{\psi_{mk}^{(\varepsilon)} \in \Psi_j^{(a)}} \operatorname{supp} F\psi_{mk}^{(\varepsilon)} \subset \Gamma_j \cup \Gamma_{j+1}. \tag{11.100}$$

Система $\Psi^{(a)}$ образует ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (предложение 11.4.14).

11.4.3. Эквивалентные нормы в пространствах *B* и *F*. Для $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим функции

$$A_j(x) := A_j(x; f) = \sum_{(m,\varepsilon) \in \mathcal{N}_j} |f * \varkappa_m^{(\varepsilon)}|(x), \quad j \geqslant 1,$$

где

$$\varkappa_m^{(\varepsilon)}(x) := (b)^{\frac{m}{2}} \psi_{m,0}^{(\varepsilon)}(-x). \tag{11.101}$$

Очевидно, что в силу предложения 11.4.11 функции $A_j(x)$ определены корректно.

Во всех формулируемых ниже теоремах вес γ^j относится к случаю $s_\lambda > 0$, а вес γ^{-j} — к случаю $s_\lambda < 0$.

Доказательства всех формулируемых ниже теорем приводятся в отдельном пункте (см. с. 517).

Теорема 11.4.15. *A. Норма в пространстве* $F_{pq}^{(s)}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, *эквивалентна величине*

$$A(f) := |\{\gamma^{\pm j} A_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty},\ L_p(l_q)|.$$

B. Норма в пространстве $B_{pq}^{(s)}$, $0 < p$, $q \leqslant \infty$, *эквивалентна величине*

$$|\{\gamma^{\pm j} A_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty},\ l_q(L_p)|.$$

Аналогично A_j, но для всех $j \in \mathbb{Z}$ определим функции $\dot{A}_j(\cdot)$.

Теорема 11.4.16. *Норма в пространстве* $\dot{F}_{pq}^{(s)}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, *эквивалентна величине*

$$\dot{A}(f) := |\{\gamma^{\pm j} \dot{A}_j(\cdot)\}_{j\in\mathbb{Z}},\ L_p(l_q)|,$$

а норма в пространстве $\dot{B}_{pq}^{(s)}$, $0 < p$, $q \leqslant \infty$, *эквивалентна величине*

$$|\{\gamma^{\pm j} \dot{A}_j(\cdot)\}_{j\in\mathbb{Z}},\ l_q(L_p)|.$$

11.4.4. Формулировки результатов и комментарии. Рассмотрим для $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ числа $c_{mk}^{(\varepsilon)} := \langle f, \psi_{mk}^{(\varepsilon)}\rangle$. Нетрудно проверить, что ряд Фурье

$$\sum_{\mathcal{M}} c_{mk}^{(\varepsilon)} \psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\mathcal{M}_j} c_{mk}^{(\varepsilon)} \psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x)$$

сходится к f в $S'(\mathbb{R}^n)$, а ряд Фурье

$$\sum_{\dot{\mathcal{M}}} c_{mk}^{(\varepsilon)} \psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\dot{\mathcal{M}}_j} c_{mk}^{(\varepsilon)} \psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x)$$

элемента f из пространства $S'(\mathbb{R}^n)/P(\mathbb{R}^n)$ (факторизация по множеству всех полиномов) сходится к нему в этом пространстве.

Ниже в формулировках теорем о безусловном базисе в пространствах $F_{pq}^{(s)}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, и $B_{pq}^{(s)}$, $0 < p$, $q \leqslant \infty$, в случаях, когда пространства несепарабельны, рассматриваются, не отмечая это особо, замыкания пространства $S(\mathbb{R}^n)$ в соответствующих нормах.

Для каждого $m \in \mathbb{Z}^n$ введем разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на параллелепипеды $\{P_{mk}^{(s)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, ребра которых параллельны координатным осям:

$$P_{mk}^{(s)} = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ x_\lambda \in \left[b_\lambda^{-m_\lambda} k_\lambda,\ b_\lambda^{-m_\lambda}(k_\lambda + 1)\right)\right\}, \tag{11.102}$$

и обозначим через $\widetilde{\chi}_{mk}^{(s)}$ нормированную в $L_2(\mathbb{R}^n)$ характеристическую функцию параллелепипеда $P_{mk}^{(s)}$.

Теорема 11.4.17. А. *Ортонормированная система* $\Psi^{(s)}$ *образует безусловный базис в* $F_{pq}^{(s)}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, *т. е. любая функция* $f \in F_{pq}^{(s)}$ *разлагается в ряд Фурье*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j} c_{mk}^{(\varepsilon)} \psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x),$$

причем

$$|f, F_{pq}^{(s)}| \sim \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{\pm jq} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j} |c_{mk}^{(\varepsilon)} \widetilde{\chi}_{mk}^{(\varepsilon)}|^q \right)^{1/q},\ L_p \right|$$

с естественным видоизменением при $q = \infty$.

В. *Ортонормированная система* $\Psi^{(s)}$ *образует безусловный базис в* $B_{pq}^{(s)}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, *или* $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *при* $p = \infty$, *причем норма* $f \in B_{pq}^{(s)}$ *эквивалентна*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{\pm jq} \sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} b^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)q} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

с понятным видоизменением при $q = \infty$.

Теорема 11.4.18. *Система* $\dot{\Psi}^{(s)}$ *образует безусловный базис* $\dot{F}_{pq}^{(s)}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, *причем норма* $f \in F_{pq}^{(s)}$ *эквивалентна величине*

$$\left| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma^{\pm jq} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\dot{\mathcal{M}}_j} |c_{mk}^{(\varepsilon)} \widetilde{\chi}_{mk}^{(\varepsilon)}|^q \right)^{1/q},\ L_p \right|.$$

Аналогично для пространств $\dot{B}_{pq}^{(s)}$, $p, q \in (0, \infty]$

$$|f, \dot{B}_{pq}^{(s)}| \sim \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma^{\pm jq} \sum_{(m,\varepsilon)\in\dot{\mathcal{N}}_j} b^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)q} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}.$$

Введем еще некоторые обозначения. Пусть для $(m, k) \in \mathcal{N}$ и $j \geqslant 1$

$$\mathcal{A}_{m,k,j} := \left\{ (\nu, l, \delta) \in \mathcal{M}_j :\ P_{\nu l}^{(s)} \subseteq P_{mk}^{(s)} \right\},$$

а для $(m, k) \in \dot{\mathcal{N}}$ и $j \in \mathbb{Z}$

$$\dot{\mathcal{A}}_{m,k,j} := \left\{ (\nu, l, \delta) \in \dot{\mathcal{M}}_j :\ P_{\nu l}^{(s)} \subseteq P_{mk}^{(s)} \right\}.$$

Теорема 11.4.19. *Для любой функции $f \in F^{(s)}_{\infty q}$ (соответственно $\dot F^{(s)}_{\infty q}$), $1 < q < \infty$, норма $|f, F^{(s)}_{\infty q}|$ (норма $|f, \dot F^{(s)}_{\infty q})|$) эквивалентна величине*

$$\sup_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}} \left(\frac{1}{P^{(s)}_{mk}} \int\limits_{P^{(s)}_{mk}} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{\pm jq} \sum_{\mathcal{A}_{m,k,j}} |c^{(\delta)}_{\nu l} \widetilde{\chi}^{(\delta)}_{\nu l}(x)|^q \, dx \right)^{1/q},$$

где $c^{(\delta)}_{\nu l}$ — коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе $\Psi^{(s)}$ (символы $\mathcal{M}$, $\mathcal{A}^{(s)}_{m,k,j}$, $\Psi^{(s)}$ заменяются соответственно на $\dot{\mathcal{M}}$, $\dot{\mathcal{A}}_{m,k,j}$, $\dot\Psi^{(s)}$).

Для частного случая анизотропного базиса, описанного на с. 506, параллелепипеды $P^{(s)}_{mk}$, используемые в теоремах 11.4.17 и 11.4.18 для вычисления нормы функции при помощи ее коэффициентов Фурье, можно заменить на

$$Q^{(a)}_{j\nu} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_\lambda \in \left[\nu_\lambda 2^{-a_\lambda j}, (\nu_\lambda + 1) 2^{-a_\lambda j} \right) \right\}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \nu \in \mathbb{Z}^n. \tag{11.103}$$

Множество параллелепипедов $Q^{(a)}_{j\nu}$ проще множества параллелепипедов $P^{(s)}_{m\,k}$, так как у Q первый нижний индекс одномерный, а у P — n-мерный. Параллелепипеды вида (11.103) будем называть *a-кубами*.

Введем обозначение:

$$P^{(a)}_{mk} = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_\lambda \in [\, k_\lambda b^{-m_\lambda}, (k_\lambda + 1) b^{-m_\lambda} \,) \},$$

$$\mathcal{L}^{(a)}_{j\nu} := \left\{ (m,k,\varepsilon) : \ (m,\varepsilon) \in \mathcal{N}^{(a)}_j, \ k \in \mathbb{Z}^n, \ P^{(a)}_{mk} \cap Q^{(a)}_{j\nu} \neq \varnothing \right\},$$

$$j \in \mathbb{N}, \quad m,k,\nu \in \mathbb{Z}^n; \tag{11.104}$$

χ_E — характеристическая функция множества E, $\widetilde{\chi}_E := |E|^{-1/2} \chi_E$.

Если Q — a-куб вида (11.103), то $x_Q = (\nu_1 2^{-a_1 j}, \ldots, \nu_n 2^{-a_n j})$ — левая нижняя вершина a-куба Q. Заметим, что анизотропное расстояние $\|x - y\|_{(a)}$ между двумя различными вершинами x, y a-куба $Q^{(a)}_{j\nu}$ равно $l(Q) := 2^{-j}$; $l(Q)$ является аналогом длины ребра изотропного куба.

Пусть

$$\Omega_{(a)} := \{ Q^{(a)}_{j\nu}, \ j \in \mathbb{N}, \ \nu \in \mathbb{Z}^n \}$$

— совокупность a-кубов; если $Q = Q^{(a)}_{j\nu}$, то $\mathcal{L}^{(a)}_Q := \mathcal{L}^{(a)}_{j\nu}$.

Определение 11.4.20. *Пространство $f^{(s)}_{pq}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \leqslant \infty$, — это (квази) банахово пространство числовых последовательно-*

стей $c := \{c_Q\}_{Q\in\Omega_{(a)}}$, для которых конечна (квази) норма

$$|c, f^{(s)}_{pq}| := \left|\left\{2^{js} \sum_{Q\in\Omega_{(a)}:\ \ l(Q)=2^{-j}} c_Q \widetilde{\chi}_Q\right\}_{j=1}^{\infty},\ L_p(l_q)\right|.$$

Теорема 11.4.21. *Система всплесков $\Psi^{(a)}$ ортонормирована в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и образует безусловный базис в $F^{(s)}_{pq}$, $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, т. е. любая функция $f \in F^{(s)}_{pq}$ разлагается в ряд Фурье*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}^{(a)}_j} c^{(\varepsilon)}_{mk} \psi^{(\varepsilon)}_{mk},$$

причем

$$|f, F^{(s)}_{pq}| \sim \left|\left\{ \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}^{(a)}_Q} |c^{(\varepsilon)}_{mk}| \right\}_{Q\in\Omega_{(a)}},\ f^{(s)}_{pq}\right|.$$

Если $q = \infty$, то эквивалентность норм сохраняется, но разложение в ряд Фурье выполнено только для функций из замыкания пространства $S(\mathbb{R}^n)$ в $F^{(s)}_{p\infty}$. В дальнейшем, не оговаривая это особо, через $F^{(s)}_{p\infty}$ обозначается вышеописанное замыкание.

Аналогичным образом можно переформулировать утверждения о безусловных базисах в пространствах $\dot{F}^{(s)}_{\infty q}$, $F^{(s)}_{\infty q}$, $0 < q < \infty$, $\dot{F}^{(s)}_{\infty q}$, а также в неоднородных и однородных пространствах Бесова.

Суть теоремы 11.4.21 состоит в том, что при фиксированном $j \geqslant 1$ в выражении эквивалентной нормы совокупность кубов $P^{(s)}_{mk}$, соответствующая j-му блоку, заменяется на совокупность кубов $Q^{(a)}_{j\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}^n$, размер которых зависит только от j (см. для сравнения теорему 11.4.17). Это существенно упрощает использование нормы пространства $f^{(s)}_{pq}$ при доказательстве теорем в следующем параграфе.

Замечание 11.4.22. Построенный базис зависит от показателя гладкости s (более точно он зависит от вектора анизотропии a).

Приведем пример, показывающий, что изотропный базис Мейера (т. е. базис, состоящий из тензорных произведений одномасштабных всплесков) не является базисом в анизотропном пространстве.

Пусть $s_1 = 1$, $s_2 = 1/\log_2 \dfrac{3}{2} = \log_{3/2} 2$. Будем использовать выбор параметров C_λ и γ, описанный на с. 502. Тогда $a_1 = 2$, $a_2 := 2^{1/s_2} = 3/2$. Сконструируем базис всплесков из тензорных произведений всплесков Мейера–Давида с параметрами $h_1 = 1$, $h_2 = 2$ (см. (11.93)). Он имеет вид

$$\Psi^{(s_1,s_2)} = \left\{\psi^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}_{m,k}\right\}_{\varepsilon\in E,\, m\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^2} = \left\{\psi^{2,\varepsilon_1}_{m,k}(x_1)\psi^{3/2,\varepsilon_2}_{m,k}(x_2)\right\}_{\varepsilon\in E,\, m\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^2},$$

где индексы у ψ сверху для удобства взяты равными индексам растяжения (тоже самое относится к индексам функций θ, используемых для определения преобразования Фурье ψ (см. (11.87))). Отметим, что $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 := \frac{4}{5}$ (см. (11.94)).

Выберем m_0 так, чтобы для любого $m \geqslant m_0$

$$m < [(m-2)s_2]; \quad \frac{2^m}{3} \geqslant \frac{9}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{[(m-2)s_2]}, \tag{11.105}$$

где $[t]$ — целая часть числа t.

Тогда $\cos\theta_2\left(2^{-m}\xi\right) = 1$ для любого $\xi \in \operatorname{supp} F\psi_m^{3/2}$ и для любых $k,\ l \in \mathbb{Z}$

$$\left\langle \psi^2_{m,k}(x_1)\psi^{3/2}_{m,l3^m}(x_2), \psi^2_{m,k}(x_1)\varphi^2_{m,l2^{2m}}(x_2)\right\rangle =$$

$$= 3^{-m/2}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(i2\pi\xi_2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-m} l3^m - 2^{-m}l2^{2m}\right)\right) \times$$

$$\times \exp\left(-i\pi\xi_2\left(\frac{3}{2}\right)^{-m}\right)\sin\theta_{3/2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-m}\xi_2\right)\cos\theta_2\left(2^{-m}\xi_2\right)d\xi_2 =$$

$$= 3^{-m/2}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\pi\xi_2\left(\frac{3}{2}\right)^{-m}\right)\sin\theta_{3/2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-m}\xi_2\right)\,d\xi_2 =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{m/2}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\pi\xi_2\right)\sin\theta_{3/2}\left(\xi_2\right)\,d\xi_2 =$$

$$= -i\left(\frac{3}{4}\right)^{m/2}\int\limits_{\mathbb{R}} \sin\left(\pi\xi_2\right)\sin\theta_{3/2}\left(\xi_2\right)\,d\xi_2.$$

Пусть

$$A := \int\limits_{\mathbb{R}} \sin\left(\pi\xi\right)\sin\theta_{3/2}\left(\xi\right)\,d\xi.$$

Легко видеть, что $A \neq 0$. Окончательно имеем для любых $m \geqslant m_0$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$

$$\langle \psi^2_{m,k}(x_1)\psi^{3/2}_{m,l3^m}(x_2), \psi^2_{m,k}(x_1)\varphi^2_{m,l2^{2m}}(x_2)\rangle = -i\left(\frac{3}{4}\right)^{m/2} A. \tag{11.106}$$

Пусть $\mu = m+1,\ \ldots, [(m-2)s_2]$. Легко видеть, что тогда

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\mu+2}\frac{4}{5} \leqslant 2^{m+1}\frac{1}{3}, \tag{11.107}$$

и поэтому $\cos\theta_2\left(2^{-m}\xi\right) = 1$ для любого $\xi \in \operatorname{supp} F\psi^{3/2}_{\mu,0}$. При этих условиях для любых $k \in \mathbb{Z}$

$$\left\langle \varphi^2_{\mu,2^{\mu-m}k}(x_1)\psi^{3/2}_{\mu,3^\mu 2^{[(m-2)s_2]+1-\mu}}(x_2), \psi^2_{m,k}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\right\rangle =$$

$$= 2^{-\frac{\mu+m}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(i2\pi\xi_1\left(2^{-\mu}2^{\mu-m}k - 2^{-m}k\right)\right) \times$$

$$\times \exp\left(i\pi\xi_1 2^{-m}\right) \cos\theta_2\left(2^{-\mu}\xi_1\right) \sin\theta_2\left(2^{-m}\xi_1\right) d\xi_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{-\mu/2} 2^{-m/2} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(i2\pi\xi_2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-\mu} 3^{\mu} 2^{[(m-2)s_2]+1-\mu} - 2^{[(m-2)s_2]+1}\right)\right) \times$$

$$\times \exp\left(-i\pi\xi_2\left(\frac{3}{2}\right)^{-\mu}\right) \sin\theta_{3/2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-\mu}\xi_2\right) \cos\theta_2\left(2^{-m}\xi_2\right) d\xi_2 =$$

$$= 2^{\frac{m-\mu}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(i\pi\xi_1\right) \sin\theta_2\left(\xi_1\right) d\xi_1 \times$$

$$\times \left(\frac{3}{2}\right)^{\mu/2} 2^{-m/2} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\pi\xi_2\right) \sin\theta_{3/2}\left(\xi_2\right) d\xi_2 =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{\mu/2} \cdot iA \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \cos\left(\frac{\xi_1}{2}\right) \sin\theta_2\left(\xi_1\right)\, d\xi_1.$$

Пусть

$$B := \int\limits_{\mathbb{R}} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \sin\theta_2\left(\xi\right)\, d\xi.$$

Легко видеть, что $B \neq 0$. Окончательно имеем

$$\left\langle \varphi^2_{\mu,2^{\mu-m}k}(x_1)\psi^{3/2}_{\mu,3^{\mu}2^{[(m-2)s_2]+1-\mu}}(x_2), \psi^2_{m,k}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\right\rangle =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{\mu/2} \cdot iA \cdot B. \quad (11.108)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$P^{(s)}_{m,k} = Q^{(a)}_{m,k},$$

(см. (11.102) и (11.103)).

Используя (11.108) и теорему 11.4.17, оценим снизу

$$\|\psi^2_{m,k}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\|_{F^{(1,s_2)}_{pq}} \gg \left\|\left(\sum_{\mu=m+1}^{[(m-2)s_2]} 2^{\mu s q} \times\right.\right.$$

$$\times \left|\langle \varphi^2_{\mu,2^{\mu-m}k}(x_1)\psi^{3/2}_{\mu,3^{\mu}2^{[(m-2)s_2]+1-\mu}}(x_2), \psi^2_{m,k}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\rangle\right. \times$$

$$\times\ \widetilde{\varkappa}_{Q^{(a)}_{\mu,2^{\mu-m}k,3^{\mu}2^{[(m-2)s_2]+1-\mu}}}\Big|^q\Big)^{1/q}\Big\|_p.$$

Левые нижние углы у прямоугольников $Q^{(a)}_{\mu,2^{\mu-m}k,3^{\mu}2^{[(m-2)s_2]+1-\mu}}$ совпадают, поэтому

$$\Big\|\Big(\sum_{\mu=m+1}^{[(m-2)s_2]} 2^{\mu sq}\times$$

$$\times\Big|\langle\varphi^2_{\mu,2^{\mu-m}k}(x_1)\psi^{3/2}_{\mu,3^{\mu}2^{[(m-2)s_2]+1-\mu}}(x_2),\psi^2_{m,k}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\rangle\times$$

$$\times\ \widetilde{\varkappa}_{Q^{(a)}_{\mu,2^{\mu-m}k,3^{\mu}2^{[(m-2)s_2]+1-\mu}}}\Big|^q\Big)^{1/q}\Big\|_p\gg$$

$$\gg\left(\sum_{j=m+1}^{[(m-2)s_2]}\left(\sum_{\nu=m+1}^{j}2^{\nu sq}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\nu q}{2}}(|A\cdot B|)^q 3^{\frac{\nu q}{2}}\right)^{p/q}\left(3^{-j}-3^{-j-1}\right)\right)^{1/p}=$$

$$=|A|\cdot|B|\cdot\left(\sum_{j=m+1}^{[(m-2)s_2]}\left(\sum_{\nu=m+1}^{j}2^{\nu(s-1)q}3^{\nu q}\right)^{p/q}2\cdot 3^{-j-1}\right)^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant|A|\cdot|B|\cdot\left(\sum_{j=m+1}^{[(m-2)s_2]}2^{j(s-1)p+1}3^{j(p-1)-1}\right)^{1/p}\gg$$

$$\gg 2^{ms_2(s-1)}3^{\frac{(p-1)s_2m}{p}}.$$

Окончательно,

$$\|\psi^2_{m,k}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\|_{F^{(1,s_2)}_{pq}}\gg 2^{ms_2(s-1)}3^{\frac{(p-1)s_2m}{p}}. \qquad (11.109)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x_1,x_2):=\sum_{m=m_0}^{\infty}a_m\psi^2_{m,k(m)}(x_1)\psi^{3/2}_{m,2^{[(m-2)s_2]+1-m}3^m}(x_2), \qquad (11.110)$$

где $k(m)$ выбрано так, чтобы прямоугольники $Q^{(a)}_{m,k(m),2^{[(m-2)s_2]+1-m}3^m}$ не пересекались. Тогда по теореме 11.4.17

$$\|f\|_{F^{(1,s_2)}_{p,q}}\sim\Big\|\sum_{m=m_0}^{\infty}2^{ms}a_m\widetilde{\varkappa}_{Q^{(a)}_{m,k(m),2^{[(m-2)s_2]+1-m}3^m}}\Big\|_p=$$

$$=\left(\sum_{m=m_0}^{\infty}\left(2^{ms}3^{m/2}a_m\right)^p3^{-m}\right)^{1/p}=\left(\sum_{m=m_0}^{\infty}2^{mps}3^{m\left(\frac{p}{2}-1\right)}a_m^p\right)^{1/p}. \qquad (11.111)$$

Если функцию f разложить в ряд по системе

$$\left\{\psi^{2,\varepsilon_1}_{m,k_1}(x_1), \psi^{2,\varepsilon_2}_{m,k_2}(x_2)\right\}_{m\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^2},$$

то в этом ряде будут слагаемые вида

$$a_m\Big\langle\psi^2_{m,k(m)}(x_1)\psi^{3/2}_{m,2^{[(m-2)s_2]+1-m}3^m}(x_2),$$
$$\psi^2_{m,k(m)}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\Big\rangle\psi^2_{m,k(m)}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2).$$

В силу (11.106) и (11.109)

$$\|a_m\langle\psi^2_{m,k(m)}(x_1)\psi^{3/2}_{m,2^{[(m-2)s_2]+1-m}3^m}(x_2), \psi^2_{m,k(m)}(x_1)\times$$
$$\times\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\rangle\psi^2_{m,k(m)}(x_1)\varphi^2_{m,2^{[(m-2)s_2]+1+m}}(x_2)\|_{F^{(1,s_2)}_{pq}} \gg$$
$$\gg a_m\left(\frac{3}{4}\right)^{m/2}2^{ms_2(s-1)}3^{\frac{(p-1)s_2m}{p}}. \quad (11.112)$$

Возьмем $a_m := \left(\frac{3}{4}\right)^{-m/2}2^{-ms_2(s-1)}3^{-\frac{(p-1)s_2m}{p}}$. Из (11.112) следует, что разложение f по «изотропному» базису не будет сходится в $F^{(1,s_2)}_{pq}$.

Исследуем сходимость ряда (11.110), используя (11.111). В (11.111) записана геометрическая прогрессия со знаменателем:

$$2^s3^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1/2}2^{-s_2(s-1)}3^{-\frac{(p-1)s_2}{p}} = 2^{1+s+s_2-s_2s}3^{-\frac{(p-1)s_2+1}{p}}.$$

Этот знаменатель будет строго меньше 1 при условии, что

$$3^{\frac{(p-1)s_2+1}{p}} > 2^{1+s+s_2-s_2s}$$

или

$$\frac{(p-1)s_2+1}{p} > (1+s+s_2-s_2s)\log_3 2. \quad (11.113)$$

Легко видеть, что $1+s+s_2-s_2s<2$, а $s_2>2\log_3 2$, поэтому (11.113) выполнено при достаточно больших p.

Окончательно имеем функцию $f\in F^{(1,s_2)}_{pq}$, у которой разложение по «изотропной системе» содержит бесконечно много членов с нормой, приблизительно равной 1.

Замечание 11.4.23. Напомним, что $F^{(l)}_{p2}=W^{(l)}_p$ при $1<p<\infty$ и $l_\lambda>0$, где под $W^{(l)}_p$ понимаются пространство бесселевых потенциалов при дробных l_λ и пространство Соболева при натуральных. Таким образом, построен базис из целых функций экспоненциального типа в анизотропных пространствах Соболева.

Замечание 11.4.24. Естественно, чтобы в каждом блоке построенного базиса было бы как можно меньше слоев (см. определение 11.4.12). Покажем, что использование всплесков Мейера–Давида приводит к достижению этой цели.

Из (11.93) и (11.95) следует, что при фиксированном γ количество слоев в блоке будет минимальным, если h_λ удовлетворяет условию

$$\gamma_\lambda := \gamma^{1/s_\lambda} \in \left[\frac{h_\lambda+1}{h_\lambda},\ \frac{h_\lambda}{h_\lambda-1}\right) \quad \left(\frac{1}{0} := \infty\right). \tag{11.114}$$

Рассмотрим вопрос о влиянии параметра γ на количество слоев в блоках. Положим для простоты $n=2$. Пусть для определенности $s_1 > s_2 > 0$. Если $\gamma = 2^{s_1}$, то в силу (11.114) $h_1 = h_2 = 1$, т.е. в конструкции базиса используются только всплески Мейера. При этом количество слоев в блоках в силу (11.96) больше, чем $\log_2 2^{s_1/s_2} = s_1/s_2$. Таким образом, когда s_1 много больше, чем s_2, в блоках возникает большое количество слоев.

Однако при любых соотношениях между s_1 и s_2 за счет использования всплесков Мейера–Давида можно добиться того, что $N^* \leqslant 4$ (см. (11.97)). Для этого достаточно положить $\gamma = 2^{s_2}$, $h_2 = 1$. Тогда

$$N^* \leqslant [\log_{(1+h_1^{-1})} 2^{s_2/s_1}] + 2,$$

где h_1 таково, что

$$\frac{h_1+1}{h_1} \leqslant 2^{s_2/s_1} < \frac{h_1}{h_1-1}.$$

Отсюда следует, что

$$N^* \leqslant \left[\log_{\frac{h_1+1}{h_1}}\left(\frac{h_1}{h_1-1}\right)\right] + 2 \leqslant 4.$$

Последнее неравенство, как легко видеть, справедливо при любом $h_1 \geqslant 2$.

При произвольном $n \in \mathbb{N}$ положим:

1) $\gamma = 2^{1/s_{\lambda_0}}$, где $s_{\lambda_0} = \min\{s_1, \ldots, s_n\}$;
2) для тех λ, при которых $s_\lambda = s_{\lambda_0}$, $h_\lambda = 1$;
3) для тех λ, при которых $s_\lambda > s_{\lambda_0}$, h_λ выбирается единственным образом из условия (11.114).

Легко видеть, что при этом $N^* \leqslant 4^{n-n_1}$, где n_1 — количество тех λ, для которых $s_\lambda = s_{\lambda_0}$.

11.4.5. Изотропный случай. В изотропном случае ($s_1 = s_2 = \ldots$ $\ldots = s_n = s_0$) базис всплесков не зависит от показателя гладкости s. Полагая $\gamma = 2^{s_0}$, $C_\lambda = \dfrac{1}{3}$, $h_\lambda = 1$, мы приходим к базису всплесков Мейера. Пусть $\psi^{(1)}(t) = \psi_1(t)$ и $\psi^{(0)}(t) = \varphi_1(t)$, где $\psi_1(t)$ и $\varphi_1(t)$ — всплески Мейера–Давида для $h=1$, определенные в (11.87). Определим всплески

$$\psi_{jk}^{(\varepsilon)}(x) := \prod_\lambda 2^{j/2}\psi^{(\varepsilon_\lambda)}(2^j x_\lambda + k_\lambda),$$

где $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Пусть

$$\Psi := \{\psi^{(0,\dots,0)}_{1,k}, \psi^{(\varepsilon)}_{jk}\}_{\{(\varepsilon)\in\{0,1\}^n, \varepsilon\neq 0, j\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}^n\}}.$$

Теорема 11.4.25. *Система всплесков Ψ ортонормирована в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и образует безусловный базис в $F^{s_0}_{pq}$, $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, т. е. любая функция $f \in F^{s_0}_{pq}$ разлагается в ряд Фурье*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c^{(0,\dots,0)}_k \psi^{(0,\dots,0)}_{1k} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n, \varepsilon\in\{0,1\}^n, \varepsilon\neq 0} c^{(\varepsilon)}_{jk} \psi^{(\varepsilon)}_{jk},$$

причем

$$|f, F^{s_0}_{pq}| \sim \Bigg|\Bigg(2^{qs_0}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c^{(0,\dots,0)}_{1k}| \widetilde{\chi}_{Q_{1,k}}\Bigg)^q + \\ + \sum_{j=2}^{\infty} 2^{jqs_0}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Bigg(\sum_{(\varepsilon)\in\{0,1\}^n, \varepsilon\neq 0} |c^{(\varepsilon)}_{j-1,k}|\Bigg)\widetilde{\chi}_{Q_{j,k}}\Bigg)^q\Bigg)^{1/q}, L_p\Bigg|,$$

где $Q_{jk} := \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x_\lambda \in [k_\lambda 2^{-j}, (k_\lambda + 1)2^{-j}]\}$.

Если $q = \infty$, то эквивалентность норм сохраняется, но разложение в ряд Фурье выполнено только для функций из замыкания пространства $S(\mathbb{R}^n)$ в $F^{s_0}_{p\infty}$.

Ортонормированная система Ψ образует безусловный базис в $B^{s_0}_{pq}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, или $1 \leqslant q \leqslant \infty$ при $p = \infty$, причем норма $f \in B^{s_0}_{pq}$ эквивалентна

$$\Bigg(2^{\left(s_0+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)q}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c^{(0,\dots,0)}_{1k}|^p\Bigg)^{q/p} + \\ + \sum_{j=2}^{\infty} 2^{j\left(s_0+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)q} \sum_{(\varepsilon)\in\{0,1\}^n, \varepsilon\neq 0}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c^{(\varepsilon)}_{j-1,k}|^p\Bigg)^{q/p}\Bigg)^{1/q}$$

с понятным видоизменением при $q = \infty$.

Аналогичным образом можно переформулировать утверждения о безусловных базисах в пространствах $\dot{F}^{s_0}_{pq}$, $F^{s_0}_{\infty q}$, $0 < q < \infty$, $\dot{F}^{s_0}_{\infty q}$ и однородных пространствах Бесова.

Нижеследующие доказательства теорем 11.4.17, 11.4.18 и 11.4.19 при этом упрощаются.

11.4.6. Доказательства. Для упрощения выкладок всюду ниже $n = 2$.

Доказательство теоремы 11.4.15. Дальнейшие рассуждения проводятся для пространств F, так как легко видеть, что они вместе с использованием скалярного варианта предложения 11.4.7 приводят к аналогичным заключениям в случае пространств B.

Шаг 1. Используя предложение 11.4.7, нетрудно показать, что норма в пространстве $F_{pq}^{(s)}$ может быть эквивалентно задана при помощи систем функций $\{\sigma_j'(\xi)\}_1^\infty$, удовлетворяющих условиям:

$$\sigma_j' \geqslant 0, \quad \sigma_j' \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp}\sigma_j' \subset \Gamma_j \cup \Gamma_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$a^{j\alpha}|D^\alpha \sigma_j'(\xi)| \leqslant c_\alpha \text{ для любого мультииндекса } \alpha,\ j \in \mathbb{N},\ \xi \in \mathbb{R}^n;$$

существует константа $c \in (0,\infty)$ такая, что $\sum\limits_{j=1}^\infty \sigma_j'(\xi) \geqslant c \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$.

Шаг 2. Пусть далее $s_\lambda > 0$ (случай $s_\lambda < 0$ рассматривается аналогично). Пусть функции $\omega_m^{(\varepsilon)}$, $(m,\varepsilon) \in \mathcal{N}_j$, $j \geqslant 1$, определены условием $F\omega_m^{(\varepsilon)} = |\varkappa_m^{(\varepsilon)}|$ (функции $\varkappa_m^{(\varepsilon)}$ определены в (11.101)). Тогда система функций $\left\{\sum\limits_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} F\omega_m^{(\varepsilon)}\right\}_{j=1}^\infty$ удовлетворяет условиям шага 1 (см. предложение 11.4.13). Поэтому норма в $F_{pq}^{(s)}$ может быть эквивалентным образом задана как

$$\mathcal{A}(f) := \left|\left(\sum_{j=1}^\infty \gamma^{jq}\left|\sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} f * \omega_m^{(\varepsilon)}\right|^q\right)^{1/q},\ L_p\right|.$$

Шаг 3. Рассмотрим величины

$$\left|\left(\sum_{j=1}^\infty \gamma^{jq}\left|f * \omega_{m_j}^{(\varepsilon_j)}\right|^q\right)^{1/q},\ L_p\right|, \tag{11.115}$$

где при любом $j \in \mathbb{N}$ $\ (m_j,\varepsilon_j)$ — произвольный элемент из $\mathcal{N}_j$. Докажем, что с константой, не зависящей от выбора (m_j,ε_j) и от функции f, все эти величины оцениваются сверху через $\mathcal{A}(f)$.

Для этого рассмотрим выражение

$$\mathcal{B}(f) := \left|\left(\sum_{j=1}^\infty \gamma^{jq}\left|\sum_{\nu=-1}^{1}\sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_{j+\nu}} f * \omega_m^{(\varepsilon)}\right|^q\right)^{1/q},\ L_p\right|,$$

где $\mathcal{N}_0 = \varnothing$.

Заметим, что

$$F\omega_{m_j}^{(\varepsilon_j)} \cdot Ff = \frac{F\omega_{m_j}^{(\varepsilon_j)}}{\sum\limits_{\nu=-1}^{1}\sum\limits_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_{j+\nu}} F\omega_m^{(\varepsilon)}} \cdot F\left(\sum_{\nu=-1}^{1}\sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_{j+\nu}} f * \omega_m^{(\varepsilon)}\right);$$

$$\sum_{\nu=-1}^{1}\sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_{j+\nu}} (F\omega_m^{(\varepsilon)})(\xi) \geqslant c > 0 \quad \forall\ \xi \in \operatorname{supp} F\omega_{m_j}^{(\varepsilon_j)}.$$

Кроме того,

$$\sum_{\nu=-1}^{1} \sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_{j+\nu}} (f * \omega_m^{(\varepsilon)})(x)$$

является целой функцией экспоненциального типа $(r_1 b_1^{l_{j+2}^{(1)}+2}, r_2 b_2^{l_{j+2}^{(2)}+2})$. Применяя предложение 11.4.7, получим, что величины (11.115) с константой, не зависящей от функции f и выбора (m_j, ε_j), оцениваются сверху через $\mathcal{B}(f)$. Кроме того, легко видеть, что $\mathcal{B}(f) \ll \mathcal{A}(f)$. Таким образом утверждение шага 3 доказано.

Шаг 4. Пусть $g_1^{(\varepsilon)}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, — финитная функция, совпадающая с $\exp\big(-i\pi(\varepsilon_1\xi_1 + \varepsilon_2\xi_2)\big)$ на $\operatorname{supp} F\psi_{00}^{(\varepsilon)}$. Тогда очевидно, что

$$F\varkappa_m^{(\varepsilon)}(\xi) = g_1(b_1^{-m_1}\xi_1, b_2^{-m_2}\xi_2)|F\varkappa_m^{(\varepsilon)}(\xi)|.$$

Если $g_2^{(\varepsilon)}(\xi) \in C^\infty$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, — финитная функция, совпадающая там же с $\exp\big(i\pi(\varepsilon_1\xi_1 + \varepsilon_2\xi_2)\big)$, то

$$|F\varkappa_m^{(\varepsilon)}(\xi)| = g_2(b_1^{-m_1}\xi_1, b_2^{-m_2}\xi_2)F\varkappa_m^{(\varepsilon)}(\xi).$$

Написанные равенства и предложение 11.4.7 позволяют заключить, что в величинах (11.115) можно эквивалентным образом заменить $f * \omega_m^{(\varepsilon)}$ на $f * \varkappa_m^{(\varepsilon)}$.

Шаг 5. В силу предложения 11.4.11 величина $\mathcal{A}(f)$ оценивается суммой конечного числа ($\leqslant N^*$) слагаемых вида (11.115), каждое из которых в силу шага 4 не превосходит (с некоторой константой) величины $A(f)$. Таким образом $\mathcal{A}(f) \ll A(f)$. В свою очередь $A(f)$ в силу предложения 11.4.11 и шага 4 не превосходит (с некоторой константой) суммы конечного числа ($\leqslant N^*$) слагаемых вида (11.115), которые в силу шага 3 оцениваются через $\mathcal{A}(f)$. Теорема доказана. $\diamondsuit$

Доказательство теоремы 11.4.16. Здесь проводятся те же рассуждения, но с использованием соответствующего предложению 11.4.7 утверждения, относящегося к ситуации двусторонних последовательностей и мультипликаторов в $S'(\mathbb{R}^n)/P(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство теоремы 11.4.17. А. Рассмотрим случай $s_\lambda > 0$ (при $s_\lambda < 0$ рассуждения совершенно аналогичны). Заметим, что для $(m,k,\varepsilon) \in \mathcal{M}$

$$c_{mk}^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} Ff(\xi) \cdot \prod_{\lambda=1}^{2} \left(b_\lambda^{-\frac{m_\lambda}{2}} e^{i\xi_\lambda k_\lambda^{(\varepsilon_\lambda)} b_\lambda^{-m_\lambda}} \, \overline{F\psi^{(\lambda,\varepsilon_\lambda)}}(b_\lambda^{-m_\lambda}\xi_\lambda) \right) d\xi.$$

Если определить функции $(\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(x)$ равенством

$$(F\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(\xi) = Ff(\xi)F\varkappa_m^{(\varepsilon)}(\xi),$$

то $c_{mk}^{(\varepsilon)} = b^{-\frac{m}{2}} \left(\Delta_m^{(\varepsilon)} f\right)(b_1^{-m_1} k_1^{(\varepsilon_1)}, b_2^{-m_2} k_2^{(\varepsilon_2)})$. Пусть

$$\mathcal{M}_j' := \{(m, k, \varepsilon) \in \mathcal{M}_j,\ \varepsilon_\lambda \neq 0\}, \quad \mathcal{N}_j' := \{(m, \varepsilon) \in \mathcal{N}_j,\ \varepsilon_\lambda \neq 0\}.$$

Тогда

$$C(f) := \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j'} |c_{mk}^{(\varepsilon)} \widetilde{\chi}_{mk}^{(\varepsilon)}|^q \right)^{1/q},\ L_p \right| =$$

$$= \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j'} |(\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(b_1^{-m_1} k_1, b_2^{-m_2} k_2) \chi_{mk}^{(s)}|^q \right)^{1/q},\ L_p \right|.$$

Здесь $\chi_{mk}^{(s)}$ — характеристическая функция прямоугольника $P_{mk}^{(s)}$.

Шаг 1. Докажем, что $C(f) \ll A(f)$. Из неравенства треугольника в $L_p(l_q)$ и предложения 11.4.11 следует, что

$$C(f) \ll \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{\mathcal{M}_j'} |(\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(b_1^{-m_1} k_1, b_2^{-m_2} k_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(x)|^q \chi_{mk}^{(s)}(x) \right)^{1/q}, L_p \right| + A(f).$$

Обозначим

$$E(f) := \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{\mathcal{M}_j'} |(\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(b_1^{-m_1} k_1, b_2^{-m_2} k_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(x)|^q \chi_{mk}^{(s)}(x) \right)^{1/q}, L_p \right|.$$

Разложение в ряд Тейлора дает

$$E(f) = \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j'} \left| \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u!} \sum_{|\alpha|=u} D^\alpha (\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(x) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \prod_{\lambda=1}^{2} (x_\lambda - b_\lambda^{-m_\lambda} k_\lambda)^{\alpha_\lambda} \right|^q \chi_{mk}^{(s)} \right)^{1/q},\ L_p \right|.$$

Если $x \in P_{mk}^{(s)}$, то $|x_\lambda - k_\lambda b_\lambda^{-m_\lambda}| < b_\lambda^{-m_\lambda}$, поэтому, используя неравенство треугольника в $L_p(l_q)$, имеем при $p, q \geqslant 1$ оценку

$$E(f) \leqslant \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u!} \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{\mathcal{N}_j'} \left(\sum_{|\alpha|=u} \left| D^\alpha (\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(x) \prod_{\lambda=1}^{2} b_\lambda^{-m_\lambda \alpha_\lambda} \right| \right)^q \right)^{1/q},\ L_p \right|. \tag{11.116}$$

Пусть $v \in \Big(0, \min\{p,q\}\Big)$, $\xi_\lambda := r_\lambda b_\lambda^2$. Тогда, используя предложения 11.4.10 и 11.4.11, имеем

$$E(f) \leqslant \sum_{u=1}^{\infty} \frac{c^u}{u!} \times$$

$$\times \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{\mathcal{N}'_j} \left(\sum_{|\alpha|=u} \xi^\alpha \sup_z \frac{|(\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(x-z)|}{1+|(\xi_1 z_1 b_1^{m_1},\ \xi_2 z_2 b_2^{m_2})|^{2/v}} \right)^q \right)^{1/q}, L_p \right| \ll$$

$$\ll A(f).$$

Если $\min(p,q) < 1$, то неравенство (11.116) заменяется на

$$E(f) \leqslant \sum_{u=1}^{\infty} \frac{c_{pq}^u}{u!} \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{\mathcal{N}'_j} \left(\sum_{|\alpha|=u} \left| D^\alpha (\Delta_m^{(\varepsilon)} f)(x) \prod_{\lambda=1}^{2} b_\lambda^{-m_\lambda \alpha_\lambda} \right| \right)^q \right)^{1/q}, L_p \right|,$$

где c_{pq} — константа в квазинеравенстве треугольника для $L_p(l_q)$.

Выражения типа $C(f)$ для $\varepsilon = (0,0)$, $(0,1)$ и $(1,0)$ оцениваются аналогично; заметим только, что при этом возникают характеристические функции прямоугольников

$$P_{mk}^{(s,\varepsilon)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon\ x_\lambda \in \Big[b_\lambda^{-m_\lambda} k_\lambda^{(\varepsilon_\lambda)},\ b_\lambda^{-m_\lambda} (k_\lambda + 1)^{(\varepsilon_\lambda)} \Big) \right\},$$

переход от которых к $\chi_{mk}^{(s)}$ достигается применением операторов растяжения, непрерывных в $L_p(l_q)$.

Шаг 2. Имея в виду только что сделанное замечание, получим обратные оценки только для случая $\varepsilon_\lambda \neq 0$. Пусть для $(m,\varepsilon) \in \in \mathcal{N} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}_j$

$$\mathcal{C}_m^{(\varepsilon)} = \left\{ (\nu,\delta) \in \mathcal{N} \colon\ (\nu,\delta) \neq (m,\varepsilon),\ \operatorname{supp} F\psi_{\nu,0}^{(\delta)} \bigcap \operatorname{supp} F\psi_{m,0}^{(\varepsilon)} \neq \varnothing \right\}.$$

Зафиксируем $\tau \in P_{m,0}^{(s)}$ и разложим в ряд Фурье по системе $\Psi^{(s)}$ функцию $\psi_{m,0}^{(\varepsilon)}(x-\tau)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Ясно, что ненулевые коэффициенты Фурье будут только при функциях $\psi_{m\mu}^{(\varepsilon)}$ и $\psi_{\nu\mu}^{(\delta)}$, $(\nu,\delta) \in \mathcal{C}_m^{(\varepsilon)}$, $\mu \in \mathbb{Z}^2$. Итак,

$$\psi_{m,0}^{(\varepsilon)}(x-\tau) =$$

$$= \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} d(m,\varepsilon,\mu,\tau) \psi_{m,\mu}^{(\varepsilon)}(x) + \sum_{\mathcal{C}_m^{(\varepsilon)}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} d_1(m,\varepsilon,\mu,\tau,\nu,\delta) \psi_{\nu,\mu}^{(\delta)}(x) :=$$

$$:= \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} d(m,\varepsilon,\mu,\tau) \psi_{m,\mu}^{(\varepsilon)}(x) + G_{m\tau}^{(\varepsilon)}(x), \quad (11.117)$$

где $d(m,\varepsilon,\mu,\tau)$ и $d_1(m,\varepsilon,\mu,\tau,\nu,\delta)$ — соответствующие коэффициенты Фурье.

Разложение в ряд Фурье по $\Psi^{(s)}$ функции $\psi^{(\varepsilon)}_{m,0}(x-\tau)$, $x\in\mathbb{R}^2$, при фиксированном $\tau\in P^{(s)}_{mk}$, $k\in\mathbb{Z}^2$, можно получить из (11.117), используя простую алгебраическую структуру базиса $\Psi^{(s)}$. Действительно, если $\tau\in P^{(\varepsilon)}_{mk}$, то

$$\tau_\lambda = k_\lambda b_\lambda^{-m_\lambda} + \{\tau_\lambda b_\lambda^{m_\lambda}\} b_\lambda^{-m_\lambda}.$$

Обозначим

$$\rho_{mk} := \left(k_1 b_1^{-m_1},\ k_2 b_2^{-m_2}\right), \quad \zeta_m(\tau) := \left(\{\tau_1 b_1^{m_1}\} b_1^{-m_1},\ \{\tau_2 b_2^{m_2}\} b_2^{-m_2}\right).$$

Из (11.117) получаем для $\tau\in P^{(\varepsilon)}_{mk}$

$$\psi^{(\varepsilon)}_{m,0}(x-\tau) = \psi^{(\varepsilon)}_{m,0}(x-\rho_{mk}-\zeta_m(\tau)) =$$
$$= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^2} d(m,\varepsilon,\mu,\zeta_m(\tau))\psi^{(\varepsilon)}_{m,\mu}(x-\rho_{mk}) + G^{(\varepsilon)}_{m,\zeta_m(\tau)}(x-\rho_{mk}) =$$
$$= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^2} d(m,\varepsilon,\mu-k,\zeta_m(\tau))\psi^{(\varepsilon)}_{m,\mu}(x) + G^{(\varepsilon)}_{m,\zeta_m(\tau)}(x-\rho_{mk}).$$

Таким образом, для произвольного $\tau\in\mathbb{R}^2$

$$\Delta^{(\varepsilon)}_m(\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{\psi^{(\varepsilon)}_{m,0}(x-\tau)}\,dx\,\widetilde{\chi}^{(\varepsilon)}_{mk}(\tau) =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^2}\overline{d(m,\varepsilon,\mu-k,\zeta_m(\tau))}c^{(\varepsilon)}_{m\mu}\widetilde{\chi}^{(\varepsilon)}_{mk}(\tau) +$$
$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{G^{(\varepsilon)}_{m,\zeta_m(\tau)}(x-\rho_{mk})}\,dx\cdot\widetilde{\chi}^{(\varepsilon)}_{mk}(\tau) := R_1(m,\varepsilon,\tau) + R_2(m,\varepsilon,\tau).$$

В силу быстрого убывания на бесконечности (быстрее любой степени) функций $\psi_{h_\lambda}(x_\lambda)$ и $\varphi_{h_\lambda}(x_\lambda)$ нетрудно показать, что

$$|d(m,\varepsilon,\mu,\tau)| \ll (1+|\mu|^\alpha)^{-1}$$

для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ с константой, не зависящей от $\tau\in P^{(s)}_{m,0}$ и $(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}$. Пусть $\beta\in\Big(0,\min(p,q)\Big)$. Тогда

$$R_1(m,\varepsilon,\tau) \ll \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^2}\frac{|c^{(\varepsilon)}_{m\mu}|}{1+|\mu-k|^{3+2/\beta}}\ \widetilde{\chi}^{(\varepsilon)}_{mk}(\tau) \ll$$

$$\ll \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{|c_{m\mu}^{(\varepsilon)}|}{1+|\mu-k|^{2/\beta}} \right) \widetilde{\chi}_{mk}^{(\varepsilon)}(\tau). \quad (11.118)$$

Обозначим $\eta_m^{(\varepsilon)} f(\tau) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2} c_{mk}^{(\varepsilon)} \widetilde{\chi}_{mk}^{(\varepsilon)}(\tau)$. Тогда

$$b^{m/2} \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^2} \frac{|c_{mk}^{(\varepsilon)}|}{1+|\mu-k|^{2/\beta}} \ll (M(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta)^{1/\beta}(k_1 b_1^{-m_1}, k_2 b_2^{-m_2}),$$

где M — максимальный оператор Харди–Литтлвуда (по прямоугольникам со сторонами, параллельными координатным осям).

Действительно, для любого $\mu\in\mathbb{Z}^2$, $\mu\neq k$, имеем (пояснения ниже)

$$(M(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta)^{1/\beta}(k_1 b_1^{-m_1}, k_2 b_2^{-m_2}) \geqslant b^{m/2}|c_{m\mu}^{(\varepsilon)}| \left(4\prod_{\lambda=1}^{2} |k_\lambda-\mu_\lambda| \right)^{-1/\beta} \gg$$

$$\gg b^{m/2}|c_{m\mu}^{(\varepsilon)}|(1+|\mu-k|^{2/\beta})^{-1}. \quad (11.119)$$

Первое неравенство получаем усреднением $(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta$ по прямоугольнику с центром в $(k_1 b_1^{-m_1},\ k_2 b_2^{-m_2})$ и вершиной в $(\mu_1 b_1^{-m_1},\ \mu_2 b_2^{-m_2})$; второе неравенство очевидно. При $\mu=k$ усреднить $(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta$ надо по $P_{mk}^{(s)}$.

Функция $(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta$ является ступенчатой по кубам $P_{mk}^{(s)}$, поэтому нетрудно показать, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (M(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta)^{1/\beta}(k_1 b_1^{-m_1},\ k_2 b_2^{-m_2})\ \chi_{mk}^{(s)} \ll (M(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta)^{1/\beta}. \quad (11.120)$$

Неравенства (11.118)–(11.120) и предложение 11.4.11 влекут соотношение

$$\left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} |R_1(m,\varepsilon,\tau)|^q \right)^{1/q}, L_p \right| \ll$$

$$\ll \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} |M(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta(\tau))^{q/\beta}| \right)^{1/q}, L_p \right| =$$

$$= \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} |M(\eta_m^{(\varepsilon)} f)^\beta(\tau))^{q/\beta}| \right)^{\beta/q}, L_{p/\beta} \right|^{1/\beta} \ll$$

$$\ll \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} |(\eta_m^{(\varepsilon)} f)(\tau)|^q \right)^{\beta/q}, L_{p/\beta} \right|^{1/\beta} =$$

$$= \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{jq} \sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} |(\eta_m^{(\varepsilon)} f)(\tau)|^q \right)^{1/q}, L_p \right| = C(f).$$

Слагаемые в выражении $R_2(m,\varepsilon,\tau)$ оцениваются аналогично. $\Diamond$

Доказательство теоремы 11.4.17.B. Рассмотрим случай $p<\infty$. Проводя рассуждения доказательства теоремы 11.4.17.A отдельно для каждой функции $\Delta_m^{(\varepsilon)} f$, $(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}$, мы получим оценки

$$|\eta_m^{(\varepsilon)} f,\ L_p| \ll |\Delta_m^{(\varepsilon)} f,\ L_p| \ll |\eta_m^{(\varepsilon)} f,\ L_p|,$$

которые вместе с теоремой 11.4.15.B влекут утверждение теоремы 11.4.17.B. Случай $p=\infty$ исчерпывается двойственностью. $\Diamond$

Доказательство теоремы 11.4.18. аналогично доказательству теоремы 11.4.17 (см. также доказательство теоремы 11.4.16). $\Diamond$

Доказательство теоремы 11.4.19. Теорема 11.4.17.A при $p = 1$, $q\in[1,\infty]$, предложение 11.4.9 и соображения двойственности дают требуемое. $\Diamond$

Пусть

$$Mf(x) = \sup_E |E|^{-1} \int_E |f(x+y)|\,dy,$$

где *supremum* берется по всем множествам следующего вида: $E := \{y\in\mathbb{R}^n\colon\ \|y\|_{(a)} \leqslant t\}$, $t>0$.

Функция Mf является анизотропным аналогом максимальной функции Харди–Литтлвуда. Известно, что при $1<p,\ q<\infty$

$$|\{Mf_k\}_1^{\infty},\ L_p(l_q)| \ll |\{f_k\}_1^{\infty},\ L_p(l_q)|. \tag{11.121}$$

Доказательство теоремы 11.4.21. Из теоремы 11.4.17 следует, что

$$|f, F_{pq}^{(s)}| \sim \left| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jqs} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)} \widetilde{\chi}_{P_{mk}^{(a)}}|^q \right)^{1/q}, L_p \right|. \tag{11.122}$$

Пусть $\min\{p,q\}>1$. Покажем, что для $x\in Q_{j\nu}^{(a)}\in\Omega$

$$M\left(\sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}| \widetilde{\chi}_{P_{mk}^{(a)}} \right)(x) \gg \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_{j\nu}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}| 2^{jn/2}. \tag{11.123}$$

Введем обозначения

$$d_\lambda := \min_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_{j\nu}^{(a)}} \{\nu_\lambda 2^{-a_\lambda j};\ k_\lambda b^{-m_\lambda}\},$$

$$e_\lambda := \max_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_{j\nu}^{(a)}} \{(\nu_\lambda+1) 2^{-a_\lambda j};\ (k_\lambda+1) b^{-m_\lambda}\},$$

$$E := \{x\in\mathbb{R}^n:\ x_\lambda \in [d_\lambda, e_\lambda]\}.$$

Из (11.99) следует, что

$$e_\lambda - d_\lambda \leqslant 2^{-a_\lambda j} + 2b^{-l_j^{(\lambda)}-1} \ll 2^{-a_\lambda j}.$$

Кроме того, для $(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j^{(a)}$

$$|P_{mk}^{(a)}| \gg \prod_\lambda b^{-l_{j+1}^{(\lambda)}} \gg \prod_\lambda 2^{-a_\lambda j} = 2^{-jn}.$$

Поэтому

$$|E|^{-1}\int_E \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|\widetilde{\chi}_{P_{mk}^{(a)}}(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 2^{jn} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_{j\nu}^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|\cdot|P_{mk}^{(a)}|^{1/2} \gg 2^{jn/2} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_{j\nu}^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|. \quad (11.124)$$

Из (11.124) следует (11.123), в свою очередь неравенства (11.121)–(11.123) влекут

$$|f, F_{pq}^{(s)}| \gg \left|\left\{\sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_Q^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|\right\}_{Q\in\Omega},\ f_{pq}^{(s)}\right|.$$

Докажем обратное неравенство. Пусть $x\in Q_{j\nu}^{(a)}$. Тогда

$$\sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|\widetilde{\chi}_{P_{mk}^{(a)}}(x) = \sum_{\{P_{mk}^{(a)}:\ x\in P_{mk}^{(a)}\}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|\widetilde{\chi}_{P_{mk}^{(a)}}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_{j\nu}^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|\widetilde{\chi}_{P_{mk}^{(a)}}(x) \ll 2^{-jn/2} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_{j\nu}^{(a)}} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|.$$

Таким образом, теорема 11.4.21 доказана для случая $\min\{p,q\}>1$. Если $\min\{p,q\}\leqslant 1$, то проверка эквивалентности норм осуществляется аналогично с заменой максимальной функции Mf на $[M(f^r)]^{1/r}$, $0 < r < \min\{p,q\}$ $\Diamond$

11.5. Линейные операторы в пространствах Лизоркина–Трибеля

Цель данного параграфа — получить теоремы о непрерывности анизотропных псевдодифференциальных операторов (ПДО) в шкале анизотропных пространств Лизоркина–Трибеля $F_{pq}^{(s)}$, включающей в себя при $1 < p < \infty$, $q = 2$ шкалу анизотропных пространств Соболева. Для этого мы используем построенный в $F_{pq}^{(s)}$ безусловный базис из тензорных произведений подобранных соответствующим образом всплесков Мейера–Давида (см. с. 498).

11.5.1. Определения и предварительные сведения. В этом параграфе используются те же обозначения, что и в параграфе 11.4. Для определения пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля используется выбор параметров C_λ и γ, описанный на с. 502. Вектор анизотропии пространства — индекс (a) — в дальнейшем будет произвольным, но фиксированным вектором, поэтому в обозначениях $\|x\|_{(a)}$, $\mathcal{N}_j^{(a)}$, $\mathcal{M}_j^{(a)}$, $\Psi^{(a)}$, $\Omega_{(a)}$ этот индекс опускается. То же самое касается термина a-куб. Индекс (a) будет использоваться только в обозначениях анизотропного порядка мультииндекса во избежание путаницы с обычным порядком.

Определение 11.5.1. Для $m \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{N}_0^n$, $\delta \in [0,1]$ обозначим через $S_{\delta,a}^{m,K}$ класс функций (символов) $\mathcal{P}(x,\xi)$, бесконечно дифференцируемых по первой переменной и K_λ раз непрерывно дифференцируемых по ξ_λ, таких, что для любых мультииндексов β, γ, $\beta_\lambda \leqslant K_\lambda$ и любых $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$|D_\xi^\beta D_x^\gamma \mathcal{P}(x,\xi)| \leqslant c_{\beta,\gamma}(1 + \|\xi\|)^{m-|\beta|_a+\delta|\gamma|_a}. \qquad (11.125)$$

Если $\mathcal{P} \in S_{\delta,a}^{m,K}$, то псевдодифференциальный оператор

$$(Tf)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}(x,\xi) Ff(\xi) e^{2\pi i(x,\xi)} d\xi, \quad f \in S(\mathbb{R}^n),$$

называется *оператором класса* АПДО $S_{\delta,a}^{m,K}$ ($T \in$ АПДО $S_{\delta,a}^{m,K}$).

Доказательство непрерывности оператора класса АПДО в шкале пространств $F_{pq}^{(s)}$ будет основано на понятии почти диагонального матричного представления этого оператора по базису Ψ.

Определение 11.5.2. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $\sigma_\lambda := s_\lambda(1 - m/s)$, $\delta > 0$, $m \in \mathbb{R}$. Оператор A с матрицей $\{a_{QR}\}_{Q,R\in\Omega}$ называется *почти диагональным из* $f_{pq}^{(s)}$ *в* $f_{pq}^{(\sigma)}$, если

$$\sup_{Q,R\in\Omega} \frac{|a_{QR}|}{\omega_{QR}(\delta)} < \infty, \qquad (11.126)$$

где

$$\omega_{QR} := \omega_{QR}(s,m,\delta) :=$$

$$:= \frac{l(Q)^{s-m}}{l(R)^s\Big(1+\dfrac{\|x_Q-x_R\|}{\max\{l(R),l(Q)\}}\Big)^{n+\delta}}\cdot\min\Big\{\Big(\frac{l(Q)}{l(R)}\Big)^{\frac{n+\delta}{2}},\Big(\frac{l(R)}{l(Q)}\Big)^{\frac{n+\delta}{2}}\Big\}.$$

Теорема 11.5.3. *Почти диагональный оператор* $A\colon\ f_{pq}^{(s)}\to f_{pq}^{(\sigma)}$ *является ограниченным.*

11.5.2. Формулировки результатов и комментарии. Центральным моментом в доказательстве почти диагональности оператора A с матрицей $\{\langle\psi_Q,T\psi_R\rangle\}_{Q,R\in\Omega}$ является следующее утверждение, характеризующее убывание на бесконечности образа всплесков при действии оператора T. Через $\psi_R,\ R\in\Omega$, обозначается функция вида $\psi_{mk}^{(\varepsilon)}$, где $(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{L}_R$. Здесь используется базис всплесков, описанный на с. 506.

Теорема 11.5.4. *Если* $\mathcal{P}\in S_{\delta,a}^{m,K}$ *и* $K:=(K_1,\dots,K_n)$ — *мультииндекс, для которого*

$$K_\lambda = K_1 \pmod 4,\quad \lambda=2,3,\dots,n,$$

$$\min_\lambda K_\lambda a_\lambda > n,$$

то для любого $R\in\Omega$ *и любого мультииндекса* γ

$$|D_x^\gamma T\psi_R(x)| \ll |R|^{-\frac12-\frac{m+|\gamma|_a}{n}}\left(1+\frac{\|x-x_R\|}{l(R)}\right)^{-n-\alpha}, \tag{11.127}$$

где $\alpha:=\min\limits_\lambda K_\lambda a_\lambda - n$.

Замечание 11.5.5. Если $\mathcal{P}(x,\xi)\equiv 1$, то $\mathcal{P}\in S_{1,a}^{0,K}$ для любого мультииндекса K. Поэтому оценка (11.127) в этом случае имеет место для любого $\alpha>0$.

Следующие два утверждения являются центральными результатами этого параграфа.

Теорема 11.5.6. *Пусть* $T\in$ *АПДО* $S_{\delta,a}^{m,K}$ *и* $K_\lambda=K_1 \pmod 4$ *для любого* $\lambda=1,\dots,n$. *Тогда при* $m\leqslant s$ *и* $\min\limits_\lambda K_\lambda a_\lambda>n$ *оператор* T *может быть расширен до непрерывного оператора, действующего из* $F_{pq}^{(s)}$ *в* $F_{pq}^{(\sigma)}$, *где* $1\leqslant p,\ q\leqslant\infty$, $\min\{p,q\}<\infty$ *и координаты вектора* (σ) *вычисляются по формулам* $\sigma_\lambda=s_\lambda(1-m/s)$.

Если же $m>s$ *и* $\min\limits_\lambda K_\lambda a_\lambda>n+[m-s]$, *то утверждение справедливо при дополнительном предположении, что символ не зависит от первой переменной*: $\mathcal{P}(x,\xi)=\mathcal{P}(\xi)$.

Требование $\mathcal{P}(x,\xi)=\mathcal{P}(\xi)$ в теореме 11.5.6 (случай $m>s$) существенно сужает область ее применения. Это условие можно заменить на требование: $T^*(x^\gamma) = 0$ для всех мультииндексов γ с $|\gamma| \leqslant L$, где $L \in \mathbb{N}_0$ таково, что $\min\limits_{|\gamma|=L+1} |\gamma|_a > m - s$. Тогда почти диагональность матрицы $\{\langle \psi_Q, T\psi_R \rangle\}_{Q,R\in\Omega}$ можно доказать, опираясь на лемму 11.5.11. Однако даже в простейшем случае: $n = 2$, $T = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $L = 0$, $a_2 < a_1$, это условие выполнено только при $a_2 > a_1 - s$. Следующая теорема является попыткой избавиться от такого сорта ограничений.

Теорема 11.5.7. *Пусть задан дифференциальный оператор*

$$T := \sum_\lambda c_\lambda(x) \frac{\partial^{\Gamma_\lambda}}{\partial x_\lambda^{\Gamma_\lambda}}, \quad c_\lambda \in L_\infty, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда T является ограниченным оператором из $F_{pq}^{(s)}$ в $F_{pq}^{(\sigma)}$, где $\sigma_\lambda := s_\lambda(1 - m/s)$, $m := \max\limits_\lambda \Gamma_\lambda a_\lambda$.

Из теорем 11.5.6 и 11.5.7 вытекают, например, следующие соотношения. Для простоты положим $n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} :\ F_{pq}^{(s)} \to F_{pq}^{(s_1-1,\ s_2-\frac{s_2}{s_1})}, \tag{11.128}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} :\ F_{pq}^{(s)} \to F_{pq}^{(s_1-\frac{2s_1}{s_2},\ s_2-2)}, \tag{11.129}$$

$$D_h := \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} :\ F_{pq}^{(s)} \to \begin{cases} F_{pq}^{(s_1-1,\ s_2-\frac{s_2}{s_1})}, & s_2 > 2s_1, \\ F_{pq}^{(s_1-\frac{2s_1}{s_2},\ s_2-2)}, & s_2 < 2s_1, \\ F_{pq}^{(s_1-1,\ s_2-2)}, & s_2 = 2s_1. \end{cases} \tag{11.130}$$

Теорема 11.5.8. *Соотношения* (11.128)–(11.130) *точны в том смысле, что ни одна координата вектора гладкости пространства образов увеличена быть не может.*

Эта теорема характеризует точность теорем 11.5.6 и 11.5.7.

11.5.3. Доказательства. В дальнейшем будет использоваться равенство нулю всех моментов функции ψ_h:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} t^k \psi_h(t)\, dt = 0, \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} := \mathbb{N}_0, \tag{11.131}$$

которое следует из того, что $(F\psi_h)^{(k)}(0) = 0$ (см. (11.87)).

Для доказательства теоремы 11.5.3 требуется следующая

Лемма 11.5.9. *Пусть $0 < d \leqslant g < \infty$ и $h > ng/d$. Если $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ и $\mu \leqslant \nu$, то для любого куба Q с $l(Q) = 2^{-\nu}$, для любого $x \in Q$ и любой последовательности $\{c_R\}_{R\in\Omega}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{\{R:\ l(R)=2^{-\mu}\}} |c_R|^g \left(1 + \frac{\|x_R - x_Q\|}{l(R)}\right)^{-h} \ll$$

$$\ll \left(M\left(\sum_{\{R:\ l(R)=2^{-\mu}\}} |c_R|^d \chi_R\right)(x)\right)^{g/d}, \tag{11.132}$$

где константа зависит только от n *и* $\left(h - \dfrac{ng}{d}\right)$.

Доказательство. Достаточно доказать (11.132) для $x_Q = 0$. Пусть

$$A_0 := \{R \in \Omega:\ l(R) = 2^{-\mu},\ \|x_R\| 2^{\mu} \leqslant 1\}.$$

Для $k \in \mathbb{N}$

$$A_k := \{R \in \Omega:\ l(R) = 2^{-\mu},\ \|x_R\| 2^{\mu} \in (2^{k-1}, 2^k]\}.$$

Тогда

$$\sum_{R\in A_k} |c_R|^g \left(1 + \frac{\|x_R\|}{l(R)}\right)^{-h} \ll 2^{-kh} \sum_{R\in A_k} |c_R|^g \ll 2^{-kh}\left(\sum_{R\in A_k} |c_R|^d\right)^{g/d} \ll$$

$$\ll 2^{-kh+n\mu g/d}\left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{R\in A_k} |c_R|^d \chi_R(x)\,dx\right)^{g/d}, \tag{11.133}$$

так как $|R| = 2^{-n\mu}$. Заметим, что

$$\bigcup_{R\in A_k} R \subset \bigcup_{\{R:\ l(R)=2^{-\mu},\ \|x_R\|\leqslant 2^{k-\mu}\}} R. \tag{11.134}$$

Кроме того, если $y \in R$, $l(R) = 2^{-\mu}$ и $\|x_R\| \leqslant 2^{k-\mu}$, то

$$\|y\| \ll 2^{k-\mu}. \tag{11.135}$$

Легко видеть, что

$$\left|\{y:\ \|y\| \ll 2^{k-\mu}\}\right| \ll 2^{n(k-\mu)}. \tag{11.136}$$

Из (11.134)–(11.136) следует, что правая часть (11.133) не превосходит

$$2^{-kh+n\mu g/d}\left(\int_{\|x\|\ll 2^{k-\mu}} \sum_{R\in A_k} |c_R|^d \chi_R(x)\,dx\right)^{g/d} \ll$$

$$\ll 2^{-k(h-ng/d)}\left(M\left(\sum_{R\in A_k} |c_R|^d \chi_R\right)(x)\right)^{g/d}.$$

Складывая полученные неравенства по k, получим (11.132). $\Diamond$

Замечание 11.5.10. В условиях леммы 11.5.9 оценка

$$\left(\sum_{\{R:\ l(R)=2^{-\mu}\}} |c_R|^g \left(1+\frac{\|x_R-x_Q\|}{\max\{l(R),l(Q)\}}\right)^{-h}\right)^{1/g} \ll$$

$$\ll 2^{(\mu-\nu)_+ n/d}\left(M\left(\sum_{\{R:\ l(R)=2^{-\mu}\}} |c_R|^d \chi_R\right)(x)\right)^{1/d} \tag{11.137}$$

выполнена без предположения $\mu \leqslant \nu$.

Доказательство неравенства (11.137). получается аналогичным образом путем замены A_0 на

$$B_0 := \left\{R \in \Omega:\quad l(R) = 2^{-\mu},\ \frac{\|x_R\|}{l(Q)} \leqslant 1\right\}$$

и A_k на

$$B_k := \left\{R \in \Omega:\quad l(R) = 2^{-\mu},\ \frac{\|x_R\|}{l(Q)} \in (2^{k-1}, 2^k]\right\}. \qquad \Diamond$$

Доказательство теоремы 11.5.3. Заметим прежде всего, что теорему достаточно доказать для $m=0$. Дело в том, что усредненная гладкость σ равна $s-m$ и

$$\omega_{QR}(s,m,\delta) := l(Q)^{-m}\omega_{QR}(s,0,\delta).$$

Поэтому, если A — почти диагональный оператор из $f_{pq}^{(s)}$ в $f_{pq}^{(\sigma)}$, то оператор $\widetilde{A}$ с матрицей $\{l(Q)^m a_{QR}\}_{Q,R\in\Omega}$ будет почти диагональным из $f_{pq}^{(s)}$ в $f_{pq}^{(s)}$. Кроме того, легко видеть, что

$$|\{l(Q)^m c_Q\}_{Q\in\Omega}, f_{pq}^{(s)}| = |\{c_Q\}_{Q\in\Omega}, f_{pq}^{(\sigma)}|.$$

Пусть $r=\min\{p,q\}$. Рассмотрим сначала случай $r>1$. Пусть A — почти диагональный оператор на $f_{pq}^{(s)}$ с матрицей $\{a_{QR}\}_{Q,R\in\Omega}$, удовлетворяющей (11.126). Запишем $A = A_0 + A_1$, где

$$(A_0 c)_Q = \sum_{\{R:\ l(R)\geqslant l(Q)\}} a_{QR}c_R;$$

$$(A_1 c)_Q = \sum_{\{R:\ l(R)< l(Q)\}} a_{QR}c_R.$$

Пусть $l(Q)=2^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$. Тогда

$$|(A_0c)_Q| \ll \sum_{\mu\leqslant\nu} 2^{(\mu-\nu)(s+\frac{n+\delta}{2})} \sum_{\{R:\ l(R)=2^{-\mu}\}} |c_R|\left(1+\frac{\|x_R-x_Q\|}{l(R)}\right)^{-n-\delta}.$$

Используя лемму 11.5.9 с $g = 1$, $h = n + \delta$, $d = 1$, получаем

$$|(A_0c)_Q| \ll \sum_{\mu \leqslant \nu} 2^{(\mu-\nu)(s+\frac{n+\delta}{2})} M\Bigg(\sum_{\{R:\ l(R)=2^{-\mu}\}} |c_R|\chi_R\Bigg)(x), \quad (11.138)$$

где $x \in Q$. Так как

$$|Q|^{-1/2} = 2^{(\nu-\mu)n/2}|R|^{-1/2}, \quad (11.139)$$

где $l(R) = 2^{-\mu}$, то, учитывая (11.138) и (11.139), имеем

$$\begin{aligned}|A_0c, f_{pq}^{(s)}| &= \left|\Bigg(\sum_{Q\in\Omega} |l(Q)^{-s}(A_0c)_Q\widetilde{\chi}_Q|^q\Bigg)^{1/q},\ L_p\right| \ll \\ &\ll \left|\Bigg(\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\Bigg(2^{\nu s}\sum_{\mu\leqslant\nu} 2^{(\mu-\nu)(s+\frac{n+\delta}{2})} \times \right.\\ &\qquad \left.\times M\Bigg(\sum_{l(R)=2^{-\mu}} |c_R|\chi_R\Bigg)|Q|^{-1/2}\chi_Q\Bigg)^q\Bigg)^{1/q}, L_p\right| = \\ &= \left|\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{k\delta q}{2}} \sum_{\mu\in\mathbb{N}} M\Bigg(2^{\mu s}\sum_{l(R)=2^{-\mu}} |c_R|\widetilde{\chi}_R\Bigg)^q\Bigg)^{1/q},\ L_p\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\Bigg(\sum_{\mu\in\mathbb{N}} M\Bigg(2^{\mu s}\sum_{l(R)=2^{-\mu}} |c_R|\widetilde{\chi}_R\Bigg)^q\Bigg)^{1/q},\ L_p\right| \ll |c, f_{pq}^{(s)}|.\end{aligned}$$

Последнее неравенство основано на (11.121).

Оценка $|A_1c, f_{pq}^{(s)}|$ получается аналогично (см. замечание 11.5.10).

Итак, для $r > 1$ и $q < \infty$ теорема 11.5.3 доказана.

Пусть $r \leqslant 1$ и $q < \infty$. Возьмем $\widetilde{r} < r$. Тогда $p/\widetilde{r} > 1$ и $q/\widetilde{r} > 1$. Нетрудно показать, что оператор $\widetilde{A}$ с матрицей

$$\{\widetilde{a}_{QR}\}_{Q,R\in\Omega} := \left\{|a_{QR}|^{\widetilde{r}}\left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{\frac{1-\widetilde{r}}{2}}\left(\frac{l(Q)}{l(R)}\right)^{s(1-\widetilde{r})}\right\}$$

является почти диагональным на $f_{p/\widetilde{r},q/\widetilde{r}}^{(s)}$. Положим

$$t_Q := l(Q)^{s(1-\widetilde{r})}|Q|^{\frac{1-\widetilde{r}}{2}}|c_Q|^{\widetilde{r}}.$$

Тогда

$$|t,\ f_{p/\widetilde{r},q/\widetilde{r}}^{(s)}|^{1/\widetilde{r}} = |c,\ f_{pq}^{(s)}|.$$

Окончательно имеем

$$\big|Ac,\ f_{pq}^{(s)}\big| = \left|\Big\{|(Ac)_Q|^{\widetilde{r}}|Q|^{\frac{1-\widetilde{r}}{2}}l(Q)^{s(1-\widetilde{r})}\Big\}_{Q\in\Omega},\ f_{p/\widetilde{r},q/\widetilde{r}}^{(s)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \left\{ l(Q)^{s(1-\widetilde{r})} |Q|^{\frac{1-\widetilde{r}}{2}} \sum_R |a_{QR}|^{\widetilde{r}} |c_R|^{\widetilde{r}} \right\}_{Q\in\Omega}, \ f^{(s)}_{p/\widetilde{r},q/\widetilde{r}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\widetilde{A}, \ f^{(s)}_{p/\widetilde{r},q/\widetilde{r}}|^{1/\widetilde{r}} \cdot |c, \ f^{(s)}_{pq}|.$$

Случай $p > 1$ и $q = \infty$ получается по двойственности; случай $p \leqslant 1$ и $q = \infty$ исчерпывается аналогично. $\Diamond$

Доказательство теоремы 11.5.4. Пусть $\psi_R = \psi^{(\varepsilon)}_{l,k}$, $R := R_{j,\nu} \in \Omega$; $(l,k,\varepsilon) \in \mathcal{L}_R$, $x_R = (x_{R,1}, \ldots, x_{R,n})$ — левая нижняя вершина куба R (см. с. 510). Учитывая вид функции $F\psi_R$ и компактность ее носителя, можно записать, что

$$|D^\gamma_x T\psi_R(x)| = \left| D^\gamma_x \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(x,\xi)} \mathcal{P}(x,\xi) F\psi_R(\xi)\, d\xi \right| \ll$$

$$\ll \sum_{\tau\leqslant\gamma} \left| \int_{\mathbb{R}} (D^\tau_x e^{2\pi i(x,\xi)})(D^{\gamma-\tau}_x \mathcal{P}(x,\xi)) F\psi_R(\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \sum_{\tau\leqslant\gamma} b^{-l/2} \left| \int_{\mathbb{R}} (2\pi\xi)^\tau e^{2\pi i((x-x_R),\xi)} D^{\gamma-\tau}_x \mathcal{P}(x,\xi) F\psi^{(\varepsilon)}(b^{-l}\xi)\, d\xi \right|. \quad (11.140)$$

Пусть для любого λ $x_\lambda \geqslant x_{R,\lambda}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\Delta^K_\xi := \sum_\lambda \frac{\partial^{K_\lambda}}{\partial \xi_\lambda^{K_\lambda}},$$

где $K := (K_1, \ldots, K_n)$ — мультииндекс из формулировки теоремы 11.5.4.

Остальные квадранты $\mathbb{R}^n$ исследуются аналогично путем соответствующей расстановки знаков перед слагаемыми в Δ^K_ξ.

Используя первое условие на K, получаем

$$|D^\gamma_x T\psi_R(x)| \ll \sum_{\tau\leqslant\gamma} b^{-l/2} \left(\sum_\lambda |x_\lambda - x_{R,\lambda}|^{K_\lambda} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left| \int_{\mathbb{R}} \Delta^K_\xi (e^{2\pi i((x-x_R),\xi)}) \xi^\tau (D^{\gamma-\tau}_x \mathcal{P}(x,\xi)) F\psi^{(\varepsilon)}(b^{-l}\xi)\, d\xi \right|.$$

Пусть $\|x - x_R\| = \max\limits_\lambda |x_\lambda - x_{R,\lambda}|^{1/a_\lambda}$ достигается при некотором $\lambda = \lambda_0$. Тогда

$$\sum_\lambda |x_\lambda - x_{R,\lambda}|^{K_\lambda} \geqslant (|x_{\lambda_0} - x_{R,\lambda_0}|^{1/a_{\lambda_0}})^{K_{\lambda_0} a_{\lambda_0}} =$$

$$= \|x - x_R\|^{K_{\lambda_0} a_{\lambda_0}} \geqslant \min_{\lambda}\{\|x - x_R\|^{K_\lambda a_\lambda}\}.$$

Поэтому

$$\left(\sum_{\lambda} |x_\lambda - x_{R,\lambda}|^{K_\lambda}\right)^{-1} \leqslant \max_{\lambda}\{\|x - x_R\|^{-K_\lambda a_\lambda}\}.$$

Пусть

$$C_R(x) := \max_{\lambda}\{\|x - x_R\|^{-K_\lambda a_\lambda}\}.$$

Итак,

$$|D_x^\gamma T\psi_R(x)| \ll C_R(x) \times$$
$$\times \sum_{\tau \leqslant \gamma} b^{-l/2} \left| \int_{\mathbb{R}} \Delta_\xi^K (e^{2\pi i((x - x_R),\xi)})\xi^\tau (D_x^{\gamma-\tau}\mathcal{P}(x,\xi)) F\psi^{(\varepsilon)}(b^{-l}\xi)\, d\xi \right|. \tag{11.141}$$

Зафиксируем произвольный мультииндекс $\tau \leqslant \gamma$ и применим к соответствующему слагаемому в (11.141) формулу интегрирования по частям. Учитывая (11.100), приходим к выражению

$$B_R(x) := \left| \int_{\Gamma_j \bigcup \Gamma_{j+1}} e^{2\pi i((x - x_R),\xi)} \Delta_\xi^K \left\{\xi^\tau (D_x^{\gamma-\tau}\mathcal{P}(x,\xi)) F\psi^{(\varepsilon)}(b^{-l}\xi)\right\}\, d\xi \right|.$$

Функция

$$\Delta_\xi^K \{\xi^\tau (D_x^{\gamma-\tau}\mathcal{P}(x,\xi)) F\psi^{(\varepsilon)}(b^{-l}\xi)\}$$

равна сумме конечного числа слагаемых вида

$$S(x,\xi,\lambda_0,\mu,\sigma) :=$$
$$:= \left(\prod_{\lambda \neq \lambda_0} \xi_\lambda^{\tau_\lambda}\right) \xi_{\lambda_0}^{\tau_{\lambda_0}-\mu} \frac{\partial^\sigma}{\partial \xi_{\lambda_0}^\sigma} (D_x^{\gamma-\tau}\mathcal{P}(x,\xi)) \frac{\partial^{K_{\lambda_0}-\mu-\sigma}}{\partial \xi_{\lambda_0}^{K_{\lambda_0}-\mu-\sigma}} (F\psi^{(\varepsilon)}(b^{-l}\xi)),$$

где $\lambda_0 \in \{1,\ldots,n\}$, $0 \leqslant \mu \leqslant \tau_{\lambda_0}$, $0 \leqslant \sigma \leqslant K_{\lambda_0} - \mu$. Число слагаемых и коэффициенты при них зависят только от n и K. В силу (11.125)

$$|S(x,\xi,\lambda_0,\mu,\sigma)| \ll \left(\prod_{\lambda \neq \lambda_0} |\xi_\lambda^{\tau_\lambda}|\right) |\xi_{\lambda_0}|^{\tau_{\lambda_0}-\mu} (1 + \|\xi\|)^{m - \sigma a_{\lambda_0} + |\gamma-\tau|_a} \times$$
$$\times b^{-l_{\lambda_0}(K_{\lambda_0}-\mu-\sigma)} \left(\frac{\partial^{K_{\lambda_0}-\mu-\sigma}}{\partial \xi_{\lambda_0}^{K_{\lambda_0}-\mu-\sigma}} F\psi^{(\varepsilon)}\right)(b^{-l}\xi) \ll$$
$$\ll \left(\prod_{\lambda \neq \lambda_0} |\xi_\lambda^{\tau_\lambda}|\right) |\xi_{\lambda_0}|^{\tau_{\lambda_0}-\mu} (1 + \|\xi\|)^{m - \sigma a_{\lambda_0} + |\gamma-\tau|_a} b^{-l_{\lambda_0}(K_{\lambda_0}-\mu-\sigma)}.$$

Для $(l,k,\varepsilon) \in \mathcal{L}_R$ получаем $b^{-l_\lambda} \sim 2^{-ja_\lambda}$. Поэтому последнее выражение не превосходит

$$\left(\prod_{\lambda\neq\lambda_0} |\xi_\lambda^{\tau_\lambda}|\right) |\xi_{\lambda_0}|^{\tau_{\lambda_0}-\mu}(1+\|\xi\|)^{m-\sigma a_{\lambda_0}+|\gamma-\tau|_a} \cdot 2^{-j(K_{\lambda_0}-\mu-\sigma)a_{\lambda_0}}.$$

Так как для $\xi \in \Gamma_j \bigcup \Gamma_{j+1}$

$$\xi_\lambda \ll 2^{ja_\lambda}, \quad (1+\|\xi\|) \sim 2^j, \quad j \in \mathbb{N},$$

то

$$\int\limits_{\Gamma_j \bigcup \Gamma_{j+1}} |S(x,\xi,\lambda_0,\mu,\sigma)|\, d\xi \ll$$

$$\ll 2^{j|\tau|_a - ja_{\lambda_0}\mu + j(m-\sigma a_{\lambda_0}+|\gamma-\tau|_a) - j(K_{\lambda_0}-\mu-\sigma)a_{\lambda_0}} \cdot |\Gamma_j \bigcup \Gamma_{j+1}| \ll$$
$$\ll 2^{nj + j(m+|\gamma|_a) - jK_{\lambda_0}a_{\lambda_0}}.$$

Полученное неравенство означает, что

$$B_R(x) \ll 2^{nj} \cdot 2^{j(m+|\gamma|_a)} \cdot 2^{-j|K|_a}.$$

Используя (11.141) и учитывая, что $\left(\prod\limits_\lambda b_\lambda^{-l_\lambda/2}\right) \sim 2^{-nj/2} \sim |R|^{1/2}$, получим

$$|D_x^\gamma T\psi_R(x)| \ll |R|^{-1/2} C_R(x) \cdot 2^{-j|K|_a} |R|^{-\frac{m+|\gamma|_a}{n}}. \tag{11.142}$$

Заметим, что при $2^j\|x-x_R\| \geqslant 1$

$$C_R(x) \cdot 2^{-j|K|_a} = \max_\lambda \{2^{-j|K|_a}\|x-x_R\|^{-K_\lambda a_\lambda}\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_\lambda \{2^{-jK_\lambda a_\lambda}\|x-x_R\|^{-K_\lambda a_\lambda}\} \leqslant (2^j\|x-x_R\|)^{-\min\limits_\lambda\{K_\lambda a_\lambda\}}.$$

Итак, если $2^j\|x-x_R\| = \dfrac{\|x-x_R\|}{l(R)} \geqslant 1$, то

$$C_R(x) \cdot 2^{-j|K|_a} \leqslant \left(1+\frac{\|x-x_R\|}{l(R)}\right)^{-\min\limits_\lambda\{K_\lambda a_\lambda\}} = \left(1+\frac{\|x-x_R\|}{l(R)}\right)^{-n-\alpha},$$

где $\alpha := \min\limits_\lambda\{K_\lambda a_\lambda\} - n > 0$. Последнее неравенство вместе с (11.142) дает (11.127) при $l(R)^{-1}\|x-x_R\| \geqslant 1$. В случае выполнения противоположного неравенства оценку (11.127) нетрудно получить сразу из (11.140), переходя к модулю под знаком интеграла. $\lozenge$

Для доказательства (на основе теоремы 11.5.4) почти диагональности дискретного аналога псевдодифференциального оператора требуются следующие две леммы.

Лемма 11.5.11. *Пусть* $V > n$, $L \in \mathbb{N}_0$, $\theta := \min\limits_{|\gamma|=L+1} |\gamma|_a$, $\Theta := \max\limits_{|\gamma|=L+1} |\gamma|_a$; $j, k \in \mathbb{Z}$, $j \leqslant k$, $S > \max\{V;\ n+\Theta\}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Если функции* $g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *таковы, что*

$$|\partial^\gamma g(x)| \ll 2^{j(n/2+|\gamma|_a)}(1+2^j\|x\|)^{-V}, \quad |\gamma| \leqslant L+1, \qquad (11.143)$$

$$|h(x)| \ll 2^{kn/2}(1+2^k\|x-x_0\|)^{-S}, \qquad (11.144)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^\gamma h(x)\,dx = 0, \quad |\gamma| \leqslant L, \qquad (11.145)$$

то

$$|g * h(x)| \ll 2^{-(k-j)(\theta+n/2)}(1+2^j\|x-x_0\|)^{-V}. \qquad (11.146)$$

Доказательство. Используя дилатации и сдвиги, достаточно доказать (11.146) для $j = 0$, $x_0 = 0$. В силу условия (11.145)

$$|g * h(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} g(y)h(x-y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\left(g(y) - \sum_{|\beta|\leqslant L} \frac{1}{\beta!}\partial^\beta g(x)(y-x)^\beta\right)h(x-y)\right| dy.$$

Применяя формулу Тейлора к подынтегральному выражению, получим

$$G(x,y) := \left|g(y) - \sum_{|\beta|\leqslant L} \frac{1}{\beta!}\partial^\beta g(x)(y-x)^\beta\right| =$$

$$= \left|\sum_{|\beta|=L} \frac{1}{\beta!}(x-y)^\beta(\partial^\beta g(z) - \partial^\beta g(x))\right| \ll$$

$$\ll \sum_{|\beta|=L} |\partial^\beta g(z) - \partial^\beta g(x)| \cdot |x-y|^\beta, \qquad (11.147)$$

где z — точка, промежуточная между x и y, $|x-y| := (|x_1-y_1|, \ldots$ $\ldots, |x_n-y_n|)$. Применяя к каждой разности $\partial^\beta g(z) - \partial^\beta g(x)$ из правой части (11.147) формулу Тейлора и учитывая (11.143), имеем

$$G(x,y) \ll (1+\|u\|)^{-V} \sum_{|\gamma|=L+1} \sum_{|\beta|=L,\, \beta\leqslant\gamma} |x-y|^\beta |z-x|^{\gamma-\beta} \ll$$

$$\ll (1+\|u\|)^{-V} \sum_{|\gamma|=L+1} |x-y|^\gamma, \qquad (11.148)$$

где u — точка, промежуточная между z и x. Поскольку для любого λ

$$|x_\lambda - y_\lambda|^{\gamma_\lambda} = (|x_\lambda - y_\lambda|^{1/a_\lambda})^{\gamma_\lambda a_\lambda} \ll \|x-y\|^{\gamma_\lambda a_\lambda},$$

то

$$G(x,y) \ll (1+\|u\|)^{-V}\|x-y\|^{\theta}. \tag{11.149}$$

Пусть

$$A := \{y \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x-y\| \leqslant 1\}, \quad B := \{y \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x-y\| > 1, \|y\| \leqslant \frac{\|x\|}{2}\},$$

$$C := \left\{y \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x-y\| > 1, \|y\| > \frac{\|x\|}{2}\right\}.$$

Шаг 1. Оценим интеграл

$$\int_A G(x,y)\,dy.$$

Заметим, что на множестве A $1+\|u\| \gg 1+\|x\|$, поэтому (11.149) влечет

$$G(x,y) \ll (1+\|x\|)^{-V}\|x-y\|^{\theta}.$$

В силу (11.144)

$$\int_A G(x,y)\,dy \ll 2^{kn/2}(1+\|x\|)^{-V} \int_{\|x-y\|\leqslant 1} \|x-y\|^{\theta}(1+2^k\|x-y\|)^{-S}\,dy.$$

Делая замену $2^k \circ (x-y) = w$ и переходя к полярным координатам, получим

$$\int_A G(x,y)\,dy \ll 2^{k(\theta+n/2)}(1+\|x\|)^{-V} \int_{\rho\leqslant 2^k} \rho^{\theta+n-1}(1+\rho)^{-S}\,d\rho \ll$$

$$\ll 2^{-k(\theta+n/2)}(1+\|x\|)^{-V},$$

так как $S > n+\theta$.

Шаг 2. Оценим интеграл

$$\int_B G(x,y)\,dy.$$

Из (11.143) следует

$$G(x,y) \ll (1+\|y\|)^{-V} + (1+\|x\|)^{-V}\sum_{\beta\leqslant L}|x-y|^{\beta} \ll$$

$$\ll (1+\|y\|)^{-V} + (1+\|x\|)^{-V}\|x-y\|^{\Theta}.$$

Тогда, учитывая, что на множестве B

$$\frac{3}{2}\|x\| \geqslant \|x-y\| \geqslant \frac{1}{2}\|x\|$$

и

$$\|x-y\| \geqslant \frac{1}{2}\,(1+\|x-y\|) > \frac{1}{4}\,(1+\|x\|) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (1+2^k\|x-y\|)^{-S} \ll 2^{-kS}(1+\|x\|)^{-S},$$

получим, что

$$\int\limits_B G(x,y)\,dy \ll$$
$$\ll 2^{k(n/2-S)}(1+\|x\|)^{-V}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(1+\|y\|)^V} + \frac{\|x\|^\Theta}{(1+\|x\|)^S}\int\limits_{\|y\|\leqslant\frac{\|x\|}{2}} dy\Bigg).$$

Поскольку $V > n$, а $S > n+\Theta$, то окончательно

$$\int\limits_B G(x,y)\,dy \ll 2^{-k(\theta+n/2)}(1+\|x\|)^{-V}.$$

Шаг 3. Осталось оценить

$$\int\limits_C G(x,y)\,dy.$$

На множестве C выполнено $1+\|y\| \gg 1+\|x\|$, поэтому

$$\int\limits_C G(x,y)\,dy \ll 2^{kn/2}(1+\|x\|)^{-V}\int\limits_C \frac{\|x-y\|^\Theta}{(1+2^k\|x-y\|)^S}\,dy \ll$$
$$\ll 2^{kn/2}(1+\|x\|)^{-V}2^{-kS}\int\limits_1^\infty \rho^{-S+\Theta+n-1}\,d\rho \ll$$
$$\ll 2^{-k(\theta+n/2)}(1+\|x\|)^{-V},$$

так как $S > n+\Theta$. ◊

Лемма 11.5.12. *Пусть* $V > n$, $j,k \in \mathbb{Z}$, $j \leqslant k$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Если функции* g, $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *таковы, что*

$$|g(x)| \ll 2^{jn/2}(1+2^j\|x\|)^{-V},$$
$$|h(x)| \ll 2^{kn/2}(1+2^k\|x-x_0\|)^{-V},$$

то

$$|g*h(x)| \ll 2^{-(k-j)n/2}(1+2^j\|x-x_0\|)^{-V}.$$

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, можно считать, что $j = 0$, $x_0 = 0$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим множества

$$A = \left\{y\colon\ \|x-y\| \leqslant 1\right\} \bigcup \left\{y\colon\ \|x-y\| > 1,\ \|y\| > \frac{1}{2}\|x\|\right\},$$

$$B := \mathbb{R}^n \setminus A.$$

Пусть

$$I_1 := \int\limits_A |g(y)h(x-y)|\,dy;$$

$$I_2 := \int\limits_B |g(y)h(x-y)|\,dy.$$

Ясно, что

$$|g * h(x)| \leqslant I_1 + I_2.$$

На множестве A имеем $1 + \|y\| \gg 1 + \|x\|$, поэтому

$$I_1 \ll (1+\|x\|)^{-V} 2^{kn/2} \int\limits_{\mathbb{R}} (1 + 2^k\|x-y\|)^{-V}\,dy,$$

и после замены переменной $2^k \circ (x-y) = z$, учитывая, что $V > n$, получим

$$I_1 \ll 2^{-kn/2}(1+\|x\|)^{-V}.$$

На множестве B (см. доказательство предыдущей леммы) $2^k\|x-y\| \gg \gg (1+\|x\|)2^k$, $\|y\| \sim \|x\|$, поэтому

$$I_2 \ll 2^{k(n/2-V)}(1+\|x\|)^{-V} \int\limits_{\mathbb{R}} (1+\|y\|)^{-V}\,dy.$$

Так как $V > n$, то $I_2 \ll 2^{-kn/2}(1+\|x\|)^{-V}$. $\Diamond$

Доказательство теоремы 11.5.6. Пусть $s \geqslant m$, $l(Q) = 2^{-\nu} \geqslant \geqslant 2^{-\mu} = l(R)$; $Q, R \in \Omega$. Учитывая теорему 11.5.4 и замечание к ней, применим лемму 11.5.12, полагая

$$g(x) := \psi_Q(x + x_Q), \quad h(x) := l(R)^m \overline{T\psi_R(-x)},$$

$$x_0 := -x_R.$$

Тогда

$$a_{QR} = \langle \psi_Q, T\psi_R \rangle = l(R)^{-m} g * h(-x_Q) \ll$$

$$\ll l(R)^{-m} \left(\frac{l(Q)}{l(R)}\right)^{-n/2} \left(1 + \frac{\|x_Q - x_R\|}{l(Q)}\right)^{-n-\alpha}. \quad (11.150)$$

Рассмотрим случай $l(Q) < l(R)$. Пусть L таково, что

$$\theta := \min_{|\gamma|=L+1} |\gamma|_a > s - m.$$

Учитывая (11.131) и теорему 11.5.4, применим лемму 11.5.11, полагая

$$g(x) := l(R)^m \overline{T\psi_R(x + x_R)}, \quad h(x) := \psi_Q(-x),$$
$$x_0 := -x_Q.$$

Тогда

$$a_{QR} = \langle \psi_Q, T\psi_R \rangle = l(R)^{-m} g * h(-x_R) \ll$$
$$\ll l(R)^{-m} \left(\frac{l(Q)}{l(R)}\right)^{\theta+n/2} \left(1 + \frac{\|x_Q - x_R\|}{l(R)}\right)^{-n-\alpha}. \quad (11.151)$$

Оценки (11.150) и (11.151) означают, что матрица $\{a_{QR}\}_{Q,R\in\Omega}$ является почти диагональной из $f_{pq}^{(s)}$ в $f_{pq}^{(\sigma)}$. Вместе с теоремами 11.4.21 и 11.5.3 этот факт доказывает теорему 11.5.6 при $s \geqslant m$.

Если $s < m$ и $\mathcal{P}(x,\xi) = \mathcal{P}(\xi)$, то функции $T\psi_R$ тоже удовлетворяют (11.131). Поэтому доказательство теоремы 11.5.6 в этом случае аналогично предыдущему, только меняется порядок применения лемм 11.5.11 и 11.5.12. $\Diamond$

Доказательство теоремы 11.5.7 опирается на следующие две леммы. Ниже, суммы, в которых верхняя граница индекса суммирования отрицательна или равна нулю, полагаются отсутствующими.

Л е м м а 11.5.13 (анизотропный вариант формулы Тейлора). *Пусть* L_λ, M_λ, $T_\lambda \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, *где* $L_1 + \ldots + L_n > 0$ *и функция* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет все используемые ниже производные. Тогда*

$$g(y) - g(x) - \sum_\lambda \sum_{\beta=1}^{L_\lambda} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta g}{\partial y_\lambda^\beta}(x)(y_\lambda - x_\lambda)^\beta - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{L_\lambda - 1} \frac{1}{\beta!} \times$$
$$\times \sum_{0<|\gamma^{(\lambda+1)}|\leqslant M_\lambda - \beta} \frac{1}{\gamma^{(\lambda+1)}!} D^{\gamma^{(\lambda+1)}} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_\lambda^\beta}\right)(x)(y_\lambda - x_\lambda)^\beta (y-x)^{\gamma^{(\lambda+1)}} -$$
$$- \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{1}{L_\lambda!} \sum_{0<|\delta^{(\lambda+1)}|\leqslant T_\lambda} \frac{1}{\delta^{(\lambda+1)}!} D^{\delta^{(\lambda+1)}} \Big(\frac{\partial^{L_\lambda} g}{\partial y_\lambda^{L_\lambda}}\Big)(x)(y_\lambda - x_\lambda)^{L_\lambda} (y-x)^{\delta^{(\lambda+1)}} =$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{L_\lambda - 1} \frac{1}{\beta!} \sum_{|\gamma^{(\lambda+1)}|=M_\lambda+1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(\lambda+1)}!} D^{\gamma^{(\lambda+1)}} \Big(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_\lambda^\beta}\Big)(x_1, \ldots, x_\lambda, u^{(\lambda+1)}) \times$$

$$\times (y_\lambda - x_\lambda)^\beta (y-x)^{\gamma^{(\lambda+1)}} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{1}{L_\lambda!} \sum_{|\delta^{(\lambda+1)}|=T_\lambda+1} \frac{1}{\delta^{(\lambda+1)}!} \times$$

$$\times D^{\delta^{(\lambda+1)}} \left(\frac{\partial^{L_\lambda} g}{\partial y_\lambda^{L_\lambda}}\right)(x_1, \ldots, x_\lambda, v^{(\lambda+1)})(y_\lambda - x_\lambda)^{L_\lambda}(y-x)^{\delta^{(\lambda+1)}} +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{1}{(L_\lambda+1)!} \frac{\partial^{L_\lambda+1} g}{\partial y_\lambda^{L_\lambda+1}}(w_1, \ldots, w_\lambda, y^{(\lambda+1)})(y_\lambda - x_\lambda)^{L_\lambda}(z_\lambda - x_\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{(L_n+1)!} \frac{\partial^{L_n+1} g}{\partial y_\lambda^{L_n+1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, r)(y_n - x_n)^{L_n+1}, \qquad (11.152)$$

где

$y^{(\lambda)} := (y_\lambda, \ldots, y_n)$, $\gamma^{(\lambda)} := (0, \ldots, 0, \gamma_\lambda, \ldots, \gamma_n)$;

$u^{(\lambda+1)} := u(\beta, \gamma^{(\lambda+1)}, L_\lambda)$, $v^{(\lambda+1)} := v(\delta^{(\lambda+1)}, T_\lambda, x_1, \ldots, x_\lambda, y_1, \ldots$ $\ldots, y_\lambda)$ — *точки, промежуточные между* $x^{(\lambda+1)}$ *и* $y^{(\lambda+1)}$;

$(w_1, \ldots, w_\lambda)$ — *точка, промежуточная между* $(x_1, \ldots, x_\lambda)$ *и* $(y_1, \ldots$ $\ldots, y_\lambda)$ *и зависящая от остальных координат* x *и* y;

z_λ — *число, промежуточное между* x_λ *и* y_λ, $\lambda < n$;

r — *промежуточное между* x_n *и* y_n; z_λ *и* r *зависят от* x *и* y.

Доказательство. Для упрощения выкладок положим $n = 3$. Обозначим левую часть равенства (11.152) через $F(x, y)$. Пусть

$$F_1(x,y) = g(y) - g(x_1, y_2, y_3) - \sum_{\beta=1}^{L_1} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}(x)(y_1 - x_1)^\beta -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{0<|\gamma^{(2)}|\leqslant M_1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(2)}!} D^{\gamma^{(2)}} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\right)(x)(y_1 - x_1)^\beta (y-x)^{\gamma^{(2)}} -$$

$$- \frac{1}{L_1!} \sum_{0<|\delta^{(2)}|\leqslant T_1} \frac{1}{\delta^{(2)}!} D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}\right)(x)(y_1 - x_1)^{L_1}(y-x)^{\delta^{(2)}};$$

$$F_2(x,y) = g(x_1, y_2, y_3) - g(x_1, x_2, y_3) - \sum_{\beta=1}^{L_2} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta g}{\partial y_2^\beta}(x)(y_2 - x_2)^\beta -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{L_2-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{0<\gamma_3<M_2-\beta} \frac{1}{\gamma_3!} \frac{\partial^{\beta+\gamma_3} g}{\partial y_3^{\gamma_3} \partial y_2^\beta}(x)(y_2 - x_2)^\beta (y_3 - x_3)^{\gamma_3} -$$

$$- \frac{1}{L_2!} \sum_{0<\delta_3\leqslant T_2} \frac{1}{\delta_3!} \frac{\partial^{L_2+\delta_3} g}{\partial y_3^{\delta_3} \partial y_2^{L_2}}(x)(y_2 - x_2)^{L_2}(y_3 - x_3)^{\delta_3};$$

$$F_3(x,y) = g(x_1,x_2,y_3) - g(x) - \sum_{\beta=1}^{L_2} \frac{1}{\beta!}\, \frac{\partial^\beta g}{\partial y_3^\beta}\,(x)(y_3-x_3)^\beta.$$

Очевидно, что

$$F(x,y) = F_1(x,y) + F_2(x,y) + F_3(x,y).$$

Преобразуем выражение $F_1(x,y)$, применяя к разности $g(y) - g(x_1,y_2,y_3)$ формулу Тейлора по первой переменной:

$$F_1(x,y) = \left(\sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\,(x_1,y_2,y_3) - \frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\,(x) \right)(y_1-x_1)^\beta - \right.$$

$$\left. - \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{0<|\gamma^{(2)}|\leqslant M_1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(2)}!}\, D^{\gamma^{(2)}} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta} \right)(x)(y_1-x_1)^\beta (y-x)^{\gamma^{(2)}} \right) +$$

$$+ \frac{(y_1-x_1)^{L_1}}{L_1!} \left(\left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}\,(z_1,y_2,y_3) - \frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}\,(x) \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{0<|\delta^{(2)}|\leqslant T_1} \frac{1}{\delta^{(2)}!}\, D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}} \right)(x)(y-x)^{\delta^{(2)}} \right),$$

где $z_1 := z_1(x_1,y_1,L_1)$ — точка, промежуточная между x_1 и y_1. Пусть

$$F_1^{(1)}(x,y) = \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\,(x_1,y_2,y_3) - \frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\,(x) \right)(y_1-x_1)^\beta -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{0<|\gamma^{(2)}|\leqslant M_1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(2)}!}\, D^{\gamma^{(2)}} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta} \right)(x)(y_1-x_1)^\beta (y-x)^{\gamma^{(2)}};$$

$$F_1^{(2)}(x,y) = \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}\,(z_1,y_2,y_3) - \frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}\,(x) \right) -$$

$$- \sum_{0<|\delta^{(2)}|\leqslant T_1} \frac{1}{\delta^{(2)}!}\, D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}} \right)(x)(y-x)^{\delta^{(2)}};$$

$$\Sigma^{(1)}(x,y) = \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\,(x_1,y_2,y_3) - \frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\,(x) \right)(y_1-x_1)^\beta;$$

$$\Sigma^{(2)}(x,y) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{0<|\gamma^{(2)}|\leqslant M_1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(2)}!}\, D^{\gamma^{(2)}} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta} \right)(x)(y_1-x_1)^\beta (y-x)^{\gamma^{(2)}}.$$

Ясно, что

$$F_1(x,y) = F_1^{(1)}(x,y) + \frac{(y_1 - x_1)^{L_1}}{L_1!}\, F_1^{(2)}(x,y);$$

$$F_1^{(1)}(x,y) := \Sigma^{(1)}(x,y) - \Sigma^{(2)}(x,y).$$

К каждому слагаемому из $\Sigma_1^{(1)}(x,y)$ применим формулу Тейлора по второй и третьей переменным. Тогда

$$\Sigma^{(1)}(x,y) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{0<|\gamma^{(2)}|\leqslant M_1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(2)}!}\, D^{\gamma^{(2)}} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\right)(x)(y_1-x_1)^\beta (y-x)^{\gamma^{(2)}} +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{|\gamma^{(2)}|=M_1+1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(2)}!}\, D^{\gamma^{(2)}} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\right)(x_1, u^{(2)})(y_1-x_1)^\beta (y-x)^{\gamma^{(2)}},$$

где $u^{(2)} := u^{(2)}(\beta, \gamma^{(2)}, x, y,)$ — точка, промежуточная между (x_2, x_3) и (y_2, y_3). Значит,

$$F^{(1)}(x,y) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{|\gamma^{(2)}|=M_1+1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(2)}!}\, D^{\gamma^{(2)}} \left(\frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta}\right)(x_1, u^{(2)})(y_1-x_1)^\beta (y-x)^{\gamma^{(2)}}.$$

Далее, применяя опять формулу Тейлора, получим

$$F_1^{(2)}(x,y) = \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}(z_1, y_2, y_3) - \frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}(x_1, y_2, y_3)\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}(x_1, y_2, y_3) - \frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}(x)\right) -$$

$$- \sum_{0<|\delta^{(2)}|\leqslant T_1} \frac{1}{\delta^{(2)}!}\, D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}\right)(x)(y-x)^{\delta^{(2)}} =$$

$$= \frac{\partial^{L_1+1} g}{\partial y_1^{L_1+1}}(w_1, y^{(2)})(z_1 - x_1) +$$

$$+ \sum_{0<|\delta^{(2)}|\leqslant T_1} \frac{1}{\delta^{(2)}!}\, D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}\right)(x)(y-x)^{\delta^{(2)}} +$$

$$+ \sum_{|\delta^{(2)}|=T_1+1} \frac{1}{\delta^{(2)}!}\, D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}}\right)(x_1, v^{(2)})(y-x)^{\delta^{(2)}} -$$

$$- \sum_{0<|\delta^{(2)}|\leqslant T_1} \frac{1}{\delta^{(2)}!} D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}} \right) (x)(y-x)^{\delta^{(2)}} =$$

$$= \frac{\partial^{L_1+1} g}{\partial y_1^{L_1+1}} (w_1, y^{(2)})(z_1 - x_1) +$$

$$+ \sum_{|\delta^{(2)}|=T_1+1} \frac{1}{\delta^{(2)}!} D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}} \right) (x_1, v^{(2)})(y-x)^{\delta^{(2)}}.$$

Итак,

$F_1(x,y) =$

$$= \sum_{\beta=1}^{L_1-1} \frac{1}{\beta!} \sum_{|\gamma^{(2)}|=M_1+1-\beta} \frac{1}{\gamma^{(2)}!} D^{\gamma^{(2)}} \frac{\partial^\beta g}{\partial y_1^\beta} (x_1, u^{(2)})(y_1 - x_1)^\beta (y-x)^{\gamma^{(2)}} +$$

$$+ \frac{1}{L_1!} \frac{\partial^{L_1+1} g}{\partial y_1^{L_1+1}} (w_1, y^{(2)})(z_1 - x_1)(y_1 - x_1)^{L_1} +$$

$$+ \frac{1}{L_1!} \sum_{|\delta^{(2)}|=T_1+1} \frac{1}{\delta^{(2)}!} D^{\delta^{(2)}} \left(\frac{\partial^{L_1} g}{\partial y_1^{L_1}} \right) (x_1, v^{(2)})(y-x)^{\delta^{(2)}} (y_1 - x_1)^{L_1}.$$

Аналогичное (с соответствующими видоизменениями) выражение получается и для $F_2(x,y)$.

Применяя формулу Тейлора по последней переменной для $F_3(x,y)$, получим, очевидно

$$F_3(x,y) = \frac{1}{(L_3+1)!} \frac{\partial^{L_3+1} g}{\partial y_3^{L_3+1}} (x_1, x_2, r)(y_3 - x_3)^{L_3+1}. \qquad \Diamond$$

Лемма 11.5.14. *Пусть L_λ, M_λ, T_λ такие же, как в предыдущей лемме. Рассмотрим числа*

$$\theta := \min \left\{ \min_{\substack{1\leqslant\beta\leqslant L_\lambda - 1,\\ |\gamma^{(\lambda+1)}|=M_\lambda+1-\beta,\\ 1\leqslant\lambda<n}} (\beta a_\lambda + |\gamma^{(\lambda+1)}|_a), \right.$$
$$\left. \min_{\substack{|\delta^{(\lambda+1)}|=T_\lambda+1,\\ 1\leqslant\lambda<n}} (a_\lambda L_\lambda + |\delta^{(\lambda+1)}|_a),\ \min_\lambda a_\lambda (L_\lambda + 1) \right\};$$

$$\Theta := \max \left\{ \max_{\substack{1\leqslant\beta\leqslant L_\lambda - 1,\\ 0<|\gamma^{(\lambda+1)}|=M_\lambda+1-\beta,\\ 1\leqslant\lambda<n}} (\beta a_\lambda + |\gamma^{(\lambda+1)}|_a), \right.$$
$$\left. \max_{\substack{|\delta^{(\lambda+1)}|=T_\lambda+1,\\ 1\leqslant\lambda<n}} (a_\lambda L_\lambda + |\delta^{(\lambda+1)}|_a),\ \max_\lambda a_\lambda L_\lambda \right\}.$$

Пусть $g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $V > n$, $S > V$, *таковы, что*

$$|D^l g(x)| \ll 2^{j(|l|_a + n/2)}(1 + 2^j\|x\|)^{-V}, \quad l \in \mathbb{N}_0^n, \quad j \in \mathbb{Z};$$

$$|h(x)| \ll 2^{kn/2}(1 + 2^k\|x - x_0\|)^{-S}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

и для любых $t_1 = 0, 1, 2, \ldots, L_1$ *и любых*

$$t^{(2)} = (t_2, t_3), \ t_2, t_3 \in \mathbb{N}_0, \quad |t^{(2)}| \leqslant \max_\lambda \{L_\lambda, \ M_\lambda, \ T_\lambda\}$$

выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} x_1^{t_1} (x^{(2)})^{t^{(2)}} h(x)\, dx = 0,$$

где $x^{(2)} = (x_2, x_3)$. *Если* $S > n + \max\{\theta, \ \Theta\}$, *то при* $j \leqslant k$

$$|(g * h)(x)| \ll 2^{(j-k)(\theta + n/2)}(1 + 2^j\|x - x_0\|)^{-V}.$$

Доказательство. Используя при необходимости дилатации и сдвиги, можно считать, что $j = 0$, $x_0 = 0$. Из условия обнуления моментов следует, что

$$(g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) h(x - y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \biggl\{ g(y) - g(x) - \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{L_\lambda} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta g}{\partial y_\lambda^\beta}(x)(y_\lambda - x_\lambda)^\beta - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{L_\lambda - 1} \frac{1}{\beta!} \times$$

$$\times \sum_{0 < |\gamma^{(\lambda+1)}| \leqslant M_\lambda - \beta} \frac{1}{\gamma^{(\lambda+1)}!} D^{\gamma^{(\lambda+1)}} \frac{\partial^\beta g}{\partial y_\lambda^\beta}(x)(y_\lambda - x_\lambda)^\beta (y - x)^{\gamma^{(\lambda+1)}} -$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{1}{L_\lambda!} \sum_{0 < |\delta^{(\lambda+1)}| \leqslant T_\lambda} \frac{1}{\delta^{(\lambda+1)}!} D^{\delta^{(\lambda+1)}} \times$$

$$\times \frac{\partial^{L_\lambda} g}{\partial y_\lambda^{L_\lambda}}(x)(y_\lambda - x_\lambda)^{L_\lambda}(y - x)^{\delta^{(\lambda+1)}} \biggr\} h(x - y) dy := \int_A + \int_B + \int_C, \qquad (11.153)$$

где

$$A := \{y\colon \ \|x - y\| \leqslant 1\},$$

$$B := \left\{y\colon \ \|x - y\| > 1, \ \|y\| \leqslant \frac{\|x\|}{2}\right\},$$

$$C := \left\{y\colon \ \|x - y\| > 1, \ \|y\| > \frac{\|x\|}{2}\right\}.$$

Оценим каждый интеграл.

Шаг 1. Для оценки $\int\limits_A$ применим к выражению в фигурных скобках анизотропный вариант формулы Тейлора. Используя свойства производных функции g, получим

$$\Big|\int\limits_A\Big| \ll \int\limits_A \Big\{ \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{L_\lambda-1} \sum_{|\gamma^{(\lambda+1)}|=M_\lambda+1-\beta} |y_\lambda - x_\lambda|^\beta \prod_{\sigma=\lambda+1}^{n} |y_\sigma - x_\sigma|^{\gamma_\sigma} \times$$

$$\times (1 + \|(x_1, \ldots, x_\lambda, u^{(\lambda+1)})\|)^{-V} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{|\delta^{(\lambda+1)}|=T_\lambda+1} |y_\lambda - x_\lambda|^{L_\lambda} \times$$

$$\times \prod_{\sigma=\lambda+1}^{n} |y_\sigma - x_\sigma|^{\delta_\sigma} (1 + \|(x_1, \ldots, x_\lambda, v^{(\lambda+1)})\|)^{-V} +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{n-1} |y_\lambda - x_\lambda|^{L_\lambda+1} (1 + \|(w_1, \ldots, w_\lambda, y^{(\lambda+1)})\|)^{-V} +$$

$$+ |y_n - x_n|^{L_n+1} (1 + \|(x_1, \ldots, x_{n-1}, r)\|)^{-V} \Big\} |h(x) - h(y)|\, dy.$$

Заметим, что поскольку на множестве A $\|y\| \sim \|x\|$, то все выражения $(1 + \|\cdot\|)$, стоящие внутри фигурных скобок, оцениваются снизу через $(1 + \|x\|)$. Поэтому, учитывая еще, что $\|y - x\| \leqslant 1$ и $S > n + \theta$, получим

$$\Big|\int\limits_A\Big| \ll (1 + \|x\|)^{-V} 2^{kn/2} \int\limits_A \|x - y\|^\theta (1 + 2^k \|x - y\|)^{-S}\, dy \ll$$

$$\ll 2^{kn/2} (1 + \|x\|)^{-V} \int\limits_0^1 \rho^{\theta+n-1} (1 + 2^k \rho)^{-S}\, d\rho =$$

$$= 2^{kn/2 - k(\theta+n)} (1 + \|x\|)^{-V} \int\limits_0^{2^k} \frac{\rho^{\theta+n-1}}{(1+\rho)^S}\, d\rho \ll 2^{-k(\theta+n/2)} (1 + \|x\|)^{-V}.$$

Шаг 2. Оценим $\int\limits_B$. Обозначим выражение в фигурных скобках равенства (11.153) через $H(x, y)$; тогда, используя свойства функции g, получим

$$|H(x, y)| \ll (1 + \|y\|)^{-V} + (1 + \|x\|)^{-V} (1 + \|x - y\|^\Theta) \ll$$

$$\ll (1 + \|y\|)^{-V} + (1 + \|x\|)^{-V} \|x - y\|^\Theta.$$

Но на множестве B $3\|x\|/2 \geqslant \|x-y\| \geqslant \|x\|/2$, поэтому

$$|H(x,y)| \ll (1+\|y\|)^{-V} + (1+\|x\|)^{-V}\|x\|^{\Theta}.$$

Кроме того, $\|x-y\| > (1+\|x\|)/4$. Поэтому

$$(1+2^k\|x-y\|)^{-S} \ll 2^{-kS}(1+\|x\|)^{-S}.$$

Ввиду того, что $S > V$,

$$\left|\int\limits_B\right| \ll 2^{kn/2-kS}(1+\|x\|)^{-V}\left(\int\limits_B \frac{dy}{(1+\|y\|)^V} + \frac{\|x\|^{\Theta}}{(1+\|x\|)^S}\int\limits_{\|y\|\leqslant\|x\|/2} dy\right).$$

Поскольку $S > n + \max\{\theta, \Theta\}$, получаем окончательно

$$\left|\int\limits_B\right| \ll 2^{-k(\theta+n/2)}(1+\|x\|)^{-V}.$$

Шаг 3. Осталось оценить $\int\limits_C$. Учтем, что на множестве C $1+\|y\| \gg$ $\gg 1+\|x\|$, и применим рассуждения предыдущего шага, тогда

$$\left|\int\limits_C\right| \ll 2^{kn/2}(1+\|x\|)^{-V}\int\limits_C \frac{\|x-y\|^{\theta}}{(1+2^k\|x-y\|)^S}\,dy \ll$$

$$\ll 2^{kn/2}(1+\|x\|)^{-V}2^{-kS}\int\limits_1^{\infty}\frac{r^{\theta+n-1}}{r^S}\,dr \ll 2^{-k(\theta+n/2)}(1+\|x\|)^{-V},$$

так как $S > n + \max\{\theta, \Theta\}$. ◊

Доказательство теоремы 11.5.7. Интерес представляет лишь случай $m > s$ (случай $m \leqslant s$ охватывается предыдущей теоремой). Рассмотрим операторы

$$T_{\lambda_0} := c_{\lambda_0}(x)\frac{\partial^{r_{\lambda_0}}}{\partial x_{\lambda_0}^{r_{\lambda_0}}},$$

символы которых $\mathcal{P}_{\lambda_0}(\xi_{\lambda_0}, x)$ удовлетворяют оценке (11.125) с $m_{\lambda_0} = a_{\lambda_0}r_{\lambda_0}$. Если $m_{\lambda_0} \leqslant s$, то

$$T_{\lambda_0} : F_{pq}^{(s)} \to F_{pq}^{(\sigma(\lambda_0))}, \tag{11.154}$$

где

$$\sigma(\lambda_0) = \left(s_1\left(1-\frac{m_{\lambda_0}}{s}\right), \ldots, s_n\left(1-\frac{m_{\lambda_0}}{s}\right)\right).$$

Если же $m_{\lambda_0} > s$, то учтем, что

$$T_{\lambda_0}^*\left(x_{\lambda_0}^{\gamma}\overline{x}^{\delta}\right) = 0$$

для $\gamma < r_{\lambda_0}$ и любого мультииндекса

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{\lambda_0 - 1}, \delta_{\lambda_0+1}, \ldots, \delta_n),$$

где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{\lambda_0-1}, x_{\lambda_0+1}, \ldots, x_n)$.

После замены $y_1 = x_{\lambda_0}$, $y_{\lambda_0} = x_1$, $y_i = x_i$; $i \neq 1$, λ_0; оператор T_{λ_0} дифференцирует по первой переменной. Используем лемму 11.5.14 с $L_1 = r_{\lambda_0} - 1$, взяв $L_2, \ldots, L_n$, M, T настолько большими, что $\theta = (L_1 + 1)a_{\lambda_0} = m_{\lambda_0}$. Тогда $\theta > m_{\lambda_0} - s$. После обратной замены с помощью рассуждений, аналогичных примененным в доказательстве теоремы 11.5.6, получим (11.154).

Теперь учтем, что $T = \sum\limits_{\lambda=1}^{n} T_\lambda$ и действует, таким образом, из $F_{pq}^{(s)}$ в самое широкое из получающихся $F_{pq}^{(\sigma(\lambda))}$ — это как раз $F_{pq}^{(\sigma)}$. $\Diamond$

Доказательство теоремы 11.5.8. Ограничимся доказательством точности соотношения (11.128), причем для упрощения выкладок положим, что $1 < p < \infty$, $s_1 > 1$. Нужно показать, что для любого $\alpha, 0 < \alpha < s_2/s_1$,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} : F_{pq}^{(s)} \not\to F_{pq}^{(s_1 - 1, s_2 - \alpha)}.$$

Установим более сильный факт, а именно, построим функцию $f \in B_{p1}^{(s)}$ такую, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \notin F_{pq}^{(\sigma)}$, где $\sigma_1 := s_1 - 1$, $\sigma_2 := s_2 - \alpha$ (напомним, что имеет место вложение $B_{p1}^{(s)} \subset F_{pq}^{(s)}$). Нетрудно проверить, что для вектора (σ)

$$\sigma = \frac{2(s_1 - 1)(s_2 - \alpha)}{(s_1 + s_2) - (1 + \alpha)}, \quad b_1 := \frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{2(s_2 - \alpha)}{(s_1 + s_2) - (1 + \alpha)},$$
$$b_2 := \frac{\sigma}{\sigma_2} = \frac{2(s_1 - 1)}{(s_1 + s_2) - (1 + \alpha)}, \quad b_1 > a_1, \quad b_2 < a_2.$$

Так как $1 < p < \infty$, то можно определить пространства $B_{p1}^{(s)}$и $F_{pq}^{(\sigma)}$, пользуясь методом рассечений вместо метода декомпозиции. Рассмотрим семейство прямоугольников

$$\Pi_k^{(s)} = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \colon\ |\xi_\lambda| \leqslant 2^{a_\lambda k}\}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$
$$\Pi_k^{(\sigma)} = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \colon\ |\xi_\lambda| \leqslant 2^{b_\lambda k}\}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

и семейство коридоров

$$\Gamma_k^{(s)} := \Pi_k^{(s)} \setminus \Pi_{k-1}^{(s)} \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\Gamma_k^{(\sigma)} := \Pi_k^{(\sigma)} \setminus \Pi_{k-1}^{(\sigma)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда известно

$$|f, B_{p1}^{(s)}| \sim |F^{-1}(Ff\chi_{\Pi_0^{(s)}}), L_p| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{sk}|V_k^{(s)} * f, L_p|, \qquad (11.155)$$

$$V_k^{(s)} := F^{-1}\chi_{\Gamma_k^{(s)}}; \qquad (11.156)$$

$$|f, F_{pq}^{(\sigma_1,\sigma_2)}| \sim |F^{-1}(Ff\chi_{\Pi_0^{(\sigma)}}), L_p| +$$

$$+ +\left|\left(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{\sigma k}|V_k^{(\sigma)} * f|)^q\right)^{1/q}, L_p\right|, \qquad (11.157)$$

$$V_k^{(\sigma)} := F^{-1}\chi_{\Gamma_k^{(\sigma)}}. \qquad (11.158)$$

Рассмотрим $g_j^{(1)}(x_1)$ — целую функцию экспоненциального типа (ЦФЭТ) $2^{a_1 j}$ такую, что $|\frac{d}{dx_1}\, g_j^{(1)}, L_p| \sim 2^{a_1 j}$, $|g_j^{(1)}, L_p| = 1$, и $g_j^{(2)}(x_1)$ — ЦФЭТ, $|g_j^{(2)}, L_p| = 1$, спектр которой лежит в отрезке $[2^{b_2(j-1)}, 2^{b_2 j}]$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда спектр функции

$$g_j(x_1, x_2) := 2^{-sj} j^{-1} g_j^{(1)}(x_1) g_j^{(2)}(x_2)$$

лежит в прямоугольнике $\mathcal{R}_j = [-2^{a_1 j}, 2^{a_1 j}] \times [2^{b_2(j-1)}, 2^{b_2 j}]$, кроме того,

$$|g_j, L_p| = 2^{-sj} j^{-1} \qquad (11.159)$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} g_j,\, L_p\right| \sim 2^{-sj} 2^{a_1 j} j^{-1}. \qquad (11.160)$$

Оценим $|g_j, B_{p1}^{(s_1,s_2)}|$. Коридор $\Gamma_k^{(s)}$, $k \in \mathbb{N}$, не пересекается с прямоугольником $\mathcal{R}_j$, если $\Pi_{k-1}^{(s)} \supset \mathcal{R}_j$, т.е. при $k > j+1$. Для любого j первое слагаемое в норме $|g_j, B_{p1}^{(s_1,s_2)}|$ (см. (11.155)) ограничено. Второе слагаемое можно оценить следующим образом (пояснения ниже):

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{sk}|V_k^{(s)} * g_j, L_p| \ll$$

$$\ll \sum_{k=1}^{j+1} 2^{sk} 2^{-sj} j^{-1} \leqslant 2^s \sum_{k=1}^{j+1} 2^{sj} 2^{-sj} j^{-1} = 2^s(1 + j^{-1}) \leqslant 2 \cdot 2^s.$$

Первое неравенство опирается на то, что

$$F^{-1}\chi_{\Gamma_k^{(s)}} = F^{-1}\chi_{\Pi_k^{(s)}} - F^{-1}\chi_{\Pi_{k-1}^{(s)}}$$

и операторы свертки с ядрами Дирихле прямоугольников $\Pi_k^{(s)}$ равномерно по k ограничены в L_p, $1 < p < \infty$. Во втором неравенстве использовано (11.159).

Итак,

$$|g_j, F_{pq}^{(s_1,s_2)}| \ll |g_j, B_{p1}^{(s_1,s_2)}| \ll 1, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{11.161}$$

Далее, так как $a_1 < b_1$, то $\mathcal{R}_j \subset \Gamma_j^{(\sigma)}$, поэтому (пояснения ниже)

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} g_j,\, F_{pq}^{(\sigma_1,\sigma_2)} \right| \geqslant 2^{\sigma j} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} g_j,\, L_p \right| \gg 2^{\sigma j} 2^{-sj} 2^{a_1 j} j^{-1} = 2^{zj} j^{-1},$$

где $z := \sigma - s + a_1$. Первое неравенство опирается на то, что спектр функции $\dfrac{\partial}{\partial x_1} g_j$ совпадает со спектром g_j; кроме того, $FV_j^\sigma \equiv 1$ в прямоугольнике Γ_j^σ; в последнем неравенстве использовано (11.160). Нетрудно проверить, что $z > 0$, поэтому

$$\lim_{j \to \infty} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} g_j,\, F_{pq}^{(\sigma_1,\sigma_2)} \right| = \infty,$$

что в совокупности с (11.161) дает требуемое. $\lozenge$

Приложение А

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А.1. Базисность

Пусть X — банахово пространство, X^* — его сопряженное пространство.

Определение А.1.1. Система элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ называется *полной*, если $\overline{\operatorname{span}\{x_n, n \in \mathbb{N}\}} = X$.

Определение А.1.2. Система элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ называется *минимальной* в X, если $x_k \notin \overline{\operatorname{span}\{x_n, n \neq k, n \in \mathbb{N}\}}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Теорема А.1.3. *Для того чтобы система $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ была минимальна в X, необходимо и достаточно, чтобы существовала* сопряженная система, *т. е. такая система $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$, что*

$$\langle x_n, y_k \rangle = \delta_{kn}.$$

Определение А.1.4. Система $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ называется *базисом* в X, если для любого элемента $x \in X$ существует единственное представление вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n,$$

где c_n — комплексные числа, а ряд сходится по норме в X.

Теорема А.1.5. *Для того чтобы система $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ была базисом в X, необходимо и достаточно, чтобы она была полной и минимальной в X, и для любого $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n \right\| \leqslant M \|x\|,$$

где $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ — сопряженная система, а M — положительная постоянная, не зависящая от x.

Теорема А.1.6. *Если система $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ является базисом в X, то сопряженная система $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ — базис в пространстве* $\overline{\operatorname{span}\{y_n, n \in \mathbb{N}\}}$ (*с нормой пространства X^**).

Определение А.1.7. Базис $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве X называется *безусловным*, если для любой перестановки натурального ряда $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ система $\{x_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ тоже является базисом в X.

Теорема А.1.8. *Для того чтобы полная минимальная в X система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ была безусловным базисом в X, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \langle x, y_k \rangle x_k \right\| \leqslant M\|x\|,$$

где $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сопряженная система, а M — положительная постоянная, не зависящая от x и ε.

Доказательства всех упомянутых утверждений приведены, например, в книге [1, гл. 1]

А.2. Линейные функционалы в нормированных пространствах

Линейным непрерывным (ограниченным) функционалом на нормированном пространстве X называется линейное отображение $l\colon X \to \mathbb{R}$ для которого $\|l\| = \sup\limits_{x \in X,\, \|x\|=1} l(x) < \infty$. Иногда мы также используем обозначение $\langle l,\, x \rangle = l(x)$.

Теорема А.2.1 (теорема Хана–Банаха). *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — его подпространство, l_0 — линейный непрерывный функционал на X_0. Тогда существует линейный непрерывный функционал l, определенный на всем X, совпадающий с l_0 на X_0 и такой, что $\|l\|_X = \|l_0\|_{X_0}$.*

Доказательство можно найти в [29].

Множество всех линейных непрерывных функционалов на X также является линейным нормированным пространством, оно называется *сопряженным пространством* к X и обозначается X^*. Сопряженное пространство всегда полно, т. е. является банаховым. Так, $(L_p)^* = L_q$, $(\ell_p)^* = \ell_q$ при $p \in [1, +\infty)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Пространство $C^*[0,1]$ изоморфно пространству $\mathrm{Var}\,[0,1]$ функций ограниченной вариации, или пространству борелевских зарядов на отрезке $[0,1]$ (теорема Рисса, см. [29]).

Слабая топология в сопряженном пространстве X^* (употребляется также термин $*$-слабая топология) задается сходящимися последовательностями: последовательность $l_k \in X^*$ сходится к l в слабой топологии, если $\langle l_k,\, x \rangle \to \langle l,\, x \rangle$ для всех $x \in X$. В пространствах ℓ_q слабая сходимость равносильна покоординатной сходимости: последовательность $\{l_k\} \subset \ell_q$ слабо сходится к l тогда и только тогда когда $l_k^j \to l^j$ для каждого $j \in \mathbb{Z}$.

Подмножество $K \subset X$ называется компактным (или предкомпактным, или вполне ограниченным), если любая последовательность $\{l_k\} \subset K$ содержит фундаментальную подпоследовательность.

Теорема А.2.2 (о слабой компактности единичного шара). *Единичный шар в сопряженном пространстве X^* компактен в слабой топологии.*

Доказательство этих фактов можно найти в [29] С теорией нормированных и банаховых пространств можно познакомиться, например, в [17].

А.3. Обобщенные функции

Основы теории обобщенных функций были разработаны в период с конца 30-х по начало 50-х гг. XX века, в основном благодаря усилиям С. Л. Соболева и Л. Шварца, хотя первые обобщенные функции встречались в работах физиков еще в начале XX века. Первоначально обобщенные функции возникли в качестве аппарата для математической физики и теории дифференциальных уравнений, затем их применения распространились на другие области математики.

Обобщенными функциями называются линейные непрерывные функционалы на *пространстве основных (пробных) функций*. При этом обычные локально-суммируемые функции естественным образом вкладываются в пространства обобщенных функций. Чаще других используются пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Рассмотрим сначала случай одной переменной $d = 1$. Пространство основных (пробных) функций $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ состоит из финитных бесконечно-дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$. Таким образом,

$$\mathcal{D} = \Big\{ \varphi(\cdot) \in C^\infty,\ \varphi \ \text{ финитна } \Big\}.$$

Топология пространства $\mathcal{D}$ определяется сходящимися последовательностями. Последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}$ сходится к нулю, если функции φ_k сходятся к нулю со всеми производными в метрике $C(\mathbb{R})$ при $k \to \infty$ и носители всех функций φ_k равномерно ограничены. Таким образом, для любого $l \geqslant 0$ имеем $\|\varphi_k^{(l)}\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$ и существуют константы C_1, C_2 такие, что $\varphi_k \subset [C_1, C_2]$ для любого k. По линейности данное определение распространяется на сходимость последовательности к любому элементу $\varphi \in \mathcal{D}$. Пространство $\mathcal{D}$ ненормируемо и неметризуемо. Пространством обобщенных функций $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}$. Таким образом, $f \in \mathcal{D}'$, если функционал $\varphi \to \langle f, \varphi\rangle$ линеен и $\langle f, \varphi_k\rangle \to 0$ при $\varphi_k \to 0$. Строго говоря, обобщенная функция не является функцией, поскольку не имеет значений в точках. Иногда, по аналогии с обычными функциями, в обозначении для обобщенных функций пишут аргумент $f(x)$. При этом, однако, значения обобщенных функций в конкретных точках x не определяются.

Последовательность $\{f_j\} \subset \mathcal{D}'$ сходится к нулю в пространстве $\mathcal{D}'$ (слабо сходится), если $\langle f_j, \varphi \rangle \to 0$ на любом элементе $\varphi \in \mathcal{D}$. Пространство $\mathcal{D}'$ сепарабельно, метризуемо, но не нормируемо. Кроме того, $\mathcal{D}'$ обладает свойством полноты (если для любой пробной функции φ числовая последовательность $\langle f_j, \varphi \rangle$ фундаментальна, то последовательность f_j сходится к некоторому элементу $f \in \mathcal{D}'$), а также свойством предкомпактности: из любой ограниченной последовательности $\{f_j\} \subset \mathcal{D}'$ (это означает ограниченность числовой последовательности $\langle f_j, \varphi \rangle$ на каждом элементе $\varphi \in \mathcal{D}$) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Каждая функция из $\mathcal{D}'$ является пределом подходящей последовательности из $\mathcal{D}$. В этом смысле $\mathcal{D}$ всюду плотно в $\mathcal{D}'$.

На пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'$ определены следующие операции:

(а) сложение, умножение на число, предельный переход;

(б) умножение на бесконечно-дифференцируемую функцию. Для любых $f \in \mathcal{D}'$, $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ обобщенная функция hf определяется по формуле $\langle hf, \varphi \rangle = \langle f, h\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$;

(в) замена переменной. Для любой строго монотонной функции $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ обобщенная функция $f(\psi(x))$ определяется по формуле

$$\langle f(\psi(x)), \varphi(x) \rangle = \left\langle f(y), [\psi^{-1}(y)]' \varphi(\psi^{-1} y) \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Например, для линейной замены $\psi(x) = ax + b$ имеем

$$\Big\langle f(ax+b), \varphi(x) \Big\rangle = \Big\langle f(y), \frac{1}{a}\,\varphi\Big(\frac{y-b}{a}\Big) \Big\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D};$$

(г) дифференцирование. У любой обобщенной функции f определена ее производная f'. Она тоже является обобщенной функцией и определяется по формуле $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

Таким образом, любая обобщенная функция бесконечно-дифференцируема. С другой стороны, такие простые операции, как произведение двух функций или негладкая (либо немонотонная) замена переменных, не определены в пространстве $\mathcal{D}'$.

Носителем $\operatorname{supp} f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$ называется наименьшее по включению замкнутое множество K такое, что для любой пробной функции φ, сосредоточенной вне K (т. е. $\operatorname{supp} \varphi \cap K = \varnothing$) имеем $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Легко видеть, что предел последовательности обобщенных функций, сосредоточенных на множестве K, также имеет носитель на этом множестве. Обобщенная функция финитна, если ее носитель компактен.

Обычная функция, суммируемая на каждом компакте, также является обобщенной функцией. Соответствующий линейный функционал определяется обычным интегрированием:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Две локально-суммируемые функции определяют один и тот же функционал (т. е. одну обобщенную функцию) тогда и только тогда когда они совпадают почти всюду. Для обычных функций операции (а)–(г), равно как и понятие носителя, совпадают с соответствующими классическими понятиями. Любая функция из $C(\mathbb{R})$ или $L_p(\mathbb{R})$ является обобщенной функцией.

Обобщенная функция, которая может быть задана обычной локально-суммируемой функцией, называется *регулярной*, в противном случае она называется *сингулярной*. Например, регулярная функция $\mathbf{1}(x)$ определяется как $\langle \mathbf{1}, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$. Простейший пример сингулярной функции — дельта-функция Дирака $\delta(x)$, которая определяется как $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$. Дельта-функция финитна, ее носитель состоит из одной точки $\{0\}$. Иногда даже для сингулярных функций используют обозначение $\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$, не вкладывая при этом никакого смысла в понятие интеграла. Для финитных обобщенных функций f используется также понятие определенного интеграла по всей прямой. По определению величина $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ равна $\langle f, \varphi\rangle$, где φ — произвольная пробная функция, тождественно равная 1 на носителе f. От выбора функции φ эта величина не зависит.

У каждой обобщенной функции существует первообразная. Любые две первообразные одной функции отличаются на тождественную константу $c \cdot \mathbf{1}$. Любая финитная обобщенная функция имеет конечный порядок сингулярности. Это означает, что она является производной конечного порядка от регулярной функции.

Недостатком пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'$ является то, что на нем не определено преобразование Фурье. Причина заключается в том, что преобразование Фурье ненулевой пробной функции из $\mathcal{D}$ не будет иметь компактный носитель, а значит, не принадлежит $\mathcal{D}$. По этой причине, если необходимо иметь дело с преобразованием Фурье, используют более узкое пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'$.

Пространство основных (пробных) функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ состоит из бесконечно-дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, которые вместе со всеми производными убывают на бесконечности быстрее любой степенной функции. Таким образом,

$$\mathcal{S} = \Big\{ \varphi(\cdot) \in C^{\infty},\ \big\|\big(1 + |x|^m\big)\varphi^{(l)}(x)\big\|_{\infty} < \infty,\ m, l \geqslant 0 \Big\}.$$

Последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{S}$ сходится к нулю, если для любых $m, l \geqslant 0$ существует константа $C(m, l)$, для которой

$$\Big\|\big(1 + |x|^m\big)\varphi_k^{(l)}(x)\Big\|_{\infty} < C(m, n), \qquad k \in \mathbb{N},$$

и при этом $\|\varphi_k^{(l)}\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$. Пространством обобщенных функций $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ называется пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{S}$. Пространство пробных функций $\mathcal{S}$ часто называют в литературе *пространством Шварца*, а $\mathcal{S}'$ — *пространством обобщенных функций медленного роста*. Так как $\mathcal{D}$ является подпространством $\mathcal{S}$, то $\mathcal{S}'$ является подпространством $\mathcal{D}'$. Свойства обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ в основном такие же, как у обобщенных функций из $\mathcal{D}'$. Операции (а) и (г) определяются так же, в определении (б) умножать можно не на любую функцию $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, а только на функцию, растущую со всеми производными при $x \to \infty$ не быстрее степенной функции. В пункте (г) условия на функцию замены $\psi(x)$ более сложные, поэтому мы ограничимся только линейными заменами, которые осуществляются по тем же формулам, что и для функций из $\mathcal{D}'$. Понятие носителя, финитности и порядка сингулярности остаются такими же. По той же схеме осуществляется и вложение обычных функций в $\mathcal{S}'$. Единственное отличие: уже не любая локально-суммируемая функция f принадлежит $\mathcal{S}'$. Так, например, функция $f(x) = e^x$ не принадлежит $\mathcal{S}'$. Однако в это пространство входят два важных класса функций: все функции из пространств $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$, а также все функции, которые при почти всех x растут на бесконечности не быстрее степенной функции. Кроме того, все обобщенные производные всех порядков таких функций также принадлежат $\mathcal{S}'$. Множества финитных функций пространств $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{D}'$ совпадают.

Главное преимущество пространства $\mathcal{S}'$ состоит в том, что на нем определяется операция преобразования Фурье. Преобразование Фурье является взаимно-однозначным и взаимно-непрерывным линейным оператором на пространстве $\mathcal{S}$. Поэтому преобразование Фурье, задаваемое для любой функции $f \in \mathcal{S}'$ формулой

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \breve{\varphi} \rangle,$$

является корректно определенным линейным оператором на пространстве $\mathcal{S}'$, который, к тому же, взаимно однозначен и взаимно непрерывен. Преобразование Фурье обобщенных функций имеет те же свойства, что и для обычных функций. Перечислим некоторые из них:

$$\langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{для любых } f \in \mathcal{S}',\ \varphi \in \mathcal{S} \quad \text{(теорема Планшереля);}$$

$$\widehat{x^m f}(\xi) \;=\; (-2\pi i)^{-m} \widehat{f}^{(m)}(\xi); \quad \widehat{f^{(l)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^l \widehat{f}(\xi);$$

$$\widehat{f(ax+b)}(\xi) = a^{-1} e^{2\pi i b\xi/a} \widehat{f}\big(a^{-1}\xi\big); \quad \widehat{f}(a\xi + b) = a^{-1} \widehat{f(a^{-1}x) e^{-2\pi i b x/a}}.$$

Все вышеперечисленные действия (взятие преобразования Фурье и дифференцирование) определены для любых $f \in \mathcal{S}'$.

На многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ определения пространств основных функций $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ и обобщенных функций $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ совершенно аналогичны, равно как и свойства этих пространств. Как обычно, в определении дифференцирования производные $f^{(l)}$ заменяются на частные производные $\dfrac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1}\dots\partial x_d^{l_d}}$, $\sum\limits_{j=1}^{d} l_j = l$, в определении замены переменной вместо производной $[\psi^{-1}(y)]'$ берется соответствующий якобиан замены, в перечисленных свойствах преобразования Фурье x^m заменяется на

$$x_1^{m_1}\dots x_d^{m_d}, \quad \sum_{j=1}^{d} m_j = m,$$

a — линейный оператор в $\mathbb{R}^d$, множитель a^{-1} перед интегралом заменяется на $\det a^{-1}$.

Доказательство этих фактов, а также изложение теории обобщенных функций можно найти в [15, 29, 42].

А.4. Интерполяционная теорема Марцинкевича

Пусть T — оператор, действующий из L_p в L_q, $1 \leqslant p$, $q < \infty$, мы будем говорить, что T имеет *сильный тип* (p, q), если

$$\|Tf\|_q \leqslant A_p\|f\|_p, \tag{A.1}$$

где A_p не зависит от f. Мы будем говорить, что T имеет *слабый тип* (p, q), если (p, q) для любого $\lambda > 0$

$$\mu\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \leqslant \left(B_p\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q, \tag{A.2}$$

где B_p не зависит от f и λ.

Предложение А.4.1. *Любой оператор сильного типа* (p, q) *является оператором слабого типа* (p, q).

Доказательство следует из оценки

$$\lambda^q\mu\{x\colon\, |Tf(x)| > \lambda\} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |Tf|^q = \|Tf\|_q^q \leqslant (A_p\|f\|_p)^q\,. \qquad \diamondsuit \tag{A.3}$$

Нам понадобятся операторы, определенные на нескольких пространствах L_p одновременно. Определим $L_{p_1}(\mathbb{R}) + L_{p_2}(\mathbb{R})$ как множество функций f, представимых в виде $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_{p_1}(\mathbb{R})$, $f_2 \in L_{p_2}(\mathbb{R})$. Пусть теперь $p_1 < p_2$, нетрудно видеть, что $L_p(\mathbb{R}) \subset L_{p_1}(\mathbb{R}) + L_{p_2}(\mathbb{R})$ для всех $p \in [p_1, p_2]$.

Теорема А.4.2 (интерполяционная теорема Марцинкевича). *Если линейный оператор T имеет слабый тип (p_1, p_1) и одновременно слабый тип (p_2, p_2), $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, то T имеет сильный тип (p, p) для любого $p \in (p_1, p_2)$. При этом постоянная A_p в неравенстве* (А.1) *зависит только от p, p_1, p_2 и постоянных B_{p_1}, B_{p_2}, входящих в оценки слабого типа.*

Доказательство этой теоремы приведено во многих монографиях, например, его можно найти в книгах [14, с. 168] и [1, с. 485].

Замечание А.4.3. Если в условиях теоремы А.4.2 ослабить требования, предположив, что неравенство А.2 при $p = p_1$ выполняется лишь для функций $f \in L_{p_1}(\mathbb{R}) \cap L_{p_2}(\mathbb{R})$, то неравенство (А.1) будет выполняться для всех $f \in L_p(\mathbb{R}) \cap L_{p_2}(\mathbb{R})$. Для доказательства этого факта годятся рассуждения доказательства теоремы Марцинкевича, практически без изменений.

А.5. Спектральный радиус

Спектральным радиусом оператора A называется число

$$\rho(A) := \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Весь спектр линейного ограниченного оператора A лежит внутри круга $|\lambda| \leqslant \rho(A)$, и на границе круга имеется по крайней мере одна точка спектра. Доказательство этого факта приведено, например, в книге [12] (см. с. 266–267). В конечномерном пространстве спектр совпадает с набором собственных чисел. Если M — квадратная матрица размера $d \times d$, все собственные числа которой по модулю больше 1, то у матрицы M^{-1} все собственные числа по модулю строго меньше 1 и их конечное число, значит, $\rho(M^{-1}) < 1$. Отсюда следует, что при любом $\delta > 0$ последовательность $\|M^{-n}\|^{\delta}$ мажорируется геометрической прогрессией, что влечет соотношение (2.6).

Для читателей, не знакомых с упомянутым разделом функционального анализа, отметим, что соотношения (2.5) и (2.6) несложно доказать непосредственно, используя разложения по базису из собственных и присоединенных векторов матрицы M.

Лемма А.5.1. *Пусть B — линейный оператор, действующий в $\mathbb{R}^d$, $\{a_i\}_{i=1}^{s}$ — некоторое конечное подмножество $\mathbb{R}^d$. Тогда если $\rho(B) < 1$, то существует выпуклый компакт $K \subset \mathbb{R}^d$, центрально-симметричный относительно нуля и имеющий непустую внутренность, для которого $BK - a_i \subset K$, $i = 1, \ldots, s$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $q \in (\rho, 1)$ и докажем существование компакта Q (центрально-симметричного относительно нуля, с непустой внутренностью) такого, что $BQ \subset qQ$. Для этого сначала немного пошевелим оператор B, таким образом, чтобы все его собственные значения стали различны, а спектральный радиус попрежнему был бы меньше q. Перейдем к базису собственных векторов $v_1, \ldots, v_d$, а через $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ обозначим соответствующие собственные значения. Упорядочим их следующим образом: $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — действительные, остальные собственные значения разбиваются на пары взаимно-сопряженных: $(\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}), \ldots, (\lambda_{d-1}, \lambda_d)$. Каждая пара собственных векторов

$$(v_{s+2j-1}, v_{s+2j}), \qquad j = 1, \ldots, \qquad r = \frac{d-s}{2},$$

порождает двумерное подпространство, его действительную часть обозначим L_j. Ограничение оператора B на L_j является композицией поворота на угол $\arg \lambda_{s+2j}$ и сжатия с коэффициентом $|\lambda_{s+2j}|$. Обозначим через γ_j единичный круг в пространстве L_j с центром в нуле, а через b_k — отрезок с концами $\pm a_k$, $k = 1, \ldots, s$. Тогда компакт

$$Q := \operatorname{conv}(b_1, \ldots, b_s, L_1, \ldots, L_r)$$

является искомым. Действительно, $BQ \subset \rho(B)Q \subset qQ$. Выберем теперь достаточно большое положительное μ, чтобы $qQ - \dfrac{1}{\mu}\, a_i \subset Q$ для любого i. Тогда $q\mu Q - a_i \subset \mu Q$, а поскольку $BQ \subset qQ$, то и $B\mu Q - a_i \subset \mu Q$. Полагая теперь $K = \mu Q$, завершаем доказательство. $\Diamond$

А.6. Совместный спектральный радиус и показатель Ляпунова

Напомним (определение 5.1.1), что для данной пары линейных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$, действующих в $\mathbb{R}^n$, их совместным спектральным радиусом и нижним спектральным радиусом называются, соответственно, величины

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) &= \lim_{r\to\infty} \max_{(d_1,\ldots,d_r)\in\{0,1\}^r} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_r}\|^{1/r}, \\ \breve{\rho}(\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1) &= \lim_{r\to\infty} \min_{(d_1,\ldots,d_r)\in\{0,1\}^r} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_r}\|^{1/r}, \end{aligned} \tag{A.4}$$

Для любого конечного числа линейных операторов определения такие же, равно как и свойства совместного и нижнего спектрального радиусов. Для простоты мы будем формулировать все результаты для двух операторов. Доказательство корректности этих определений опирается на известную лемму Фекете:

Лемма А.6.1. *Последовательность чисел* $\{a_k\}$, *обладающая свойством*

$$(k+n)a_{k+n} \leqslant ka_k + na_n, \qquad k, n \in \mathbb{N},$$

сходится (*возможно*, *предел равен* $-\infty$), *причем*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k.$$

Доказательство можно найти в [32]. Читатель также сможет без труда доказать это утверждение самостоятельно. Полагая в первом определении

$$a_k = \ln\left(\max_{(d_1,\ldots,d_r)\in\{0,1\}^r} \|\widetilde{B}_{d_1}\times\ldots\times\widetilde{B}_{d_r}\|^{1/r}\right),$$

а во втором

$$a_k = \ln\left(\min_{(d_1,\ldots,d_r)\in\{0,1\}^r} \|\widetilde{B}_{d_1}\times\ldots\times\widetilde{B}_{d_r}\|^{1/r}\right),$$

доказываем существование обоих пределов в (A.6.1). Заметим также, что в силу эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве пределы (A.4) не зависят от введенной нормы.

Доказательство леммы 5.1.2. Для любого r имеем

$$\left(\min_{d_1,\ldots,d_{rk}}\|\Pi_{rk}\|\right)^{1/rk} \leqslant \|(\Pi_k)^r\|^{1/rk} \leqslant \left(\max_{d_1,\ldots,d_{rk}}\|\Pi_{rk}\|\right)^{1/rk}.$$

При $r\to\infty$ получаем требуемое. $\Diamond$

Совместный спектральный радиус является не только пределом норм, но также и пределом обычных спектральных радиусов. Доказательство следующего факта можно найти в [141].

Лемма А.6.2. *Для любых операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ имеем*

$$\check{\rho} = \lim_{k\to\infty}\min_{d_1,\ldots,d_k}\Big(\rho(\Pi_k)\Big)^{1/k}; \qquad \widehat{\rho} = \lim_{k\to\infty}\max_{d_1,\ldots,d_k}\Big(\rho(\Pi_k)\Big)^{1/k}.$$

Заметим, что $\|\Pi_k\|^{1/k} \geqslant \widehat{\rho}$ для любого произведения Π_k. С другой стороны,

$$(\rho(\Pi_k))^{1/k} \leqslant \widehat{\rho}$$

для любого произведения Π_k (лемма 5.1.2). Поэтому величина $\max\limits_{d_1,\ldots,d_k}\big\|\Pi_k\big\|^{1/k}$ стремится к $\widehat{\rho}$ справа, а $\max\limits_{d_1,\ldots,d_k}\Big(\rho(\Pi_k)\Big)^{1/k}$ — слева. Для нижнего спектрального радиуса $\check{\rho}$ обе величины $\min\limits_{d_1,\ldots,d_k}\big\|\Pi_k\big\|^{1/k}$ и $\min\limits_{d_1,\ldots,d_k}\Big(\rho(\Pi_k)\Big)^{1/k}$ стремятся к нему справа.

Геометрический смысл совместного спектрального радиуса проясняет следующая

Теорема А.6.3. $\widehat{\rho}(\widetilde{B}_0,\widetilde{B}_1) < 1$ *тогда и только тогда, когда существует норма в $\mathbb{R}^n$, в которой оба оператора — сжимающие.*

Доказательство. Если существует норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$, в которой

$$\|\widetilde{B}_i\| < q < 1, \quad i = 0, 1,$$

то $\|\widetilde{B}_{d_1}\times\ldots\times\widetilde{B}_{d_k}\| < q^k$ для любых $d_1,\ldots,d_k$. Следовательно, $\widehat{\rho} \leqslant$ $\leqslant q < 1$. Обратно, пусть $\widehat{\rho} \leqslant q < 1$. Построим норму, в которой оба оператора сжимающие. По определению совместного спектрального радиуса для любого $b \in (q, 1)$ существует константа $C_b > 1$ такая, что

$$\|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}\| < C_b b^k$$

для любых $d_1, \ldots, d_k$. Рассмотрим множество $M \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из точек $v \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|v\| \leqslant 1$ и $\|\widetilde{B}_{d_1} \ldots \widetilde{B}_{d_k} v\| < 1$ для любого k и любых $d_1, \ldots, d_k$. Это множество замкнуто, выпукло, центрально-симметрично относительно нуля и содержит шар $\{v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| \leqslant 1/C_b\}$. Кроме того, $\widetilde{B}_i M \subset bM$ для $i = 0, 1$. Следовательно, в норме Минковского, соответствующей множеству M:

$$\|v\|_M = \inf\Big\{\lambda > 0,\ \frac{1}{\lambda} v \in M\Big\}, \tag{A.5}$$

имеем $\|\widetilde{B}_i\|_M \leqslant b$. Теорема доказана. $\Diamond$

Лемма А.6.4. *Если набор операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ неприводим, то*
1) $\widehat{\rho} > 0$;
2) *существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любого $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ имеем*

$$c_1 \widehat{\rho}^k \leqslant \max_{d_1, \ldots, d_k \in \{0,1\}} \|\widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k} v\| \leqslant c_2 \widehat{\rho}^k. \tag{A.6}$$

Доказательство см. [119].

Прямым обобщением совместного спектрального радиуса является p-радиус (определение 5.2.1), применявшийся нами для оценки гладкости масштабирующих функций в L_p (гл. 5, параграф 5.2). Свойства и применения p-радиуса также обсуждались в параграфе 7.3 главы 7. С практической точки зрения наиболее интересен случай $p = 2$, поскольку он дает критерий принадлежности масштабирующей функции пространству L_2. Имеет место следующий факт, доказанный в [186] и [187].

Теорема А.6.5. *Стабильная масштабирующая функция принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда $\rho_2\big(\widetilde{T}_0, \ldots, \widetilde{T}_{m-1}\big) < 1$, где $\widetilde{T}_k = T_k|_W$, $W = \Big\{x \in \mathbb{R}^d,\ \sum\limits_i x_i = 0\Big\}$, а операторы T_k определены равенством* (5.11).

Частный случай этого критерия (при $d = 1$) был сформулирован и использовался нами в главах 5 и 7 (теоремы 5.2.2 и 7.1.1).

Таким образом, для ответа на вопрос, принадлежит ли решение данного масштабирующего уравнения L_2, нужно вычислить 2-радиус операторов $\widetilde{T}_0, \ldots, \widetilde{T}_{m-1}$.

Следующий результат сводит вычисление 2-радиуса к нахождению собственных значений специальной матрицы. Пусть $\widetilde{B}_0, \ldots, \widetilde{B}_{m-1}$ —

произвольные $n \times n$-матрицы. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_2$, действующий в пространстве $n \times n$-матриц (т. е. в $\mathbb{R}^{n^2}$) по формуле

$$\mathcal{A}_2 X = \frac{1}{m}\left(\widetilde{B}_0 X \widetilde{B}_0^* + \ldots + \widetilde{B}_{m-1} X \widetilde{B}_{m-1}^*\right). \tag{A.7}$$

Теорема А.6.6. *2-радиус операторов $\widetilde{B}_0, \ldots, \widetilde{B}_{m-1}$ равен $\sqrt{\rho(\mathcal{A}_2)}$, где $\rho(\mathcal{A}_2)$ — максимальный модуль собственных значений оператора $\mathcal{A}_2$*

Доказательство см. [115]. Можно понизить размерность с n^2 до $\frac{n(n+1)}{2}$, рассмотрев ограничение оператора A_2 на пространство симметрических матриц. Результат будет тот же [115]. В этом состоит доказательство теоремы 2.5.13.

Напомним (определение 5.4.8), что показателем Ляпунова линейных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ называется величина

$$\overline{\rho} = \lim_{k\to\infty}\left(\prod_{d_1,\ldots,d_k} \|\Pi_k\|\right)^{1/2^k k}.$$

Данный предел существует и не зависит от нормы.

Предложение А.6.7. *Для произвольной пары линейных операторов $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1$ предел*

$$\lim_{k\to\infty} \|\Pi_k\|^{1/k} \tag{A.8}$$

существует и равен $\overline{\rho}$ для почти всех $x \in [0,1)$, где

$$x = 0{,}d_1 d_2 \ldots; \quad \Pi_k = \widetilde{B}_{d_1} \times \ldots \times \widetilde{B}_{d_k}.$$

Доказательство см., например в [121, 122]. Этот факт можно сформулировать в терминах теории вероятностей. Если независимые случайные величины $d_1, d_2, \ldots$ принимают значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$, то почти наверное предел (А.8) существует и равен $\overline{\rho}$. Отсюда следует, что дискретные случайные величины

$$\eta_n = \frac{1}{n}\log_2 \|\Pi_k\|$$

сходятся по вероятности к константе $\log_2 \overline{\rho}$. Если при этом $\check{\rho}(B_0, B_1) > 0$, то

$$\log_2 \check{\rho}(B_0, B_1) \leqslant \eta_k \leqslant \log_2 \widehat{\rho}(B_0, B_1)$$

для каждого k с вероятностью 1. Поэтому величины η_k равномерно ограничены и, следовательно,

$$E\eta_k \to \log_2 \overline{\rho},$$

где E обозначает математическое ожидание. Заметим, что

$$E\eta_k = \log_2\Biggl(\prod_{d_1,\ldots,d_k} \|\Pi_k\|\Biggr)^{1/2^k k}.$$

В пределе при $k \to \infty$ получаем показатель Ляпунова. Строгие доказательства, а также другие свойства показателя Ляпунова, можно найти, например, в [120–122]. Подобно совместному спектральному радиусу, показатель Ляпунова чрезвычайно трудно вычислять и оценивать.

На сегодняшний день существует обширная литература, посвященная совместному спектральному радиусу и его обобщениям. Библиография насчитывает более 200 работ. Читателю можно порекомендовать недавние краткие обзоры [116, 142, 143]. О свойствах совместного спектрального радиуса можно прочитать, например, в работах [119, 129, 131, 133, 134, 141], а также [144–148]. О сложности вычисления совместного спектрального радиуса — в работах [134–136, 142, 149]. Алгоритмы вычисления см. [115–117, 120, 137–139]. О применениях совместного спектрального радиуса и его обобщений в теории всплесков, теории приближений, динамических системах, теории вероятностей, теории чисел и математической физике см. [120, 125, 126], [129–132, 137, 149–155].

А.7. Гладкость и скорость убывания преобразования Фурье

Для данной функции $g(x)$ положим

$$\vartheta = \vartheta(g) = \inf_{\xi\in\mathbb{R}}\bigl\{\beta \in \mathbb{R} \,\big|\, |g(\xi)| \leqslant C(|\xi|+1)^{-\beta}\bigr\}.$$

Теорема А.7.1. *Для непрерывной функции $f \in L(\mathbb{R})$ имеем*

$$\vartheta - 1 \leqslant \alpha_f \leqslant \vartheta, \tag{A.9}$$

где $\vartheta = \vartheta(\widehat{f})$.

Доказательство. Продифференцировав нужное количество раз и учитывая, что $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^k \widehat{f}(\xi)$, можно считать, что $\alpha_f \leqslant 1$. Покажем сначала, что $\alpha_f \leqslant \vartheta$. Мы рассмотрим случай компактного носителя $\operatorname{supp} f \subset [0, N]$ (читатель без труда обобщит доказательство на случай произвольного $f \in L(\mathbb{R})$). Фиксируем ξ такое, что $|\xi| \geqslant 1$ и положим $h = \dfrac{1}{2\pi(|\xi|+1)}$. Имеем

$$e^{-2\pi ih\xi}\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi ih\xi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx\,;$$

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi ih\xi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+h)e^{-2\pi ix\xi}\,dx.$$

Вычитая второе неравенство из первого, имеем

$$(e^{-2\pi ih\xi}-1)\widehat{f}(\xi)=e^{-2\pi ih\xi}\int\limits_0^N\big(f(x)-f(x+h)\big)e^{-2\pi ix\xi}\,dx$$

Модуль подынтегрального выражения не превосходит Ch^α, где $\alpha < < \alpha_f$, а длина отрезка интегрирования не превосходит $N+h\leqslant N+1$. Следовательно, интеграл не превосходит $C(N+1)h^\alpha$. Так как $|2\pi h\xi|\geqslant \geqslant \frac{1}{2}$, то $|e^{-2\pi ih\xi}-1|\geqslant C_0>0$ (абсолютная константа). Таким образом,

$$|\widehat{f}(\xi)|\leqslant\frac{C}{C_0}\,C(N+1)h^\alpha.$$

Заметив, что $h=\dfrac{1}{2\pi(|\xi|+1)}$, получаем требуемое.

Покажем теперь, что $\alpha_f+1\geqslant\vartheta$. Если $\vartheta\leqslant 1$, то доказывать нечего, считаем, что $\vartheta>1$. Для произвольного $\beta\in(1,\vartheta)$ нужно показать, что $\alpha_f\geqslant\beta-1$. Имеем

$$|f(x+h)-f(x)|=\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}(e^{2\pi ih\xi}-1)\,d\xi\right|\leqslant\left|\int\limits_{|\xi|\leqslant h^{-1}-1}\right|+\left|\int\limits_{|\xi|>h^{-1}-1}\right|$$

(считаем, что $h\in(0,1)$). Первый интеграл оценивается сверху как

$$\int\limits_{|\xi|\leqslant h^{-1}-1}C(1+|\xi|)^{-\beta}|h\xi|\,d\xi\leqslant Ch\int\limits_{|\xi|\leqslant h^{-1}-1}(1+|\xi|)^{1-\beta}\,d\xi=$$

$$=\frac{2C}{2-\beta}h(h^{\beta-2}-1)\leqslant\frac{2C}{2-\beta}h^{\beta-1}.$$

Оцениваем второй интеграл. Учитывая, что $|e^{2\pi ix\xi}(e^{2\pi ih\xi}-1)|\leqslant 2$, получаем

$$\left|\int\limits_{|\xi|>h^{-1}-1}\right|\leqslant 2\int\limits_{|\xi|>h^{-1}-1}|\widehat{f}(\xi)|\,d\xi\leqslant 2\int\limits_{|\xi|>h^{-1}-1}C(1+|\xi|)^{-\beta}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2C}{1-\beta}\,h^{\beta-1}.$$

Складывая две оценки, получаем $|f(x+h)-f(x)|\leqslant Ch^{\beta-1}$, что и требовалось. ◊

Подробное рассмотрение вопроса о связи скорости убывания преобразования Фурье функции с ее гладкостью в различных пространствах можно найти, например, в [14].

Дадим теперь характеристику функций с финитным преобразованием Фурье. Она связана с теорией целых функций экспоненциального типа, т. е. функций f, аналитических на всей комплексной плоскости и таких, что

$$f(z) = O(e^{a|z|}), \quad |z| \longrightarrow \infty,$$

при некотором положительном a. Нижняя грань σ всех таких a называется типом f.

Теорема А.7.2 (теорема Пэли–Винера). *Пусть $\sigma > 0$. Имеем*

$$f(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} g(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi$$

для некоторой $g \in L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда f принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и может быть распространена на комплексную плоскость как целая функция экспоненциального типа σ. В частности, функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ является целой функцией экспоненциального типа тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье финитно.

Доказательство этой теоремы можно прочитать, например, в книге [14, гл. 16, § 7].

А.8. Теорема Винера для L_2

Пространство $X \in L_2(\mathbb{R}^d)$ называется инвариантным относительно сдвигов, если $f(\,\cdot + t) \in X$ для всех $f \in X$ и для всех $t \in \mathbb{R}^d$.

Если $X \subset L_2(\mathbb{R}^d)$, то через $\widehat{X}$ мы будем обозначать множество преобразований Фурье всех функций из X.

Теорема А.8.1. *Подпространство X пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ инвариантно относительно сдвигов тогда и только тогда, когда $\widehat{X} = L_2(\Omega)$ для некоторого измеримого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Пусть $X = L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f \in X$, $f_t := f(\,\cdot + t)$, тогда $\widehat{f_t} = \widehat{f} e_t$, где $e_t(x) := e^{2\pi i (x,t)}$, что влечет $\widehat{f_t} \in L_2(\Omega)$, а по определению $\widehat{X}$ это означает, что $f_t \in X$, т. е. пространство X инвариантно относительно сдвигов.

Пусть теперь дано, что X инвариантно относительно сдвигов, тогда $\widehat{X}$ инвариантно относительно умножения на функции e_t, $t \in \mathbb{R}^d$. Обозначим через P ортогональный проектор на $\widehat{X}$. Для любых $f, g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и для любого $t \in \mathbb{R}^d$ выполнено $f - Pf \perp (Pg)\, e_t$, т. е. имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - Pf(x)) \overline{Pg(x)} e^{-2\pi i (x,t)}\, d\xi.$$

Отсюда, принимая во внимание, что функция $F := (f - Pf) Pg$ суммируема на $\mathbb{R}^d$, получаем $\widehat{F} \equiv 0$, что влечет $\|F\| = 0$. Таким образом,

$$(f - Pf)\overline{Pg} = 0 \quad \text{п. в.},$$

откуда, очевидно, следует

$$fPg = PfPg \quad \text{п. в.}$$

Правая часть этого равенства симметрична относительно функций f, g, значит, поменяв f и g ролями, получаем

$$fPg = gPf \quad \text{п. в.} \tag{А.10}$$

для любых $f, g \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Возьмем в качестве g любую положительную функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$ и положим $\varphi = Pg/g$. Из (А.10) имеем

$$Pf = \varphi f \quad \text{п. в.} \tag{А.11}$$

для всех $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$, что влечет

$$\varphi^2 f = \varphi P f = P^2 P = Pf = \varphi f.$$

Следовательно, $\varphi^2 = \varphi$ почти всюду, т. е. почти все значения функции φ либо 0, либо 1. Обозначим через Ω измеримое множество, на котором $\varphi = 1$ почти всюду. Если теперь $f \in \widehat{X}$, то $Pf = f$, и из (А.11) имеем

$$f = \varphi f \quad \text{п. в.} \tag{А.12}$$

Отсюда следует, что $f = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$, т. е. $f \in L_2(\Omega)$. Мы доказали включение $\widehat{X} \subset L_2(\Omega)$. Если $f \in L_2(\Omega)$, то имеет место (А.12), что вместе с (А.11) влечет $Pf = f$, т. е. $f \in \widehat{X}$, значит, $\widehat{X} \subset L_2(\Omega) \subset \widehat{X}$. $\Diamond$

Приведенное доказательство заимствовано из книги [13], где формулировка теоремы дана для одномерного случая.

А.9. Лебеговы множества

Классическая теорема Лебега гласит, что почти все точки являются точками Лебега локально суммируемой функции f, т. е. имеет место соотношение

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0, \quad \text{п. в.}$$

Для функций нескольких переменных под точкой Лебега обычно аналогично понимают точку $x \in \mathbb{R}^d$, для которой

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^d} \int_{[-h,h]^d} |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0,$$

и в этом смысле теорема Лебега также имеет место. Однако существуют и другие естественные способы обобщения точек Лебега (лебеговых множеств) на многомерный случай.

Пусть $\mathcal{T}$ обозначает множество невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^d$.

Определение А.9.1. Пусть $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{T}$, $j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}$, положим

$$I_j(f, x, T, h) = h^{-d} \int\limits_{-h}^{h} dt_d \prod_{l=1}^{d-1} 2^{j_l} \int\limits_{-2^{-j_l} h}^{2^{-j_l} h} dt_l \, |f(x) - f(x + Tt)| \,.$$

Для последовательности положительных чисел $A = \{A_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}}$ определим множества точек $A\mathcal{L}(f, T)$ и $A\mathcal{L}^*(f, T)$ (*обобщенные лебеговы множества*) следующим образом: точка $x \in \mathbb{T}^d$ принадлежит $A\mathcal{L}(f, T)$, если

$$\lim_{h \to 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j I_j(f, x, T, h) = 0, \tag{A.13}$$

$$\sup_{h > 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j I_j(f, x, T, h) < \infty; \tag{A.14}$$

точка $x \in \mathbb{T}^d$ принадлежит $A\mathcal{L}^*(f, T)$, если

$$\lim_{h \to 0} \sup_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j I_j(f, x, T, h) = 0, \tag{A.15}$$

$$\sup_{h > 0} \sup_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j I_j(f, x, T, h) < \infty. \tag{A.16}$$

Ясно, что $A\mathcal{L}(f, T) \subset A\mathcal{L}^*(f, T)$. Если $A_j = \prod\limits_{l=1}^{d-1} 2^{-j_l}$, то при любом T $A\mathcal{L}^*(f)$ есть множество обычных точек Лебега функций f. Если $A_j \equiv 1$, то $A\mathcal{L}^*(f)$ совпадает с множеством так называемых сильных точек Лебега функции f, введенных в [228], т. е. таких точек x, для которых

$$\lim_{h_1 \to 0, \ldots, h_d \to 0} \frac{1}{h_1 \ldots h_d} \int\limits_{-h_1}^{h_1} \ldots \int\limits_{-h_d}^{h_d} |f(x + t) - f(x)| \, dt = 0, \tag{A.17}$$

$$\sup_{h_1 > 0, \ldots, h_d > 0} \frac{1}{h_1 \ldots h_d} \int\limits_{-h_1}^{h_1} \ldots \int\limits_{-h_d}^{h_d} |f(x + t) - f(x)| \, dt < \infty. \tag{A.18}$$

Из результатов С. Сакса [230] (см. также [228, 229]) следует, что если $f \in L \log L(\mathbb{T}^d)$, то почти все точки являются сильными точками Лебега функции f, и что существуют суммируемые функции, у которых нет ни одной сильной точки Лебега.

Теорема А.9.2. *Пусть $A = \{A_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}}$ — монотонная последовательность положительных чисел такая, что*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j(1+|\log A_j|) < \infty.$$

Если $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $T \in \mathcal{T}$, то множество $A\mathcal{L}(f,T)$ имеет полную меру.

Доказательство этой теоремы основано на следующих утверждениях.

Лемма А.9.3. *Пусть $A = \{A_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}}$ — последовательность положительных чисел, $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j = 1$, $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j|\log A_j| = K$. Если заданные на $\mathbb{R}^d$ неотрицательные функции g_j, $j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}$, таковы, что $\mu\{x\colon\ g_j(x) \geqslant \xi\} \leqslant \xi^{-1}$, то*

$$\mu\biggl\{x\colon\ \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j g_j(x) \geqslant \xi\biggr\} \leqslant \frac{2(K+1)}{\xi}.$$

Доказательство этой леммы для $d = 2$ приведено в [18], оно же проходит и для произвольного d.

Лемма А.9.4. *Пусть W — d-мерный параллелепипед, $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $\xi > 0$,*

$$E(f,\xi) = \biggl\{x \in \mathbb{T}^d\colon\quad \sup_{h>0} \frac{1}{\mu(hW)} \int\limits_{hW} |f(x+t))|\,dt > \xi\biggr\}.$$

Тогда $\mu E(f,\xi) \leqslant K\xi^{-1}\|f\|_1$, где K — абсолютная постоянная.

Доказательство этого утверждения (в более общей формулировке) приведено в [18].

Доказательство теоремы А.9.2. Пусть H, G — множества точек $x \in \mathbb{T}^d$, для которых соответственно условия А.13, А.14 не выполнены. Нам нужно убедиться в том, что $\mu H \cup G = 0$.

Положим

$$\widetilde{I}_j(f,x,T,h) = h^{-d} \int\limits_{-h}^{h} dt_d \prod_{l=1}^{d-1} 2^{j_l} \int\limits_{-2^{-j_l}h}^{2^{-j_l}h} dt_l f\,(x+Tt)\,,$$

$$G_1 = \biggl\{x \in \mathbb{T}^d:\ \sup_{h>0} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j \widetilde{I}_j(|f|,x,T,h) = \infty\biggr\},$$

$$G_2 = \{x \in \mathbb{T}^d:\ \ f(x) = \infty\}.$$

Поскольку для каждого натурального n

$$G_1 \subset \{x \in \mathbb{T}^d\colon \quad \sup_{h>0} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j \widetilde{I}_j(|f|, x, T, h) > n\} = G_{n1},$$

по леммам A.9.3 и A.9.4 имеем

$$\mu G_1 \leqslant \mu G_{n1} \leqslant \frac{C}{n} \|f\|_1.$$

Таким образом, $\mu G_1 = 0$, отсюда, учитывая, что $G \subset G_1 \cup G_2$ и $\mu G_2 = 0$ для каждой $f \in L(\mathbb{T}^d)$, получаем $\mu G = 0$. Теперь покажем, что для почти всех $x \in \mathbb{T}^d$ имеет место равенство

$$\lim_{h\to 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j \left(\widetilde{I}_j(f, x, T, h) - f(x)\right) = 0. \tag{A.19}$$

Пусть E есть множество точек $x \in \mathbb{T}^d \setminus G$, для которых существуют ε_0 и $h_n \to 0$, $h_n' \to 0$ такие, что

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j \left|\widetilde{I}_j(f, x, T, h_n) - \widetilde{I}_j(f, x, T, h_n')\right| > \varepsilon_0.$$

Обозначим через $E_N = E_N(f)$ множество всех $x \in \mathbb{T}^d \setminus G$, для которых существуют последовательности $h_n \to 0$, $h_n' \to 0$ такие, что

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j \left|\widetilde{I}_j(f, x, T, h_n) - \widetilde{I}_j(f, x, T, h_n')\right| > 1/N.$$

Покажем, что $\mu E_N(f) = 0$ для любого N. Зададим $\varepsilon > 0$ и представим функцию f в виде $f = f_1 + f_2$, где f_1 — тригонометрический полином, $\|f_2\|_1 < \varepsilon$. Нетрудно видеть, что

$$E_N(f) \subset E_{2N}(f_2) \subset \left\{x \in \mathbb{T}^d\colon \quad \sup_{h>0} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j \widetilde{I}_j(|f|, x, T, h) > \frac{1}{4N}\right\} =$$

$$= F_N(f_2),$$

но, в силу лемм A.9.3 и A.9.4, $\mu F_N(f_2) \leqslant CN\|f_2\|_1 \leqslant CN\varepsilon$. Таким образом, $\mu E_N = 0$. Отсюда, поскольку $E \subset \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} E_N$, следует, что $\mu E = 0$. Если $x \notin E \cup G$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $n_0 > 0$ и $\delta > 0$ (не зависящие от x) такие, что

$$\left|\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^{d-1} \\ |j| \geqslant n_0}} A_j \left(\widetilde{I}_j(f, x, T, h) - f(x)\right)\right| < \varepsilon$$

для всех $h \in (0, \delta)$. С другой стороны, для любого фиксированного $j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}$ и почти всех x имеет место соотношение

$$\lim_{h\to 0} \widetilde{I}_j(f, x, T, h) = f(x).$$

Отсюда следует (А.19).

Пусть r — рациональное число, $D(r)$ — множество точек $x \in \mathbb{T}^d$, для которых

$$\lim_{h\to 0} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j h^{-d} \int\limits_{-h}^{h} dt_d \prod_{l=1}^{d-1} 2^{j_l} \int\limits_{-2^{-j_l}h}^{2^{-j_l}h} dt_l \left(|f(x+Tt) - r| - |f(x) - r|\right) \neq 0.$$

Применяя (А.19) к функции $|f(x) - r|$, имеем $\mu D(r) = 0$. Но тогда и множество $D = \bigcup_r D(r) \cup G_2$ имеет меру нуль. Для доказательства теоремы осталось проверить, что $H \subset D$. Пусть $x \notin D$, $\varepsilon > 0$, выберем такое рациональное j_0, что $|f(x) - j_0| < \varepsilon$. Поскольку $x \notin D(j_0)$, для достаточно малых h имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j I_j(f, x, T, h) \leqslant 2|f(x) - j_0| \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j \cdot h^{-d} \int\limits_{-h}^{h} dt_d \prod_{l=1}^{d-1} 2^{j_l} \int\limits_{-2^{-j_l}h}^{2^{-j_l}h} dt_l \left(|f(x+Tt) - j_0| - |f(x) - j_0|\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2|f(x) - j_0| \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j + \varepsilon \leqslant \left(2 \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j + 1\right)\varepsilon,$$

что влечет $x \notin H$. $\Diamond$

Теорема А.9.5. *Пусть $A = \{A_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}}$ — монотонная последовательность положительных чисел, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j < \infty$. Если $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $T \in \mathcal{T}$, то множество $A\mathcal{L}^*(f, T)$ имеет полную меру.*

Для доказательства этой теоремы следует повторить все рассуждения доказательства теоремы А.9.2, воспользовавшись при этом вместо леммы А.9.3 следующим очевидным утверждением.

Лемма А.9.6. *Пусть $A = \{A_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}}$ — последовательность положительных чисел, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j \leqslant K$. Если заданные на $\mathbb{R}^d$ функции*

$g_j \geqslant 0$, $j \in \mathbb{Z}_+^{d-1}$ *таковы, что* $\mu\{x\colon\ g_j(x) \geqslant \xi\} \leqslant \xi^{-1}$, *то*

$$\mu\left\{x\colon\ \sup_{j\in\mathbb{Z}_+^{d-1}} A_j g_j(x) \geqslant \xi\right\} \leqslant \frac{K}{\xi}.$$

А.10. Абсолютно непрерывные функции

Функция f называется *абсолютно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого набора дизъюнктных интервалов $(a_j, b_j) \subset [a, b]$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$, выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что каждая абсолютно непрерывная функция непрерывна, а каждая функция, имеющая ограниченную производную, абсолютно непрерывна.

Теорема А.10.1. *Каждая абсолютно непрерывная на* $[a, b]$ *функция дифференцируема почти всюду, ее производная* f' *суммируема на* $[a, b]$ *и*

$$\int\limits_x^y f'(t)\,dt = f(y) - f(x)$$

для всех $x, y \in [a, b]$.

Теорема А.10.2. *Функция* F, *заданная на* $[a, b]$, *абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда существует суммируемая на* $[a, b]$ *функция* f *такая, что*

$$F(x) = F(a) - \int\limits_a^x f(t)\,dt,$$

для всех $x \in [a, b]$.

Доказательства этих теорем приведены, например, в [20, гл. 9].

А.11. Неотрицательные тригонометрические полиномы, лемма Рисса

Для доказательства того, что неотрицательный тригонометрический полином всегда представим в виде квадрата модуля тригонометрического полинома (теорема А.11.3), охарактеризуем сначала все действительнозначные полиномы.

Лемма А.11.1. *Тригонометрический полином*

$$h(\xi) = \sum_{k=-N}^{N} h_k e^{-2\pi i k\xi} \tag{A.20}$$

является действительнозначным ($h(\xi) \in \mathbb{R}$ *для любого* $\xi \in \mathbb{R}$) *тогда и только тогда, когда* $h_{-k} = \overline{h_k}$ *для всех* k.

Для доказательства достаточно сравнить коэффициенты полиномов $h(\xi)$ и $\overline{h(\xi)}$ при одинаковых степенях. $\Diamond$

Замечание А.11.2. Формулировка леммы А.11.1 не ограничивает общности, так как любой тригонометрический полином представим в виде (А.20), при этом допускается, что один из крайних коэффициентов h_N или h_{-N} может быть равен нулю.

Теорема А.11.3 (лемма Рисса). *Для любого неотрицательного тригонометрического полинома* $h(\xi) = \sum\limits_{-N}^{N} h_k e^{-2\pi i k\xi}$ *существует тригонометрический полином* $m_0(\xi)$ *такой, что* $|m_0(\xi)|^2 = h(\xi)$. *Если, к тому же, коэффициенты полинома* h *действительны, то он имеет вид*

$$h(\xi) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos 2\pi i k\xi, \qquad a_k \in \mathbb{R},$$

а полином m_0 *может быть выбран таким образом, чтобы он также имел действительные коэффициенты.*

Доказательство. Положим

$$\mathbf{h}(z) = \sum_{k=-N}^{N} h_k z^k.$$

Таким образом, $h(\xi) = \mathbf{h}(e^{-2\pi i\xi})$. Если h — неотрицательный полином, то $h_{-k} = \overline{h_k}$ (лемма А.11.1). Следовательно, $\mathbf{h}(1/\bar{z}) = \overline{\mathbf{h}(z)}$. Поэтому множество корней уравнения $\mathbf{h}(z) = 0$ симметрично относительно инверсии (замены $z \to 1/\bar{z}$). Выделяя корни, лежащие на единичной окружности, а остальные корни разбив на пары, получаем

$$\mathbf{h}(z) = az^{-N} \prod_{l=1}^{q} (z - e^{-2\pi i\alpha_l}) \prod_{k=1}^{p} \big(z - z_k\big)\big(z - (\overline{z_k})^{-1}\big), \tag{A.21}$$

где $q + 2p = 2N$ и α_k — корни полинома h на периоде. Поскольку $h \geqslant 0$, каждый такой корень имеет четную кратность. Значит, $q = 2r$ и

$$\prod_{l=1}^{q} (z - e^{-2\pi i\alpha_l}) = \prod_{l=1}^{r} (z - e^{-2\pi i\alpha_l})^2.$$

Равенство (A.21) теперь принимает вид

$$\mathbf{h}(z) = b\prod_{l=1}^{r}\bigl(z - e^{-2\pi i\alpha_l}\bigr)\bigl(z^{-1} - e^{2\pi i\alpha_l}\bigr)\prod_{k=1}^{p}\bigl(z - z_k\bigr)\bigl(z^{-1} - \overline{z_k}\bigr),$$

где $r + p = N$. Так как оба произведения положительны при всех $z = e^{-2\pi i\xi}$, то b — действительное положительное число. Остается положить

$$\mathbf{m}_0(z) = \sqrt{b}\prod_{l=1}^{r}\bigl(z - e^{-2\pi i\alpha_l}\bigr)\prod_{k=1}^{p}\bigl(z - z_k\bigr).$$

Таким образом, множество корней $\mathbf{h}$ можно разбить на два взаимно инверсных множества A и $1/\overline{A}$. Каждому такому разбиению соответствует свой полином $\mathbf{m}_0(z) = \sqrt{b}\prod\limits_{z_k\in A}^{N}\bigl(z - z_k\bigr)$.

Если все коэффициенты h_k действительные, то множество корней $\mathbf{h}(z)$ симметрично относительно действительной оси. Поэтому множество A также можно взять симметричным относительно действительной оси. В этом случае коэффициенты полинома m_0 будут действительными. $\Diamond$

Множество интересных фактов и задач о неотрицательных тригонометрических полиномах можно найти в [14, 25].

A.12. Теорема Энестрёма, Какея о нулях многочленов

Теорема A.12.1 [24, с. 114, проблема 23]. *Если все коэффициенты a_i, $i = 0, \ldots, n$, полинома $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ положительны, то его нули лежат в круговом кольце $\alpha \leqslant |z| \leqslant \beta$, где α — наименьшее, а β — наибольшее из чисел $\dfrac{a_{i+1}}{a_i}$, $i = 0, \ldots, n-1$.*

A.13. Пространства Соболева

Через W_p^s ($s \in \mathbb{Z}$, $s \geqslant 0$, $p \in [1, +\infty]$) обозначаем пространство Соболева, состоящее из функций на $\mathbb{R}$, имеющих r-ю производную, которая принадлежит L_p. Для произвольного $s > 0$

$$W_2^s(\mathbb{R}) := \{f\colon \quad \|f\|_{W_2^s}: \; = \|F^{-1}\left((1 + |\cdot|^2)^{s/2} F f\right)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty\}.$$

Для целых s два определения совпадают.

Теорема A.13.1 [41, с.106]. *Для $r > 0$ норма функции f в W_2^r эквивалентна величине*

$$\inf_{\{\varepsilon_j\}}\Bigl(\sum_{j=0}^{+\infty}\varepsilon_j^2\Bigr)^{1/2}, \tag{A.22}$$

где infimum берется по всем последовательностям положительных чисел $\{\varepsilon_j\}_{j\geqslant 0}$, *таким, что для некоторого целого* $m > r$ *существует последовательность функций* $\{f_j\}_{j\geqslant 0}$ *в* W_2^m, *удовлетворяющая условиям*:

$$f = \sum_j f_j, \quad \left\| \left(\frac{d}{dx}\right)^m f_j \right\|_2 \leqslant \varepsilon_j 2^{(m-r)j}, \quad \|f_j\|_2 \leqslant \varepsilon_j 2^{-rj}. \tag{A.23}$$

А.14. Модули непрерывности

Пусть $X = L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$, или $X = C(\mathbb{T})$ (при $p = \infty$). *Модулем непрерывности* функции $f \in X$ порядка $r \in \mathbb{N}$ называется заданная на $[0, +\infty)$ функция

$$\omega_r(f,h)_p = \omega_r(f,h) = \omega_r(h) := \sup_{|t|\leqslant h} \|\Delta_t^r f\|_p,$$

где $\Delta_t^r = \sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f(x + (r-2k)t)$. Удобно дополнить это определение, положив

$$\omega_0(f,h)_p := \|f\|_p.$$

Модули непрерывности обладают следующими свойствами:

М1. Функция ω_r монотонно возрастает на $[0, +\infty)$ и $\omega_r(0) = 0$.

М2. Функция ω_r равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

М3. $\omega_{r+s}(f,h) \leqslant 2^r \omega_s(f,h)$ для всех $s, r \in \mathbb{Z}_+$.

М4. $\omega_r(nh) \leqslant n^r \omega_r(h)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

М5. $\omega_r(\lambda h) \leqslant (\lambda+1)^r \omega_r(h)$ для любого $\lambda > 0$.

М6. Если функция f имеет абсолютно непрерывную производную порядка $(r-1)$ на $\mathbb{R}$ и $f^{(r)} \in X$,

$$\omega_{r+s}(f,h) \leqslant h^r \omega_s(f^{(r)}, h),$$

то для любого $s \in \mathbb{Z}_+$.

М7. $\omega_r(f+g) \leqslant \omega_r(f) + \omega_r(g)$ для всех $f, g \in X$.

Несложные доказательства этих свойств можно найти в любой книге по теории приближений, например, в [19, п. 3.3].

А.15. Приближение тригонометрическими полиномами

Теорема А.15.1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, T — *тригонометрический полином порядка* N. *Для любого* $h \in (0, \pi/2N)$ *выполняется неравенство*

$$\|T^{(r)}\|_p \leqslant \left(\frac{N}{\sin Nh}\right)^r \|\Delta_h^r T\|_p. \tag{A.24}$$

Доказательство этой теоремы приведено в книге [19, с. 228, 230].

Неравенство (А.24) обобщает классическое неравенство Бернштейна
$$\|T^{(r)}\|_p \leqslant N^r \|T\|_p,$$
которое мгновенно следует из (А.24), если взять $h = \pi/2N$.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, наилучшим (тригонометрическим) приближением порядка N функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ при $p = \infty$) называется величина
$$\mathcal{E}_N(f)_p = \inf \|f - T\|_p,$$
где нижняя грань берется по всем тригонометрическим полиномам порядка N.

Теорема А.15.2 (теорема Джексона). *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Существует постоянная A, зависящая только от p, такая, что для любых натуральных N, r и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ при $p = \infty$) выполняется неравенство*
$$\mathcal{E}_N(f)_p \leqslant A\omega_r\left(f, \frac{1}{N}\right)_p.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в любой книге по теории приближения, например, в [19, п. 5.1.32]. Утверждения такого типа называют прямыми теоремами теории приближения.

Наилучшее приближение нелинейно. Линейными операторами, приближающими произвольную функцию так же (по порядку), как наилучшие приближения, являются средние Валле Пуссена:
$$v_N(f, x) := \sum_{|k|<N} \widehat{f}(k) e^{2\pi ikx} + \sum_{N \leqslant |k| \leqslant 2N} \frac{2N - k}{N} \widehat{f}(k) e^{2\pi ikx}.$$
Из очевидного равенства $v_N(f) = 2\sigma_{2N}(f) - \sigma_N(f)$, где σ_N — средние Фейера, вытекает, что $\|v_N\| \leqslant 3$ (так как $\|\sigma_N\| \leqslant 1$, что следует, например, из теоремы А.16.1). Отсюда и из теоремы А.15.2, приняв во внимание, что $v_N(T) = T$ для любого тригонометрического полинома порядка не выше N, нетрудно получить оценку
$$\|f - v_N(f)\|_p \leqslant 4A\omega_r\left(f, \frac{1}{N}\right)_p. \tag{А.25}$$

Теорема А.15.3. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Существует постоянная B, зависящая только от p, такая, что для любых натуральных N, r и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ при $p = \infty$) выполняется неравенство*
$$\omega_m(f, h)_p \leqslant Bh^m \sum_{0 \leqslant l \leqslant h^{-1}} (l + 1)^{m-1} \mathcal{E}_l(f)_p$$

для всех $h > 0$ *и* $f \in L_p(\mathbb{T})$ ($f \in C(\mathbb{T})$ *при* $p = \infty$). *Кроме того, если*

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{m-1}\mathcal{E}_l(f)_p < \infty,$$

то функция f *имеет производную порядка* m *почти всюду (в каждой точке при* $p = \infty$), $f^{(m)} \in L_p(\mathbb{T})$ ($f^{(m)} \in C(\mathbb{T})$ *при* $p = \infty$), *и имеет место неравенство*

$$\mathcal{E}_n(f^{(m)})_p \leqslant C \sum_{l=[n/2]}^{\infty} (l+1)^{m-1}\mathcal{E}_l(f)_p,$$

где постоянная C *зависит только от* p *и* m.

Доказательство этой теоремы приведено в книге [19, пп. 6.1.1, 6.1.3].

Утверждения типа теоремы А.15.3 называют обратными теоремами теории приближения.

А.16. Многомерные средние Фейера

Средние Фейера обобщаются на многомерный случай различными способами. Мы рассмотрим суммы Фейера $\sigma_K(f)$, где

$$K = K(n) := \{x \in \mathbb{R}^d\colon \quad |x_l| \leqslant n, l = 1, \ldots, d\},$$

являющиеся средними арифметическими частичных сумм Фурье функции f по прямоугольникам с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям, содержащимся в K. Нетрудно проверить, что

$$\sigma_K(f, x) = \int\limits_{[1/2,1/2]^d} f(x+t)\prod_{l=1}^{d}\Phi(t_l)\,dt,$$

где

$$\Phi(\tau) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{2\pi i(k,\tau)} = \frac{\sin^2 \pi n\tau}{n\sin^2 \pi\tau}. \tag{А.26}$$

Т е о р е м а А.16.1. *Пусть* $X = C(\mathbb{T}^d)$ *или* $X = L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, $f \in X$, *тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_{K(n)}(f)\| = 0.$$

Доказательство. Операторы σ_K, сопоставляющие каждой функции $f \in X$ ее сумму Фейера $\sigma_K(f)$, действуют из X в X, причем из (А.26) и ортогональности тригонометрической системы следует

$$\|\sigma_K\|_{X\to X} \leqslant \int\limits_{[1/2,1/2}^{d} \left|\prod_{l=1}^{d} \Phi(t_l)\right| \, dt =$$

$$= \prod_{l=1}^{d} \int\limits_{-1/2}^{1/2} |\Phi(t_l)| \, dt_l = \prod_{l=1}^{d} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \Phi(t_l) \, dt_l = 1. \quad \text{(А.27)}$$

Если f — тригонометрический полином, то, очевидно,

$$\|f - \sigma_{K(n)}(f)\|_X \leqslant \|f - \sigma_{K(n)}(f)\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда и из (А.27) по теоремы Банаха–Штейнгауза получаем требуемое утверждение. $\Diamond$

Более подробно поведение такого рода средних изучается, например, в [14, гл. 17, § 1].

А.17. Самоподобные множества

Среди множества определений понятия фрактала наиболее распространено следующее, данное Хачинсоном в [140].

Определение А.17.1. Дано полное метрическое пространство X с расстоянием $r(\cdot, \cdot)$ и несколько отображений $A_j : X \to X$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, m$. Компактное множества $K \subset X$ называется *фракталом*, или *самоподобным множеством данных операторов*, если

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} A_j K. \quad \text{(А.28)}$$

Отображение $A \colon X \to X$ называется *сжимающим*, если существует константа $q < 1$ такая, что $r(Ax, Ay) \leqslant q\, r(x, y)$ для всех $x, y \in X$.

Теорема А.17.2. *Если все операторы $A_1, \ldots, A_m$ сжимающие, то они имеют единственный фрактал.*

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений.

Лемма А.17.3. *Сжимающее отображение полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $r(Ax, Ay) \leqslant qr(x, y)$ для всех $x, y \in X$, $q < 1$. Для любой начальной точки $x_0 \in X$ рассмотрим последовательность $x_k = A^k x_0$. Для любых натуральных k, l имеем

$$r(x_k, x_{k+l}) \leqslant \sum_{j=0}^{l-1} r(x_{k+j+1}, x_{k+j}) \leqslant \sum_{j=0}^{l-1} q^{k+j} r(x_0, x_1) \leqslant r(x_0, x_1)\, \frac{q^k}{1-q}.$$

Таким образом, последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна, значит, она сходится к некоторому $x \in X$. Легко проверить, что $Ax = x$. Единственность неподвижной точки следует из сжимаемости отображения A. $\Diamond$

Доказательство теоремы А.17.2. Рассмотрим метрическое пространство $\mathcal{X}$, состоящее из всех компактным подмножеств пространства X. Оно не пусто, так как содержит все одноточечные множества пространства X. Расстояние между двумя элементами $Q, R \in \mathcal{X}$ определяется по Хаусдорфу:

$$r(Q, R) = \max\Big\{\sup_{x\in Q}\inf_{y\in R} r(x, y), \quad \sup_{y\in R}\inf_{x\in Q} r(x, y)\Big\}. \tag{А.29}$$

Определим также отображение $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$

$$\mathcal{A}Q = \bigcup_{j=1}^{m} A_j Q. \tag{А.30}$$

Так как отображения A_j сжимающие, то отображение $\mathcal{A}$ корректно определено на $\mathcal{X}$ и сжимающее с той же константой q (доказательство оставляем читателю). По лемме это А.17.3 отображение имеет единственную неподвижную точку, что и требовалось доказать. $\Diamond$

Благодаря своей общности определение А.17.1 включает множество фрактальных и самоподобных объектов и применяется в различных областях математики. Его недостатком является, в некотором смысле, чрезмерная общность. Так, например, согласно этому определению отрезок прямой является фракталом. Треугольник и квадрат также являются фракталами. Читатель без труда найдет соответствующие наборы сжимающих операторов для каждой из этих фигур.

Аффинным фракталом называется компактное подмножество K аффинного пространства, для которого существует набор сжимающих аффинных операторов $A_1, \ldots, A_m$, удовлетворяющий (А.28).

Упражнение А.17.4. Покажите, что любой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$ является аффинным фракталом. Верно ли это для невыпуклых многогранников?

Упражнение А.17.5. Приведите пример компактного подмножества на прямой, не являющегося фракталом.

Упражнение А.17.6. Является ли круг на евклидовой плоскости фракталом? Аффинным фракталом?

Упражнение А.17.7. Пусть $K \subset X$ — фрактал, соответствующий сжимающим операторам $A_1, \ldots, A_m$. Докажите, что для любого компакта $K_0 \subset X$ имеем

$$r(\mathcal{A}^n K_0, K) \to 0, \quad n \to \infty,$$

где отображение $\mathcal{A}$ определено в (А.30), а предел берется в Хаусдорфовой метрике (А.29).

Существует обширная литература о теории фракталов и самоподобных множеств. Можно рекомендовать читателю, например, книги [30, 31].

А.18. Разностные уравнения

Разностным уравнением называется уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_{k+j} = b_j, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{А.31}$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — данные комплексные числа, причем $a_0 a_n \neq 0$, $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — данная числовая последовательность, а $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — неизвестная последовательность. Каждому разностному уравнению соответствует однородное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_{k+j} = 0, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{А.32}$$

Разность любых двух решений уравнения (А.31) удовлетворяет однородному уравнению (А.32). Поэтому все решения разностного уравнения (А.31) имеют вид

$$x = x^{\mathrm{par}} + x^{\mathrm{hom}}, \tag{А.33}$$

где x^{par} — некоторое частное решение уравнения, а x^{hom} — произвольное решение соответствующего однородного уравнения. Ясно, что множество всех решений однородного уравнения образует линейное пространство. Размерность этого пространства равна n. В самом деле, каждое решение уравнения (А.32) однозначно определяется n своими коэффициентами $x_0, \ldots, x_{n-1}$ (последовательно применяя (А.32), находим все x_k при $k \geqslant n$ и $k \leqslant -1$), причем эти коэффициенты можно выбрать произвольно. Для описания пространства решений нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма А.18.1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ — данные ненулевые комплексные числа, а $r_1, \ldots, r_q$ — данные натуральные числа, $\sum\limits_{j=1}^{q} r_j = n+1$. Рассмотрим $n+1$ вектор $v_{j,s}$, $j = 1, \ldots, q$; $s = 0, \ldots, r_j - 1$, заданный покоординатно следующим образом*:

$$v_{j,s}^k = k^s \lambda_j^k, \tag{А.34}$$

где $k = 0, \ldots, n$ (*здесь мы полагаем* $0^0 = 1$). *Эти векторы линейно зависимы тогда и только тогда когда среди чисел* $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ *есть равные.*

Доказательство. Если $\lambda_i = \lambda_j$, то $v_{i,0} = v_{j,0}$, т. е. среди векторов $v_{j,s}$ есть равные, значит, они линейно зависимы. Обратно, если векторы линейно зависимы, то найдется ненулевой вектор $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, ортогональный всем векторам $v_{j,s}$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n} p_k k^s \lambda_j^k = 0$$

для всех $j = 1, \ldots, q$, $s = 0, \ldots, r_j - 1$. Следовательно, полином $P(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k$ имеет в точках λ_j нули кратностей не менее r_j. Последнее невозможно, поскольку $\sum_j r_j = n + 1$, а степень полинома равна n. $\Diamond$

Замечание А.18.2. Если все r_j равны 0, т. е. $q = n + 1$, то векторы $v_1, \ldots, v_{n+1}$ (где $v_j = v_{j,0}$) составляют $(n + 1) \times (n + 1)$-матрицу $A_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}}$, определитель которой равен классическому определителю Вандермонда:

$$\det A_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Ясно, что этот определитель равен нулю только тогда, когда среди чисел λ_j есть равные. В общем случае определитель матрицы, составленной из векторов $v_{j,s}$ называют обобщенным определителем Вандермонда.

Вернемся к разностным уравнениям. Многочлен

$$\chi_a(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

называется характеристическим многочленом уравнения (А.31), или уравнения (А.32).

Предложение А.18.3. *Пусть характеристический многочлен уравнения имеет корни* $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ *кратностей* $r_1, \ldots, r_q$ *соответственно. Тогда* $n + 1$ *последовательность* $v_{j,s} = \{v_{j,s}^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, *данная формулой* (А.34), *составляет базис пространства решений однородного уравнения.*

Доказательство. Прямой подстановкой убеждаемся, что все последовательности $v_{j,s}$ подходят в однородное уравнение (А.32). Согласно лемме А.18.1 эти последовательности линейно независимы, поэтому размерность их линейной оболочки равна $n + 1$, следовательно, они составляют базис пространства решений. $\Diamond$

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено последовательным применением формулы (А.31): выбрав произвольно коэффициенты $x_0, \ldots, x_{n-1}$, последовательно находим остальные x_i. Если же правая часть уравнения имеет вид

$$b_j = j^d\, t^j,\ t \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{N},$$

то частное решение находится в виде

$$x_k^{par} = \begin{cases} p(k)\, t^k\,, & \chi_a(t) \neq 0 \\ k^r p(k)\, t^k\,, & t\text{— корень многочлена } \ \chi_a(z) \text{ кратности } r, \end{cases} \tag{A.35}$$

где p — некоторый многочлен степени не выше d. В заключение докажем еще одно полезное утверждение, которое характеризует ограниченные решения однородных разностных уравнений.

Предложение А.18.4. *Линейная комбинация* $g_k = \sum\limits_{j,s} f_{j,s} v_{j,s}$ *нескольких последовательностей вида* (А.34) *принадлежит* ℓ_∞ *тогда и только тогда, когда все* λ_j (*такие, что хотя бы один коэффициент* $f_{j,s}$ *не равен нулю*) *по модулю равны* 1, *и все показатели* s *равны* 0.

Доказательство. Обозначим через M максимальный из модулей величин $|\lambda_j|$. Предположим, что $M \geqslant 1$. Не ограничивая общности, считаем, что

$$|\lambda_j| = M, \quad \text{при} \quad j \leqslant m; \qquad |\lambda_j| < M, \quad \text{при} \quad j \geqslant m+1$$

для некоторого $l \geqslant 1$. Положим $\lambda_j = Me^{2\pi i \alpha_j}$. Обозначим также через S максимальный из показателей s при λ_j^k, $j \leqslant m$; пусть он достигается при $j \leqslant l$, где $l \leqslant m$. Тогда

$$g_k = k^S M^k \sum_{j \leqslant l} f_{j,S}\ e^{2\pi i k \alpha_j} \ + o(k^S M^k), \quad k \to +\infty. \tag{A.36}$$

Согласно лемме А.18.1 для некоторого $r \leqslant l$ сумма $\sum\limits_{j \leqslant l} f_{j,S}\ e^{2\pi i k \alpha_j}$ не обращается в нуль. Таким образом,

$$\left| \sum_{j \leqslant l} f_{j,S}\ e^{2\pi i r \alpha_j} \right| > \varepsilon \tag{A.37}$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Положим $\sum\limits_{j \leqslant l} |f_{j,S}| = A$. Далее, найдутся сколь угодно большие $t \in \mathbb{N}$, для которых

$$|e^{2\pi i t \alpha_j} - 1| < \varepsilon/2A, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Это доказывается по принципу Дирихле: среди $l^n + 1$ точек

$$(e^{2\pi i k \alpha_1}, \ldots, e^{2\pi i k \alpha_l}) \in \mathbb{T}^l, \quad k \leqslant l^n + 1,$$

найдутся две (пусть они соответствуют параметрам $k = k_n$ и $k = k'_n$), для которых

$$|e^{2\pi i k'_n \alpha_j} - e^{2\pi i k_n \alpha_j}| < 2\pi/n, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Тогда, взяв любое n, для которого $\frac{2\pi}{n} < \frac{\varepsilon}{2A}$, и положив $t_n = k'_n - k_n$, получаем требуемое. Подставив теперь в (А.37), получаем

$$\left|\sum_{j \leqslant l} f_{j,S}\; e^{2\pi i (r+t_n)\alpha_j}\right| > \varepsilon/2.$$

Следовательно, для таких k имеем

$$|g_k| \geqslant k^S M^k \varepsilon/3.$$

Поэтому, если последовательности g_k ограничена, то $M = 1$ и $S = 0$. Итак,

$$\max_{j=1,\ldots,q} |\lambda_j| \leqslant 1,$$

причем для всех j, для которых $|\lambda_j| = 1$, имеем $s = 0$. Точно так же, рассмотрев последовательность g_k при $k \to -\infty$, показываем, что $\min\limits_{j=1,\ldots,q} |\lambda_j| \geqslant 1$, причем для всех j, для которых $|\lambda_j| = 1$, имеем $s = 0$. Это завершает доказательство. $\Diamond$

Точно так же доказывается

С л е д с т в и е А.18.5. *Если все* λ_j *по модулю больше или равны* 1, *то никакая конечная линейная комбинация последовательностей вида* (А.34), *не может стремиться к нулю при* $k \to +\infty$.

Подробнее о теории разностных уравнений можно прочитать, например, в монографиях [27, 28].

А.19. Неравенство Ландау–Колмогорова

Для функций $f \in C^m[0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место следующий аналог известного неравенства Колмогорова:

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leqslant C \|f\|_\infty^{(1-k/m)} \|f^{(m)}\|_\infty^{k/m},$$

где $k = 1, \ldots, m$, C — постоянная, зависящая только от m и k (см. [21, с. 393]). При $m = 2$, $k = 1$ мы имеем классическое неравенство Ландау, в этом случае $C = 2$ является точной постоянной.

А.20. Многочлены Лежандра

Алгебраические многочлены $\mathcal{L}_n$, $n = 0, 1, \ldots$, где каждый многочлен $\mathcal{L}_n$ имеет степень n и положительный старший коэффициент, попарно ортогональные на $[-1, 1]$, называются многочленами Лежандра. Многочлены Лежандра образуют полную систему в пространстве $L_2[-1,1]$ (см., например, [22, гл. 1]), значит, и ортонормирванный базис в нем, разложения функций в ряд Фурье по этому базису называют рядами Фурье–Лежандра.

Для многочленов Лежандра справедливы следующие соотношения (см., например, [22, гл. 4]).

Для всех $x \in [-1,1]$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{L}_n(x)| \leqslant \mathcal{L}_n(1) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\,. \tag{A.38}$$

Формула Дирихле–Мелера:

$$\mathcal{L}_n(\cos\pi\theta) = \sqrt{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\tau\,d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi\theta}}, \quad \theta\in(0,1). \tag{A.39}$$

Уравнение Вольтерра второго рода:

$$(\sin\pi\theta)^{1/2}\mathcal{L}_n(\cos\pi\theta) = \lambda_n\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta-\frac{\pi}{4}\right) - \\ - \frac{\pi}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_\theta^{1/2}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi(t-\theta)}{4\sin^2\pi t}(\sin\pi t)^{1/2}\mathcal{L}_n(\cos\pi t)\,dt, \tag{A.40}$$

где $\theta\in(0,1)$,

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{A.41}$$

При тех же значениях θ и λ_n применение метода Лиувилля–Стеклова (см. [23, § 8.61]) дает асимптотические формулы:

$$(\sin\pi\theta)^{1/2}\mathcal{L}_n(\cos\pi\theta) = \lambda_n\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta-\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n\sin\pi\theta}\right), \tag{A.42}$$

$$(\sin\pi\theta)^{1/2}\mathcal{L}_n(\cos\pi\theta) = \lambda_n\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta-\frac{\pi}{4}\right) + \\ + \frac{\lambda_n}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\pi\theta + O\left(\frac{1}{n^2\sin^2\pi\theta}\right). \tag{A.43}$$

Из результатов работы [246] следует, что для любой непрерывной функции ее ряд Фурье–Лежандра суммируется по Чезаро, что означает равномерную ограниченность соответствующих функций Лебега сумм Фейера–Лежандра

$$\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_k(x)\mathcal{L}_k(t)\right|dt.$$

Приложение Б

ИСТОРИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ

Теория всплесков возникла на рубеже 80–90-х годов прошлого века. За 15 лет ее бурного развития написаны тысячи работ по темам, излагаемым в книге. Мы не приводим полный список этих публикаций, а лишь цитируем авторов существенных результатов, приведенных в книге, и их предшественников. Список цитируемых книг также не является полным, мы делаем акцент на математическую литературу, полностью или частично посвященную теории всплесков, и не ссылаемся на многочисленные книги более прикладного характера, в которых теория всплесков обсуждается в свете обработки сигналов и других инженерных приложений.

Глава 1

Понятие базиса в банаховом пространстве было введено Ю. Шаудером (подробнее историю вопроса о базисах и безусловных базисах см. в [17]). Понятие системы Рисса и теорема 1.1.2 принадлежат Н.К. Бари [48]. Процедура ортогонализации, описанная в теореме 1.1.14, была предложена Х. Швейнлером и Е. Вигнером [49].

Понятие КМА введено Й. Мейером [50] и С. Малла [51] и далее развито в работах [53–55]. В изложении построения КМА по масштабирующей функции мы в основном следуем книге И. Добеши [2, гл. 5]. Теорема 1.2.14 приводится без предположения $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, возможность отказаться от этого требования установлена Р. Лоренцем, В. Мадичем, А. Саакяном [57]. Теорема 1.2.10 доказана К. де Бором, Р. Девором, А. Роном [56].

Схема построения ортогонального базиса всплесков по порождающей его масштабирующей функции, изложенная в параграфе 1.3, впервые была реализована Й. Мейером [50] в конкретной ситуации. Общая конструкция была описана С. Малла [51]. Биортогональные базисы всплесков начали изучать П. Ошер [58] и Ч. Чуи, Дж. Вонг [59], в этих работах две дуальных системы всплесков строились на базе одного кратномасштабного анализа с ортогональными всплеск-пространствами. Мы излагаем другой подход, предложенный И. Добеши, А. Коэном, Дж. Фово [60] и кратко описанный в [2, гл. 8], при котором пара биортогональных систем всплесков порождаются парой КМА. Интерполяционные КМА впервые рассматривались Ч. Чуи, Дж. Вонгом [59].

Система Хаара, которая является первым ортогональным базисом всплесков, была построена в 1910 г. А. Хааром [62]. Первый базис, состоящий из сплайн-всплесков (он же является первой системой непрерывных всплесков) был найден Дж. Стрёмбергом [63] также до появления теории КМА и соответствующей терминологии. Эта система оказалось очень близкой к ортогональным сплайн-всплескам, найденным уже в рамках теории КМА с использованием B-сплайнов в качестве порождающей масштабирующей функции независимо Г. Баттлом [64] и П.-Г. Лемарье [65]. Как уже отмечалось, система всплесков Й. Мейера была построена в [50]. Равенство (1.69) часто приписывают В. А. Котельникову [67] или К. Шеннону [66]. На самом деле интерполяционная формула (1.69) была известна в математике еще до появления этих работ (Х. Блэк [43] утверждает, что, в частности, ее уже знал Коши), однако в [67] она впервые была применена для теории передачи непрерывных сообщений по каналу связи, и К. Шеннон также использовал ее для обработки сигналов.

Схемы пересчета коэффициентов, подобные описанным в параграфе 1.6 алгоритмам всплеск-разложения и всплеск-восстановления функций, давно использовались инженерами в области обработки сигналов и изображений. В рамках теории КМА алгоритм был разработан С. Малла [52], [53].

Исследовать сходимость всплеск-разложений первым начал Й. Мейер [4], он, в частности, установил сходимость в L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, для так называемых r-регулярных КМА, т. е. в предположении, что масштабирующая функция и r ее производных имеют на бесконечности порядок убывания выше, чем любой полиномиальный. Г. Вальтер [69], [70] доказал для непрерывных функций поточечную сходимость, также в предположении регулярности. С. Келли, М. Кон, Л. Рафаель [71] распространили эти результаты на более широкий класс КМА и доказали сходимость почти везде, их требования к масштабирующей функции фигурируют в теоремах 1.7.4–1.7.6. Теорема 1.7.7 приведена в работе Г. Баттла [72], однако, по мнению И. Добеши [2], этот факт был известен многим математикам и его можно считать «народной мудростью».

Понятие фрейма введено Р. Даффином и А. Шеффером [74], ими же установлены основополагающие факты теории фреймов, в частности, предложение 1.8.2 и следствия 1.8.5, 1.8.6. Теорема 1.8.4 доказана Б. С. Кашиным, Т. Куликовой [78]. Теорема 1.8.9 фактически была доказана А. Роном, З. Шеном в [105], хотя в их формулировке предполагалось, что целые сдвиги масштабирующей функции образуют бесселеву систему, что на самом деле следует из других предположений. Уточненная формулеровка теоремы вместе со следствием 1.8.10 принадлежит Петухову [77], который также дал новое доказательство. Близкие формулировки для полиномиальных масок независимо представлены Ч. Чуи, В. Хе [76]. Частный случай теоремы 1.8.9 — теорема 1.8.11 ранее была доказана У. Лоутонуом [78] (для полиномиальных масок) и М. Бовником [79] (для произвольных масок).

Глава 2

Конструкция многомерных всплесков посредством тензорного перемножения одномерных КМА фактически использовалась уже Дж. Стрёмбергом [63] для системы Хаара. Общая схема построения сепарабельных КМА довольно естественна и обсуждалась во многих статьях и книгах, см. [2, 4, 8]. Несепарабельные КМА с двоичными растяжениями (коэффициентом является диагональная матрица с двойками на диагонали) описаны в [4]. Для произвольной целочисленной матрицы (с естественными ограничениями) несепарвбельные КМА впервые рассматривались в работах [80–82]. Теорема 2.3.4 (с двоичным коэффициентом растяжения) доказана К. де Бором, Р. Девором, А. Роном [56].

Теорема 2.5.6 принадлежит А. Коэну [83], в его формулировке рассматривался одномерный двоичный ортогональный случай и предполагалось, что маска является тригонометрическим полиномом. На биортогональный случай этот результат перенесен И. Добеши, А. Коэном, Дж. Фово [60]. Многомерный аналог с матричным коэффициентом растяжения для масок специального вида и ортогонального случая доказан в книге [8], а для произвольных полиномиальных масок и биортогонального случая получен И. Е. Максименко [84]. Теорема 2.5.11 для одномерного ортогонального двоичного случая и полиномиальных масок доказана У. Лоутоном [85], распространена на многомерный ортогональный случай с матричным коэффициентом растяжения у. Лоутоном, С. Ли, З. Шеном [87], а на биортогональный — И. Е. Максименко [84].

Всплеск-функции в ортогональном двоичном случае впервые были построены К. Грёхенигом [89] для регулярных КМА. Р. Джиа, Ч. Митчелли [90, 91] установили существование набора всплеск-функций при более слабых ограничениях, но их доказательство не было конструктивным. К. Де Бор, Р. Девор, А. Рон [56] нашли конструктивное доказательство, но лишь в предположении, что функция $\widehat{\varphi}$ почти везде отлична от нуля. Общая схема построения ортогональных всплесков с двоичным сжатием описана Р. Джиа, З. Шеном в [92], а для произвольного коэффициента растяжения — П. Войтащиком [8, гл. 5]. В одномерном случае метод построения ортогональных и биортогональных всплесков с компактным носителем для произвольного целого коэффициента растяжения обсуждались У. Лоутоном, С. Ли, З. Шеном [94, 95], в частности, ими найден алгоритм достраивания строки лорановских полиномов до унитарной матрицы. Способ построения унимодулярной матрицы по данной первой строке с помощью алгоритма Евклида давно хорошо известен. Метод построения многомерных биортогональных всплесков с компактным носителем, основанный на использовании решения проблемы Серра, предложен Х. Джи, С. Рименшнайдером, З. Шеном [96–98].

Вопросы базисности и фреймовости систем всплесков активно изучались А. Роном, З. Шеном в работах [103–106], в частности, в них разработана техника для получения фреймовых оценок снизу — лемма 2.7.4. Наиболее общее достаточное условие для оценки сверху получено Б. Ханом [107], а его частный случай (удобный для использования при построении всплеск-функций) — лемма 2.7.3, ранее был найден Г. Вейсом [9], однако, как идейная сторона, так и техника доказательства этих условий были разработаны А. Коэном, И. Добеши [108], исследовавшим одномерные системы всплесков с двоичным сжатием и компактным носителем. Лемма 2.7.6 в более общей ситуации доказана Р. Джиа [109].

Многомерные КМА и всплески Хаара с матричным коэффициентом растяжения построены и изучены К. Грёхенигом, В. Мадичем [80].

Глава 3

Масштабирующие уравнения с конечным числом слагаемых стали интенсивно изучаться в конце 1980-х годов. К ним пришли практически одновременно и независимо в теории приближений и компьютерном дизайне (построение уточняющих алгоритмов приближения и интерполяции функций), и в теории всплесков (построение всплесков с компактным носителем. Предтечей теории масштабирующих уравнений можно считать работы Ж. де Рама, изучавшего предельные кривые алгоритма срезания углов [157–159]. Первый уточняющий алгоритм (связанный с алгоритмом де Рама) был исследован А. Чайкиным в работе [111]. В этом смысле, первой масштабирующей функцией можно считать функцию Чайкина (пример 3.5.3 главы 3). До этого функции, удовлетворяющие разностным уравнениям со сжатием аргумента появлялись в работах П. Ердеша при исследовании гладкости конволюций Бернулли [160, 161], В.Л и В. А. Рвачевых (функции Рвачева [162]), Г. А. Дерфеля [160] (в последней работе доказывалось существование и единственность обобщенных решений уравнений с неотрицательными коэффициентами и произвольными сдвигами и сжатиями).

Систематическое изучение масштабирующих уравнений и связанных с ними вопросов началось в пионерских работах С. Дюбука и Ж. Деларье [113, 114], Н. Дин и Д. Левина [112, 164], Ч. Мичелли и Х. Праутша [130]. В 1991 А. Каваретта, В. Дамен и Ч. Мичелли опубликовали подробную монографию [47], целиком посвященную масштабирующим уравнениям, которая (несмотря на множество работ в этой области) по сей день остается единственной монографией по теории масштабирующих уравнений.

В теорию всплесков масштабирующие уравнения вошли, начиная с книги И. Добеши [2], затем были подробно исследованы в ставших уже классическими работах И. Добеши и Дж. Лагариса [137, 165].

На сегодняшний день библиография по теории масштабирующих уравнений насчитывает сотни работ, мы не имеем возможности упомянуть большинство из них. Некоторые работы будут упомянуты ниже в связи с частными вопросами теории.

Существование и единственность финитного решения масштабирующего уравнения в пространстве обобщенных функций доказывалось различными методами во многих работах, в частности, в монографии [47] (где рассматривался сразу многомерный случай). В статье [137] было показано, что если решение принадлежит L_1, то оно имеет компактный носитель. В статье [114] было показано, что носитель сосредоточен на отрезке $[0, N]$. В данной книге мы применили новую схему доказательства, основанную на итерациях масштабирующего оператора, заодно установив, что итерации слабо сходятся к решению.

Условия Стрэнга–Фикса были впервые сформулированы в работе этих авторов [167], затем исследованы ими более подробно в монографии [33]. В теореме 3.2.1 мы собрали несколько утверждений об эквивалентности условий Стрэнга–Фикса различным свойствам финитных функций, доказанных в [47, 132, 166], и немного обобщили их. Критерий условий Стрэнга–Фикса для масштабирующих функций (теорема 3.2.10) был установлен В. Ю. Протасовым в [167], где был разработан общий подход к исследованию масштабирующих функций с помощью бинарных деревьев. Необходимость условий Стрэнга–Фикса для гладкости масштабирующих функций (теорема 3.2.3) была доказана в [47] для стабильных функций и в [167] в общем случае. Максимальная гладкость B-сплайнов среди всех масштабирующих функций с данной длиной носителя была доказана в [165].

Понятие порядка приближения сдвигами финитной функции и связь аппроксимационных свойств финитных функций с условиями Стрэнга–Фикса исследовались в работе Р. Джиа [168], затем детально изучались в работах К. де Бора, Р. Девора и А. Рона [169–171]. Во всех работах изучался порядок приближения в L_2. Параграф 3.3 нашей книги в основном составлен из результатов этих работ, обобщенных на линейные комбинации с произвольными последовательностями коэффициентов (не обязательно из L_2), а также в ряде случаев усиленными. Например, мы находим точную связь порядка приближения с модулем непрерывности приближаемой функции (для этого нам пришлось применить новую технику доказательства).

Условия линейной независимости и базисности Рисса (l_2-стабильности) целых сдвигов финитной функции формулировались многими авторами в различных терминах. Для l_2-стабильности отсутствие действительных периодических нулей у преобразования Фурье доказывалось в [6, 47, 172] и в ряде других работ. Р. Джиа и Дж. Вонг в [173] показали, что для финитных функций ℓ_p-стабильность при всех конечных p равносильна линейной независимости целых сдвигов над ℓ_{infty}. В [6] было описано пространство ограниченных последовательностей, свертка которых с данной нестабильной масштабирующей функцией равна нулю (ядро оператора свертки). Мы добавляем в эти утверждения критерий линейной независимости над пространством всех последовательностей ℓ (отсутствие комплексных периодических нулей, теорема 3.4.2) и явную форму ядра оператора свертки в пространстве всех последовательностей (формула (3.23)). Для этого применяется другой метод доказательства, основанный на разностных уравнениях. Для масштабирующих функций различные критерии стабильности в терминах маски уравнения были получены У. Лоутоном [174] и А. Коэном [175]. Критерий в терминах симметричных нулей и циклов маски (опять же, только для линейной независимости над ограниченными последовательностями), по-видимому, впервые получен А. Коэном [176], потом независимо переоткрыт Л. Виллемойсом [172], хотя близкие результаты можно также найти в [47, 177]. Необходимые условия гладкости стабильной масштабирующей функции (маска имеет нуль соответствующего порядка в точке $\xi = 1/2$) доказаны в [167]. Критерии ортонормированности целых сдвигов масштабирующих функций получены в работах [174, 176].

Глава 4

Построение ортогональных всплесков с компактным носителем было осуществлено И. Добеши в 1988 г. (см. перевод этой книги [2]). При этом привлекались результаты А. Коэна [175] (критерий ортогональности целых сдвигов) и С. Малла [178] (достаточность условия $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 \equiv 1$ для принадлежности масштабирующей функции пространству L_2). Отметим, что последний результат, в несколько другой форме, появлялся также в работе С. Дюбука и Ж. Деларье [114].

Параграф 4.3.1. Лемма 4.3.2 доказана в [197]. Теорема 4.3.3 получена в [199].

Параграф 4.3.2. Конструкция модифицированных всплесков Добеши принадлежит И. Я. Новикову [200]. Теорема 4.3.12 доказана в [201].

Параграф 4.4. Асимптотика нулей многочленов Бернштейна, соответствующих классическим всплескам Добеши, изучалась в [202–204, 255].

Теорема 4.4.5 и следствие 4.4.6 являются обобщениями теоремы 1 и равенства (14) из [202]. Доказательство леммы 4.4.8 основано на идеях статьи [205].

Глава 5

Классическое и наиболее распространенное на сегодняшний день определения фрактала (через набор сжимающих аффинных операторов) было дано Д. Хачинсоном в [140], где также доказана теорема о существовании и единственности фрактала у данного набора сжимающих операторов. Понятие фрактальной кривой пары аффинных операторов и теорема о том, что при выполнении перекрестного условия $B_0v_1 = B_1v_0$ фрактал является непрерывной кривой, принадлежит М. Барнсли [30], хотя многие авторы относят ее к де Раму [157–159]. Де Рам изучал частный случай (кривые, получающиеся в пределе из алгоритма срезания углов) и впервые ввел каноническую параметризацию фрактальных кривых. Фрактальные кривые, получающиеся в пределе из уточняющих алгоритмов (которые можно рассматривать как обобщение конструкции де Рама) детально изучались в работах [130, 153]. Там же были получены достаточные условия существования таких кривых и оценки снизу на их гладкость. Теория фрактальных кривых была применена для исследования масштабирующих уравнений И. Добеши и Дж. Лагарисом [137, 165], где впервые появилась формула, выражающая гладкость масштабирующих функций через совместный спектральный радиус, впоследствии уточненная Д. Коллелой и К. Хейлем [131, 132]. Обобщение этой формулы на произвольные фрактальные кривые, равно как и критерий существования непрерывной фрактальной кривой у данной пары операторов были впервые доказаны, по-видимому, в работе [85]. Результаты о модулях непрерывности фрактальных кривых в C и в L_p были получены В. Ю. Протасовым в [125]. К исследованию гладкости всплесков фрактальные кривые были впервые применены И. Добеши и Дж. Лагарисом [137, 165]. В тех же работах изучалась локальная гладкость масштабирующих функций, и в простых случаях (когда операторы одномерные) были получены явные формулы локальной гладкости в данной точки. Для произвольных фрактальных кривых и масштабирующих функций формула локальной гладкости была получена В. Ю. Протасовым [85], там же были исследованы множества точек данной локальной гладкости. Все остальные результаты о локальной гладкости, представленные в книге (средняя гладкость, минимальная и максимальная гладкость, 0–1-множества уровня и т. д.) являются новыми и ранее не публиковались. Подробные исследования локальной гладкости кривых де Рама можно найти в [120].

Глава 6

Очистка масштабирующих уравнений с линейно зависимыми целыми сдвигами разрабатывалась в книге Ч. Чуи [6], в работах Л. Берга и Г. Плонки [180, 181], Л. Виллемойса [172], В. Ю. Протасова [126, 167, 182]. Понятие чистой маски и доказательство теоремы о невырожденности и неприводимости соответствующих линейных операторов T_0, T_1 приведено в [55]. Там же описана структура инвариантных подпространств этих операторов для произвольной маски. Эти результаты позволили получить явный вид операторов T_0, T_1 на их наименьшее собственное подпространство W и вычислить модули непрерывности всплесков. Теоремы о факторизации гладких масштабирующих функций с ортогональными целыми сдвигами встречаются у многих авторов, например, в [2] или в [137, 165]. Нам не удалось выяснить их происхождение, не исключено, что это фольклор. Для произвольных масштабирующих функций они доказаны в [127].

Глава 7

Матричный метод исследования гладкости масштабирующих функций разрабатывался многими математиками, библиография насчитывает не менее ста работ. Выделим среди них работы И. Добеши и Дж. Лагариса [137, 165], Д. Коллелы и К. Хейля [131, 132], Н. Дин и Д. Левина [112, 164], Ч. Мичелли и Х. Праутча [130], О. Риуля [183]. Мы добавили результаты о модулях непрерывности всплесков и об их локальной гладкости, ранее в литературе не встречавшиеся. Случай $\deg m_c = 1$ (степень чистой маски) подробнейшим образом разобран в [165]. В случае $\deg m_c = 2$ показатель гладкости α_φ был впервые вычислен Л. Виллемойсом в [172], все остальные результаты, изложенные в книге, для этого случая являются новыми.

Совместный спектральный радиус впервые появился в небольшой работе Ж. К. Рота и Г. Стрэнга [184], затем почти на 30 лет был прочно забыт. Лишь в начале 90-х годов выяснилась его исключительная важность в теории всплесков, так как именно совместный спектральный радиус дает точный показатель Гёльдера. За последние 15 лет написано более 200 работ, посвященных изучению этого объекта и способов его вычисления. Краткий обзор Г. Стрэнга [143] содержит полторы страницы текста и 5 страниц библиографии! Свойства совместного спектрального радиуса изучались в работах [119, 129, 131, 133, 134, 141, 144–148].

Вычисление совместного спектрального радиуса для различных матриц встречается в работах [132, 137, 138] и др. Геометрический подход к этой проблеме разработан В. Ю. Протасовым в [115, 119]. Геометрический алгоритм приближенного вычисления совместного спектрального радиуса имеет полиномиальную сложность по величине $1/\varepsilon$, где ε — точность приближения. Алгоритм, полиномиальный по размерности построен независимо В. Ю. Протасовым [115], Д.-К. Жоу [117], В. Блонделем и Ю. Нестеровым [118]. Исследования последнего времени показывают, что добиться чего-то лучшего маловероятно. Так, не существует алгоритма приближенного вычисления совместного спектрального радиуса, который был бы полиномиальным и по $1/\varepsilon$, и по размерности. Это, в частности, означает, что совместный спектральный радиус не выражается в виде алгебраических функций от коэффициентов матриц [135, 136]. В. Блонделем, Д. Тейсом и А. Владимировым [134] построен пример двух 2×2-матриц, чей совместный спектральный радиус не равен обычному спектральному радиусу никакого их конечного произведения. С применениями совместного спектрального радиуса и его обобщений в теории всплесков, теории приближений, динамических системах, теории вероятностей, теории чисел и математической физике читатель может познакомиться в работах [120, 125, 126], [129–132, 137, 149–155].

Метод поточечной оценки убывания был разработан И. Добеши [2] и А. Коэном [175]. Метод оценки с помощью инвариантных циклов — А. Коэном [176]. Мы добавили утверждение о равенстве $\vartheta = \inf\limits_{b \in \mathcal{B}} \Theta_b$ (у Коэна было только неравенство $\leqslant$), и доказательство непрерывности показателя ϑ от коэффициентов чистой маски.

Глава 8

Понятие нестационарных всплесков было введено независимо в [206](в этой статье предлагался термин почти-всплески), [207] и в [56]. Приложения нестационарных фильтров для обработки сигналов рассмотрены в [216].

Рассмотренные в этой главе нестационарные масштабирующие последовательности можно рассматривать как модификацию up-функций, введенных В. Л. Рвачевым и В. А. Рвачевым. Функции up_j, определяемые в образах Фурье:

$$\widehat{up_j}(t) = \left(\frac{\sin \pi\xi 2^{-j}}{\pi\xi 2^{-j}}\right)^{T(j+1)} \prod_{N=j+2}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi\xi 2^{1-N}}{\pi\xi 2^{1-N}}\right)^{T(N)-T(N-1)},$$

для $T(N) = N$ изучены в [211, 212]. Соответствующий им нестационарный кратномасштабный анализ и нестационарные всплески исследованы в [213]. Общая теория масштабирующих функций, удовлетворяющих уравнению $\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(2t - s)\, d\mu(s)$ для некоторой борелевской меры μ, рассмотрена, например, в [214].

Глава 9

В книгах [2, 4] одномерные периодические всплески определяются как периодизированные всплески в $L_2(\mathbb{R})$, в предположении, что всплеск-функция и породившая ее масштабирующая функция имеют достаточно быстрое убывание на бесконечности. Ч. Чуи, Х. Маскар [217] построили периодические всплески, порожденные последовательностью ядер Дирихле (всплески Котельникова–Шеннона в нашей терминологии). Ч. Чуи, Дж. Вонг [218] дали асимптотическое определение ПКМА, в котором постулировалось существование масштабирующей последовательности. В. А. Желудев [219] изучал ПКМА сплайн-функций, для которых охарактеризовал масштабирующие последовательности и всплеск-функции в терминах коэффициентов Фурье. Развив его идеи, А. П. Петухов [220] определил ПКМА (не только в $L_2(\mathbb{R})$, но и в любом банаховом пространстве из достаточно широкого класса) в терминах операторов сдвига и растяжения и дал метод его построения и нахождения систем всплесков. Однако его определение не охватывало полиномиальных ПКМА, в частности периодизированных КМА Мейера. Наиболее общее определение ПКМА в пространствах L_p, $1 \leqslant p < \infty$, и C предложено М. А. Скопиной [221], в рамках которого была дана характеризация масштабирующих последовательностей и всплеск-функций, доказано их существование и описан метод построения. На многомерный случай с матричным коэффициентом растяжения эта теория распространена И. Е. Максименко, М. А. Скопиной [222]. Пакеты всплесков в непериодическом случае введены Р. Койфманом, Й. Мейером, В. Викерхаузером [224]. Периодические пакеты одномерных всплесков Й. Мейера изучались и использовались для построения оптимальных базисов Р. Лоренцом, А. Саакяном [242] (см. комментарии к гл. 11). Критерий порождаемости ПКМА непериодической функцией исследовался в [221]. Пример ПКМА, в котором ортогонализированная масштабирующая последовательность не может быть получена периодизацией в смысле главного значения (параграф 9.4), найден А. П. Петуховым [223].

Глава 10

Теоремы 10.2.2, 10.2.4, 10.2.6 доказаны М. А. Скопиной [225]. В непериодическом случае критерий сходимости сепарабельных всплеск-разложений в точках Лебега, аналогичный теореме 10.2.2, ранее быд получен С. Келли, М. Кон, Л. Рафаель [71]. Сильные точки Лебега введены Э. С. Белинским [228], им же разработана техника получения критериев суммируемости в этих точках, обеспечивающих сходимость соответствующих аппаратов приближения почти везде для широкого класса функций. Обобщенные лебеговы множества введены М. А. Скопиной [229].

Прямая аппроксимационная теорема типа теоремы Джексона для периодических всплесков Котельникова–Шеннона была приведена Ч. Чуи, Х. Маскаром [217]. И. Я. Новиков [226] доказал, что для всплесков Мейера имеет место неравенство Джексона с модулем непрерывности произвольного порядка (следствие 10.3.2 из теоремы 10.3.1). В общем случае теорема 10.3.1, а также обратные теоремы 10.3.5, 10.3.9 доказаны М. А. Скопиной [227]. Близкие исследования аппроксимационных свойств всплеск-разложений в непериодическом случае проводились Р. Джиа, Дж. Лейем, Е. Чени [231–233].

Результаты параграфа 10.4 получены М. А. Скопиной [227, 235]. Используемые классы $\mathcal{L}_{r,\alpha}(x_0)$ были введены А. Кальдероном, А. Зигмундом [234].

Глава 11

Безусловная базисность ортогональных систем всплесков в пространствах L_p, $1 < p < \infty$, в предположении, что всплеск-функция обладает определенной гладкостью, была доказана Й. Мейером [4]. Теорема 11.1, в которой не предполагается гладкостных свойств, а требуется лишь некоторый порядок убывания всплеск-функции, принадлежит П. Войтащику [236] [1]).

Вопрос существования полиномиальных базисов в пространстве непрерывных функций с минимально возможным ростом степеней полиномов (алгебраических или тригонометрических) активно исследовался многими математиками на протяжении сорока лет (см. [237]). Г. Фабер [238] доказал, что не существует последовательности алгебраических многочленов P_n степени n, образующих базис в $C[a, b]$. Ал. А. Привалов [240] усилил этот результат, показав, что степени многочленов P_n, образующих базис в $C[a, b]$, растут не быстрее, чем $n(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, а в [237] он установил окончательность этой оценки, построив пример полиномиального базиса с оптимальным ростом степеней. Аналогичные утверждения были доказаны и в тригонометрическом случае. Однако построенные Приваловым базисы не были ортогональными. Д. Оффин, К. Осколков [241] заметили, что периодические всплески Мейера образуют ортогональный базис, в котором степень полиномов лишь в два раза превышает минимальную. Заменив обычное всплеск-разложение на пакет всплесков, Р. Лоренц, А. Саакян [242] окончательно решили задачу для тригонометрических полиномов.

Оптимальные ортогональные базисы алгебраических многочленов были построены М. А. Скопиной [243, 246], и другая конструкция была независимо найдена К. Возняковским [245].

В работе [247] доказано, что, используя всплески Мейера, можно сконструировать безусловный базис в $L_p(\mathbb{R})$ при любых $p \in (1, \infty)$ а также в пространствах $B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p$, $q < \infty$ и $VMO(\mathbb{R}^n)$. В различных пространствах периодических функций системы всплесков, построенные с использованием ядер Дирихле и Фейера, изучались в работах [248–250, 255]. Некоторые замечания о периодических аналогах всплесков Мейера имеются в [251]. М. Фрезье и Б. Яверс исследовали свойства пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля с помощью

---

[1]) См. также *Wojtaszczyk P.*, *Figiel T.* Special bases in function spaces // In Book: Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. I, Chap. 14.– Elsevier Science, 2001.

неортогональных, но похожих по своим свойствам на всплески систем функций [252] (см. также [253, 254]).

Известно (см. [41, замечание 2.3.1/4] или [252]), что пространства $F^{\alpha}_{\infty q}$ требуют иного подхода. Соответствующее определение для $q \in \in (1, \infty]$ дано в [41, определение 2.3.4], для $q \in (0, \infty]$ — в [252].

Параграф 11.4. В работе [247] доказано, что, используя всплески Мейера, можно сконструировать безусловный базис в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, при $1 < p < \infty$, а также в $B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p$, $q < \infty$ и $VMO(\mathbb{R}^n)$. М. Фрезье и Б. Яверс исследовали свойства пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля с помощью неортогональных, но похожих по своим свойствам на всплески систем функций [252] (см. также [253, 254]).

Всплески Мейера–Давида описаны в [251], При $h = 1$ конструкция принадлежит И. Мейеру (см. 44), при $h > 1$ — Г. Давиду [251].

Анизотропные пространства Бесова и Лизоркина–Трибеля рассмотрены, например, в [41, гл. 10], [256].

Определения анизотропных пространств гладких функций в случае когда некоторые $s_\lambda = 0$ или s_λ имеют различные знаки, даны в [258]. Однако их описание в рамках метода декомпозиции, который используется здесь, неизвестно.

Определение изотропных пространств $F^{s_0}_{pq}$ можно посмотреть в [41, определение 2.3.1/2]. Известно (см. [41, замечание 2.3.1/4] или [252]), что определение пространств $F^{\alpha}_{\infty q}$ требуют иного подхода. Соответствующее определение для $q \in (1, \infty]$ дано в [41, определение 2.3.4], для $q \in (0, \infty]$ — в [252]. Последняя работа используется в качестве прототипа для введения анизотропных пространств $F^{(s)}_{\infty q}$.

Ниже указываются ссылки, где можно найти изотропные аналоги вспомогательных утверждений, используемых в этом параграфе: предложение 11.4.7 — [41, теорема 1.6.3]; предложение 11.4.8 — [41, предложение 2.3.2/1], [252]; предложение 11.4.9 — [252]; предложение 11.4.10 — [41, предложение 1.3.2 и замечание 1.3.2/1].

Предложение 11.4.14 легко следует из результатов работы [251].

Доказательства теорем 11.4.17, 11.4.18 и 11.4.19 в изотропной ситуации упрощаются; утверждения для изотропных пространств B совпадают с соответствующими результатами работы [247], а утверждения о базисности системы всплесков Мейера в изотропных пространствах F нигде не формулировались, хотя методы рассуждений работы [252] позволяют эти утверждения получить.

Утверждение, относящееся к ситуации двусторонних последовательностей и мультипликаторов в $S'(\mathbb{R}^n)/P(\mathbb{R}^n)$, соответствующее предложению 11.4.7 и используемое в в доказательстве теоремы 11.4.16, можно найти в [41, гл. 5].

Двойственность, используемая при доказательстве теоремы 11.4.19, в изотропной ситуации доказана в теореме 5.9 из [252]. Анизотропный вариант доказывается точно так же.

Функция Mf является анизотропным аналогом максимальной функции Харди–Литтлвуда. Неравенство (11.121) доказано в [260, 261].

Параграф 11.5. Та часть теории псевдодифференциальных операторов (ПДО), которая интенсивно развивалась в 60–80-е годы, носила преимущественно эллиптической характер. При этом основной шкалой пространств, на которой изучались такие ПДО, были шкалы пространств Соболева W_p^s, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ (см., например, [34–36]). Для исследования параболических задач (уже не в рамках теории ПДО) некоторые авторы использовали определенные модификации пространств W_p^s, которые предполагали наличие у функций смешанных производных в количестве, необходимом для того, чтобы оператор теплопроводности $D_h = \dfrac{\partial}{\partial x_1} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ можно было рассматривать как сумму операторов с хорошими резольвентными множествами [37]. Но в книге [38] использовалось более естественное для оператора D_h пространство, а именно, анизотропное пространство Соболева $W_2^{(1,2)}$ функций, у которых первая (по первой переменной) и вторая (по второй) обобщенные производные принадлежат L_2. Однако действие анизотропных дифференциальных операторов, а тем более анизотропных ПДО в пространствах $W_p^{(s_1,\ldots,s_n)} := W_p^{(s)}$, $1 < p < \infty$, нигде систематически не изучалось. Отметим лишь монографии [39, 40], где получены результаты, из которых можно вывести условия непрерывного действия в пространствах $B_{pq}^{(s)}$, $F_{pq}^{(s)}$ операторов дифференцирования и их сумм.

В последние годы возникли два подхода к изучению изотропных операторов Кальдерона–Зигмунда и изотропных ПДО в шкале пространств дифференцируемых функций. Один из них основан на идущих от Р. Койфмана и Ч. Феффермана идеях атомарного и молекулярного разложения. Атом — это финитная функция, оценивающаяся вместе со своими производными через меру носителя; молекула — это функция, которая вместе с несколькими своими производными достаточно быстро убывает на бесконечности. Для каждой функции из соответствующего пространства строится зависящее от нее нелинейно семейство атомов, в сумму которых она разлагается (теорема об атомарном разложении), затем доказывается, что образ атома при действии исследуемого оператора есть молекула, откуда с помощью теоремы о молекулярном разложении делается вывод о непрерывности оператора. Наиболее подробно эта схема реализована в [254] (см. также [252]); отметим, что атомарное разложение выступает в этой схеме как некоторый ослабленный аналог базисного.

Второй подход к изучению изотропных ПДО (см., например, [262], [263]) опирается на существование в L_p и пространствах Бесова безусловных базисов всплесков. Матрица $\langle \psi_R, T\psi_Q \rangle_{R,Q}$, где R, Q — диадические кубы, ψ_R, ψ_Q — соответствующие им всплески, T — ПДО, оказывается почти диагональной, что и обеспечивает непрерывность T. Именно эта идея исследуется нами в анизотропной ситуации. Изменения по сравнению с [262] состоят в том, что используется финитность образов Фурье элементов базиса и исследуются образы всплесков под действием T, исходя непосредственно из определения T — без традиционного перехода к интегральному оператору с ядром Шварца. Это позволяет не только упростить доказательства, но и ослабить условия на символ даже в изотропном случае.

Анизотропные ПДО в шкалах пространств $F_{pq}^{(s)}$ изучались в [264]; рассматриваемые там классы символов являются более узкими по сравнению с вводимыми здесь, что связано с использованием мультипликативной техники.

При $m = 0$ и $a_\lambda = 1$ (изотропный случай) теорема 11.5.3 доказана в [252]. Приводимое доказательство в целом аналогично доказательству из [252]; наиболее существенным отличием является использование максимальной функции по параллелепипедам.

Леммы 11.5.11 и 11.5.12 являются анизотропными аналогами лемм B.1 и B.2 из [252].

Вложение $B_{p1}^{(s)} \subset F_{pq}^{(s)}$, используемое в доказательстве теоремы 11.5.8, доказано, например, в [257]. О методе рассечений можно прочитать в [265]. Ограниченность операторов свертки с ядрами Дирихле в L_p, $1 < p < \infty$ показана в [39, с. 308])

Список литературы

КНИГИ

1. *Кашин Б.С.*, *Саакян А.А.* Ортогональные ряды.– М.: АФЦ. 1999.
2. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets // CBMS-NSR Series in Appl. Math.– SIAM, 1992.
3. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам.– Ижевск: НИЦ РХД, 2001. (Рус. пер. [2]).
4. *Meyer Y.* Ondelettes.– Paris: Herman, 1990.
5. *Meyer Y.* Wavelets and Operators.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. (Англ. пер. [4]).
6. *Chui C.K.* An Introduction to Wavelets.– N.Y.: Academic Press, 1992.
7. *Чуи К.* Введение в вэйвлеты.– М.: Мир, 2001. (Рус. пер. [6]).
8. *Wojtaszczyk P.* A Mathematical Introduction to Wavelets.– London Math. Soc. Student texts 37, 1997.
9. *Hernandes E.*, *Weis G.A.* A First Cours of Wavelets.– CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
10. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков.– С.-Пб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.
11. *Бердышев В.И.*, *Петрак Л.В.* Аппроксимация функций, сжатие числовой информации, приложения.– Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
12. *Садовничий В.А.* Теория операторов.– М.: Высшая школа, 1999.
13. *Rudin W.* Real and Complex Analysis.– N.Y.: McGraw-Hill, 1974.
14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2.– М: Мир, 1965.
15. *Стейн И.*, *Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.– М.: Мир, 1974.
16. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.– М.: Мир, 1973.
17. *Singer I.* Bases in Banach Spaces. I.– Berlin: Spriger-Verlag, 1970.
18. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в R^n.– М.: Мир, 1978.
19. *Тиман М.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.– М.: Физматгиз, 1960.
20. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной.– М.: Наука, 1974.
21. *Харди Г.Г.*, *Литтлвуд Д.Е.*, *Полиа Г.* Неравенства.– М.: ИЛ, 1948.
22. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены.– М.: Наука, 1976.
23. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены.– М.: Физматгиз, 1962.
24. *Полиа Г.*, *Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч.1.– М.: Наука, 1978.
25. *Полиа Г.*, *Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч.2.– М.: Наука, 1978.
26. *Шефер Г.* Топологические векторные пространства.– М.: Мир, 1971.

27. *Миролюбов А.А.*, *Солдатов М.А.* Линейные однородные разностные уравнения.– М.: Наука, 1981.
28. *Годунов С.К.*, *Рябенький В.С.* Введение в теорию разностных схем.– М.: Физматлит, 1962.
29. *Гвишиани А.Д.*, *Кириллов А.А.* Теоремы и задачи функционального анализа.– М.: Наука, 1988.
30. *Barnsley M.* Fractals Everywhere.– Boston: Academic press, 1988.
31. *Mandelbrot B.B.* Fractals and Multifractals // Selecta V. 1.– N.Y.: Springer, 1991.
32. *Гельфанд И.М.*, *Райков Д.А.*, *Шилов Г.Е.* Коммутативные нормированные кольца.– М.: Физматгиз, 1960.
33. *Strang G.*, *Fix G.J.* An Analysis of the Finite Element Method // Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Englewood Cliffs.– N.J.: Prentice-Hall, Inc. XIV, 1973.
34. Псевдодифференциальные операторы.– М.: Мир, 1967.
35. *Cordes H.O.* Elliptic Pseudo-Differential Operators: An abstract Theory.– Berlin: Springer-Verlag, 1979.
36. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы.– М.: Мир, 1985.
37. *Лионс Ж.*, *Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.– М.: Наука, 1971.
38. *Ладыженскал О.А.*, *Солонников В.А.*, *Уральцева И.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М.: Наука, 1967.
39. *Никольский С.М.* Приближение функций многих комплексных переменных и теоремы вложения.– М.: Наука, 1977.
40. *Бесов О.В.*, *Ильин В.П.*, *Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.– М.: Наука, 1996.
41. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств.– М.: Мир, 1986.
42. *Гельфанд И.М.*, *Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 1, 2.– М.: Физматлит, 1958.
43. *Black H.C.* Modulation Theory.– N. Y., 1953.

ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

44. *Новиков И.Я.*, *Стечкин С.Б.* Основные конструкции всплесков // Фундаментальная и прикладная математика.– 1997.– Т. 3, № 4.– С. 999–1028.
45. *Новиков И.Я.*, *Стечкин С.Б.* Основы теории всплесков // УМН.– 1998.– Т. 53, № 6 (324).– С. 53–128.
46. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН.– 1998.– Т. 166, № 11.– С. 1145–1170.
47. *Cavaretta D.*, *Dahmen W.*, *Micchelli C.* Stationary subdivision // Mem. Amer. Math. Soc.– 1991.– V. 93.– P. 1–186.

СТАТЬИ

48. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. МГУ.– 1951.– Вып. 148, т. IV.– С. 69–107.
49. *Schweinler H.C.*, *Wigner E.P.* Orthogonalization methods // J. Math. Phis.– 1970.– V. 11.– P. 1693–1694.

50. *Meyer Y.* Ondelettes and functions splines // Seminaire EDP. Paris. Decamber, 1986.
51. *Mallat S.* Multiresolution representation and wavelets // Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA.– 1988.
52. *Mallat S.* An efficient image representation for multiscale analysis // In Proc. of Machine Vision Conference, Lake Taho.– 1987.
53. *Mallat S.* A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelets representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.– 1989.– V. 11.– P. 674–693.
54. *Mallat S.* Multiresolution approximation and wavelets // Trans. Amer. Math. Soc.– 1989.– V. 315.– P. 69–88.
55. *Lemarier P.G.*, *Meyer Y.* Ondelettes et bases Hilbertiennes // Rev. Math. Iber.– 1987.– V. 2, № 1/2.– P. 1–18.
56. *De Boor C.*, *DeVore R.*, *Ron A.* On construction of multivariate (pre) wavelets // Constr. Approx.– 1993.– V. 9.– P. 123–166.
57. *Lorents R.A.*, *Madych W.R.*, *Sahakian A.A.* Translation and dilation invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R})$ and multiresolution analysis // Appl. Comput. Harmon. Anal.– 1998.– V. 5, № 4.– P. 75–388.
58. *Ouscher P.* Ondelettes fractales et applications // Ph. D. Thesis, Université Paris Dauphine, Paris, France.– 1989.
59. *Chui C.K.*, *Wang J.Z.* A cardinal spline approach to wavelets // Proc. Amer. Math. Soc.– 1991.
60. *Cohen A.*, *Daubechies I.*, *Feauveau J.C.* Biorthogonal bases of compactly supported wavelets // Communications on Pure and Applied Mathematics.– 1992.– V. XLV.– P. 2485–560.
61. *Gripenberg G.* A necessary and sufficient condition for the existence of father wavelet // Studia Mathematica.– 1995.– V. 114, № 3.– P. 207–226.
62. *Haar A.* Sur Theorie de orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann.– 1910.– V. 69.– P. 331–371.
63. *Strömberg J.-O.* A modified Franclin system and higher-order spline on $\mathbb{R}^n$ as unconditional basis for Hardy spaces // In book: «Conference in Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund». Chicago, 1981.– 1983.– V. 2.– P. 475–494.
64. *Battle G.* A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarier functions // Comm. Math. Phys.– 1987.– V. 110.– P. 601–615.
65. *Lemarie P.-G.* Ondelettes á localization exponentialle // J. Math., Pures Appl. (9).– 1988.– V. 67, № 3.– P. 227–236.
66. *Shannon C.E.* Communication in the presence of noise // In Proc. of the IRE.– 1949.– V. 37.– P. 10–21.
67. *Котельников В.А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности.– Изд.: Управление связи РКК, 1933.
68. *Meyer Y.* Principle d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs // Seminaire Bourbaki.– 1985–1986.– V. 38, № 662.
69. *Walter G.* Approximation of the delta-function by wavelets Local convergence for Wavelet Expansions // Preprint.– 1992.

70. *Walter G.* Pointwise convergence of wavelet expansions. Local convergence for Wavelet Expansions // Preprint.– 1992.
71. *Kelly S.E.*, *Kon M.A.*, *Raphael L.A.* Pointwise convergence of wavelet expansions // Bull. Amer. Math. Soc.– 1994.– V. 30.– P. 87–94.
72. *Battle G.* Phase space localization theorem for ondelettes // J. Math. Phys.– 1989.– V. 30.– P. 2195–2196.
73. *Battle G.* Heisenberg inequalities for wavelet states // ACHA.– 1997.– V. 4.– P. 119–146.
74. *Duffin R.J.*, *Schaeffer A.S.* A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc.– 1952.– V. 72.– P. 341–366.
75. *Кашин Б.С.*, *Куликова Т.Ю.* Замечание об описании фреймов общего вида // Матем. зам.– 2002.– Т. 72, вып. 6.– С. 941–945.
76. *Chui C.K.*, *He W.* Compactly supported tight frames associated with refinable functions // Appl. and Comp. Harm. Anal.– 2000.– V. 8.– P. 293–319.
77. *Petukhov A.* Explicit construction of framelets // Appl. and Comp. Harm. Anal.– 2001.– V. 11.– P. 313–327.
78. *Lawton W.* Tight frames of compactly supported affine wavelets // J. Math. Phys.– 1990.– V. 31.– P. 1898–1901.
79. *Bownik M.* Tight frames of multidimensional wavelets // J. Fourier Anal. Appl.– 1997.– V. 3.– P. 525–542.
80. *Gröchenig K.*, *Madych W.R.* Maltiresolution analysis, Haar bases and self-similar tillings of R^n // IEEE Trans. Inform. Theory.– 1992.– V. 38, № 2.– P. 556–568.
81. *Madych W.R.* Some elementary properties of multiresolution analysis– a tutiroial in theory and applications // C.K. Chui ed. Acad. Press.– 1992.– P. 259–294.
82. *Cohen A.*, *Daubechies I.* Nonseparable bi-dimentional wavelet bases // Revista Mat. Iberoamericana.(I).– 1993.– P. 51–137.
83. *Cohen A.* Ondelettes, analyses multirësolutions et filtres miroir enquadrature // Ann inst. H. Poincarë, Anal. non linëaire.– 1990.– V. 7.– P. 439–459.
84. *Максименко И.Е.* Биортогональность масштабирующих функций многих переменных // В сб. «Вопросы современной теории аппроксимации».– Изд-во СПбГУ.– 2004.– С. 132–145.
85. *Lawton W.* Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases // J. Math. Phys.– 1991.– V. 32.– P. 57–81.
86. *Strang G.* Eigenvalues of $(\downarrow 2)H$ and convergence of the cascade algorithm // IEEE. Trans. SP.– 1996.– V. 44.
87. *Lawton W.*, *Lee S.N.*, *Shen Z.* Stability and orthonormality of multivariate refinable functions // SIAM J. Math. Anal.– 1997.– V. 28, № 4.– P. 999–1114;
Convergence of multidimensional cascade algorithm, Numerische Mathematik.– 1998.– V. 78, № 3.– 427–438.
88. *Lawton W.*, *Lee S.N.*, *Shen Z.* Convergence of multidimensional cascade algorithm // Numerische Mathematik.– 1998.– V. 78, № 3.– P. 427–438.
89. Gröchenig K Analyse multi-échelles et bases d'ondelettes // C. R. Acad. Sci. Paris, sér. I, Math.– 1987.– V. 305, № 1.– P. 13–15;– 1992.– V. 38, № 2.– P. 556–568.

90. Jia R.Q and Micchelli C.A. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: Powers of two // Curves and Surfaces (P. J. Laurent, A. Le M ́haut é and L. L. Schumaker, eds.).– N. Y.: Academic Press, 1991.– P. 209–246.
91. Jia R.Q and Micchelli C.A. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets V: extesibility of trigonometric polynomials // Computing.– 1992.– V. 48.– P. 61–72.
92. *Jia R. Q.*, *Shen Z.* Multiresolution and wavelets // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.– 1994.– V. 37.– P. 271–300.
93. *James I. M.* The topology of Stiefel Manifolds // LMS Lecture Note Series 24.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976.
94. *Lawton W.*, *Lee S. L.*, *Shen Z. W.* An algorithm for matrix extension and wavelet construction // Math. Comp.– 1996.– V. 37.– P. 271–300.
95. *Shen Z. W.* Extension of matrices with Laurent polynomial entries // Proceedings of the 15th IMACS World Congress on Scientific Computation Modeling and Applied Mathematics, Ashim Syclow eds.– 1997.– P. 57–61.
96. *Riemenschneider S. D.*, *Shen Z. W.* Construction of compactly supported biorthogonal wavelets in $L_2(\mathbb{R}^s)$. I // Physics and modern topics in mechanical and electrical engineering. Scientific and Engineering Society Press.– 1999.– P. 201–206.
97. *Ji H.*, *Riemenschneider S. D.*, *Shen Z. W.* Multivariate compactly supported fundamental refinable functions, dual and biorthogonal wavelets // Stud. of Appl. Math.– 1999.– V. 102.– P. 173–204.
98. *Riemenschneider S. D.*, *Shen Z. W.* Construction of compactly supported biorthogonal wavelets in $L_2(\mathbb{R}^s)$. II // Wavelet applications signal and image Processing VII. Proceedings of SPIE.– 1999.– V. 3813.– P. 264–272.
99. *Lam T. Y.* Serre's conjecture // In «Lecture Notes in Mathematics», 635.– N. Y.: Springer-Verlag, 1978.
100. *Суслин А. А.* Структура специальных линейных групп над кольцами полиномов // Изв. АН СССР. Сер. Мат.– 1977.– Т. 41, № 2.– С. 235–252.
101. *Park H.*, *Woodburn C.* An algorithmic proof of Suslin's stability theorem for polynomial rings // J. of Algebra.– 1995.– V. 178.– P. 277–298.
102. *Packer J. A.*, *Rieffel M. A.* Wavelet filter functions, Matrix completion problem, and projective modules over $C(\mathbb{T}^n)$ // J. Fourier. Anal. Appl.– 2003.– V. 9, N 3.– P. 101–116.
103. *Ron A.*, *Shen Z. W.* Gramian analysis of affine bases and affine frames // In book: Approximation Theory VIII. V. 2: Wavelets (C. K. Chui and L. Schumaker, eds.)– Singapure: World Scient. Publ. Co. Inc., 1995.– P. 375–382.
104. *Ron A.*, *Shen Z. W.* Frame and stable bases for shift-invariant subspaces of $L_2(R^d)$ // Canad. J. Math.– 1995.– V. 47, N. 5.– P. 1051–1094.
105. *Ron A.*, *Shen Z. W.* Affine systems in $L_2(R^d)$: the analysis of the analysis operator // J. Func. Anal.– 1997.– V. 148.– P. 408–447.
106. *Ron A.*, *Shen Z. W.* Affine systems in $L_2(R^d)$: dual systems // J. Fourier. Anal. Appl.– 1997.– V. 3.– P. 617–637.
107. *Bin Han On.* On dual wavelet tight frames // ACHA.– 1997.– V. 4.– P. 380–413.

108. *Cohen A.*, *Daubechies I.* A stability criterion for biorthogonal wavelet bases and their related subband coding schemes // Duke Math. J.– 1992.– V. 68.– P. 313–335.
109. *Jia R.Q.* Approximation properties of multivariate wavelets // Math. Comp.– 1998.– V. 67.– P. 647–655.
110. *Lawton W.*, *Lee S.L.*, *Shen Z.* Characterization of compactly supported refinable splines // Adv. Comput. Math.– 1995.– V. 3, № 1–2.– P. 137–145.
111. *Chaikin G.M.* An algorithm for high speed curve generation // Computer Graphics and Image Processing.– 1974.– V. 3.– P. 346–349.
112. *Dyn N.*, *Gregory J.A.*, *Levin D.* Analysis of linear binary subdivision schemes for curve design // Constr. Approx.– 1991.– V. 7.– P. 127–147.
113. *Dubuc S.* Interpolation through an iterative scheme // J. Math. Anal. Appl.– 1986.– V. 114.– P. 185–204.
114. *Deslauriers G.*, *Dubuc S.* Symmetric iterative interpolation processes // Constr. Approx.– 1989.– V. 5.– P. 49–68.
115. *Протасов В.Ю.* Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход // Изв. РАН. Сер. мат.– 1997.– Т. 61, № 5.– С. 99–136.
116. *Zhow D.X.* The p-norm joint spectral radius and its applications in wavelet analysis // International conference in wavelet analysis and its applications, AMS / IP Studies in Advanced Mathematics.– 2002.– V. 25.– P. 305–326.
117. *Zhow D.X.* The p-norm joint spectral radius for even integers // Methds Appl. Anal.– 1998.– V. 5.– P. 39–54.
118. *Blondel V.D.*, *Nesterov Yu.P.* Computationally efficient approximations of the joint spectral radius // Preprint.– 2004.
119. *Протасов В.Ю.* Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов // Фундам. и прикл. мат.– 1996.– Т. 2, вып. 1.– С. 205–231.
120. *Протасов В.Ю.* О гладкости кривых де Рама // Изв. РАН. Сер. мат.– 2004.– Т. 68, № 3.– С. 27–68.
121. *Oseledets V.I.* A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems // Trans. Moscow. Math. Soc.– 1968.– V. 19.– P. 197–231.
122. *Ravishankar K.* Power law scaling of the top Lyapunov exponent of a product of random matrices // J. Stat. Phys.– 1989.– V. 54, № 1/2.– P. 531–537.
123. *Mandelbrot B.B.*, *Fisher A.J.*, *Calvet L.E.* A multifractal model of asset returns // Cowles Foundation Discussion Paper.– 1997.– № 1164; http: // ssrn.com / abstract=78588.
124. *Никитин П.* Хаусдорфова размерность гармонической меры на кривой де Рама // Зап. научн. сем. ПОМИ.– 2001.– Т. 283.– С. 206–222.
125. *Protasov V.* Refinement equations and corresponding linear operators // To appear: Intern. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing.– 2005.
126. *Protasov V.* The stability of subdivision operator at its fixed point // SIAM J. Math. Anal.– 2001.– V. 33, № 2.– P. 448–460.
127. *Протасов В.Ю.* Кусочно-гладкие масштабирующие функции // Алгебра и Анализ.– 2004.– Т. 16, № 5.– С. 89–111.
128. *Derfel G.A.*, *Dyn N.*, *Levin D.* Generalized refinement equations and subdivision processes // J. of Approx. Theory.– 1995.– V. 80.– P. 272–297.

129. *Protasov V.* Refinement equations with nonnegative coefficients // J. Fourier Anal. Appl.– 2000.– V. 6, № 6.– P. 55–77.
130. *Micchelli C.A.*, *Prautzsch H.* Uniform refinement of curves // Linear Alg. Appl.– 1989.– V. 114/115.– P. 841–870.
131. *Collela D.*, *Heil C.* Characterization of scaling functions. I. Continuous solutions // SIAM J. Matrix Anal. Appl.– 1994.– V. 15.– P. 496–518.
132. *Collela D.*, *Heil C.* Dilation equations and the smoothness of compactly supported wavelets // Wavelets: Mathematics and applications., J. Benedetto, M. Frazier, eds., CRC Press, Bosa Raton, FL.– 1993.– P. 161–200.
133. *Lagarias J.C.*, *Wang Y.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius // Linear Alg. Appl.– 1995.– V. 214.– P. 17–42.
134. *Blondel V.D.*, *Theys J.*, *Vladimirov A.A.* An elementary counterexample to the finiteness conjecture // SIAM J. Matrix Anal.– 2003.– V. 24, № 4.– P. 963–970.
135. *Blondel V.D.*, *Tsitsiklis J.N.* Approximating the spectral radius of sets of matrices in the max-algebra is NP-hard // IEEE Trans. Autom. Control.– 2000.– V. 45, № 9.– P. 1762–1765.
136. *Blondel V.D.*, *Tsitsiklis J.N.* The boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable // Syst. Control Lett.– 2000.– V. 41, № 2.– P. 135–140.
137. *Daubechies I.*, *Lagarias J.* Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // SIAM. J. Math. Anal.– 1992.– V. 23.– P. 1031–1079.
138. *Gripenberg G.* Computing the joint spectral radius // Lin. Alg. Appl.– 1996.– V. 234.– P. 43–60.
139. *Maesumi M.* An efficient lower bound for the generalized spectral radius // Linear Alg. Appl.– 1996.– V. 240.– P. 1–7.
140. *Hutchinson J.E.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J.– 1981.– V. 30, № 5.– P. 713–747.
141. *Berger M.A.*, *Wang Y.* Bounded semi-groups of matrices // Linear Alg. Appl.– 1992.– V. 166.– P. 21–27.
142. *Daubechies I.*, *Lagarias J.* Corrigendum / Addendum to: Sets of matrices all infinite products of which converge // Linear Alg. Appl.– 2001.– V. 327.– P. 69–83.
143. *Strang G.* The joint spectral radius // Commentary by Gilbert Strang on paper number 5 in «Collected works of Gian-Carlo Rota».– 2001.
144. *Ando T.*, *Shih M.* Simultaneous contractibility // SIAM J. Math. Anal.– 1998.– V. 19, № 2.– P. 487–498.
145. *Барабанов Н.Е.* Показатели Ляпунова дискретных вложений. Части 1, 2 и 3 // Автом. и телемех.– 1988.– Т. 2.– С. 40–46;– Т. 3.– С. 24–29;– Т. 5.– С. 17–24.
146. *Gurvits L.* Stability of discrete linear inclusions // Linear Alg. Appl.– 1995.– V. 231.– P. 47–85.
147. *Vladimirov A.A.*, *Elsner L.*, *Beyn W.-J.* Stability and paracontractivity of discrete linear inclusions // Linear Alg. Appl.– 2000.– V. 312.– P. 125–134.
148. *Wirth F.* The generalized spectral radius and extremal norms // Linear Alg. Appl.– 2002.– V. 342.– P. 17–40.

149. *Козякин В.С.* Алгебраическая неразрешимость задачи глобальной устойчивости несинхронизированных систем // Автом. и телемех.– 1990.– Т. 51.– С. 754–759.
150. *Tsitsiklis J.N.* The stability of the products of finite set of matrices // Open problems in communication and computation. T. M. Cover and B. Copinath (Eds.).– N. Y.: Springer-Verlag, 1987.– P. 161–163.
151. *Guglielmi N.*, *Zennaro M.* On the zero-stability of variable stepsize multistep methods: the spectral radius approach // Numer. Math.– 2001.– V. 88.– P. 445–458.
152. *Moision B.E.*, *Orlitsky A.*, *Siegel P.N.* On codes that avoid specified differences // IEEE Trans. Inform. Theory.– 2001.– V. 47, № 1.– P. 433–442.
153. *Dyn N.*, *Gregory J.A.*, *Levin D.* Analysis of linear binary subdivision schemes for curve design // Constr. Approx.– 1991.– V. 7.– P. 127–147.
154. *Yu T.*, *Han B.*, *Overton M.* Design of Hermite subdivision schemes aided by spectral radius optimization // Preprint.– 2004.
155. *Протасов В.Ю.* Асимптотика функции разбиения // Мат. сб.– 2000.– Т. 191, № 3.– С. 65–98.
156. *Протасов В.Ю.* К задаче об асимптотике функции разбиения // Мат. заметки.– 2004.– Т. 76, № 1.– С. 151–156.
157. *de Rham G.* Une peu de mathematique a propos d'une courbe plane. (French) // Revue de Mathematiques Elementaires.– 1947.– II, Nos. 4,5.– P. 678–689.
158. *de Rham G.* Sur une courbe plane. (French) // J. Math. Pur. Appl.– 1956.– V. 35.– P. 25–42.
159. *de Rham G.* Sur les courbes limit de polygones obtenus par trisection. (French) // Enseign. Math.– 1959.– II, 5.– P. 29–43.
160. *Erdös P.* On a family of symmetric Bernuolli convolutions // Amer. J. Math.– 1939.– V. 61.– P. 974–975.
161. *Erdös P.* On the smoothness properties of Bernuolli convolutions // Amer. J. Math.– 1940.– V. 62.– P. 180–186.
162. *Рвачев В.Л.*, *Рвачев В.А.* Об одной финитной функции // ДАН УССР.– 1971.– № 8.– С. 705–707.
163. *Дерфель Г.А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. ж.– 1989.– Т. 41, № 19.– С. 42–47.
164. *Dyn N.*, *Levin D.* Interpolatory subdivision schemes for the generation of curves and surfaces // Multivariate approximation and interpolation (Duisburg, 1989).– Basel: Birkhäuser, 1990.– P. 91–106.
165. *Daubechies I.*, *Lagarias J.* Two-scale difference equations. I. Global regularity of solutions // SIAM. J. Math. Anal.– 1991.– V. 22.– P. 1388–1410.
166. *Fix G.*, *Strang G.* Fourier analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory // Stud. Appl. Math.– 1969.– V. 48.– P. 265–273.
167. *Protasov V.* A complete solution characterizing smooth refinable functions // SIAM J. of Math. Anal.– 2000.– V. 31, № 6.– P. 1332–1350.
168. *Jia R.-Q.* Refinable shift-invariant spaces: From splines to wavelets // [CA] Chui, C. K. (ed.) et al., Approximation theory VIII. V. 2. Wavelets and multilevel approximation. Papers from the 8th Texas international conference,

College Station, TX, USA, January 8–12, 1995.– Singapore: World Scientific. Ser. Approx. Decompos.– 1995.– V. 6.– P. 179–208.

169. *De Boor C.*, *DeVore R.*, *Ron A.* The structure of finitely generated shift-invariant spaces in $L_2(\mathbb{R}^d)$ // J. Funct. Anal.– 1994.– V. 119, № 1.– P. 37–78.

170. *De Boor C.*, *DeVore R.*, *Ron A.* Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$ // Trans. Am. Math. Soc.– 1994.– V. 341, № 2.– P. 787–806.

171. *de Boor C.*, *DeVore R.*, *Ron A.* Approximation orders of FSI spaces in $L_2(\mathbb{R}^d)$ // Constr. Appr.– 1998.– V. 14, № 3.– P. 411–427.

172. *Villemoes L.* Wavelet analysis of refinement equations // SIAM J. Math. Anal.– 1992.– V. 25, № 5.– P. 1433–1460.

173. *Jia R.Q.*, *Wang J.* Stability and linear independence associated with wavelet decomposition // Proc. Amer. Math. Soc.– 1993.– V. 117.– P. 1115–1124.

174. *Lawton W.M.* Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelets // J. Math. Phys.– 1991.– V. 32.– P. 57–61.

175. *Cohen A.* Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroir en quadrature // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. linéaire.– 1990.– V. 7.– P. 439–459.

176. *Cohen A.* Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal // Ph. D. Thesys.– Dauphine: Université Paris, 1990.

177. *Zhou D.-X.* Stability of refinable functions, multiresolution analysis, and Haar bases // SIAM J. Math. Anal.– 1996.– V. 27, № 3.– P. 891–904.

178. *Mallat S.* Multiresolution approximation and wavelets // Trans. AMS.– 1989.– V. 315.– P. 69–88.

179. *Protasov V.* Fractal curves and their applications to wavelets // Proceeding of the International Workshop on self-similar systems, July 30 – August 7, 1998.– Dubna, Russia, 1999.– P. 120–125.

180. *Berg L.*, *Plonka G.* Spectral properties of two-slanted matrices // Results Math.– 1999.– V. 35, № 3–4.– P. 201–215.

181. *Berg L.*, *Plonka G.* Some notes on two-scale difference equations // Functional equations and inequalities, Math. Appl.– 2000.– № 518.– P. 7–29.

182. *Protasov V.* The correlation between the convergence of subdivision processes and solvability of refinement equations // «Algorithms for Approximation IV, Proceedings of the 2001 International Symposium» Huddersfield, England, July 15–20.– 2001.– P. 394–401.– Eds. J. Levesley, I. J. Anderson, J. C. Mason, Huddersfield University, ISBN № 186-218-04-07.

183. *Rioul O.* Simple regularity criteria for subduvision schemes // SIAM J. Math. Anal.– 1992.– V. 23.– P. 1544–1576.

184. *Rota G.C.*, *Strang G.* A note on the joint spectral radius // Kon. Nederl. Acad. Wet. Proc.– 1960.– V. 63.– P. 379–381.

185. *Cohen A.*, *Conze J.P.* Régularité des bases d'ondelettes et mesures ergodiques // Rew. Math. Iberoamer.– 1992.– V. 8.– P. 351–366.

186. *Lau K.S.*, *Ma M.F.*, *Wang J.* Of some sharp regularity estimations of L_2 scaling functions // SIAM J. Math. Anal.– 1996.– V. 27.– P. 835–864.

187. *Lau K.S.*, *Wang J.* Characterization of L_p solutions for two-scale dilation equations // SIAM J. Math. Anal.– 1995.– V. 26.– P. 1018–1046.

188. *Battle G.* Heisenberg Inequalities for Wavelets States. Appl. Comp. Harm. Anal.– 1997.– 4.– P. 119–146.

189. *Новиков И.Я.* Всплески (краткий обзор основ теории) // Материалы 12-й Сибирской Школы, Новосибирск, 18–23 Июля, 1998.– Новосибирск: Изд-во ин-та матем. им. С. Л. Соболева, 1999.– С. 92–111.
190. *Lemarie-Rieusset P.G.* Existence de «fonction-pere» pour le ondelettes a support compact // C. R. Acad. Sci. Paris I.– 1992.– V. 314.– P. 17–19.
191. *Deslauriers G.*, *Dubuc S.* Interpolation dyadique // Fractals, dimensions non entiéres et applications. G. Cherbit, ed., Masson.– Paris, 1987.– P. 44–55.
192. *Daubechies I.* Orthonormal basis of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math.– 1988.– 46.– P. 909–996.
193. *Taswell C.* The Systematized Collection of Wavelet Filters Computable by Spectral Factorization of the Daubechies Polynomial // Technical Report CT-1998–08.
194. *Lemarie-Rieusset P.G.*, *Zahrouni E.* More regular wavelets // Appl. and Comput. Harmonic Anal.– 1998.– V. 5.– P. 92–105.
195. *Villemoes L.* Energy moments in time and frequency for two-scale difference equation solutions and wavelets // SIAM J. Math. Anal.– 1992.– V. 23, № 6.– P. 1519–1543.
196. *Volkmer H.* Asymptotic regularity of compactly supported wavelets // SIAM J. Math. Anal.– 1995.– V. 26, № 4.– P. 1075–1087.
197. *Volkmer H.* On the regularity of wavelets // IEEE Trans. Inf. Theory.– 1992.– V. 38, № 2.– P. 872–876.
198. *Ojanen H.* Orthonormal compactly supported wavelets with optimal Sobolev regularity // Technical Report math.CA / 9807089.– 1998.
199. *Chui C.K.*, *Wang J.* High-Order Orthonormal Scaling Functions and Wavelets Give Poor Time-Frequency Localization // CAT Report #322.– 1994.– P. 1–24.
200. *Novikov I. Ya.* Modified Daubechies wavelets preserving localization with growth of smoothness // East J. Approxim.– 1995.– V. 1, № 3.– P. 341–348.
201. *Новиков И.Я.* Константы неопределенности для модифицированных всплесков Добеши // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика.– Тула: ТулГУ, 1998.– Т. 4, вып. 1.– С. 107–111.
202. *Shen J.*, *Strang G.* The zeros of the Daubechies polynomials // Proc. AMS.– 1995.– V. 124, N. 12.– P. 3819–3833.
203. *Temme N.M.* Asymptotics and numerics of zeros of polynomials that are related to Daubechies wavelets // Appl. Comp. Harmonic Anal.– 1997.– V. 4, N. 4.– P. 414–428.
204. *Temme N.M.* Asymptotic invertion of the incomplete beta function // J. Comp. Appl. Math.– 1992.– V. 41.– P. 145–157.
205. *Канторович Л.В.* О сходимости последовательности полиномов Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР.– 1931.– С. 1103–1115.
206. *Берколайко М.З.*, *Новиков И.Я.* О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Докл. РАН.– 1992.– Т. 326, № 6.– С. 935–938.
207. *Берколайко М.З.*, *Новиков И.Я.* О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Мат. заметки.– 1994.– Т. 56, № 3.– С. 3–12.
208. *Novikov I. Ya.* On the construction of nonstationary orthonormal infinitely differentiable compactly supported wavelets // Functional Differential Equations.– 1994.– V. 2.– P. 145–156.

209. *Cohen A.*, *Dyn N.* Nonstationary subdivision schemes and multiresolution analysis // SIAM J. Math. Anal.– 1996.– V. 27.– P. 1745–1769.
210. *Novikov I. Ya.* Nonstationary orthonormal infinitely differentiable compactly supported wavelets with uniformly bounded uncertainty constants // Proceedings of the International Workshop (July 30 – August 7, 1998, Dubna, Russia). JINR, E5-99–38.– Dubna, 1999.– P. 110–116.
211. *Рвачев В.Л.*, *Рвачев В.А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах.– Киев: Наукова Думка, 1979.
212. *Рвачев В.А.* Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их приложения Compactly supported solutions of functional-differential equations and their applications // УМН.– 1990.– Т. 45, № 1.– С. 87–120.
213. *Dyn N.*, *Ron A.* Multiresolution analysis by infinitely differentiable compactly supported functions // Appl. and Comput. Harmonic Anal.– 1995.– 2.– P. 15–20.
214. *Chui C.K.*, *Shi X.* Continuous two-scale equations and dyadic wavelets // Advances in Comp. Math.– 1994.– 2.– P. 185–213.
215. *Schoenberg I.J.* Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart. Appl. Math.– 1946.– 4.– P. 45–99, 112–141.
216. *Soman A.K.*, *Vaidyanathan P.P.* Orthonormal wavelets and paraunitary filter banks // IEEE Trans. on Sign. Proc.– 1993.– T. 41, № 3.– C. 1170–1183.
217. *Chui C.K.*, *Mhaskar H.N.* On trigonometric wavelets // Constr. Approx.– 1993.– V. 9.– P. 167–190.
218. *Chui C.K.*, *Wang J.* A general framework of compact supported splines and wavelets // J. Approx. Th.– 1992.– V. 71.– P. 263–304.
219. *Zheludev V.A.* Periodic splines and wavelets // Proc. of the Conference «Math. Analysis and Signal processing», Cairo, Jan.– 1994.– P. 2–9.
220. *Петухов А.П.* Периодические всплески // Мат. сб.– 1997.– Т. 188, N 10.– С. 1481–1506.
221. *Skopina M.* Multiresolution analysis of periodic functions // East J. Approx.– 1997.– V. 3, N 2.– P. 203–224.
222. *Максименко И.Е.*, *Скопина М.А.* Многомерные периодические всплески // Алгебра и Анализ.– 2003.– Т. 15, N. 2.– С. 1–39.
223. *Petukhov A.* Trigonometric Rational wavelet bases // Proceedings of the International Workshop (July 30 – August 7, 1998, Dubna, Russia). JINR, E5-99–38.– Dubna, 1999.– P. 116–119.
224. *Coifman R.R.*, *Meyer Y.*, *Wickerhauser V.M.* Size properties of wavelet packets // «Wavelets and thier applications», Beylkin and al., eds.– Jones and Bartlett, 1992.– P. 453–470.
225. *Skopina M.* Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets // J. Approx. Theory.– 1998.– V. 94.– P. 191–202.
226. *Новиков И.Я.* Онделетты И. Мейера– оптимальный базис в $C[0,1]$ // Мат. заметки.– 1992.– Т. 52, N. 5.– С. 88–92.
227. *Skopina M.* Wavelet approximation of periodic functions // J. Approx. Theory.– 2000.– V. 104.– P. 302–329.
228. *Белинский Е.С.* Суммирование кратных рядов Фурье в точках Лебега // Теор. функций, функц. анал. и их прил.– 1975.– N 23.– С. 3–12.

229. *Skopina M.A.* The generalized Lebesgue sets of functions of two variables // Proceedings. Colloquia Math. Societ. Janos Bolyai. 58, Conference on Approximation Theory. Hungary. Kecskemet. August 6–11.– 1990.– P. 615–625.
230. *Saks S.* On the strong derivatives of functions of intervals // Fund. Mat.– 1935.– V. 25.– P. 245–252.
231. *Jia R.Q.* A Bernshtein-type inequality associated with wavelet decomposition // Constr. Approx.– 1993.– V. 9.– P. 299–318.
232. *Jia R.Q.*, *Lei J.* On approximation by multi-integer translates of functions having global support // J. Approx. Th.– 1993.– V. 72.– P. 2–23.
233. *Lei J.*, *Jia R.Q.*, *Cheny E.W.* Approximation from shift invariant spaces by integral operators // SIAM Journal of Approx. Th.– 1997.– V. 28.– P. 481–498.
234. *Calderón A.P.*, *Zygmund A.* Local properties of solutions of elliptic partial differential equation // Studia Math.– 1961.– V. 20.– P. 171–227.
235. *Skopina M.* Localization principle for wavelet expansions // Proceedings of the International Workshop (July 30 – August 7, 1998, Dubna, Russia). JINR, E5-99-38.– Dubna, 1999.– P. 125–130.
236. *Wojtaszczyk P.* Wavelets as unconditional bases in $L_p(R)$ // J. Fourier Anal. Appl.– 1999.– V. 5, N. 1.– P. 73–85.
237. *Ульянов П.Л.* О некоторых результатах и задачах из теории базисов // Зап. научн. семин. ЛОМИ.– 1989.– Т. 170.– С. 274–284.
238. *Faber G.* Über die interpolatorische Darstelung stetiger Functionen // Jahresber Deutsch. Math.-Verein.– 1914.– V. 23.– P. 192–210.
239. Привалов Ал. А. О росте степеней полиномиальных базисов и приближении тригонометрических проекторов // Мат. заметки.– 1987.– Т. 42, № 2.– С. 207–214.
240. Привалов Ал. А. О росте степеней полиномиальных базисов // Мат. заметки.– 1990.– Т. 48, № 4.– С. 69–78.
241. *Offin D.*, *Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Appr.– 1993.– V. 9, N. 1.– P. 319–325.
242. *Lorentz R.A.*, *Sahakian A.A.* Orthogonal trigonometric Shauder bases of optimal degree for $C(0,2\pi)$ // J. Fourier Anal. Appl.– 1994.– V. 1, N 1.– P. 103–112.
243. *Скопина М.А.* О полиномиальных базисах в пространстве C[-1, 1] // Зап. научн. сем. ПОМИ.– 1999.– Т. 262.– С. 223–226.
244. *Скопина М.А.* Ортогональные полиномиальные базисы Шаудера $C[-1,1]$ с оптимальным ростом степеней // Мат. сб.– 2001.– Т. 192, N 3.– С. 115–136.
245. *Woźniakowski K.* On a orthonormal polynomial bases $C[-1,1]$ // Studia Math.– 2001.– V. 144, N 2.– P. 181–196.
246. *Chanillo S.*, *Muckenhoupt B.* Weak type estimates for Cesero sums of Jacobi Polynomial series // Mem. Amer. Math. Soc.– 1993.– V. 102, N 487.– P. 1–90.
247. *Lemarie P.G.*, *Meyer Y.* Ondelettes et bases hilbertiennes // Revista Matematica Iberoamericana.– 1986.– 2,1–2. C. 1–18.
248. *Лизоркин П.И.* О базисах и мультипликаторах в пространствах $B^r_{p,\theta}$ // Тр. МИАН СССР.– 1977.– 143.– С. 88–104.

249. *Орловский Д.Г.* О мультипликаторах в пространствах $B^r_{p,\theta}$ // Anal. Math.– 1979.– 5.– P. 207–218.
250. *Бочкарев С.В.* Базисы в функциональных пространствах // Тр. МИАН СССР.– 1989.– 190.– С. 22–39.
251. *Meyer Y.* Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs // Asterisque.– 1987.– 145–146.– P. 206–223.
252. *Friezier M.*, *Jawerth B.* A discrete transform and decomposition of distribution spaces // J. Funct. Anal.– 1990.– 93, № 1.– P. 34–170.
253. *Friezier M.*, *Jawerth B.*, *Weiss G.* Littlewood-Paley theory and the study of function spaces // CBMS-AMS Regional Conf. Ser.– 1991.– № 79.
254. *Torres R.H.* Boundedness results for operators with singular kernels on distribution spaces // Mem. AMS.– 1991.– 90, 442.– P. 1–172.
255. *Kateb D.*, *Lemarie-Rieusset P.G.* Asymptotic behavior of the Daubechies filters // Appl. Comp. Harmonic Anal.– 1995.– V. 2, N 4.– P. 398–399.
256. *Берколайко М.З.* Следы на произвольном координатном подпространстве функций из обобщенных пространств Соболева. I,II // Исследования по геометрии и математическому анализу: Тр. ин-та мат. СО АН СССР.– Новосибирск: Наука, 1987.– Т. 7.– С. 30–43;– Т. 9.– С. 34–41.
257. *Берколайко М.З.* Выпуклость и вогнутость банаховых идеальных пространств // Сиб. мат. журн.– 1990.– 31, 3.– С. 11–18.
258. *Лизоркин П.И.* О преобразованиях Фурье в пространствах Бесова. Нулевая шкала $B^0_{p,\theta}$ // ДАН СССР.– 1965.– Т. 163.– С. 1318–1321.
259. *Stromberg J.-O.* A modified Franklin system and higher order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional basis of Hardy spaces // Wadsworth Math. Ser.– 1982.– 2.– P. 475–493.
260. *Seeger A.* A note on Triebel-Lizorkin spaces // Approx. and Func. Spaces. Banach Center Publ.– 1989.– 22.– P. 391–400.
261. *Riviere N.M.* Singular integrals and multiplier operators // Ark. mat.– 1971.– 9.– P. 243–278.
262. *Beylkin G.*, *Coifman R.*, *Rokhlin V.* Past wavelet transforms and numerical algorithms. I. Res. Rep. JALEU / DCS / RR-696.– 1989. P. 1–46.
263. *Meyer J.* Wavelets and operators // Lect. Notes Math.– 1989.– V. 137.
264. *Marshall J.* Weighted parabolic Triebel spaces of product type // Forum Math.– 1991.– 3.– P. 479–511.
265. *Лизоркин П.И.* Свойства функций из пространств $\Lambda^r_{p\theta}$ // Тр. МИАН СССР.– 1974.– 131.– С. 158–181.

Предметный указатель

Научное издание

НОВИКОВ Игорь Яковлевич
ПРОТАСОВ Владимир Юрьевич
СКОПИНА Мария Александровна

ТЕОРИЯ ВСПЛЕСКОВ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *Д.В. Горбачев*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 29.11.05. Формат $60\times90/16$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 38,5. Уч.-изд. л. 43,0. Тираж 400 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Московская типография № 6»
115088, г. Москва, Ж-88, ул. Южнопортовая, 24