

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ТЕОРИЯ РЯДОВ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

Теория рядов. Воробьев Н. Н. 4 изд., перераб. и доп., Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М., 1979, 408 с.

В книге излагаются основы теории числовых рядов и функциональных рядов, в том числе степенных рядов и рядов Фурье. Первая часть курса составлена в точном соответствии с разделом «Ряды» программы по высшей математике для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Ее можно использовать не только как учебное пособие для слушателей курса лекций, но и при самостоятельной работе над предметом. Вторая часть представляет собой цикл очерков, посвященных более глубоким вопросам теории рядов.

Илл. 43, табл. 1.

Николай Николаевич Воробьев

ТЕОРИЯ РЯДОВ

(Серия: «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов»)

М., 1979 г., 408 стр. с илл.

Редактор М. М. Горячая

Техн. редактор Л. В. Лихачева

Корректоры Е. В. Сидоркина и В. П. Сорокина

ИБ № 11368

Сдано в набор 11.07.78. Подписано к печати 29.12.78. Бумага 84×108¹/₃₂. Тип-№ 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 21,42. Уч.-изд. л. 20,19. Тираж 21 000 экз. Заказ № 65. Цена книги 85 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию	9
Предисловие к третьему изданию	11
Предисловие к четвертому изданию	12

ЧАСТЬ I

Глава 1. Прогрессии	13
§ 1. Введение	13
§ 2. Геометрические прогрессии	14
§ 3. Бесконечные прогрессии; их сходимость и расходимость	16
§ 4. Элементарные преобразования прогрессий	18
§ 5. Функциональные прогрессии: область сходимости; равномерная сходимость	20
§ 6. Почленное интегрирование прогрессий	22
§ 7. Почленное дифференцирование прогрессий	23
§ 8. Прогрессии с комплексными членами	25
 Глава 2. Числовые ряды. Основные понятия. Основные теоремы о сходимости	 29
§ 1. Сложение и его свойства	29
§ 2. Определение числового ряда и его сходимости	30
§ 3. Остаток ряда	34
§ 4. Принцип сходимости Коши	35
§ 5. Критерий Коши сходимости рядов	37
§ 6. Необходимый признак сходимости ряда	38
§ 7. Желательность систематической теории	39
§ 8. Свойства сходящихся рядов, подобные свойствам сумм	40
§ 9. Дальнейшие свойства рядов	47
 Глава 3. Ряды с положительными членами	 50
§ 1. Признаки сходимости рядов	50
§ 2. Признаки сравнения	51
§ 3. Интегральный признак сходимости Маклорена—Коши	57
§ 4. Применения интегрального признака сходимости	59
§ 5. Сравнительная оценка различных признаков сходимости	63
§ 6. Признак сходимости Даламбера	65

§ 7. Признак сходимости Коши	68
§ 8. Чувствительность признаков сходимости Даламбера и Коши	69
Глава 4. Знакопеременные ряды	72
§ 1. Абсолютная сходимость и условная сходимость	72
§ 2. Абсолютная сходимость и расходимость	73
§ 3. Возможность переставлять члены в абсолютно сходящихся рядах	76
§ 4. Условно сходящиеся знакопеременные ряды	77
§ 5. Умножение абсолютно сходящихся рядов	79
§ 6. Признак сходимости Лейбница	81
§ 7. Существенность условий признака сходимости Лейбница	84
Глава 5. Функциональные ряды	86
§ 1. Определение функционального ряда	86
§ 2. Область сходимости функционального ряда	87
§ 3. Сходимость последовательности функций. Основные определения	89
§ 4. Предел последовательности непрерывных функций	96
§ 5. Переход к пределу под знаком интеграла	98
§ 6. Переход к пределу под знаком производной	100
§ 7. Определение равномерной сходимости функционального ряда и признак Вейерштрасса	101
§ 8. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами	104
§ 9. Почленное интегрирование функциональных рядов	104
§ 10. Почленное дифференцирование функциональных рядов	107
Глава 6. Степенные ряды. Общие вопросы	110
§ 1. Определение степенного ряда	110
§ 2. Теорема Абеля	111
§ 3. Круг сходимости ряда	113
§ 4. Вещественный степенной ряд и его интервал сходимости	115
§ 5. Равномерная сходимость ряда в круге его сходимости	115
§ 6. Вещественные ряды	116
§ 7. Комплексные ряды	119
§ 8. Разложение функций в степенные ряды	119
§ 9. Формула Тейлора	120
§ 10. Ряды Тейлора и Маклорена	122
Глава 7. Степенные ряды. Примеры и приложения	127
§ 1. Разложение функции e^x в ряд Маклорена	127
§ 2. Разложения в ряды Маклорена гиперболических функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$	128
§ 3. Разложения в ряды Маклорена тригонометрических функций $\cos x$ и $\sin x$	128

§ 4. Показательная функция с комплексным значением показателя	129
§ 5. Формулы Эйлера	133
§ 6. Тригонометрические функции от комплексного значения аргумента	133
§ 7. Гиперболические функции от комплексного значения аргумента	134
§ 8. Вычисление значений функций при помощи ряда Маклорена	135
§ 9. Биномиальный ряд	138
§ 10. Приложения биномиального ряда	141
§ 11. Разложение в ряд Маклорена логарифмической функции	142
§ 12. Приближенное вычисление определенных интегралов при помощи степенных рядов	144
§ 13. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов	145
Глава 8. Ортогональные и ортонормальные системы функций	148
§ 1. Проекция и разложения векторов	148
§ 2. Векторы и функции	155
§ 3. Нормированные и ортогональные функции	157
§ 4. Нормированные и ортогональные системы функций	158
§ 5. Нормировка систем функций	159
§ 6. Разложение по системам функций	160
Глава 9. Ряды Фурье	162
§ 1. Ряды и коэффициенты Фурье	162
§ 2. Условия Дирихле и теорема о разложении функции в ряд Фурье	165
§ 3. Разложение периодических функций в ряд Фурье	166
§ 4. Физическое истолкование разложения функции в тригонометрический ряд Фурье	168
§ 5. Разложение функции $f(x) = x$	169
§ 6. Сдвиг сегмента разложения	171
§ 7. Изменение длины сегмента разложения	174
§ 8. Четные и нечетные функции	176
§ 9. Разложение четной функции в ряд Фурье	177
§ 10. Разложение нечетной функции в ряд Фурье	179
§ 11. Разложение в ряд Фурье функций на сегменте $[0, \pi]$	179
§ 12. Комплексная форма записи ряда Фурье	181
§ 13. Разложение в комплексный ряд Фурье	183
§ 14. Характер сходимости рядов Фурье	184
Глава 10. Уравнение свободных малых колебаний струны с закрепленными концами	189
§ 1. Уравнение свободных малых колебаний струны	189
§ 2. Начальные и граничные условия	191
§ 3. Метод разделения переменных	192

§ 4. Использование граничных условий. Собственные функции и собственные значения	193
§ 5. Использование начальных условий	195
Глава 11. Интеграл Фурье	198
§ 1. Представление функций интегралом Фурье	198
§ 2. Простейшие достаточные условия представимости функции интегралом Фурье	199
§ 3. Интеграл Фурье для четных функций	203
§ 4. Интеграл Фурье для нечетных функций	205
§ 5. Комплексная форма интеграла Фурье	207
§ 6. Понятие о преобразовании Фурье	210
§ 7. Косинус-преобразование Фурье	211
§ 8. Синус-преобразование Фурье	211
§ 9. Спектральная функция	212
ЧАСТЬ II	
Глава 12. Дальнейшие признаки сходимости рядов с постоянными членами	214
§ 1. Признак сходимости Куммера	214
§ 2. Признак сходимости Раабе	217
§ 3. Признак сходимости Бертрана	221
§ 4. Признак сходимости Гаусса	224
§ 5. Сходимость знакопеременных рядов	228
§ 6. Признак сходимости Дирихле	230
Глава 13. Двойные ряды	233
§ 1. Определение двойного ряда	233
§ 2. Сходимость двойных рядов	234
§ 3. Критерии сходимости двойных рядов. Теорема Маркова	237
§ 4. Свойства двойных рядов и признаки сходимости	240
§ 5. Абсолютная сходимость двойных рядов	243
§ 6. Двойные функциональные ряды	245
§ 7. Двойные степенные ряды	247
§ 8. Разложение функций двух переменных в двойные ряды Тейлора и Маклорена	250
§ 9. Ортогональные и ортонормальные системы функций от двух переменных	255
§ 10. Двойные ряды Фурье	257
Глава 14. Суммирование сходящихся рядов	259
§ 1. Постановка вопроса	259
§ 2. Линейные преобразования рядов	262
§ 3. Теорема Абеля и почленное дифференцирование и интегрирование рядов	266
§ 4. Последовательности разностей	269
§ 5. Преобразование рядов по Эйлеру	271
§ 6. Преобразование рядов по Куммеру	278

Глава 15. Суммирование расходящихся рядов	281
§ 1. Расходящиеся геометрические прогрессии	281
§ 2. Суммирующие функции	284
§ 3. Суммирование по Пуассону — Абелю	286
§ 4. Линейность и регулярность суммирования по Пуассону — Абелю	289
§ 5. Суммируемость рядов по Пуассону — Абелю и их абсолютная сходимость	289
§ 6. Теорема Таубера	294
§ 7. Суммирование по Чезаро	300
§ 8. Соотношение между сходимостью по Чезаро и по Пуассону — Абелю	302
§ 9. Суммирование по Эйлеру	305
Глава 16. Сходимость рядов Фурье	307
§ 1. «Вторая» теорема о среднем	307
§ 2. Исследование двух интегралов	312
§ 3. Исследование одного класса интегралов	317
§ 4. Доказательство теоремы Дирихле	323
§ 5. Теорема Фурье	325
§ 6. Коэффициенты Фурье разрывных функций	328
§ 7. Скорость сходимости рядов Фурье	330
§ 8. Улучшение сходимости рядов Фурье по методу выделения особенностей	332
§ 9. О равномерной сходимости рядов Фурье	336
§ 10. Неравномерная сходимость последовательностей непрерывных функций	337
§ 11. Поведение рядов Фурье функций в точках их разрыва. Явление Гиббса	342
§ 12. Экстремальное свойство сумм Фурье	350
§ 13. Суммирование рядов Фурье по Чезаро. Теорема Фейера	352
§ 14. Равенство Парсеваля	356
§ 15. Теорема Вейерштрасса	359
Глава 17. Применение рядов Фурье в теории изгиба балок	361
§ 1. Общая схема решения задач	361
§ 2. Изгиб балки	362
§ 3. Свободно опертая балка	368
§ 4. Первая возможность ограничиться двукратным дифференцированием	371
§ 5. Случай сосредоточенной нагрузки	373
§ 6. Прогиб балки от распределенной нагрузки	377
§ 7. Прогиб от сосредоточенного момента	379
§ 8. Статически неопределимая балка	380
§ 9. Сложный изгиб балки	383
§ 10. Балка на упругом основании	387
§ 11. Вторая возможность ограничиться двукратным дифференцированием. Потенциальная энергия изгиба балки	389

§ 12. Потенциальная энергия изгиба балки в случае нескольких нагрузок	391
§ 13. Функции прогиба с ортогональными вторыми производными	394
§ 14. Свободно опертая нагруженная балка	396
§ 15. Работа продольных сил при сложном изгибе балки	397
§ 16. Общий случай изгиба балки	400
§ 17. Общий случай изгиба свободно опертой балки	402
§ 18. Изгиб симметрично нагруженной балки, жестко заделанной по концам	403
§ 19. Функция прогиба симметрично загруженной балки с жестко заделанными концами	406
Именной указатель	408

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Данный курс составлен в точном соответствии с разделом «Ряды» программы по высшей математике для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Поэтому его можно использовать не только как пособие для слушателей курса лекций, но и при самостоятельной работе над предметом.

Основной опасностью при изучении теории рядов автор считает вульгарное представление о ряде как о «сумме бесконечного числа слагаемых». Поэтому он принял против него все возможные профилактические меры, жертвуя иногда ради строгости наглядностью изложения.

Напротив, в согласии с обычной практикой прохождения курса теории рядов, обоснование интегральной формулы Фурье проводится при помощи нестрогих, правдоподобных («эвристических») рассуждений, а доказательства теоремы о дифференцировании степенных рядов в комплексной области и теоремы Дирихле о разложении в ряд Фурье опущены вовсе. Уравнение свободных малых колебаний струны с закрепленными концами и его решение методом Фурье, относимые некоторыми вариантами учебных программ к разделу «Ряды», выделены в самостоятельную главу.

Некоторым отклонением от традиции является глава 1, в которой на примере геометрических прогрессий демонстрируются практически все идеи курса (вплоть до рядов Фурье). Эта глава является вспомогательной и преследует чисто методические цели,

Приводимые в книге примеры носят иллюстративный характер и не являются упражнениями для читателя. Поэтому параллельно с изучением материала данной книги необходимо пользоваться тем или иным сборником задач.

Автор признателен Р. С. Гутеру и П. М. Ризу за конструктивную и доброжелательную критику рукописи и за многочисленные ценные советы, а также редактору книги А. С. Чистопольскому за ряд улучшений текста.

За все критические замечания автор будет весьма благодарен.

Н. Н. Воробьев

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Автор полагает целесообразным, чтобы каждый математический курс, помимо безызыточного изложения требуемого программой материала, содержал и дополнительные главы для более глубокого изучения отдельных вопросов. Поэтому при подготовке третьего издания соответствующий программе текст предшествующих изданий после незначительной переработки и небольших дополнений был объединен в первую часть книги. Вторую часть составили новые главы, каждая из которых является небольшим очерком, дополняющим основной курс в том или ином направлении. Содержание каждой из них мало зависит от остальных глав второй части. Поэтому их можно использовать в весьма различных комбинациях для расширения основного курса, а также в факультативных курсах, и в том числе — по прикладной математике. В отличие от обязательной части курса, подбор материала, включенного в главы второй части, был сделан на основании представлений автора о желательных направлениях, по которым следует углублять знания в области теории рядов. Хотя чтение второй части книги не предполагает знания каких-либо фактов, выходящих за пределы предшествовавших разделов курса высшей математики, многие разбираемые в ней вопросы более сложны, чем в первой части, и изучение их может потребовать больших усилий.

Автор благодарен (особенно Р. С. Гутеру) за все высказанные ему замечания и надеется на дальнейшую критику.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Дополнения, отличающие данное издание от предыдущего, не затрагивают ни содержания книги в целом, ни ее структуры и имеют целью более полное и последовательное изложение рассматриваемых вопросов, а также демонстрацию логических связей между ними. Наиболее значительные дополнения внесены в главу 16, посвященную сходимости рядов Фурье (идея включения в книгу вопроса о суммировании рядов Фурье по Чезаро — Фейеру была подсказана одним из рецензентов). За пределами этой главы новым является параграф в главе 15 о суммировании расходящихся рядов по Эйлеру. Чтобы читатель получил хоть какие-то сведения об упоминаемых в книге математиках, к ней приложен именной указатель. Остальные дополнения довольно многочисленны, но носят локальный характер. В текст внесен ряд стилистических улучшений и исправлены обнаруженные погрешности.

Автор надеется на дальнейшее критическое внимание со стороны читателей.

Вырица, 1978

Н. Н. Воробьев

Часть I

ГЛАВА I

ПРОГРЕССИИ

§ 1. Введение

При изучении теории рядов приходится сталкиваться с трудностями двоякого рода.

Прежде всего, теория рядов, как и всякая математическая теория, имеет свой аналитический аппарат, состоящий из теорем, различных приемов преобразования формул, методов доказательств равенств и неравенств, вычислений пределов, подсчетов конечных сумм и т. д. Этот аппарат составляет существенную часть курса теории рядов, и его освоение требует основательного изучения (и в том числе запоминания) довольно большого числа утверждений и формул, а также практических навыков, приобретаемых в ходе решения задач. С этой точки зрения теория рядов в принципе мало чем отличается от тех частей математического анализа, которые составляли предмет предыдущих разделов курса высшей математики: дифференциального и интегрального исчислений. В этом смысле теория рядов никаких особых трудностей при своем изучении доставлять не будет. Кроме того, у нас на протяжении курса будет достаточно возможностей обращать внимание на аналитическую (так сказать, на «формульную») сторону вопроса и отрабатывать типичные приемы рассуждений и вычислений.

Однако ряды при своем изучении доставляют трудности еще и другого характера, связанные с необычностью самого объекта изучения, каковым является ряд. Дело в том, что ряд по видимости является «суммой бесконечного числа слагаемых». Поставленное же в кавычки выражение нельзя понимать буквально уже хотя бы потому, что обычная алгебра занимается только действиями над конечным числом компонент и, в частности, суммами конечного числа слагаемых. Значит, на самом деле речь идет не об обычной сумме, а о чем-то таком, что еще

нужно правильно истолковать и понять. По этой же причине мы здесь не можем безоговорочно пользоваться знакомыми еще по школьной элементарной математике такими привычными и такими удобными законами действий, как переместительный (коммутативный) или сочетательный (ассоциативный) законы. Более того, некритическое применение этих, казалось бы, незыблемых правил может привести к совершенно неверным ответам. Тем более осторожно следует относиться к переносу на ряды известных простых теорем о дифференцировании и интегрировании сумм, состоящих из конечного числа слагаемых. Правда, сходные трудности уже появлялись в ходе освоения понятия определенного интеграла (который тоже в какой-то мере может пониматься как «сумма бесконечного числа слагаемых», именно, как общий предел некоторых последовательностей обычных сумм, когда число слагаемых в этих суммах неограниченно возрастает). Особенно близкими оказываются сейчас для нас рассуждения, касающиеся несобственных интегралов с бесконечными пределами¹⁾. Однако следует иметь в виду, что в рамках программы нашего курса теория рядов более глубоко входит в эти вопросы, и возникающие в связи с этим трудности будут обильнее и серьезнее.

Чтобы избежать одновременного столкновения с трудностями обоих перечисленных типов, аналитическими и логическими, полезно до построения систематической теории рядов пронаблюдать основные понятия этой теории и их взаимосвязь на некотором частном, достаточно простом и по возможности известном примере, который будет для нас играть роль модели. В качестве такой модели мы рассмотрим теорию геометрических прогрессий.

§ 2. Геометрические прогрессии

Последовательность вида

$$a, aq, aq^2, \dots \quad (1.1)$$

называется *геометрической прогрессией*. При этом a называется *первым членом* прогрессии, а q — ее *знаменателем*.

¹⁾ В связи со сказанным можно настоятельно рекомендовать читателям вспомнить и вновь продумать во всех деталях определения определенного интеграла и, особенно, несобственного интеграла с бесконечными пределами.

На n -м месте в последовательности (1.1) должно стоять выражение aq^{n-1} . Оно называется *общим членом* прогрессии (1.1). Полагая в этом выражении $n=1, 2, \dots$, мы можем записать и вычислить любой член этой прогрессии. Если $a=0$, то все члены прогрессии (1.1) также будут равны нулю. Если $q=0$, то в нуль обращаются все члены прогрессии, начиная со второго. Эти малоинтересные случаи мы далее рассматривать не будем.

Геометрические прогрессии могут быть численные:

$$6, 12, 24, 48, \dots, \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots,$$

$$1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 7 + 5\sqrt{2}, 17 + 12\sqrt{2}, \dots, \\ i, -1, -i, 1, i, \dots$$

и функциональные:

$$ax, ax^2, ax^3, \dots \\ x, x \sin x, x \sin^2 x, \dots$$

Если в прогрессии (1.1) имеется только конечное число членов, т. е. если в ней существует последний член, то прогрессия называется *конечной*; в противном случае, если за каждым членом прогрессии следует еще хотя бы один член, то прогрессия называется *бесконечной*.

В случае конечной прогрессии

$$a, aq, \dots, aq^{n-1} \quad (1.2)$$

можно говорить о сумме всех ее членов s :

$$s = a + aq + \dots + aq^{n-1}. \quad (1.3)$$

Для вычисления s умножим почленно равенство (1.3) на знаменатель прогрессии q :

$$sq = aq + aq^2 + \dots + aq^n,$$

и вычтем почленно полученное равенство из равенства (1.3). В результате мы получим

$$s(1 - q) = a - aq^n.$$

Если при этом $q \neq 1$, то отсюда следует

$$s = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \quad (1.4)$$

Если же $q = 1$, то, как легко видеть, все члены прогрессии (1.2) равны друг другу, и сумма их, очевидно, равна an .

§ 3. Бесконечные прогрессии; их сходимость и расходимость

В случае бесконечной прогрессии

$$a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots \quad (1.5)$$

о сумме s всех ее членов

$$a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

пока говорить несколько преждевременно, поскольку мы еще не условились, какой смысл следует придавать этому выражению. Однако мы во всяком случае можем говорить о сумме s_n *первых* n членов этой прогрессии:

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1},$$

которую можно назвать n -й *частичной суммой* прогрессии.

(Как было только что выяснено, при $q \neq 1$ эта сумма равна $\frac{a - aq^n}{1 - q}$.)

Естественно считать суммой s бесконечной прогрессии (1.5) предел ее частичных сумм s_n при неограниченном возрастании n :

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Подчеркнем, что мы здесь *вводим определение* суммы всех членов прогрессии. Это определение действительно естественное: чем больше слагаемых мы возьмем в сумме вида s_n , тем «ближе» мы подойдем к предельному значению суммы. Поэтому не должно вызывать возражений, если в качестве «суммы всех» членов прогрессии мы этот предел и примем.

Таким образом, о сумме s можно говорить лишь тогда, когда существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. В этом случае

говорят, что прогрессия (1.5) *сходится*; если такого предела не существует, то говорят, что прогрессия (1.5) *расходится*.

Воспользовавшись формулой (1.4), определение s можно при $q \neq 1$ переписать как

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Так как a и q от n не зависят, мы можем последнюю формулу представить в виде

$$s = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n. \quad (1.6)$$

Дальнейшее зависит от значения знаменателя q (напомним, что мы считаем $a \neq 0$).

Если $|q| < 1$, то, очевидно, стоящий в (1.6) предел равен нулю и мы получаем

$$s = \frac{a}{1 - q}. \quad (1.7)$$

Следовательно, при $|q| < 1$ прогрессия (1.5) сходится.

Пусть теперь $|q| \geq 1$. Предположим, что при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Тогда, начиная с некоторого места, все s_n будут близки к s , отличаясь от s менее чем на некоторое сколь угодно малое, наперед заданное число ε . Тем самым они должны отличаться друг от друга менее чем на 2ε . Но в наших условиях разность двух соседних сумм, s_{n+1} и s_n , есть aq^n и вовсе не стремится к нулю (а при $|q| > 1$ даже возрастает по модулю). Следовательно, при $|q| \geq 1$ прогрессия (1.5) расходится.

Таким образом, мы полностью выяснили вопрос о сходимости прогрессий. Оказалось, что сходятся те и только те прогрессии, у которых знаменатель по модулю меньше единицы.

Заметим, что этот вопрос был нами решен на основе непосредственного вычисления частичных сумм прогрессий и последующего перехода к пределу.

С какой скоростью сходятся сходящиеся прогрессии? Уметь ответить на этот вопрос важно потому, что многие применения прогрессий (как и рядов вообще) основаны на замене суммы всей прогрессии на некоторую ее частичную

сумму или наоборот. Для прогрессий поставленный вопрос решается просто. Очевидно, для любой сходящейся прогрессии

$$s - s_n = \frac{aq^n}{1-q}.$$

Ясно, что чем ближе знаменатель прогрессии q к единице, тем хуже описывает частичная сумма s_n сумму s .

Если прогрессия расходится, то говорить о ее сумме, строго говоря, нельзя. Прямое вычисление этой суммы с некритическим использованием «обычных» математических средств может привести к парадоксальным явлениям.

Например, пусть мы имеем прогрессию со знаменателем, равным -1 :

$$a, -a, a, -a, \dots$$

«Сумма» этой прогрессии формально записывается как

$$a - a + a - a + \dots$$

Объединяя попарно ее соседние члены, начиная с первого, мы получим

$$(a - a) + (a - a) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0.$$

Объединяя же попарно соседние члены, начиная со второго, мы получим совсем другой ответ:

$$a + (a - a) + (a - a) + \dots = a + 0 + 0 + \dots = a.$$

§ 4. Элементарные преобразования прогрессий

Свойства действий над суммами бесконечных прогрессий во многом напоминают свойства действий над обычными суммами конечного числа слагаемых.

Рассмотрим бесконечную прогрессию

$$a, aq, aq^2, \dots \quad (1.8)$$

и отбросим в ней произвольное конечное число k первых членов. Полученная последовательность

$$aq^k, aq^{k+1}, aq^{k+2}, \dots, \quad (1.9)$$

очевидно, также будет прогрессией с тем же знаменателем q , что и исходная прогрессия (1.8). Поэтому на осно-

вании сказанного в предыдущем параграфе прогрессия (1.9) сходится или расходится одновременно с прогрессией (1.8).

Согласно формуле (1.7) сумма прогрессии (1.9) равна $\frac{aq^k}{1-q}$. Эта сумма отличается от суммы исходной прогрессии (1.8) на

$$\frac{a}{1-q} - \frac{aq^k}{1-q} = a \frac{1-q^k}{1-q} = a + aq + \dots + aq^{k-1},$$

т. е. на сумму членов прогрессии (1.8), отброшенных при переходе от нее к прогрессии (1.9).

Таким образом, отбрасывание у прогрессии любого конечного числа членов не сказывается на сходимости прогрессии и изменяет сумму сходящейся прогрессии на сумму отброшенных членов.

Возьмем снова прогрессию (1.8) и умножим каждый ее член на произвольное отличное от нуля число α . В результате мы получим прогрессию $\alpha a, \alpha aq, \alpha aq^2, \dots$. Ее знаменатель — снова тот же, что в прогрессии (1.8), а сумма равна $\frac{\alpha a}{1-q}$. Отсюда следует, что при умножении всех членов прогрессии на одно и то же число, отличное от нуля, сходимость исходной прогрессии не изменяется, а в случае, если прогрессия сходится, ее сумма умножается на это же число.

Возьмем теперь две бесконечные прогрессии с одним и тем же знаменателем q :

$$a, aq, aq^2, \dots,$$

$$b, bq, bq^2, \dots,$$

и составим последовательность сумм их соответствующих членов:

$$a + b, (a + b)q, (a + b)q^2, \dots$$

Очевидно, при этом мы опять получим прогрессию с тем же знаменателем q . Она сходится в том и только в том случае, когда сходятся исходные прогрессии, а в случае сходимости ее сумма равна

$$\frac{a+b}{1-q} = \frac{a}{1-q} + \frac{b}{1-q},$$

т. е. получается сложением сумм прогрессий-слагаемых.

§ 5. Функциональные прогрессии: область сходимости; равномерная сходимость

Рассмотрим теперь прогрессию, в которой как первый член, так и знаменатель являются функциями некоторого переменного x :

$$a(x), a(x)q(x), a(x)q^2(x), \dots \quad (1.10)$$

Такого рода прогрессии называются *функциональными*. Придавая переменной x те или иные значения, мы будем получать различные числовые прогрессии:

$$\begin{aligned} a(x_1), a(x_1)q(x_1), a(x_1)q^2(x_1), \dots, \\ a(x_2), a(x_2)q(x_2), a(x_2)q^2(x_2), \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

и т. д.

В известном смысле можно говорить, что функциональная прогрессия (1.10) является своеобразной «функцией», а числовые прогрессии (1.11) — ее «значениями».

Некоторые из прогрессий (1.11) могут оказаться сходящимися, а другие — расходящимися. Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что сходящимися будут те и только те прогрессии, для которых $|q(x)| < 1$. Кроме того, очевидно, сходятся также прогрессии, соответствующие тем значениям x , для которых $a(x) = 0$. Однако этот тривиальный случай не представляет интереса и мы его рассматривать не будем.

Принято говорить, что значения x , для которых $|q(x)| < 1$, составляют *область сходимости* функциональной прогрессии (1.10).

Мы видим, что решение вопроса о сходимости функциональной прогрессии (1.10) связано только со значением ее знаменателя $q(x)$, а функциональная зависимость q от x лишь выражает ответ на этот вопрос в несколько иной форме. Поэтому мы будем в качестве независимой переменной брать сам знаменатель и обозначать его через x . Далее (поскольку мы отвлекаемся от неинтересного случая $a(x) = 0$), значение $a(x)$ не влияет на сходимость прогрессии. Поэтому мы в дальнейшем будем полагать $a(x) \equiv 1$ и ограничиваться, таким образом, функциональной прогрессией

$$1, x, x^2, \dots \quad (1.12)$$

Рассмотрим теперь «скорость» сходимости различных прогрессий вида (1.12), т. е. вопрос о том, насколько быстро нарастающие суммы их первых членов стремятся к суммам прогрессий.

Сумма первых n членов функциональной прогрессии (1.9) равна

$$\frac{1-x^n}{1-x}. \quad (1.13)$$

Если $|x| < 1$, то прогрессия (1.9) при этом значении сходится, а ее сумма равна

$$\frac{1}{1-x}. \quad (1.14)$$

Это можно записать как

$$1+x+\dots+x^{n-1}+\dots=\frac{1}{1-x}. \quad (1.15)$$

Разность между полной суммой (1.14) и частичной суммой (1.13) составляет

$$\frac{x^n}{1-x}. \quad (1.16)$$

С ростом n эта разность абсолютно убывает. С другой стороны, при каждом конкретном значении n при приближении x к единице числитель последней дроби возрастает, приближаясь также к единице, а знаменатель убывает, приближаясь к нулю. Следовательно, вся дробь возрастает. Поэтому, чтобы при x , близком к 1, разность (1.16) была достаточно малой, необходимо взять большое число n членов прогрессии. По мере приближения x к 1 это число n неограниченно возрастает.

Однако если ограничиваться значениями x , для которых

$$|x| \leq \alpha < 1, \quad (1.17)$$

то, очевидно, можно найти такое n , которое обеспечит любую наперед заданную малость разности (1.16) *при всех* таких x . Это обстоятельство называется *равномерной сходимостью* прогрессии (1.12) для всех x , удовлетворяющих неравенству (1.17).

Подчеркнем, что в неравенстве (1.17) число α может быть взято сколь угодно близким к единице, но должно быть строго меньше, чем 1.

§ 6. Почленное интегрирование прогрессий

Считая, что переменная x принимает вещественные значения, напишем тождество

$$1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \quad (1.18)$$

и проинтегрируем правую и левую его части по x от 0 до некоторого $t < 1$:

$$\int_0^t (1 + x + \dots + x^{n-1}) dx = \int_0^t \frac{dx}{1-x} - \int_0^t \frac{x^n}{1-x} dx.$$

Выполняя очевидные интегрирования, мы получаем

$$t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{x^n}{1-x} dx,$$

а применяя к последнему интегралу теорему о среднем,

$$t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t) - (x_n)^n \int_0^t \frac{dx}{1-x},$$

где $0 \leq x_n \leq t$ (ясно, что выносимое за знак интеграла значение переменной x должно, вообще говоря, зависеть от n ; поэтому оно и обозначено через x_n).

Вычисление оставшегося интеграла дает нам

$$t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t) + (x_n)^n \ln(1-t). \quad (1.19)$$

Полученное неравенство справедливо для любого n , причем для каждого n число x_n не превосходит t , которое меньше единицы. Следовательно, $(x_n)^n \leq t^n$. Поэтому, устремляя в равенстве (1.19) n к бесконечности, мы получим в пределе

$$t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n} + \dots = -\ln(1-t). \quad (1.20)$$

Эта формула интересна и сама по себе, так как позволяет представить логарифмическую функцию в виде суммы натуральных степеней, взятых с надлежащими коэффициентами. Для нас сейчас, однако, эта формула представляет интерес главным образом по другой причине.

Перепишав ее в виде

$$\int_0^t dx + \int_0^t x dx + \dots + \int_0^t x^{n-1} dx + \dots = \int_0^t \frac{dx}{1-x},$$

мы можем сказать, что сумма интегралов всех членов бесконечной геометрической прогрессии (а точнее, *предел* сумм интегралов первых ее членов) равна интегралу от ее суммы. Разумеется, для того чтобы вся эта фраза имела смысл, необходимо, чтобы прогрессия во всей области интегрирования была равномерно сходящейся.

Подчеркнем, что это утверждение не является тривиальным следствием того, что «сумма интегралов от функций равна интегралу от их суммы», а было получено в результате определенных выкладок и ссылок на конкретные факты математического анализа.

§ 7. Почленное дифференцирование прогрессий

Снова напишем тождество (1.18)

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \quad (1.21)$$

и на этот раз продифференцируем обе его части:

$$1 + 2x + \dots + (n-1)x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n-1}(1-x) + x^n}{(1-x)^2}. \quad (1.22)$$

Полагая в этом тождестве $n \rightarrow \infty$, мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2x + \dots + (n-1)x^{n-2}) &= \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \lim_{n \rightarrow \infty} nx^{n-1} - \frac{1}{(1-x)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Слева под знаком предела стоит сумма, зависящая от n . При любом $0 < x < 1$ она с ростом n возрастает и притом остается ограниченной сверху числом $\frac{1}{(1-x)^2}$. Следовательно, эта сумма имеет предел

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2x + \dots + (n-1)x^{n-2}) &= \\ &= 1 + 2x + \dots + (n-1)x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Для вычисления первого из пределов в правой части (1.23) рассмотрим предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zx^{z-1},$$

где z может принимать любые вещественные значения. Этот предел представляет собой неопределенность. Раскрывая ее по правилу Лопиталя (дифференцированием по z), мы получаем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zx^{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{x^{-z+1}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{-x^{-z+1} \ln x} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-x^{z-1}}{\ln x} = 0.$$

Отсюда следует, что для любой неограниченно возрастающей последовательности значений z последовательность значений функции zx^{z-1} стремится к нулю. В частности, это имеет место и в том случае, когда z принимает целочисленные значения $n = 1, 2, \dots$ Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^{n-1} = 0.$$

Наконец, второй предел в (1.23) справа, очевидно, также равен нулю.

Учитывая все сказанное, мы можем переписать равенство (1.23) как

$$1 + 2x + \dots + (n-1)x^{n-2} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (1.24)$$

или, иначе,

$$\frac{d1}{dx} + \frac{dx}{dx} + \frac{dx^2}{dx} + \dots + \frac{dx^{n-1}}{dx} + \dots = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}.$$

Таким образом, предел суммы производных от членов геометрической прогрессии равен производной от суммы прогрессии.

Как и в предыдущем параграфе, установленный факт потребовал некоторых специальных рассуждений.

Формулы (1.15), (1.20), (1.24) показывают, что существуют функции, вид которых существенно отличается от многочлена, но которые можно представить в виде «бесконечной суммы» степеней переменной, взятых с теми или иными коэффициентами.

В главе 6 будет показано, что такому представлению поддаются весьма разнообразные функции.

§ 8. Прогрессии с комплексными членами

Перепишем тождество (1.18) в третий раз, в несколько видоизмененной форме:

$$z - z^2 + z^3 - \dots + (-1)^{n+1} z^n = \frac{z - (-1)^n z^{n+1}}{1 + z}, \quad (1.25)$$

считая, что z есть комплексное число, по модулю равное единице и отличное от -1 , т. е.

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (-\pi < \varphi < \pi). \quad (1.26)$$

Из равенства (1.25) двух комплексных чисел следует равенство их вещественных частей. Но согласно формуле Муавра при любом $k = 1, 2, \dots$

$$z^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi,$$

и поэтому левая часть (1.23) есть

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi) - (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + (-1)^{n+1} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Следовательно, ее вещественная часть равна

$$\cos \varphi - \cos 2\varphi + \dots + (-1)^{n+1} \cos n\varphi. \quad (1.27)$$

Найдем теперь вещественную часть *правой* части (1.25). Подставим для этого в правую часть (1.25) вместо z его выражение (1.26):

$$\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi - (-1)^n (\cos (n+1) \varphi + i \sin (n+1) \varphi)}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi}.$$

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на выражение, сопряженное знаменателю, мы получим

$$\begin{aligned} & \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi) (1 + \cos \varphi - i \sin \varphi)}{(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi) (1 + \cos \varphi - i \sin \varphi)} - \\ & - \frac{(-1)^n (\cos (n+1) \varphi + i \sin (n+1) \varphi) (1 + \cos \varphi - i \sin \varphi)}{(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi) (1 + \cos \varphi - i \sin \varphi)}. \end{aligned}$$

Вещественная часть числителя этой разности равна $\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - (-1)^n (\cos (n+1) \varphi + \cos (n+1) \varphi \cos \varphi + \sin (n+1) \varphi \sin \varphi)$,

или (последние два слагаемых в скобках представляют собой косинус разности)

$$1 + \cos \varphi - (-1)^n (\cos (n+1) \varphi + \cos n\varphi),$$

т. е., преобразуя сумму косинусов, получаем

$$1 + \cos \varphi - (-1)^n 2 \cos \frac{2n+1}{2} \varphi \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Знаменатель дроби стал вещественным; он равен теперь

$$2 + 2 \cos \varphi.$$

Следовательно, вещественная часть дроби равна

$$\frac{1}{2} - (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \varphi \cos \frac{\varphi}{2}}{1 + \cos \varphi} = \frac{1}{2} - (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Приравнивая это (1.27), мы получаем

$$\begin{aligned} \cos \varphi - \cos 2\varphi + \dots + (-1)^{n+1} \cos n\varphi = \\ = \frac{1}{2} - (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Проинтегрируем полученное тождество по φ от нуля до некоторого t , $0 \leq t < \pi$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos \varphi \, d\varphi - \int_0^t \cos 2\varphi \, d\varphi + \dots + (-1)^{n+1} \int_0^t \cos n\varphi \, d\varphi = \\ = \int_0^t \frac{1}{2} \, d\varphi - (-1)^n \int_0^t \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \, d\varphi, \end{aligned}$$

или, вычисляя интегралы (кроме последнего),

$$\begin{aligned} \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = \\ = \frac{1}{2} t - (-1)^n \int_0^t \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \, d\varphi. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Возьмем оставшийся интеграл по частям, полагая

$$u = \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}}, \quad dv = \cos \frac{2n+1}{2} \varphi \, d\varphi.$$

Это дает нам

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi &= \\ &= \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \bigg|_0^t - \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\cos \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi \right). \end{aligned}$$

Но первое слагаемое в скобках ограничено (ибо $t < \pi$ и поэтому $\cos \frac{t}{2} > 0$). Кроме того, учитывая, что $\cos \frac{\varphi}{2}$ убывает и принимает поэтому наименьшее свое значение при $\varphi = t$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi \right| &\leq \int_0^t \frac{\left| \sin \frac{2n+1}{2} \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \right|}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi \leq \\ &\leq \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} \int_0^t dt = \frac{t}{\cos^2 \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, и второе слагаемое в скобках ограничено.

Таким образом, интеграл в формуле (1.29) с ростом n стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 0.$$

Переходя в равенстве (1.29) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая только что установленное, мы получаем

$$\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt + \dots = \frac{1}{2} t. \quad (1.30)$$

Итак, оказывается, что не только степенями можно описывать функции, совершенно непохожие на полиномы, но и «бесконечной суммой» синусов кратных дуг (разумеется, если эти синусы берутся с нужными коэффициентами) можно совершенно точно описать линейную функцию, которая на первый взгляд не имеет с тригонометрическими функциями ничего общего.

Формула (1.30) получена нами для любого $t \in [0, \pi]$. Из нечетности функций, стоящих в обеих ее частях, следует, что она верна и при $t \in (-\pi, 0]$, т. е. для любого $t \in (-\pi, \pi)$.

Заметим, что при $t = \pm \pi$ все проведенные рассуждения перестают быть справедливыми. Более того, сама окончательная формула (1.30) становится при этом неверной; действительно, при $t = \pm \pi$ все синусы в (1.30) обращаются в нуль, тогда как справа оказывается отличное от нуля число $\pm \frac{\pi}{2}$.

Обратим, однако, внимание на то обстоятельство, что при $t = \pm \pi$ левая часть (1.30) равна полусумме значений, которые правая часть принимает при $t = \pi$ и $t = -\pi$.

Как мы увидим далее (в главе 9), все перечисленные здесь факты являются проявлениями весьма общей закономерности.

Положим, наконец, в формуле (1.30) $t = \frac{\pi}{2}$. Так как при $k = 1, 2, \dots$

$$\sin \frac{4k+1}{2} \pi = 1, \quad \sin \frac{4k+3}{2} \pi = -1, \quad \sin k\pi = 0,$$

мы получаем

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}. \quad (1.31)$$

Этой формулой можно воспользоваться для приближенного вычисления числа π , хотя необходимо признать, что такое вычисление не очень практично.

* *
*

В сущности, в этой главе мы, работая с прогрессиями, познакомились в общих чертах со всеми основными идеями курса теории рядов. Все дальнейшее будет лишь обобщением, уточнением и разработкой уже сказанного.

**ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ**

§ 1. Сложение и его свойства

Как вещественные, так и комплексные числа можно, как известно, складывать в любом конечном числе. Это значит, что, каков бы ни был конечный набор чисел

$$u_1, u_2, \dots, u_n,$$

существует число s , являющееся суммой всех чисел из этого набора:

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Действие сложения чисел коммутативно (перестановочно) в том смысле, что «от перестановки слагаемых сумма не изменяется»:

$$u_1 + u_2 = u_2 + u_1,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u_3 + u_4 + u_2 + u_1$$

и т. д.

Кроме того, это действие удовлетворяет ассоциативному (сочетательному) закону, согласно которому для нахождения суммы нескольких слагаемых эти слагаемые можно объединить в группы, найти суммы слагаемых, составляющих каждую из этих групп, и все полученные суммы сложить. Например,

$$(((u_1 + u_2) + u_3) + u_4) + u_5 = u_1 + ((u_2 + u_3) + (u_4 + u_5)).$$

Отметим, наконец, еще дистрибутивный (распределительный) закон сложения по отношению к умножению:

$$c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n.$$

§ 2. Определение числового ряда и его сходимости

Пусть теперь

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (2.1)$$

— *бесконечная* последовательность чисел, которые могут быть как вещественными, так и комплексными.

О п р е д е л е н и е. Выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.2)$$

называется *рядом* (в данном случае — *числовым рядом*), а элементы последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — *членами ряда*.

Иногда для обозначения ряда (2.2) применяют следующую запись:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

(читается: что сумма u_n по n от 1 до ∞).

Очевидно, что совершенно несущественно, какой номер мы будем приписывать первому по порядку члену последовательности (2.1) и ряду (2.2). В частности, иногда оказывается удобным начинать нумерацию членов ряда с нулевого члена. Тогда ряд (2.2) приобретет вид

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

или
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Поскольку выражение (2.2) для ряда рассматривается как единое целое, для его задания необходимо задать каждый его член u_n . Обычно член ряда описывается как некоторая функция от своего номера. Аналитическое выражение этой функции часто называют «общим» членом ряда. Например, «общим» членом геометрической прогрессии a, aq, aq^2, \dots является aq^{n-1} .

Само по себе выражение (2.2) никакого определенного смысла не имеет, потому что действие сложения в своем непосредственном содержании имеет дело каждый раз лишь с конечным числом слагаемых. Этот смысл выражению (2.2) предстоит приписать нам самим. Очевидно, это следует сделать так, чтобы «бесконечная сумма» (2.2), с одной стороны, была бы «похожа» на обычные суммы,

а с другой, — описывала бы на языке математического анализа те или иные реальные факты и помогала бы решать задачи. Из последней фразы видно, что в определении смысла выражения (2.2) содержится некоторый произвол: мы можем по-разному понимать сумму (2.2). Формулировки различных таких пониманий и сопоставления их друг с другом представляют большой интерес, как теоретический, так и практический. Мы однако, в первой части курса ограничимся рассмотрением только одной такой формулировки, пожалуй, наиболее естественной.

Определение. Сумма n первых членов ряда (2.2)

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

называется n -й *частичной суммой* этого ряда.

Очевидно, первая, вторая, третья и т. д. частичные суммы ряда

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

составляют бесконечную последовательность.

Определение. Ряд (2.2) называется *сходящимся*, если последовательность $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ его частичных сумм имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Значение s этого предела называется *суммой ряда* (2.2).

Определение. Ряд (2.2) называется *расходящимся*, если последовательность его частичных сумм предела не имеет (в частности, если члены последовательности частичных сумм неограниченно возрастают по модулю).

Содержание теории числовых рядов состоит в установлении сходимости или расходимости тех или иных рядов и в вычислении сумм сходящихся рядов.

В принципе можно доказывать сходимость или расходимость каждого ряда, а также вычислять сумму сходящегося ряда, опираясь непосредственно на определения сходимости и суммы. Именно, в каждом случае можно попытаться составить аналитическое выражение для n -й частичной суммы ряда и найти предел этого выражения при возрастании n .

Примеры.

1. Для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

n -я частичная сумма

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

и

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1,$$

так что этот ряд сходится, и сумма его равна 1.

2. Для ряда

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

n -я частичная сумма

$$s_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Последовательность частичных сумм

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 6, \quad \dots, \quad s_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dots$$

очевидно, неограниченно возрастает, так что этот ряд расходится и о его сумме говорить нельзя.

3. Для ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

всякая частичная сумма s_k с четным номером n равна нулю, а всякая сумма с нечетным номером — единице.

Последовательность частичных сумм этого ряда

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 0, \quad \dots,$$

хотя и ограничена, но не имеет предела. Следовательно, этот ряд так же расходится и не имеет суммы. Его можно назвать *колеблющимся*. Подчеркнем, что 0 и 1 в последовательности частичных сумм встречаются бесконечное число раз; однако ни одно из этих чисел не является пределом этой последовательности и не может считаться суммой ряда.

Сделаем, однако, два замечания:

Во-первых, только что описанный «естественный» путь часто оказывается весьма неудобным из-за трудности явного вычисления частичных сумм ряда и нахождения предела их последовательности.

Во-вторых, нередко при исследовании рядов значения частичных сумм не представляют интереса и после решения задачи превращаются в «отходы производства». Более того, иногда не нужна даже сумма ряда, а все исследования ведутся лишь ради установления самого факта сходимости или расходимости ряда.

Ввиду сказанного представляют интерес методы анализа рядов, приводящие к их суммам непосредственно, минуя вычисление частичных сумм. Точно так же оказываются полезными приемы, позволяющие констатировать сходимость ряда без нахождения его суммы.

Например, если все члены ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

положительны, то последовательность его частичных сумм

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

является возрастающей. Поэтому для существования у этой последовательности предела, и тем самым для сходимости ряда, необходимо и достаточно, чтобы все частичные суммы были ограничены в совокупности, т. е. чтобы нашлось такое число M , что $s_n < M$ при любом n . Нахождение такой верхней границы для последовательности всех частичных сумм сходящегося ряда иногда оказывается совсем простой задачей, как в примере 1, а иногда и более сложной.

Пример. Возьмем произвольное $\alpha > 1$ и рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (2.3)$$

Частичные суммы s_n этого ряда с ростом n возрастают. Поэтому

$$\begin{aligned} s_n < s_{2n+1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \right) < \\ &< 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \dots + \frac{2}{(2n)^\alpha} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right) = 1 + \frac{s_n}{2^{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

откуда

$$s_n < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} \text{ для любого } n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, переменная s_n является ограниченной и потому должна иметь предел, являющийся суммой ряда (2.3), который тем самым сходится. Ясно при этом, что сумма ряда (2.3) не может превосходить числа $2^{\alpha-1}/(2^{\alpha-1}-1)$.

Заметим, что при $\alpha \leq 1$ проведенное рассуждение уже не проходит. В § 2 главы 3 мы увидим, что при $\alpha \leq 1$ ряд (2.3) расходится.

Приемам и методам такого рода посвящена значительная часть данного курса.

§ 3. Остаток ряда

Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.4)$$

О п р е д е л е н и е. Ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

называется *n-м остатком* ряда (2.4).

Очевидно, *m-я* частичная сумма *n-го* остатка ряда равна разности $s_{n+m} - s_n$ частичных сумм самого ряда. Кроме того, мы имеем $s_{n+m} = s_n + (s_{n+m} - s_n)$, откуда, переходя к пределу по *m* при $m \rightarrow \infty$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{n+m} = s_n + \lim_{m \rightarrow \infty} (s_{n+m} - s_n). \quad (2.5)$$

Предел слева есть сумма *s* исходного ряда, а предел справа — сумма r_n его *n-го* остатка. Ясно, что из существования предела в левой части этого равенства следует существование предела в правой его части и наоборот. Поэтому если сходится один из остатков ряда, то сходится и сам ряд. Точно так же из сходимости ряда следует сходимость каждого его остатка.

Из формулы (2.5) видно, что частичная сумма сходящегося ряда отличается от его суммы на величину суммы остатка. Поэтому чем меньше сумма остатка ряда, тем точнее описывает соответствующая частичная сумма ряда сумму всего ряда.

Теорема. Если ряд (2.4) сходится, то сумма r_n его *n-го* остатка с ростом *n* стремится к нулю.

Доказательство. Мы видели, что

$$s = s_n + r_n.$$

Так как это равенство справедливо для любого *n*, мы можем перейти в нем по *n* к пределу:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} r_n.$$

Но для сходящегося ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

§ 4. Принцип сходимости Коши

Напомним одну важную, но довольно деликатную теорему из теории пределов, называемую *принципом сходимости Коши*.

Теорема. *Если*

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \quad (2.6)$$

— некоторая числовая последовательность, то для того, чтобы она сходилась к некоторому конечному пределу s , необходимо и достаточно, чтобы по любому $\varepsilon > 0$ нашлось такое n , что для любого $m \geq 0$

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Доказательство. Необходимость доказывается совсем просто. В самом деле, пусть последовательность (2.6) имеет конечный предел s . Это, в частности, означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n , что

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.8)$$

и при любом большем номере, чем n , т. е. при любом номере вида $n + m$, аналогичное неравенство также будет иметь место:

$$|s_{n+m} - s| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.9)$$

Складывая (2.8) и (2.9), мы получаем

$$\varepsilon > |s_{n+m} - s| + |s_n - s| \geq |s_{n+m} - s - s_n + s| = |s_{n+m} - s_n|,$$

т. е. требуемое неравенство (2.7).

Достаточность оказывается фактом, существенно более сложным (доказательство проводится здесь для случая вещественной последовательности; доказательство в комплексном случае отличается лишь малосущественными деталями).

Пусть по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое n , что для всех m выполняется неравенство (2.7). Это значит, что все члены последовательности (2.6), за исключением, быть

может, тех, которые предшествуют s_n , попадут в сегмент

$$[s_n - \varepsilon, s_n + \varepsilon]. \quad (2.10)$$

Значит, последовательность (2.6) оказывается ограниченной. Поэтому в ней найдется подпоследовательность, сходящаяся к некоторому пределу s .

В целях полноты изложения приведем доказательство этого факта.

Обозначим сегмент (2.10) через $[A_0, B_0]$. Он содержит бесконечно много членов последовательности (2.6). Разобьем этот сегмент на две половины:

$$\left[A_0, \frac{1}{2} (A_0 + B_0) \right] \text{ и } \left[\frac{1}{2} (A_0 + B_0), B_0 \right],$$

выберем ту из них, в которой окажется бесконечно много членов последовательности (2.6), обозначим ее через $[A_1, B_1]$ и снова разделим пополам. Будем продолжать такой процесс деления отрезка пополам и выбора половины, содержащей бесконечное число членов последовательности (2.6), неопределенно долго.

В результате мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга сегментов

$$[A_0, B_0], [A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots \quad (2.11)$$

Каждый из этих сегментов содержит бесконечно много членов последовательности (2.6). Поэтому из каждого сегмента $[A_k, B_k]$ можно выбрать член последовательности s_{n_k} так, чтобы все выбираемые члены имели различные номера.

Очевидно,

$$A_0 \leq A_1 \leq \dots < B_0.$$

Значит, последовательность чисел

$$A_0, A_1, A_2, \dots$$

монотонно неубывающая и ограничена сверху. Поэтому она имеет предел $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$. По аналогичным причинам существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k$.

Далее, очевидно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (B_k - A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k-1}} (B_0 - A_0) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k.$$

Обозначим этот общий предел через s .

Наконец, по выбору s_{n_k} для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$A_k \leq s_{n_k} \leq B_k.$$

При неограниченном возрастании k крайние члены этого неравенства стремятся к общему пределу s . Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}$ также существует и равен s .

Допустим теперь, что в последовательности (2.6) найдутся две подпоследовательности,

$$s_{n'_1}, s_{n'_2}, \dots,$$

$$s_{n''_1}, s_{n''_2}, \dots,$$

сходящиеся к различным пределам s' и s'' .

Возьмем

$$\varepsilon < \frac{1}{4} |s' - s''|$$

и найдем на основании условия теоремы такое n , что при всех m

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon. \quad (2.12)$$

Кроме того, найдем на основании определения предела такие n'_k и n''_k , что при любом $n'_k < n'_k$,

$$|s' - s_{n'_k}| < \varepsilon,$$

а при любом $n''_k > n''_k$

$$|s'' - s_{n''_k}| < \varepsilon.$$

Эти неравенства справедливы при всех достаточно больших номерах n'_k и n''_k . Поэтому среди этих номеров найдутся и такие, которые более, чем n . Возьмем $n'_k = n + m'$ и $n''_k = n + m''$. Мы имеем

$$|s' - s_{n+m'}| < \varepsilon,$$

$$|s'' - s_{n+m''}| < \varepsilon.$$

Кроме того, полагая в (2.12) $m = m'$ и $m = m''$, мы получаем

$$|s_{n+m'} - s_n| < \varepsilon,$$

$$|s_{n+m''} - s_n| < \varepsilon.$$

Объединение последних четырех неравенств дает нам

$$|s' - s''| \leq |s' - s_{n+m'}| + |s_{n+m'} - s_n| + |s_n - s_{n+m''}| + |s_{n+m''} - s''| < 4\varepsilon,$$

что противоречит предположенному.

§ 5. Критерий Коши сходимости рядов

Применим доказанную теорему к теории рядов, считая последовательность (2.6) последовательностью частичных сумм ряда.

Теорема. *Для того чтобы ряд*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

обладало следующим свойством: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое n , что при любом $m \geq 0$

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon.$$

Доказательство сводится к уяснению того, что сходимость ряда есть по определению сходимость последовательности его частичных сумм, и к применению к последовательности частичных сумм только что доказанного принципа сходимости Коши.

Эту теорему можно переформулировать следующим, быть может, несколько более наглядным образом: для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы по любому $\varepsilon > 0$ нашлось такое n , что сумма любого числа членов ряда, начиная с n -го, была меньше ε . Таким образом, сходимость ряда означает, что сколь угодно «длинные» суммы его последовательных членов должны быть малыми, если только они состоят из «достаточно далеких» членов ряда.

§ 6. Необходимый признак сходимости ряда

Близким к критерию Коши, хотя и несравненно более простым, является следующий необходимый признак сходимости ряда.

Для того чтобы ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{2.13}$$

сходиллся, необходимо, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \tag{2.14}$$

Действительно, из сходимости ряда (2.13) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s.$$

Но вместе с тем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n-1} + u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

т. е.

$$s = s + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

откуда и следует (2.14).

Пример. Ряд

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} + \dots$$

расходится, потому что для него

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2} > 0.$$

Выведенный признак сходимости является необходимым, но не достаточным: в дальнейшем мы познакомимся с многочисленными рядами, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, но которые тем не менее расходятся.

§ 7. Желательность систематической теории

В принципе мы могли бы при изучении сходимости числовых рядов ограничиться сказанным и исследовать каждый ряд с точки зрения критерия Коши. Однако тогда, приступая к изучению какого-нибудь нового ряда, мы вынуждены были бы каждый раз начинать с «пустого места». Наши возможности ограничивались бы при этом использованием индивидуальных особенностей каждого из изучаемых рядов, и вместо теории мы имели бы просто коллекцию разрозненных задач. Несколько шагов по этому пути было сделано в главе 1, посвященной прогрессиям. Но то, что оказалось пригодно для иллюстративных целей, совершенно нетерпимо при систематическом построении математической теории.

Поэтому мы сейчас займемся не столько установлением сходимостей или расходимостей отдельных рядов, сколько выяснением связей между поведением одних рядов и поведением других; мы будем учиться использовать сведения, полученные в результате анализа одного ряда, для упрощения исследования других рядов.

Выполняя эту программу, начнем с доказательства нескольких простых теорем, которые, по существу, являются непосредственным применением простейших теорем о пределах последовательностей к последовательностям частичных сумм рядов.

§ 8. Свойства сходящихся рядов, подобные свойствам сумм

Теорема 1 (ассоциативный закон для сходящихся рядов). *Если в сходящемся ряде*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.15)$$

произвольно объединить соседние члены в группы, не нарушая порядка членов:

$$(u_1 + \dots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2}) + (u_{n_2+1} + \dots + u_{n_3}) + \dots$$

(разумеется, каждый член при этом должен входить только в одну группу) и найти суммы v_1, v_2, v_3, \dots членов, входящих в каждую из групп, то составленный из этих сумм ряд

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (2.16)$$

будет сходиться и иметь ту же сумму, что и первоначальный ряд (2.15).

Доказательство. Составим последовательность частичных сумм ряда (2.15)

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Среди них, в частности, окажутся и все суммы вида

$$\begin{aligned} s_{n_1} &= u_1 + \dots + u_{n_1} = v_1, \\ s_{n_2} &= u_1 + \dots + u_{n_1} + u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2} = v_1 + v_2, \\ s_{n_3} &= u_1 + \dots + u_{n_1} + u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2} + u_{n_2+1} + \dots + u_{n_3} = \\ &= v_1 + v_2 + v_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

т.е. все частичные суммы ряда (2.16). Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (2.16) оказы-

вается подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда (2.15). Но раз последовательность

$$s_1, s_2, s_3, \dots \quad (2.17)$$

по условию сходится и имеет предел s , ее подпоследовательность

$$s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, \dots \quad (2.18)$$

также должна сходиться и иметь тот же предел. Это и означает, что «сконцентрированный» ряд (2.16) сходится и имеет ту же сумму, что и «редкий» ряд (2.15).

Следствие. Если в результате описанного в условии предыдущей теоремы объединения мы получим ряд (2.16), который расходится, то и первоначально взятый ряд (2.15) также расходится.

В самом деле, если бы ряд (2.15) сходил, то сошелся бы и ряд (2.16), а мы предположили обратное.

Пример. Выясним сходимость и найдем сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad (2.19)$$

Замечая, что при любом $n=1, 2, \dots$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (2.20)$$

Очевидно, для этого ряда

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = s_1 + u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$s_3 = s_2 + u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$s_4 = s_3 + u_4 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\dots \dots \dots$$

Вообще для n четного: $n=2k$

$$s_{2k} = 1 - \frac{1}{k+1},$$

а для n нечетного: $n=2k+1$

$$s_{2k+1} = 1.$$

Совершенно ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1,$$

так что ряд (2.20) сходится. Но тогда по доказанной теореме сходится и ряд (2.19), получаемый попарным объединением членов ряда (2.20), и сумма этого ряда также равна единице.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что из сходимости «сцентрированного» ряда (2.16) сходимость «редкого» ряда (2.15) может и не следовать, как и вообще на основании сходимости одной какой-либо подпоследовательности еще нельзя утверждать о сходимости всей последовательности.

П р и м е р ы.

1. Если в ряде

$$1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{6} + \dots + 1 - \frac{n(n+1)-1}{n(n+1)} + \dots$$

объединить попарно соседние члены:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{5}{6}\right) + \dots + \left(1 - \frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}\right) + \dots,$$

то мы получим ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$$

сходимость которого была установлена в предыдущем примере.

Однако исходный ряд не сходится, потому что для него, как легко проверить, не соблюдается сформулированный в § 6 необходимый признак сходимости ряда: здесь на нечетных местах стоят единицы, так что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = 1 \neq 0.$$

2. К такому же выводу приводит рассмотрение уже встречавшегося нам ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Вместе с тем, если все члены исходного ряда положительны, то обращение теоремы остается в силе: из сходимости ряда (2.16) *следует* сходимость ряда (2.15). Действительно, для ряда с положительными членами последовательность (2.17) является монотонной и неубывающей. Поэтому она должна сходиться, если сходится какая-либо ее подпоследовательность, например (2.18).

Теорема 2 (дистрибутивный закон для рядов; теорема об умножении ряда на число). Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.21)$$

— некоторый ряд, а c — произвольное число, отличное от нуля. Тогда ряд

$$cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots \quad (2.22)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (2.21). Если ряд (2.21) сходится, и сумма его равна s , то сумма ряда (2.22) равна cs .

Доказательство. Если последовательность частичных сумм ряда (2.21) есть

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots,$$

то последовательностью частичных сумм ряда (2.22), очевидно, будет

$$cs_1, cs_2, \dots, cs_n, \dots$$

Так как

$$c \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n, \quad (2.23)$$

из существования предела слева (которое означает сходимость ряда (2.21) при $c \neq 0$) следует существование предела справа (т. е. сходимость ряда (2.22)) и равенство (2.23). Наоборот, из существования предела справа следуют существование предела слева и опять-таки равенство (2.23).

Замечание 1. Если в формулировке теоремы допустить случай $c=0$, то ряд (2.22) будет в этом случае сходиться всегда, и никакой информации из этого факта нам извлечь не удастся.

Замечание 2. Мы доказали теоремы о рядах, аналогичные свойствам ассоциативности и дистрибутивности конечных сумм. Теорема о возможности переставлять в ряде члены, аналогичная коммутативности сложения, носит более узкий характер и справедлива уже не для всех рядов.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \underbrace{\frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{8}}_{8 \text{ членов}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{16 \text{ членов}} - \frac{1}{32} - \dots \quad (2.24)$$

В этом ряде видны чередующиеся группы равных друг другу положительных и отрицательных членов. Сумма членов в каждой группе по модулю равна единице.

Если суммировать члены ряда (2.24) в том порядке, в каком они написаны, то при завершении каждой группы положительных членов частичная сумма будет равна единице, а при завершении каждой группы отрицательных членов — нулю. Следовательно, этот ряд расхо-

дится, хотя все его частичные суммы ограничены (они лежат между нулем и единицей).

Переставим теперь члены ряда (2.24) следующим образом:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \\ + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{32} + \dots \quad (2.25)$$

(т. е. после каждого положительного члена будем писать по два отрицательных из следующей группы). Частичные суммы получающегося при этом ряда выглядят достаточно просто:

$$s_{3n} = 0, \\ s_{3n+1} = \frac{1}{2^k}, \\ s_{3n+2} = \frac{1}{2^{k+1}},$$

где k — некоторое целое число, зависящее от n и неограниченно возрастающее вместе с ростом n . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0,$$

так что ряд (2.25) сходится.

Наконец, переставим члены исходного ряда иначе:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \\ + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{16 \text{ членов}} - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots \quad (2.26)$$

(т. е. после k -й по порядку группы положительных членов ставится k -й по порядку отрицательный член; так как и групп положительных членов и отрицательных членов бесконечно много, можно считать, что их «одинаково много», и на каждый отрицательный член найдется целая группа положительных членов).

Объединим теперь группы положительных членов вместе со следующим за ним отрицательным членом в один член нового ряда. Каждый член нового ряда будет не меньшим, чем $1/2$; поэтому его n -я частичная сумма s_n будет не меньше, чем $n/2$.

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = +\infty,$$

т. е. этот ряд расходится, причем последовательность его частичных сумм оказывается неограниченной. Значит, на основании следствия теоремы 1 (об ассоциативном законе) ряд (2.26) также расходится.

Вместе с тем в рядах с положительными членами произвольная перестановка членов не нарушает сходимости рядов и не изменяет суммы сходящихся рядов.

Теорема 3 (Дирихле). Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.27)$$

с неотрицательными членами, а ряд

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (2.28)$$

получается из ряда (2.27) произвольной перестановкой его членов. Тогда, если ряд (2.27) сходится, то ряд (2.28) также сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (2.27).

Доказательство. Пусть ряд (2.27) сходится и сумма его равна s . Рассмотрим частичную сумму ряда (2.28)

$$t_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Каждое из слагаемых этой суммы входит в ряд (2.27). Возьмем в ряде (2.27) столь большое число m первых членов, чтобы среди них оказались все слагаемые t_n , и составим m -ю частичную сумму ряда (2.27):

$$s_m = u_1 + u_2 + \dots + u_m.$$

Так как все слагаемые t_n входят в s_m , а остальные слагаемые s_m (если такие есть) неотрицательны, должно быть

$$t_n \leq s_m.$$

Но частичные суммы ряда (2.27), ввиду неотрицательности членов ряда, не превосходят его суммы s :

$$s_m \leq s.$$

Следовательно,

$$t_n \leq s.$$

Так как это неравенство справедливо для любого n , все частичные суммы ряда (2.28) ограничены. Поэтому ряд (2.28) сходится и для его суммы t справедливо

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \leq s.$$

Так как теперь в наших рассуждениях ряды (2.27) и (2.28) стали равноправными, должно быть и

$$s \leq t,$$

откуда следует, что $s = t$.

Теорема 4 (теорема о сложении рядов). Пусть

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

— два сходящихся ряда соответственно с суммами s и t .
Тогда ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_1 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots \quad (2.29)$$

также сходится и сумма его равна $s + t$.

Доказательство. Для частичных сумм z_n ряда (2.29) мы имеем

$$z_n = (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) = (u_1 + \dots + u_n) + (v_1 + \dots + v_n).$$

Справа в скобках стоят частичные суммы s_n и t_n рассматриваемых рядов. Устремляя n к бесконечности, мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s + t,$$

а это и требовалось.

Доказанная теорема означает, что сходящиеся ряды можно почленно складывать и при этом складываются их суммы.

Теорема 5. Если

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.30)$$

и

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (2.31)$$

— два сходящихся ряда соответственно с суммами s и t ,
а a и b — произвольные числа, то ряд

$$(au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \dots + (au_n + bv_n) + \dots \quad (2.32)$$

также сходится и сумма его равна $as + bt$.

Доказательство. Если $a = 0$, то ряд (2.32) превращается в (2.31); если $b = 0$, то ряд (2.32) превращается в (2.30), и теорема доказана. Предположим теперь, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда по теореме 2 сходятся ряды

$$\begin{aligned} au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots, \\ bv_1 + bv_2 + \dots + bv_n + \dots, \end{aligned}$$

а по теореме 4 — ряд (2.32), причем его сумма равна $as + bt$.

С л е д с т в и е (теорема о вычитании рядов). *Если сходятся ряды*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

и

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

и имеют суммы s и t , то сходится ряд

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_n - v_n) + \dots$$

и сумма его равна $s - t$.

В самом деле, полагая в предыдущей теореме $a = 1$, а $b = -1$, мы получаем требуемое.

§ 9. Дальнейшие свойства рядов

Пусть нам дана некоторая сумма чисел, насчитывающая конечное число слагаемых:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{k_0} \quad (2.33)$$

Приписав к этой сумме бесконечный «хвост» из нулей, мы получим ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots \quad (2.34)$$

Очевидно, для этого ряда

$$\begin{aligned} s_k &= u_1 + \dots + u_k, \\ s_{k+1} &= s_k + 0 = s_k, \\ s_{k+2} &= s_{k+1} + 0 = s_{k+1} = s_k, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_k.$$

Поэтому ряд (2.34) сходится, и сумма его равна s_k , т. е. сумме (2.33).

На основании сказанного мы можем сделать важное замечание. Всякая сумма является частным случаем сходящегося ряда. Поэтому все утверждения, справедливые для сходящихся рядов, остаются в силе и для конечных сумм.

Несколько более общий факт мы оформим в виде теоремы.

Теорема 1. *Присоединим к числу членов некоторого ряда в качестве новых членов произвольное (может быть,*

бесконечное) количество нулей, разместив их между старыми членами ряда произвольным образом. В этом случае новый ряд будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится старый ряд, и сумма нового ряда будет равна сумме старого.

Доказательство. Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

— новый ряд. Для него, как и для всякого ряда,

$$s_{n+1} = s_n + u_{n+1}.$$

Если $u_{n+1} = 0$, то $s_{n+1} = s_n$. Поэтому последовательность частичных сумм нового ряда будет отличаться от последовательности частичных сумм старого ряда лишь повторениями некоторых сумм по нескольку раз. Очевидно, повторения членов последовательности не сказываются ни на ее сходимости, ни на ее пределе, что и доказывает теорему.

Теорема 2. Если в ряд вписать на любых местах конечное число новых членов, то сходимость ряда не изменится, т. е. сходящийся ряд останется сходящимся, а расходящийся — расходящимся. Если первоначальный ряд был сходящимся, то сумма нового ряда получается из суммы старого увеличением ее на сумму вписанных членов.

Доказательство. Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

— наш исходный ряд. В те места, в которые по условию теоремы надлежит вписать новые члены, впишем пока нули. По предыдущей теореме от такой операции не изменится ни сходимость ряда, ни его сумма. Пусть

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (2.35)$$

— получившийся при этом ряд.

Составим теперь еще один ряд

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots, \quad (2.36)$$

в котором на тех местах, на которых в (2.35) стоят «старые» члены, находятся нули, а на тех местах, где в (2.35) стоят вписанные нули, расположены в надлежащем порядке «новые» члены. Сумма ряда (2.36), очевидно, равна сумме «новых» членов.

На основании теоремы о сложении рядов (теорема 4 § 8) ряд

$$(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + \dots + (v_n + w_n) + \dots \quad (2.37)$$

сходится вместе с рядом (2.35), и сумма его получается сложением суммы ряда (2.35) и ряда (2.36).

Нам остается заметить, что (2.37) и есть тот самый ряд, который получается путем вписывания в исходный ряд новых членов ¹⁾.

Следствие. Если из ряда выбросить конечное число его членов, то его сходимость не нарушится; если исходный ряд сходящийся, то сумма полученного ряда будет меньше суммы первоначального ряда на сумму выброшенных членов.

Замечание. О сходимости ряда судят по его членам. Однако, как было только что выяснено, сходимость ряда не зависит от любого конечного числа членов ряда. Поэтому для установления сходимости (или расходимости) ряда не обязательно учитывать все его члены. Достаточно ограничиться членами, «начиная с некоторого места» или «начиная с некоторого номера n ». Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

¹⁾ Более непосредственное (хотя едва ли более простое) доказательство этого же утверждения основано на том соображении, что в ряде (2.35), начиная с некоторого места, будут встречаться только «старые» члены. Воспроизведение этого доказательства во всех деталях будет для читателя полезным упражнением.

РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

§ 1. Признаки сходимости рядов

Существует довольно много примеров, позволяющих устанавливать сходимость или расходимость рядов. Все эти приемы называются *признаками сходимости*. В настоящее время известно большое число различных признаков сходимости рядов. С некоторыми из них мы уже успели познакомиться. Так, например, сходимость ряда можно установить, составив последовательность его частичных сумм и выяснив, имеет ли эта последовательность конечный предел. Этот прием, очевидно, является необходимым и достаточным признаком сходимости рядов. Другим необходимым и достаточным признаком сходимости является критерий Коши (см. § 5 главы 2). Стремление к нулю члена ряда по мере роста его номера также является признаком сходимости ряда, уже только необходимым, но не достаточным (см. § 6 главы 2).

К числу признаков сходимости можно отнести также всякого рода теоремы, позволяющие сводить выяснение вопроса о сходимости некоторого данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который устроен более просто или хотя бы более знакомый.

Эти теоремы обычно состоят в сравнении членов исследуемого ряда с членами другого ряда, поведение которого уже выяснено. Поэтому они называются *признаками сравнения*. По существу, все рассматриваемые в этой главе признаки сходимости являются такими признаками сравнения. В некоторых из них производится сравнение исследуемого ряда с конкретными стандартными рядами (например, с геометрическими прогрессиями). В этих случаях «сравнительная» природа признака внешне затуманивается, но, разумеется, не пропадает.

Подчеркнем, что в данной главе будут рассматриваться только ряды с положительными членами. Это обстоятельство каждый раз специально оговариваться не будет.

§ 2. Признаки сравнения

Поскольку в ряде с положительными членами величина одних членов не может быть скомпенсирована другими, противоположного знака, сходимость таких рядов особенно заметно зависит от величины их членов.

Теорема 1 (первый признак сравнения). *Пусть*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3.1)$$

и

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (3.2)$$

— два ряда, причем члены первого, начиная с некоторого места, не превосходят соответствующих членов второго:

$$u_n \leq v_n, \quad n = k, k+1, \dots \quad (3.3)$$

Тогда из сходимости ряда (3.2) следует сходимость ряда (3.1), а из расходимости ряда (3.1) следует расходимость ряда (3.2).

Доказательство. Так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда, достаточно доказать теорему для случая, когда $k=1$. Пусть

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \text{ и } t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$$

— последовательности частичных сумм рядов (3.1) и (3.2). Из (3.3) следует, что

$$s_n \leq t_n \text{ при любом } n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Пусть ряд (3.2) сходится и t — его сумма. Из положительности членов ряда (3.2) следует, что $t_n \leq t$ при любом n . Это значит, что частичные суммы ряда (3.1) в совокупности ограничены, и поэтому сам ряд (3.1) сходится. Обозначим его сумму через s . Переходя в неравенстве (3.4) по n к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$$

(ввиду сходимости ряда (3.1) написанный слева предел также существует), т. е. $s \leq t$.

Пусть теперь ряд (3.1) расходится. Это значит, что его частичные суммы неограниченно возрастают. Но тогда, в силу (3.4), должны неограниченно возрастать и частичные суммы ряда (3.2), который тем самым расходится.

Примеры.

1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (3.5)$$

(мы будем в дальнейшем называть его рядом «обратных квадратов»). Отбросив первый член этого ряда (что, как, известно, не сказывается на его сходимости), сравним его с рядом

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$$

сходимость которого нами уже была установлена. Мы видим, что

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Следовательно, и ряд (3.5) сходится. Поскольку ряд (3.5) есть частный случай ряда (2.3) (здесь $\alpha = 2$), полученный результат есть частный случай установленного в конце § 2 главы 2. В частности, сумма ряда (3.5) не превосходит числа $\frac{2^{2-1}}{2^{2-1}-1} = 2$. Как будет видно далее (см. § 11 главы 9), эта сумма равна $\pi^2/6$.

2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который обычно называется *гармоническим*.

Заменим в гармоническом ряде третий и четвертый члены на $\frac{1}{4}$ каждый, следующие 4 члена — на $\frac{1}{8}$ каждый; следующие 8 — на $\frac{1}{16}$ и т. д. В результате мы получим ряд

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \\ + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{8 \text{ членов}} + \underbrace{\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}}_{16 \text{ членов}} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Члены этого ряда не превосходят соответствующих членов гармонического ряда. Поэтому для доказательства расходимости гармонического ряда достаточно установить расходимость ряда (3.6). Чтобы сделать это, объединим группы одинаковых членов ряда (3.6) в один член нового ряда. Так как каждая k -я группа насчитывает 2^{k-2} членов, а каждый член ее равен $\frac{1}{2^{k-1}}$, сумма членов в каждой группе

равна $1/2$. Новый ряд получается таким:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

и, очевидно, расходится. Таким образом, по следствию теоремы 1 § 8 главы 2 расходится и ряд (3.6), а потому и гармонический ряд.

3. Рассмотрим ряд

$$\sin \frac{1}{1^2} + \sin \frac{1}{2^2} + \dots + \sin \frac{1}{n^2} + \dots \quad (3.7)$$

Так как

$$\sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2},$$

члены ряда (3.6) меньше соответствующих членов ряда обратных квадратов. Следовательно, этот ряд сходится.

4. Пусть нам дан ряд

$$\operatorname{tg} \frac{1}{1} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \dots + \operatorname{tg} \frac{1}{n} + \dots \quad (3.8)$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} \frac{1}{n} > \frac{1}{n},$$

члены ряда (3.8) больше соответствующих членов гармонического ряда. Поэтому ряд (3.8) расходится.

Теорема 2 (второй признак сравнения). Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3.9)$$

и

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (3.10)$$

— два ряда, причем можно указать такие постоянные $k > 0$ и K , что, начиная с некоторого n ,

$$k \leq \frac{u_n}{v_n} \leq K. \quad (3.11)$$

Тогда ряды (3.9) и (3.10) одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Из (3.11) следует, что

$$kv_n \leq u_n \leq Kv_n. \quad (3.12)$$

Если ряд (3.9) сходится, то из левого неравенства в (3.12), согласно первому признаку сравнения, вытекает сходимость ряда

$$kv_1 + kv_2 + \dots + kv_n + \dots$$

Отсюда на основании дистрибутивного закона для рядов (см. теорему 2 § 8 главы 2) следует сходимость ряда

(3.10). Поэтому если ряд (3.10) расходится, то и ряд (3.9) также должен расходиться.

Если сходится ряд (3.10), то по дистрибутивному закону для рядов должен сходиться ряд

$$Kv_1 + Kv_2 + \dots + Kv_n + \dots,$$

и, следовательно, по первому признаку сравнения, на основании правого неравенства в (3.12) — ряд (3.9). Значит, из сходимости ряда (3.9) следует сходимость ряда (3.10)

Примеры.

1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1^2 - 1/2} + \frac{1}{2^2 - 2/2} + \dots + \frac{1}{n^2 - n/2} + \dots \quad (3.13)$$

и сравним его с рядом обратных квадратов (3.5).

Отношение

$$\frac{\frac{1}{n^2 - n/2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 - n/2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2n}}$$

ограничено сверху числом 2. Поэтому из сходимости ряда обратных квадратов следует сходимость ряда (3.13).

2. Рассмотрим ряд

$$\sin \frac{1}{1} + \sin \frac{1}{2} + \dots + \sin \frac{1}{n} + \dots \quad (3.14)$$

Составим отношения соответственных членов этого ряда и ряда (3.8):

$$\frac{\sin \frac{1}{n}}{\operatorname{tg} \frac{1}{n}} = \cos \frac{1}{n}.$$

Ввиду того, что при любом целом $n \geq 1$

$$\frac{1}{2} < \cos \frac{1}{n} < 1,$$

ряд (3.14) ведет себя так же, как и ряд (3.8), т. е. должен расходиться.

3. Аналогично анализируется ряд

$$\operatorname{tg} \frac{1}{1^2} + \operatorname{tg} \frac{1}{2^2} + \dots + \operatorname{tg} \frac{1}{n^2} + \dots \quad (3.15)$$

Составив отношения членов этого ряда и ряда (3.7), мы получаем

$$\frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\operatorname{tg} \frac{1}{n^2}} = \cos \frac{1}{n^2},$$

и так как

$$\frac{1}{2} < \cos \frac{1}{n^2} < 1,$$

ряд (3.15) сходится подобно ряду (3.7).

Следствие. Если для рядов (3.9) и (3.10) отношение $\frac{u_n}{v_n}$ стремится к некоторому положительному и конечному пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = r > 0, \quad (3.16)$$

то ряды (3.9) и (3.10) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Соотношение (3.16) означает, что, начиная с некоторого места, все отношения вида $\frac{u_n}{v_n}$ будут достаточно близки к r и, в частности, будут находиться, скажем, между числами $\frac{1}{2}r$ и $2r$. Интересующее нас утверждение получается непосредственной ссылкой на доказанную теорему.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\left(e^{\frac{1}{1}} - 1\right) + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) + \dots + \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) + \dots \quad (3.17)$$

Возьмем в качестве вспомогательного гармонический ряд, составим соотношение

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

и вычислим его предел, пользуясь правилом Лопиталья (дифференцированием по n ; см. § 6 главы 1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Поэтому ряд (3.17) должен расходиться.

Следующий пример показывает, что признак сравнения, даваемый теоремой, существенно сильнее, чем признак в предельной форме, даваемый вытекающим из теоремы следствием.

Пример. Рассмотрим ряд

$$2 \cdot 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + 2 \cdot \frac{1}{5} + \dots + \frac{2}{2k-1} + \frac{1}{2 \cdot 2k} + \dots \quad (3.18)$$

Отношение его члена u_n к соответствующему члену гармонического ряда v_n будет

$$\frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} \frac{2}{n} : \frac{1}{n} = 2 & \text{для нечетного } n, \\ \frac{1}{2n} : \frac{1}{n} = \frac{1}{2} & \text{для четного } n. \end{cases}$$

Следовательно, отношение $\frac{u_n}{v_n}$ ни к какому пределу не стремится, и признак в предельной форме здесь неприменим. Однако при всех значениях n оно заключено между числами $\frac{1}{2}$ и 2. Поэтому ряд (3.18) ведет себя так же, как гармонический ряд, т. е. расходится.

Из приведенных выше примеров сходящихся и расходящихся рядов можно усмотреть, что сходятся те ряды, у которых члены обнаруживают тенденцию к достаточно быстрому убыванию. (Последний оборот речи, осторожный и даже несколько громоздкий, употреблен намеренно: члены сходящегося ряда вовсе не обязаны убывать монотонно, как это, скажем, видно из последнего примера.) Поэтому сравнение скоростей убывания членов различных рядов может быть положено в основу особого признака сравнения.

Теорема 3 (третий признак сравнения). *Если для двух рядов с положительными членами*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3.19)$$

и

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots, \quad (3.20)$$

начиная с некоторого n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \quad (3.21)$$

то из сходимости ряда (3.20) следует сходимость ряда (3.19), а из расходимости ряда (3.19) — расходимость ряда (3.20).

Доказательство. Из (3.21) следует, что

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}, \quad (3.22)$$

начиная с некоторого $n = n_0$. Это значит, что отношения $\frac{u_n}{v_n}$, начиная с этого n_0 , составляют убывающую последовательность. Поэтому, полагая

$$\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} = K,$$

мы из (3.22) получаем, что при $n \geq n_0$

$$\frac{u_n}{v_n} \leq K,$$

и требуемое следует из второго признака сравнения.

§ 3. Интегральный признак сходимости Маклорена — Коши ¹⁾

Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Очевидно, каждый его член можно рассматривать как значение функции f от номера члена:

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$$

Эта функция определена пока только для целых положительных значений аргумента. Ясно, что, как-то определив значения функции для всех нецелых значений аргумента, больших единицы, мы сможем говорить о функции $f(x)$, принимающей значения для любого $x \geq 1$. Например, в случае гармонического ряда

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

такой функцией может служить

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

¹⁾ Обычно этот признак называется интегральным признаком сходимости Коши. В данном курсе мы будем называть его интегральным признаком сходимости Маклорена — Коши, во-первых, по соображениям исторической справедливости, а во-вторых, чтобы не путать его с другим признаком сходимости Коши, о котором пойдет речь в § 6 этой главы.

а в случае геометрической прогрессии a, aq, \dots, aq^{n-1} — показательная функция aq^{x-1} .

Теорема (интегральный признак сходимости Маклорена — Коши). Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (3.23)$$

члены которого положительны и не возрастают:

$$u_1 \geq u_2 \geq u_n \geq \dots$$

Пусть, далее, f — функция, которая определена для всех вещественных $x \geq 1$, непрерывна, не возрастает и

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots \quad (3.24)$$

Тогда для сходимости ряда (3.23) необходимо и достаточно, чтобы сходилась (существовал) несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд, членами которого являются интегралы:

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx + \dots \quad (3.25)$$

Частичными суммами этого ряда, очевидно, также будут интегралы:

$$s_n = \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

Сходимость ряда (3.25) означает существование предела последовательности частичных сумм, т. е. сходимость (существование) несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty} f(x) dx. \quad (3.26)$$

Вспомним теперь, что функция $f(x)$ монотонна и не возрастает. Отсюда и из (3.24) следует, что для любого x между n и $n+1$

$$u_n \geq f(x) \geq u_{n+1}. \quad (3.27)$$

Интегрируя каждую из трех частей этого неравенства по x от n до $n+1$, мы приходим к неравенству интегралов

$$\int_n^{n+1} u_n dx \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_n^{n+1} u_{n+1} dx,$$

или

$$u_n \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq u_{n+1}. \quad (3.28)$$

Пусть ряд (3.23) сходится. Обратим внимание на левую сторону неравенства (3.28). По первому признаку сравнения (см. § 3) должен сходиться и составленный из интегралов ряд (3.25), а следовательно, и несобственный интеграл (3.26).

Пусть теперь ряд (3.23) расходится. Тогда, как было доказано (см. § 9 главы 2), расходится и ряд

$$u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1} + \dots,$$

получаемый из нашего ряда отбрасыванием его первого члена. Взглянем теперь на правую сторону неравенства (3.28) и применим снова первый признак сравнения, но уже в той его части, которая касается расходимости. Мы получим, что должен расходиться ряд интегралов (3.25), т. е. несобственный интеграл (3.26).

Теорема доказана.

§ 4. Применения интегрального признака сходимости

Достоинство интегрального признака сходимости Маклорена — Коши состоит в исключительно высокой его чувствительности. Этот признак четко проводит различие между сходящимся и расходящимся рядами, даже если члены одного из них лишь незначительно отличаются от членов другого.

Примеры.

1. В качестве первого применения интегрального признака сходимости возьмем геометрическую прогрессию

$$a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

с положительным знаменателем,

Рассмотрим функцию $f(x) = aq^{x-1}$ и соответствующий ей интеграл

$$\int_1^{\infty} aq^{x-1} dx. \quad (3.29)$$

При $q \neq 1$ мы имеем

$$\int_1^n aq^{x-1} dx = \frac{a}{q} \int_1^n q^x dx = \frac{a}{q \ln q} q^x \Big|_1^n = \frac{a}{q \ln q} (q^n - q).$$

Поэтому

$$\int_1^{\infty} aq^{x-1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{q \ln q} (q^n - q) = \frac{a}{q \ln q} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} q^n - q \right).$$

Если $q < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, несобственный интеграл (3.29) сходится, а потому сходится и прогрессия.

Если $q > 1$, то q^n с ростом n неограниченно возрастает, интеграл (3.29) расходится, так что расходится и прогрессия.

Наконец, если $q = 1$, то в интегральном признаке следует положить $f(x) = a$, и мы получаем

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^n a dx = a(n-1).$$

При $n \rightarrow \infty$ этот интеграл, очевидно, расходится, а вместе с ним расходится и прогрессия.

2. Возьмем гармонический ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Для него $f(x) = \frac{1}{x}$, и в этом случае

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n.$$

Так как $\ln n$ с ростом n неограниченно возрастает, интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x}$$

расходится. Тем самым должен расходиться и гармонический ряд.

3. Рассмотрим ряд «обратных квадратов»

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

(см. пример 1 из § 2). Для этого ряда, очевидно, полагаем $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
Здесь

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1.$$

Интересующий нас несобственный интеграл сходится, так что сходимость и ряд «обратных квадратов».

4. Воспроизведем результат конца § 2, показав, что ряд

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

сходится при любом значении $\alpha > 1$. Для этого достаточно рассмотреть функцию $\frac{1}{x^\alpha}$ и вычислить соответствующий несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Из сходимости интеграла при $\alpha > 1$ вытекает сходимость ряда.

Чувствительность интегрального признака сходимости не исчерпывается умением различать сходящиеся и расходящиеся ряды вида (3.30). Этот признак способен улавливать и менее заметные отличия в скорости убывания членов рядов, как видно из дальнейших примеров.

5. При любом $\alpha > 0$, начиная с некоторого n

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{n^{1+\alpha}}. \quad (3.31)$$

В самом деле, применяя правило Лопиталя (дифференцированием по n), мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\alpha n^{\alpha-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha n^\alpha} = 0.$$

Значит, начиная с некоторого n должно быть

$$\ln n < n^\alpha,$$

откуда следует правое неравенство в (3.31). Левое же неравенство в (3.31) очевидно.

Здесь ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

расходится, а ряд

$$\frac{1}{1^{1+\alpha}} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{1+\alpha}} + \dots$$

сходится. Что же касается ряда

$$\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln (n+1)} + \dots, \quad (3.32)$$

то его члены, согласно неравенству (3.31), занимают промежуточное положение, и простыми сравнениями решить вопрос о его сходимости нельзя. Однако интегральный признак сходимости может выручить нас и в этом случае. Возьмем функцию $\frac{1}{x \ln x}$ и вычислим

$$\int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^n \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^n = \ln \ln n - \ln \ln 2.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \ln n = \infty,$$

несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

расходится; значит, расходится и ряд (3.32).

6. Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{1}{2 (\ln 2)^{1+\alpha}} + \frac{1}{3 (\ln 3)^{1+\alpha}} + \dots + \frac{1}{(n+1) (\ln (n+1))^{1+\alpha}} + \dots \quad (3.33)$$

при $\alpha > 0$. Возьмем для него функцию

$$f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^{1+\alpha}}$$

и вычислим интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{1+\alpha}} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{(\ln x)^{1+\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(\ln x)^{\alpha}} \Big|_2^{\infty} = -\frac{1}{\alpha (\ln 2)^{\alpha}}.$$

Из сходимости этого несобственного интеграла следует сходимость ряда (3.33).

С другой стороны, для ряда

$$\frac{1}{3 \ln 3 \ln \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4 \ln \ln 4} + \dots + \frac{1}{(n+2) \ln (n+2) \ln \ln (n+2)} + \dots \quad (3.34)$$

рассмотрение функции

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}$$

и интеграла от нее

$$\int_3^n \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \int_3^n \frac{d \ln x}{\ln x \ln \ln x} = \int_3^n \frac{d \ln \ln x}{\ln \ln x} = \ln \ln \ln n - \ln \ln \ln 3$$

приводит к неограниченно возрастающей функции от n , так что несобственный интеграл

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$$

расходится, вследствие чего расходится и ряд (3.34).

Идя по этому пути, можно строить примеры все более медленно сходящихся рядов, равно как и примеры все более лениво расходящихся рядов. Интегральный признак Маклорена — Коши будет неизменно распознавать их сходимость или расходимость.

§ 5. Сравнительная оценка различных признаков сходимости

Качество признака сходимости определяется его шириной (применимостью), практичностью и чувствительностью.

Ширина признака сходимости характеризуется классом тех рядов, к которым этот признак применим. Например, критерий сходимости Коши применим ко всем вообще численным рядам; большинство приведенных в этой главе признаков сходимости применимо к рядам с положительными членами; интегральный признак Маклорена — Коши применим к рядам, в которых положительные члены монотонно убывают с увеличением их номера. Всякая попытка анализа сходимости ряда при помощи того или иного признака должна начинаться с проверки того, входит ли исследуемый ряд в сферу применимости используемого признака.

После того как мы убедились, что выбранный признак сходимости применим к интересующему нас ряду, следует подумать о том, как выглядит это применение на практике. Соображения удобства, простоты, а иногда и самой фактической возможности применения признаков сходимости обычно играют при этом важную роль.

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{e^{1^2}} + \frac{1}{e^{2^2}} + \dots + \frac{1}{e^{n^2}} + \dots$$

Для установления его сходимости при помощи интегрального признака следует доказать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Можно, конечно, заметить, что

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx < \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

а последний интеграл есть так называемый интеграл Пуассона, который равен $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (вычисление этого интеграла приведено в § 5 главы 11). Однако, для того чтобы это сделать, нужно либо помнить значение интеграла Пуассона, либо уметь его вычислять. Что же говорить, например, о ряде

$$\frac{1}{e^{1^3 + \sqrt{1}}} + \frac{1}{e^{2^3 + \sqrt{2}}} + \dots + \frac{1}{e^{n^3 + \sqrt{n}}} + \dots,$$

для которого интегральный признак Маклорена — Коши требует работы с интегралом $\int_1^{\infty} e^{-x^3 - \sqrt{x}} dx$?

Вместе с тем очевидно, что при $n > 1$

$$\frac{1}{e^{n^2}} < \frac{1}{e^n}$$

и

$$\frac{1}{e^{n^3 + \sqrt{n}}} < \frac{1}{e^{n^3}} < \frac{1}{e^n},$$

так что по первому признаку сравнения оба рассматриваемых ряда сходятся (ибо сходится геометрическая прогрессия со знаменателем $1/e$).

Таким образом, путь непосредственного вычисления интеграла при применении интегрального признака сходимости не всегда приемлем. Правда, иногда можно прийти к цели путем каких-нибудь косвенных оценок величины этого интеграла, но это уже будет представлять собой самостоятельную задачу, иногда даже более трудную, чем анализ самого ряда.

Следовательно, при изучении рядов ограничиться одним только интегральным признаком сходимости нельзя, и необходимо овладеть еще другими признаками сходимости, быть может, не столь чувствительными, как интегральный признак, но зато более удобными в обращении, более практичными.

Наконец, для того чтобы применение признака сходимости было не только принципиально возможным и практически выполнимым, но и действительно приводило к цели, признак должен быть достаточно чувствительным.

Интегральный признак Маклорена — Коши является, как видно из его формулировки, необходимым и достаточным признаком. Это значит, что он устанавливает сходимость любого сходящегося ряда и расходимость любого расходящегося ряда из сферы своей применимости. Иными словами, интегральный признак является идеально чувствительным. В этом отношении он напоминает критерий сходимости Коши. Естественно, что все такие «необходимые и достаточные» признаки, если только они сколько-нибудь широки, неизбежно оказываются по отношению ко многим рядам непрактичными. В этом можно усмотреть проявление весьма общей закономерности: чем шире и богаче возможности того или иного математического аппарата, тем сложнее его логическая природа и тем труднее с ним управляться.

В следующих параграфах мы «ударимся в другую крайность» и рассмотрим два весьма практичных и достаточно широких, но зато малочувствительных признака. Впрочем, как будет видно из дальнейшего содержания курса, их чувствительности будет хватать для ответа на весьма большое число теоретических вопросов и решения многих практических задач.

§ 6. Признак сходимости Даламбера

На основе третьего признака сравнения легко формулировать и доказывать весьма удобные признаки сходимости. Рассмотрим один из них.

Теорема (признак сходимости Даламбера). *Если для ряда*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3.35)$$

с положительными членами, начиная с некоторого номера n_0 отношение $(n+1)$ -го члена к предыдущему, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, не будет превосходить некоторого числа $q < 1$, т. е. если

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \quad (3.36)$$

то ряд (3.35) сходится.

Наоборот, если для ряда (3.35), начиная с некоторого номера n_0 , отношение $(n+1)$ -го члена к предыдущему, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, будет не меньше единицы, т. е. если

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad (3.37)$$

то ряд (3.35) расходится.

Доказательство. Пусть выполняется условие (3.36). Возьмем в третьем признаке сравнения в качестве вспомогательного ряда

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

сходящуюся геометрическую прогрессию

$$q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

В этом случае неравенство (3.36) может быть записано как

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Это значит, что, согласно третьему признаку сравнения, ряд (3.35) сходится.

Пусть теперь выполняется условие (3.37). Возьмем в третьем признаке сравнения в качестве ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

расходящийся ряд

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots,$$

а в качестве ряда

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

— исследуемый ряд (3.35). В этом случае неравенство (3.37) переписывается как

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

и ряд (3.35) расходится согласно третьему признаку сравнения.

Следствие. Если для ряда (3.35) отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к некоторому пределу, меньшему единицы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1, \quad (3.38)$$

то этот ряд сходится.

Если это отношение стремится к пределу, большему единицы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r > 1,$$

то ряд расходится.

Доказательство. Предельное соотношение (3.38) означает, что, начиная с некоторого места, все отношения вида $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будут достаточно близкими к значению предела r и, в частности, не будут превосходить некоторого числа q , лежащего между r и единицей. После сказанного нам остается сослаться на только что доказанную теорему.

Случай $r > 1$ рассматривается аналогично.

Примеры.

1. Для ряда

$$\frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{2^2}{3^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{n^n}{3^n \cdot n!} + \dots \quad (3.39)$$

мы имеем

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} : \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Но последний предел, как известно, есть

$$e = 2,718... < 3.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{3} < 1,$$

так что ряд (3.39) сходится.

2. Следующий пример показывает, что, как и в случае второго признака сравнения, описывающая признак сходимости Даламбера теорема существенно сильнее вытекающего из нее следствия, т. е. существование стоящего в отношении (3.38) предела для сходимости ряда не обязательно.

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{2^k \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^k} + \\ + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^{k+1}} + \dots \end{aligned} \quad (3.40)$$

Для этого ряда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \frac{1}{3}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Следовательно, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ни к какому пределу не стремится. Так как вместе с тем оно для всех номеров не превосходит половины, в силу теоремы ряд (3.40) сходится.

§ 7. Признак сходимости Коши

Сравнение рядов с прогрессиями приводит еще и к другому признаку сходимости, принадлежащему Коши.

Теорема (признак сходимости Коши). Если для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3.41)$$

с положительными членами, начиная с некоторого номера n_0 , корень $\sqrt[n]{u_n}$ не будет превосходить некоторого числа $q > 1$, т. е. если

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1 \quad (n \geq n_0), \quad (3.42)$$

то ряд (3.41) сходится.

Если, с другой стороны, для ряда (3.41), начиная с некоторого номера n_0 , корень $\sqrt[n]{u_n}$ будет не меньше единицы:

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \quad (n \geq n_0),$$

то ряд (3.41) расходится.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением ряда

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots \quad (3.43)$$

Из (3.42) мы в первой части теоремы имеем

$$u_{n_0} \leq q^{n_0}, \quad u_{n_0+1} \leq q^{n_0+1}, \dots,$$

т. е. члены ряда (3.41) меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$q^{n_0}, q^{n_0+1}, \dots,$$

которая ввиду того, что $q < 1$, сходится. Нам остается, как и при доказательстве признака сходимости Далам-

бера, сослаться на возможность отбрасывания конечного числа членов ряда и на первый признак сравнения.

Случай расходимости разбирается аналогично.

Подобно признаку сходимости Даламбера признак сходимости Коши имеет следствие в предельной форме: если для ряда (3.41)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q,$$

то при $q < 1$ этот ряд сходится, а при $q > 1$ — расходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Для этого ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

и поэтому он сходится.

§ 8. Чувствительность признаков сходимости Даламбера и Коши

Мы видели примеры весьма медленно сходящихся и весьма медленно расходящихся рядов. В их число прогрессии не входят: если в прогрессии знаменатель меньше единицы, то прогрессия довольно быстро сходится. С другой стороны, если знаменатель прогрессии не меньше единицы, то прогрессия расходится весьма быстро: частичные ее суммы, начиная с некоторого места, растут во всяком случае не медленнее, чем линейная функция.

В связи со сказанным едва ли можно надеяться, что основанные, по существу, только на свойствах прогрессий признаки сходимости Даламбера и Коши окажутся особенно чувствительными.

Действительно, рассмотрим снова гармонический ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

и ряд «обратных квадратов»

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Расходимость первого и сходимость второго из этих рядов уже устанавливались нами дважды и в том числе при помощи интегрального признака Маклорена — Коши. Посмотрим, как работают применительно к этим рядам признаки Даламбера и Коши.

Признак Даламбера в каждом из этих случаев дает нам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

г. е. не приводит к определенному ответу.

Признак Коши для гармонического ряда дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1.$$

Вместе с тем и для ряда «обратных квадратов»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n^2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{\ln n}{n} = 0,$$

так что и в этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1.$$

Таким образом, даже столь резко отличающееся друг от друга поведение этих двух рядов неразличимо для признаков Даламбера и Коши.

При этом все-таки признак Коши несколько чувствительнее, чем признак Даламбера. Это можно усмотреть из следующего параграфа.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots$$

В этом ряде

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{при четном } n, \\ \frac{1}{2^n} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Здесь, очевидно,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^n & \text{при четном } n, \\ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Таким образом, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ все время «перескакивает» через единицу, и признак Даламбера здесь неприменим.

Вместе с тем признак Коши дает нам

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} & \text{при четном } n, \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

и тем самым указывает на сходимость ряда.

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Абсолютная сходимость и условная сходимость

Знакопеременным рядом называется ряд, членами которого являются вещественные числа произвольного знака ¹⁾. Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4.1)$$

— некоторый знакопеременный ряд. Некоторую информацию об этом ряде можно получить, рассматривая ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (4.2)$$

членами которого являются абсолютные величины (модули) членов знакопеременного ряда (4.1). Этот составленный из модулей ряд является, очевидно, рядом с положительными членами и потому его можно изучать на основании приемов, изложенных выше. Между сходимостью ряда (4.1) и сходимостью ряда (4.2) существует известная связь.

О п р е д е л е н и е. Знакопеременный ряд (а также ряд с комплексными членами) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

Абсолютно сходящиеся ряды во многих отношениях напоминают ряды с положительными членами.

О п р е д е л е н и е. Знакопеременный ряд (а также ряд с комплексными членами) называется *условно сходящимся*, если он сходится, но не сходится абсолютно ²⁾.

Для условно сходящихся рядов некоторые привычные законы арифметики не имеют места.

¹⁾ Иногда знакопеременными рядами называются такие ряды, в которых любые два соседних члена имеют различные знаки. Далее мы будем употреблять термин «знакопеременный ряд» в указанном выше более общем смысле и называть ряды, в которых члены попеременно положительны и отрицательны, *знакочередующимися* рядами (см. § 6).

²⁾ Иногда такие ряды называются *неабсолютно сходящимися* или *полусходящимися*.

§ 2. Абсолютная сходимость и расходимость

Теорема 1. *Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4.3)$$

— некоторый знакопеременный ряд, который абсолютно сходится. Это означает, что сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4.4)$$

Тогда по теореме об умножении ряда на число (см. § 8 главы 2) сходится и ряд

$$2|u_1| + 2|u_2| + \dots + 2|u_n| + \dots$$

Но очевидно, что при любом n

$$0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|.$$

Следовательно, по первому признаку сравнения рядов (см. § 2 главы 3) сходится и ряд

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \dots + (u_n + |u_n|) + \dots \quad (4.5)$$

Но тогда по теореме о вычитании рядов (см. § 8 главы 2) сходится и ряд, членами которого являются разности соответствующих членов рядов (4.5) и (4.4), т. е. ряд (4.3).

Доказанная теорема остается в силе и в том случае, когда члены ряда (4.3) являются комплексными числами.

Действительно, положим

$$u_n = v_n + i w_n.$$

Тогда должно быть

$$|u_n| = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \geq |v_n|,$$

$$|u_n| = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \geq |w_n|.$$

Из сходимости ряда (4.4) следует поэтому сходимость обоих рядов

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots,$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots$$

и тем самым сходимость ряда

$$(v_1 + i w_1) + (v_2 + i w_2) + \dots + (v_n + i w_n) + \dots,$$

т. е. ряда (4.3).

Теорема 2. Если

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4.6)$$

— абсолютно сходящийся ряд с суммой s , а сумма ряда

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4.7)$$

равна S , то

$$|s| \leq S. \quad (4.8)$$

Доказательство. Мы имеем для n -й частичной суммы s_n ряда (4.6)

$$|s_n| \leq |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по n при $n \rightarrow \infty$, мы получаем (4.8).

Следствие. Если n -й остаток абсолютно сходящегося ряда (4.6) есть r_n , а n -й остаток ряда (4.7) есть R_n , то

$$|r_n| \leq R_n.$$

Примеры.

1. Ряд

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots$$

сходится абсолютно, потому что сходится ряд «обратных квадратов»

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Следовательно, по доказанной теореме ряд сходится.

2. Ряд

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots \quad (4.9)$$

является знакопеременным. Составим ряд из абсолютных величин членов нашего ряда

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots \quad (4.10)$$

Члены последнего ряда не превосходят соответствующих членов ряда «обратных квадратов». Но ряд «обратных квадратов» сходится; поэтому сходится и ряд (4.10). Это значит, что ряд (4.9) сходится абсолютно и тем самым сходится.

С другой стороны, существуют знакопеременные сходящиеся ряды, которые не сходятся абсолютно.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots \quad (4.11)$$

Модули членов этого ряда составляют гармонический ряд, который расходится (см. § 2 главы 3). Следовательно, ряд (3.11) не является абсолютным сходящимся.

Убедимся в том, что он все-таки сходится. Пусть s_n — n -я частичная сумма ряда (4.11). Мы имеем

$$\begin{aligned} s_{2k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2k-1)2k}. \end{aligned}$$

Сравнение ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2k-1)2k} + \dots \quad (4.12)$$

с рядом «обратных квадратов» указывает на его сходимость. Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = s. \quad (4.13)$$

Далее,

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2k(2k+1)} \right). \end{aligned}$$

Ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2k(2k+1)} + \dots \quad (4.14)$$

также сходится (чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить и его с рядом «обратных квадратов» или с рядом (4.12)). Пусть его сумма равна s'

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = 1 - s'. \quad (4.15)$$

Но сумма ряда, составленного из сумм членов рядов (4.12) и (4.14),

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$$

как было установлено в § 8 главы 2, равна 1. Следовательно, по теореме о сложении рядов (теорема 4 § 8 главы 2) $s + s' = 1$, т. е. $1 - s' = s$. Значит, (4.15) можно переписать как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = s.$$

Вместе с (4.13) это дает нам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

а тем самым сходимость ряда (4.11).

§ 3. Возможность переставлять члены в абсолютно сходящихся рядах

Теорема. Если в абсолютно сходящемся ряде произвольным образом переставить члены, то полученный ряд также будет абсолютно сходитьсья, а сумма его будет равна сумме исходного ряда.

Доказательство. Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4.16)$$

— абсолютно сходящийся ряд с суммой s , а

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (4.17)$$

— ряд, полученный из (4.16) произвольной перестановкой его членов. Абсолютная сходимость (4.16) означает сходимоть ряда

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4.18)$$

Обозначим сумму этого ряда через S . Но по теореме Дирихле (см. теорему 3 § 8 главы 2) ни сходимоть ряда (4.18), ни его сумма не изменяются от перестановки членов ряда. В частности, должен сходитьсья и иметь сумму S ряд

$$|v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| + \dots \quad (4.19)$$

Тем самым ряд (4.17) сходитсья абсолютно и поэтому сходитсья. Обозначим его сумму через s^* .

Составим теперь ряд

$$(|u_1| + u_1) + (|u_2| + u_2) + \dots + (|u_n| + u_n) + \dots \quad (4.20)$$

По теореме о сложении рядов (теорема 4 § 8 главы 2) этот ряд сходитсья и сумма его равна $S + s$.

Заметим теперь, что

$$|u_n| + u_n \geq 0,$$

т. е. что члены ряда (4.20) неотрицательны. Переставим члены этого ряда так же, как переставлялись члены ряда (4.16). Мы получим ряд

$$(|v_1| + v_1) + (|v_2| + v_2) + \dots + (|v_n| + v_n) + \dots \quad (4.21)$$

Ввиду неотрицательности членов ряда (4.20), к нему также применима теорема Дирихле, согласно которой ряд (4.21) сходитсья, и его сумма равна $S + s$. С другой стороны, ряд (4.21) является суммой сходящихся рядов (4.19)

и (4.17). Поэтому по теореме о сложении рядов его сумма равна $S + s^*$. Таким образом, $S + s = S + s^*$, откуда следует, что $s = s^*$.

Если ряд (4.16) имеет комплексные члены, то доказательство достаточно слегка модифицировать.

§ 4. Условно сходящиеся знакопеременные ряды

Установим два важных свойства условно сходящихся рядов.

Теорема 1. Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4.22)$$

— *условно сходящийся знакопеременный ряд,*

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (4.23)$$

— *ряд, составленный из положительных членов ряда (4.22), а*

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots \quad (4.24)$$

— *ряд, составленный из абсолютных величин отрицательных членов ряда (4.22).*

Тогда оба ряда (4.23) и (4.24) расходятся.

Доказательство. Предположим сначала, что сходятся оба ряда (4.23) и (4.24). Заменим в ряде (4.22) все отрицательные члены нулями. Мы получим ряд (4.23), «разбавленный» нулями, который ввиду теоремы § 8 главы 2 должен сходиться. Заменим, далее, в ряде (4.22) нулями все положительные члены, а у отрицательных изменим знаки. В результате получится «разбавленный нулями» ряд (4.24), сходящийся в силу тех же причин. Сумма двух построенных «разбавленных» рядов есть, очевидно, ряд модулей членов ряда (4.22), который тем самым по теореме о сложении рядов должен сходиться. Последнее же противоречит условию теоремы. Значит, оба ряда (4.23) и (4.24) одновременно сходиться не могут.

Предположим теперь, что сходится один из рядов (4.23) или (4.24), скажем, для определенности ряд (4.23), а ряд (4.24) расходится. Разбавим ряд (4.23), как это мы только что делали, нулями и вычтем полученный сходящийся ряд из (4.22), изменив у оставшихся членов знаки. Отбросив соответствующие нули, мы придем к ряду (4.24). По теореме о вычитании рядов он должен сходиться, а это

противоречит только что сделанному предположению. Значит, ни один из рядов (4.23) и (4.24) сходиться не может.

Теорема 2 (Римана). Пусть знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4.25)$$

сходится условно. Тогда, каково бы ни было число s , можно надлежащей перестановкой членов ряда (4.25) получить условно сходящийся ряд

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots, \quad (4.26)$$

сумма которого будет равна s .

Доказательство. Будем выписывать подряд положительные члены ряда (4.25), пока их сумма не превзойдет s (может случиться, что таких членов не придется брать вовсе):

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \dots + v_{k-1} &\leq s, \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{k-1} + v_k &> s \end{aligned}$$

(ряд, составленный из положительных членов ряда (4.25), согласно предыдущей теореме, расходится, так что мы можем набрать сколь угодно большую сумму). Затем будем приписывать к имеющейся сумме отрицательные члены, пока новая сумма не опустится ниже s :

$$\begin{aligned} v_1 + \dots + v_k + v_{k+1} + \dots + v_{k+l-1} &\geq s, \\ v_1 + \dots + v_k + v_{k+1} + \dots + v_{k+l-1} + v_{k+l} &< s \end{aligned}$$

(расходимость ряда отрицательных членов (4.26) обеспечивает нам такую возможность). Далее будем повторять этот процесс приписывания к сумме новых групп положительных и отрицательных членов, каждый раз минимально переходя через s . После каждого перехода частичная сумма ряда (4.26) будет по построению отличаться от s менее чем на абсолютную величину члена, последнего из приписанных в этом или в предыдущем переходах. Но по необходимому признаку сходимости ряда (§ 6 главы 2) эта абсолютная величина стремится к нулю. Следовательно, последовательность частичных сумм ряда (4.26) имеет пределом s , а это и означает требуемое.

Доказанная теорема подчеркивает нетривиальность теоремы о возможности неограниченной перестановки членов в абсолютно сходящихся рядах, установленной в преды-

душем параграфе. Заметим вместе с тем, что любые перестановки конечного числа членов допускаются в любых рядах; они не сказываются ни на сходимости рядов, ни на величине их суммы.

§ 5. Умножение абсолютно сходящихся рядов

Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать.

Теорема. Пусть даны два абсолютно сходящихся ряда: ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (4.27)$$

с частичными суммами s_n и суммой s и ряд

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (4.28)$$

с частичными суммами t_n и суммой t .

Тогда ряд, членами которого являются все произведения любого члена первого ряда на любой член второго, также сходится абсолютно и сумма его равна произведению st .

Доказательство. Будем выписывать произведения $u_i v_j$ по определенной системе:

$$\begin{aligned} & u_1 v_1 + \\ & + u_2 v_1 + u_2 v_2 + u_1 v_2 + \\ & + u_3 v_1 + u_3 v_2 + u_3 v_3 + u_2 v_3 + u_1 v_3 + \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

$u_1 v_1$	$u_1 v_2$	$u_1 v_3$
$u_2 v_1$	$u_2 v_2$	$u_2 v_3$
$u_3 v_1$	$u_3 v_2$	$u_3 v_3$
$u_4 v_1$	

(стоящие в каждой строке слагаемые соответствуют последовательным «окаймлениям» квадратов на рис. 1). В первой строке здесь выписан один член, во второй — три члена, в третьей — 5 и т. д. Очевидно, частичная сумма r_{n^2} этого ряда состоит из n^2 слагаемых, составляющих на рис. 1 квадрат. Ясно, что пока мы не доказали абсолютной сходимости ряда (4.29), наши рассуждения относятся не к любому ряду, члены которого являются произведениями членов рядов (4.27) и (4.28), а лишь к конкретному ряду (4.29).

Мы видим, что $r_{n^2} = s_n t_n$. При переходе к пределу при $n \rightarrow \infty$ правая часть этого равенства стремится по

Рис. 1.

условию к st . Следовательно, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n^2} = st.$$

К сожалению,

$$r_{1^2}, r_{2^2}, \dots, r_{n^2}, \dots$$

составляют лишь частичную последовательность частичных сумм ряда-произведения (4.29). Поэтому из полученного предельного соотношения еще не следует нужного нам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = st.$$

Для получения этого результата нам придется еще показать, что для достаточно больших квадратов любые суммы чисел, стоящих в окаймлениях этих квадратов, сколь угодно малы.

Пусть теперь k — некоторое натуральное число, а n^2 — ближайший к нему снизу квадрат. Положим

$$r_k = r_{n^2} + q_{k_n},$$

где q_{k_n} — сумма некоторого количества членов ряда (4.29), стоящих в окаймлении n -го квадрата, т. е. в $(n+1)$ -й строке выражения (4.29).

Абсолютная сходимость рядов (4.27) и (4.28) означает сходимость рядов

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (4.30)$$

и

$$|v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| + \dots \quad (4.31)$$

Пусть S и T — соответственно суммы этих рядов.

Ясно, что

$$\begin{aligned} |q_{k_n}| &\leq |u_{n+1}v_1| + |u_{n+1}v_2| + \dots + |u_{n+1}v_{n+1}| + \\ &\quad + |u_nv_{n+1}| + |u_1v_{n+1}| = \\ &= |u_{n+1}|(|v_1| + \dots + |v_{n+1}|) + |v_{n+1}|(|u_n| + \dots + |u_1|) \leq \\ &\leq |u_{n+1}|T + |v_{n+1}|S. \end{aligned}$$

Из сходимости рядов (4.30) и (4.31) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |v_{n+1}| = 0,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |q_{k_n}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|u_{n+1}|S + |v_{n+1}|T) = 0,$$

так что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} q_{k_n} = st.$$

Следовательно, ряд (4.29) сходится, и сумма его равна st .

Переходя от (4.27) и (4.28) к рядам (4.30) и (4.31) и повторяя применительно к ним те же рассуждения, мы видим, что ряд (4.29) сходится *абсолютно* и сумма абсолютных величин его членов равна ST .

Нам остается заметить, что на основании теоремы о перестановке членов абсолютно сходящихся рядов сходимость интересующего нас ряда, равно как и его сумма, не зависит от того конкретного порядка, в каком мы выписывали его члены.

В частности, иногда бывает удобно (см., например, § 4 главы 7) объединять произведения членов перемножаемых рядов в группы с постоянными суммами индексов:

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$$

Такая схема перечисления членов произведения рядов иногда называется их перемножением «по Коши».

§ 6. Признак сходимости Лейбница

Определение. Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если соседние его члены имеют различные знаки.

Примерами знакочередующихся рядов могут служить геометрические прогрессии с отрицательными знаменателями.

Для знакочередующихся рядов имеется достаточно общий, чувствительный и практичный признак сходимости, принадлежащий Лейбницу.

Теорема (признак сходимости Лейбница). *Если абсолютные величины членов знакочередующего ряда*

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots \quad (4.32)$$

образуют монотонно невозрастающую последовательность, стремящуюся к нулю, т. е. если

$$u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq \dots \quad (4.33)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad (4.34)$$

то ряд (4.32) сходится.

Доказательство. Мы имеем для любого $n = 1, 2, \dots$

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n-2}$$

или, объединяя члены в группы (сумма s_{2n} содержит только конечное число слагаемых, и потому основные законы действий справедливы здесь без каких-либо ограничений),

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

На основании невозрастания последовательности абсолютных величин членов ряда во всех скобках стоят неотрицательные числа. Следовательно,

$$s_{2n} < u_1.$$

Поэтому частичные суммы ряда (4.32) с четными номерами составляют ограниченную последовательность.

С другой стороны, в силу той же монотонности

$$s_{2n+2} - s_{2n} = (s_{2n+2} - s_{2n+1}) + (s_{2n+1} - s_{2n}) = -u_{2n+2} + u_{2n+1} \geq 0,$$

и поэтому последовательность частичных сумм с четными номерами является неубывающей. Следовательно, эта последовательность имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s < u_1. \quad (4.35)$$

Далее,

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1},$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}.$$

Оба предела справа существуют, причем второй из них по условию равен нулю. Следовательно, существует и предел слева, и для него

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = s.$$

Вместе с (4.35) это дает нам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

что и требовалось.

Следствие. Для знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + \dots \pm u_n \mp \dots$, удовлетворяющего признаку сходимости Лейбница, остаток R_n можно сверху оценить по абсолютной величине:

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

В самом деле, остаток R_n можно рассматривать как сумму ряда

$$R_n = \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp \dots,$$

которая, как следует из доказанной теоремы, не превосходит по абсолютной величине своего первого члена, которым в данном случае является u_{n+1} .

Пример. В применении к ряду

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

признак Лейбница дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pm \frac{1}{n} \right) = 0,$$

что означает сходимость ряда. (Непосредственными выкладками эта сходимость была установлена в § 2.)

Мы видим, что признак сходимости Лейбница является довольно широким по применимости, весьма практичным и идеально чувствительным. Это не противоречит сказанному в конце § 5 главы 3: условная сходимость знакочередующегося ряда является «в среднем», если можно так выразиться, более широким фактом, чем сходимость ряда с положительными членами; поэтому и распознать ее оказывается в каком-то смысле легче.

Заметим, наконец, что признак Лейбница является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости для знакочередующихся рядов с монотонно убывающими членами: если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то на основании необходимого признака сходимости из § 6 главы 2 ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \pm u_n \mp \dots$$

сходиться не может.

§ 7. Существенность условий признака сходимости Лейбница

Обратим внимание на то, что в признаке сходимости Лейбница указываются *три* условия, которым должен удовлетворять ряд: знакопеременность членов ряда, а также монотонность и сходимость к нулю их абсолютных величин. Убедимся в том, что каждое из этих трех условий является существенным.

Во-первых, в признаке сходимости Лейбница нельзя отбросить условие знакопеременности. Можно построить примеры рядов, у которых последовательность абсолютных величин членов монотонно стремится к нулю, но которые расходятся из-за того, что знаки членов ряда не чередуются, а распределены более сложно.

Пример. В ряде

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \dots \quad (4.36)$$

абсолютные величины членов не возрастают и стремятся к нулю. Однако все частичные суммы вида

$$\frac{s_{n(n+1)}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{при нечетном } n, \\ 0 & \text{при четном } n, \end{cases}$$

а остальные частичные суммы принимают промежуточные значения. Очевидно, такая последовательность частичных сумм предела не имеет, и потому ряд (4.36) расходится.

Во-вторых, для сходимости знакопередающегося ряда важно условие (4.33). Существуют расходящиеся ряды, для которых выполняются все условия теоремы Лейбница, кроме (4.33).

Пример. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \dots$$

знакопередающийся, и для него выполняется условие (4.34), но не условие (4.33). Этот ряд расходится. В самом деле, если бы он сходился, то сходился бы по ассоциативному закону (см. теорему 1 § 8 главы 2) и ряд

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) + \dots,$$

т. е. ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right).$$

Но в скобках здесь стоит гармонический ряд, который, как известно, расходится.

Наконец, в-третьих, существенность условия (4.34) вытекает из общего необходимого признака сходимости рядов (см. § 6 главы 2).

На основании сказанного применение признака Лейбница к исследуемому на сходимость ряду должно состоять в проверке соблюдения для этого ряда *всех трех* условий признака.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Определение функционального ряда

Понятие функциональной зависимости является одним из важнейших в математике. Всякая функция осуществляет некоторое соответствие между объектами, составляющими область задания этой функции, и объектами, составляющими область ее значений. Так можно рассматривать числовые функции от чисел (при этом числу-аргументу ставится в соответствие число, являющееся значением функции); можно говорить о числовых функциях от систем чисел (то, что обычно называется функциями нескольких переменных); можно говорить о вектор-функциях (т. е. о функциях, значениями которых являются векторы) и т. д. Близкими к вектор-функциям являются такие функции, которые ставят в соответствие числам — ряды. Эти функции называются функциональными рядами.

Так как задание ряда состоит в задании каждого его члена, а член ряда есть число, задание функционального ряда от некоторой переменной x состоит в задании ряда функций от этой переменной, являющихся членами функционального ряда. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

О п р е д е л е н и е. Выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5.1)$$

называется *функциональным рядом относительно переменной x* .

Если переменная x может принимать только вещественные значения, а параметры функций, являющихся членами ряда (5.1), также все вещественные, то ряд (5.1) называется *вещественным рядом*.

Если же значения переменной x , равно как и параметры функций $u_n(x)$, могут быть не только веществен-

ными, но и комплексными, то ряд (5.1) называется *комплексным рядом*.

Примеры.

1. Если x принимает только вещественные значения, то ряд

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

является вещественным рядом относительно переменной x .

2. Этот же ряд можно рассматривать как комплексный ряд относительно переменной z :

$$\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

если z есть комплексная переменная.

Говоря в данной главе об общих функциональных рядах, мы будем каждый раз иметь в виду только вещественные ряды. Некоторые вопросы, касающиеся комплексных рядов, будут затронуты в следующей главе.

Каждый из членов функционального ряда может быть, в частности, и постоянной. В этом случае функциональный ряд превращается в числовой. Таким образом, числовой ряд является частным случаем функционального.

§ 2. Область сходимости функционального ряда

Придавая в выражении (5.1) переменной x некоторые значения x_0 , x_1 и т. д., мы будем получать те или иные числовые ряды

$$\begin{aligned} u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots, \\ u_1(x_1) + u_2(x_1) + \dots + u_n(x_1) + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

и т. д.

В зависимости от значения, принимаемого переменной x , числовой ряд (5.2) может оказаться сходящимся или расходящимся.

Определение. Совокупность всех значений переменной x , для которых ряд (5.2) сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда (5.1).

Если значение x_0 переменной x принадлежит области сходимости функционального ряда

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

то можно говорить о сумме этого функционального ряда в точке $x = x_0$:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots = s(x_0).$$

Таким образом, значение суммы функционального ряда зависит от значения x_0 переменной x , т. е. сумма функционального ряда сама является функцией переменной x . Это и отражено в обозначении $s(x_0)$. Подчеркнем, что областью задания суммы функционального ряда является область сходимости этого ряда.

Сумма функционального ряда, понимаемая как функция, в принципе ничем не отличается от функций, получаемых каким-нибудь другим путем. В частности, можно ставить и решать вопросы о ее непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и т. д. Можно интересоваться также тем, какие функции можно получать в виде сумм функциональных рядов и как находить ряды, у которых суммами были бы заданные функции. Изучение этих и подобных вопросов и составляет содержание почти всей оставшейся части курса.

Примеры.

1. Ряд

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots \quad (5.3)$$

при каждом x представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $x/2$. Условие сходимости этого ряда состоит в том, чтобы $|x/2| < 1$. Таким образом, область сходимости ряда (5.3) состоит из всех тех значений переменной x , для которых $|x| < 2$.

2. Ряд

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots,$$

как было установлено в § 2 главы 2, сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leq 1$. Следовательно, область сходимости этого ряда состоит из всех значений x , для которых $x > 1$, или, короче, область сходимости этого ряда описывается неравенством $x > 1$.

3. Члены функционального ряда

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \dots + \frac{1}{n^2+x^2} + \dots \quad (5.4)$$

при любом x меньше соответствующих членов ряда «обратных квадратов»

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Так как последний ряд сходится, должен сходиться и ряд (5.4) при любом x . Таким образом, областью сходимости ряда (5.4) является множество всех вещественных чисел.

4. В ряде

$$\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (5.5)$$

при любом $x = x_0$ отношение последующего члена к предыдущему равно

$$\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0}{n+1}$$

и, очевидно, при возрастании n стремится к нулю. Следовательно, согласно признаку сходимости Даламбера ряд

$$\frac{1}{0!} + \frac{x_0}{1!} + \frac{x_0^2}{2!} + \dots + \frac{x_0^n}{n!} + \dots$$

при любом x_0 является сходящимся. Таким образом, область сходимости функционального ряда (5.5) состоит из всех вещественных чисел.

5. Функциональный ряд

$$0! + x1! + x^22! + \dots + x^n n! + \dots$$

при любом значении $x \neq 0$ расходится (это проверяется без труда при помощи признака Даламбера). Следовательно, область сходимости этого ряда исчерпывается числом 0.

6. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2 + \sin x} + \frac{1}{3 + \sin x} + \dots + \frac{1}{n + 1 + \sin x} + \dots \quad (5.6)$$

Так как $\sin x \leq 1$, члены этого ряда не меньше соответствующих членов гармонического ряда, начиная с третьего:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который расходится. Следовательно, ряд (5.6) не сходится ни при каком значении x . Можно сказать, что область сходимости этого ряда пуста.

§ 3. Сходимость последовательности функций. Основные определения

Сейчас нам придется вспомнить некоторые факты, касающиеся сходимости последовательности функций.

О п р е д е л е н и е. Последовательность функций

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$$

сходится к предельной функции $s(x)$ в точке x_0 , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = s(x_0),$$

т. е. если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0 , что при $n > n_0$

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon.$$

О п р е д е л е н и е. Последовательность функций

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$$

сходится к предельной функции $s(x)$ в некоторой области (например, в сегменте $[a, b]$ или в интервале (a, b)), если для каждого x_0 из этой области

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = s(x_0),$$

т. е. если для каждого $\varepsilon > 0$ и x_0 из нашей области найдется такое n_0 , что при $n > n_0$

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon.$$

Заметим, что в этом определении n_0 находится по каждому x_0 из нашей области, т. е., вообще говоря, *зависит* от x_0 . Несколько иной факт описывается в следующем определении.

О п р е д е л е н и е. Последовательность функций

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (5.7)$$

сходится к предельной функции $s(x)$ равномерно в некоторой данной области, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n > n_0$ и *при любом* x_0 из области

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что, в отличие от предыдущего определения, здесь утверждается существование n_0 , в равной мере «обслуживающего» все значения x_0 .

Различие между описанными видами сходимости последовательностей функций можно наглядно представить себе геометрически.

Рассмотрим графики двух функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на некотором промежутке с концами a и b (рис. 2). Ясно, что эти графики могут располагаться «близко» или «далеко» друг от друга. Однако если расстояние между точками на координатной плоскости понимается вполне определенным образом, то расстояние между графиками функций нуждается в специальном определении. Оказывается, что этому расстоянию можно дать несколько раз-

личных определений и каждое из них по-своему будет разумным.

Если функции последовательности

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (5.8)$$

приближаются к функции $s(x)$ в смысле некоторого определения расстояния, то можно говорить, что имеет место *сходимость* последовательности (5.8) к функции $s(x)$ *в смысле этого расстояния*.

Например, можно фиксировать некоторую точку x_0 , расположенную между a и b , и под расстоянием между графиками функций (и тем самым между самими функциями) $f(x)$ и $g(x)$ понимать

$$|f(x_0) - g(x_0)|. \quad (5.9)$$

Здесь близость функций и их графиков оценивается по их различию в точке x_0 .

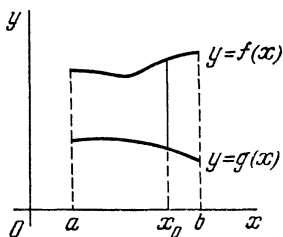


Рис. 2.

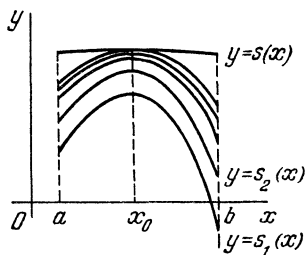


Рис. 3.

Сходимость последовательности (5.8) к предельной функции $s(x)$ в точке x_0 означает, что графики функций (5.8) над точкой x_0 приближаются к графику функции $s(x)$ (рис. 3). Это значит в свою очередь, что расстояние между функцией $s_n(x)$ и предельной функцией $s(x)$ в смысле выражения (5.9) по мере роста n стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(x) - s(x)| = 0. \quad (5.10)$$

Таким образом, «сходимость в точке x_0 » соответствует расстоянию, определяемому выражением (5.9).

Область сходимости последовательности (5.8) к функции $s(x)$ будет состоять из всех тех x_0 , для которых выполняется равенство (5.10), т. е. для тех абсцисс, для которых

графики функций из последовательности неограниченно приближаются к графику функции $s(x)$.

Вместе с тем расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ можно описывать не выражением (5.9), а иначе. Например, за расстояние между функциями можно принимать максимальную разность между соответствующими значениями функций

$$\max_x |f(x) - g(x)| \quad (5.11)$$

(рис. 4). В тех случаях, когда написанный максимум не достигается, вместо него следует рассматривать точную верхнюю границу значений $|f(x) - g(x)|$. (Напомним, что точной верхней границей будет в этом случае число, которое не меньше каждого из модулей разностей и к которому значения этих модулей разностей подходят сколь угодно близко.)

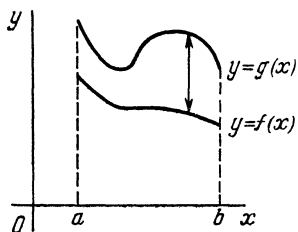


Рис. 4.

Приближение в смысле так определенного расстояния функций из последовательности (5.8) к функции $s(x)$ означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_x |s_n(x) - s(x)| = 0,$$

т. е. каково бы ни было $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n будет

$$\max_x |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Иными словами, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n , при любом x будет

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Это и было выше определено как равномерная сходимость последовательности (5.8) к функции $s(x)$ на промежутке от a до b .

При рассмотрении сходимости последовательности функций $s_n(x)$ к предельной функции $s(x)$ можно говорить о точности, с которой функции последовательности описывают предельную функцию, или, что то же самое, — о погрешности при таком описании. В условиях равномерной сходимости точность такого описания не зависит

от значения аргумента (в пределах области равномерной сходимости), а в качестве погрешности можно брать максимальную погрешность (по этой области). Тогда с ростом номера функции погрешность будет стремиться к нулю.

Геометрически равномерная сходимость означает неограниченное приближение графиков функций $s_n(x)$ к графику $s(x)$ в местах их наибольшего взаимного удаления. В остальных местах графики $s_n(x)$ будут подходить к графику $s(x)$ еще теснее.

Отметим еще один полезный вариант определения расстояния между функциями $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[a, b]$ — «квадратичное» расстояние:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Близость функций в равномерном смысле не связана каким-либо жестким образом с их близостью в квадратичном смысле. Например, на рис. 5 функция $f(x)$ ближе к функции $g(x)$, чем к функции $h(x)$ в равномерном смысле, но дальше от нее, чем от $h(x)$ — в квадратичном.

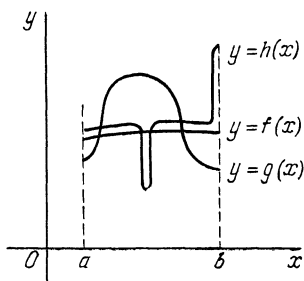


Рис. 5

Однако если на сегменте $[a, b]$

$$\max_x |f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

то

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx < \varepsilon^2 \int_a^b dx = \varepsilon^2 (b - a),$$

так что функции, близкие в равномерном смысле, не могут быть уж очень далекими в квадратичном смысле.

Замечание. Каждая функция последовательности (5.7) может, в частности, быть постоянной. В этом случае последовательность функций превращается в числовую последовательность

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \quad (5.12)$$

Предположим, что эта последовательность сходится к пределу s . Это значит, что по каждому $\varepsilon > 0$ найдется

такое n_0 , что при $n > n_0$

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

Находимое так n_0 никак не зависит от какого бы то ни было x . Поэтому мы с полным основанием можем формально считать, что последовательность (5.12), т. е. числовой ряд, сходится равномерно для всех значений x .

Пример. Рассмотрим более подробно, чем это было сделано в § 5 главы I, вопрос о сходимости последовательности функций

$$x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots \quad (5.13)$$

Эта последовательность сходится к предельной функции $s(x) \equiv 0$, например, в точке $x = 1/2$. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Мы можем утверждать также, что рассматриваемая последовательность функций сходится к предельной — функции $s(x) \equiv 0$ для всех $0 \leq x < 1$, ибо действительно, для любого x_0 из $[0, 1)$ по всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0 , что для $n \geq n_0$

$$x_0^n < \varepsilon.$$

Заметим, однако, что по мере приближения x_0 к единице для каждого данного ε приходится брать все большие и большие значения n_0 : степени по мере приближения оснований к единице убывают все медленнее и медленнее. Достаточно сравнить, например, последовательности

$$0,1; 0,01; 0,001; \dots$$

и

$$0,9; 0,81; 0,729; \dots$$

Это наводит нас на мысль, что в данном случае по $\varepsilon > 0$ нельзя найти такого n_0 , что при любом $0 \leq x_0 < 1$ для $n > n_0$ будет

$$x_0^n < \varepsilon.$$

Такая мысль верна. В самом деле, предположим, что по какому-то ε (пусть для конкретности будет $\varepsilon = 0,1$) такое n_0 , годное для всех x_0 , нашлось. Это значит, что

$$x_0^{n_0} < 0,1$$

для всех x_0 из $[0, 1)$. Но этого не может быть, так как в действительности последнее неравенство выполняется не для всех x_0 , а лишь для тех, для которых

$$x_0 < \sqrt[n_0]{0,1}.$$

Следовательно, сходимость последовательности функций (5.13) к предельной функции $s(x) \equiv 0$, хотя и имеет место для любого x из $[0, 1)$, но не является равномерной сходимостью для $0 \leq x < 1$.

К этому же выводу можно прийти и из геометрических соображений. Рассмотрим графики функций, составляющих последовательность (5.13), и график предельной функции $s(x) \equiv 0$ (рис. 6).

Ввиду того, что

$$|x^n - 0| = x^n,$$

точной верхней границей значений x^n при x из $[0, 1]$ будет 1. Таким образом, определяемое выражением (5.11) расстояние между любым членом x^n последовательности и функцией $s(x)$ будет равно 1. Значит, и предел этих расстояний будет равен 1, а не нулю, как это нужно было бы для равномерной сходимости.

По существу, «настоящей» сходимостью функции в той или иной области является именно ее равномерная сходимость в этой области. В условиях равномерной сходимости функций при переходе к пределу сохраняются основные свойства функций, их интегралов и производных.

Почти очевидна следующая теорема.

Теорема. Если каждая из последовательностей функций

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (5.14)$$

и

$$t_1(x), t_2(x), \dots, t_n(x), \dots \quad (5.15)$$

сходится к своим предельным функциям $s(x)$ и $t(x)$ равномерно в некоторой области, то равномерно в этой же области будет сходиться и последовательность сумм

$$(s_1(x) + t_1(x)), (s_2(x) + t_2(x)), \dots, (s_n(x) + t_n(x)), \dots \quad (5.16)$$

и ее пределом будет функция $s(x) + t(x)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такие n_1 и n_2 , что для $n \geq n_1$

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.17)$$

и для $n \geq n_2$

$$|t(x) - t_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.18)$$

при всех x . В силу равномерной сходимости последовательностей (5.14) и (5.15) это сделать можно. Если взять n

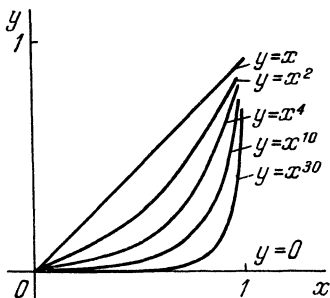


Рис. 6.

превосходящим как n_1 , так и n_2 , то оба неравенства — (5.17) и (5.18) — будут выполняться.

Сложив эти неравенства, мы получим

$$\begin{aligned}\varepsilon &> |s(x) - s_n(x)| + |t(x) - t_n(x)| \geq \\ &\geq |s(x) - s_n(x) + t(x) - t_n(x)| = \\ &= |(s(x) + t(x)) - (s_n(x) + t_n(x))| \end{aligned}$$

по-прежнему при всех x . Это означает равномерную сходимость последовательности (5.16).

Утверждение этой теоремы очевидным образом распространяется на суммы произвольного конечного числа слагаемых.

§ 4. Предел последовательности непрерывных функций

Теорема 1. Если последовательность непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$$

сходится на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $s(x)$ равномерно, то предельная функция $s(x)$ также непрерывна на этом сегменте.

Доказательство. Непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0 (которую нам предстоит доказывать) состоит в том, что по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ , что из $|h| < \delta$ следует

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| < \varepsilon$$

(если, разумеется, число $x_0 + h$ расположено в сегменте $[a, b]$).

Мы имеем для любых x_0 , h и n

$$\begin{aligned}|s(x_0 + h) - s(x_0)| &= \\ &= |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h) + s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) + \\ &+ s_n(x_0) - s(x_0)| \leq |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + \\ &+ |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|. \quad (5.19)\end{aligned}$$

На основании равномерной сходимости можно взять столь большое n , чтобы для любого x из сегмента $[a, b]$ выполнялось $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon/3$. В частности, будет и

$$|s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (5.20)$$

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.21)$$

Итак, пусть нужное n выбрано. По условию функция $s_n(x)$ является непрерывной. Следовательно, найдется такое δ , что при любом $|h| < \delta$

$$|s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.22)$$

Сопоставляя (5.19), (5.20), (5.21) и (5.22), мы видим, что

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

В случае равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций можно переходить одновременно к пределу по аргументу и по номеру функции.

Теорема 2. Пусть последовательность непрерывных функций $s_1(x), s_2(x), \dots$ в некоторой области, содержащей точку x_0 , сходится равномерно к предельной функции $s(x)$, и $x_n \rightarrow x_0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = s(x_0). \quad (5.23)$$

Доказательство. По предыдущему предельная функция s должна быть непрерывной. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и такое n' , что, начиная с него,

$$|s(x_0) - s(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кроме того, в силу равномерной сходимости функций найдется такое n'' , начиная с которого

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при любом } x_0.$$

Тогда, если n больше, чем n' и n'' , то

$$|s(x_0) - s_n(x_n)| \leq |s(x_0) - s(x_n)| + |s(x_n) - s_n(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ дает (5.23).

Примеры

1. Пусть

$$s_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}. \quad (5.24)$$

Здесь для любого x согласно правила Лопиталья

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2nx^2} = 0. \quad (5.25)$$

Таким образом, последовательность функций (5.24) сходится при любом x , и предел ее будет равен тождественному нулю, и в том числе

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(0) = 0.$$

Эта сходимость, однако, не является равномерной. Действительно, полагая $x_n = 1/n$, мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

2. Для последовательности функций

$$s_n(x) = nxe^{-\frac{1}{2}nx^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

мы при любом x имеем

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-nx^2/2} = 0.$$

Последовательность (5.26) сходится при любом x и имеет пределом нуль. Вместе с тем, если положить $x_n = 1/\sqrt{n}$, то мы получаем

$$s_n(x_n) = nx_n e^{-nx_n^2/2} = \sqrt{n} e^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{e}},$$

так что значение $s_n(x_n)$ с ростом n вообще неограниченно возрастает.

Каждый из этих примеров показывает, между прочим, что последовательность непрерывных функций может сходиться к непрерывной же функции неравномерным образом.

§ 5. Переход к пределу под знаком интеграла

Теорема. Если последовательность непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (5.27)$$

сходится равномерно в этом сегменте к предельной функции $s(x)$, то при любых $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} s_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx. \quad (5.28)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в наших условиях предельная функция $s(x)$ является

непрерывной (см. § 4), и потому интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx$$

имеет смысл.

Ввиду обусловленной равномерной сходимости последовательности (5.27) к предельной функции $s(x)$ по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0 , что при $n \geq n_0$ для любого $a \leq x \leq b$ будет выполняться неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} s_n(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} (s_n(x) - s(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |s_n(x) - s(x)| dx < \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \frac{\beta - \alpha}{b-a} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, по произвольному $\varepsilon > 0$ нашлось такое n_0 , что при $n \geq n_0$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} s_n(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx \right| < \varepsilon,$$

а это и означает сходимость (5.28).

Следствие (предельный переход под знаком интеграла с переменным верхним пределом). Если последовательность непрерывных в сегменте $[a, b]$ функций (5.27) сходится равномерно в этом сегменте к предельной функции $s(x)$, то при любом x из этого же сегмента последовательность интегралов

$$\int_{\alpha}^x s_1(x) dx, \int_{\alpha}^x s_2(x) dx, \dots, \int_{\alpha}^x s_n(x) dx, \dots \quad (5.29)$$

с переменным верхним пределом, как последовательность функций сходится к функции

$$\int_{\alpha}^x s(x) dx \quad (5.30)$$

равномерно для всех x из сегмента $[a, b]$.

Доказательство. Мы можем положить в доказательстве теоремы $\beta = x$ и получить тем самым сходимость последовательности интегралов (5.29) к интегралу (5.30). Поскольку в условиях теоремы выбор по $\varepsilon > 0$ соответствующего n_0 не зависит от β (или, в условиях следствия, от x), эта сходимость оказывается равномерной.

§ 6. Переход к пределу под знаком производной

Теорема. Пусть последовательность функций

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (5.31)$$

сходится в сегменте $[a, b]$ к предельной функции $s(x)$. Пусть далее, функции из последовательности (5.31) имеют непрерывные производные, последовательность которых

$$s'_1(x), s'_2(x), \dots, s'_n(x), \dots$$

сходится к некоторой предельной функции $\sigma(x)$ равномерно во всем сегменте $[a, b]$.

Тогда

$$1) \quad \frac{d}{dx} s(x) = \sigma(x);$$

2) последовательность (5.31) сходится к своей предельной функции $s(x)$ равномерно.

Доказательство. Пусть $a \leq \alpha < x \leq b$. На основании предыдущей теоремы (о переходе к пределу под знаком интеграла) мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^x s'_n(x) dx = \int_{\alpha}^x \sigma(x) dx.$$

Но, с другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^x s'_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n(x) - s_n(\alpha)) = s(x) - s(\alpha),$$

так что тождественно для x из $(\alpha, b]$

$$s(x) - s(\alpha) = \int_{\alpha}^x \sigma(x) dx.$$

Дифференцируя это равенство (при этом интеграл справа дифференцируется по его переменному верхнему пределу),

мы получаем

$$\frac{d}{dx} s(x) = \sigma(x),$$

и часть 1) доказана.

Для доказательства 2) напомним тождество

$$s_n(x) = s_n(\alpha) + \int_{\alpha}^x s'_n(x) dx.$$

Как уже отмечалось (см. § 3), для доказательства равномерной сходимости последовательности сумм достаточно установить равномерную сходимость последовательностей, составленных из слагаемых, т. е. в данном случае последовательностей

$$s_1(\alpha), s_2(\alpha), \dots, s_n(\alpha), \dots$$

и

$$\int_{\alpha}^x s'_1(x) dx, \int_{\alpha}^x s'_2(x) dx, \dots, \int_{\alpha}^x s'_n(x) dx, \dots$$

Но первая из этих последовательностей сходится равномерно на основании замечания в § 3, а вторая — в силу следствия теоремы § 5.

§ 7. Определение равномерной сходимости функционального ряда и признак Вейерштрасса

Определение. Функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

называется *сходящимся* в некоторой области D *равномерно*, если в этой области последовательность его частичных сумм

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$$

сходится равномерно к своей предельной функции $s(x)$.

Весьма удобный признак равномерной сходимости функционального ряда был предложен Вейерштрассом. Этот признак имеет вид следующей теоремы.

Теорема (признак равномерной сходимости Вейерштрасса). *Функциональный ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (5.32)$$

каждый член которого является функцией, определенной

на сегменте $[a, b]$, сходится равномерно на этом сегменте, если существует такая последовательность

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

положительных постоянных, что

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (5.33)$$

для любого x из $[a, b]$ и любого $n = 1, 2, \dots$, а ряд

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n \dots \quad (5.34)$$

сходится.

Иногда в условиях этой теоремы функциональный ряд (5.32) называется *мажорируемым*, числовой ряд (5.34) — *мажорирующим*, а сама теорема — *теоремой о мажорировании*.

Доказательство. Из (5.33) и (5.34) мы на основании признака сравнения (см. § 2 главы 3) можем заключить о сходимости функционального ряда (5.32) в каждой точке сегмента $[a, b]$. Это значит, что мы можем говорить о сумме функционального ряда (5.32) как о функции $S(x)$, определенной для каждого x из этого сегмента.

В силу сходимости ряда (5.34) (обозначим его сумму через S) возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем по нему такое n_0 , что при $n \geq n_0$

$$S - (c_1 + c_2 + \dots + c_n) < \varepsilon,$$

т. е.

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \dots < \varepsilon. \quad (5.35)$$

Напишем для этого n

$$s_n(x) + r_n(x) = s(x),$$

где

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots \quad (5.36)$$

Из (5.33), (5.35) и (5.36) следует, что

$$r_n(x) \leq \varepsilon$$

при любых $n \geq n_0$ и x из рассматриваемого сегмента. Таким образом, мы по каждому ε находим такое n_0 , что при $n \geq n_0$ имеет место

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

для любого x . Это и означает равномерную сходимость ряда.

Пример. Функциональный ряд

$$\frac{\sin 1^2 x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \dots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \dots$$

сходится равномерно для всех вещественных x , потому что при всех x и n

$$\left| \frac{\sin n^2 x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

а ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots,$$

как известно, сходится.

Часто оказывается полезным прием, позволяющий судить о равномерной сходимости одного функционального ряда на основании равномерной и абсолютной сходимости другого.

Теорема. Если функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5.37)$$

сходится в некоторой области равномерно и абсолютно, а функции f_n ($n=1, 2, \dots$) в этой области равномерно ограничены в совокупности, то ряд

$$u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f_2(x) + \dots + u_n(x)f_n(x) + \dots \quad (5.38)$$

также сходится в этой области равномерно и абсолютно.

Доказательство. Обозначим n -й остаток ряда модулей для ряда (5.37)

$$|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots$$

через $r_n(x)$. По условию с ростом n величина $r_n(x)$ стремится к нулю равномерно по x .

Для n -го остатка $r_n^*(x)$ ряда модулей для ряда (5.38) мы имеем

$$r_n^*(x) = |u_{n+1}(x)f_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)f_{n+2}(x)| + \dots$$

Но из ограниченности функций f_n следует существование такого C , что для всех x и n

$$|f_n(x)| < C.$$

Тогда

$$r_n^*(x) \leq C(|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots) = Cr_n(x),$$

так что $r_n^*(x)$ также должно стремиться с ростом n к нулю равномерно по x .

Описываемый этой теоремой признак сходимости напоминает второй признак сравнения для рядов с положительными членами (см. § 2 главы 3).

§ 8. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами

Теорема (Коши). Пусть все члены функционального ряда

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5.39)$$

определены на сегменте $[a, b]$, непрерывны на нем и составленный из них функциональный ряд сходится на этом отрезке равномерно.

Тогда суммой ряда (5.39) будет функция, непрерывная на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Из непрерывности членов функционального ряда (5.39) следует непрерывность каждой из его частичных сумм

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$$

по условию эта последовательность частичных сумм сходится равномерно к предельной функции $s(x)$, являющейся суммой ряда (5.39). Следовательно, на основании теоремы § 4 функция $s(x)$ также должна быть непрерывной.

§ 9. Почленное интегрирование функциональных рядов

Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся последовательностей непосредственно приводят к теоремам о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся рядов.

Теорема (о почленном интегрировании рядов). Если функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5.40)$$

сходится равномерно на некотором сегменте $[a, b]$ и имеет суммой функцию $s(x)$, то функциональный (относительно

переменной y) ряд интегралов

$$\int_{\alpha}^y u_1(x) dx + \int_{\alpha}^y u_2(x) dx + \dots + \int_{\alpha}^y u_n(x) dx + \dots \quad (5.41)$$

(здесь, как и раньше, $a \leq \alpha \leq y \leq b$) также сходится равномерно на этом сегменте и имеет суммой функцию

$$\int_{\alpha}^y s(x) dx.$$

Доказательство. Пусть $s_n(x)$ — n -я частичная сумма ряда (5.40). Тогда

$$\int_{\alpha}^y s_n(x) dx = \int_{\alpha}^y (u_1(x) + \dots + u_n(x)) dx \quad (5.42)$$

будет, очевидно, n -й частичной суммой ряда (5.41).

По условию теоремы последовательность

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$$

частичных сумм ряда (5.40) сходится на сегменте $[a, b]$ равномерно. Следовательно, на основании теоремы о предельном переходе под знаком интеграла с переменным верхним пределом (следствие из § 5) последовательность интегралов

$$\int_{\alpha}^y s_1(x) dx, \int_{\alpha}^y s_2(x) dx, \dots, \int_{\alpha}^y s_n(x) dx, \dots \quad (5.43)$$

также сходится равномерно и имеет пределом

$$\int_{\alpha}^y s(x) dx. \quad (5.44)$$

Но ввиду (5.42) интегралы (5.43) являются частичными суммами ряда (5.41). Тем самым доказаны равномерная сходимость ряда (5.41) и равенство его суммы интегралу (5.44).

Переход от ряда (5.40) и его суммы к ряду (5.41) и его сумме называется *почленным интегрированием ряда*.

Примеры.

1. Функциональный ряд

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad (5.45)$$

сходится равномерно при $|x| \leq \alpha < 1$ и, как легко видеть (наш ряд является геометрической прогрессией), сумма его равна

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно, получаемый почленным интегрированием ряда (5.45) от 0 до $x < 1$ ряд

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

также равномерно сходится при $|x| \leq \alpha < 1$, и его сумма равна

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = \operatorname{arctg} x.$$

В качестве второго примера почленного интегрирования ряда можно вспомнить выведенную в § 6 главы 1 формулу

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = -\ln(1-x).$$

2. Как видно из примера § 4, последовательность

$$s_n(x) = nxe^{-\frac{1}{2}n^2x} \quad n=1, 2, \dots$$

сходится к своей предельной функции неравномерно (вблизи точки $x=0$). Поэтому применительно к ряду

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(nxe^{-\frac{1}{2}n^2x} - (n-1)xe^{-\frac{1}{2}(n-1)^2x} \right) \quad (5.46)$$

теорема о почленном интегрировании выполняться не обязана. И действительно, почленное интегрирование ряда (5.46) дает

$$\begin{aligned} \int_0^1 s_n(x) dx &= \int_0^1 nxe^{-\frac{1}{2}nx^2} dx = \\ &= \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nx^2} d\left(\frac{1}{2}nx^2\right) = -e^{-\frac{1}{2}nx^2} \Big|_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}n}, \end{aligned}$$

и предел этого интеграла при возрастании n равен единице. Вместе с тем интеграл от суммы ряда (5.46), являющийся в соответствии с (5.25) тождественным нулем, равен нулю.

Равномерная сходимость ряда в промежутке является достаточным, но отнюдь не необходимым условием его почленной интегрируемости.

Пример. Ввиду неравномерной сходимости вблизи $x=0$ последовательности

$$s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad n=1, 2; \dots$$

(см. § 4) правомерность почленного интегрирования ряда

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right)$$

может оспариваться. Тем не менее фактически это интегрирование в данном случае к ошибке не приводит, так как при любом $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^t s_n(x) dx &= \int_0^t \frac{nx dx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \int_0^t \frac{d(n^2x^2)}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \ln(1+n^2x^2) \Big|_0^t = \\ &= \frac{\ln(1+n^2t^2)}{2n}, \end{aligned}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t s_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2t^2)}{2n} = 0,$$

что совпадает с

$$\int_0^t s(x) dx = 0.$$

§ 10. Почленное дифференцирование функциональных рядов

Теорема (о почленном дифференцировании рядов). Пусть ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5.47)$$

сходится на сегменте $[a, b]$, имеет сумму $s(x)$, а его члены имеют на этом сегменте непрерывные производные, причем составленный из этих производных ряд

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots \quad (5.48)$$

сходится на $[a, b]$ равномерно и имеет сумму $\sigma(x)$.

Тогда ряд (5.47) сходится на $[a, b]$ равномерно, и производная его суммы равна сумме ряда (5.48):

$$\frac{d}{dx} s(x) = \sigma(x).$$

Доказательство. Пусть $s_n(x)$ — n -я частичная сумма ряда (5.47). Тогда

$$s'_n(x) = (u_1(x) + \dots + u_n(x))' = u'_1(x) + \dots + u'_n(x)$$

будет, очевидно, n -й частичной суммой ряда производных (5.48).

По условию теоремы последовательность

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (5.49)$$

частичных сумм ряда (5.42) сходится на сегменте $[a, b]$, а последовательность

$$s'_1(x), s'_2(x), \dots, s'_n(x), \dots \quad (5.50)$$

частичных сумм также сходится на этом отрезке и при этом равномерно.

Следовательно, на основании теоремы о переходе к пределу под знаком производной (см. § 6) последовательность (5.49) сходится равномерно и производная ее предела равна пределу последовательности (5.50).

Сделаем простое, но полезное замечание: для почленного дифференцирования в некоторой точке x сходящегося ряда достаточно сходимости ряда его непрерывных производных не в каком-либо заранее предписанном сегменте $[a, b]$, но в любом сколь угодно малом (важно лишь, чтобы он содержал точку x).

Примеры.

1. Заменяя в ряде из примера 1 § 9 переменную x на $-x$, мы получаем ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Из него непосредственно получается, что

$$x \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n} + \dots \quad (5.51)$$

Справа здесь стоит некоторый ряд. Продифференцировав его почленно, мы получим

$$2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x^n}{n} + \dots$$

Поскольку здесь

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{n+2}{n+1} x^{n+1}}{\frac{n+1}{n} x^n} \right| = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} x,$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = x,$$

этот ряд сходится абсолютно и равномерно для всех $|x| \leq a < 1$. Следовательно, написанный ряд производных сходится к производной от суммы ряда (5.46):

$$\begin{aligned} 2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x^n}{n} + \dots = \\ = \frac{x}{1+x} + \ln(1+x). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Эта сходимость — равномерная при всех $|x| \leq \alpha < 1$.

2. Согласно формуле (1.30)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2} x \quad (5.53)$$

при всех x из $(-\pi, \pi)$. Однако на основании (1.28) для частичных сумм ряда, состоящего из производных членов ряда (5.53), мы имеем

$$\sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} \cos nx = \frac{1}{2} - (-1)^k \frac{\cos \frac{2k+1}{2} x}{2 \cos \frac{x}{2}}.$$

Здесь, очевидно, при возрастании k правая часть ни к какому пределу не стремится. Следовательно, ряд производных расходится, и теорема о почленном дифференцировании неприменима.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

§ 1. Определение степенного ряда

Определение. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (6.1)$$

где a_0, a_1, a_2, \dots не зависят от переменной z , называется *степенным относительно переменной z рядом*. Числа a_0, a_1, a_2, \dots называются *коэффициентами* этого ряда.

Так как обычно бывает ясно, по какой переменной функциональный ряд является степенным, мы будем впредь говорить просто о степенных рядах.

Как и в случае общих функциональных рядов, можно говорить о вещественных и о комплексных степенных рядах.

Именно, если переменная z может принимать комплексные (и в том числе вещественные) значения, а коэффициенты ряда — комплексные числа, то степенной ряд называется *комплексным*.

Если же значения z могут быть только вещественными, а коэффициенты ряда — тоже вещественные числа, то степенной ряд называется *вещественным*.

Промежуточный случай, когда значения z должны быть вещественными, а коэффициенты ряда могут быть комплексными ($a_n = b_n + ic_n$), не представляет большого интереса: обычно в этом случае всю нужную информацию о ряде

$$(b_0 + ic_0) + (b_1 + ic_1)z + \dots + (b_n + ic_n)z^n + \dots$$

можно получить, рассматривая порознь два вещественных ряда

$$b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$$

и

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

Далее в этой и в следующих главах мы будем рассматривать как комплексные, так и вещественные степенные ряды. Разумеется, что каждый раз, когда это необходимо, мы будем оговаривать, с какой областью значений переменных мы имеем дело. Кроме того, как это обычно принято, переменная, принимающая комплексные значения, будет обозначаться буквой z , а переменная, принимающая только вещественные значения, — буквой x .

При тех или иных конкретных значениях z_0 , принимаемых переменной z , ряд (6.1) превращается в числовой ряд

$$a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n + \dots, \quad (6.2)$$

члены которого, вообще говоря, комплексные числа.

Определение. Числовой ряд (6.2) сходится *абсолютно*, если сходится ряд

$$|a_0| + |a_1 z_0| + \dots + |a_n z_0^n| + \dots,$$

составленный из модулей членов ряда (6.2).

Очевидно, сформулированное определение абсолютной сходимости совпадает с приведенным в § 1 главы 4.

§ 2. Теорема Абеля

Области сходимости степенных рядов устроены довольно просто. Они описываются следующей теоремой.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд*

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad (6.3)$$

сходится при некотором $z = z_0$, то он сходится абсолютно при всех значениях z , для которых

$$|z| < |z_0|.$$

Наоборот, если ряд (6.3) расходится при $z = z_0$, то он расходится при всех значениях z , для которых

$$|z| > |z_0|.$$

Доказательство. Предположим сначала, что числовой ряд

$$a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n + \dots$$

сходится. В этом случае, как было установлено ранее (см. § 6 главы 2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0.$$

Тем более, члены этого ряда ограничены, т. е. найдется такое K , что при любом номере n

$$|a_n z_0^n| < K.$$

Пусть теперь $|z| < |z_0|$ (тем самым мы предполагаем, что $z_0 \neq 0$). Тогда

$$q = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1.$$

Мы имеем

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n} \right| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = |a_n z_0^n| q^n < K q^n.$$

Это значит, что при $|z| < |z_0|$ члены ряда

$$|a_0| + |a_1 z| + \dots + |a_n z^n| + \dots, \quad (6.4)$$

начиная с некоторого места, становятся меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$K + Kq + \dots + Kq^{n-1} + \dots,$$

в которой знаменатель меньше единицы. Так как такая прогрессия сходится, ряд (6.4) также должен сходиться. Но это означает, что ряд

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

сходится абсолютно.

Предположим теперь, что ряд

$$a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n + \dots \quad (6.5)$$

расходится. Будем доказывать вторую часть теоремы от противного. Возьмем некоторое z , для которого $|z| > |z_0|$, и допустим, что ряд

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

сходится. Но тогда из сходимости этого ряда, согласно первой части теоремы, должен сходиться и ряд (6.5), что противоречит предположенному.

§ 3. Круг сходимости ряда

Теперь мы можем достаточно точно описать области сходимости степенных рядов.

Рассмотрим все значения z , при которых степенной ряд

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad (6.6)$$

расходится. Пусть такие числа существуют, а R — точная нижняя граница модулей этих чисел (иными словами, число R таково, что для любого z , для которого $|z| < R$, ряд (6.6) уже сходится; такое число существует, потому что всякая убывающая последовательность модулей ограничена снизу (нулем)). Тогда по доказанному в § 2 при $|z| > R$ ряд (6.6) расходится, а по определению числа R при $|z| < R$ ряд (6.6) сходится.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое вещественное неотрицательное число R , что при $|z| < R$ ряд

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

сходится, а при $|z| > R$ расходится.

Множество всех комплексных чисел, для которых $|z| < R$, образует на плоскости комплексных чисел круг радиуса R с центром в точке 0. Этот круг называется *кругом сходимости* данного ряда.

Радиус R круга сходимости называется *радиусом сходимости*.

Заметим, что, говоря о круге сходимости ряда, мы имеем в виду сходимость ряда для всех точек внутри круга и расходимость его для всех точек, лежащих вне круга. Вопрос же о поведении ряда для тех значений z , которые лежат на самой окружности, является значительно более деликатным, и ответ на него обычно связан с более или менее сложным анализом индивидуальных свойств конкретного ряда.

Пример. Рассмотрим ряд

$$-z + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} z^n + \dots \quad (6.7)$$

При $z = -1$ мы получаем гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

который расходится. Следовательно, по второй части теоремы Абеля радиус сходимости этого ряда не превосходит единицы: $R \leq 1$.

С другой стороны, при $z=1$ мы из (6.7) получаем знакпеременный ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots,$$

который сходится. Следовательно, по первой части теоремы Абеля радиус сходимости ряда (6.7) не меньше единицы: $R \geq 1$.

Объединяя сказанное, мы получаем, что радиус сходимости ряда (6.7) равен единице: $R=1$.

Нам остается выяснить сходимость ряда (6.7) на самом круге сходимости, т. е. для тех значений z , для которых $|z|=1$.

Возьмем такое z и представим его в тригонометрической форме:

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Ряд (6.7) при этом приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left(-\cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{3} \cos 3\varphi + \dots \right) + \\ & + i \left(-\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \dots \right). \end{aligned}$$

Как было обнаружено в § 7 главы 1 при помощи довольно специфических вычислений, ряд

$$\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi - \dots$$

при всех $-\pi < \varphi < \pi$ сходится и имеет суммой $\varphi/2$ (см. формулу (1.27)). В силу аналогичных соображений при всех $-\pi < \varphi < \pi$ сходится и ряд

$$\cos \varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi - \dots,$$

и тем самым ряд (6.7).

Таким образом, интересующий нас ряд сходится во всех точках окружности круга сходимости, за исключением точки $z=-1$.

Круг сходимости степенного ряда может состоять из единственной нулевой точки (в этом случае радиус сходимости ряда равен нулю) или, напротив, охватывает всю плоскость комплексного переменного (в этом случае принято говорить, что радиус сходимости ряда *бесконечен*).

Примеры.

1. При любом $z \neq 0$ ряд

$$0! + 1! z + 2! z^2 + \dots + n! z^n + \dots$$

расходится (см. пример 5 § 2 главы 5). Следовательно, радиус сходимости этого ряда равен нулю.

2. При любом z ряд

$$\frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

сходится (см. пример 4 § 2 главы 5). Следовательно, радиус сходимости этого ряда можно принять равным бесконечности.

§ 4. Вещественный степенной ряд и его интервал сходимости

Если ряд

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (6.8)$$

имеет вещественные коэффициенты и переменная x принимает только вещественные значения, то теорема Абеля приводит нас к следующему утверждению:

Существует такое неотрицательное R , что при $x > R$ или $x < -R$ ряд (6.8) расходится, при $-R < x < R$ сходится, а поведение ряда при $x = \pm R$ подлежит дальнейшему анализу.

Область значений переменной x , удовлетворяющих соотношению

$$-R < x < R,$$

называется в случае вещественного ряда его *интервалом сходимости*. За числом R , как и в комплексном случае, сохраняется название *радиуса сходимости*.

§ 5. Равномерная сходимость ряда в круге его сходимости

Теорема. *Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, содержащемся в его круге сходимости.*

Доказательство. Пусть

$$a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n + \dots \quad (6.9)$$

— степенной ряд и R — его радиус сходимости. Возьмем произвольный замкнутый круг, лежащий внутри круга сходимости. Очевидно, можно считать, что центр меньшего круга также находится в точке 0. (Точнее говоря, всякий меньший круг можно захватить кругом с центром в точке 0 и целиком содержащимся в круге сходимости; равномерная сходимость ряда в охватывающем круге влечет

равномерную сходимость и в меньшем круге.) Пусть R_1 — его радиус. Возьмем точку z_0 , лежащую в кольце между нашими двумя кругами. Так как эта точка расположена внутри круга сходимости степенного ряда (6.9), ряд

$$a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n + \dots$$

сходится абсолютно. Но при любом z_1 из меньшего круга

$$|z_1| < |z_0|.$$

Поэтому

$$|a_n z_1^n| = |a_n| |z_1|^n < |a_n| |z_0|^n = |a_n z_0^n|.$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. § 7 главы 5) ряд

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

сходится в меньшем круге равномерно.

Теорема (о непрерывности суммы ряда). *В любой замкнутой области, лежащей внутри круга сходимости ряда, сумма ряда является непрерывной функцией.*

Доказательство. Каждая частичная сумма степенного ряда, очевидно, есть непрерывная функция. Поскольку по предыдущему в любой замкнутой области внутри круга сходимости ряда сходимость является равномерной, сумма ряда, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, на основании сказанного в § 4 главы 5 сама является непрерывной функцией.

Доказанные теоремы открывают возможности почленного интегрирования и дифференцирования степенных рядов. Мы обсудим эти возможности отдельно для вещественных и комплексных степенных рядов.

§ 6. Вещественные ряды

Теорема (о почленном интегрировании степенного ряда). *Если пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то последовательность интегралов от частичных сумм ряда сходится к интегралу от суммы ряда.*

Доказательство. Достаточно вспомнить, что внутри своего интервала сходимости ряд сходится рав-

номерно, после чего сослаться на общую теорему § 9 главы 5.

Теорема о почленном дифференцировании общих функциональных рядов выглядела более слабой, чем теорема об их почленном интегрировании: в теореме о дифференцировании требовалась дополнительно сходимость ряда, составленного из производных членов. Для случая степенных рядов это условие внутри интервала сходимости выполняется автоматически, о чем свидетельствует следующая теорема.

Теорема (о почленном дифференцировании степенного ряда). Пусть степенной ряд

$$s(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (6.10)$$

имеет радиус сходимости R . Тогда ряд

$$\sigma(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots, \quad (6.11)$$

получаемый в результате почленного дифференцирования ряда (6.10), также имеет радиус сходимости R .

Производная суммы ряда (6.10) равна сумме ряда (6.11):

$$\frac{d}{dx} s(x) = \sigma(x).$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что вторая часть теоремы следует из первой ее части. Действительно, раз ряд (6.11) имеет радиус сходимости R , согласно теореме о равномерной сходимости, он сходится равномерно в любой замкнутой области интервала сходимости ряда (6.10). Следовательно, мы можем сослаться на общую теорему о почленном дифференцировании функциональных рядов.

Нам остается найти радиус сходимости ряда (6.11).

Пусть $|x_0| = \rho < R$. Возьмем произвольно $\rho < r < R$. Так как точка x_0 принадлежит интервалу сходимости ряда (6.10), числовой ряд

$$a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n + \dots$$

сходится, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x_0^n| = 0.$$

Это значит, что при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно больших n

$$|a_n x_0^n| < \varepsilon.$$

Далее, мы имеем

$$|na_n x_0^{n-1}| = \left| na_n r^n \frac{1}{r} \frac{x_0^{n-1}}{r^{n-1}} \right| = n |a_n r^n| \frac{1}{r} \left| \frac{x_0^{n-1}}{r^{n-1}} \right| < \frac{n\varepsilon}{r} \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n-1}.$$

Следовательно, члены ряда

$$a_1 + 2a_2 x_0 + \dots + na_n x_0^{n-1} + \dots, \quad (6.12)$$

начиная с некоторого места, становятся меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{\varepsilon}{r} + \frac{2\varepsilon}{r} \left| \frac{x_0}{r} \right| + \dots + \frac{n\varepsilon}{r} \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n-1} + \dots \quad (6.13)$$

Применяя к последнему ряду признак сходимости Даламбера, мы получаем

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{r} \varepsilon \left| \frac{x_0}{r} \right|^n}{\frac{n}{r} \varepsilon \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \frac{\rho}{r} \rightarrow \frac{\rho}{r} < 1.$$

Следовательно, ряд (6.13) сходится. Поэтому сходится и ряд (6.12). Значит, по теореме Абеля степенной ряд (6.12) сходится в круге радиуса r равномерно.

Но число r может быть выбрано сколь угодно близким к числу R . Это и означает, что радиус сходимости ряда (6.12) равен R .

Хотя при почленном дифференцировании степенного ряда радиус его сходимости и не уменьшается, но в пределах области сходимости получившийся ряд сходится медленнее, чем исходный.

Пример. Для n -х остатков суммы сходящейся геометрической прогрессии $1, x, x^2, \dots$ и ряда, составленного из производных ее членов, согласно (1.21) и (1.22) имеет место

$$\frac{nx^{n-1}(1-x) + x^n}{(1-x)^2} : \frac{x^n}{1-x} = \frac{n \frac{1-x}{x} + 1}{1-x} = \frac{n}{x} + \frac{1}{1-x} > n+1.$$

§ 7. Комплексные ряды

Теорема о почленном интегрировании степенного ряда в комплексной области формулируется и доказывается практически так же, как и для случая вещественной области. Это объясняется тем, что интегралы в комплексной области имеют много общего с обычными интегралами (особенно, если сравнивать их с криволинейными интегралами).

Теорема. Если степенной ряд сходится равномерно на некоторой кривой, то его можно интегрировать вдоль этой кривой почленно.

Доказательство этой теоремы, как и доказательство аналогичной теоремы предыдущего параграфа, осуществляется непосредственно ссылкой на теорему § 9 главы 5.

Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда в комплексной области является существенно более сложной, чем в вещественном случае. Мы ограничимся здесь лишь ее формулировкой.

Теорема. Если комплексный степенной ряд сходится равномерно на некотором контуре, то внутри этого контура его можно почленно дифференцировать и притом сколько угодно раз.

Пример. Рассмотренный нами в § 3 ряд

$$-z + \frac{1}{2}z^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{n}z^n + \dots \quad (6.14)$$

не сходится на всей окружности своего круга сходимости (именно, он расходится при $z = -1$). Тем более, он не сходится на этой окружности равномерно. Следовательно, мы не имеем права дифференцировать этот ряд почленно всюду в круге сходимости.

Вместе с тем этот ряд сходится равномерно в любой замкнутой области внутри своего круга сходимости и в том числе на любой окружности вида $|z| = \rho < 1$. Следовательно, ряд (6.14) можно дифференцировать в его круге сходимости, отступая внутрь этого круга сколь угодно мало.

§ 8. Разложение функций в степенные ряды

Сумма всякого сходящегося степенного ряда является некоторой функцией, определенной внутри круга сходимости этого ряда (а также, быть может, еще и в некоторых точках его границы).

В связи с этим возникают две задачи. Во-первых, можно по заданному ряду искать ту функцию, которой равна его сумма в области сходимости ряда. Эта задача называется суммированием сходящегося ряда. Во-вторых, можно по заданной функции искать сходящийся ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Эта задача называется разложением функции в ряд.

Сейчас мы займемся вопросами разложения функций в степенные ряды. В дальнейшем будут рассматриваться также разложения функций в тригонометрические ряды, с одним примером которых мы уже познакомились в § 7 главы 1.

Наряду со степенными рядами относительно переменной z , т. е. рядами вида

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (6.15)$$

нам будет удобно рассматривать также ряды, степенные относительно переменной $z - a$, ряды вида

$$a_0 + a_1 (z - a) + \dots + a_n (z - a)^n + \dots \quad (6.16)$$

Ясно, что подстановкой $y = z - a$ второй из этих рядов превращается в первый. Поэтому если круг сходимости первого ряда состоит из всех точек, для которых $|z| \leq R$, то по тем же самым причинам круг сходимости второго ряда состоит из всех тех точек y , для которых $|y| \leq R$, т. е. $|z - a| \leq R$. Иными словами, на комплексной плоскости, на которой изображается независимая переменная z , круг сходимости ряда (6.16) имеет тот же радиус R , что и круг сходимости ряда (6.15), а центр его расположен в точке a .

В частности, если ряды (6.15) и (6.16) вещественные, то интервал сходимости ряда (6.16) получается путем сдвига интервала сходимости ряда (6.15) на a вправо (очевидно, если $a < 0$, то фактически происходит сдвиг влево).

§ 9. Формула Тейлора

Напомним следующий факт, относящийся к дифференциальному исчислению.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором сегменте непрерывные производные до $(n+1)$ -го порядка включительно, а точка a находится внутри этого сег-

мента. Тогда для любого x из этого же сегмента имеет место формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots \\ \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n(x), \quad (6.17)$$

где остаточный член $R_n(x)$ может быть записан в виде

$$R_n(x) = (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (6.18)$$

(форма Лагранжа), причем ξ лежит между a и x . Очевидно, число ξ можно записать также в виде $a + \theta(x-a)$, где $0 < \theta < 1$.

Доказательство. Пусть остаточный член $R_n(x)$ определяется равенством (6.17). Покажем, что он действительно имеет вид, описываемый в (6.18). С этой целью фиксируем значения a и x , введем новую переменную y и рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = f(y) + (x-y) \frac{f'(y)}{1!} + (x-y)^2 \frac{f''(y)}{2!} + \dots \\ \dots + (x-y)^n \frac{f^{(n)}(y)}{n!} + (x-y)^{n+1} \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Очевидно, между a и x функция $\varphi(y)$ непрерывна и дифференцируема.

Полагая $y = x$, мы непосредственно получаем

$$\varphi(x) = f(x), \quad (6.19)$$

а полагая $y = a$, мы имеем

$$\varphi(a) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots \\ \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^{n+1} \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Согласно (6.17) правая часть этого равенства равна $f(x)$, так что

$$\varphi(a) = f(x). \quad (6.20)$$

Из (6.19) и (6.20) на основании теоремы Ролля для некоторого ξ , лежащего строго между a и x , должно быть

$$\varphi'(\xi) = 0. \quad (6.21)$$

Определение. Представление функции $f(x)$ в виде ряда

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots$$

называется *разложением этой функции в ряд Тейлора*.

В частности, при $a=0$ разложение в ряд Тейлора называется *разложением в ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + x \frac{f'(0)}{1!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \dots$$

Подчеркнем, что остаточный член в формуле Тейлора (6.17) для функции $f(x)$ не обязательно является остатком ряда Тейлора (6.24) этой функции. Поэтому из сходимости ряда Тейлора для функции $f(x)$ еще не следует его сходимость именно к этой функции. Следовательно, при разложении функции в ряд Тейлора следует проверять соблюдение условия (6.23).

Пример. Приведем пример функций, ряды Тейлора которых сходятся, но не к самим функциям.

Возьмем произвольную функцию вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad (6.25)$$

где P — некоторый полином. Ясно, что при $x \neq 0$ и таком, что $1/x$ не есть корень P , должно быть и $\varphi(x) \neq 0$, так что функция $\varphi(x)$ во всяком случае тождественно нулю не равна.

При $x \neq 0$ функция $\varphi(x)$, как видно из ее аналитического задания (6.25), непрерывна. Для проверки ее непрерывности при $x=0$ положим $1/x=y$. Тогда мы получим

$$\varphi(x) = P(y) e^{-y^2},$$

так что, применяя нужное число раз правило Лопиталю, мы будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{P(y)}{e^{y^2}} = 0. \quad (6.26)$$

Значит, функция $\varphi(x)$ непрерывна и при $x=0$.

Найдем теперь производную функции $\varphi(x)$. При $x \neq 0$ мы можем ее получить дифференцированием соответствующего аналитического выражения:

$$\varphi'(x) = P'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} = Q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad (6.27)$$

где

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} P'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P\left(\frac{1}{x}\right),$$

т. е. снова некоторый полином (от $1/x$).

Для вычисления значения производной при $x=0$ воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(\theta x), \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

(Применение формулы Лагранжа здесь законно, так как согласно доказанному функция $\varphi(x)$ является непрерывной; а при $x \neq 0$ — и дифференцируемой.) Переходя в этом равенстве к пределу при стремлении x к нулю справа или слева, мы, как и при выводе (6.26), получаем (параметр θ ограничен и нарушить сходимость аргумента к нулю не может)

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(\theta x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Объединяя (6.27) и (6.28), мы получаем

$$\varphi'(x) = \begin{cases} Q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Отсюда мы видим, что производная всякой функции вида (6.25) существует и сама имеет вид (6.25). Ее можно поэтому продифференцировать еще раз и снова получить функцию вида (6.25) и т. д. Таким образом, всякая функция вида (6.25) имеет производные сколь угодно высоких порядков и все они также имеют вид (6.25).

В частности, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$. Поэтому в формуле Тейлора (6.22) для этой функции при $a=0$ мы имеем

$$S_n(x) = \varphi(0) + x \frac{\varphi'(0)}{1!} + \dots + x^n \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

при любом n . Отсюда следует, что

$$R_n(x) = \varphi(x) - S_n(x) = \varphi(x),$$

так что $R_n(x)$ вовсе не стремится к нулю с ростом n . Таким образом, в нашем примере ряды вида (6.24) сходятся, и суммы их тождественно равны нулю, отличаясь тем самым от функций $\varphi(x)$.

Из приведенного только что примера видно, что не всякая функция, даже если ее можно неограниченное число раз дифференцировать, разложима в ряд Тейлора. Однако если разложение функции в какой-либо степен-

ной ряд вообще возможно, то оно является разложением именно в ряд Тейлора.

Теорема. Пусть

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots, \quad (6.29)$$

где стоящий справа ряд сходится в некотором сегменте $[a-R, a+R]$ к функции $f(x)$. Тогда этот ряд является рядом Тейлора, т. е.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (6.30)$$

Доказательство. Применяя к равенству (6.29) n раз теорему о почленном дифференцировании степенного ряда (§ 6), мы имеем

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + \frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x-a) + \frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x-a)^2 + \dots$$

Если в этом тождестве положить $x=a$, то все слагаемые справа, кроме первого, обратятся в нуль и мы получим

$$f^{(n)}(x) = n!c_n,$$

откуда и следует (6.30).

Из доказанной теоремы вытекает, что функция, рассмотренная в последнем примере, не может быть представлена в окрестности точки $x=0$ не только суммой своего ряда Тейлора, но и суммой какого-либо другого степенного ряда.

Как другое следствие доказанного мы получаем, что если имеются два разложения одной и той же функции $f(x)$ в одной и той же области в ряд

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

и в ряд

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + \dots,$$

то оба эти ряда являются одним и тем же рядом Тейлора и поэтому совпадают, т. е.

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n, \quad \dots$$

Удобный для практических приложений признак разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора описывается следующей теоремой.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет производные сколь угодно высоких порядков и существует такая постоянная C , что при любых x и n

$$|f^{(n)}(x)| < C,$$

то функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots$$

при любом a .

Доказательство. По условию для остаточного члена $R_n(x)$ для функции $f(x)$ в формуле Тейлора мы имеем

$$|R_n(x)| = \left| (x-a)^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \right| \leq C \frac{|x-a|^n}{n!},$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| \leq C \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-a|^n}{n!} = 0,$$

и требуемое установлено.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.
ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Разложение функции e^x в ряд Маклорена

Поскольку

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad \frac{d^2}{dx^2} e^x = e^x, \quad \dots,$$

так что при $f(x) = e^x$

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1,$$

формула Тейлора для функции e^x с $a=0$ будет иметь вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1} e^{\xi_n}}{(n+1)!},$$

где $0 \leq \xi_n \leq x$. Для остаточного члена мы имеем при любом x (ср. рассуждения в конце примера 4 § 2 главы 5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} e^{\xi_n}}{(n+1)!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!} = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно, ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (7.1)$$

сходится при любом x (впрочем, эта сходимость нам уже известна; она была установлена в примере 4 § 2 главы 5), и суммой его является функция e^x .

Заменяя в (7.1) x на $-x$, мы получаем

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (7.2)$$

Областью сходимости этого ряда также является вся прямая.

§ 2. Разложения в ряды Маклорена гиперболических функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$

Составим ряд, членами которого являются полусуммы соответствующих членов рядов (7.1) и (7.2):

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Этот ряд также сходится при любом x (см. теорему о сложении рядов § 8 главы 2). Аналогично, вычисляя полуразности (см. теорему о вычитании рядов в § 8 главы 2) соответствующих членов рядов (7.1) и (7.2), мы получаем также всюду сходящийся ряд

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

§ 3. Разложения в ряды Маклорена тригонометрических функций $\cos x$ и $\sin x$

Для функции $\cos x$ мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x, & \frac{d^2}{dx^2} \cos x &= -\cos x, & \frac{d^3}{dx^3} \cos x &= \sin x, \\ \frac{d^4}{dx^4} \cos x &= \cos x, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, формулой Маклорена для $\cos x$ будет

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \pm \begin{cases} x^{2n} \frac{\cos \xi_n}{(2n)!} & (0 \leq \xi_n \leq x), \\ x^{2n+1} \frac{\sin \eta_n}{(2n+1)!} & (0 \leq \eta_n \leq x). \end{cases}$$

Здесь при любом x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x^{2n} \frac{\cos \xi_n}{(2n)!} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0,$$

и точно так же

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x^{2n+1} \frac{\sin \eta_n}{(2n+1)!} \right| = 0.$$

Поэтому остаточный член стремится к нулю. Следовательно, мы можем написать разложение в ряд Маклорена функции $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Аналогично получается разложение в ряд Маклорена функции $\sin x$:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

§ 4. Показательная функция с комплексным значением показателя

Займемся определением показательной функции a^z , где a — вещественное и неотрицательное число, а показатель z может принимать не только вещественные, но и комплексные значения. Для этого можно взять некоторое характеристическое свойство функций a^x для вещественных значений x (т. е. такое свойство, которым обладают только эти функции), которое поддается переносу на случай комплексных значений независимого переменного, и, пользуясь именно этим свойством, распространить определение функции на комплексные значения аргумента.

Нам будет удобно, положив $\ln a = \alpha$, рассматривать функции

$$a^x = e^{(\ln a)x} = e^{\alpha x}.$$

Лемма. Если непрерывная функция $f(x)$ отлична от тождественного нуля и такова, что для любых x и y

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad (7.3)$$

то

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

при некотором α .

Доказательство. Прежде всего, возьмем такое x , что $f(x) \neq 0$. По условию леммы такое x непременно найдется. Для этого значения x должно быть

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0),$$

откуда

$$f(0) = 1. \quad (7.4)$$

Кроме того, мы имеем

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0. \quad (7.5)$$

Если бы было $f(1) = 0$, то, очевидно, при любом целом n

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)} = 0$$

и в силу обусловленной непрерывности функции $f(x)$

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

что противоречит (7.4). Значит, в (7.5) имеет место строгое неравенство.

Следовательно, найдется такое α , что

$$f(1) = e^\alpha.$$

Далее, для любого значения x вида $\frac{1}{n}$ (где n — целое положительное число) мы имеем

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = f(1) = e^\alpha,$$

откуда

$$f(x) = f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\alpha \frac{1}{n}} = e^{\alpha x}.$$

Пусть теперь $x = \frac{1}{n}$, где n — целое отрицательное число. Тогда $-n$ будет целым положительным числом, и мы на основании условия леммы имеем

$$f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0) = 1. \quad (7.6)$$

Но по предыдущему

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = e^{-\frac{\alpha}{n}},$$

так что (7.6) дает нам

$$f(x) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f\left(-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e^{-\frac{\alpha}{n}}} = e^{\alpha x}.$$

Для рационального значения $x = \frac{m}{n}$ должно быть поэтому

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) &= f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(e^{\alpha \frac{1}{n}}\right)^m = \\ &= e^{\alpha \frac{m}{n}} = e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Пусть, наконец, x принимает произвольное вещественное значение $x = x_0$. Как известно, можно составить

последовательность рациональных чисел (например, десятичных дробей) x_1, x_2, \dots , сходящихся к x_0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Тогда на основании обусловленной непрерывности функции f и известной непрерывности функции $e^{\alpha x}$ будет

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha x_n} = \\ &= e^{\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = e^{\alpha x_0} = e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Объединяя все сказанное, мы видим, что

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

для всех значений x , а это и требовалось.

Следствие. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы (т. е. при любых x и y выполняется равенство (7.3)) и

$$f(1) = e^{\alpha_0}, \quad (7.7)$$

то

$$f(x) = e^{\alpha_0 x}.$$

Доказательство. Согласно лемме должно быть

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

и, в частности,

$$f(1) = e^{\alpha}.$$

Вместе с (7.7) это дает нам $\alpha = \alpha_0$, откуда и следует требуемое.

Теорема. Пусть значение функции $f(z)$ для любого вещественного или комплексного z определено как сумма ряда

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (7.8)$$

Тогда функция $f(z)$ непрерывна, отлична от тождественного нуля и для любых комплексных z_1 и z_2

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2).$$

Доказательство. Ряд (7.8) сходится при любом вещественном значении z . Следовательно, по теореме о непрерывности суммы ряда (§ 5 главы 6) $f(z)$ является непрерывной при любом вещественном значении z функ-

цией. Кроме того, $f(z)$ отлична от тождественного нуля (например, $f(0) = 1$).

По правилу умножения рядов «по Коши» (см. § 5 главы 4) мы имеем

$$\begin{aligned}
 f(z_1)f(z_2) &= \left(1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots\right) = \\
 &= 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots \\
 &+ \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1 z_2}{1!1!} + \frac{z_1^2 z_2}{2!1!} + \frac{z_1^3 z_2}{3!1!} + \dots \\
 &\quad \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_1 z_2^2}{1!2!} + \frac{z_1^2 z_2^2}{2!2!} + \frac{z_1^3 z_2^2}{3!2!} + \dots \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

или, объединяя слагаемые «по диагональным линиям», мы получаем¹⁾

$$\begin{aligned}
 (z_1)f(z_2) &= \\
 &= 1 + \frac{z_1 + z_2}{1!} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \dots + \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} + \dots = f(z_1 + z_2).
 \end{aligned}$$

Из этой теоремы следует, что сумма ряда (7.8), как функция z , обладает тем важным характеристическим свойством функции e^z , которое выделяет ее из всех непрерывных функций. Поэтому естественно определить значение суммы ряда (7.8) при произвольном z , вещественном или комплексном, как значение функции e^z :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (7.9)$$

¹⁾ В самом деле

$$\begin{aligned}
 \frac{z_2^n}{n!} + \frac{z_1 z_2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{z_1^2 z_2^{n-2}}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{z_1^n}{n!} &= \\
 = \frac{1}{n!} (z_2^n + C_n^1 z_1 z_2^{n-1} + C_n^2 z_1^2 z_2^{n-2} + \dots + z_1^n) &= \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n.
 \end{aligned}$$

§ 5. Формулы Эйлера

Положим в формуле (7.9) $z = iy$:

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots = \\
 &= 1 + i \frac{y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} + \dots = \\
 &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) = \\
 &= \cos y + i \sin y \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

и аналогично

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \quad (7.11)$$

Отсюда мы получаем

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y \quad (7.12)$$

и

$$\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin y. \quad (7.13)$$

Для $z = x + iy$, где x и y — вещественные числа, формулы (7.10) и (7.11) дают нам

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (7.14)$$

Соотношения (7.12) и (7.13) называются *формулами Эйлера*. Вместе с формулой (7.14) формулы Эйлера устанавливают связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией с комплексным показателем.

§ 6. Тригонометрические функции от комплексного значения аргумента

Степенные ряды для тригонометрических функций

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

сходятся при любом вещественном значении x . Следовательно, по теореме Абеля должны сходиться, и притом

абсолютно, ряды

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

при любом комплексном значении z .

Примем поэтому значения сумм этих рядов в качестве значений тригонометрических функций при произвольных комплексных значениях аргумента z :

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (7.15)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (7.16)$$

§ 7. Гиперболические функции от комплексного значения аргумента

Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для тригонометрических функций, мы можем определить значения гиперболических функций при комплексном значении аргумента:

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (7.17)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (7.18)$$

Полагая в (7.17) и (7.18) iz вместо z , мы получим

$$\operatorname{ch}(iz) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \cos z$$

и аналогично

$$\operatorname{sh}(iz) = i \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) =$$

$$= i \sin z.$$

Таким образом, установлена непосредственная связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями.

§ 8. Вычисление значений функций при помощи ряда Маклорена

Разложения функций в ряды Маклорена позволяют во многих случаях вычислять с большой точностью значения этих функций. Вычислим, например, с точностью до пяти знаков $\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$.

Мы имеем

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} + \dots$$

Значит, $e^{0,1}$ близко к единице. Остаточный член R_3 имеет вид

$$\frac{0,0001}{4!} e^{\xi},$$

где $0 < \xi < 0,1$, так что и e^{ξ} близко к единице. Поэтому ненаписанные члены в разложении $e^{0,1}$ не повлияют на первые пять знаков после запятой и их можно отбросить. Вычисление дает нам $e^{0,1} = 1,10517$.

Иногда при вычислении значений функций удобно пользоваться почленным дифференцированием или интегрированием рядов.

Рассмотрим, например, разложение в ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots \quad (7.19)$$

Очевидно, стоящий справа ряд сходится равномерно при $|x| \leq c < 1$ и поэтому (см. § 9 главы 5) его почленное интегрирование между 0 и $x < 1$ законно. Выполнение этого интегрирования дает нам

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (7.20)$$

В частности, при $x = 0,1$ мы имеем

$$\operatorname{arctg} 0,1 = 0,1 - \frac{0,1^3}{3} + \frac{0,1^5}{5} - \dots$$

Этот ряд — знакочередующийся. Поэтому его остаток не превосходит последнего отброшенного члена. Удерживая

в нем два первых члена, мы получим значение

$$\operatorname{arctg} 0,1 = 0,09967$$

с пятью верными знаками.

Разложением (7.20) арктангенса в ряд можно воспользоваться для вычисления значения π .

Для начала предостережем читателя от следующего заманчивого рассуждения. Представляется «самым простым» положить в формуле (7.20) $x=1$, получить сразу

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \quad (7.21)$$

и вычислять $\pi/4$ непосредственно как сумму этого ряда. Здесь, однако, необходимо принять во внимание два обстоятельства.

Первое носит формальный характер. Стоящий в (7.19) справа ряд сходится лишь при $|x| < 1$, а при $x=1$ он расходится. Значит, почленное интегрирование этого ряда, как это и было оговорено, правомерно не во всем сегменте $[-1, 1]$, а лишь в пределах, лежащих внутри этого сегмента. Поэтому и формула (7.20) обоснована для нас лишь при $|x| < 1$. Правда, в действительности удастся доказать возможность перехода в подобных случаях от внутренних точек сегмента к его концам и тем самым обосновать законность подстановки $x=1$ в (7.20). Обосновывающая эту возможность теорема будет приведена в § 3 главы 14. Более того, на самом деле равенство

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

было уже нами получено ранее элементарным путем (формула (1.28)). Таким образом, равенство (7.21) оказывается верным не просто потому, что имеется формула (7.20) (которая верна лишь при $x < 1$), а еще в силу некоторых дополнительных соображений.

Кроме того, имеется и второе обстоятельство, практического сорта. Стоящий в (7.21) ряд сходится весьма медленно: для того чтобы погрешность вычисления (т. е. разность между суммой ряда и его частичной суммой) стала меньше заданного числа $1/n$, необходимо в частичной сумме удержать приблизительно $n/4$ членов. Очевидно, что для более рационального вычисления π следует находить значения арктангенсов при достаточно малых значениях аргу-

мента, а затем получить $\pi/4$ (или другую рациональную часть π) как некоторую их комбинацию. Можно предложить несколько способов таких вычислений. Один из наиболее простых и эффективных состоит в следующем.

Вспомним сначала, что $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Поэтому $2 \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} \frac{2a}{1 - a^2}$. В частности, при $a = 1/5$ мы имеем

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$$

и, далее,

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{12} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \operatorname{arctg} \frac{120}{119}.$$

Примем теперь во внимание, что

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

так что, полагая $\operatorname{tg} \alpha = a$ и $\operatorname{tg} \beta = b$, получим

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a - b}{1 + ab}.$$

При $a = 120/119$ и $b = 1$ мы получаем

$$\operatorname{arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{(120/119) - 1}{1 + (120/119)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Значит,

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Но $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ и потому мы имеем

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Вычисляем по формуле (7.20) значения стоящих справа арктангенсов, мы можем получить π с любой наперед заданной точностью:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right) \quad (7.22)$$

Предположим, что нас интересует значение π с точностью до 10^{-7} . Это значит, что мы можем положить

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3}$$

(следующий член разложения есть $5^{-1} 239^{-5} < 10^{-10}$) и

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9}$$

(следующий член разложения есть $11^{-15} 5^{-11} < 10^{-8}$). Окончательно мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} \right) - \\ &- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} \right) = 4 \cdot 0,19739556 - 0,00418408 = 0,78539816, \end{aligned}$$

откуда $\pi = 3,14159264$.

Зная значение π , можно в свою очередь весьма точно вычислять значения тригонометрических функций от аргументов, заданных в градусной мере.

Например, при вычислении $\sin 5^\circ = \sin(\pi/36)$ имеем

$$\sin 5^\circ = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{36} \right)^3 + \dots$$

Ограничиваясь написанными первыми двумя слагаемыми, мы допустим ошибку, которая не будет превосходить первого из отброшенных членов (ибо мы имеем дело со знакоперевающимся рядом), т. е.

$$\frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{36} \right)^5 < 10^{-7}.$$

Вычисление дает нам

$$\sin 5^\circ = 0,0872664 - \frac{1}{6} 0,0006646 = 0,087156.$$

§ 9. Биномиальный ряд

Найдем разложение в степенной ряд функции

$$f(x) = (1+x)^t \quad (7.23)$$

(t — произвольное вещественное число).

Дифференцируя равенство (7.23) n раз, мы получаем

$$f^{(n)}(x) = t(t-1)\dots(t-n+1)(1+x)^{t-n},$$

так что

$$f^{(n)}(0) = t(t-1)\dots(t-n+1).$$

Следовательно, рядом Маклорена функции $f(x)$ будет ряд

$$1 + \frac{t}{1!}x + \frac{t(t-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (7.24)$$

Если число t — целое и положительное, то в t -м и во всех последующих коэффициентах появляется равный нулю сомножитель. Поэтому эти коэффициенты, а следовательно, и сами члены, обращаются в нуль и ряд превращается в конечную сумму. Если же число t нецелое, или целое, но отрицательное, то ни один из коэффициентов ряда в нуль не обратится и нам придется иметь дело с бесконечным рядом. Этот ряд называется *биномиальным*, а его коэффициенты — *биномиальными коэффициентами*. По внешнему виду они напоминают обычные биномиальные коэффициенты, рассматриваемые в элементарной математике.

Определим радиус сходимости биномиального ряда. Для этого составим ряд из модулей членов биномиального ряда и воспользуемся признаком сходимости Даламбера. Мы имеем

$$u_n = \left| \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} x^n \right|,$$

$$u_{n+1} = \left| \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|,$$

так что

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|t-n|}{n+1} |x|,$$

и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|t-n|}{n+1} |x| = |x|.$$

Следовательно, при $|x| < 1$ биномиальный ряд абсолютно сходится, и можно говорить о его сумме $s(x)$.

Нам остается проверить, что ряд (7.24) действительно сходится к функции $f(x)$.

Внутри своего интервала сходимости биномиальный ряд (как и всякий степенной ряд) сходится равномерно.

Поэтому применима теорема о почленном дифференцировании ряда (см. § 10 главы 5), которая дает нам

$$s'(x) = t + \frac{t(t-1)}{1!}x + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \quad (7.25)$$

Умножим обе части написанного равенства на $1+x$ и приведем подобные члены. (Эта операция законна, так как при $|x| < 1$ ряд, стоящий в (7.25) справа, сходится абсолютно.) В результате мы снова получим сходящийся ряд, в котором коэффициентом при x^n ($n=0, 1, \dots$) будет сумма двух соседних коэффициентов умноженного ряда:

$$\frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{(n-1)!} + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)(t-n)}{n!}.$$

Эту сумму можно переписать как

$$\frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{(n-1)!} \left(1 + \frac{t-n}{n}\right) = \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} t.$$

Мы получили умноженный на t коэффициент при x^n в биномиальном ряде (7.24). Таким образом, в области сходимости биномиального ряда должно быть

$$(1+x)s'(x) = ts(x). \quad (7.26)$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{s(x)}{f(x)} = \frac{s(x)}{(1+x)^t}$$

и найдем производную этого отношения

$$\frac{d}{dx} \frac{s(x)}{(1+x)^t} = \frac{s'(x)(1+x)^t - s(x)t(1+x)^{t-1}}{(1+x)^{2t}} = \frac{(1+x)s'(x) - ts(x)}{(1+x)^{t+1}}.$$

Ввиду (7.26) числитель последней дроби равен нулю, так что

$$\frac{d}{dx} \frac{s(x)}{(1+x)^t} = 0.$$

Следовательно, отношение $\frac{s(x)}{f(x)}$ является постоянной:

$$\frac{s(x)}{f(x)} = C. \quad (7.27)$$

Для определения этой постоянной положим в (7.23) и в (7.24) $x=0$. При этом мы, очевидно, получим

$$f(0) = 1 \quad \text{и} \quad s(0) = 1,$$

так что

$$C = \frac{s(0)}{f(0)} = 1. \quad (7.28)$$

Таким образом, из (7.27) и (7.28) следует, что

$$s(x) = f(x) = (1+x)^t,$$

т. е. ряд Маклорена функции $(1+x)^t$ при $|x| < 1$ сходится к этой функции. Поэтому мы можем написать

$$(1+x)^t = 1 + \frac{t}{1!}x + \frac{t(t-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (7.29)$$

Придавая t те или иные значения, можно получать различные полезные формулы.

Примеры.

1. При $t=1/3$ мы имеем

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{2! \cdot 3^2}x^2 + \frac{2 \cdot 5}{3! \cdot 3^3}x^3 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{4! \cdot 3^4}x^4 + \dots$$

2. При $t=-1/2$ получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

и т. п.

§ 10. Приложения биномиального ряда

При помощи биномиального ряда можно быстро и довольно точно вычислять значения корней из чисел, а также значений различных функций.

Пример. Вычислить $\sqrt[5]{35}$ с точностью до 0,0001.

Мы имеем

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{35} &= 2 \sqrt[5]{\frac{35}{32}} = 2 \left(1 + \frac{3}{32}\right)^{1/5} \cong 2 \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{32} - \frac{4}{2! \cdot 5^2} \frac{3^2}{32^2}\right) = \\ &= 2 + \frac{3}{80} - \frac{9}{6400} = 2,0361. \end{aligned}$$

Следующий член будет

$$\frac{4 \cdot 9}{3! \cdot 5^3} \frac{3^3}{32^3} \leq \frac{1}{25000} = 0,00004.$$

Биномиальный ряд является основой многих дальнейших разложений функций в ряды. Найдем, например, разложение в ряд Маклорена функции $\arcsin x$.

Рассмотрим биномиальный ряд при $t = -1/2$ и независимой переменной $-x^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3}x^6 + \dots$$

Почленное интегрирование этого ряда от нуля до $x < 1$ (такое интегрирование законно, так как мы остаемся в пределах области сходимости ряда) дает нам

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3 \cdot 7}x^7 + \dots$$

Как следует из сказанного в § 9 главы 5, этот ряд сходится в интервале $|x| < 1$. Впрочем, это можно установить и непосредственно, применяя признак сходимости Даламбера.

§ 11. Разложение в ряд Маклорена логарифмической функции

Воспроизведем разложение в ряд Маклорена логарифмической функции $\ln(1+x)$ (ср. § 10 главы 5). Полагая в основной формуле для биномиального ряда $t = -1$, мы имеем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (7.30)$$

Этот ряд сходится равномерно при $|x| \leq q < 1$, так что можно произвести интегрирование от 0 до $x < 1$:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (7.31)$$

Эта формула позволяет вычислять натуральные логарифмы чисел (а так как натуральные логарифмы пропорциональны десятичным, то и десятичные тоже). Вычислим, например, $\ln 2$.

По соображениям, аналогичным тем, которые были приведены в § 8, мы не будем выполнять подстановки $x=1$ в формулу (7.31), приводящей к формуле

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots, \quad (7.32)$$

хотя в действительности эта последняя формула и верна. Подчеркнем, что для сколько-нибудь точного вычисления с ее помощью числа $\ln 2$ необходимо удержать огромное число членов ряда.

Однако формула (7.31) поддается преобразованию до вполне практичной. Заметим прежде всего, что в (7.31) нам не запрещено взять $x < 0$. Заменив в ней x на $-x$, мы получим

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad (7.33)$$

При $x = 1/2$ эта формула дает нам

$$\ln 2 = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots \quad (7.34)$$

Вычисления по этой формуле уже вполне осуществимы, однако можно сконструировать и еще более быстро сходящийся ряд. Почленное вычитание ряда (7.33) из (7.31) дает нам

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right). \quad (7.35)$$

Полагая теперь

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n},$$

мы принимаем тем самым

$$x = \frac{1}{2n+1},$$

и формула (7.35) переписывается как

$$\ln \frac{n+1}{n} = 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right).$$

Заметим, что проведенный здесь прием улучшения сходимости ряда является частным случаем довольно общего метода, о котором будет идти речь в § 5 главы 14.

Пример. При $n=1$

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right).$$

Стоящий в скобках ряд сходится быстрее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $1/9$. Поэтому удержание каждого следующего члена увеличивает точность в определении $\ln 2$, грубо говоря, на один десятичный знак.

§ 12. Приближенное вычисление определенных интегралов при помощи степенных рядов

Вычислениями значений функций вычислительные приложения теории рядов далеко не исчерпываются. При помощи рядов можно вычислять определенные интегралы, а также находить решение дифференциальных уравнений.

Вычисление интегралов при помощи рядов можно комбинировать с обычными приемами интегрального исчисления.

Приведем несколько примеров.

Примеры.

1. Вычисление интегрального синуса:

$$\text{si } x = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$$

(иногда под $\text{si } x$ понимают другую функцию, значение которой меньше указанного интеграла на $\pi/2$).

Мы имеем $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$, откуда

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \quad (\text{этот ряд сходится,}$$

как и предыдущий, при всех значениях x). Следовательно,

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! (2n+1)} + \dots$$

Подставляя в ряд вместо x те или иные конкретные значения переменной, мы можем вычислять интересующие нас значения функции.

2. Вычислить

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Подстановка $\sqrt{x} = y$ приводит этот интеграл к виду

$$I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin y^2}{y} dy^2 = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \sin y^2 dy,$$

откуда

$$I(x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \left(y^2 - \frac{y^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{y^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots \right) dy.$$

Стоящий под знаком интеграла ряд сходится при всех y ; поэтому

$$I(x) = 2 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{3! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{y^{4n+3}}{(2+1)!(4n+3)} + \dots \right) \Big|_0^{\sqrt{x}}$$

и, наконец,

$$I(x) = 2 \sqrt{x} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{3! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (4n+3)} + \dots \right).$$

Такое произведение степени переменного на степенной ряд от нее принято называть *обобщенным степенным рядом*. Иногда представление функции в виде обобщенного степенного ряда оказывается более удобным, чем ее представление в виде обычного степенного ряда.

3. Большое значение в теории вероятностей имеет интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Для его вычисления заменим в формуле (7.2) x на $x^2/2$. Мы получим

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} - \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} + \dots$$

На основании признака сходимости Даламбера и теоремы § 5 главы 6 этот ряд сходится равномерно в любом сегменте $[0, x]$. Поэтому интегрирование этого ряда законно и дает нам

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2! \cdot 2^2} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n! \cdot 2^n} + \dots \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 2^2 \cdot 5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! \cdot 2^n (2n+1)} + \dots \right). \end{aligned}$$

§ 13. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов

При помощи разложений функций в степенные ряды можно приближенно интегрировать разнообразные дифференциальные уравнения. Не вдаваясь здесь в сложные теоретические соображения и не касаясь многочисленных практических приемов, мы ограничимся лишь одним примером.

Пример. Найти решение уравнения

$$y'' = xy \quad (7.36)$$

при начальных условиях

$$y_{x=0} = 1, \quad y'_x = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде степенного относительно x ряда

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (7.37)$$

При наших начальных условиях

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

Дифференцируя этот ряд дважды, мы получаем

$$2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \dots, \quad (7.38)$$

а умножая этот же ряд на x , мы имеем

$$a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{n-1} x^n + \dots \quad (7.39)$$

Приравнивание коэффициентов членов рядов (7.38) и (7.39) с одинаковыми степенями x дает нам

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 0, \\ 6a_3 &= 1, \\ 12a_4 &= 0, \\ 20a_5 &= a_2, \\ 30a_6 &= a_3, \\ 42a_7 &= a_4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что здесь оказывается

$$\begin{aligned} a_2 &= a_5 = \dots = a_{3n+2} = \dots = 0, \\ a_4 &= a_7 = \dots = a_{3n+1} = \dots = 0, \\ a_3 &= \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_6 = \frac{1}{5 \cdot 6} a_3, \quad \dots, \quad a_{3n+3} = \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} a_{3n}, \dots \end{aligned}$$

Иными словами, в ряде (7.37)

$$a_0 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3!}, \quad a_6 = \frac{1 \cdot 4}{6!}, \quad \dots, \quad a_{3n} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3n)!},$$

а остальные коэффициенты этого ряда обращаются в нуль.

Таким образом, мы получаем ряд

$$1 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} + \dots \quad (7.40)$$

Этот ряд сходится при любом значении x . В самом деле, применение признака сходимости Даламбера дает нам

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{3n+3}}{a_{3n}} x^3 = \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} x^3,$$

и с ростом n это отношение стремится к нулю при любом x .

Обозначим через $s(x)$ сумму ряда (7.40). Согласно сказанному в § 6 главы 6 сумма ряда

$$x + \frac{1}{3!} x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{(3n-3)!} x^{3n-2} + \dots, \quad (7.41)$$

полученного двукратным почленным дифференцированием ряда (7.40), равна $s''(x)$. С другой стороны, каждый член ряда (7.41) равен соответствующему члену ряда (7.40), умноженному на x . Следовательно, сумма ряда (7.41) равна $xs(x)$.

Таким образом, мы видим, что сумма $s(x)$ ряда (7.40) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} s(x) = xs(x),$$

т. е. дифференциальному уравнению (7.35). Кроме того, очевидно,

$$s(0) = 1 \quad \text{и} \quad s'(0) = 0. \quad (7.42)$$

Однако существует лишь одна функция, удовлетворяющая уравнению (7.36) и начальным условиям (7.42). Поэтому $y = s(x)$.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И ОРТОНОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

§ 1. Проекции и разложения векторов

Данный параграф является вспомогательным. В нем излагаются элементарные сведения по векторной алгебре. Читатель, знакомый с ними, может этот параграф при чтении пропустить.

Далее длина любого вектора \mathbf{a} будет обозначаться через $|\mathbf{a}|$. Иногда длина вектора называется его *нормой*. Подчеркнем, что длина любого вектора является неотрицательным числом. Пусть вектор \mathbf{a} расположен на оси U . Припишем в этом случае его длине знак $+$, если направление \mathbf{a} совпадает с направлением U , и знак $-$, если эти направления противоположны. Длину вектора на оси, рассматриваемую вместе с приписанным ей знаком, будем называть *алгебраической длиной* вектора на оси.

Проекцией вектора \mathbf{a} на ось (на направление) U называется вектор, расположенный на оси U , алгебраическая длина которого равна

$$|\mathbf{a}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, U}). \quad (8.1)$$

Далее мы будем рассматривать координатные пространства и векторы, проведенные из начала координат в каждую точку пространства.

Рассмотрим сначала обычное трехмерное векторное пространство с ортами \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} , соответствующими направлениям координатных осей X , Y и Z . Любая линейная комбинация этих ортов, т. е. любая сумма вида

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (8.2)$$

где x , y и z — вещественные числа, является вектором рассматриваемого пространства. Коэффициенты x , y и z называются *компонентами* вектора (8.2). Сложение векторов осуществляется сложением их соответствующих ком-

понент, а умножение вектора на число — умножением каждой из компонент на это число.

Наоборот, какой бы мы вектор \mathbf{a} в пространстве ни взяли, можно найти такие числа x , y и z , что \mathbf{a} приобретает вид (8.2). Таким образом, можно говорить, что каждый вектор \mathbf{a} трехмерного пространства может быть *разложен* «по векторам» \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} .

Геометрический смысл компонент в разложении (8.2) данного вектора \mathbf{a} достаточно прост, но вместе с тем чрезвычайно важен, и его обобщение послужит нам удобной иллюстрацией при наглядном истолковании разложения функций в ряды.

Эти компоненты x , y и z суть алгебраические длины проекций вектора \mathbf{a} соответственно на координатные оси X , Y и Z .

Если U есть координатная ось X , то (8.1) приобретает вид

$$|\mathbf{a}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, X}).$$

Перепишем это выражение в координатной форме.

Прежде всего, из теоремы Пифагора следует, что если вектор \mathbf{a} имеет вид (8.2), то длина его равна

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.3)$$

Кроме того, мы видели, что алгебраическая длина проекции вектора (8.2) на ось X есть x . Учитывая (8.3), это можно записать как

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos(\widehat{\mathbf{a}, X}) = x,$$

откуда

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, X}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (8.4)$$

Но, очевидно,

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, X}) = \cos(\widehat{X, \mathbf{a}}),$$

и (8.4) переписывается как

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, X}) = \cos(\widehat{X, \mathbf{a}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (8.5)$$

Аналогично получается, что

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, Y}) = \cos(\widehat{Y, \mathbf{a}}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (8.6)$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, Z}) = \cos(\widehat{Z, \mathbf{a}}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (8.7)$$

Возьмем теперь вектор

$$\mathbf{b} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Алгебраическая длина проекции \mathbf{b} на направление вектора \mathbf{a} есть сумма алгебраических длин проекций трех векторов $x'\mathbf{i}$, $y'\mathbf{j}$ и $z'\mathbf{k}$ на это направление. Но согласно (8.1) эти алгебраические длины будут равны соответственно

$$x' \cos(\widehat{X, \mathbf{a}}), \quad y' \cos(\widehat{Y, \mathbf{a}}), \quad z' \cos(\widehat{Z, \mathbf{a}})$$

(для тех компонент x' , y' , z' , которые неотрицательны, эти выражения просто совпадают с (8.1); для отрицательных же компонент направления соответствующих векторов $x'\mathbf{i}$, $y'\mathbf{j}$ или $z'\mathbf{k}$ противоположны направлениям своих осей, и косинусы изменяют знаки, компенсируя отрицательность компонент).

Таким образом, алгебраическая длина проекции \mathbf{b} на \mathbf{a} будет равна

$$x' \cos(\widehat{X, \mathbf{a}}) + y' \cos(\widehat{Y, \mathbf{a}}) + z' \cos(\widehat{Z, \mathbf{a}}),$$

или, учитывая (8.5), (8.6) и (8.7),

$$\frac{x'x + y'y + z'z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (8.8)$$

Вместе с тем на основании формулы (8.1) эта проекция есть

$$|\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}), \quad (8.9)$$

а

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \quad (8.10)$$

Из (8.8), (8.9) и (8.10) следует, что

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{x'x + y'y + z'z}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (8.11)$$

Стоящее здесь в числителе выражение

$$x'x + y'y + z'z = x x' + y y' + z z'$$

называется *скалярным произведением* векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и обычно обозначается через \mathbf{ab} .

В частности, при $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{ab} = \mathbf{aa} = x^2 + y^2 + z^2 = |\mathbf{a}|^2.$$

Непосредственно из определения скалярного произведения видно, что эта операция обладает свойствами коммутативности:

$$ab = ba$$

и дистрибутивности относительно действий сложения вектора и умножения вектора на число:

$$\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac, \\ \lambda(ab) &= (\lambda a)b. \end{aligned}$$

Однако закону ассоциативности скалярное умножение, вообще говоря, не подчиняется: $(ab)c$ есть вектор с тем же направлением, что и вектор c , а вектор $a(bc)$ — с тем же направлением, что и a . Поэтому в скалярных произведениях более чем двух векторов порядок выполнения умножений обязательно следует отмечать скобками.

В терминах скалярных произведений и норм формулу (8.11) можно переписать, как

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{ab}{|a||b|}.$$

В связи с этим алгебраическая длина проекции b на направление вектора a равна

$$|b| \cos(\widehat{a, b}) = \frac{ab}{|a|}.$$

Выраженная в длинах вектора a , она приобретает вид

$$\frac{ab}{|a|^2}. \quad (8.12)$$

Важным частным случаем взаимного расположения векторов является тот, когда они взаимно перпендикулярны. Перпендикулярные векторы называются также *ортогональными*. Очевидно, нулевой вектор, т. е. вектор, все компоненты которого равны нулю, ортогонален любому вектору (в том числе он является единственным вектором, который ортогонален самому себе). Если нам дан некоторый набор векторов, в котором любые два вектора ортогональны друг другу, то этот набор называется *ортогональной системой* векторов. Говоря о векторах, составляющих ортогональную систему, мы будем считать, что среди этих векторов нет нулевого. Очевидно, всякая

ортогональная система векторов в трехмерном пространстве состоит не более чем из трех векторов.

Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} ортогональны, то косинус угла между ними обращается в нуль и (8.11) дает нам

$$\mathbf{ab} = xx' + yy' + zz' = 0.$$

Пусть теперь $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — произвольная ортогональная система векторов, а вектор \mathbf{x} является их линейной комбинацией:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3. \quad (8.13)$$

Коэффициенты x_1, x_2 и x_3 можно выразить через скалярные произведения. Умножим для этого каждую часть (8.13) скалярно на \mathbf{a}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \mathbf{a}_1 &= (x_1 \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 + (x_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_1 + (x_3 \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_1 = \\ &= x_1 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1) + x_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) + x_3 (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Но

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 = |\mathbf{a}_1|^2,$$

а ввиду взаимной ортогональности векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и \mathbf{a}_3

$$\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 = 0.$$

Следовательно, (8.14) приобретает вид

$$\mathbf{x} \mathbf{a}_1 = x_1 |\mathbf{a}_1|^2,$$

откуда

$$x_1 = \frac{\mathbf{x} \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|^2}. \quad (8.15)$$

Сравнение с формулой (8.12) показывает, что x_1 есть алгебраическая длина проекции \mathbf{x} на направление \mathbf{a}_1 , выраженная в длинах вектора \mathbf{a}_1 .

Аналогично скалярное умножение (8.13) на \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 дает соответственно

$$x_2 = \frac{\mathbf{x} \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|^2} \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{\mathbf{x} \mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_3|^2}. \quad (8.16)$$

Таким образом, формулу (8.13) можно записать как

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{x} \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|^2} \mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{x} \mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_3|^2} \mathbf{a}_3. \quad (8.17)$$

Правую часть этой формулы называют *разложением* вектора \mathbf{x} по ортогональной системе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

В действительности *любой* вектор \mathbf{x} трехмерного пространства может быть представлен в виде (8.13) и тем

самым в виде (8.17). Мы, однако, намеренно оставляем в стороне этот вопрос, ограничиваясь следующим утверждением: *если* вектор \mathbf{x} имеет вид (8.13), *то* соответствующие коэффициенты вычисляются по формулам (8.15) и (8.16). Условие: «*если* \mathbf{x} имеет вид...» — не является тривиальным. Проиллюстрируем его содержательность на следующем примере. Пусть нам даны *два* ортогональных вектора, \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , и вектор \mathbf{x} , представленный в виде

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2. \quad (8.18)$$

Тогда, действуя, как и выше, мы получаем

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{x} \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|^2} \mathbf{a}_2. \quad (8.19)$$

Очевидно, не всякий вектор трехмерного пространства представим в виде (8.18) (например, если $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}$, а $\mathbf{a}_2 = \mathbf{j}$, то в виде их линейных комбинаций можно представлять лишь векторы, лежащие в плоскости XY). Однако *если* это имеет место, *то* справедлива формула (8.19).

Обратимся к важному частному случаю. Будем называть вектор *нормированным*, если его длина (норма) равна 1. Система векторов называется *нормированной*, если каждый входящий в нее вектор нормирован. Очевидно, для превращения вектора в нормированный (или, как говорят, для его нормировки) достаточно разделить вектор на его длину, на его норму.

Ортогональная и нормированная система векторов обычно называется *ортонормальной* (или ортонормированной) системой.

Вернемся теперь к ортогональной системе векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и предположим, что она является ортонормальной, т. е. что

$$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}_3| = 1.$$

В этом случае формула (8.17) приобретает особенно простой вид:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 + (\mathbf{x} \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_2 + (\mathbf{x} \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3, \quad (8.20)$$

т. е. коэффициенты разложения вектора по ортонормальной системе являются скалярными его произведениями на векторы системы.

Примером ортонормальной системы является тройка векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, и само задание вектора в виде (8.2) является его разложением по этой системе.

Все сказанное выше можно перенести и на случай конечномерного, n -мерного пространства, в котором векторы являются последовательностями из n вещественных чисел:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8.21)$$

Сложение n -мерных векторов и умножение их на вещественные числа, как и в трехмерном случае, производятся покомпонентно.

Компоненты x_1, \dots, x_n вектора (8.21) можно понимать как алгебраические длины его проекций на координатные оси X_1, \dots, X_n . За длину вектора \mathbf{x} естественно принять выражение

$$\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Рассматривая плоскость, проходящую через ось вектора \mathbf{x} и координатную ось X_i ($i = 1, \dots, n$), мы имеем

$$\cos(\mathbf{x}, X_i) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}.$$

Если ввести другой вектор

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n),$$

то, подобно тому, как это было в трехмерном пространстве,

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}},$$

где стоящее в числителе выражение называется *скалярным произведением* векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} . Как и в трехмерном случае, оно обозначается через $\mathbf{x}\mathbf{y}$ и является операцией, коммутативной и дистрибутивной относительно сложения векторов и относительно умножения вектора на число.

Называя векторы в n -мерном пространстве ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, мы можем говорить об ортогональных системах векторов в n -мерном пространстве. Ясно, что в n -мерном пространстве ортогональная система векторов может состоять не более чем из n векторов.

Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ ($m \leq n$) — произвольная ортогональная система векторов в n -мерном пространстве, а вектор \mathbf{x} имеет вид

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m,$$

Тогда, умножая это равенство скалярно на \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, m$), получаем, что $x_i = \frac{\mathbf{x}\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|^2}$, $i = 1, \dots, m$, т. е.

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \dots + \frac{\mathbf{x}\mathbf{a}_m}{|\mathbf{a}_m|^2} \mathbf{a}_m. \quad (8.22)$$

Правая часть этой формулы называется *разложением* вектора \mathbf{x} по ортогональной системе $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$.

Если векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ нормированные, т. е. если

$$|\mathbf{a}_1| = \dots = |\mathbf{a}_m| = 1,$$

то система $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ называется *ортонормальной* и формула (8.22) приобретает вид

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}\mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 + \dots + (\mathbf{x}\mathbf{a}_m) \mathbf{a}_m. \quad (8.23)$$

Из наглядных соображений видно (строгое доказательство мы приводить не будем), что при $m < n$ не всякий вектор пространства может быть разложен по системе $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Однако из сказанного следует, что если он все-таки разлагается, то это разложение имеет вполне определенный вид, описываемый в (8.22), а для случая ортонормальной системы — в (8.23).

Наконец, если мы умножим почленно равенство (8.23) скалярно на \mathbf{x} , то очевидно, получим

$$|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2. \quad (8.24)$$

Эта формула является многомерным аналогом теоремы Пифагора.

В качестве примера ортонормальной системы в n -мерном пространстве векторов (8.21) можно указать систему векторов («координатных ортов»):

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0, \\ 0, & 1, & \dots, & 0, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & 1. \end{pmatrix}$$

По этой системе разлагается любой вектор (8.21) и коэффициентами разложения являются сами компоненты вектора.

§ 2. Векторы и функции

Всякий вектор, понимаемый как последовательность чисел, является своего рода функцией. При этом независимой переменной можно считать номер компоненты

вектора, а зависимой переменной — величину компоненты. Так, например, вектор $(3, 7, -12)$ может быть задан и в виде таблицы:

Номер компоненты	1	2	3
Величина компоненты	3	7	— 12

С другой стороны, и функции обладают многими основными свойствами векторов. Их можно, подобно векторам, складывать, причем значения функции-суммы равны суммам соответствующих значений функций-слагаемых. Их можно и умножать на число, причем на это число умножается каждое значение умножаемой функции.

Оказывается, что для функций удастся обнаружить аналоги и дальнейших понятий векторной алгебры: нормы, скалярного произведения (тем самым можно в каком-то смысле говорить и о «косинусе угла между двумя функциями»), ортогональной и ортонормальной систем и разложений по таким системам; разумеется, он не имеет ничего общего с косинусами углов между графиками этих функций в точках их пересечения (как, впрочем, и в каких-либо других точках).

В § 1 речь шла о конечномерных пространствах. В таких пространствах удастся найти конечную (т. е. состоящую из конечного числа векторов) ортогональную систему, по которой можно разложить любой вектор пространства. Пространство функций вещественного аргумента конечномерным уже не является, и потому такой конечной ортогональной системы в нем найти не удастся. В связи с этим возникает вопрос о поисках бесконечных систем функций, которые могли бы стать основой разложения достаточно разнообразных функций, и о нахождении коэффициентов в этих разложениях.

Но разложение функций по бесконечной системе перестает быть обычной суммой, превращаясь в ряд или даже в интеграл. Такого рода разложения будут рассматриваться в оставшихся главах курса.

§ 3. Нормированные и ортогональные функции

Скалярным произведением векторов является сумма произведений их компонент.

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две функции, заданные на сегменте $[a, b]$ и непрерывные на нем. Интеграл от их произведения

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx \quad (8.25)$$

по своей внешней форме сильно напоминает скалярное произведение (не следует забывать, что интегрирование является своеобразной разновидностью суммирования).

Поэтому все те понятия, которые определяются через скалярные произведения векторов, и все свойства векторов, которые выражаются через их скалярные произведения, можно попытаться распространить и на непрерывные функции, пользуясь вместо скалярных произведений интегралами вида (8.25).

Норма вектора (т. е. его длина) есть квадратный корень из скалярного произведения вектора самого на себя. Поэтому естественно ввести следующее определение.

Определение. *Нормой функции* $\varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется квадратный корень из интеграла

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx.$$

Если этот интеграл равен единице:

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = 1,$$

то функция $\varphi(x)$ называется *нормированной* на $[a, b]$.

Ортогональность векторов означает равенство нулю их скалярного произведения.

По аналогии введем определение ортогональности функций.

Определение. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются *ортогональными* $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0.$$

§ 4. Нормированные и ортогональные системы функций

Рассмотрим теперь последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \quad (8.26)$$

заданных и непрерывных на сегменте $[a, b]$, среди которых нет функции, тождественно равной нулю.

О п р е д е л е н и е. Последовательность (8.26) называется *нормированной* на сегменте $[a, b]$, если нормирована каждая функция последовательности, т. е. если

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1 \quad \text{при любом } n.$$

Последовательность (8.26) называется *ортогональной* на сегменте $[a, b]$, если ортогональны на этом сегменте две различные входящие в нее функции, т. е. если

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Последовательность (8.26) называется *ортонормальной* (или ортонормированной) на некотором сегменте, если она является нормированной и ортогональной, т. е.

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

П р и м е р. Система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (8.27)$$

называется системой *тригонометрических функций*. Эта система ортогональна на сегменте $[-\pi, \pi]$. В самом деле (мы далее будем для единообразия полагать $1 = \cos 0x$), при $n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots$ и $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x + \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right) \bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Далее, при $n=1, 2, \dots, m=1, 2, \dots$ и $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x - \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned} \quad (8.29)$$

и, наконец, при любых $n=0, 1, 2, \dots$ и $m=1, 2, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) \, dx. \quad (8.30)$$

Здесь интеграл от каждого из слагаемых равен нулю, потому что при $k \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

а при $k=0$

$$\sin kx = 0$$

тождественно на $[-\pi, \pi]$.

Таким образом, система (8.27) на сегменте $[-\pi, \pi]$ является ортогональной. Нормированной на сегменте $[-\pi, \pi]$ эта система не будет, так как

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 nx + \sin^2 nx) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi, \end{aligned} \quad (8.31)$$

и нормой каждой из функций $\sin nx$ и $\cos nx$ является $\sqrt{\pi}$, а норма единицы, очевидно, равна $\sqrt{2\pi}$.

§ 5. Нормировка систем функций

Следующий переход от произвольной системы, заданной на некотором сегменте функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, к нормированной на этом сегменте системе называется ее *нормировкой*. Он довольно прост и сходен с нормировкой векторов. Для того чтобы его осуществить, достаточно вычислить для каждой из функций последовательности (8.26) интеграл

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) \, dx = \lambda_n$$

и разделить каждую функцию φ_n на $\sqrt{\lambda_n}$. Очевидно, при этом мы получим нормированные функции:

$$\int_a^b \left(\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right)^2 dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} = 1.$$

Нормировка системы тригонометрических функций (8.27) на сегменте $[-\pi, \pi]$ состоит, таким образом, в делении единицы на $\sqrt{2\pi}$ и в делении каждой из остальных функций на $\sqrt{\pi}$. В результате получится ортонормальная на сегменте $[-\pi, \pi]$ система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$$

Получение из некоторой последовательности функций ортогональной системы называется ее *ортгонализацией*. Этот процесс более сложен, чем нормировка, и даже не всегда возможен. Мы здесь не будем останавливаться на этом вопросе.

§ 6. Разложение по системам функций

Пусть снова дана заданная на $[a, b]$ последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (8.32)$$

а $f(x)$ — некоторая функция, также заданная на $[a, b]$. Мы будем рассматривать вопросы, связанные с разложением функции $f(x)$ в ряд по системе функций (8.32), т. е. с представлением функции $f(x)$ в виде суммы сходящегося ряда

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) + \dots$$

С такого рода представлениями функций мы уже встречались при разложении функций в ряды Тейлора и Маклорена. В случае рядов Тейлора в качестве последовательности (8.32) бралась последовательность

$$1, x - a, (x - a)^2, \dots, \quad (8.33)$$

а в случае рядов Маклорена — последовательность

$$1, x, x^2, \dots \quad (8.34)$$

Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена весьма полезно для теории и практики, но оно страдает рядом недостатков. К их числу следует отнести то уже отмечавшееся обстоятельство, что суммами сходящихся степенных рядов могут быть лишь функции, дифференцируемые сколько угодно раз. Вместе с тем как в самой математике, так и в ее приложениях приходится исследовать функции, имеющие «неплавности», «изломы» и даже «скачки».

Кроме того, ни одна из последовательностей (8.33) и (8.34) не является ортогональной ни на каком из сегментов. Поэтому на разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена не удастся перенести приемы, применяемые при разложениях векторов по ортогональным системам. Правда, системы (8.32) и (8.33) оказываются ортогональными на некоторых линиях на плоскости комплексного переменного, но это уже другой вопрос. Как будет видно из §§ 12 и 13 следующей главы, такая постановка вопроса фактически сводит его к рассмотрению разложений функций по системе тригонометрических функций (8.31).

Описанная в § 4 система тригонометрических функций и некоторые близкие ей системы лишены указанных недостатков степенных рядов. Разложения по этим системам будут рассматриваться в следующей главе.

§ 1. Ряды и коэффициенты Фурье

В § 1 главы 8 мы выяснили, что если нам даны три вектора

$$a_1, a_2, a_3,$$

составляющих ортонормальную систему, т. е. векторы, для которых

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1,$$

$$a_1 a_2 = a_2 a_3 = a_3 a_1 = 0,$$

то любой вектор x можно представить в виде

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3,$$

где коэффициентами x_1, x_2, x_3 являются соответственно скалярные произведения $a_1 x, a_2 x$ и $a_3 x$.

Пусть нам дана ортонормальная на сегменте $[a, b]$ последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (9.1)$$

и некоторая непрерывная функция $f(x)$. Займемся задачей о разложении функции $f(x)$ в ряд по функциям (9.1), т. е. о представлении функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots$$

Следуя проводимой нами аналогии между векторами и функциями, найдем числа

$$a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.2)$$

и составим ряд

$$a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots \quad (9.3)$$

Определение. Ряд (9.3) называется *рядом Фурье* функции по системе функций (9.1). Коэффициенты этого

ряда называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по системе (9.1).

Сравнительно простой и удобной системой функций для разложений в ряд Фурье по ней на сегменте $[-\pi, \pi]$ является описанная в главе 8 нормированная система тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$$

Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по этой системе на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (9.4)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (9.5)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.7)$$

Ряд (9.4) называется *тригонометрическим рядом Фурье*, чтобы отличать его от рядов Фурье, получающихся при разложениях по другим системам функций. Однако тригонометрические ряды Фурье употребляются в теории и практике по сравнению с остальными рядами Фурье столь часто, что обычно их называют «просто» рядами Фурье. Ряды же Фурье по другим системам функций называются часто «обобщенными» рядами Фурье¹⁾.

Частичные суммы рядов Фурье для тех или иных функций часто называют *суммами Фурье* этих функций.

Заметим, что при $n=0$

$$\cos nx = \cos 0 = 1.$$

¹⁾ Следует подчеркнуть, что ряды, называемые тригонометрическими рядами Фурье, рассматривались и до Фурье. Вычисление коэффициентов a_n и b_n по формулам (9.5) и (9.7) встречается еще у Эйлера (1777 г.). Сам Фурье ввел в научный обиход ряды более общего вида.

Поэтому формулу (9.5) можно рассматривать как частный случай формулы (9.6), который получается при $n=0$. Здесь необходимо, однако, еще раз подчеркнуть особое положение параметра a_0 , входящего в разложение (9.4) лишь своей половиной.

Отметим еще следующее терминологическое обстоятельство. Характеризация некоторого ряда как тригонометрического означает, что этот ряд имеет вполне определенный *внешний вид*: его членами являются тригонометрические функции вида $\cos nx$ и $\sin nx$, снабженные теми или иными коэффициентами. Характеризация же ряда как ряда Фурье указывает на вполне определенное *происхождение* его коэффициентов по формулам типа (9.2) (в тригонометрическом случае эти формулы заменяются на конкретные формулы (9.5) — (9.7)).

Если функция $f(x)$ непрерывна (или хотя бы кусочно непрерывна) на сегменте $[-\pi, \pi]$, то все интегралы вида (9.2) имеют смысл, и таким образом можно говорить о ряде Фурье этой функции и о его сходимости. По аналогии с векторами можно было бы ожидать, что сумма ряда Фурье функции $f(x)$ должна существовать и быть равной самой функции $f(x)$. Обычно так оно и есть, хотя, конечно, может оказаться, что ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ не сходится вовсе или же сходится, но не к функции $f(x)$, а к какой-нибудь совсем другой функции. С подобным явлением мы уже встречались при разложениях функций в степенные ряды.

В связи со сказанным перед нами встает задача: выяснить, в каких случаях и каким образом ряд Фурье некоторой функции позволяет описывать значения этой функции; в частности, в каких случаях ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции. Оказывается, что для довольно широкого класса функций это действительно так.

Не вдаваясь в детальное исследование вопроса (дальнейшие сведения об этом будут изложены в главе 16), мы приведем систему достаточных условий для того, чтобы функция $f(x)$ была разложима в тригонометрический ряд Фурье в сегменте $[-\pi, \pi]$. Переход от этого сегмента к произвольному другому сегменту не является принципиальным, и мы увидим, что это можно проделать уже легко.

§ 2. Условия Дирихле и теорема о разложении функции в ряд Фурье

Определение. Функция $f(x)$ называется *кусочно монотонной* на сегменте $[a, b]$, если этот отрезок разбивается на конечное число сегментов

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_n, b],$$

в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

Если функция $f(x)$ кусочно монотонна на сегменте $[a, b]$, то в любой внутренней точке этого сегмента существуют правые и левые пределы ее значений, т. е. пределы

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) &= f(c-0), \\ \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) &= f(c+0).\end{aligned}$$

Теорема. Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-\pi, \pi]$ и является на нем кусочно непрерывной, кусочно монотонной и ограниченной, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках сегмента $[-\pi, \pi]$.

Если $s(x)$ — сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, то во всех точках непрерывности этой функции

$$s(x) = f(x),$$

а во всех точках разрыва

$$s(x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)). \quad (9.8)$$

Кроме того,

$$s(\pi) = s(-\pi) = \frac{1}{2} (f(\pi-0) + f(-\pi+0)). \quad (9.9)$$

Условия этой теоремы часто называются *условиями Дирихле*, а сама теорема — *теоремой Дирихле*. Доказательство теоремы Дирихле выходит за пределы основного курса и помещено в главе 16.

Подчеркнем, что условия Дирихле включают как кусочную непрерывность, так и кусочную монотонность функции и ни от одного из этих свойств отказаться нельзя. В частности, известны примеры непрерывных функций, которые не описываются своим рядом Фурье.

Из теоремы Дирихле видно, что значения функции (x) в точках ее разрыва не влияют на ее ряд Фурье.

Это значит, что функции, имеющие одни и те же точки разрыва и отличающиеся друг от друга лишь в этих точках, разлагаются в один и тот же ряд Фурье.

Далее, говорить о непрерывности функции $f(x)$ на концах сегмента $[-\pi, \pi]$, т. е., в точках $-\pi$ и π , вообще не имеет смысла, даже если выполняются предельные соотношения $f(-\pi + 0) = f(-\pi)$ и $f(\pi - 0) = f(\pi)$. В самом деле, для непрерывности функции $f(x)$ в точке π необходимо двойное равенство

$$f(\pi - 0) = f(\pi) = f(\pi + 0).$$

Но выражение $f(\pi + 0)$ характеризует поведение функции $f(x)$ справа от точки π , т. е. там, где эта функция, быть может, и не определена. То же справедливо и для выражения $f(-\pi - 0)$. Поэтому в теореме Дирихле концы сегмента $[-\pi, \pi]$ играют особую роль, сходную с ролью точек разрыва.

§ 3. Разложение периодических функций в ряд Фурье

Далее мы будем говорить, что *функция f имеет период T* , если для любого x

$$f(x) = f(x + T),$$

не предполагая при этом, что T является наименьшим из всех чисел, обладающих этим свойством.

Все тригонометрические функции вида

$$\sin nx, \cos nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

определены для любого вещественного значения x и являются периодическими. Период каждой из них равен 2π . Следовательно, и любая их сумма вместе с постоянным членом

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

также определена для любого вещественного x и имеет период 2π . Очевидно, это свойство периодичности сохра-

няется и при переходе к пределу, так что сумма любого сходящегося тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

также имеет период 2π .

Таким образом, получается следующая картина. Первоначально мы имели некоторую функцию $f(x)$ (удовлетворяющую условиям Дирихле), заданную на сегменте $[-\pi, \pi]$. Составив ее тригонометрический ряд Фурье, мы получим в качестве его суммы $s(x)$ функцию, которая определена уже не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и для всех остальных вещественных значений x . При этом на сегменте $[-\pi, \pi]$ сумма $s(x)$ описывает функцию $f(x)$.

Значениями функции $f(x)$, лежащими вне сегмента $[-\pi, \pi]$, мы пока просто не интересовались; в частности, мы тем самым допускали, что эта функция вне сегмента $[-\pi, \pi]$ могла быть и не определена. Предположим, однако, что функция $f(x)$ определена для всех x , а мы лишь ограничились ее рассмотрением на сегменте $[-\pi, \pi]$ и составили применительно к этим значениям сумму ее тригонометрического ряда Фурье $s(x)$. Эта сумма, будучи периодической функцией, будет описывать функцию $f(x)$ вне сегмента $[-\pi, \pi]$ в том и только в том случае, когда сама функция является периодической с периодом 2π в точках своей непрерывности, т. е. когда для любой точки непрерывности x функции $f(x)$

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Наоборот, если функция $f(x)$ этим свойством не обладает, то вне сегмента $[-\pi, \pi]$ она может не иметь с функцией $s(x)$ ничего общего.

Итак, если функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π , то ее тригонометрический ряд Фурье описывает ее всюду. В противном случае он описывает ее лишь на сегменте $[-\pi, \pi]$. Разумеется, слово «описание» следует понимать в том смысле, как это сформулировано в теореме Дирихле.

§ 4. Физическое истолкование разложения функции в тригонометрический ряд Фурье

Будем в качестве независимого переменного рассматривать время. Тогда функциональная зависимость будет описывать некоторый происходящий во времени процесс.

Ограничимся для удобства рассуждений тем случаем, когда этот процесс сводится к механическим движениям некоторой системы, т. е. к ее пространственным перемещениям.

Встает вопрос о представлении движения на некотором отрезке времени в виде комбинации тех или иных заранее заданных движений. Этому представлению движения будет соответствовать разложение описывающей его функции в функциональный ряд по заданным функциям.

В частности, можно поставить вопрос о представлении достаточно произвольного движения на некотором отрезке времени $[-\pi, \pi]$ в виде одновременного осуществления некоторого стационарного смещения, а также гармонических колебаний с периодами $2\pi, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \dots$. Так как любое колебание такого вида представляется выражением

$$A_n \sin(nt + \varphi_n), \quad (9.10)$$

ему соответствует пара членов тригонометрического ряда

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad (9.11)$$

где

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad (9.12)$$

$$b_n = A_n \cos \varphi_n. \quad (9.13)$$

Таким образом, пара соседних членов (9.11) тригонометрического ряда соответствует некоторой гармонической составляющей (9.10) общего движения системы с периодом $\frac{2\pi}{n}$ и амплитудой A_n . Эта гармоническая составляющая обычно называется *n-й гармоникой* движения. Из формул (9.12) и (9.13) мы имеем для амплитуды *n-й* гармоники

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

§ 5. Разложение функции $f(x)=x$

Рассмотрим в качестве примера разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x)=x, \quad (9.14)$$

заданной пока что на сегменте $[-\pi, \pi]$. Так как эта функция внутри сегмента $[-\pi, \pi]$ непрерывна и монотонна, она удовлетворяет очевидным образом условиям Дирихле. Заметим, что говорить о непрерывности нашей функции на концах рассматриваемого сегмента, т. е. в точках $-\pi$ и π , мы пока не имеем права, так как для непрерывности функции в этих точках мы должны знать ее предельное поведение при подходе к сегменту извне. Но о значениях функции $f(x)$ вне сегмента $[-\pi, \pi]$ мы пока ничего не знаем.

Составим тригонометрический ряд Фурье для нашей конкретной функции $f(x)=x$. В соответствии с формулами (9.5)–(9.7) для этого нам нужно вычислить следующие интегралы:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(x \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right) = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-x \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)=x$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ будет ряд

$$\begin{aligned} 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx + \dots \right). \quad (9.15) \end{aligned}$$

Сумма этого ряда является функцией от x . Обозначим ее через $s(x)$.

Эта функция во всех точках непрерывности $f(x)$ должна с ней совпадать. Значит, внутри сегмента $[-\pi, \pi]$ должно быть (см. формулу (1.30) на стр. 27)

$$s(x) = f(x) = x.$$

Далее, при $x = \pm \pi$ все синусы обращаются в нуль:

$$\sin n\pi = 0.$$

Следовательно,

$$s(\pm \pi) = 0.$$

Наконец, как было отмечено, функция $s(x)$ должна быть периодической и иметь период 2π . Поэтому аналитически эту функцию можно задать как ¹⁾

$$s(x) = \begin{cases} x - \left[\frac{x}{2\pi} \right] 2\pi, & x \neq \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots, \\ 0, & x = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots, \end{cases}$$

а график ее указан на рис. 7.

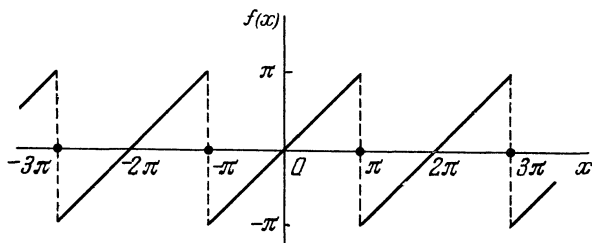


Рис. 7.

Если мы продолжим функцию $f(x) = x$ с сегмента $[-\pi, \pi]$ на всю вещественную прямую, согласно ее аналитическому виду (9.14), то мы вне сегмента $[-\pi, \pi]$ получим нечто совершенно отличное от функции $s(x)$.

Однако продолжение $f(x) = x$ с сегмента $[-\pi, \pi]$ периодической функцией с периодом 2π , если положить

$$f(\pm \pi) = f(\pm 3\pi) = f(\pm 5\pi) = \dots = 0,$$

будет совпадать с функцией $s(x)$.

¹⁾ Запись $[x/2\pi]$ («функция антье») означает наибольшее целое число отрезков длины 2π , укладывающихся в отрезке длины x .

§ 6. Сдвиг сегмента разложения

То, что мы в качестве основного сегмента задания разлагаемых в тригонометрические ряды Фурье функций брали $[-\pi, \pi]$, является удобным, но совершенно не принципиальным. Если в тех или иных теоретических или прикладных задачах приходится иметь дело с разложением функции в тригонометрический ряд Фурье не в сегменте $[-\pi, \pi]$, а в каком-нибудь другом сегменте $[a, b]$, то это никаких дополнительных трудностей не создает, а только несколько усложняет обозначения.

В сущности, этот вопрос сводится к тому, как из ортонормальной системы функции на $[-\pi, \pi]$ получить ортонормальную систему функций на $[a, b]$. Очевидно, переход от $[-\pi, \pi]$ к $[a, b]$ можно осуществить сдвигом первоначального сегмента вдоль оси x и изменением масштабов по этой оси. Следующая лемма и основанные на ней рассуждения показывают, что сдвиги не изменяют ни ортонормальности систем периодических функций, ни соответствующих коэффициентов Фурье периодических функций (разумеется, если их период равен длине интервала разложения).

Лемма. Если функция $\psi(x)$ периодическая с некоторым периодом T , то при любых α и λ

$$\int_a^{a+T} \psi(x) dx = \int_{a+\lambda}^{a+\lambda+T} \psi(x) dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, полагая

$$x - T = y,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^{a+\lambda+T} \psi(x) dx &= \int_a^{a+\lambda} \psi(y+T) dy = \int_a^{a+\lambda} \psi(y) dy = \\ &= \int_a^{a+\lambda} \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Далее, мы имеем

$$\begin{aligned}
 \int_a^{a+T} \psi(x) dx &= \\
 &= \int_a^{a+\lambda} \psi(x) dx + \int_{a+\lambda}^{a+\lambda+T} \psi(x) dx + \int_{a+\lambda+T}^{a+T} \psi(x) dx = \\
 &= \int_a^{a+\lambda} \psi(x) dx - \int_{a+T}^{a+\lambda+T} \psi(x) dx + \int_{a+\lambda}^{a+\lambda+T} \psi(x) dx,
 \end{aligned}$$

а учитывая (9.16), получаем требуемое.

Поскольку функции $\sin nx$ и $\cos nx$ при любом n , равно как и постоянная 1, являются периодическими функциями с периодом 2π , на основании леммы каждый из интегралов

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} dx, & \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx, & \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx
 \end{aligned}$$

не изменится от сдвига его интервала интегрирования, т. е. при любом a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} dx &= 1, & \int_a^{a+2\pi} \sin mx \cos nx dx &= 0, \\
 \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos^2 nx dx &= 1, & \int_a^{a+2\pi} \cos mx \cos nx dx &= 0 \quad (n \neq m), \\
 \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \sin^2 nx dx &= 1, & \int_a^{a+2\pi} \sin mx \sin nx dx &= 0 \quad (n \neq m).
 \end{aligned}$$

Это значит, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$$

является ортонормальной не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и на любом сегменте вида $[a, a+2\pi]$.

Далее, если функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π , то периодическими и с тем же периодом

будут все функции

$$\begin{aligned} f(x) \cos nx, \\ f(x) \sin nx, \end{aligned}$$

и поэтому для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ на сегменте $[a, a + 2\pi]$ мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n, \\ \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = b_n. \end{aligned}$$

Отсюда можно сделать два вывода.

Во-первых, при вычислении коэффициентов Фурье 2π -периодической функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ мы можем во имя удобства интегрировать нужные произведения не по этому сегменту, а по любому другому виду $[a, a + 2\pi]$, распорядившись значением a так, чтобы вычисления стали более простыми или более удобными или чтобы, скажем, нам пришлось иметь дело с интегралами, значения которых нам в силу тех или иных обстоятельств уже известны.

Во-вторых, при разложении 2π -периодической функции $f(x)$ в ряд Фурье на сегменте $[a, a + 2\pi]$ мы можем воспользоваться всеми теоретическими утверждениями и практическими рекомендациями, которые справедливы для случая сегмента $[-\pi, \pi]$.

Пример. Разложить в ряд Фурье на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию, определенную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

(график этой функции изображен на рис. 8). Вычисление интегралов, выражающих коэффициенты Фурье для этой функции, неудобно, так как в каждом из них интервал интегрирования приходится разбивать на две части: от $-\pi$ до 0 и от 0 до π . Вместе с тем мы можем про-

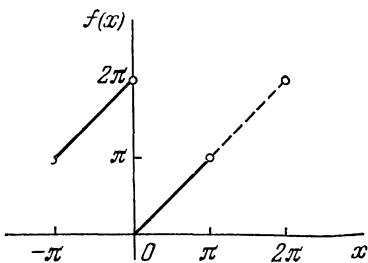


Рис. 8.

должить функцию $f(x)$ по 2π -периодичности на промежуток $(\pi, 2\pi]$ (на графике рис. 7 это видно достаточно наглядно). Таким образом, на отрезке $(0, 2\pi]$ наша функция $f(x)$ приобретает уже достаточно простой вид:

$$f(x) = x$$

(правда, для точки $x=0$ эта формула неверна, но 0 есть точка разрыва функции $f(x)$, так что значение функции в ней на ее разложение в ряд Фурье никак не влияет).

Поэтому коэффициентами Фурье функции f будут

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(x \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-x \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\pi}{n} \right) = -\frac{2}{n}, \end{aligned}$$

а ее разложением в ряд Фурье

$$\pi - 2 \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx + \dots \right).$$

§ 7. Изменение длины сегмента разложения

Если нужно разлагать в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$ на сегменте $[a, a+2l]$, длина которого $2l$, вообще говоря, отличается от 2π , то можно произвести подстановку

$$x = \frac{l}{\pi} t,$$

и функция $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ будет как функция от t задаваться на сегменте $\left[\frac{a\pi}{l}, \frac{a\pi}{l} + 2\pi\right]$ уже привычной нам длины 2π .

Выполним разложение функции $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ (подчеркнем еще раз, что мы сейчас рассматриваем ее как функцию

от tl) в ряд Фурье на сегменте $\left[\frac{a\pi}{l}, \frac{a\pi}{l} + 2\pi\right]$:

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (9.17)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l} + 2\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.18)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l} + 2\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Напомним, что мы здесь также имеем право, продолжив $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ по 2π -периодичности, вместо интегралов (9.17) вычислять интегралы

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.19)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Нам остается вернуться к переменной x , т. е. подставить как в интегралы (9.19), так и в выражение для ряда Фурье (9.17) всюду вместо переменной t ее выражение через переменную x , т. е. $\pi x/l$. Мы получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx.$$

§ 8. Четные и нечетные функции

Как было установлено, задачу разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье на произвольном сегменте $[a, b]$ можно свести к задаче разложения несколько видоизмененной функции на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому мы далее будем ограничиваться только этим свойством.

Итак, пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условиям Дирихле. Займемся исследованием двух частных случаев.

Напомним, что функция $f(x)$ называется *четной*, если

$$f(x) = f(-x)$$

во всей области ее задания; и *нечетной*, если

$$f(x) = -f(-x)$$

(также для всех тех x , для которых значение функции определено).

Как легко проверить, произведение четной функции на четную, равно как и нечетной на нечетную, четно, а произведение четной и нечетной функции нечетно.

Очевидно, если функция $f(x)$ нечетная, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

а если функция $f(x)$ четная, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

Четность функций изменяется при их дифференцировании и интегрировании.

Теорема 1. *Производная четной функции является нечетной функцией, а производная нечетной функции — четной.*

Доказательство. Пусть функция f — четная. Тогда при любых x и Δx должно быть

$$f(x) = f(-x), \quad f(x + \Delta x) = f(-x - \Delta x),$$

откуда $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(-x) - f(-x - \Delta x)}{\Delta x}$, или, пере-

ходя к пределу,

$$f'(x) = -f'(-x).$$

Случай нечетной функции f рассматривается аналогично.

Следствие. Вторая производная четной функции четна, а нечетной — нечетна.

Теорема 2. Если функция f нечетна, то ее первообразная F четна.

Если функция f четна, а для ее первообразной F имеет место $F(0) = 0$, то функция F нечетна.

Доказательство. Пусть функция f нечетна. Тогда

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(x) dx + C = - \int_0^x f(-x) dx + C = \\ &= - \int_0^x -f(x) dx + C = \int_0^x f(x) dx + C = F(x). \end{aligned}$$

Если функция f четна, то при $F(0) = 0$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(x) dx = - \int_0^x f(-x) dx = - \int_0^x f(x) dx = -F(x).$$

§ 9. Разложение четной функции в ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условиям Дирихле и является четной. Тогда произведение

$$f(x) \sin nx$$

при любом $n = 1, 2, \dots$ должно быть нечетной функцией, и потому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

Таким образом, при разложении четной функции в ряд Фурье все коэффициенты этого ряда при синусах обращаются в нуль, и разложение принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (9.20)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Описываемое формулой (9.20) представление функции $f(x)$ называется ее разложением в ряд «по косинусам».

Пример. Найдем разложение в ряд Фурье по косинусам четной функции $f(x) = x^2$ на сегменте $[-\pi, \pi]$.

В этом случае мы имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Для вычисления a_n при $n > 0$ применим дважды интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} n \sin nx dx \right) = \\ &= \frac{4}{n\pi} \left(\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right). \quad (9.21)$$

Заметим, что на основании признака Вейерштрасса (см. § 7 главы 5) этот ряд Фурье сходится (и притом к своей функции) равномерно на всем сегменте $[0, \pi]$.

Поскольку в нашем случае $f(\pi) = f(-\pi)$, формула (9.21) имеет силу для всех точек из сегмента $[-\pi, \pi]$ и может быть по 2π -периодичности распространена на любые значения (рис. 9).

Из формулы (9.21) вытекает, между прочим, одно любопытное следствие. Положив в ней $x=0$, мы получим

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots \right).$$

Если обозначить через s сумму ряда «обратных квадратов» (см. § 2 главы 3), то сумма чисел, обратных четным квадратам, будет равна $\frac{1}{4}s$, так что сумма ряда, стоящего в скобках, равна $-s + 2 \cdot \frac{1}{4}s = -\frac{1}{2}s$. Таким образом,

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \frac{s}{2},$$

откуда $s = \frac{\pi^2}{6}$, и мы нашли сумму ряда «обратных квадратов»,

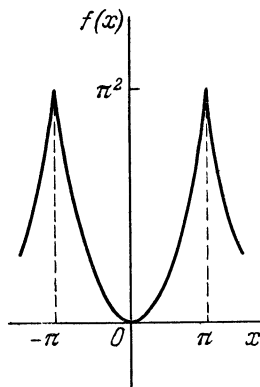


Рис. 9.

§ 10. Разложение нечетной функции в ряд Фурье

Аналогично предыдущему, если функция $f(x)$ является нечетной, то нечетной же функцией будет при каждом n и произведение

$$f(x) \cos nx,$$

так что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0,$$

и в нуль обращаются все коэффициенты Фурье при косинусах, а также свободный член. В результате мы получаем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (9.22)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Формула (9.22) иногда называется разложением функции $f(x)$ в ряд «по синусам».

§ 11. Разложение в ряд Фурье функций на сегменте $[0, \pi]$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ задана нам только на сегменте $[0, \pi]$. Чтобы разложить ее в ряд Фурье на этом отрезке, мы можем поступить следующим образом. Доопределим нашу функцию на сегменте $[-\pi, 0]$. Мы будем тогда иметь функцию, заданную на всем сегменте $[-\pi, \pi]$, и получим возможность разлагать доопределенную функцию в ряд Фурье на всем сегменте $[-\pi, \pi]$.

Так как реально заданной является только часть функции на сегменте $[0, \pi]$ (добавочная часть на промежутке $[-\pi, 0]$ «пристраивается» сравнительно произвольно на основании главным образом соображений удобства), мы полученный ряд Фурье должны рассматривать только для тех значений переменной x , которые расположены в сегменте $[0, \pi]$.

Очевидно, получившийся ряд будет зависеть от того, как именно мы произведем доопределение нашей первоначально заданной функции на промежутке $[-\pi, 0)$. При этом нам могут представиться различные варианты. Рассмотрим два из них.

Во-первых, мы можем продолжить функцию $f(x)$ на промежуток $[-\pi, 0)$ по четности, т. е. положить

$$f(-x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

(рис. 10). Тогда мы будем иметь дело с четной функцией, которая, в соответствии со сказанным в § 9, разлагается в ряд по косинусам согласно формуле (9.20).

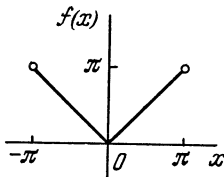


Рис. 10.

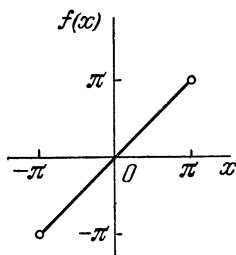


Рис. 11.

Во-вторых, мы можем продолжить функцию $f(x)$ на промежуток $[-\pi, 0)$ по нечетности, т. е. положить

$$f(-x) = -f(x)$$

(рис. 11). В этом случае мы будем иметь дело с нечетной функцией, которая разлагается в ряд по синусам согласно формуле (9.22).

Не следует думать, что нам удалось получить для одной и той же функции два *различных* разложения в ряд Фурье. В действительности мы разлагали весьма отличающиеся друг от друга функции (они могут отличаться друг от друга на всем промежутке $[-\pi, 0)$) и только отбросили часть полученного ответа, отказываясь использовать разложение в ряд Фурье для отрицательных значений x .

Поясним сказанное на примере.

Пример. Разложим на сегменте $[0, \pi]$ функцию $f(x) = x$ в ряды Фурье по синусам и по косинусам (что будет отвечать соответственно

продолжению этой функции на сегмент $[-\pi, \pi]$ по нечетности и по четности).

Разложение этой функции по синусам было нами получено в § 5:

$$2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx + \dots \right).$$

Для того чтобы найти разложение в ряд по косинусам, вычислим интегралы

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n^2} (-\cos nx) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Таким образом другое интересующее нас разложение будет иметь вид

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} \cos (2n+1)x + \dots \right). \quad (9.23)$$

Как и в случае примера из § 9, сходимость этого ряда — равномерная на всем сегменте $[-\pi, \pi]$.

§ 12. Комплексная форма записи ряда Фурье

Формулы Эйлера позволяют выражать тригонометрические функции через показательные функции с комплексным показателем. Следовательно, в такой комплексной форме могут быть представлены тригонометрические ряды и, в частности, ряды Фурье тех или иных функций.

Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (9.24)$$

— некоторый тригонометрический ряд.

Мы имеем формулы Эйлера (см. § 5 главы 7)

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = i \frac{-e^{inx} + e^{-inx}}{2}.$$

Тогда
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n i \frac{-e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right),$$

т. е., объединяя степени с одинаковыми показателями,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - b_n i}{2} e^{inx} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-inx} \right). \quad (9.25)$$

Введем единообразные обозначения:

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - b_n i}{2} = c_n, \quad \frac{a_n + b_n i}{2} = c_{-n}. \quad (9.26)$$

Тогда (9.25) превращается в

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx},$$

или

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Таким образом, мы получили разложение функции $f(x)$ в функциональный ряд с комплексными членами. Он называется *рядом Фурье в комплексной форме*. Коэффициенты этого ряда можно вычислять не только по формулам (9.26) из коэффициентов ряда Фурье (9.24), но и непосредственно, минуя нахождение a_n и b_n .

В самом деле, вспоминая определения коэффициентов a_n и b_n , мы имеем

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(-nx) + i \sin(-nx)) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx + i \sin nx) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-n)x} dx. \end{aligned}$$

Следовательно, при любом целом $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (9.27)$$

Если функция $f(x)$ вещественная (а до сих пор мы только такие функции и рассматривали), то из формул (9.25) следует, что коэффициенты c_n разложения в комплексный ряд Фурье являются комплексными сопряженными числами. Для модулей этих чисел мы имеем

$$|c_{\pm n}| = \frac{1}{2} |a_n \mp b_n i| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Вспоминая интерпретацию разложения функции в тригонометрический ряд Фурье как представление движения в виде суммы (суперпозиции) гармонических колебаний (см. § 4), мы видим, что модули коэффициентов комплексного ряда Фурье являются амплитудами соответствующих гармоник.

§ 13. Разложение в комплексный ряд Фурье

Непосредственное разложение функций в комплексный ряд Фурье на основании формулы (9.27) часто оказывается удобнее, чем вычисление коэффициентов этого ряда через коэффициенты вещественного ряда Фурье по формулам (9.26).

Более того, может оказаться целесообразным вычисление коэффициентов вещественного ряда Фурье провести через предварительное вычисление коэффициентов соответствующего комплексного ряда.

Пример. Разложение функции $f(x) = e^{\alpha x}$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ начнем с ее разложения в комплексный ряд Фурье.

При любом n мы здесь имеем

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha - in)x} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha - in} e^{(\alpha - in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha - in} (e^{(\alpha - in)\pi} - e^{-(\alpha - in)\pi}). \end{aligned}$$

Заметим, что для любого целого n

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n.$$

Поэтому

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(\alpha - in)} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) = \frac{(-1)^n}{\pi} \operatorname{sh} \alpha\pi \frac{1}{\alpha - in}.$$

Таким образом, искомым разложением будет

$$e^{\alpha x} = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{\alpha - in}.$$

Перейдем теперь к разложению функции $e^{\alpha x}$ в вещественный ряд Фурье. В нашем случае очевидное преобразование выражения для c_n дает

$$c_n = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} (\alpha + in),$$

откуда, согласно формулам (9.25),

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi\alpha}, \quad a_n = \frac{2\alpha(-1)^n}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \operatorname{sh} \alpha\pi, \quad b_n = \frac{2n(-1)^n}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \operatorname{sh} \alpha\pi.$$

§ 14. Характер сходимости рядов Фурье.

Вытекающая из теоремы Фурье сходимость рядов Фурье к соответствующим функциям зависит от аналитических свойств разлагаемых функций. Оказывается, что чем «глаже» функция, тем лучше сходится ее ряд Фурье. На этот счет имеются более точные и более сложно доказываемые утверждения, о которых пойдет речь в главе 16. Здесь мы ограничимся сравнительно грубым, но зато просто получаемым фактом.

Теорема 1. Если заданная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция f разлагается в ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

удовлетворяет условиям

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad (9.28)$$

$$f'(-\pi) = f'(\pi) \quad (9.29)$$

и имеет абсолютно интегрируемую на $[-\pi, \pi]$ (например ограниченную) вторую производную:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx \leq C,$$

то ряд Фурье функции f сходится на $[-\pi, \pi]$ равномерно и абсолютно.

Доказательство. Применяя к выражениям каждого коэффициента Фурье (9.6) — (9.7) интегрирование по частям, мы получаем

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f(x) dx = \\ &= \frac{1}{n} \sin nx f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx f'(x) dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа обращается здесь в нуль, а интегрирование по частям оставшегося интеграла дает нам

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx f'(x) dx = \\ &= \frac{1}{n^2} \cos nx f'(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f''(x) dx. \end{aligned}$$

Поэтому на основании (9.29) должно быть

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \left| \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f''(x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx| |f''(x)| dx \leq \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx = \frac{1}{n^2} C. \end{aligned}$$

Аналогично из (9.7) с использованием (9.28) получается, что

$$|b_n| \leq \frac{1}{n^2} C.$$

Из этих двух неравенств вытекает

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{2C}{n^2} \quad (9.30)$$

при всех x из $[-\pi, \pi]$. Значит, по признаку Вейерштрасса ряд Фурье сходится равномерно, а из самого неравенства (9.30) видно, что эта сходимость и абсолютная.

Для того чтобы воспользоваться этим результатом, а также для дальнейших целей (см. главу 17), докажем следующую несколько формальную теорему.

Теорема 2. Если имеет место тождественное равенство двух равномерно сходящихся тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\ = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx), \end{aligned} \quad (9.31)$$

то эти ряды равны и формально:

$$a_k = a'_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.32)$$

$$b_k = b'_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.33)$$

Доказательство. Умножим равенство (9.31) почленно на $\cos kx$. При этом в полученном равенстве слева и справа будут снова равномерно сходящиеся ряды. Согласно § 10 главы 5 эти ряды можно почленно интегрировать от $-\pi$ до π , и такое интегрирование дает

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right) = \\ = \frac{a'_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a'_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b'_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Ввиду ортогональности системы тригонометрических функций (см. § 4 главы 8) все интегралы слева и справа, содержащие синусы, обращаются в нуль, а из интегралов, не содержащих синусов, отличным от нуля при $k \neq 0$ будет только

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi,$$

а при $k=0$ — только

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Таким образом, равенство (9.34) переписывается в виде $a_k\pi = a'_k\pi$.

Так как число k было выбрано нами произвольно, мы получаем (9.32).

Равенства (9.33) получаются аналогично почленным умножением (9.31) на $\sin kx$ и интегрированием по x от $-\pi$ до π .

Из последних двух теорем непосредственно вытекает следствие о единственности разложения функции в ряд Фурье.

Следствие. Всякая функция f , заданная на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющая условиям (9.28) и (9.29) и имеющая абсолютно интегрируемую на $[-\pi, \pi]$ (в частности, ограниченную) вторую производную, может быть разложена на сегменте $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье только одним способом.

Ясно, что очевидная модификация этого утверждения справедлива и по отношению к разложению функции в ряд Фурье на любом другом сегменте.

Если мы получим два различных по виду разложения обладающей перечисленными свойствами функции в ряд Фурье, то у этих рядов можно приравнять соответствующие коэффициенты.

В действительности единственность ряда Фурье (и отвечающая ей возможность приравнивания коэффициентов) имеет место и для более широкого класса функций, но ее доказательство в общем случае оказывается существенно сложнее.

Заметим в заключение, что формальное почленное дифференцирование ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (9.35)$$

дает нам ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx), \quad (9.36)$$

а формальное почленное интегрирование — ряд

$$\frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right). \quad (9.37)$$

Коэффициенты ряда производных (9.36), если с ростом n и убывают, то медленнее, чем коэффициенты исходного ряда (9.35). Поэтому если ряд (9.36) сходится, то медленнее, чем ряд (9.35). Наоборот, коэффициенты ряда (9.37) убывают быстрее, чем коэффициенты исходного ряда, так что ряд, полученный почленным интегрированием, если сходится, то быстрее, чем исходный ряд.

УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

§ 1. Уравнение свободных малых колебаний струны

Пусть мы имеем дело с гибкой упругой струной. Струна будет считаться тонкой, т. е. ее поперечные размеры принимаются пренебрежимо малыми по сравнению с ее длиной. Гибкость струны означает, что напряжение в ней может быть направлено только вдоль струны. Упругость струны означает, что процесс ее деформаций обратим, т. е. что при нем не происходит потери энергии.

Пусть длина струны равна l , а в состоянии равновесия струна прямолинейна и расположена вдоль оси OX между точками $x=0$ и $x=l$. Если вывести струну из состояния равновесия, подвергнув ее действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться. Будем считать, что движение всей струны происходит в одной плоскости и что каждая ее точка движется перпендикулярно оси OX . Смещение точки струны с координатой x в момент времени t будем обозначать через $u(x, t)$ или просто через u . Предположим далее, что все деформации струны малы. Под этим мы будем понимать, что малы как смещения u каждого из элементов струны, так и их повороты u'_x .

Рассмотрим элемент струны (см. рис. 12), который в положении равновесия имеет концами точки x и $x+\Delta x$. Пусть в результате отклонения струны в некоторый момент времени этот элемент переходит в положение MM' .

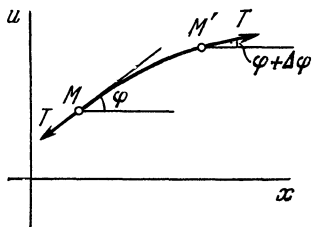


Рис. 12.

Очевидно, длина элемента MM' равна

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x'^2} dx,$$

что в предположении малости угла поворота элемента (и тем самым тангенса этого угла) приближенно равно Δx .

Рассмотрим воздействие на элемент MM' равнодействующей вертикальных составляющих сил натяжения T , действующих на его концы. Эти силы действуют в направлении касательных к струне. Обозначим углы, образуемые этими касательными с осью OX , через φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда вертикальная составляющая равнодействующей этих двух сил натяжения будет равна

$$T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi.$$

Ввиду малости углов φ и $\varphi + \Delta\varphi$ мы можем синусы заменить тангенсами:

$$T (\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - \operatorname{tg} \varphi).$$

Но тангенсы углов наклона касательных равны производным:

$$T \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M'} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \right). \quad (10.1)$$

Сила инерции, действующая на элемент MM' , очевидно равна

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x, \quad (10.2)$$

где ρ — масса единицы длины струны. На основании (10.1) и (10.2) мы согласно закону Ньютона можем написать

$$T \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M'} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x,$$

или, деля обе части этого равенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow \infty$,

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Обозначив, наконец, отношение T/ρ через a^2 , мы получим уравнение

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (10.3)$$

которое и называется *уравнением свободных колебаний струны*.

§ 2. Начальные и граничные условия

Уравнению (10.3) удовлетворяет всякое свободное колебание струны, независимо от его физического происхождения, а также от способов закрепления концов струны в точках $x=0$ и $x=l$.

Вместе с тем совершенно ясно, что если мы выведем струну из положения равновесия и представим самой себе, то характер ее колебаний будет один, а если, выведя из состояния равновесия, придадим ее точкам те или иные скорости, — то другой. Кроме того, неподвижное и подвижное закрепления концов струны приводят, как можно достаточно наглядно себе представить, к весьма различным ее движениям.

Из сказанного следует, что для определения движения струны, кроме уравнения (10.3), необходимо еще задать *начальные* условия, описывающие поведение струны в начальный момент времени $t=0$, т. е. ту форму, которую струна приобретает при выводе ее из положения равновесия,

$$u(x, 0) = f(x), \quad (10.4)$$

и те скорости, которые сообщаются точкам струны при «отпускании» ее:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x). \quad (10.5)$$

Кроме того, необходимо задать *граничные* условия задачи, т. е. описать характер поведения концов струны в процессе ее колебаний. Мы ограничимся простейшим случаем граничных условий, когда концы струны закреплены неподвижно:

$$u(0, t) = 0, \quad (10.6)$$

$$u(l, t) = 0. \quad (10.7)$$

Разумеется, в частности, может оказаться, что в начальный момент времени струна не имеет отклонения от равновесного состояния ($f(x) \equiv 0$) или же неподвижна ($\varphi(x) \equiv 0$).

Граничные условия задачи вместе с начальными ее условиями иногда называются *краевыми* условиями.

§ 3. Метод разделения переменных

Рассмотрим метод решения уравнения колебаний струны методом разделения переменных, который также называется методом Фурье (хотя для случая колебаний струны был предложен еще Даниилом Бернулли). Существенным для этого метода является использование рядов Фурье.

Пусть мы имеем дело с уравнением колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (10.8)$$

причем концы струны закреплены неподвижно,

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (10.9)$$

а начальными условиями являются

$$u(x, 0) = f(x), \quad (10.10)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x). \quad (10.11)$$

Само по себе уравнение (10.8), взятое отдельно от условий (10.9)—(10.11), может иметь очень много весьма разнообразных решений. Среди них имеется и тождественно равное нулю:

$$u(x, t) \equiv 0.$$

Нас же интересует решение, которое удовлетворяет не только уравнению (10.8), но также граничным и начальным условиям (10.9)—(10.11). Очевидно, тождественно равное нулю решение может быть для уравнения (10.8) лишь в том случае, когда в начальный момент времени струна находится в состоянии равновесия: $f(x) \equiv 0$ и при этом неподвижна: $\varphi(x) \equiv 0$. Во всех остальных случаях решение уравнения (10.8) тождественно равняться нулю не может.

Будем искать решение уравнения (10.8), отличное от тождественного нуля и удовлетворяющее граничным условиям (10.9), в виде произведения функции X , зависящей только от x , и функции T , зависящей только от t . Иными словами, пусть

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Подстановка в уравнение (10.8) дает нам

$$X(x) T''(t) = a^2 X''(x) T(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Функция, стоящая в левой части этого равенства, не зависит от x , а функция, стоящая в правой части, — от t . Следовательно, в действительности обе эти функции не зависят ни от x , ни от t , т. е. являются некоторой постоянной. Предположим, что эта постоянная отрицательна (смысл этого предположения выяснится далее), и обозначим ее через $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Таким образом, мы имеем

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (10.12)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (10.13)$$

откуда, решая эти дифференциальные уравнения, получаем

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \quad (10.14)$$

$$T(t) = C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t, \quad (10.15)$$

где A , B , C , D — некоторые постоянные, для определения которых мы воспользуемся граничными и начальными условиями.

§ 4. Использование граничных условий.

Собственные функции и собственные значения

Мы имеем

$$u(x, t) =$$

$$= (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x) (C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t).$$

Второй сомножитель справа не может тождественно обращаться в нуль (в противном случае мы имели бы $u \equiv 0$, что противоречит предположенному). Следовательно, для обеспечения граничных условий (10.9) должно быть

$$X(0) \equiv 0, \quad X(l) \equiv 0.$$

Поэтому, полагая в (10.14) $x=0$ и $x=l$, мы получаем

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0,$$

$$0 = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l,$$

откуда

$$A = 0, \quad B \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \quad (10.16)$$

Здесь $B \neq 0$, так как иначе было бы $X(x) \equiv 0$ и потому $u \equiv 0$. Поэтому из (10.16) следует, что

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

т. е. при некотором целом n

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi,$$

и потому

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$$

(здесь $n \neq 0$, так как при $n=0$ должно быть $X \equiv 0$ и опять-таки $u \equiv 0$). Эти значения λ называются *собственными значениями* рассматриваемой задачи, а соответствующие им функции

$$X = B \sin \sqrt{\lambda} x = B \sin \frac{n\pi}{l} x$$

— *собственными функциями*.

Теперь выясняется смысл предположения $\lambda > 0$. Если бы было $\lambda < 0$, то уравнение (10.12) можно было бы записать в виде

$$X'' - (-\lambda) X = 0,$$

откуда

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda} x} + Be^{-\sqrt{-\lambda} x},$$

и полученное решение уравнения ни при каких значениях A и B (за исключением случая $A=B=0$) не может одновременно удовлетворять обоим граничным условиям (10.9). Действительно, из

$$X(0) = A + B = 0,$$

$$X(l) = Ae^{\sqrt{-\lambda} l} + Be^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0$$

следовало бы, что $A=B=0$.

§ 5. Использование начальных условий

Подставим найденные значения λ в уравнение (10.15):

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t.$$

При любых значениях постоянных C и D произведения

$$\sin \frac{n\pi}{l} x C \cos \frac{an\pi}{l} t \quad \text{и} \quad \sin \frac{n\pi}{l} x D \sin \frac{an\pi}{l} t \quad (10.17)$$

будут решениями уравнения (10.8), удовлетворяющими граничным условиям (10.9). В силу линейности уравнения (10.8) любая сумма функций вида (10.17) также будет решением (10.8) и также будет удовлетворять граничным условиям (10.9).

Возьмем поэтому набор функций вида

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right)$$

и постараемся так распорядиться значениями произвольных до сих пор постоянных C_n и D_n , чтобы сумма этих функций удовлетворяла еще и начальным условиям (10.10) и (10.11). Это значит, что мы будем искать решение уравнения (10.8), удовлетворяющее граничным и начальным условиям (10.9)—(10.11), в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Так как мы здесь имеем дело не с суммой, а с рядом, для того чтобы этот ряд был решением уравнения (10.8), необходимо, чтобы сходился как он сам, так и ряды, получаемые из него в результате двукратного его почленного дифференцирования по x и по t .

Полагая в (10.18) $t=0$, мы имеем

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Если на сегменте $[0, l]$ функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по синусам, то (как это было выяснено в § 11

главы 9) в качестве коэффициентов C_n можно взять соответствующие коэффициенты Фурье:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Такой выбор постоянных C_n обеспечивает соблюдение начального условия (10.10).

Переходим к начальному условию (10.11). Дифференцируя равенство (10.18) по t , мы получаем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(-C_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{an\pi}{l} t + D_n \frac{an\pi}{l} \cos \frac{an\pi}{l} t \right),$$

или, подставляя $t = 0$,

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x D_n \frac{an\pi}{l}.$$

Если функция $\varphi(x)$ разлагается на сегменте $[0, l]$ в ряд Фурье по синусам, то в качестве величин $D_n \frac{an\pi}{l}$ можно взять коэффициенты этого разложения:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

откуда

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Применение рассмотренного метода Фурье оказывается оправданным, если получающийся для функции u ряд можно дважды почленно дифференцировать по каждой из переменных x и t . Поэтому, вообще говоря, после получения ряда такого рода проверку следует производить. Однако в конкретном случае уравнения колебаний струны оказывается, что ряд (10.18) дает нужное решение даже в тех случаях, когда он и не поддается указанному дифференцированию. В этом проявляется довольно частое в математике обстоятельство, состоящее в том, что формальные выкладки могут оказаться верными, даже если

они и не вполне корректны. Разумеется, это замечание не может оправдывать беззаботного дифференцирования рядов без последующей проверки законности этих действий.

Пример. Решим уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с неподвижными концами

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x) = \sin^3 x, \quad (10.19)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) = 0. \quad (10.20)$$

Согласно сказанному в начале этого параграфа (формула (10.18))

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right),$$

где C_n — коэффициенты в разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам, а D_n — коэффициенты в разложении в ряд Фурье по синусам функции $\varphi(x)$.

Нетрудно убедиться в том, что разложением в ряд по синусам в данном случае будет

$$f(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x,$$

так что $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_3 = -\frac{1}{4}$, а остальные коэффициенты C_n обращаются в нуль. Из (10.20) видно, что коэффициенты D_n разложения должны быть равны нулю.

Таким образом, в данном случае

$$u(x, t) = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{a\pi}{l} t - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3a\pi}{l} t.$$

Полученный ряд является конечной суммой, и потому все вопросы, связанные с его сходимостью и почленным дифференцированием, решаются тривиальным образом.

§ 1. Представление функций интегралом Фурье

Представление функции $f(x)$ в сегменте $[-l, l]$ рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \quad (11.1)$$

можно истолковать следующим образом. Если функция $f(x)$ в сегменте $[-l, l]$ является «достаточно хорошей» (именно, если она в этом промежутке удовлетворяет условиям Дирихле), то для того, чтобы ее в этом сегменте полностью описать, достаточно указать некоторый, вполне определенный набор ее характеристик, коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (11.2)$$

(Мы сейчас намеренно допускаем некоторую грубость в изложении и не касаемся того факта, что описание функции ее рядом Фурье в точках разрыва может и не оказаться исчерпывающим.)

Таким образом, коэффициенты Фурье несут в себе достаточно информации о поведении функции в соответствующем конечном сегменте, сколь бы велик он ни был.

Частоты гармоник ряда Фурье (11.1) функции $f(x)$ на сегменте длины $2l$ составляют последовательность

$$0, \pi/l, 2\pi/l, 3\pi/l, \dots,$$

которая является арифметической прогрессией с разностью π/l .

Заметим, что при увеличении числа l , т. е. при увеличении длины сегмента разложения функции, разности между частотами соседних гармоник уменьшаются, т. е. гармоники начинают идти все более густо.

Положение дел резко изменяется, если сегмент разложения функции, неограниченно расширяясь в обе стороны, охватывает всю вещественную прямую и превращается в бесконечный промежуток $(-\infty, +\infty)$. В этом случае естественно ожидать, что разность между частотами соседних гармоник будет убывать до нуля, т. е. что последовательность гармоник из дискретной, состоящей из отдельных изолированных чисел, превратится в непрерывное множество всех вещественных неотрицательных чисел. Естественно предположить при этом, что вместо ряда Фурье нам придется рассматривать некоторый интеграл. Этот интеграл, к рассмотрению которого мы сейчас перейдем, называется *интегралом Фурье*.

Очевидно, для представимости функции интегралом Фурье в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$ эта функция должна удовлетворять некоторым условиям, подобным условиям Дирихле, а кроме того, и еще некоторым дополнительным условиям, необходимым для избежания возможных неприятностей, возникающих в связи с тем, что при неограниченном возрастании l все интегралы вида (11.2) оказываются уже несобственными и об их сходимости требуется позаботиться специально.

§ 2. Простейшие достаточные условия представимости функции интегралом Фурье

Пусть функция $f(x)$, определенная на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяет следующим условиям.

1) Функция f является ограниченной и абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \infty)$, т. е. существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = Q.$$

2) В любом конечном сегменте функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье (практически обычно требуют, чтобы функция в любом конечном сегменте удовлетворяла условиям Дирихле).

При соблюдении этих условий мы можем рассуждать следующим образом.

Фиксируем некоторое произвольное l и напомним разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье в сегменте $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), \quad (11.3)$$

где коэффициенты определяются по формулам (11.2). Ясно, что при этом коэффициенты a_n и b_n зависят не только от функции $f(x)$, но и от параметра l (значение l фигурирует в пределах интегралов в формулах (11.2)).

Подставим теперь в ряд (11.3) выражения для коэффициентов, даваемые формулами (11.2). Мы получим

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt \right) \cos \frac{n\pi}{l} x + \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left(\cos \frac{n\pi}{l} t \cos \frac{n\pi}{l} x + \sin \frac{n\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x \right) dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} (x - t) dt.$$

Вводя зависящую от n переменную $\alpha_n = \alpha$:

$$\frac{n\pi}{l} = \alpha_n = \alpha, \quad (11.4)$$

и полагая

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l} = \Delta\alpha,$$

имеем

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n (x-t) dt \right) \Delta\alpha. \quad (11.5)$$

По мере возрастания l в силу абсолютной интегрируемости функции f интеграл

$$\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha (x-t) dt$$

все меньше отличается от несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (x-t) dt.$$

Кроме того, сумма, стоящая в правой части формулы (11.5), напоминает интегральную сумму. В нем с ростом l число слагаемых увеличивается, а каждое слагаемое уменьшает свой «удельный вес». Поэтому естественно предполагать, что при возрастании l эта сумма в (11.5) стремится к интегралу по α :

$$\int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (x-t) dt \right) d\alpha.$$

Далее, первое слагаемое в (11.5) справа по мере роста l стремится к нулю. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{1}{2l} Q \rightarrow 0.$$

Таким образом, в пределе, при $l \rightarrow \infty$, формула (11.5) превращается в следующую:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (x-t) dt \right) d\alpha. \quad (11.6)$$

Эта формула называется *интегральной формулой Фурье*, а стоящий в ней интеграл — *интегралом Фурье*. Представление функции f в виде правой части формулы (11.6)

обычно называется *разложением* этой функции в интеграл Фурье.

Ясно, что все только что сказанное здесь касалось только тех точек x , в которых функция f непрерывна. Для точек разрыва f справедлива, как и в случае рядов Фурье, интегральная формула, описывающая полусумму пределов функции справа и слева:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt \right) d\alpha. \quad (11.7)$$

Итак, мы приходим к формулировке следующей теоремы.

Теорема Фурье. Если функция $f(x)$ на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$ является ограниченной и абсолютно интегрируемой, а в каждом конечном промежутке удовлетворяет условиям Дирихле, то для любого x имеет место равенство (11.6), если x есть точка непрерывности функции $f(x)$, и равенство (11.7), если x есть точка разрыва этой функции.

Заметим, что в формуле (11.6) внутренний интеграл представляет собой некоторую функцию от α . Так как эта функция зависит не от самой переменной α , а от ее косинуса, она должна быть четной. Поэтому мы можем формулу (11.6) переписать в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt \right) d\alpha. \quad (11.8)$$

Мы привели «правдоподобные» соображения в пользу справедливости теоремы Фурье, которые, разумеется, нельзя считать ее доказательством. Доказательство теоремы Фурье довольно сложно и выходит за пределы основного курса. Оно содержится в § 5 главы 16.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(график функции $f(x)$ изображен на рис. 13).

Очевидно, что при любом $x \geq 0$

$$e^{-x} \leq 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Следовательно, функция $f(x)$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$ является ограниченной и абсолютно интегрируемой.

Кроме того, функция e^{-x} монотонно убывает, и поэтому функция $f(x)$ тривиальным образом удовлетворяет условиям Дирихле.

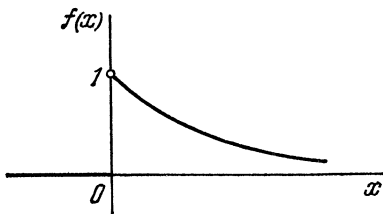


Рис. 13.

Из сказанного следует, что, согласно теореме Фурье, функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье в соответствии с формулой (11.6). Выпишем это разложение в явном виде (т. е. без внутреннего интеграла, стоящего в правой части этой формулы).

Мы имеем в рассматриваемом случае

$$I(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \cos \alpha(x-t) dt,$$

или, производя дважды интегрирование по частям,

$$\begin{aligned} I(x, \alpha) &= -e^{-t} \cos \alpha(x-t) \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} \sin \alpha(x-t) dt = \\ &= \cos \alpha x - \alpha e^{-t} \sin \alpha(x-t) \Big|_0^{\infty} - \alpha^2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cos \alpha(x-t) dt = \\ &= \cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x - \alpha^2 I(x, \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$I(x, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2} (\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x).$$

Значит, формула (11.6) приобретает в этом случае следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha.$$

§ 3. Интеграл Фурье для четных функций

Заметим, прежде всего, что при любом α

$$|\cos \alpha t| \leq 1,$$

так что

$$\int_{-l}^l |f(t) \cos t\alpha| dt \leq \int_{-l}^l |f(t)| dt.$$

Следовательно, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, то несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \quad (11.9)$$

существует. В силу аналогичных причин существует при любом α и несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt. \quad (11.10)$$

Вспоминая, что

$$\cos \alpha (x - t) = \cos \alpha x \cos \alpha t + \sin \alpha x \sin \alpha t,$$

перепишем формулу (11.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ четная. Тогда четными должны быть все функции вида $f(t) \cos \alpha t$ и нечетными — все функции вида $f(t) \sin \alpha t$. Следовательно, в этом случае все несобственные интегралы (11.10) обращаются в нуль, а для каждого из несобственных интегралов (11.9) мы можем написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt.$$

Таким образом, в случае четной функции $f(x)$ формула (11.11) может быть переписана как

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha. \quad (11.12)$$

Пример. Разложить в интеграл Фурье четную функцию $f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq l, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(график функции $f(x)$ см. на рис. 14).

То, что функция $f(x)$ ограничена, абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке и удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном сегменте, видно непосредственно.

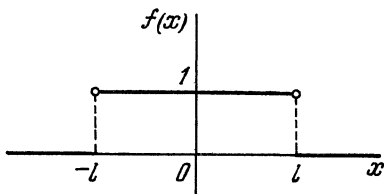


Рис. 14.

Следовательно, требуемое разложение в интеграл Фурье существует. Для его нахождения вычислим

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt = \int_0^l \cos \alpha t \, dt = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha l.$$

Таким образом, искомым разложением является

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha l}{\alpha} \cos \alpha x \, d\alpha. \quad (11.13)$$

Эта формула справедлива для всех значений x , за исключением $x = \pm l$. В этих двух исключительных точках интеграл Фурье принимает значение, равное $1/2$.

§ 4. Интеграл Фурье для нечетных функций

Если функция $f(x)$ нечетная, то нечетной же будет и функция $f(t) \cos \alpha t$ и четной — функция $f(t) \sin \alpha t$. Поэтому при нечетной функции $f(x)$ в нуль обращается при любом значении α интеграл (11.9), а для интеграла вида (11.10) справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt.$$

Следовательно, в случае нечетной функции $f(x)$ формула (11.11) приобретает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha. \quad (11.14)$$

Пример. Разложить в интеграл Фурье нечетную функцию $f(x)$, для которой

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leq l, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(график этой функции см. на рис. 15).

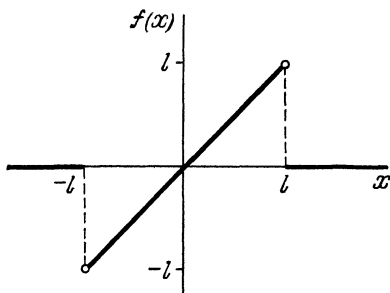


Рис. 15.

Ясно, что функция $f(x)$ ограничена, абсолютно интегрируема и удовлетворяет условиям Дирихле там, где это нужно. Переходим к вычислению внутреннего интеграла в формуле (11.14).

Мы имеем

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = \int_0^l t \sin \alpha t dt$$

или, интегрируя по частям,

$$I(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} t \cos \alpha t \Big|_0^l + \frac{1}{\alpha} \int_0^l \cos \alpha t dt = -\frac{l \cos \alpha l}{\alpha} + \frac{\sin \alpha l}{\alpha^2}.$$

Поэтому

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l}{\alpha^2} \sin \alpha x d\alpha.$$

Эта формула справедлива для всех значений x , за исключением $x = \pm l$. (Для $x = \pm l$ значение правой части формулы будет вдвое меньше значения ее левой части.)

§ 5. Комплексная форма интеграла Фурье

Вернемся к интегральной формуле Фурье (формула (11.8))

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt \right) d\alpha \quad (11.15)$$

и применим к имеющемуся в этой формуле косинусу формулу Эйлера (см. § 5 главы 7):

$$\cos \alpha(x-t) = \frac{1}{2} (e^{i\alpha(x-t)} + e^{-i\alpha(x-t)}).$$

Мы получим

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) (e^{i\alpha(x-t)} + e^{-i\alpha(x-t)}) dt \right) d\alpha,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt \right) d\alpha + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(x-t)} dt \right) d\alpha.$$

Здесь, как нетрудно убедиться подстановкой $z = -\alpha$, интегралы, стоящие в правой части, равны друг другу. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt \right) d\alpha. \quad (11.16)$$

Полученная формула называется *разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье в комплексной форме*.

Примеры.

1. Найдем интеграл Фурье в комплексной форме для уже рассмотренной нами в § 3 функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } |x| \leq l, \\ 0 & \text{для } |x| > l. \end{cases}$$

В этом случае вычисление внутреннего интеграла в правой части формулы (11.16) дает нам

$$\int_{-l}^l e^{i\alpha(x-t)} dt = -\frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha(x-t)} \Big|_{-l}^l = -\frac{1}{i\alpha} (e^{i\alpha(x-l)} - e^{i\alpha(x+l)}) = \\ = \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha} \cdot \frac{e^{i\alpha l} - e^{-i\alpha l}}{i} = \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha} 2 \sin \alpha l.$$

Поэтому формула (11.16) приобретает в данном случае следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha l}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha.$$

2. Разложим в интеграл Фурье в комплексной форме функцию $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (см. рис. 16):

Мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\alpha(x-t)} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + i\alpha x - i\alpha t} dt = e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - i\alpha t} dt = \\ &= e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\alpha)^2 - \frac{\alpha^2}{2}} dt = e^{i\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\alpha)^2} dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл является функцией от α . Обозначим его через

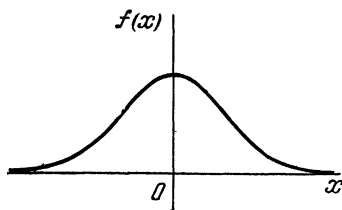


Рис. 16.

$I(\alpha)$ и вычислим его. Мы имеем

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\alpha)^2} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-\frac{1}{2}(t+i\alpha)^2} dt,$$

или, делая подстановку

$$t + i\alpha = z,$$

мы получим

$$I(\alpha) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A+i\alpha}^{A+i\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Продифференцируем это тождество по α . Ввиду того, что сходимость к пределу является по α равномерной в окрестности любого значения переменной α , дифференцирование под знаком предела законно. Мы имеем

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{d}{d\alpha} \int_{-A+i\alpha}^{A+i\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Выполняя дифференцирование интеграла по верхнему и нижнему пределам, мы получаем

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(i e^{-\frac{1}{2}(A+i\alpha)^2} - i e^{-\frac{1}{2}(-A+i\alpha)^2} \right),$$

а вспоминая формулу (7.15) и переходя к пределу, будем иметь

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = 0.$$

Следовательно, первообразная функция должна быть постоянной:

$$I(\alpha) = \text{const.}$$

В частности, должно быть

$$I(\alpha) = I(0).$$

Вычислим интеграл $I(0)$. Запишем его для этого дважды:

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

и перемножим почленно эти равенства. Мы получим

$$I^2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, мы имеем

$$\begin{aligned} I^2(0) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\frac{\rho^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 2\pi \left(-e^{-\frac{\rho^2}{2}} \Big|_0^{\infty} \right) = 2\pi, \end{aligned}$$

откуда

$$I(0) = \sqrt{2\pi}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\alpha(x-t)} dt = e^{i\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2} \sqrt{2\pi}, \quad (11.17)$$

и искомым разложением в интеграл Фурье является

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2} d\alpha.$$

§ 6. Понятие о преобразовании Фурье

Перепишем формулу (11.16), заменяя α на $-\alpha$, в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

и положим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt = F(\alpha). \quad (11.18)$$

Тогда, очевидно, будет

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x). \quad (11.19)$$

Определение. Переход от функции $f(x)$ к функции $F(\alpha)$, описываемый формулой (11.18), называется *преобразованием Фурье функции $f(x)$* . Часто преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется сама функция $F(\alpha)$. Обратный переход от функции $F(\alpha)$ к функции $f(x)$, описываемый формулой (11.19), называется *обратным преобразованием Фурье*. Также обратным преобразованием Фурье функции $F(\alpha)$ называется функция $f(x)$.

Пример. Вообще говоря, сами функции имеют мало общего с функциями, которые являются их преобразованиями Фурье. Одной из немногих функций, совпадающих со своими преобразованиями Фурье, является

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

В том, что для этой функции действительно

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}},$$

нас убеждает второй пример из предыдущего параграфа. В самом деле, в этом случае мы имеем

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\alpha t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\alpha t} dt, \end{aligned}$$

или, пользуясь формулой (11.17), полагая в ней $x=0$ и заменяя α на $-\alpha$, получаем требуемое. Перечисление остальных функций, совпадающих со своими преобразованиями Фурье, является более сложным делом, на котором мы не будем останавливаться.

§ 7. Косинус-преобразование Фурье

Пусть $f(x)$ — четная функция. Вспомним формулу (11.12):

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha,$$

перепишем ее в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha \quad (11.20)$$

и положим

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt. \quad (11.21)$$

Тогда (11.20) даст нам

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x d\alpha. \quad (11.22)$$

Формула (11.21) определяет *косинус-преобразование Фурье* четной функции $f(x)$, приводящее к функции $F(\alpha)$, также называемой косинус-преобразованием функции $f(x)$. Формула (11.22) определяет обратное косинус-преобразование.

§ 8. Синус-преобразование Фурье

Для нечетной функции $f(x)$ мы можем сослаться на формулу (11.14)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha$$

и по аналогии с предыдущим определить *синус-преобразование Фурье*

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt$$

и обратное синус-преобразование

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha x d\alpha.$$

Пр и м е р. Рассмотрим функцию

$$f(x) = e^{-\beta x},$$

определенную только для $x > 0$. Последнее означает, что мы можем, продолжая нашу функцию $f(x)$ на область отрицательных значений по четности или по нечетности, найти как косинус-преобразование этой функции, так и ее синус-преобразование.

Для косинус-преобразования мы имеем

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt.$$

Вычисляя последний интеграл двукратным интегрированием по частям (подобно тому как вычислялся интеграл в примере в § 2), мы получаем

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

Аналогично для синус-преобразования этой функции —

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

§ 9. Спектральная функция

Положим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = F(\alpha).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt d\alpha.$$

В силу (11.16) последний интеграл есть $f(x)$. Таким образом,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (11.23)$$

С механической точки зрения функция $e^{i\alpha x}$ при любом значении α описывает некоторое гармоническое колебание.

В соответствии с этим интегральное представление (11.23) функции $f(x)$ можно понимать как представление описываемого этой функцией движения в виде бесконечной непрерывной системы независимых колебаний с различными частотами. Функция $F(\alpha)$ показывает при этом, с какой интенсивностью происходят колебания, соответствующие различным значениям α . Нетрудно проверить (это делается совершенно так же, как в § 11 главы 9 для случая рядов Фурье), что модуль $|F(\alpha)|$ есть амплитуда колебания, соответствующего данному значению α .

Функция $F(\alpha)$ называется *спектральной функцией* для исходной функции $f(x)$.

**ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИЗНАКИ
СХОДИМОСТИ РЯДОВ
С ПОСТОЯННЫМИ ЧЛЕНАМИ****§ 1. Признак сходимости Куммера**

Широкий, практичный и неоднократно применявшийся в ходе нашего курса признак сходимости Даламбера (см. § 6 главы 3) является недостаточно чувствительным. Он, взятый в своей неопредельной форме, в принципе не способен выявлять сходимость ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1.$$

Переход к неопредельной форме этого признака повышает его чувствительность лишь незначительно.

Весьма чувствительный признак Маклорена — Коши (см. § 3 главы 3) оказывается, наоборот, недостаточно практичным. Теоретически интересно и практически полезно ввести в употребление признаки сходимости рядов столь же или почти столь же практичные, как и признак Даламбера, но существенно более чувствительные.

Малая чувствительность признака сходимости Даламбера объясняется (ср. § 6 главы 3) тем, что он основан на сравнении исследуемого ряда с таким резко расходящимся рядом, как арифметическая прогрессия, или же с таким быстро сходящимся рядом, как геометрическая прогрессия. Вместе с тем нам уже известны (см. § 4 главы 3) весьма медленно сходящиеся, а также и весьма медленно расходящиеся ряды. Естественно попытаться построить признаки сходимости рядов, основанные на сравнении их членов с членами этих «вяло развивающихся» рядов. Такая конструкция была предложена Куммером.

Теорема (признак сходимости Куммера). Пусть дан расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \quad (12.1)$$

с положительными членами. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (12.2)$$

начиная с некоторого номера n_0 ,

$$c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \geq r > 0 \quad (n \geq n_0), \quad (12.3)$$

то ряд (12.2) сходится.

Если же, начиная с некоторого n_0 ,

$$c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0 \quad (n \geq n_0), \quad (12.4)$$

то ряд (12.2) расходится.

По существу признак сходимости Куммера является уточнением уже известного третьего признака сравнения (теорема 3 § 2 главы 3).

Доказательство. Пусть выполняется соотношение (12.3). Как мы знаем, изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. Поэтому можно считать, что (12.3) имеет место для всех n , начиная с $n_0 = 1$.

Из (12.3) следует, что

$$c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} \geq r u_{n+1} > 0, \quad (12.5)$$

и поэтому $c_n u_n > c_{n+1} u_{n+1}$. Значит, числа $c_n u_n$ образуют монотонно убывающую последовательность положительных чисел. Пусть α — ее предел.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1}). \quad (12.6)$$

N -я частичная сумма этого ряда есть

$$s_N = \sum_{n=1}^N (c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1}) = c_1 u_1 - c_N u_N.$$

Переходя к пределу при возрастании N , мы получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (c_1 u_1 - c_N u_N) = c_1 u_1 - \alpha,$$

т. е. стоящий слева предел существует и ряд (12.6) сходится. Но тогда на основании (12.5) по первому признаку сравнения (теорема 1 § 2 главы 3) сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r u_{n+1},$$

и тем самым (теорема 2 § 8 главы 2) — и исходный ряд.

Пусть теперь, наоборот, имеет место (12.4). Тогда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n},$$

и сравнение исследуемого ряда с заведомо расходящимся рядом (12.1) при помощи третьего признака сравнения (теорема 3 § 2 главы 3) дает нам его расходимость.

Подобно признакам сходимости Даламбера и Коши, признак Куммера может быть сформулирован и в предельной форме, которая выглядит следующим образом:

Если даны ряд (12.2) и расходящийся ряд (12.1), то из

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \right) > 0$$

следует сходимость ряда (12.2), а из

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \right) < 0$$

— его расходимость.

Подчеркнем, что описанный только что признак сходимости Куммера является общим признаком: выбирая различным образом расходящийся ряд (12.1), мы будем получать различные конкретные признаки сходимости.

Пример: Возьмем в качестве ряда (12.1) последовательность единиц:

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

Тогда неравенство (12.3) превращается в $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \geq r > 0$, откуда признаком сходимости ряда (12.2) оказывается неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{r+1} < 1, \quad (12.7)$$

Неравенство же (12.4) переписывается в этом случае как

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \leq 0,$$

и признаком расходимости ряда (12.2) становится неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1. \quad (12.8)$$

Но условие сходимости (12.7) (выполняющееся, начиная с некоторого n) вместе с условием расходимости (12.8) составляют, как известно, признак Даламбера.

Неудобства непосредственного практического приложения признака сходимости Куммера связаны с зависимостью его от взятого «эталонного» расходящегося ряда (12.1). Выбирать его каждый раз специально для решения вопроса о сходимости того или иного конкретного ряда (12.2) может оказаться затруднительным по следующим соображениям. Если в качестве ряда (12.1) взять слишком быстро расходящийся ряд (вроде расходящейся геометрической прогрессии), то полученный конкретный признак сходимости окажется (подобно признаку Даламбера) недостаточно чувствительным. Если, наоборот, взять очень медленно расходящийся (но все-таки расходящийся) ряд, то члены его неизбежно будут зависеть от номера довольно сложным образом и получится признак чувствительный, но непрактичный.

В связи со сказанным представляется целесообразным выбрать заранее некоторую серию расходящихся рядов и по каждому из них составить соответствующую реализацию признака Куммера.

§ 2. Признак сходимости Раабе

Возьмем в признаке Куммера в качестве расходящегося ряда (12.1) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

В этом случае мы имеем

$$c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} = n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) = n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1.$$

Полученный признак сходимости может быть сформулирован следующим образом.

Теорема (признак сходимости Раабе). Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (12.9)$$

сходится, если найдется такое n_0 , что

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq r + 1 \quad (n \geq n_0, r > 0).$$

Этот ряд расходится, если, начиная с некоторого n_0 , будет

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1.$$

Предельная форма признака Раабе выглядит следующим образом:

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = r > 1,$$

то ряд (12.9) сходится, а если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1,$$

то расходится.

Признак сходимости Раабе существенно чувствительней, чем сходный с ним признак сходимости Даламбера. Действительно, там, где признак Даламбера, взятый в его предельной форме, устанавливает сходимость ряда (12.9):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1,$$

там признак Раабе дает $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = -\infty$.

Аналогично для ряда, на расходимость которого указывает признак Даламбера, по признаку Раабе будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \infty.$$

Примеры.

1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1) \dots (x+n)} \quad \text{при } x > 0. \quad (12.10)$$

Здесь $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{x+n+1}{n+1}$, так что при каждом конкретном x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1,$$

и применение признака Даламбера здесь безрезультатно. Признак же Раабе дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x+n+1}{n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} x = x.$$

Отсюда видно, что при $x > 1$ рассматриваемый ряд сходится, а при $x < 1$ — расходится. Заметим попутно, что при $x = 1$ ряд (12.10) превращается в гармонический, который, как известно, расходится. То, что признак Раабе в своей исходной (непредельной) форме устанавливает расходимость гармонического ряда, не может считаться самостоятельным результатом, так как само составляющее признак Раабе утверждение как раз опирается на эту расходимость.

2. Рассмотрим далее ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}. \quad (12.11)$$

Составим отношение соседних членов этого ряда:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{\ln \frac{n+1}{n}} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{-\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}.$$

Будем разлагать стоящие справа логарифмы и квадратные корни в соответствии с формулой Тейлора по степеням $1/n$. В этом и в следующих примерах мы будем пользоваться предельными признаками сходимости. Это значит, что нам придется неограниченно увеличивать значения переменной n . Поэтому каждая следующая степень $1/n$ будет при увеличении n бесконечно малой высшего порядка по сравнению с предыдущими. Отбрасывая все степени, начиная с некоторой, мы будем совершать ошибку, которая будет мала не только абсолютно, но и по сравнению с последним из удержанных членов. Эта относительная ошибка будет тем меньшей, чем больше значение n , и исчезает в пределе при неограниченном возрастании n . В зависимости от требуемой точности рассуждений мы будем удерживать в формулах Тейлора для соответствующих функций то или иное число членов. Далее мы будем связывать знаком \approx выражения, отличающиеся друг от друга величинами, малыми по сравнению с той точностью, которую дают удержанные и выписанные члены.

Сначала ограничимся членами логарифмов и корней, содержащими $1/n$ в степени не выше первой. Мы будем иметь

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \frac{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 1}{\frac{1}{n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right)} = 1.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$, и признак сходимости Даламбера здесь нам никакого ответа дать не может.

Воспользуемся поэтому признаком Раабе. Для этого вычислим отношение соседних членов ряда (12.11) более точно, удерживая в формулах Тейлора степени $1/n$ до второй включительно. Мы получим

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}} \frac{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - 1}{1 - 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2}}.$$

Очевидные упрощения дадут нам

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4n}}{1 + \frac{1}{4n}},$$

откуда $\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx 1 + \frac{1}{2n}$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{1}{2n} - 1 \right) = \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. ряд (12.11) расходится.

3. Возьмем теперь ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 \frac{n}{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}. \quad (12.12)$$

Как и в предыдущем примере, можно убедиться в том, что признак Даламбера не в состоянии решить вопрос о сходимости этого ряда. Применим признак Раабе. Для отношения соседних членов ряда мы имеем

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\ln^2 \frac{n}{n-1}}{\ln^2 \frac{n+1}{n}} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}},$$

и, действуя аналогично предыдущему, мы получаем $\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx 1 + \frac{3}{2n}$.

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \frac{3}{2} > 1,$$

так что ряд (12.12) сходится.

4. Пусть, наконец, нам дан ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{3/2} \frac{n}{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}.$$

Повторяя рассуждения из примеров 2 и 3, мы видим, что в этом случае $\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx 1 + \frac{1}{n}$. Но теперь оказывается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = 1,$$

и признак сходимости Раабе здесь никакого отчета не дает.

§ 3. Признак сходимости Бертрана

Признак сходимости Раабе является весьма чувствительным, но есть ряды, сходимость (или расходимость) которых и он распознать не в состоянии. Один из таких рядов был нами описан в примере 4 § 2. Однако признак Куммера способен порождать и более чувствительные признаки сходимости, чем признак Раабе. Для этого надлежит брать ряды, расходящиеся медленнее, чем гармонический ряд.

Возьмем, например, в качестве такого расходящегося

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ ряд

$$\frac{1}{c_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},$$

расходимость которого была установлена в § 4 главы 3 ($1/c_1$ — произвольное число, очевидно, не влияющее на сходимость ряда). В этом случае мы получаем ($n > 1$)

$$c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} = (n \ln n) \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) \ln (n+1),$$

или, если выполнить элементарные преобразования,

$$\begin{aligned} c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} &= n \frac{u_n}{u_{n+1}} \ln n - n \ln n - \ln n + (n+1) \ln n - \\ &- (n+1) \ln (n+1) = \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ссылка на признак Куммера дает нам новый признак сходимости, который, разумеется, может быть сформу-

лирован и в неопределенной форме, а в предельной выглядит следующим образом.

Теорема (признак сходимости Бертрана). Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n = r > 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) < 1,$$

то расходится.

Для доказательства достаточно заметить, что в нашем случае

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \ln e = 1. \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{3/2} \frac{n}{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \quad (12.13)$$

из примера 4 предыдущего параграфа. Для применения к этому ряду признака сходимости Бертрана напомним отношение соседних членов ряда

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{-\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

и разложим логарифмы и квадратные корни по формуле Тейлора, удерживая в каждом таком разложении на один член больше, чем это делалось в примере 4 § 2. Мы получим

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \left(\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}} \right)^{3/2} \frac{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} - 1}{1 - 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3}},$$

или, после естественных упрощений,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \left(\frac{1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}}{1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}} \right)^{3/2} \frac{1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{8n^2}}{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{8n^2}}.$$

Выполнение деления дает нам

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} \right),$$

или (мы можем воспользоваться формулой (7.28) биномиального разложения для $(1+x)^t$, положив в ней $t = \frac{3}{2}$ и $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$)

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{9}{8n^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} \right),$$

или, наконец,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}.$$

Составим предел, требуемый признаком Бертрانا:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - 1 \right) - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \frac{1}{2n} = 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что ряд (12.13) расходится.

Выражаясь несколько вольно, можно сказать, что признак сходимости Бертрана в том же смысле и настолько же чувствительнее признака Раабе, в каком и насколько признак Раабе чувствительнее признака Даламбера: в тех случаях, когда признак Раабе указывает на сходимость или на расходимость ряда, значение предела, фигурирующего в признаке Бертрана, будет равно соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Естественно, что, беря в качестве стандартных рядов еще более медленно расходящиеся ряды, мы будем получать еще более чувствительные (хотя и еще менее практичные) признаки сходимости. В частности, можно продолжить последовательность признаков сходимости, начинающуюся с признаков Даламбера, Раабе и Бертрана, опираясь на расходящиеся ряды с общими членами

$$\frac{1}{n \ln n \ln \ln n}, \quad \frac{1}{n \ln n \ln \ln n \ln \ln \ln n} \text{ и т. д.}$$

§ 4. Признак сходимости Гаусса

Более чувствительным, чем признак сходимости Раабе, и более практичным, чем признак сходимости Бертрانا, является признак сходимости Гаусса.

Теорема (признак сходимости Гаусса). Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (12.14)$$

отношение соседних членов может быть представлено в виде

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}, \quad (12.15)$$

где λ и μ — постоянные, а θ_n — ограниченная величина.

Тогда ряд (12.14) сходится, если

$$\lambda > 1 \quad \text{или} \quad \lambda = 1 \quad \text{и} \quad \mu > 1. \quad (12.16)$$

Этот ряд расходится, если

$$\lambda < 1 \quad \text{или} \quad \lambda = 1 \quad \text{и} \quad \mu \leq 1. \quad (12.17)$$

Доказательство. Прежде всего,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda,$$

так что при $\lambda \neq 1$ утверждение признака Гаусса превращается в утверждение признака Даламбера.

Далее, при $\lambda = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \mu$, так что при $\lambda = 1$ и $\mu \neq 1$ признак Гаусса вытекает из признака Раабе.

Наконец, при $\lambda = 1$ и $\mu = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \frac{\ln n}{n}.$$

Последний же предел ввиду ограниченности величины θ_n равен нулю, и расходимость ряда (12.14) следует из признака Бертрана.

Примеры.

1. Возьмем так называемый гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} x^n =$$

$$= 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots \quad (12.18)$$

В целях общности исследования мы будем предполагать, что α , β , γ и x — произвольные вещественные числа, причем числа α , β и γ не являются целыми и неположительными (если хотя бы одно из чисел α или β — целое неположительное, то написанный ряд становится суммой конечного числа членов, а при $\gamma=0, -1, -2, \dots$ функция $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ вообще не определена).

Для этого ряда, очевидно, $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(\gamma+n)(1+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} x$, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = x. \quad (12.19)$$

Значит, при $0 \leq x < 1$ признак Даламбера дает нам абсолютную сходимость (и тем самым — просто сходимость) гипергеометрического ряда. Следовательно, по теореме Абеля (§ 2 главы 6) гипергеометрический ряд сходится (и притом абсолютно) при $|x| < 1$. При $x > 1$ члены гипергеометрического ряда, начиная с некоторого n , все оказываются положительными. Поэтому то, что этот ряд не будет сходиться абсолютно, означает, что он должен просто расходиться. Применяя снова теорему Абеля, мы видим, что гипергеометрический ряд расходится и при отрицательных x , для которых $|x| > 1$. Нам остается рассмотреть случаи $x = \pm 1$.

При $x=1$ напомним

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)}. \quad (12.20)$$

Мы имеем $\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{\alpha^2}{1 + \frac{\alpha}{n}}$ и аналогично

$$\frac{1}{1 + \frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{\beta^2}{1 + \frac{\beta}{n}}.$$

Подставляя это в (12.20) и раскрывая скобки, мы получаем

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{-\alpha - \beta + \gamma + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}, \quad (12.21)$$

где величина θ_n ограниченная. Заметим, что (12.21) можно понимать также как разложение отношения u_n/u_{n+1} как функции от $1/n$ по формуле Маклорена.

Согласно (12.21) гипергеометрический ряд при $x=1$ сходится на основании признака Гаусса при $\gamma-\alpha-\beta > 0$ и расходится при $\gamma-\alpha-\beta \leq 0$.

Обратимся к случаю $x=-1$. Здесь отношение соседних членов

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = - \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)} = -1 - \frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{n} - \frac{\theta_n}{n^2} \quad (12.22)$$

с ростом n стремится к -1 , так что, начиная с некоторого места, гипергеометрический ряд оказывается знакоперевающимся. Значит, на основании признака Лейбница необходимым условием его сходимости является

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$$

или, что то же самое,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{1}{u_n} \right| = +\infty. \quad (12.23)$$

Но

$$\ln \left| \frac{1}{u_n} \right| = \ln \left| \frac{1}{u_1} \cdot \frac{u_1}{u_2} \dots \frac{u_{n-1}}{u_n} \right| = \ln \left| \frac{1}{u_1} \right| + \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right|.$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{1}{u_n} \right| = \ln \left| \frac{1}{u_1} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right|. \quad (12.24)$$

Из (12.22) следует, что

$$\ln \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| = \ln \left(1 + \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{k} + \frac{\theta_k}{k^2} \right),$$

или, разлагая написанный логарифм, понимаемый как функция от $1/k$, по формуле Маклорена, получим

$$\ln \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| = \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{k} + \frac{\theta_k^*}{k^2},$$

где все числа θ_k^* ограничены. Подстановка в (12.24) дает нам

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{1}{u_n} \right| = \ln \left| \frac{1}{u_1} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\alpha-\beta+\gamma+1}{k} + \frac{\theta_k^*}{k^2} \right).$$

Из расходимости гармонического ряда следует, что при

$$\gamma-\alpha-\beta > -1$$

написанный ряд расходится с неограниченным возрастанием частичных сумм. Следовательно, в этом случае выполняется (12.23) и, кроме

того, $|u_{n+1}| < |u_n|$. Таким образом, соблюдаются все условия признака Лейбница, и гипергеометрический ряд сходится.

Если же $\gamma - \alpha - \beta \leq -1$, то (12.23) не имеет места и гипергеометрический ряд расходится.

Выясним, наконец, вопрос об абсолютной сходимости гипергеометрического ряда при $x = -1$. Для этого необходимо, чтобы сходился ряд модулей членов этого ряда. Но, очевидно, начиная с некоторого места, модули членов гипергеометрического ряда с $x = -1$ совпадают с членами гипергеометрического ряда с теми же значениями параметров α , β и γ , для которого $x = 1$. Значит, при $\gamma - \alpha - \beta > 0$ гипергеометрический ряд с $x = -1$ сходится абсолютно, а при $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$ также сходится, но лишь условно.

2. В частности, полагая в выражении (12.18) для гипергеометрического ряда $\alpha = -t$ и $\beta = \gamma$, мы получим

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, -x) &= F(-t, \beta, \beta, -x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)(-t+1)\dots(-t+n-1)}{n!} (-x)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} x^n, \end{aligned}$$

т. е. биномиальный ряд (см. § 9 главы 7). Применяя к нему полученные только что для гипергеометрического ряда результаты, мы устанавливаем, что биномиальный ряд сходится при $|x| < 1$, расходится при $|x| > 1$; при $x = -1$ он сходится если $t > 0$, и расходится, если $t \leq 0$, а при $x = 1$ сходится абсолютно, если $t > 0$, сходится условно, если $-1 < t \leq 0$, и, наконец, расходится, если $t \leq -1$.

Условия сходимости (12.16) в признаке Гаусса вместе с условиями расходимости (12.17), очевидно, исчерпывают все логические возможности для значений параметров λ и μ . Поэтому признак Гаусса является необходимым и достаточным, т. е. «идеально чувствительным» признаком сходимости. Практичность его также неоспорима. Ввиду сказанного еще в § 5 главы 3 его порок должен поэтому заключаться в недостаточной широте. И в самом деле, возможность представлять отношение соседних членов ряда в виде (12.15) оказывается не столь уж частой.

Примеры.

1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Расходимость этого ряда, установленная в примере 5 § 4 главы 3, нами уже использовались. Для

него мы, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right),\end{aligned}$$

или, разлагая $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ как функцию от $\frac{1}{n}$ в ряд Маклорена и удерживая два первых члена,

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}}{\ln n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + \frac{\theta_n}{n^2 \ln n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n^*}{n \ln n},\end{aligned}$$

где θ_n и θ_n^* — ограниченные числа, причем, как нетрудно проверить, все θ_n^* начиная с некоторого места могут быть ограничены снизу некоторой положительной постоянной. Предположим, что в этих условиях отношение u_n/u_{n+1} может быть представлено в виде (12.15). Сравнение с правой частью последней формулы дает нам $\lambda=1$, $\mu=1$ и $\theta_n/n^2 = \theta_n^*/(n \ln n)$, т. е. $\theta_n^*/\theta_n = (\ln n)/n$. Последнее отношение при возрастании n стремится к нулю. Однако в случае ограниченных сверху θ_n и θ_n^* и ограниченного снизу θ_n^* этого не может быть. Значит, в виде (12.15) отношение соседних членов рассматриваемого ряда непредставимо.

2. Для ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ мы также можем написать

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n^*}{n \ln n},$$

где числа θ_n^* , как и в предыдущем примере, ограничены сверху, а начиная с некоторого места — и положительной постоянной снизу. Однако, как следует из того же примера 4 § 4 главы 3, этот ряд сходится.

§ 5. Сходимость знакопеременных рядов

Содержащийся в главе 4 материал позволяет оценивать сходимость знакопеременных рядов лишь в двух случаях: когда речь идет об абсолютной сходимости и вопрос тем самым сводится к сходимости рядов с положительными членами и когда знакопеременный ряд является

знакопередающим и к нему применим признак сходимости Лейбница.

Займемся более широким исследованием сходимости знакопеременных рядов.

Иногда бывает удобно представлять члены ряда в виде произведений, т. е. рассматривать ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Положим

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

и выполним следующее тождественное преобразование (называемое иногда *преобразованием Абеля*):

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n a_k b_k = \\ &= a_1 t_1 + \sum_{k=2}^n a_k (t_k - t_{k-1}) = \\ &= a_1 t_1 + a_2 (t_2 - t_1) + a_3 (t_3 - t_2) + \dots + a_n (t_n - t_{n-1}) = \\ &= t_1 (a_1 - a_2) + t_2 (a_2 - a_3) + \dots + t_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + a_n t_n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} t_k (a_k - a_{k+1}) + a_n t_n. \end{aligned}$$

(В преобразовании Абеля нетрудно усмотреть конечный аналог интегрирования по частям.)

Абсолютную величину суммы $|s_n|$ можно оценить через величины $|t_k|$ следующим образом.

Лемма. Если последовательность

$$a_1, \dots, a_n, \dots \quad (12.25)$$

монотонная (т. е. невозрастающая или неубывающая) и

то

$$|s_n| \leq T (|a_1| + 2|a_n|).$$

Доказательство. Выполняя преобразование Абеля, мы имеем

$$\begin{aligned} |s_n| &= \left| \sum_{k=1}^n t_k (a_k - a_{k+1}) + a_n t_n \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |t_k| |a_k - a_{k+1}| + |a_n| |t_n| \leq \\ &\leq T \left(\sum_{k=1}^n |a_k - a_{k+1}| + |a_n| \right). \end{aligned} \quad (12.26)$$

Но из монотонности последовательности (12.25) следует, что все разности в (12.26) справа имеют один и тот же знак. Следовательно,

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq T \left(\left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \right| + |a_n| \right) = \\ &= T (|a_1 - a_n| + |a_n|) \leq T (|a_1| + 2|a_n|), \end{aligned}$$

и требуемое доказано.

§ 6. Признак сходимости Дирихле

Рассмотрим достаточно широкий, практичный и чувствительный признак сходимости знакопеременных рядов.

Теорема (признак сходимости Дирихле). Пусть нам дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n + \dots \quad (12.27)$$

Если частичные суммы $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (12.28)$$

ограничены в совокупности некоторой постоянной T^* , а последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (12.29)$$

монотонно не возрастает, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad (12.30)$$

то ряд (12.27) сходится.

Доказательство. Из (12.30) следует, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что при $n > N$

$$|a_n| < \varepsilon. \quad (12.31)$$

Кроме того, мы имеем для любого m

$$|b_{n+1} + \dots + b_{n+m}| = |t_{n+m} - t_n| \leq 2T^*.$$

Положим в лемме из предыдущего параграфа $T = 2T^*$. Эта лемма даст нам тогда для $n > N$ и каждого $m = 1, 2, \dots$ ввиду (12.31)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq 2T^* (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \leq 6T^* \varepsilon,$$

или, переходя к пределу при неограниченном возрастании m , получим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \leq 6T^* \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что ряд (12.27) сходится.

Следствие (признак сходимости Абеля). Если для ряда (12.27) последовательность (12.29) является монотонной и ограниченной, а ряд (12.28) сходится, то сходится и ряд (12.27).

Доказательство. В рассматриваемом случае последовательность (12.29) должна иметь конечный предел. Обозначим его через α . Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha) b_n + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (12.32)$$

Из определения предела следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \alpha) = 0,$$

так что первый из стоящих в (12.32) справа рядов подпадает под условия признака Дирихле и потому сходится. Второй же ряд сходится по условию. Следовательно, сходится и ряд (12.27).

Пр и м е р. Положим для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \quad \left(x \neq \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right) \quad (12.33)$$

при любом $n=1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad b_n = (-1)^{n+1} \cos nx.$$

Здесь, очевидно, выполняется условие (12.30), а на основании сказанного в § 7 главы 1

$$\sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{2} - (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \cos \frac{x}{2}}.$$

Последнее выражение при любом n ограничено сверху числом

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cos (x/2)} \right|.$$

Таким образом, условия признака Дирихле выполнены, и ряд (12.33) сходится.

Полагая в формулировке признака Дирихле

$$b_k = (-1)^{k+1},$$

мы получаем, что ряд (12.27) — знакочередующийся, и признак Дирихле превращается для этого случая в признак сходимости Лейбница.

ДВОЙНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Определение двойного ряда

Вернемся к определению числового ряда, сформулированному в § 2 главы 2. В его основе лежит рассмотрение некоторой числовой последовательности

$$u_1, u_2, \dots, \quad (13.1)$$

т. е. множества чисел, элементам которого приписаны целые положительные индексы (номера). Мы можем поэтому считать, что последовательность (13.1) есть *функция*, которая каждому целому положительному номеру n ставит в соответствие число u_n . Эта функция, очевидно, является функцией от одного независимого аргумента.

Как известно, представляют интерес и рассматриваются также функции от нескольких аргументов. В частности, можно рассматривать и функцию, которая каждой *паре* целых положительных чисел m, n ставит в соответствие число $u_{m,n}$. (Это число можно также обозначить через u_{mn} .) Такую функцию мы можем задать таблицей вида

$$\begin{array}{ccccccc} u_{11}, & u_{12}, & \dots, & u_{1n}, & \dots & & \\ u_{21}, & u_{22}, & \dots, & u_{2n}, & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ u_{m1}, & u_{m2}, & \dots, & u_{mn}, & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \end{array} \quad (13.2)$$

Обратим внимание на то, что в этой таблице и число (множество) строк бесконечно и каждая из строк содержит бесконечное число (множество) членов.

Пример. Пусть все строки таблицы вида (13.2) являются геометрическими прогрессиями с одним и тем же знаменателем p , а ее столбцы — прогрессиями со знаменателем q . Очевидно; в этом случае

$$u_{mn} = u_{11} p^{n-1} q^{m-1}.$$

Такого бесспорного представления о частичных суммах в случае двойного ряда (13.4) уже нет, так как запись (13.2) еще сама по себе не указывает того естественного порядка, в котором надлежит складывать выписанные числа. Буквальное понимание записи (13.4) подсказывает нам, например, понимание суммы (13.4) как «предела суммы пределов сумм чисел по строкам»:

$$s' = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n u_{ij} \right). \quad (13.7)$$

Очевидно, осмысленность упомянутых здесь пределов означает сходимость каждой из строк двойного ряда (13.4), а также сходимость ряда, членами которого являются эти суммы. Обозначая сумму i -й строки двойного ряда через s_{i*} :

$$s_{i*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}, \quad (13.8)$$

мы можем равенство (13.7) переписать как

$$s' = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m s_{i*}. \quad (13.9)$$

Число s' называется *суммой двойного ряда (13.3) по строкам*.

Читая теперь запись (13.4) столбец за столбцом, мы можем понимать ее как

$$s'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m u_{ij} \right). \quad (13.10)$$

Здесь существование внутренних пределов означает сходимость столбцов двойного ряда. Обозначая сумму j -го столбца через s_{*j} :

$$s_{*j} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m u_{ij}, \quad (13.11)$$

мы можем переписать (13.10) как

$$s'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n s_{*j}. \quad (13.12)$$

откуда согласно (13.9) для суммы двойной прогрессии по строкам мы имеем

$$s' = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m s_{i*} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a}{1-p} \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{a}{(1-p)(1-q)}. \quad (13.13)$$

Нетрудно подсчитать таким же образом, что и

$$s'' = \frac{a}{(1-p)(1-q)}. \quad (13.14)$$

Наконец, частичная сумма s_{mn} двойной прогрессии вычисляется как

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a p^{j-1} q^{i-1} = a \sum_{i=1}^m q^{i-1} \frac{1-p^n}{1-p} = a \frac{1-p^n}{1-p} \frac{1-q^m}{1-q},$$

так что, переходя к пределу при неограниченном возрастании m и n , получаем

$$s = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{mn} = \frac{a}{(1-p)(1-q)}. \quad (13.15)$$

Мы видим, что при $|p|, |q| < 1$ двойная прогрессия сходится, причем ее сумма s согласно (13.13), (13.14) и (13.15) совпадает с ее суммами s' и s'' по строкам и столбцам. Далее будет видно, что такое совпадение является весьма распространенным и вместе с тем важным обстоятельством.

Если, напротив, хотя бы одно из чисел $|p|$ или $|q|$ не меньше единицы, то соответствующая двойная прогрессия расходится,

§ 3. Критерии сходимости двойных рядов.

Теорема Маркова

Для выяснения вопросов, связанных со сходимостью двойных рядов, воспользуемся некоторыми аналогиями с фактами о сходимости обычных рядов.

Очевидно, что если члены двойного ряда u_{ij} с ростом значений индексов i и j убывают достаточно быстро, то двойной ряд должен сходиться. В качестве характеристики убывания членов двойного ряда можно взять, например, сходимость его строк (или столбцов) и убывание сумм строк (столбцов) с ростом их индексов.

Теорема. Пусть в сходящемся двойном ряде

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}$$

с суммой s сходятся все строки, а также пусть сходится ряд, составленный из их сумм, т. е. пусть существуют пределы в равенствах

$$s_{i*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n u_{ij}, \quad i=1, 2, \dots,$$

и

$$s' = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m s_{i*}.$$

Тогда $s = s'$.

Аналогично, если существуют пределы

$$s_{*j} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m u_{ij}, \quad j=1, 2, \dots,$$

и

$$s'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n s_{*j},$$

то $s = s''$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такие m_0 и n_0 , что при $m > m_0$ и $n > n_0$

$$|s_{mn} - s| < \varepsilon. \quad (13.16)$$

Но при каждом конкретном m

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{mn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{i=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{i=1}^m s_{i*},$$

и стоящий здесь слева предел существует.

Так как неравенство (13.16) справедливо при любом достаточно большом n , мы можем, неограниченно увеличивая n , получить

$$\left| \sum_{i=1}^m s_{i*} - s \right| < \varepsilon. \quad (13.17)$$

Таким образом, по каждому $\varepsilon > 0$ находится такое m_0 , что при $m > m_0$ имеет место (13.17). Но это и значит, что

$$s' = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m s_{i*} = s,$$

и первая часть теоремы доказана. Вторая ее часть доказывается аналогично.

Нам будет полезен следующий критерий равенства сумм двойного ряда по строкам и по столбцам:

Теорема Маркова. Пусть нам дан двойной ряд

$$\sum_{m,n} u_{mn},$$

в котором сходятся все строки

$$s_{m*} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}, \quad (13.18)$$

все столбцы

$$s_{*n} = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad (13.19)$$

и ряд, составленный из сумм строк

$$s' = \sum_{m=1}^{\infty} s_{m*}. \quad (13.20)$$

Тогда:

1) k -е остатки строк, составленные для каждого k ,

$$r_m^{(k)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_{mn}$$

образуют сходящийся ряд $\sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(k)}$ с некоторой суммой R_k .

2) Для того чтобы сходилась ряд, составленный из сумм столбцов

$$s'' = \sum_{n=1}^{\infty} s_{*n},$$

необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R.$$

3) Для равенства $s' = s''$ необходимо и достаточно, чтобы было $R = 0$.

Доказательство. 1) Для любых m и k мы имеем

$$r_m^{(k)} = s_{m*} - u_{m1} - \dots - u_{mk},$$

и суммирование по всем m дает нам

$$\sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} s_{m*} - \sum_{m=1}^{\infty} u_{m1} - \dots - \sum_{m=1}^{\infty} u_{mk}.$$

Так как все стоящие справа ряды сходятся, сходится и ряд, стоящий слева, причем

$$R_k = s' - s_{*1} - \dots - s_{*k}. \quad (13.21)$$

2) Положив в (13.21) $k=0$, мы получим

$$R_0 = s',$$

и почленное вычитание (13.21) дает нам

$$R_0 - R_k = s_{*1} + \dots + s_{*k}.$$

При неограниченном возрастании k мы имеем

$$R_0 - \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^k s_{*l}, \quad (13.22)$$

и существование предела слева равносильно существованию предела справа.

3) Очевидно, что $r_m^{(0)} = s_{m*}$, следовательно,

$$R_0 = \sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} s_{m*} = s'. \quad (13.23)$$

Если же

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0,$$

то (13.22) превращается в

$$R_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^k s_{*l} = s''. \quad (13.24)$$

Формулы (13.23) и (13.24) дают нам требуемое.

§ 4. Свойства двойных рядов и признаки сходимости

Многие свойства простых рядов и их доказательства сохраняют силу и для двойных рядов, быть может, с незначительными изменениями формулировок и рассуждений.

Теорема об умножении двойного ряда на число (ср. с теоремой 2 § 8 главы 2). Пусть

$$\sum_{m, n} u_{mn} \quad (13.25)$$

— некоторый двойной ряд, а c — произвольное число, отличное от нуля. Тогда двойной ряд

$$\sum_{m, n} cu_{mn} \quad (13.26)$$

и

$$\sum_{m, n} v_{mn} \quad (13.30)$$

— два двойных ряда с положительными членами, причем найдутся такие номера m_0 и n_0 , что при $m > m_0$ и $n > n_0$

$$u_{mn} \leq v_{mn}.$$

Тогда из сходимости двойного ряда (13.30) следует сходимость двойного ряда (13.29), а из расходимости двойного ряда (13.22) следует расходимость двойного ряда (13.30).

Из этого признака сравнения и рассуждений § 2 о сходимости двойных прогрессий можно без труда вывести признак сходимости двойных рядов, который, по аналогии со сходным признаком сходимости для простых рядов, можно назвать *признаком сходимости Даламбера*.

Теорема. Если для двойного ряда

$$\sum_{m, n} u_{mn} \quad (13.31)$$

с положительными членами найдутся такие m_0 , n_0 , что при $m > m_0$, $n > n_0$ имеют место неравенства

$$\frac{u_{m+1, n}}{u_{mn}} \leq p < 1, \quad \frac{u_{m, n+1}}{u_{mn}} \leq q < 1,$$

то двойной ряд (13.30) сходится.

Наоборот, если для двойного ряда (13.30) найдется такое m_0 , что при $m > m_0$ и некотором n

$$\frac{u_{m+1, n}}{u_{mn}} > 1,$$

или же найдется такое n_0 , что при $n > n_0$ и некотором m

$$\frac{u_{m, n+1}}{u_{mn}} > 1,$$

то двойной ряд (13.31) расходится.

В своей предельной форме этот признак приобретает следующий вид (см. следствие из § 5 главы 3):

Если для двойного ряда (13.31)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{u_{m+1, n}}{u_{mn}} = k_n < 1$$

для всех n и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{m, n+1}}{u_{mn}} = l_m < 1$$

для всех m , то этот двойной ряд сходится.

Если для (13.31)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{u_{m+1, n}}{u_{mn}} = k_n > 1$$

для некоторого n или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{m, n+1}}{u_{mn}} = l_m > 1$$

для некоторого m , то этот двойной ряд расходится.

Для двойных рядов имеют место аналоги и других признаков сходимости, известных читателю по главам 3 и 12 для простых рядов. Так, применительно к двойным рядам можно сформулировать признаки сходимости Коши, Маклорена — Коши и другие чувствительные признаки.

§ 5. Абсолютная сходимость двойных рядов

По любому двойному ряду $\sum_{m, n} u_{mn}$ можно составить двойной ряд $\sum_{m, n} |u_{mn}|$ из модулей членов исходного ряда.

Определение. Двойной ряд $\sum_{m, n} u_{mn}$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится двойной ряд $\sum_{m, n} |u_{mn}|$.

Теорема. Абсолютно сходящийся ряд

$$\sum_{m, n} u_{mn} \quad (13.32)$$

сходится, т. е. имеет некоторую сумму s . Кроме того, для него существуют сумма s' по строкам и сумма s'' по столбцам и все эти три суммы равны друг другу:

$$s = s' = s''. \quad (13.33)$$

Доказательство. На основании теоремы об умножении двойного ряда на число и признака сравнения для двойных рядов мы можем точно так же, как это делалось

для простых рядов в § 2 главы 4, вывести из абсолютной сходимости ряда (13.32) его сходимости, т. е. существование его суммы s .

Обозначим через S сумму двойного ряда модулей

$$\sum_{m, n} |u_{mn}|.$$

Очевидно, при любом m

$$\sum_{j=1}^n |u_{mj}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |u_{mj}| \leq S,$$

следовательно, любая строка двойного ряда модулей сходится. Это значит, что сходится абсолютно (а потому и сходится) любая строка исходного двойного ряда. Таким образом, существуют все суммы s_{i*} .

Далее,

$$\sum_{i=1}^m |s_{i*}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |s_{i*}| \leq S.$$

Значит, сходится абсолютно, а тем самым и сходится, ряд, составленный из сумм по строкам. Пусть его сумма равна s' .

Аналогично доказывается сходимость ряда по столбцам. Обозначим его сумму через s'' . Равенство (13.33) следует теперь из установленного существования сумм s , s' и s'' на основании критерия сходимости из § 3.

В качестве приложения установленных фактов мы можем сразу получить новое, достаточно простое доказательство теоремы об умножении абсолютно сходящихся рядов, потребовавшей в § 5 главы 4 довольно обстоятельных рассуждений.

Действительно, рассмотрим два абсолютно сходящихся ряда:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_m + \dots \quad (13.34)$$

и

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (13.35)$$

Пусть частичными суммами этих рядов будут s_m и t_n , а суммами — соответственно s и t . Положим

$$S_m = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_m|, \quad T_n = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|.$$

(m, n) -частичные суммы s_{mn} двойного функционального ряда (13.36), а также его сумма s суть функции от переменной x . При этом сумма ряда задана на области его сходимости.

Определение. Двойной функциональный ряд (13.36) называется *сходящимся в некоторой области изменения X переменной x равномерно*, если сходимость частичных сумм $s_{mn}(x)$ к сумме ряда $s(x)$ происходит равномерно по x , т. е. если по любому $\varepsilon > 0$ найдутся такие m_0 и n_0 , что при $m > m_0$ и $n > n_0$ для всех x из X

$$|s_{mn}(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

На двойные функциональные ряды распространяется признак равномерной сходимости Вейерштрасса.

Теорема. Если в двойном функциональном ряде

$$\sum_{m, n} u_{mn}(x)$$

каждый член является функцией, определенной на некотором замкнутом множестве X , и существует такой сходящийся числовой двойной ряд $\sum_{m, n} c_{mn}$ с положительными членами, что

$$|u_{mn}(x)| \leq c_{mn} \quad (13.37)$$

для любого x из X , то двойной функциональный ряд (13.37) сходится в множестве X равномерно.

Равномерно сходящиеся двойные ряды имеют непрерывные в области равномерной сходимости суммы; в пределах этой области сходимости их можно почленно интегрировать и дифференцировать. Эти утверждения можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося двойного ряда. Пусть все члены двойного функционального ряда

$$\sum u_{mn}(x) \quad (13.38)$$

определены в области X , непрерывны в ней, а сам ряд сходится в X равномерно. Тогда суммой ряда будет функция, непрерывная на X .

Теорема о почленном интегрировании двойных функциональных рядов. Если функциональный ряд (13.38) сходится равномерно на некото-

рой области X и имеет суммой функцию $s(x)$, а подмножество M области X таково, что все интегралы вида

$$\int_M u_{mn}(x) dx$$

существуют, то составленный из этих интегралов двойной ряд

$$\sum_{m, n \in M} \int u_{mn}(x) dx$$

также сходится и имеет суммой функцию

$$\int_M s(x) dx.$$

Теорема о почленном дифференцировании двойных функциональных рядов. Пусть двойной функциональный ряд (13.38) сходится в области X и имеет сумму $s(x)$. Пусть x есть векторная переменная, имеющая вид (x_1, \dots, x_n) , где x_1, \dots, x_n — обычные скалярные (т. е. принимающие вещественные значения) переменные, члены этого ряда имеют всюду в X непрерывные частные производные по некоторой компоненте векторной переменной x_i , а составленный из этих производных двойной функциональный ряд

$$\sum_{m, n} \frac{\partial}{\partial x_i} u_{mn}(x_1, \dots, x_n) \quad (13.39)$$

сходится в X равномерно и имеет сумму $\sigma(x)$. Тогда двойной ряд (13.38) сходится на X равномерно и частная производная по x_i его суммы равна сумме двойного ряда (13.39):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} s(x) = \sigma(x).$$

§ 7. Двойные степенные ряды

Пусть члены двойного ряда являются функциями от двух независимых переменных:

$$\sum_{m, n} u_{mn}(x, y). \quad (13.40)$$

Определение. Двойной функциональный ряд вида (13.40) называется *степенным*, если каждый его член u_{mn}

В частности, если сумма $s(x, y)$ ряда (13.42) существует, то она может быть получена как

$$s(x, y) = 1 + (x + y) + (x^2 + 2xy + y^2) + (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + \dots = \\ = 1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (x + y)^n. \quad (13.43)$$

Таким образом, необходимым условием абсолютной сходимости двойного ряда (13.42) является абсолютная сходимость простого ряда, стоящего в (13.43) справа. Но это условие состоит в том, что

$$|x + y| < 1, \quad (13.44)$$

а для суммы ряда мы имеем

$$s(x, y) = \frac{1}{1 - x - y}. \quad (13.45)$$

Далее, из абсолютной сходимости двойного ряда (13.42) должна следовать также сходимость двойного ряда

$$\sum_{m, n} (-1)^n u_{mn} = \\ = \sum_{m, n} C_{m+n}^m x^m (-y)^n,$$

для суммы которого имеет место соотношение

$$s(x, -y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x - y)^n,$$

так что условием существования этой суммы будет

$$|x - y| < 1. \quad (13.46)$$

Значит, (13.44) и (13.46) составляют необходимое условие абсолютной сходимости двойного ряда (13.42). При этом сумма его определяется из (13.45).

Предположим теперь, что выполняются неравенства (13.44) и (13.46), и покажем, что двойной ряд (13.42) сходится абсолютно. Составим для этого двойной ряд модулей членов двойного ряда (13.42). Для (m, n) -частичной суммы $s_{m, n}(x, y)$ этого нового двойного ряда мы имеем

$$s_{m, n}(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_{i+j}^i |x|^i |y|^j = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{\substack{i+j=k \\ i, j \geq 0}} C_k^i |x|^i |y|^j = \\ = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i=0}^k C_k^i |x|^i |y|^{k-i} = \sum_{k=0}^{m+n} (|x| + |y|)^k. \quad (13.47)$$

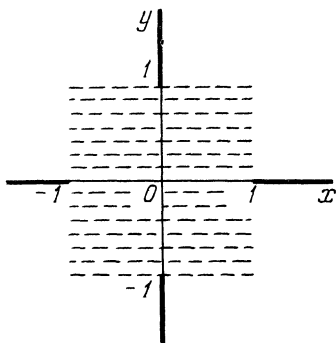


Рис. 17.

При

$$|x| + |y| < 1 \quad (13.48)$$

(а это условие, как легко видеть, равносильно паре неравенств (13.44) и (13.46)) стоящая справа в (13.47) прогрессия сходится, так что

$$s_{m,n}(x, y) < \frac{1}{1 - |x| - |y|}.$$

Мы видим, что в условиях (13.48) все частичные суммы двойного ряда модулей ограничены в совокупности. Следовательно, этот двойной ряд сходится, а исходный двойной ряд (13.42) сходится тем самым абсолютно.

Таким образом, область абсолютной сходимости двойного ряда (13.42) представляет собой внутренность квадрата с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ (рис. 18).

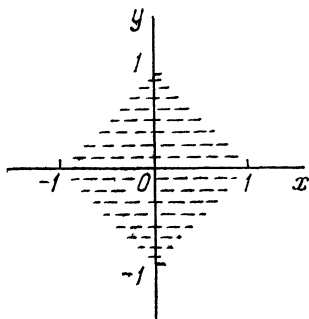


Рис. 18.

Из последней теоремы следует, что область сходимости ряда может отличаться от области его абсолютной сходимости разве лишь некоторыми точками границы этой области (ср. рассуждения по поводу ряда (6.7) в § 3

главы 6). Мы не будем здесь подробно останавливаться на анализе этого вопроса, предоставляя его читателю.

§ 8. Разложение функций двух переменных в двойные ряды Тейлора и Маклорена

Для полноты изложения выведем формулу Тейлора для функций двух независимых переменных.

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ имеет в некоторой области изменения переменных x и y (для определенности мы можем представлять себе эту область в виде некоторого прямоугольника) непрерывные смешанные производные вида

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}, \quad k + l \leq n + 1,$$

а точка (y_0, y_0) находится внутри этой области.

Тогда для любой точки (x, y) из этой области имеет формула Тейлора

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{x-x_0}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{y-y_0}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} + \\ & + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{1! 1!} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \\ & + \frac{(y-y_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^n} + \dots \\ & \dots + \frac{(x-x_0)^{n-k}(y-y_0)^k}{(n-k)! k!} \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} + \dots \\ & \dots + \frac{(y-y_0)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial y^n} + R_n(x, y), \quad (13.49) \end{aligned}$$

где остаточный член $R_n(x, y)$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} R_n(x, y) = & \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, \eta)}{\partial x^{n+1}} + \dots \\ & \dots + \frac{(x-x_0)^{n+1-k}(y-y_0)^k}{(n+1-k)! k!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, \eta)}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} + \dots \\ & \dots + \frac{(y-y_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, \eta)}{\partial y^{n+1}}, \end{aligned}$$

причем ξ имеет вид $x_0 + \theta(x-x_0)$, а η — вид $y_0 + \theta(y-y_0)$, где $0 < \theta < 1$.

Доказательство. Положим

$$x - x_0 = h, \quad y - y_0 = g \quad (13.50)$$

и рассмотрим при фиксированных h и g функцию

$$\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tg). \quad (13.51)$$

Она является функцией от одной независимой переменной t . При этом переменная φ зависит от t сложным образом, через посредство линейных функций $x_0 + th$ и $y_0 + tg$, а также функции от двух переменных f . По условию функция f дифференцируема по своим аргументам до $n+1$ раза включительно. Первые производные линейных функций постоянны (в нашем случае они равны соответственно h и g), а все последующие производные тождественно обращаются в нуль. Поэтому теоремы о дифференцировании сложной функции показывают, что функция φ имеет непрерывные производные по t до $(n+1)$ -й включительно и для

любого $t \in [0, 1]$ имеет место формула Тейлора

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!} \varphi'(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(\theta t), \quad (13.52)$$

где $0 < \theta < 1$.

Правила дифференцирования сложной функции (13.51) дают нам

$$\varphi' = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} g,$$

$$\varphi'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hg + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} g^2,$$

.....

$$\varphi^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} h^n + \dots + C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} h^{n-k} g^k + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} g^n,$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)} = & \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} h^{n+1} + \dots + C_{n+1}^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} h^{n+1-k} g^k + \dots \\ & \dots + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}} g^{n+1}, \end{aligned}$$

где все значения f и ее производных, приведенные в формуле без указания аргумента, берутся в точке (x, y) . (Выражения для первых производных функции φ получаются непосредственно; выражение для производной произвольного порядка можно получить, рассуждая по индукции.) Подставляя эти выражения для производных в (13.52) и учитывая (13.50) и (13.51), мы непосредственно получаем (13.49).

Если функция от двух переменных $f(x, y)$ имеет в некоторой области изменения x и y непрерывные смешанные производные всех порядков, то можно написать формулу Тейлора (13.49) для любого значения n . Запишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{h^n}{n!} + \\ & + \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hg + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \frac{h^2 g}{2! 1!} + \dots \\ & \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{g^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \frac{h g^2}{1! 2!} + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \frac{g^n}{n!} + R_n(x, y). \quad (13.53) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь двойной ряд

$$\sum_{m,n} \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} x^m y^n, \quad (13.54)$$

где $m, n = 0, 1, 2, \dots$ и условно положено

$$f = \frac{\partial^0 f}{\partial x^0 \partial y^0}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k} = \frac{\partial^k f}{\partial x^k \partial y^0}, \quad \frac{\partial^l f}{\partial y^l} = \frac{\partial^l f}{\partial x^0 \partial y^l}.$$

Если в (13.53)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, y) = 0,$$

то двойной ряд (13.54) сходится и его суммой будет функция $f(x, y)$.

Определение. Представление функции от двух переменных в виде двойного ряда

$$\sum_{m,n} a_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n$$

называется *разложением этой функции в двойной ряд Тейлора*.

В частности, при $x_0 = y_0 = 0$ разложение в двойной ряд Тейлора называется *разложением в двойной ряд Маклорена*:

$$\sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n.$$

Как и в случае простых рядов, если разложение функции в двойной ряд Тейлора возможно, то это разложение является единственным.

Теорема 2. Пусть двойной ряд

$$\sum_{m,n} c_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n \quad (13.55)$$

сходится в некоторой области к функции $f(x, y)$. Тогда этот ряд является двойным рядом Тейлора функции $f(x, y)$, т. е.

$$c_{mn} = \frac{1}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \quad (13.56)$$

Для доказательства достаточно продифференцировать почленно частным образом ряд (13.55) m раз по x и

n раз по y . Мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = \\ = c_{mn} m! n! + \sum_{\substack{k \geq m \\ l \geq n}} c_{kl} k(k-1) \dots (k-m+1) l(l-1) \dots \\ \dots (l-n+1) (x-x_0)^{k-m} (y-y_0)^{l-n}. \end{aligned}$$

Положив в этом тождестве $x=x_0$ и $y=y_0$, мы получим (13.56).

Пример. Мы можем рассматривать e^{xy} как функцию от одной переменной $v=xy$. Разложение ее в ряд Маклорена по этой переменной дает нам

$$e^{xy} = 1 + \frac{xy}{1!} + \frac{x^2 y^2}{2!} + \dots \quad (13.57)$$

Представим правую часть этого равенства в виде двойного ряда:

$$e^{xy} = \sum_{m,n} c_{mn} x^m y^n,$$

где, очевидно,

$$c_{mn} = \begin{cases} 1/n! & \text{при } m=n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (13.58)$$

В силу единственности разложения функций в двойной ряд Тейлора должно быть

$$c_{mn} = \frac{1}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} e^{xy}}{\partial x^m \partial y^n} \bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}}. \quad (13.59)$$

В том, что это действительно так, можно убедиться, выполняя непосредственно дифференцирование (для определенности мы полагаем $m \geq n$):

$$\frac{\partial^m e^{xy}}{\partial x^m} = y^m e^{xy},$$

и далее, на основании формулы Лейбница для производных высших порядков от произведения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n y^m e^{xy}}{\partial y^n} = \frac{m!}{(m-n)!} y^{m-n} e^{xy} + C_n^1 \frac{m!}{(m-n+1)!} y^{m-n+1} x e^{xy} + \dots \\ \dots + C_n^k \frac{m!}{(m-n+k)!} x^k e^{xy} + \dots + y^m x^n e^{xy}. \end{aligned}$$

При $y=0$ это выражение равно своему первому члену. Если при этом $m > n$, то оно обращается в нуль, а если $m=n$, то оно равно $m!$, и (13.59) дает нам сразу (13.58).

§ 9. Ортогональные и ортонормальные системы функций от двух переменных

В главе 8 рассматривались ортогональные и ортонормальные на сегменте функции от одной независимой переменной, причем сами системы функций понимались как последовательности.

Введем теперь аналогичные понятия для систем функций от двух независимых переменных. Будем рассматривать функции на прямоугольнике с вершинами (a, c) , (a, d) , (b, c) и (b, d) (рис. 19), который далее будет обозначаться как $[a, b] \times [c, d]$.

Определение. *Нормой* функции φ на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ называется квадратный корень из интеграла

$$\int_a^b \int_c^d \varphi^2(x, y) dx dy.$$

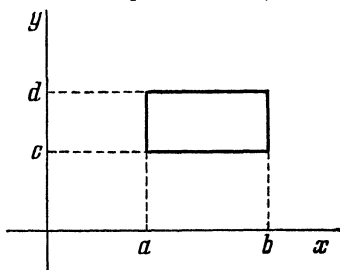


Рис. 19.

Функция, норма которой равна единице, называется *нормированной*.

Функции φ_1 и φ_2 называются *ортогональными* на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, если

$$\int_a^b \int_c^d \varphi_1(x, y) \varphi_2(x, y) dx dy = 0.$$

Система функций называется *ортогональной* на прямоугольнике, если любые две функции из нее ортогональны на нем.

Система функций называется *нормированной*, если нормирована каждая функция.

Система функций называется *ортонормальной*, если она является ортогональной и нормированной.

Естественная схема построения ортонормальных систем функций от двух переменных на прямоугольниках возникает из следующей теоремы.

Теорема. Пусть

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \quad (13.60)$$

$$\psi_0(y), \psi_1(y), \psi_2(y), \dots \quad (13.61)$$

— ортонормальные системы функций соответственно от переменной x на сегменте $[a, b]$ и от переменной y на сегменте $[c, d]$.

Тогда система функций от двух переменных, состоящая из произведений $\varphi_m(x)\psi_n(y)$ каждой из функций (13.60) на каждую из функций (13.61), есть ортонормальная система функций на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$.

Доказательство. Мы имеем для любых $m=0, 1, 2, \dots$ и $n=0, 1, 2, \dots$ ввиду нормированности каждой из систем (13.60) и (13.61)

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d (\varphi_m(x) \psi_n(y))^2 dx dy &= \int_a^b \varphi_m^2(x) dx \int_c^d \psi_n^2(y) dy = \\ &= \int_a^b \varphi_m^2(x) dx \int_c^d \psi_n^2(y) dy = 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d (\varphi_m(x) \psi_n(y)) (\varphi_k(x) \psi_l(y)) dx dy &= \\ &= \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_k(x) dx \int_c^d \psi_n(y) \psi_l(y) dy. \end{aligned} \quad (13.62)$$

Если $m \neq k$ или же $n \neq l$, то хотя бы один из интегралов, стоящих справа в (13.62), обращается ввиду ортогональности систем (13.60) и (13.61) в нуль. Это значит, что различные (т. е. отличающиеся хотя бы одним сомножителем) произведения функции из (13.60) на функцию из (13.61) ортогональны между собой.

Ортонормальность рассматриваемой системы функций двух переменных установлена.

Пример. Возьмем в качестве системы (13.60) ортонормальную на $[-\pi, \pi]$ систему тригонометрических функций от переменной x (см. § 5 главы 8 или § 1 главы 9):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx, \quad \dots,$$

а в качестве системы (13.61) — такую же систему функций от переменной y :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos y, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin y, \quad \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos ny, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin ny, \quad \dots$$

Тогда по доказанному система функций, которую можно расположить в виде неограниченной прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{2}\pi}, & \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cos x, & \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sin x, & \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cos 2x, \dots \\ \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cos y, & \frac{1}{\pi}\cos x\cos y, & \frac{1}{\pi}\sin x\cos y, & \frac{1}{\pi}\cos 2x\cos y, \dots \\ \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sin y, & \frac{1}{\pi}\cos x\sin y, & \frac{1}{\pi}\sin x\sin y, & \frac{1}{\pi}\cos 2x\sin y, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (13.63)$$

является ортонормальной системой на прямоугольнике $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Она называется *ортонормальной системой тригонометрических функций от двух переменных*.

§ 10. Двойные ряды Фурье

Рассмотрим теперь расположенную в виде неограниченной прямоугольной таблицы ортогональную на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ систему функций:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{00}(x, y), & \varphi_{01}(x, y), & \varphi_{02}(x, y), & \dots \\ \varphi_{10}(x, y), & \varphi_{11}(x, y), & \varphi_{12}(x, y), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m0}(x, y), & \varphi_{m1}(x, y), & \varphi_{m2}(x, y), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (13.64)$$

Пусть нам дана функция $f(x, y)$. Найдем все интегралы

$$\int_a^b \int_c^d \varphi_{mn}(x, y) f(x, y) dx dy = c_{mn} \quad (13.65)$$

и составим двойной ряд

$$\sum_{m, n} c_{mn} \varphi_{mn}(x, y). \quad (13.66)$$

Определение. Двойной ряд (13.66) называется *двойным* (или, иначе, *кратным*) *рядом Фурье* функции f по системе функций (13.64). Коэффициенты этого ряда, вычисляемые по формуле (13.65), называются *коэффициентами Фурье* функции f по системе (13.64).

В качестве ортонормальной системы (13.64) при разложении функций в двойной ряд Фурье можно брать различные системы функций. В частности, можно взять и ортонормальную систему тригонометрических функций

(13.63). Получаемый при этом двойной ряд Фурье называется *тригонометрическим двойным рядом Фурье*. Далее мы будем говорить только о таких двойных рядах Фурье и эпитет «тригонометрический» будем опускать.

Вопрос о сходимости двойного ряда Фурье функции f к этой функции является довольно сложным. Его решение напоминает решение вопроса о сходимости простого ряда Фурье. Мы ограничимся указанием на некоторые достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке (x, y) к значению функции f в этой точке:

1) Всюду существуют и ограничены первые частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2) В некоторой окрестности точки (x, y) существует вторая смешанная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (или $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$), непрерывная в этой точке.

Многие формальные свойства простых рядов Фурье сохраняются при соответствующих переформулировках и для двойных рядов Фурье.

Так, можно «сдвигать» прямоугольник разложения функции вдоль осей координат, а также изменять длины его сторон.

Если разлагаемая функция f оказывается четной по x при любом значении переменной y , то в ее двойном ряде Фурье коэффициенты при функциях

$\sin mx, \sin mx \cos ny, \sin mx \sin ny, m, n = 0, 1, 2, \dots$, обращаются в нуль.

Сходные утверждения имеют место при нечетности функции f по переменной x при любом значении y , а также при ее четности или нечетности по y при любом значении x .

СУММИРОВАНИЕ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

§ 1. Постановка вопроса

Выяснение сходимости того или иного ряда имеет для использования в теоретических и прикладных вопросах принципиальное значение: только сходящийся ряд мы можем понимать как «бесконечную сумму», а именно как предел последовательности его частичных сумм. Более того, в некоторых вопросах значение суммы ряда по сравнению с фактом его сходимости вообще не играет роли. Например, чтобы пользоваться некоторыми приемами для вычисления суммы знакопеременного ряда, важно быть уверенным в его абсолютной сходимости, т. е. в сходимости ряда модулей его членов (см. §§ 2 и 3 главы 4), однако значение суммы этого последнего ряда в этих рассуждениях никакого интереса не представляет. Аналогично в § 10 главы 5 в качестве условия почленной дифференцируемости функционального ряда в некоторой точке приводилась равномерная сходимость ряда производных его членов в какой-либо замкнутой окрестности этой точки, но значения суммы ряда производных в остальных точках окрестности были несущественными. Можно привести и другие примеры такого рода. Наконец, специфика данного курса часто требовала от нас заострять внимание именно на фактах сходимости рядов, а не на значениях их сумм.

Однако имеются вопросы (например, как в §§ 8 и 10 главы 7, связанные с вычислениями значений функций или констант), в которых важна не констатация сходимости ряда, а именно вычисление его суммы. В приложениях (например, технического характера) доля этих вопросов даже преобладает. Кроме того, если уж мы доказали наше право обращаться с суммой ряда, как с числом, то естественно, возникает вопрос и о величине этого числа.

Здесь следует предостеречь читателя от представления, согласно которому изображение числа в виде сходящегося ряда является как бы «неявным» и потому в каком-то смысле незавершенным и нуждающимся в преобразовании к более законченному виду. Но в каком смысле выражение $\pi^2/6$ следует предпочесть равной ему (как было установлено в § 11 главы 9) сумме ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (14.1)$$

или значение $\ln 2$ — сумме ряда

$$2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots + \frac{1}{(2n+1) 3^{2n+1}} + \dots\right) \quad (14.2)$$

(см. § 11 главы 7)?

Очевидно, в пользу таких «замкнутых» выражений, как $\pi^2/6$ или $\ln 2$, говорит доступность их приближенных значений. Большинство людей из числа получивших хоть какое-то образование, знает о числе π хотя бы то, что оно «несколько больше трех». Для таких лиц описанная числом $\pi^2/6$ сумма ряда (14.1) будет представлять собой количество, «немного большее чем полтора». Вместе с тем при ее описании суммой ряда (14.1) величина числа $\pi^2/6$ не поддается столь непосредственной численной оценке, а требует еще некоторых подсчетов. Приближенное численное значение $\ln 2$, может быть, не столь памятно многим, но его можно почерпнуть из достаточно распространенных таблиц. Этого, однако, нельзя сказать о значении суммы ряда (14.2). Поэтому факт равенства этой суммы числу $\ln 2$ может оказаться вполне содержательной информацией.

Таким образом, замена сумм рядов (14.1) и (14.2) соответственно числами $\pi^2/6$ или $\ln 2$ позволяет, прежде всего, дать количественную оценку этим суммам.

Вместе с тем, если для каких-либо расчетов оказывается нужным значение $\pi^2/6$ или $\ln 2$ более точное, чем имеющееся в реально доступных источниках, то его представление в виде суммы соответствующего ряда и вычисление как частичной суммы с достаточно большим числом членов позволит его получить с требуемой точностью. В этом смысле задание числа в виде ряда может оказаться «более явным».

Нелишним будет здесь заметить, что практикуемая достаточно часто запись вещественных чисел в виде деся-

тичных дробей, по существу, также является представлением вещественного числа некоторым рядом, а именно рядом

$$a_{-N}10^N + \dots + a_{-1}10 + a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots,$$

где N — некоторое натуральное число, а $a_{-N}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$ суть целые числа из $0, 1, 2, \dots, 9$. Всякое приближенное значение вещественного числа, записанного десятичной дробью с конечным числом знаков, является (если отвлечься от правил округления) просто частичной суммой этого ряда. Говорить, что именно такое десятичное представление числа является «самым явным» и «окончательным», едва ли правомерно. Лучше сказать, что часто оно оказывается наиболее наглядным. Часто, но не всегда. В связи с регулярным обращением к ЭВМ наглядными становятся и иные представления чисел. Если же, скажем, в результате физического эксперимента значение некоторой константы оказалось равным 1,64, то экспериментатор дорого бы дал, чтобы иметь право объявить его равным $\pi^2/6$.

Из сказанного вытекает, что суммирование ряда и представление числа в виде суммы ряда следует рассматривать как две стороны одного процесса: сопоставления различных форм представления одного и того же числа. При этом целью такого сопоставления в зависимости от ситуации может быть как разложение заданного числа в ряд, так и суммирование заданного ряда.

Существенную при этом роль играет следующее обстоятельство. Одно и то же число может быть представлено в виде сумм рядов, весьма сильно отличающихся друг от друга по внешнему виду. Чтобы не выходить из круга уже приводившихся примеров, укажем на ряды из формул (7.21) и (7.22), описывающие $\pi/4$, или на ряды из формул (7.32) и (7.34), описывающие $\ln 2$. Ясно, что вторые из этих рядов значительно удобнее для проведения вычислений, чем первые: при их использовании для достижения нужной точности можно ограничиться учетом значительно меньшего числа членов.

Поэтому нахождение сумм сходящихся рядов часто оказывается удобным расчленять на два этапа. Во-первых, данный ряд следует преобразовать в другой, вспомога-

тельный ряд, сумма которого известна или поддается эффективному вычислению. Во-вторых, — по сумме вспомогательного ряда найти сумму исходного ряда.

Далее мы приведем несколько таких преобразований.

§ 2. Линейные преобразования рядов

В примере из § 8 главы 2 (стр. 41) описывается способ нахождения суммы ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

путем представления каждого его члена в виде разности

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Этот прием может быть применен и в других случаях.

Примеры.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}(\sqrt{1} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \dots = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots = 1. \end{aligned}$$

Следующая теорема может рассматриваться как обобщение этого приема:

Теорема 1. Пусть для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (14.3)$$

найдется такая сходящаяся последовательность $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ с пределом T , что для некоторого целого положительного q и для всех $n=1, 2, \dots$ выполняется $u_n = t_n - t_{n+q}$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = t_1 + t_2 + \dots + t_q - qT. \quad (14.4)$$

Доказательство. Обозначая через s_n n -ю частичную сумму ряда (14.3), для любого $n > q$ мы имеем

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k+q}) = \sum_{k=1}^n t_k - \sum_{k=1}^n t_{k+q} = \\ &= t_1 + t_2 + \dots + t_q + t_{q+1} + \dots + t_n - \\ &\quad - t_{q+1} - \dots - t_n - t_{n+1} - \dots - t_{n+q} = \\ &= t_1 + t_2 + \dots + t_q - (t_{n+1} + \dots + t_{n+q}). \end{aligned}$$

При неограниченном возрастании n каждая из переменных t_{n+k} по условию стремится к T , и мы получаем (14.4).

Примеры.

1. Возьмем произвольное целое положительное q . Тогда для любого α , не являющегося целым неположительным числом,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+q)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+n+q} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q(\alpha+n)} - \frac{1}{q(\alpha+n+q)} \right). \end{aligned}$$

Положим $\frac{1}{q(\alpha+n)} = t_n$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, и применение доказанной теоремы дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+q)} = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \dots + \frac{1}{\alpha+q} \right).$$

В частности, полагая $\alpha = 1/2$ и $q = 2$, мы после почленного умножения ряда на $(1/2)^2$ получаем

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \dots = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{19}{120}.$$

2. Для ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \right) \end{aligned}$$

мы можем принять

$$t_n = \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha + n)(\alpha + n + 1)}$$

(очевидно, здесь при увеличении n переменная t_n стремится к нулю) и $q = 1$ и получить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + n)(\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2)} = \frac{1}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)}.$$

Если $\alpha = 1/3$, то после умножения ряда на $(1/3)^3$ мы получаем

$$\frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10 \cdot 13} + \dots = \frac{1}{54 \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 2\right)} = \frac{1}{168}.$$

Дальнейшее обобщение доказанной теоремы состоит в следующем:

Теорема 2. Пусть для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (14.5)$$

найдутся такая сходящаяся последовательность $t_1, t_2, \dots, \dots, t_n, \dots$ с пределом T и такие вещественные числа c_1, c_2, \dots, c_q , что

$$c_1 + c_2 + \dots + c_q = 0,$$

и при всяком $n = 1, 2, \dots$

$$u_n = c_1 t_n + \dots + c_q t_{n+q}. \quad (14.6)$$

Тогда ряд (14.5) сходится и

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= c_1 t_1 + (c_1 + c_2) t_2 + \dots + (c_1 + c_2 + \dots + c_{q-1}) t_{q-1} + \\ &+ (c_2 + 2c_3 + \dots + (q-1)c_q) T. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Доказательство. Выразим все члены данного ряда (14.5) в виде (14.6) и так выпишем эти выражения одно под другим, чтобы слагаемые, содержащие t с одинаковыми индексами, располагались по одной вертикали: для экономии места мы выполним эту запись в форме таблицы 1 (числа, стоящие в заголовках столбцов, умножаются на все числа, стоящие в соответствующем столбце, и все такие произведения суммируются).

Суммы чисел в каждом из столбцов, лежащих между сплошными вертикальными линиями, равны нулю, а с возрастанием n все числа $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+q-1}, t_{n+q}$ стремятся

Т а б л и ц а 1

t_1	t_2	t_3	...	t_{q-1}	t_q	t_n	t_{n+1}	...	t_{n+q-1}	t_{n+q}	...
c_1	c_2	c_3	...	c_{q-1}	c_q	.							
	c_1	c_2	...	c_{q-2}	c_{q-1}		.						
		c_1	...	c_{q-3}	c_{q-2}	.		.					
		c_q				
						.		.	c_{q-1}	c_q			
				c_1	c_2			.	c_{q-2}	c_{q-1}			
					c_1			
						.	.	.					
							.	.	c_2	c_3	...	c_q	
								.	c_1	c_2	...	c_{q-1}	c_q
									

к общему пределу T . Отсюда и следует (14.7). Особенно удобно пользоваться этой теоремой, когда $T=0$.

П р и м е р ы.

1. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{4}{\sqrt{n+2}} \right)$ мы имеем

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0, \quad q=3, \quad c_1=1, \quad c_2=3, \quad c_3=-4.$$

Поэтому его сумма равна

$$c_1 t_1 + (c_1 + c_2) t_2 + (c_2 + 2c_3) T = 1 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2}.$$

2. Для ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right)$$

будет

$$t_n = \frac{1}{\ln n}, \quad T=0, \quad q=3, \quad c_1=1, \quad c_2=-2, \quad c_3=1,$$

так что сумма этого ряда оказывается равной

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2 \ln 3}.$$

3. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{\pi}{n} + 2(n+1) \sin \frac{\pi}{n+1} + (n+2) \sin \frac{\pi}{n+2} \right)$$

равна $\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = -1$.

4. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{\pi}{n} + (n+1) \sin \frac{\pi}{n+1} + (n+2) \sin \frac{\pi}{n+2} - 3(n+3) \sin \frac{\pi}{n+3} \right)$$

равна

$$\begin{aligned} \sin \pi + 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{3} + (1+2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \\ = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{3} - 6\pi = 2 + \sqrt{3} - 6\pi. \end{aligned}$$

§ 3. Теорема Абеля и почленное дифференцирование и интегрирование рядов

Знание суммы равномерно сходящегося в некотором промежутке функционального ряда позволяет, переходя к производным или к первообразным его членов, находить суммы других рядов. Этим приемом мы несколько раз пользовались в главах 1 и 7. К сожалению, мы не всегда можем воспользоваться им при вычислении сумм функциональных рядов на границе области их сходимости. Следующие рассуждения открывают в этом направлении достаточно широкие перспективы.

Приведем сначала для полноты изложения модификации принципа сходимости Коши и критерия Коши сходимости рядов (см. §§ 4 и 5 главы 2) для случая равномерной сходимости.

Теорема (принцип сходимости). *Если*

$$s_1(x), s_2(x), \dots$$

— некоторая последовательность функций, то для того, чтобы она равномерно в области D сходилась к предельной функции $s_0(x)$, необходимо и достаточно, чтобы по каждому $\varepsilon > 0$ нашлось такое n , что для любого $m \geq 0$ и для всех $x \in D$ имело бы место

$$|s_{n+m}(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий сходимости). *Для того чтобы функциональный ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

сходилась равномерно в некоторой области D , необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных

сумм $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... обладала следующим свойством: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое n , что при любом $m \geq 0$ для всех $x \in D$ имеет место

$$|s_{n+m}(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательства этих теорем отличаются от доказательств соответствующих утверждений о сходимости числовых последовательностей и рядов лишь тем, что вместо чисел s_k рассматриваются функции $s_k(x)$, а каждый словесный оборот «найдется такое n , что...» заменяется оборотом «найдется такое n , что для всех $x \in D$ и ...»

Установим теперь следующий более конкретный факт.

Теорема. Если вещественный ряд

$$a_0 + a_1 R + \dots + a_n R^n + \dots \quad (14.8)$$

сходится, то степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (14.9)$$

сходится равномерно на сегменте $[0, R]$.

Доказательство. Сходимость ряда (14.8) согласно критерию Коши означает, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое n , что для всех $m \geq 0$ выполняется неравенство

$$|a_n R^n + \dots + a_{n+m} R^{n+m}| < \varepsilon.$$

Кроме того, при любом $x \in [0, R]$

$$(x/R)^n \geq (x/R)^{n+1} \geq \dots$$

Таким образом, мы оказываемся в условиях леммы из § 5 главы 12, оценивающей в данном случае частичные суммы ряда

$$a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n + a_{n+1} R^{n+1} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + \dots \\ \dots + a_{n+m} R^{n+m} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+m} + \dots,$$

т. е. ряда

$$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+m} x^{n+m} + \dots$$

Эта лемма дает нам

$$|a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+m} x^{n+m}| \leq \\ \leq \varepsilon \left(|a_n| \left(\frac{x}{R}\right)^n + 2 |a_{n+m}| \left(\frac{x}{R}\right)^{n+m} \right) \leq \varepsilon (|a_n| + 2 |a_{n+m}|).$$

Поскольку эта оценка является равномерной по x , сформулированный выше критерий сходимости Коши утверждает требуемую равномерную сходимость ряда (14.9) на сегменте $[0, R]$.

Теорема Абеля¹⁾. Если вещественный степенной ряд

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (14.10)$$

имеет радиус сходимости R , причем сходится (не обязательно абсолютно) и при $x=R$, то сходимость будет равномерной на всем сегменте $[0, R]$, а сумма ряда — непрерывной слева в точке $x=R$ функцией, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nR^n. \quad (14.11)$$

Симметричное утверждение имеет место в случае сходимости ряда (14.10) при $x=-R$.

Доказательство. По предыдущей теореме ряд (14.10) сходится на сегменте $[0, R]$ равномерно. Тогда в соответствии с теоремой § 8 главы 5 (или с теоремой 2 § 5 главы 6) его сумма является непрерывной функцией от x на всем сегменте $[0, R]$ и, в частности, имеет место (14.11).

Примеры.

1. В § 8 главы 7 нами было установлено (формула (7.20)), что при $0 < x < 1$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Стоящий здесь справа ряд при $x=1$ сходится (на основании признака сходимости Лейбница). Поэтому согласно доказанной теореме (и, разумеется, ввиду непрерывности арктангенса) действительно

$$\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

2. В § 11 главы 7 было для $0 < x < 1$ получено разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Так как написанный ряд сходится и при $x=1$, по теореме Абеля (и на основании непрерывности логарифма) мы имеем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

¹⁾ В отличие от теоремы Абеля из § 2 главы 6 ее иногда называют второй теоремой Абеля.

3. Напишем разложение $\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots$, справедливое для $|x| < 1$. Интегрируя его почленно от 0 до некоторого $x < 1$, мы получим

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \dots \quad (14.12)$$

Стоящий справа ряд сходится и при $x=1$, а стоящий слева интеграл является непрерывной функцией своего верхнего предела. Это дает нам возможность вычислить сумму ряда $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots$

Разложение подынтегральной функции из (14.12) на простейшие дроби дает нам

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x}{x^2-x+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-x+1},$$

или, после преобразования последнего слагаемого,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1},$$

откуда, наконец,

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

и, полагая $x=1$, получаем $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

§ 4. Последовательности разностей

Определение. *Последовательностью разностей* (точнее, *первых разностей*) для последовательности

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (14.13)$$

называется последовательность

$$\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n, \quad (14.14)$$

где

$$\Delta u_n = u_n - u_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (14.15)$$

Последовательностью (первых) разностей для последовательности (14.14) является

$$\Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \dots, \Delta^2 u_n, \dots,$$

где

$$\Delta^2 u_n = \Delta (\Delta u_n) = \Delta (u_n - u_{n+1}) = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}.$$

Она называется последовательностью *вторых* разностей для исходной последовательности (14.13).

Аналогично определяются последовательности *третьих*, *четвертых* и т. д. разностей. Вообще, если для последовательности (14.13) определена последовательность k -х разностей

$$\Delta^k u_0, \Delta^k u_1, \Delta^k u_2, \dots, \Delta^k u_n,$$

то последовательностью $(k+1)$ -х разностей для нее называется последовательность

$$\Delta^{k+1} u_0, \Delta^{k+1} u_1, \dots, \Delta^{k+1} u_n,$$

где

$$\Delta^{k+1} u_n = \Delta (\Delta^k u_n - \Delta^k u_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Иногда для единообразия сама последовательность называется последовательностью своих *нулевых* разностей, и это отражается в обозначении:

$$\Delta^0 u_n = u_n.$$

Члены различных последовательностей разностей данной последовательности (14.13) удобно располагать в следующем «треугольном» виде:

$$\begin{array}{ccccccc} u_0, & u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & \dots \\ \Delta u_0, & \Delta u_1, & \Delta u_2, & \Delta u_3, & \dots \\ \Delta^2 u_0, & \Delta^2 u_1, & \Delta^2 u_2, & \dots \\ \Delta^3 u_0, & \Delta^3 u_1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (14.16)$$

Согласно определению разностей их можно определять последовательно одну за другой. Вместе с тем можно вычислять сразу сколь угодно высокие разности и непосредственно.

Лемма. Для любых n и k

$$\Delta^k u_n = u_n - C_k^1 u_{n+1} + C_k^2 u_{n+2} - \dots + (-1)^k u_{n+k}. \quad (14.17)$$

Доказательство ведется индукцией по k .

При $k=1$ формула (14.17) приобретает вид

$$\Delta^1 u_n = u_n - u_{n+1},$$

что верно на основании определения.

Предположим теперь, что формула (14.17) справедлива при данном k и любых значениях n . Заменив в ней n на $n+1$, мы получаем

$$\Delta^k u_{n+1} = u_{n+1} - C_k^1 u_{n+2} + C_k^2 u_{n+3} - \dots + (-1)^k u_{n+k+1}. \quad (14.18)$$

Вычитая из формулы (14.17) формулу (14.18) почленно и объединяя справа слагаемые с одинаковыми номерами членов u , мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta^k u_n - \Delta^k u_{n+1} &= \\ &= u_n - (1 + C_k^1) u_{n+1} + (C_k^1 + C_k^2) u_{n+2} - \dots + \\ &+ (-1)^{l+1} (C_k^l + C_k^{l+1}) + \dots + (-1)^{k+1} u_{n+1+k}. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Ввиду того, что

$$C_k^l + C_k^{l+1} = C_{k+1}^{l+1} \quad \text{для } l=0, 1, \dots, k,$$

а по определению

$$\Delta^k u_n - \Delta^k u_{n+1} = \Delta^{k+1} u_n,$$

формулу (14.19) можно переписать как

$$\Delta^{k+1} u_n = u_n - C_{k+1}^1 u_{n+1} + C_{k+1}^2 u_{n+2} - \dots + (-1)^{k+1} u_{n+k+1},$$

а это и требовалось.

Следствие. Полагая в формуле (14.17) $n=0$, мы для любого k имеем

$$\Delta^k u_0 = u_0 - C_k^1 u_1 + C_k^2 u_2 - \dots + (-1)^k u_k. \quad (14.20)$$

§ 5. Преобразование рядов по Эйлеру

Определение. Преобразованием Эйлера называется переход от ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n \quad (14.21)$$

к ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}. \quad (14.22)$$

Заметим, что форма записи ряда (14.21) не предполагает, что этот ряд знакопередающийся, и употребляется единственно ради удобства.

Лемма. Если ряд (14.22) сходится, то при любом $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta^k u_n}{2^k} = 0. \quad (14.23)$$

Доказательство. Оценим выражение, стоящее под знаком предела. Согласно лемме из предыдущего параграфа мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta^k u_n}{2^k} \right| &= \left| \frac{u_n - C_k^1 u_{n+1} + C_k^2 u_{n+2} - \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} u_{n+k-1} + (-1)^k u_{n+k}}{2^k} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^k} |u_n| + \frac{C_k^1}{2^k} |u_{n+1}| + \frac{C_k^2}{2^k} |u_{n+2}| + \dots \\ &\quad \dots + \frac{C_k^{k-1}}{2^k} |u_{n+k-1}| + \frac{1}{2^k} |u_{n+k}|. \end{aligned}$$

Заметим, что сумма всех коэффициентов при модулях здесь равна единице, так что сумма любого набора этих коэффициентов не превосходит единицы.

Для любых k и $r < k$ мы можем написать

$$\left| \frac{\Delta^k u_n}{2^k} \right| \leq \sum_{l=0}^r \frac{C_k^l}{2^k} |u_{n+l}| + \sum_{l=r+1}^k \frac{C_k^l}{2^k} |u_{n+l}|. \quad (14.24)$$

Выберем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем в соответствии со сходимостью ряда (14.21) такое r , что $|u_{n+l}| < \varepsilon$ для всех $l > r$. В силу сделанного замечания о коэффициентах второе слагаемое в (14.24) справа меньше, чем ε .

Обратимся к первому слагаемому. На основании сходимости ряда (14.21) модули его членов должны быть ограниченными. Пусть $|u_n| < U$. Далее, при любом $l = 0, 1, \dots, r$ мы имеем

$$C_k^l = \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!} \leq k^l < k^r.$$

Значит,

$$\sum_{l=0}^r \frac{C_k^l}{2^k} |u_{n+l}| \leq U \frac{r k^r}{2^k}.$$

Наконец,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^r}{2^k} = 0$$

(в чем легко убедиться, применяя r раз правило Лопиталю с дифференцированием по k), и поэтому можно найти такое k , начиная с которого

$$\sum_{l=0}^r \frac{C_k^l}{2^k} |u_{n+l}| < \varepsilon.$$

Таким образом, правая часть (14.24) с ростом k становится меньшей, чем 2ε , и произвольность $\varepsilon > 0$ доказывает наше утверждение.

Теорема. Если ряд (14.21) сходится, то полученный в результате его преобразования по Эйлеру ряд (14.22) также сходится, и суммы их равны:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}. \quad (14.25)$$

Доказательство. Составим по ряду (14.21) двойной ряд

$$\sum_{n,k} a_{nk} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\Delta^k u_n}{2^k} - \frac{\Delta^{k+1} u_n}{2^{k+1}} \right) \quad (14.26)$$

и, имея в виду применить к нему теорему Маркова (см. § 3 главы 13), проверим соблюдение ее условий.

Рассмотрим для двойного ряда (14.26) ряд-строку

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$$

и применим к нему теорему 1 § 2, положив в ней $q=1$ и

$$t_k = (-1)^n \frac{\Delta^k u_n}{2^k}.$$

Замечая, что по только что доказанной лемме

$$T = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0,$$

в результате мы получим

$$s_{n*} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = t_0 = (-1)^n \frac{\Delta^0 u_n}{2^0} = (-1)^n u_n. \quad (14.27)$$

Таким образом, в двойном ряде (14.26) сходятся все ряды-строки.

Почленное суммирование (14.27) дает нам

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_{n*} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n.$$

Справа здесь стоит ряд, сходящийся по условию. Следовательно, сходится и ряд, стоящий слева. Это значит, что существует сумма s' двойного ряда (14.26) по строкам, которая равна правой части равенства.

Составим теперь для двойного ряда (14.26) ряд-столбец

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\Delta^k u_n}{2^k} - \frac{\Delta^{k+1} u_n}{2^{k+1}} \right).$$

Естественные преобразования дают нам

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2\Delta^k u_n - (\Delta^k u_n - \Delta^k u_{n+1})) = \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\Delta^k u_n + \Delta^k u_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n \Delta^k u_n - (-1)^{n+1} \Delta^k u_{n+1}). \end{aligned}$$

Снова пользуясь теоремой 1 § 2 (с $q=1$) и доказанной леммой, мы получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} = \frac{1}{2^{k+1}} (\Delta^k u_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \Delta^k u_n). \quad (14.28)$$

Но из сходимости ряда (14.21) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Поэтому и для любого фиксированного k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^k u_n = 0,$$

так что равенство (14.28) может быть записано в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} = \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}. \quad (14.29)$$

Это значит, что в двойном ряде (14.26) сходятся все ряды-столбцы. Мы видим, что общие условия теоремы Маркова выполнены. Нам остается рассмотреть остатки рядов-строк и их суммы.

Прежде всего, согласно теореме 1 § 2

$$r_n^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} a_{nk} = (-1)^n \frac{\Delta^m u_n}{2^m},$$

и поэтому

$$R^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(m)} = \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^m u_n. \quad (14.30)$$

Вводя вместо внутренней суммы остаток исходного ряда

$$r_l = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+l} u_{n+l},$$

мы получаем

$$R^{(m)} = \frac{1}{2^m} \sum_{l=0}^m C_m^l (-1)^l r_m$$

или, применяя к последовательности r_0, r_1, \dots формулу (14.19),

$$R^{(m)} = \frac{1}{2^m} \Delta^m r_0.$$

Ясно вместе с тем, что члены ряда являются (первыми) разностями соответствующих его остатков. Поэтому мы имеем

$$R^{(m)} = \frac{1}{2^m} \Delta^{m-1} u_0,$$

а согласно лемме правая часть при неограниченном возрастании m стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |R^{(m)}| = 0.$$

Следовательно, по части 2) и части 3) теоремы Маркова (сумма s'' ряда (14.28) по столбцам существует и равна

его сумме по строкам, т. е. s' . Но из (14.28) вытекает, что

$$s'' = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}},$$

а последняя сумма и есть правая часть (14.25).

Примеры.

1. Возьмем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (14.31)$$

и составим последовательности его разностей:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \dots, \\ \frac{1}{1 \cdot 2}, & \frac{1}{2 \cdot 3}, & \frac{1}{3 \cdot 4}, & \frac{1}{4 \cdot 5}, & \dots, & \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, & \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, & \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}, & \dots, & & \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, & \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, & \dots, & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Нетрудно проверить, что для ряда (14.31)

$$\Delta^k u_n = \frac{k!}{(n+1)(n+2) \dots (n+k+1)}.$$

Действительно, будем рассуждать по индукции. При $k=0$ это верно:

$$\Delta^0 u_n = u_n = \frac{1}{n+1} = \frac{0!}{n+0+1}.$$

Предположив, что такой вид имеют $\Delta^k u_n$ и $\Delta^k u_{n+1}$, мы получим

$$\Delta^k u_{n+1} = \frac{k!}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+2)},$$

так что по определению $(k+1)$ -й разности

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} u_n &= \Delta^k u_n - \Delta^k u_{n+1} = \\ &= \frac{k!}{(n+1)(n+2) \dots (n+k+1)} - \frac{k!}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+2)} = \\ &= \frac{k!}{(n+2) \dots (n+k+1)} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+2} \right) = \\ &= \frac{k!}{(n+2) \dots (n+k+1)} \frac{k+1}{(n+1)(n+k+2)} = \\ &= \frac{(k+1)!}{(n+1)(n+2) \dots (n+k+2)}. \end{aligned}$$

В частности, $\Delta^k u_0 = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$. Следовательно, преобразование Эйлера ряда (14.31) дает нам

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \Delta^k u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k (k+1)},$$

и мы получаем равенство

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

В сущности, этот факт нам стал известен еще в § 11 главы 7: сумма каждого из этих рядов равна $\ln 2$.

2. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ последовательности разностей будут следующими:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{7}, & \dots, \\ \frac{2}{1 \cdot 3}, & \frac{2}{3 \cdot 5}, & \frac{2}{5 \cdot 7}, & \dots, \\ \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5}, & \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7}, & \dots, \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, & \dots, \\ \dots \end{array}$$

Естественно предположить, что здесь

$$\Delta^k u_n = 2^k \frac{k!}{(2n+1)(2n+3) \dots (2n+2k+1)}. \quad (14.32)$$

Для проверки этого предположения индуктивным переходом напомним

$$\Delta^k u_{n+1} = 2^k \frac{k!}{(2n+3)(2n+5) \dots (2n+2k+3)}$$

и составим разность

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} u_n &= \Delta^k u_n - \Delta^k u_{n+1} = \\ &= 2^k \frac{k!}{(2n+3) \dots (2n+2k+1)} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2k+3} \right) = \\ &= 2^k \frac{k!}{(2n+3) \dots (2n+2k+1)} \frac{2(k+1)}{(2n+1)(2n+2k+3)} = \\ &= 2^{k+1} \frac{(k+1)!}{(2n+1) \dots (2n+2k+3)}. \end{aligned}$$

Мы видим, что предположение (14.32) подтвердилось. Соответственно при $n=0$ мы имеем

$$\Delta^k u_0 = 2^k \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)}.$$

Таким образом, преобразование Эйлера дает нам

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \dots \right).$$

Преобразование рядов по Эйлеру во многих случаях ускоряет их сходимость. Однако это имеет место отнюдь не всегда.

Пример. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \dots$$

Последовательные ряды разностей имеют здесь вид

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{64}, & \dots, \\ \frac{3}{4}, & \frac{3}{16}, & \frac{3}{64}, & \dots, \\ \frac{9}{16}, & \frac{9}{64}, & \dots, \\ \frac{27}{64}, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Непосредственно можно проверить, что здесь $\Delta^k u_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^k$; а сумма ряда, согласно преобразованию Эйлера,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \dots \right).$$

Абсолютная величина n -го остатка исходного ряда равна в нашем случае $\frac{(1/4)^n}{1-(1/4)} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$, а преобразованного —

$$\frac{1}{2} \frac{(3/8)^n}{1-(3/8)} = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

§ 6. Преобразование рядов по Куммеру

Удобно вычислять значения сумм сходящихся рядов, используя следующее простое соображение. Для нахождения суммы ряда можно заменить его другим рядом с известной суммой, а затем суммировать только «поправки».

Если эти поправки быстро убывают, то и составленный из них ряд будет сходиться достаточно быстро. На этом соображении основано преобразование рядов, предложенное Куммером.

Теорема. Если $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ — сходящиеся ряды, причем $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = t$, то при любом $c \neq 0$

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = ct + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - c \frac{v_n}{u_n}\right) u_n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - cv_n) + ct, \quad (14.33)$$

и, в частности, при $c=1$

$$s = t + \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - v_n).$$

Доказательство очевидно:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - cv_n) + c \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - c \frac{v_n}{u_n}\right) u_n + ct.$$

Если в условиях этой теоремы $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - c \frac{v_n}{u_n}\right) = 0,$$

так что стоящий в средней части (14.33) ряд сходится принципиально быстрее, чем исходный ряд.

Примеры.

1. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ составим вспомогательный ряд с известной суммой:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+1)}.$$

Если удержать в преобразованном ряде, скажем, 9 членов, то погрешность можно оценить как

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+1)} < \frac{1}{100} \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

т. е. она окажется более чем в 100 раз меньше погрешности, полученной при удержании того же числа членов в исходном ряде.

2. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{n}$ воспользуемся тем же вспомогательным

рядом «обратных квадратов». Ввиду того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \pi^2$, мы

будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{n} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2}{n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \right) \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Как нетрудно оценить, появляющийся при членах ряда коэффициент убывает примерно как $3/n^2$.

**СУММИРОВАНИЕ
РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ****§ 1. Расходящиеся геометрические прогрессии**

В предыдущих главах достаточно явно подчеркивалась необходимость соблюдать при операциях над рядами некоторые предосторожности. Например, умножение рядов нуждалось в проверке их абсолютной сходимости, почленное интегрирование — в равномерной сходимости и т. п. Вместе с тем эти условия не всегда оказываются математически необходимыми, т. е. иногда можно допускать выходы за пределы дозволенного и при этом не совершать ошибок. Фактически это означает возможность получать на том или ином этапе рассуждений расходящиеся ряды, проводить с ними некоторые преобразования и возвращаться в область сходящихся рядов, обогатившись нужной количественной информацией. Ясно, что для этого надо уметь обращаться с расходящимися рядами и по крайней мере с теми из них, которые сохраняют и в самой расходимости оттенок сходимости.

В § 1 главы 1 и в § 2 главы 2 говорилось о возможности различных толкований понятия «суммы бесконечного ряда». По существу, если для определенности говорить пока только о числовых рядах, суммирование каждого ряда есть некоторый прием, позволяющий бесконечной последовательности чисел, являющихся членами ряда, поставить в соответствие некоторое число, называемое его суммой. Этот прием должен быть достаточно единообразным и плодотворным. Чтобы оправдать название «суммирования», связь между членами ряда, с одной стороны, и его «суммой», с другой, должна обладать хотя бы некоторыми свойствами той связи, которая имеет место между конечными наборами слагаемых и их обычными суммами.

Одним из таких приемов оказывается переход от последовательностей чисел к пределам их частичных сумм.

Именно он и рассматривался в качестве суммирования во всех предшествующих главах книги. Однако только что описанные весьма скромные требования к «суммированию» дадут нам возможность и других вариантов понимания этой операции. В частности, окажется целесообразным приписывать определенные значения «суммы» тем или иным расходящимся рядам.

Начнем, как и в главе 1, с рассмотрения (теперь уже, возможно, и расходящихся) геометрических прогрессий.

Пусть нам дана прогрессия

$$1 + x + x^2 + \dots \quad (15.1)$$

Поставим вопрос о том, какой может быть сумма прогрессии (15.1); иными словами, чему она должна быть равна, если только она существует (или, в более осторожной форме, чему она должна была бы быть равна, если бы она существовала). Обозначим эту гипотетическую сумму ряда (15.1) через $s(x)$.

Естественно считать законным преобразование

$$x + x^2 + \dots = x(1 + x + \dots),$$

так что

$$x + x^2 + \dots = xs(x). \quad (15.2)$$

Далее, очевидно, что

$$1 + 0 + 0 + \dots = 1. \quad (15.3)$$

Складывая почленно (15.2) и (15.3) (и считая такую операцию также законной), мы получим

$$1 + x + x^2 + \dots = 1 + xs(x),$$

т. е.

$$s(x) = 1 + xs(x),$$

откуда получаем

$$s(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{при } x \neq 1. \quad (15.4)$$

Мы видим, что аналитическое выражение для суммы ряда (15.1) в случае его расходимости (т. е. при $|x| > 1$) совпадает с таковым для случая, когда он сходится. Это означает, что проводимые нами рассуждения не противостоят обычной практике суммирования сходящихся геометрических прогрессий. В частности, полагая в (15.4)

$x = -1$, мы получаем

$$s(-1) = 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{2},$$

а в случае $x = -2$ мы имеем

$$s(-2) = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}. \quad (15.5)$$

Здесь «суммы» рядов с целыми членами оказываются дробными числами. Не следует, однако, усматривать в этом каких-либо противоречий ни со здравым смыслом, ни с законами арифметики. В самом деле, сумма любого конечного числа целых слагаемых должна быть целой; но здесь это никак и не оспаривается. Ясно также, что множество всех целых чисел является замкнутым, и потому предел всякой последовательности целых чисел (частичных сумм ряда с целыми членами) также должен быть целым числом. Но ведь в наших рассуждениях $s(-2)$ не есть предел последовательности частичных сумм! Такого предела в рассматриваемом нами случае вообще не существует; $s(-2)$ — это всего лишь некоторое число, функционально зависящее от ряда (15.1). От этой функциональной зависимости требуется лишь соблюдение некоторых свойств типа линейности: при умножении каждого из членов ряда на некоторое число его «сумма» умножается на это же число, а при почленном сложении двух рядов складываются и их «суммы». Кроме того, мы допустили, что если все члены ряда, кроме одного, суть нули, то «сумма» ряда равна этому единственному отличному от нуля числу. В этих условиях ничто не мешает «сумме» ряда с целыми членами быть и нецелой.

Сходные рассуждения можно провести по поводу того соображения, что в ряде (15.5) за каждым положительным членом следует больший по абсолютной величине отрицательный член и тем не менее «сумма» ряда оказывается положительной.

Положив, наконец, $x = 2$, мы согласно (15.4) получим

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots = -1, \quad (15.6)$$

что совсем уже удивительно.

Весьма выразительно высказывается Эйлер. «Я полагаю, что каждый ряд должен обладать определенным значением. Однако чтобы справиться со всеми возникающими здесь трудностями, следовало бы это значение не имено-

вать суммой, поскольку с этим словом обычно связывают такое понятие, как если бы эта сумма получалась в результате действительного суммирования, а эта идея для расходящихся рядов не имеет места».

§ 2. Суммирующие функции

Пусть

$$U: u_1 + u_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

— некоторый числовой ряд. Через cU будем обозначать ряд $cu_1 + cu_2 + \dots$. Если, кроме того,

$$V: v_1 + v_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

также является рядом, то под суммой $U + V$ будем понимать ряд, члены которого являются суммами соответствующих членов рядов U и V , т. е.

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n).$$

Поставим ряду U в соответствие некоторое число $s(U)$, которое будем называть его *суммой*. Мы можем считать, что имеем дело с функцией s , определенной для некоторых рядов и принимающей численные значения. Функцию s будем называть *суммирующей функцией*.

Примером такой суммирующей функции может служить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Эта функция определена на множестве всех сходящихся рядов, и для каждого сходящегося ряда ее значение равно обычной сумме этого ряда. Так определенную конкретную суммирующую функцию мы обозначим через s_0 .

Все упоминаемые далее суммирующие функции принято связывать с именами введших их математиков. Для «обычной» суммирующей функции s_0 этого не делают. Однако по справедливости обычное суммирование рядов следовало бы называть «суммированием по Коши».

Вычисление значений суммирующей функции s_0 , т. е. переход от рядов U к их суммам $s_0(U)$, а также систематические реконструкции по числу $s_0(U)$ ряда U , встречающиеся, например, при разложении функций в ряды, позволяют решать, как мы имели возможность убедиться, большое число разнообразных задач. Поэтому есть основания надеяться, что систематическое употребление суммирующих функций, отличных от обычной суммирующей функции s_0 , также окажется полезным методом.

Можно представить себе чрезвычайно много суммирующих функций. Для оправдания своего названия они должны обладать некоторыми свойствами обычных сумм. Мы выберем два таких свойства.

Во-первых, суммирующая функция s не должна противоречить обычному суммированию сходящихся рядов. Иными словами, если U — некоторый сходящийся ряд, то значение $s(U)$ должно существовать и быть равным $s_0(U)$. Суммирующая функция s , обладающая этим свойством, называется *регулярной* (по иной терминологии — *перманентной*).

Во-вторых, для суммирующей функции s , если ее понимать как операцию над рядом, должны соблюдаться некоторые законы операции сложения. В качестве таких законов мы возьмем дистрибутивный закон:

$$s(cU) = cs(U),$$

и некоторую комбинацию коммутативного и ассоциативного законов, выражающуюся в возможности почленного сложения рядов:

$$s(U + V) = s(U) + s(V).$$

Оба эти закона могут быть объединены в единый закон линейности: для любых двух рядов U и V и чисел a и b из существования значений $s(U)$ и $s(V)$ следует существование значения $s(aU + bV)$ и равенство

$$s(aU + bV) = as(U) + bs(V).$$

Суммирующая функция, обладающая этим свойством, называется *линейной*.

Как следует из теорем 2 и 4 (или, что то же самое, из теоремы 5) § 8 главы 2, суммирующая функция s_0 является линейной. Поэтому свойство линейности суммирующей функции не противоречит свойству ее регуляр-

ности. Вместе с тем своими свойствами линейности и регулярности суммирующая функция однозначно не определяется. Далее мы рассмотрим несколько суммирующих функций, которые линейны и регулярны, но отличны как от функции s_0 , так и друг от друга.

§ 3. Суммирование по Пуассону — Абелю

О п р е д е л е н и е. Если суммирующая функция s_p определяется равенством

$$s_p(U) = s_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k x^k,$$

то такое суммирование называется *суммированием по Пуассону — Абелю*.

П р и м е р ы.

1. Для ряда

$$1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

суммирование по Пуассону — Абелю дает

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - x + x^2 - \dots) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

2. Возьмем ряд U :

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n-1) - 2n + \dots$$

Для него

$$s_p(U) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n.$$

Но при любом x , близком к 1 и меньшем 1, стоящий под знаком предела ряд сходится, и в соответствии с теоремой 5 § 8 главы 2 мы можем написать

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1) x^n.$$

Суммируя стоящие справа ряды (первый есть геометрическая прогрессия, с которой мы имели дело в предыдущем примере, а сумму второго можно найти при помощи формулы (1.24) из § 7 главы 1), мы получаем

$$s_p(U) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

3. Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (\theta \neq 0). \quad (15.7)$$

Здесь предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\theta$ не существует, так что согласно необходимому признаку сходимости ряда (см. главу 2, § 6) ряд (15.7) расходится.

Просуммируем этот ряд по Пуассону — Абелю. Возьмем с этой целью произвольное $x < 1$, рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\theta \quad (15.8)$$

и составим ряд модулей членов этого ряда:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |x^n \cos n\theta|.$$

Признак сходимости Коши (см. § 7 главы 3) дает нам, что

$$\sqrt[n]{|x^n \cos n\theta|} = |x| \sqrt[n]{|\cos n\theta|} \leq |x| < 1,$$

так что последний ряд сходится. Это значит, что ряд (15.8) сходится абсолютно, а потому — сходится. Найдём его сумму.

Заметим, что $x^n \cos n\theta$ есть вещественная часть комплексного числа $(x(\cos \theta + i \sin \theta))^n$. Поэтому

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\theta$$

есть вещественная часть выражения

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (x(\cos \theta + i \sin \theta))^n,$$

или, суммируя имеющуюся геометрическую прогрессию, получаем

$$\frac{1}{2} + \frac{x(\cos \theta + i \sin \theta)}{1 - x(\cos \theta + i \sin \theta)}.$$

Умножение числителя и знаменателя этой дроби на комплексное число, сопряженное знаменателю, даёт нам

$$\frac{1}{2} + \frac{x(\cos \theta + i \sin \theta)(1 - x(\cos \theta - i \sin \theta))}{(1 - x(\cos \theta + i \sin \theta))(1 - x(\cos \theta - i \sin \theta))}. \quad (15.9)$$

После очевидных вычислений (ср. § 8 главы 1) оказывается, что вещественная часть этого выражения равна

$$\frac{1}{2} + \frac{x \cos \theta - x^2}{1 - 2x \cos \theta + x^2} = \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos \theta + x^2}.$$

Таким образом (подчеркнем, что мы предполагаем $\theta \neq 0$),

$$s_P(U) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos \theta + x^2} = 0.$$

4. Рассмотрение ряда

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (\theta \neq 0)$$

проводится аналогично тому, как это делалось в предыдущем примере. Здесь вводится степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\theta,$$

который при $|x| < 1$ сходится, и его сумма, как видно из рассуждений в предыдущем примере, равна мнимой части выражения (15.9), т. е.

$$\frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} s_P(V) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

5. Для ряда $U = 1 + q + q^2 + \dots$ при $q > 1$ и при $q = 1$ мы имеем

$$s_P(U) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = +\infty,$$

так что прогрессия со знаменателем, большим единицы, расходится и по Пуассону — Абелю. Следовательно, формулы (15.5) и (15.6) не имеют смысла не только с точки зрения обычной сходимости, но и с точки зрения сходимости по Пуассону — Абелю. Вместе с тем они поддаются истолкованию с точки зрения более широких принципов суммирования. Так, формула (15.5) имеет смысл с точки зрения суммирования по Эйлеру, которое будет рассмотрено в § 9.

§ 4. Линейность и регулярность суммирования по Пуассону — Абелю

Линейность суммирования по Пуассону — Абелю вытекает из того, что для любых рядов U и V

$$\begin{aligned} s_P(aU + bV) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (au_n + bv_n) x^n = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} au_n x^n + \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} bv_n x^n = a s_P(U) + b s_P(V). \end{aligned}$$

Установим регулярность этого суммирования.

Теорема. Если U — сходящийся ряд, то он суммируем по Пуассону — Абелю и $s_P(U) = s_0(U)$.

Доказательство. Составим по ряду $U: u_1 + u_2 + \dots$ степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n. \quad (15.10)$$

Из сходимости ряда U следует, что радиус сходимости степенного ряда (15.10) не менее единицы, причем при $x=1$ этот ряд сходится. Поэтому во второй теореме Абеля (см. § 3 главы 14) сумма ряда (15.10) непрерывна в точке $x=1$ слева, т. е.

$$s_P(U) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = s_0(U),$$

а это и требовалось.

§ 5. Суммируемость рядов по Пуассону — Абелю и их абсолютная сходимость

Различие между абсолютной сходимостью ряда и его условной сходимостью с точки зрения суммирования по Пуассону — Абелю, вообще говоря, сохраняется; например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

по Пуассону — Абелю суммируем, но ряд, составленный из модулей его членов, т. е. ряд

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots,$$

нет. Тем не менее здесь это различие оказывается как бы более слабым, чем в случае обычной сходимости.

Например, это проявляется при рассмотрении операции умножения рядов.

Определение. Пусть нам даны ряды

$$U: u_0 + u_1 + \dots,$$

$$V: v_0 + v_1 + \dots$$

Произведением этих рядов будем называть ряд

$$W: w_0 + w_1 + \dots,$$

в котором

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Как было показано в § 5 главы 4, для абсолютно сходящихся рядов U и V имеет место

$$s_0(U) s_0(V) = s_0(W).$$

Если же оба ряда U и V сходятся, но лишь условно (см. § 4 главы 4), то это естественное на первый взгляд соотношение перестает быть верным (утрачивает смысл его правая часть).

Пример. Пусть каждый из рядов U и V есть

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Тогда для члена w_n ряда W , являющегося произведением U и V , мы имеем:

$$w_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right).$$

Ввиду того, что $k(n-k+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, здесь должно быть

$$|w_n| > n \frac{2}{n+1} \geq 1,$$

так что ряд W не удовлетворяет необходимому признаку сходимости из § 6 главы 2, и сумма $s_0(W)$ не существует.

Однако, с точки зрения суммирования по Пуассону — Абелю различие в этом вопросе между абсолютной и условной сходимостями утрачивается.

Теорема. Если ряды U и V суммируемы по Пуассону — Абелю, то их произведение W также суммируемо по Пуассону — Абелю, и

$$s_P(U) s_P(V) = s_P(W). \quad (15.11)$$

Доказательство. Суммируемость рядов U и V по Пуассону — Абелю означает, в частности, сходимость

степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$ при $-1 < x < 1$.

Следовательно, по теореме Абеля (см. § 2 главы 6) каждый такой ряд сходится, и притом абсолютно. Но тогда по теореме об умножении абсолютно сходящихся рядов

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n. \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства по условию при $x \rightarrow 1-0$ имеет предел, равный произведению $s_P(U) s_P(V)$. Значит, и правая его часть имеет предел, который по определению есть $s_P(W)$.

Таким образом, с точки зрения умножения рядов суммирование рядов по Пуассону — Абелю даже «ближе» к сложению конечных наборов слагаемых, чем суммирование рядов в обычном смысле.

Примеры.

1. Пусть оба ряда U и V являются одним и тем же рядом

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

т. е. $u_n = v_n = (-1)^{n+1}$. Тогда, как нетрудно подсчитать, $w_n = (-1)^{n+1} n$, т. е. ряд W есть $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$.

Как следует из примера 1 § 3,

$$s_P(U) = s_P(V) = \frac{1}{2}.$$

Поэтому по только что доказанной теореме $s_P(W) = 1/4$. Это согласуется с результатом примера 2 § 3.

2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+1-k)}. \quad (15.12)$$

Проверим его сходимость и найдем его сумму.

Так как этот ряд знакочередующийся, к нему естественно применить признак сходимости Лейбница (см. §§ 6 и 7 главы 4). Сначала докажем монотонность последовательности u_1, u_2, \dots . Преобразуем для этого разность соседних модулей членов ряда:

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(n+1-k)} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(n+2-k)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(n+1-k)} - \frac{1}{k(n+2-k)} \right) - \frac{1}{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(n+1-k)(n+2-k)} - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

или, выписывая последнюю сумму в обратном порядке, получим

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot (n-1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \cdot 1} - \frac{1}{n+1}.$$

Значит, заменяя во всех знаменателях последний сомножитель на n , получим

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot n} + \dots + \frac{1}{n(n+1)n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

или, применяя уже известный прием, получим

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &> \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Оценим теперь величину u_n . Мы имеем

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} + \dots + \frac{1}{(n-1)2} + \frac{1}{n}.$$

В знаменателе каждой из дробей один из сомножителей не меньше, чем $n/2$. Заменяв его на $n/2$, мы дробь только увеличим. Значит,

вынося $n/2$ за скобки, мы получаем

$$u_n < \begin{cases} \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right), \\ \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{n-2}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n-2}{2}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right), \\ \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

так что

$$u_n < \begin{cases} \frac{4}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{\frac{n+1}{2}} \right), \text{ если } n \text{ нечетное,} \\ \frac{4}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{n-2}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}} \right), \text{ если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

или, производя для упрощения записи оценку с некоторым «запасом», получим

$$u_n < \frac{4}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Но, очевидно, $k > \frac{1}{2} (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$ при любом целом $k > 1$,

откуда без труда получается, что $1/k < 2 (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$, или, полагая $k=2, 3, \dots, n$ и суммируя, имеем

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 2 (\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots \\ \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2 (\sqrt{n+1} - \sqrt{2}).$$

Таким образом,

$$u_n < \frac{4}{n} (2 (\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) + 1),$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} (2 (\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) + 1) = 0.$$

Значит, ряд (15.12) сходится.

Непосредственное вычисление суммы ряда (15.12) затруднительно, однако мы можем здесь воспользоваться тем, что он является произведением ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

на себя. Этот последний ряд сходится к сумме $\ln 2$ (см. § 11 главы 7), но лишь условно, и потому говорить о сумме в обычном смысле для

его произведения на себя неправомерно. Но он сходится (с той же суммой $\ln 2$) в смысле Пуассона—Абеля. Следовательно, и его произведение на себя, т. е. ряд (15.12), также сходится в смысле Пуассона—Абеля и имеет сумму $\ln^2 2$. Так как, наконец, ряд (15.12) по доказанному сходится и в обычном смысле, его обычная сумма (на основании регулярности суммирования по Пуассону—Абелю) также должна быть равна $\ln^2 2$.

3. Рассмотрим ряд

$$U: 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n-1}} + \dots \quad (15.13)$$

Он не сходится (даже условно), поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n-1}} \right| = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Однако этот ряд может быть получен в результате перемножения ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (15.14)$$

и геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \quad (15.15)$$

В самом деле, в нашем случае

$$u_n = (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots \pm \frac{1}{2^n} \right),$$

и суммирование стоящей в скобках конечной геометрической прогрессии дает нам требуемое.

Нам остается вспомнить, что сумма ряда (15.14) по Пуассону—Абелю равна $1/2$, а прогрессия (15.15) сходится в обычном смысле (а потому и по Пуассону—Абелю) и имеет сумму, равную 2. Следовательно, ряд (15.13) также должен сходиться по Пуассону—Абелю и сумма его должна быть равна $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

§ 6. Теорема Таубера

В результате разного рода формальных выкладок — и, в частности, в результате переходов от одних рядов к другим — мы можем получить те или иные ряды, заведомо суммируемые по Пуассону—Абелю. Примером этого могут служить рассмотренные в предыдущем параграфе произведения рядов. Во всех такого рода случаях может представлять интерес выяснение сходимости этих рядов и в обычном смысле.

Таким образом, возникает вопрос о признаках сходимости специально для тех рядов, которые заведомо

суммируемы по Пуассону — Абелю. Эти признаки, относящиеся как к рядам, суммируемым по Пуассону — Абелю, так и к рядам, суммируемым в каком-либо ином смысле, обычно называются *тауберовыми теоремами*. Исторически первая из них, принадлежащая самому Тауберу, состоит в следующем.

Теорема Таубера. *Для того чтобы суммируемый по Пуассону — Абелю ряд*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad (15.16)$$

имеющих сумму s , сходилась в обычном смысле (u , разумеется, также имел сумму s), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n} = 0. \quad (15.17)$$

Часть теоремы Таубера, касающуюся необходимости, мы выделим как самостоятельную лемму.

Лемма. *Если сходится ряд (15.16), то имеет место (15.17).*

Доказательство. Пусть ряд (15.16) сходится и r_n — n -й его остаток. Сходимость ряда означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0. \quad (15.18)$$

Далее, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n} &= \frac{(r_0 - r_1) + 2(r_1 - r_2) + \dots + n(r_{n-1} - r_n)}{n} = \\ &= \frac{r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1} - nr_n}{n} = \frac{r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1}}{n} - r_n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1}}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} r_n.$$

По (15.18) второй предел справа здесь равен нулю. Если бы первый предел не существовал или существовал бы, но был отличен от нуля, то нашлось бы такое $\varepsilon > 0$, что при сколь угодно больших значениях N выполнялось бы неравенство

$$|r_0 + r_1 + \dots + r_{N-1}| > N\varepsilon. \quad (15.19)$$

Найдем теперь в соответствии со сходимостью ряда (15.16) такое n , что при $k > n$

$$|r_k| > \frac{\varepsilon}{2}, \quad (15.20)$$

а по нему — такое m , что

$$m > \frac{2}{\varepsilon} \sum_{k=0}^n |r_k|. \quad (15.21)$$

Число N можно брать сколь угодно большим. Возьмем его таким, чтобы было одновременно

$$N > 2(m - n) \quad \text{и} \quad N > n + m. \quad (15.22)$$

Напишем

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} r_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |r_k| + \sum_{k=n+1}^{N-1} |r_k|.$$

Из (15.21) следует, что здесь первое слагаемое меньше, чем $m\varepsilon/2$. Из (15.20) следует, что второе слагаемое меньше, чем $(N - n)\varepsilon/2$. Значит, с учетом (15.22)

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} r_k \right| < \frac{(N - n)\varepsilon}{2} + \frac{m\varepsilon}{2} = \frac{(N + m - n)\varepsilon}{2} < \frac{\frac{3}{2}N\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}N\varepsilon < N\varepsilon$$

а это противоречит (15.19), и лемма доказана.

Переходим к доказательству достаточности. Начнем с того частного случая, когда члены ряда (15.16) убывают настолько быстро, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0. \quad (15.23)$$

Положим $\delta_n = \max_{k \geq n} |ku_k|$.

Из (15.23) следует, что по мере увеличения n величина δ_n монотонно стремится к нулю.

Возьмем произвольное N и напишем

$$\sum_{n=0}^N u_n - s = \sum_{n=0}^N u_n (1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - s. \quad (15.24)$$

Заметим, что при $0 < x < 1$ должно быть

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{n-1}) < n(1 - x)$$

и

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}. \quad (15.25)$$

Пользуясь этими оценками и свойствами δ_n , мы можем оценить первые два слагаемых в (15.24) справа:

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n (1 - x^n) \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n| (1 - x^n) \leq \sum_{n=0}^N |nu_n| (1 - x) \leq \leq \delta_0 N (1 - x)$$

и

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|nu_n| x^n}{n} \leq \frac{\delta_{N+1}}{N+1} \frac{1}{1-x}.$$

Поэтому из (15.24) следует, что

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n - s \right| \leq (1-x) \delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - s \right|. \quad (15.26)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем x так, чтобы было $(1-x)N = \varepsilon$, т. е. $x = 1 - \frac{\varepsilon}{N}$. Назначим теперь N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta_{N+1} < \varepsilon^2,$$

а x , зависящее от N , — настолько близким к единице, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - s \right| < \varepsilon.$$

Тогда в (15.26) левая часть может быть оценена как

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n - s \right| \leq \varepsilon \delta_0 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + \varepsilon = (2 + \delta_0) \varepsilon,$$

и произвольность $\varepsilon > 0$ доказывает сходимость ряда (15.16). Выделенный условием (15.23) частный случай разобран.

Обратимся теперь к общему случаю. Положим

$$u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n = v_n$$

и (условно) $v_0 = 0$. Тогда при $n = 1, 2, \dots$

$$u_n = \frac{1}{n} (v_n - v_{n-1}),$$

так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n - v_{n-1}}{n} x^n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{n-1}}{n} x^n,$$

или, сдвигая на единицу нумерацию слагаемых во второй сумме справа, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n+1} x^{n+1},$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1}. \quad (15.27)$$

Рассмотрим теперь выражение $(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n$, которое мы представим в виде

$$(1-x) \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n} x^n + (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n.$$

Возьмем здесь произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем в соответствии с (15.17) N настолько большим, чтобы при $n \geq N+1$ было $|v_n/n| < \varepsilon$. В этом случае с учетом (15.25) при любом $0 < x < 1$ будет

$$\left| (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n \right| < \varepsilon. \quad (15.28)$$

Далее, приближая x к единице, мы можем добиться того, чтобы было

$$\left| (1-x) \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n} x^n \right| < \varepsilon. \quad (15.29)$$

Объединение (15.28) и (15.29) дает нам, что при значениях x , достаточно близких к единице

$$\left| (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n \right| < 2\varepsilon.$$

Следовательно, поскольку левая часть этого неравенства не зависит от ε ,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n = 0.$$

Равенство (15.27) дает нам поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

Но по условию суммируемости ряда левая часть равна здесь $s_p(U) = s$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} = s - u_0. \quad (15.30)$$

Рассмотрим теперь вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)}$.

Для него мы имеем согласно (15.17)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n}{n(n+1)} n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n}{n+1} \right| = 0,$$

так что мы оказываемся в условиях уже разобранного частного случая. Тем самым мы от (15.30) можем перейти к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = s - u_0. \quad (15.31)$$

Наконец, мы имеем для любого N

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{v_{n-1}}{n} = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{v_n - v_{n-1}}{n} - \frac{v_N}{N+1} = \sum_{n=1}^N u_n - \frac{v_N}{N+1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{v_N}{N+1}.$$

Здесь предел справа по условию равен нулю, и (15.31) дает нам

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s - u_0.$$

Таким образом, ряд (15.16) сходится в обычном смысле и сумма его равна s .

§ 7. Суммирование по Чезаро

Рассмотрим еще одну суммирующую функцию, отличную как от функции s_0 , приводящей к обычной сумме ряда, так и от функции s_p , приводящей к его сумме по Пуассону — Абелю.

В качестве такой функции для ряда $U: u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ возьмем предел средних арифметических частичных сумм s_k этого ряда, т. е.

$$s_C(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k u_i.$$

Такое понимание суммы ряда называется его *суммированием по Чезаро*.

Примеры.

1. Для ряда $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ мы имеем

$$s_k = \begin{cases} 1 & \text{для нечетного } k, \\ 0 & \text{для четного } k. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \frac{1}{n} (1 + 0 + 1 + 0 + \dots) = \begin{cases} \frac{n+1}{2n} & \text{для нечетного } n, \\ \frac{1}{2} & \text{для четного } n. \end{cases}$$

Следовательно, $s_C(U) = 1/2$.

2. Для ряда $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ будет

$$s_k = \begin{cases} \frac{k+1}{2} & \text{для нечетного } k, \\ -\frac{k}{2} & \text{для четного } k. \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \frac{1}{n} (1 - 1 + 2 - 2 + \dots) = \begin{cases} \frac{n+1}{2n} & \text{для нечетного } n, \\ -\frac{1}{2} & \text{для четного } n, \end{cases}$$

и с ростом n последовательность этих сумм ни к какому пределу не стремится. Таким образом, рассматриваемый ряд по Чезаро не суммируем.

Метод суммирования Чезаро является линейным. Действительно, если U , V и $aU + bV$ — ряды, как они были определены в конце § 2, то

$$\begin{aligned} s_C(aU + bV) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k (au_i + bv_i) = \\ &= a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k u_i + b \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k v_i = a s_C(U) + b s_C(V). \end{aligned}$$

Докажем, что суммирование по Чезаро является и регулярным, т. е. если ряд U : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ сходится и $s_0(U) = s$, то он суммируем по Чезаро и $s_C(U) = s$.

Мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0(U) = s.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} s_0(U) - s_C(U) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (s_n - s_k). \end{aligned}$$

Очевидно, здесь u_0 не входит ни в одно слагаемое последней суммы, u_1 входит только в одно, u_2 — только в два и т. д. Таким образом,

$$s_0(U) - s_C(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k u_k,$$

а, согласно лемме из предыдущего параграфа, для сходящегося ряда последний предел равен нулю.

Удобный необходимый признак суммируемости ряда по Чезаро, в известной степени напоминающий необходимый признак сходимости рядов, описанный в § 6 главы 2, дается следующей теоремой.

Теорема. *Для того чтобы ряд $U: u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ был суммируем по Чезаро, необходимо, чтобы было*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

Доказательство. Пусть s_n — n -я частичная сумма ряда U (при этом мы полагаем $s_0 = 0$), и предположим, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = s_C(U)$$

существует. Тогда, очевидно, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k = s_C(U) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = s_C(U),$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n s_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0.$$

Но тогда (мы повторяем только что проведенное рассуждение) должно быть и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n-1}}{n} = 0$, и из последних двух равенств следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

Ряд из примера 1 под этот признак подходит, а ряд из примера 2 — нет.

§ 8. Соотношение между сходимостью по Чезаро и по Пуассону — Абелю

Суммирование по Чезаро в известном смысле «слабее» суммирования по Пуассону — Абелю. Точный смысл этого утверждения содержится в формулировке следующей теоремы:

Теорема. Если ряд U суммируем по Чезаро, то он суммируем и по Пуассону—Абелю, и

$$s_P(U) = s_C(U).$$

Доказательство. Пусть ряд U : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ суммируем по Чезаро и имеет в этом смысле сумму s . На основании теоремы § 7 отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

Это в свою очередь значит, что при любом $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого места, будет $|u_n| < n\varepsilon$. Далее, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon x^n$$

сходится при любом $|x| < 1$, как в том можно убедиться, применяя, например, признак сходимости Даламбера. Следовательно, при любом $|x| < 1$ сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Но (положим условно $s_{-1} = 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} = \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \end{aligned}$$

и, повторяя этот ход рассуждений еще раз, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n s_k \right) x^n. \quad (15.32)$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

и умножим его на себя. Мы получим

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n,$$

т. е.

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Вместе с (15.32) это дает нам

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - s_C(U) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n s_k - s_C(U) \right) (n+1) x^n. \quad (15.33)$$

При любом натуральном N стоящую справа сумму можно разбить на две части: одну, охватывающую все слагаемые для n от 0 до $N-1$, и другую, содержащую все остальные слагаемые:

$$\begin{aligned} (1-x)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^n s_k - s_C(U) \right) (n+1) x^n + \\ + (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n s_k - s_C(U) \right) (n+1) x^n. \end{aligned}$$

Выберем N таким, чтобы при любом $n > N$ было

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k - s_C(U) \right| < \varepsilon.$$

Тогда при любом $0 < x < 1$ мы получим (увеличивая, если надо, N еще больше)

$$\begin{aligned} (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=0}^n (s_k - (n+1) s_C(U)) x^n &\leq \\ &\leq (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} (n+1) \varepsilon x^n = (1-x)^2 \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} (n+1) x^n = \\ &= (1-x)^2 \varepsilon \frac{1}{(1-x)^2} = \varepsilon x^N < \varepsilon. \quad (15.34) \end{aligned}$$

Кроме того, зафиксировав N и выбирая x достаточно близким к единице, мы можем добиться того, чтобы было

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^n s_k - (n+1) s_C(U) \right) x^n < \varepsilon. \quad (15.35)$$

Из (15.33), (15.34) и (15.35) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - s_C(U) = 0,$$

т. е. $s_P(U) = s_C(U)$, а это и требовалось.

Обращение этой теоремы не имеет места: существуют ряды, суммируемые по Пуассону — Абелю, но не суммируемые по Чезаро. Так, ряд

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

суммируем по Пуассону — Абелю (см. пример 2 из § 3), но не суммируем по Чезаро (см. пример 2 из § 7).

Из доказанной теоремы следует, что всякая тауберова теорема для суммируемости по Пуассону — Абелю должна естественным образом порождать соответствующую тауберову теорему и для суммируемости по Чезаро. В самом деле, пусть некоторые условия обеспечивают для любого суммируемого по Пуассону — Абелю ряда его сходимости. Тогда, если какой-либо ряд суммируем по Чезаро, то на основании только что доказанной теоремы он суммируем (и имеет ту же сумму) и по Пуассону — Абелю, и взятые условия гарантируют его сходимости (к той же сумме).

§ 9. Суммирование по Эйлеру

Теорема § 5 главы 14 о сходимости преобразованного по Эйлеру ряда в случае сходимости исходного ряда и о равенстве в этом случае их сумм носит односторонний характер: из сходимости преобразованного по Эйлеру ряда сходимости исходного ряда следует не обязательно.

П р и м е р. Возьмем еще раз неоднократно рассматривавшийся ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (15.36)$$

Имея в виду, что преобразование Эйлера исходит из знакопеременной последовательности членов ряда (см. формулу (14.21) и последующее замечание), первая строка треугольной таблицы (14.16) здесь приобретает вид

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots,$$

все последующие строки состоят из одних нулей. Следовательно,

преобразование Эйлера превращает ряд (15.36) в ряд

$$\frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots$$

с суммой $1/2$.

Это дает нам основание ввести суммирующую функцию s_E , определяемую для ряда $U = u_0 - u_1 + u_2 - \dots$ равенством

$$s_E(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{\Delta^n u_0}{2^{k+1}},$$

и назвать приписывание ряду U числа $s_E(U)$ его *суммированием по Эйлеру*. Как нетрудно проверить, суммирование по Эйлеру является линейным. Его регулярность является предметом теоремы § 5 главы 14.

Суммирование рядов по Эйлеру носит весьма «сильный» характер. По Эйлеру поддаются суммированию многие весьма резко расходящиеся ряды. Так, для ряда

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots$$

последовательностями разностей будут

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \\ -1 & -2 & -4 & -8 & & \dots \\ 1 & 2 & 4 & & & \dots \\ -1 & -2 & & & & \dots \\ & & & & & \dots \end{array}$$

так что преобразование Эйлера приводит в данном случае к ряду

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots,$$

сумма (обычная) которого равна $1/3$.

Вместе с тем возможности суммирования по Эйлеру (как, впрочем, и любого иного суммирования) ограничены. Например, получить формулу (15.6) путем суммирования по Эйлеру ее левой части не удастся.

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

Сила и роль математики заключаются не только в том, что она указывает пути к решению многих задач, но и в том, что она доказывает, что на этих путях мы действительно приходим к искомым решениям. Поэтому желательно, чтобы и при изучении математики не оставалось логических пробелов и каждая освоенная и применяемая теорема была бы снабжена доступным доказательством.

Данная глава начинается с доказательства теорем Дирихле и Фурье, сформулированных соответственно в § 2 главы 9 и в § 2 главы 11.

§ 1. «Вторая» теорема о среднем

Кроме хорошо известной в анализе теоремы о среднем (в данном курсе нам приходилось неоднократно пользоваться ею в главе 1), имеется еще и другая теорема аналогичного характера, которая называется «второй» теоремой о среднем.

Теорема 1 («вторая» теорема о среднем). Пусть φ и f — интегрируемые на сегменте $[a, b]$ функции, причем функция φ , кроме того, еще и монотонна. Тогда на $[a, b]$ найдется такая точка ξ , что

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x) dx. \quad (16.1)$$

Предварительно докажем следующую лемму:

Лемма. Пусть

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > 0, \quad (16.2)$$

u_1, u_2, \dots, u_n — произвольные числа,

$$A \leq u_1 + u_2 + \dots + u_k \leq B \quad (k = 1, \dots, n). \quad (16.3)$$

Тогда $A\varepsilon_1 \leq \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n \leq B\varepsilon_1$.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} u_1 + \dots + u_k &= s_k \quad (k = 1, \dots, n), \\ \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n &= S_n \end{aligned}$$

и применим преобразование Абеля (см. § 5 главы 12). Мы получим

$$S_n = s_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \dots + s_{n-1} (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n \varepsilon_n.$$

Ввиду (16.2) все стоящие справа в скобках разности положительны. Значит, подставив вместо каждого s_k число A , мы всю сумму на основании (16.3) уменьшим, а подставив число B — увеличим. Но это значит, что

$$\begin{aligned} A (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + A (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \dots + A (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + A \varepsilon_n &= \\ &= A \varepsilon_1 < S < B \varepsilon_1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Для определенности мы будем считать, что функция φ является невозрастающей. Это значит, что в точке b она должна достигать своего наименьшего значения. Положим

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(b - 0).$$

Функция ψ , подобно функции φ , на $[a, b]$ интегрируема и убывает, но к тому же еще и неотрицательна.

Рассмотрим теперь произвольное дробление сегмента $[a, b]$ точками:

$$a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b,$$

положим

$$m_k = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), \quad M_k = \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

и найдем для каждого $k = 1, \dots, n$ такое число μ_k , что

$$\mu_k (x_k - x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \quad (16.4)$$

(последнее можно сделать на основании первой теоремы о среднем).

Совершенно ясно, что

$$m_k \leq \mu_k \leq M_k.$$

Поэтому, умножая каждое такое неравенство на неотрицательное число

$$\psi(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

и суммируя полученные неравенства по всем k , мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \psi(x_k)(x_k - x_{k-1}) &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mu_k \psi(x_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n M_k \psi(x_k)(x_k - x_{k-1}). \end{aligned} \quad (16.5)$$

Так как по условию функция ψ интегрируема, при неограниченном дроблении сегмента $[a, b]$ крайние в этой формуле суммы сходятся к одному и тому же пределу, который есть интеграл

$$\int_a^b \psi(x) f(x) dx. \quad (16.6)$$

К этому же пределу должна сходиться и средняя часть (16.5). Но согласно (16.4) ее можно переписать как

$$\sum_{k=1}^n \psi(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx. \quad (16.7)$$

Рассмотрим теперь интеграл с переменным верхним пределом

$$I(z) = \int_{x_0}^z f(x) dx.$$

Очевидно, $I(z)$ есть функция, заданная на сегменте $[a, b]$ и непрерывная на нем. Поэтому (на основании теоремы Вейерштрасса) $I(z)$ достигает своих минимального и максимального значений, которые мы обозначим соответственно через A и B . Кроме того, будучи непрерывной функцией, $I(z)$ принимает (в силу теоремы Коши) и все промежуточные значения между A и B .

Полагая

$$u_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx,$$

заметим, что

$$A \leq \int_{x_0}^{x_k} f(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^k u_i \leq B$$

для всех $k = 1, \dots, n$.

Мы видим, что находимся в условиях доказанной выше леммы, применение которой дает нам

$$\psi(x_0) A \leq \sum_{k=1}^n \psi(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \leq \psi(x_0) B.$$

При переходе к пределу сумма интегралов (16.7) сходится к интегралу (16.6), и мы получаем

$$\psi(a+0) A \leq \int_a^b \psi(x) f(x) dx \leq \psi(a+0) B.$$

Значит, можно положить

$$\int_a^b \psi(x) f(x) dx = \psi(a+0) C, \quad (16.8)$$

где $A \leq C \leq B$, и по замеченному выше найдется такое ξ , что $I(\xi) = C$. Таким образом, (16.8) переписывается как

$$\int_a^b \psi(x) f(x) dx = \psi(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx. \quad (16.9)$$

Наконец, переход от функции ψ к первоначальной функции φ дает нам

$$\int_a^b (\varphi(x) - \varphi(b-0)) f(x) dx = (\varphi(a+0) - \varphi(b-0)) \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

В качестве первого приложения доказанной «второй теоремы о среднем» установим следующий факт.

Теорема 2. Если функция f удовлетворяет условиям Дирихле и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

— ее ряд Фурье, то

$$a_n \leq \frac{M}{n}, \quad b_n \leq \frac{M}{n},$$

где M — некоторая положительная константа.

Доказательство. Пусть $[a, b]$ — один из сегментов, на котором функция f монотонна и непрерывна. По второй теореме о среднем мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx &= \\ &= \frac{1}{\pi} f(a+0) \int_a^{\xi} \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} f(b-0) \int_{\xi}^b \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{n\pi} (f(a+0) (\sin n\xi - \sin na) + f(b-0) (\sin nb - \sin n\xi)) \leq \\ &\leq \frac{2}{n\pi} (|f(a+0)| + |f(b-0)|). \end{aligned}$$

Разобьем теперь сегмент $[-\pi, \pi]$ на конечное число частей $[x_i, x_{i+1}]$ ($i=0, \dots, r-1$), в каждой из которых функция f монотонна и непрерывна. Тогда, согласно только что доказанному, должно быть

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{i=1}^r \frac{1}{n\pi} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos nx \, dx &\leq \\ &\leq \frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^r (|f(x_{i-1}+0)| + |f(x_i-0)|). \end{aligned}$$

Стоящая справа сумма состоит из конечного числа конечных слагаемых. Обозначив ее вместе с коэффициентом $2/\pi$ через M , мы получим требуемую оценку для a_n .

Оценка для b_n получается точно так же.

В дальнейшем нам будет нужна не столько сама вторая теорема о среднем, сколько полученная в ходе ее доказательства формула (16.9), справедливая для функции ψ , которая не только монотонно убывает, но и неотрицательна.

§ 2. Исследование двух интегралов

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Не следует поддаваться соблазну получить значение этого интеграла, попросту положив в формуле (11.13) из § 3 главы 11 $x=0$ и $l=1$, ибо сама формула (11.13) есть следствие интегральной формулы Фурье, доказательством которой мы сейчас как раз и занимаемся.

Рассмотрим поэтому при различных значениях t зависящие от параметра α интегралы

$$I_t(\alpha) = \int_0^t e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \alpha \geq 0.$$

При любом конечном значении t такой интеграл, очевидно, является непрерывной функцией α .

Далее, на основании «второй» теоремы о среднем (точнее, на основании формулы (16.9)) при любых $a > 0$ и t

$$\int_a^t e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{e^{-\alpha a}}{a} \int_a^{\xi} \sin x dx = \frac{e^{-\alpha a}}{a} (\cos \alpha - \cos \xi),$$

где $a < \xi < t$. Таким образом,

$$\left| \int_a^t e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \frac{e^{-\alpha a}}{a} |\cos a - \cos \xi| \leq \frac{2}{a}.$$

Эта оценка справедлива для всех t и для всех a .

Неограниченное увеличение t дает нам

$$\left| \int_a^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a},$$

т. е. при всех $\alpha \geq 0$ имеет место сходимость интегралов $I_t(\alpha)$ к соответствующим несобственным интегралам $I_{\infty}(\alpha)$.

Выполним далее дифференцирование:

$$\frac{d}{d\alpha} I_t(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^t e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_0^t e^{-\alpha x} \sin x dx.$$

Последний интеграл можно вычислить, применяя дважды интегрирование по частям (см. пример в § 2 главы 11). Это дает нам

$$\frac{d}{d\alpha} I_t(\alpha) = \frac{e^{-\alpha x} (\cos x + \alpha \sin x)}{1 + \alpha^2} \bigg|_0^t.$$

При неограниченном возрастании t последнее выражение сходится к $-\frac{1}{1+\alpha^2}$, причем эта сходимость, очевидно, равномерна при $\alpha \geq 0$. Следовательно, согласно теореме § 6 главы 5

$$1) \quad \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{1+\alpha^2};$$

2) сходимость $I_t(\alpha)$ к $I_{\infty}(\alpha)$ равномерна по $\alpha \geq 0$.

Из утверждения 1) в результате интегрирования следует, что

$$I_{\infty}(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = C - \operatorname{arctg} \alpha \quad (\alpha \geq 0),$$

а из 2) — что функция $I_{\infty}(\alpha)$ является непрерывной при $\alpha \geq 0$.

Если α неограниченно возрастает, то, очевидно, $I_t(\alpha)$ (а тем самым и $I_{\infty}(\alpha)$) стремится к нулю, и поэтому

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} I_{\infty}(\alpha) = C - \operatorname{arctg} \alpha \Big|_{\alpha=\infty} = 0,$$

откуда $C = \pi/2$.

Таким образом,

$$I_{\infty}(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha},$$

и по непрерывности $I_{\infty}(\alpha)$ —

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I_{\infty}(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Интересующий нас интеграл вычислен. Мы можем записать полученный нами результат как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (16.10)$$

Пусть теперь $h > 0$, а n — произвольное целое положительное число. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^h \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Полагая $nt = x$, мы можем переписать его в виде

$$\int_0^{nh} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Из (16.10) следует, что при любом $h > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h \frac{\sin nt}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (16.11)$$

Полагая здесь $h = \varepsilon$ и вычитая получающееся равенство почленно из (16.11), мы будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^h \frac{\sin nt}{t} dt = 0. \quad (16.12)$$

Вычислим теперь при $0 < h < \pi$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h \frac{\sin nt}{\sin t} dt.$$

Стоящий под знаком предела интеграл мы можем, очевидно, преобразовать к виду

$$\int_0^h \frac{t}{\sin t} \frac{\sin nt}{t} dt,$$

или, интегрируя отдельно от 0 до некоторого $\varepsilon < h$ и от ε до h ,

$$\int_0^\varepsilon \frac{t}{\sin t} \frac{\sin nt}{t} dt + \int_\varepsilon^h \frac{t}{\sin t} \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Воспользовавшись дважды первой теоремой о среднем, перепишем эту сумму в виде

$$\frac{\xi_1}{\sin \xi_1} \int_0^\varepsilon \frac{\sin nt}{t} dt + \frac{\xi_2}{\sin \xi_2} \int_\varepsilon^h \frac{\sin nt}{t} dt,$$

где $0 \leq \xi_1 \leq \varepsilon \leq \xi_2 \leq h$. Переходя по n к пределу и пользуясь формулами (16.11) и (16.12), мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \\ = \frac{\xi_1}{\sin \xi_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\varepsilon \frac{\sin nt}{t} dt + \frac{\xi_2}{\sin \xi_2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^h \frac{\sin nt}{t} dt = \frac{\xi_1}{\sin \xi_1} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Полученное равенство справедливо при любом $0 < \varepsilon < h$. Значит, оно остается в силе и при приближении ε к нулю. Но тогда и ξ_1 стремится к нулю, и мы окончательно получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\xi_1}{\sin \xi_1} \frac{\pi}{2}.$$

Здесь стоящий справа предел равен, как известно, единице. Поэтому при любом $0 < h < \pi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (16.13)$$

В § 11 нам понадобится равномерность этой сходимости для h из $[\alpha, \pi - \alpha]$ при любом α из $(0, \frac{\pi}{2})$. Для ее установления обратим внимание на непрерывность (а потому и равномерную непрерывность) функции $\frac{1}{\sin t}$ на сегменте $[\alpha, \pi - \alpha]$. Это значит, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое n , что при t', t'' из $[\alpha, \pi - \alpha]$ и $|t' - t''| < \frac{\pi}{n}$ будет

$$\left| \frac{1}{\sin t'} - \frac{1}{\sin t''} \right| < \varepsilon. \quad (16.14)$$

Возьмем теперь произвольное натуральное n , положим для краткости $\frac{r\pi}{n} = t_r$, подберем такие натуральные k' и k'' , что α будет заключено в $[t_{2k'}, t_{2k'+2}]$, h — в

$[t_{2k''}, t_{2k''+2}]$, и напишем

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^h \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{t_{2k'}+2} \frac{\sin nt}{\sin t} dt + \sum_{l=k'+1}^{k''} \int_{t_{2l}}^{t_{2l}+2} \frac{\sin nt}{\sin t} dt + \int_{t_{2k''}}^h \frac{\sin nt}{\sin t} dt. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Каждый из стоящих справа интегралов с ростом n становится малым. Действительно,

$$\int_{\alpha}^{t_{2k'}+2} \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \int_{\alpha}^{t_{2k'}+1} \frac{\sin nt}{\sin t} dt + \int_{t_{2k'}+1}^{t_{2k'}+2} \frac{\sin nt}{\sin t} dt$$

(причем, если $\alpha \geq t_{2k'}+1$, то первый из интегралов отпадает). Здесь в каждом из двух интегралов функция $\sin nt$ не изменяет знака, и потому к ним применима (первая) теорема о среднем, т. е. найдутся такие $t_{2k'}^*$ из $[\alpha, t_{2k'}+1]$ и $t_{2k'}^*+1$ из $[t_{2k'}+1, t_{2k'}+2]$, что

$$\int_{\alpha}^{t_{2k'}+2} \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \frac{1}{\sin t_{2k'}^*} \int_{\alpha}^{t_{2k'}+1} \sin nt dt + \frac{1}{\sin t_{2k'}^*+1} \int_{t_{2k'}+1}^{t_{2k'}+2} \sin nt dt.$$

Последние два интеграла суть разности некоторых косинусов, деленные на n ; поэтому

$$\left| \int_{\alpha}^{t_{2k'}+2} \frac{\sin nt}{\sin t} dt \right| \leq \left| \frac{1}{\sin t_{2k'}^*} + \frac{1}{\sin t_{2k'}^*+1} \right| \frac{2}{n} = \frac{M'}{n},$$

где M' — ограниченная величина.

Аналогично оценивается последний интеграл в (16.15):

$$\left| \int_{t_{2k''}}^h \frac{\sin nt}{\sin t} dt \right| \leq \left| \frac{1}{\sin t_{2k''}^*} + \frac{1}{\sin t_{2k''}^*+2} \right| \frac{2}{n} = \frac{M''}{n},$$

где $t_{2k''}^*$ из $[t_{2k''}, t_{2k''}+2]$ и $t_{2k''}^*+1$ из $[t_{2k''}+1, t_{2k''}+2]$.

Наконец, для каждого из остальных $k'' - k'$ интегралов в (16.15) разбиение его на сумму двух интегралов, применение к каждому из них первой теоремы о среднем, выполнение интегрирования и применение формулы (16.14)

дает с некоторыми t_{2l}^* из $[t_{2l}, t_{2l+1}]$ и t_{2l+1}^* из $[t_{2l+1}, t_{2l+2}]$

$$\begin{aligned} \int_{t_{2l}}^{t_{2l+2}} \frac{\sin nt}{\sin t} dt &= \int_{t_{2l}}^{t_{2l+1}^*} \frac{\sin nt}{\sin t} dt + \int_{t_{2l+1}^*}^{t_{2l+2}} \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \\ &= \frac{1}{\sin t_{2l}^*} \frac{1}{n} (\cos nt_{2l} - \cos nt_{2l+2}) + \\ &\quad + \frac{1}{\sin t_{2l+1}^*} \frac{1}{n} (\cos nt_{2l+1} - \cos nt_{2l+2}) = \\ &= \frac{1}{\sin t_{2l}^*} \frac{1}{n} \left(\cos n \frac{2l}{n} \pi - \cos n \frac{2l+1}{n} \pi \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sin t_{2l+1}^*} \frac{1}{n} \left(\cos n \frac{2l+1}{n} \pi - \cos n \frac{2l+2}{n} \pi \right) = \\ &= \frac{1}{\sin t_{2l}^*} \frac{2}{n} - \frac{1}{\sin t_{2l+1}^*} \frac{2}{n} \leq \left| \frac{1}{\sin t_{2l}^*} - \frac{1}{\sin t_{2l+1}^*} \right| < \frac{2\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

Собирая все найденные оценки, мы получаем

$$\left| \int_{\alpha}^n \frac{\sin nt}{\sin t} dt \right| < \frac{M' + M''}{n} + \frac{2\varepsilon}{n} (k'' - k').$$

Здесь правая часть за счет выбора достаточно большого n может быть сделана сколь угодно малой вне зависимости от конкретного h из $[\alpha, \pi - \alpha]$. Это, очевидно, равносильно нужной нам равномерной сходимости.

§ 3. Исследование одного класса интегралов

Пусть χ_n ($n = 1, 2, \dots$) — такая последовательность функций вещественной переменной, что при любом $h > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h \chi_n(t) dt = \frac{\pi}{2}. \quad (16.16)$$

В предыдущем параграфе было установлено (соотношения (16.11) и (16.13)), что в качестве функции χ_n , обладающей этим свойством, можно взять

$$\chi_n(t) = \frac{\sin nt}{\sin t}, \quad (16.17)$$

а также

$$\chi_n(t) = \frac{\sin nt}{t}. \quad (16.18)$$

Далее мы будем вести рассуждения применительно к произвольной функции χ_n , удовлетворяющей условию (16.16). Однако нашей целью будет получение результатов о конкретных функциях, описываемых равенствами (16.17) и (16.18). Первым из них мы воспользуемся при доказательстве теоремы Дирихле, а вторым — при доказательстве теоремы Фурье.

Пусть φ — произвольная функция, заданная на некотором сегменте $[-C, C]$. Нас будут интересовать интегралы вида

$$I_{\chi, n}(a, b, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(x) \chi_n(x) dx, \quad \text{где } -C < a, b < C, \quad (16.19)$$

а также пределы этих интегралов при неограниченном возрастании n :

$$I_{\chi}(a, b, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(x) \chi_n(x) dx.$$

В случае (16.17) интеграл в (16.19) называется *интегралом Дирихле*, а в случае (16.18) — *интегралом Фурье*.

Лемма 1. Если $b > 0$, а функция φ на сегменте $[a, b]$ монотонна, то

$$I_{\chi}(0, b, \varphi) = \frac{1}{2} \varphi(+0).$$

Доказательство. Предположим сначала, что функция φ на сегменте $[a, b]$ положительна и монотонно убывает. Тогда по «второй» теореме о среднем (точнее, по формуле (16.9)) найдется такое $\xi < b$, что

$$I_{\chi, n}(0, b, \varphi) = \frac{1}{\pi} \varphi(+0) \int_0^{\xi} \chi_n(x) dx,$$

так что

$$I_{\chi}(0, b, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\chi, n}(0, b, \varphi) = \frac{1}{\pi} \varphi(+0) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} \chi_n(x) dx,$$

и на основании (16.16) $I_{\chi}(0, b, \varphi) = \frac{1}{2} \varphi(+0)$.

Пусть теперь функция φ на сегменте $[a, b]$ монотонно убывает, но может принимать и отрицательные значения.

Возьмем тогда такое $C > 0$, что функция $\psi(x) = \varphi(x) + C$ на сегменте $[a, b]$ положительна. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} I_x(0, b, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b (\psi(x) - C) \chi_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \psi(x) \chi_n(x) dx - \frac{C}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \chi_n(x) dx, \end{aligned}$$

что в принятых обозначениях с учетом формулы (16.16) означает

$$I_x(0, b, \varphi) = I_x(0, b, \psi) - \frac{C}{\pi} \frac{\pi}{2}.$$

Но для положительной монотонно убывающей функции ψ мы по доказанному имеем $I_x(0, b, \psi) = \frac{1}{2} \psi(+0)$, откуда

$$\begin{aligned} I_x(0, b, \varphi) &= \frac{1}{2} \psi(+0) - \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} (\varphi(+0) + C - C) = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(+0). \end{aligned}$$

Пусть, наконец, функция φ монотонно возрастает. Рассмотрим функцию $\psi(x) = -\varphi(x)$, которая монотонно убывает. Тогда мы имеем по предыдущему

$$\begin{aligned} I_x(0, b, \varphi) &= I_x(0, b, -\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b (-\psi(x)) \chi_n(x) dx = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \psi(x) \chi_n(x) dx = -\frac{1}{2} \psi(+0) = \varphi(+0). \end{aligned}$$

Лемма 2. Если $a < 0$ и функция φ монотонна на сегменте $[a, 0]$, то

$$I_x(a, 0, \varphi) = \frac{1}{2} \varphi(-0).$$

Доказательство. Возьмем функцию $\psi(x) = \varphi(-x)$. Эта функция определена на сегменте $[0, -a]$ (здесь $-a > 0$) и монотонна. Значит,

$$I_x(a, 0, \varphi) = I_x(0, -a, \psi).$$

Но по предыдущему

$$I_x(0, -a, \psi) = \psi(+0);$$

следовательно,

$$I_x(a, 0, \varphi) = \varphi(+0) = \varphi(-0),$$

а это и требовалось.

Лемма 3. Если функция φ задана на сегменте $[a, b]$ и монотонна на нем, то

$$I_x(a, b, \varphi) = \frac{1}{2} (\varepsilon^+[a, b] \varphi(+0) + \varepsilon^-[a, b] \varphi(-0)), \quad (16.20)$$

где

$$\varepsilon^+[a, b] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leq 0, \quad b > 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (16.21)$$

$$\varepsilon^-[a, b] = \begin{cases} 1, & \text{если } a < 0, \quad b \geq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (16.22)$$

Геометрически $\varepsilon^+[a, b] = 1$ означает, что, двигаясь

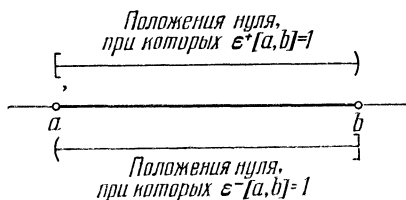


Рис. 20.

в пределах сегмента $[a, b]$, можно подойти к точке 0 справа, а $\varepsilon^-[a, b] = 1$ — что можно подойти к точке 0 слева (см. рис. 20).

Доказательство. Случаи $a=0$ и $b=0$ фактически нами уже рассматривались соот-

ветственно в леммах 1 и 2. Им отвечали случаи, когда $\varepsilon^+[a, b] = 1$ и $\varepsilon^-[a, b] = 0$ или соответственно $\varepsilon^+[a, b] = 0$ и $\varepsilon^-[a, b] = 1$.

Пусть теперь $a < 0 < b$. В этом случае $\varepsilon^+[a, b] = \varepsilon^-[a, b] = 1$. Поскольку $I_{x,n}(a, b, \varphi)$ является интегралом, должно выполняться свойство аддитивности

$$I_{x,n}(a, b, \varphi) = I_{x,n}(a, 0, \varphi) + I_{x,n}(0, b, \varphi),$$

и при переходе к пределу —

$$I_x(a, b, \varphi) = I_x(a, 0, \varphi) + I_x(0, b, \varphi).$$

Поэтому на основании лемм 1 и 2

$$\begin{aligned} I_x(a, b, \varphi) &= \frac{1}{2} (\varphi(+0) + \varphi(-0)) = \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon^+[a, b] \varphi(+0) + \varepsilon^-[a, b] \varphi(-0)). \end{aligned}$$

Пусть, далее, $a < b < 0$. Здесь $\varepsilon^+[a, b] = \varepsilon^-[a, b] = 0$. Продолжим функцию φ произвольно (соблюдая только монотонность и интегрируемость) на сегмент $[a, 0]$. Тогда, снова вспоминая, что $I_{\chi, n}(a, b, \varphi)$ — интеграл, мы можем написать

$$I_{\chi, n}(a, b, \varphi) = I_{\chi, n}(a, 0, \varphi) - I_{\chi, n}(b, 0, \varphi),$$

или, переходя к пределу и пользуясь леммой 2,

$$\begin{aligned} I_{\chi}(a, b, \varphi) &= \frac{1}{2} (\varphi(-0) - \varphi(-0)) = \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon^+[a, b] \varphi(+0) + \varepsilon^-[a, b] \varphi(-0)). \end{aligned}$$

Наконец, случай, когда $0 < a < b$, рассматривается точно так же.

Теорема. Пусть функция φ задана на сегменте $[a, b]$ и кусочно монотонна. Тогда

$$I_{\chi}(a, b, \varphi) = \frac{1}{2} (\varepsilon^+[a, b] \varphi(+0) + \varepsilon^-[a, b] \varphi(-0)), \quad (16.23)$$

где $\varepsilon^+[a, b]$ и $\varepsilon^-[a, b]$ определены, как и выше, по (16.21) и (16.22).

Доказательство. По определению кусочно монотонной функции (см. § 2 главы 9) можно указать конечное число таких точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b$, что в каждом из сегментов $[x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, \dots, r$, функция φ монотонна.

Пользуясь тем, что $I_{\chi, n}(a, b, \varphi)$ — интеграл, запишем

$$I_{\chi, n}(a, b, \varphi) = \sum_{k=1}^r I_{\chi, n}(x_{k-1}, x_k, \varphi),$$

или, в пределе,

$$I_{\chi}(a, b, \varphi) = \sum_{k=1}^r I_{\chi}(x_{k-1}, x_k, \varphi). \quad (16.24)$$

Из монотонности функции φ на каждом из сегментов $[x_{k-1}, x_k]$ следует, что к каждому слагаемому в (16.23) справа можно применить лемму 3:

$$\begin{aligned} I_{\chi}(a, b, \varphi) &= \sum_{k=1}^r \frac{1}{2} (\varepsilon^+[x_{k-1}, x_k] \varphi(+0) + \\ &\quad + \varepsilon^-[x_{k-1}, x_k] \varphi(-0)), \end{aligned}$$

или

$$I_x(a, b, \varphi) = \frac{1}{2} \varphi(+0) \sum_{k=1}^r \varepsilon^+[x_{k-1}, x_k] + \\ + \frac{1}{2} \varphi(-0) \sum_{k=1}^r \varepsilon^-[x_{k-1}, x_k]. \quad (16.25)$$

Очевидно, что для того, чтобы к точке 0 можно было подойти по сегменту $[a, b]$ слева, необходимо и достаточно,



Рис. 21.

чтобы к 0 можно было подойти слева по одному (и, очевидно, не более чем по одному) из сегментов $[x_{k-1}, x_k]$ (рис. 21). То же справедливо и для подхода к 0 справа. Значит,

$$\sum_{k=1}^r \varepsilon^+[x_{k-1}, x_k] = \varepsilon^+[a, b],$$

$$\sum_{k=1}^r \varepsilon^-[x_{k-1}, x_k] = \varepsilon^-[a, b].$$

Поэтому (16.25) может быть переписано как

$$I_x(a, b, \varphi) = \frac{1}{2} (\varepsilon^+[a, b] \varphi(+0) + \varepsilon^-[a, b] \varphi(-0)),$$

а это и требовалось.

§ 4. Доказательство теоремы Дирихле

Теорема Дирихле была сформулирована в § 2 главы 9. Установленные в трех предыдущих параграфах факты позволяют нам привести здесь ее доказательство.

Пусть f — интегрируемая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$ и

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

— ее тригонометрический ряд Фурье. Это значит, что коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам (9.5)—(9.7).

Рассмотрим сумму Фурье

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Подстановка в нее вместо коэффициентов Фурье их значений дает нам

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right) dt,$$

или

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right) dt.$$

Вычисляя стоящую в квадратных скобках сумму (это можно сделать подобно тому, как в § 8 главы I была вычислена знакопеременная сумма косинусов), мы получаем

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt. \quad (16.26)$$

Займемся преобразованием этого интеграла, предполагая, что функция f удовлетворяет условиям Дирихле.

Пусть сначала $-\pi < x < \pi$. Разобьем стоящий в (16.26) интеграл на два интеграла: в пределах от $-\pi$ до x и

от x до π . Получим

$$s_n(x) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt + \frac{1}{\pi} \int_x^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt.$$

Сделаем в первом интеграле подстановку $(t-x)/2 = -y$, а во втором — подстановку $(t-x)/2 = y$. Тогда мы получим

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{(\pi+x)/2} f(x-2y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} dy + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{(\pi-x)/2} f(x+2y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} dy.$$

В нашем случае $0 < (\pi \pm x)/2 < \pi$. Полагая в первом интеграле $f(x-2y) = \varphi_x(y)$, а во втором $f(x+2y) = \varphi_x(y)$ и $\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} = \chi_n(y)$ и пользуясь обозначениями и результатами предыдущего параграфа, мы получаем

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = I_{\chi} \left(0, \frac{\pi+x}{2}, \varphi_x \right) + I_{\chi} \left(0, \frac{\pi+x}{2}, \varphi_x \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(\varphi_x(+0) + \frac{1}{2} \varphi_x(-0) \right) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)),$$

т. е. формулу (9.8).

Пусть теперь $x = \pm \pi$. Предположим для определенности $x = -\pi$. В этом случае равенство (16.26) переписывается как

$$s_n(-\pi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{\pi+t}{2}}{2 \sin \frac{\pi+t}{2}} dt.$$

Разобьем последний интеграл на два: в пределах от $-\pi$ до 0 и от 0 до π . Получим

$$s_n(-\pi) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{\pi+t}{2}}{2 \sin \frac{\pi+t}{2}} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{\pi+t}{2}}{2 \sin \frac{\pi+t}{2}} dt.$$

Сделаем подстановки: $(\pi + t)/2 = y$ в первом интеграле и $(\pi - t)/2 = y$ — во втором. Замечая, что $\sin(2n+1)\frac{\pi-t}{2} = \sin(2n+1)\frac{\pi+t}{2}$ при всех n , мы получаем

$$s_n(-\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(-\pi + 2y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} dy + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\pi - 2y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} dy.$$

На основании теоремы предыдущего параграфа должно быть

$$s(-\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(-\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)).$$

Точно так же получается, что

$$s(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)).$$

Вместе с предыдущим это дает нам (9.9), и теорема Дирихле доказана.

§ 5. Теорема Фурье

Обратимся к доказательству теоремы Фурье, сформулированной в § 2 главы 11. Утверждение этой теоремы сводится к доказательству равенства (11.7)

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \alpha(x-t) dt \right) d\alpha$$

при оговоренных в теореме условиях, которым должна удовлетворять функция f .

Для дальнейшего введем обозначение

$$J(\lambda, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \alpha(x-t) dt \right) d\alpha. \quad (16.27)$$

Начнем с того, что по условию теоремы Фурье функция f должна быть абсолютно интегрируемой, т. е. должен

сходиться интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

Но при любых α и x тождественно по t

$$|f(t) \cos \alpha(x-t)| \leq |f(t)|.$$

Следовательно (более подробное рассуждение сильно напоминало бы доказательство признака равномерной сходимости Вейерштрасса из § 7 главы 5), при любых x и α абсолютно сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt$$

и сходимость эта равномерна в любом конечном интервале изменения α . Значит (см. теорему § 5 главы 5 о переходе к пределу под знаком интеграла), мы можем интегрировать этот интеграл по параметру в любых конечных пределах:

$$\int_0^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt \right) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_0^{\lambda} \cos \alpha(x-t) d\alpha \right) dt.$$

Внутренний интеграл справа вычисляется непосредственно. Вместе с (16.27) это дает нам

$$J(\lambda, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda(x-t)}{x-t} dt.$$

Разобьем теперь промежуток интегрирования на две части: от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞ . Получим

$$J(\lambda, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda(x-t)}{x-t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda(x-t)}{x-t} dt.$$

Введем подстановку $x-t=y$ в первом интеграле и $x-t=-y$ во втором. Мы получим

$$J(\lambda, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy. \quad (16.28)$$

Если бы верхние пределы в этих интегралах были конечными, то предельное поведение интегралов при $\lambda \rightarrow \infty$ определялось бы в соответствии с теоремой § 3: первый из интегралов в пределе был бы равен $f(x-0)$, а второй $f(x+0)$. Покажем, что наличие бесконечных пределов этой картины не изменяет. Для определенности мы займемся первым из интегралов в (16.28). Рассмотрение другого интеграла можно произвести совершенно так же.

Из абсолютной интегрируемости функции f следует сходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt$$

и, так как при любых λ и $y > 1$

$$\left| \frac{\sin \lambda y}{y} \right| < 1,$$

также сходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy,$$

которая притом равномерна по λ . Это значит, что по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое A , что при всех λ

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_A^{\infty} f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16.29)$$

Далее, согласно сказанному в § 3, полагая

$$\chi_n(t) = \frac{\sin nt}{t},$$

при достаточно больших значениях λ мы имеем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^A f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy - \frac{1}{2} f(x-0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16.30)$$

Комбинирование (16.29) и (16.30) дает нам, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy - \frac{1}{2} f(x-0) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{\pi} \int_A^{\infty} f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^A f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} f(x-0) \right| \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_A^{\infty} f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy \right| + \\ & \quad + \left| \frac{1}{\pi} \int_0^A f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy - \frac{1}{2} f(x-0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

а это означает, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy = \frac{1}{2} f(x-0).$$

Аналогично мы получаем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+y) \frac{\sin \lambda y}{y} dy = \frac{1}{2} f(x+0).$$

Тем самым, учитывая (16.28), имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J(\lambda, x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)),$$

и теорема Фурье доказана.

§ 6. Коэффициенты Фурье разрывных функций

Пусть определенная на $[-\pi, \pi]$ функция f разрывна, но вместе со своей производной f' удовлетворяет условиям Дирихле, и имеют место разложения в ряды Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx).$$

Пусть далее x_1, \dots, x_{r-1} — точки разрыва f , перечисленных в порядке их возрастания (т. е. слева направо). Дополним этот список «на всякий случай» точками $x_0 = -\pi$ и $x_r = \pi$ (см. по этому поводу конец § 2 главы 9) и будем считать, что

$$\begin{aligned} f(-\pi + 0) &= f(\pi + 0), \\ f(-\pi - 0) &= f(\pi - 0). \end{aligned}$$

Положим, наконец,

$$f(x_i + 0) - f(x_i - 0) = \delta_i \text{ для } i = 0, 1, \dots, r. \quad (16.31)$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функция f и ее производная f' удовлетворяют перечисленным выше условиям, то их коэффициенты Фурье связаны следующими соотношениями:

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^r \delta_i \sin nx_i - \frac{b'_n}{n}, \quad (16.32)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^r \delta_i \cos nx_i + \frac{a'_n}{n}. \quad (16.33)$$

Доказательство напоминает доказательство теоремы 1 § 14 главы 9. Мы имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx. \quad (16.34)$$

Разобьем интервал $(-\pi, \pi)$ на интервалы непрерывности функции f , которых конечное число. Применение к каждому из них интегрирования по частям

$$\int f(x) \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n} f(x) - \frac{1}{n} \int f'(x) \sin nx \, dx$$

дает нам

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos nx \, dx &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_{x_{i-1} + \varepsilon_1}^{x_i + \varepsilon_2} f(x) \cos nx \, dx = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \frac{\sin nx}{n} f(x) \Big|_{x=x_{i-1} + \varepsilon_1}^{x=x_i + \varepsilon_2} - \frac{1}{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

В силу непрерывности синуса первое слагаемое справа переписывается как $\frac{\sin nx_l}{n} f(x_l - 0) - \frac{\sin nx_{l-1}}{n} f(x_{l-1} + 0)$.

Суммирование этой разности по i от 1 до r с учетом (16.31) и (16.32), а также с заменой $x_0 + 0$ на $x_r + 0$ дает нам

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^r \frac{\sin nx}{n} \delta_i - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

или, замечая, что последнее слагаемое есть b'_n/n , мы получаем (16.32).

Соотношение (16.33) устанавливается аналогично.

§ 7. Скорость сходимости рядов Фурье

Рассуждения теоремы предыдущего параграфа можно повторять, применяя их к первой и второй, второй и третьей и т. д. производным функции f предполагая, однако, что как сама функция, так и все ее участвующие в рассуждениях производные удовлетворяют условиям Дирихле.

Итак, пусть

$$x_0^{(l)} = -\pi, x_1^{(l)}, \dots, x_{r_l-1}^{(l)}, x_{r_l}^{(l)} = \pi, \quad l = 0, 1, \dots, k,$$

— точки разрыва l -й производной функции f (считая саму функцию за ее нулевую производную), плюс, если нужно, точки $\pm \pi$, соответственно со скачками $\delta_0^{(l)}, \delta_1^{(l)}, \dots, \delta_{r_l-1}^{(l)}, \delta_{r_l}^{(l)}$,

и

$$f^{(l)}(x) = \frac{a_0^{(l)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(l)} \cos nx + b_n^{(l)} \sin nx).$$

На основании только что доказанной теоремы мы имеем по аналогии с (16.32) и (16.33).

$$a_n^{(l-1)} = -\frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{r_{l-1}} \delta_i^{(l-1)} \sin x_i^{(l-1)} - \frac{b_n^{(l)}}{n}, \quad (16.35)$$

$$b_n^{(l-1)} = \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{r_{l-1}} \delta_i^{(l-1)} \cos x_i^{(l-1)} + \frac{a_n^{(l)}}{n}, \quad (16.36)$$

или, полагая

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{r_{l-1}} \delta_i^{(l-1)} \cos x_i^{(l-1)} = A_n^{(l)}, \quad (16.37)$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{r_{l-1}} \delta_i^{(l-1)} \sin x_i^{(l-1)} = B_n^{(l)} \quad (16.38)$$

и исключая из системы равенств вида (16.35) и (16.36) все $a_n^{(l)}$ и $b_n^{(l)}$ с промежуточными верхними индексами, мы получаем

$$a_n = a_n^{(0)} = -\frac{A_n^{(0)}}{n} - \frac{B_n^{(1)}}{n^2} + \frac{A_n^{(2)}}{n^3} + \frac{B_n^{(3)}}{n^4} + \dots + \frac{c_n^{(k)}}{n^k}, \quad (16.39)$$

$$b_n = b_n^{(0)} = \frac{B_n^{(0)}}{n} - \frac{A_n^{(1)}}{n^2} - \frac{B_n^{(2)}}{n^3} + \frac{B_n^{(3)}}{n^4} + \dots + \frac{d_n^{(k)}}{n^k}, \quad (16.40)$$

где буквы $A_n^{(l)}$ и $B_n^{(l)}$, а также знаки при них чередуются в (16.39) как при последовательном дифференцировании «минус-синуса», а в (16.40) — как при последовательном дифференцировании косинуса.

Равным образом принимают свои значения и знаки $c_n^{(k)}$ — как k -я производная косинуса, начиная с $a_n^{(0)}$, а $d_n^{(k)}$ — как k -я производная синуса, начиная с $b_n^{(0)}$.

Из формул (16.39) и (16.40) видно, что наибольшее влияние на приближение к нулю коэффициентов Фурье имеют разрывы самой разлагаемой функции, а затем — последовательно — разрывы ее производных.

Говоря более точно, имеет место следующая теорема:

Теорема. Если функция f является 2π -периодической (в смысле $f(-\pi) = f(\pi)$) и имеет непрерывные и удовлетворяющие условиям Дирихле производные до $(k-1)$ -й включительно, а k -я ее производная удовлетворяет условиям Дирихле, то для ее коэффициентов Фурье a_n и b_n справедливы неравенства

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}},$$

где M — положительная константа.

Доказательство. В силу непрерывности функции f и ее первых $k-1$ производных должно быть

$$A_0 = B_0 = A_1 = B_1 = \dots = A_{k-1} = B_{k-1} = 0.$$

Вместе с тем числа $c_n^{(k)}$ и $d_n^{(k)}$ из (16.39) и (16.40) суть коэффициенты Фурье производной $f^{(k)}$, взятые с надлежащими знаками. Так как эта производная удовлетворяет условиям Дирихле, мы на основании теоремы 2 § 1 имеем

$$|c_n^{(k)}| \leq \frac{M}{n}, \quad |d_n^{(k)}| \leq \frac{M}{n}.$$

Подстановка этого в (16.39) и (16.40) дает нам требуемое.

В частности, если положить $k=1$, т. е. принять, что функция f непрерывна, а ее производная удовлетворяет условиям Дирихле, то сходимость ряда Фурье к f является равномерно непрерывной и абсолютной.

Действительно, в сформулированных условиях для коэффициентов разложения функции f в ряд Фурье имеет место

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^2},$$

так что требуемое выводится непосредственно из цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| &\leq |a_n| |\cos nx| + |b_n| |\sin nx| \leq \\ &\leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{2M}{n^2}, \end{aligned}$$

и нам остается сослаться на признак равномерной сходимости Вейерштрасса (§ 7 главы 5).

§ 8. Улучшение сходимости рядов Фурье по методу выделения особенностей

Из сказанного выше видно, что скорость сходимости рядов Фурье к соответствующим функциям существенно зависит от степени гладкости этих функций, т. е. от существования во всем интервале разложения производных вплоть до достаточно высоких порядков. Если же функция имеет разрывы, то сходимость к ней ее ряда Фурье (имеющая место, если функция удовлетворяет условиям Дирихле) в силу § 8 главы 5 не может быть даже рав-

номерной, и вопрос о скорости сходимости вообще становится несколько беспредметным.

Тем не менее и в теории и на практике приходится заменять недостаточно гладкие функции и, что еще хуже, — их производные, частичными суммами их рядов Фурье, причем желательно, чтобы погрешность от такой замены была незначительной, даже при удержании в сумме малого числа членов. Это может быть достигнуто в результате улучшения сходимости рядов Фурье, которое принадлежит А. Н. Крылову и несколько напоминает преобразование числовых рядов по Куммеру (см. § 6 главы 14). Предложенное Крыловым улучшение сходимости рядов Фурье состоит в: 1) в выделении из функции некоторой части, которая в силу своей негладкости плохо влияет на сходимость ряда Фурье, но зато удобно представляется в некотором замкнутом виде и 2) в суммировании оставшейся, хорошо сходящейся части.

Формально эта задача ставится следующим образом: требуется представить функцию f в виде суммы $\varphi + \psi$, где функция φ имеет замкнутый аналитический вид, а ψ является достаточно гладкой и потому разлагается в быстро сходящийся ряд Фурье. Ясно, что при этом функции f и φ имеют одни и те же нарушения гладкости, которой обладает функция ψ . Иногда точки нарушения гладкости функции называются ее *особенностями*, а весь описываемый здесь метод — *методом выделения особенностей*.

Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

Пример. Возьмем полученное нами в § 13 главы 9 разложение в ряд Фурье функции $f(x) = e^{\alpha x}$:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2 \operatorname{sh} \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \alpha}{\alpha^2 + n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} n}{\alpha^2 + n^2} \sin nx \right).$$

Функция f , рассматриваемая, как 2π -периодическая, является разрывной: в точке π она имеет скачок, величина которого равна $e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi} = 2 \operatorname{sh} \alpha \pi$. Скачок величины $\alpha^k (e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}) = 2\alpha^k \operatorname{sh} \alpha \pi$ имеет в этой же точке и каждая ее k -я производная.

Подставим задачу улучшить сходимость ряда Фурье этой функции настолько, чтобы фактически пришлось суммировать лишь ряд члены которого убывают как обратные кубы. В соответствии со сказанным выше для этого следует найти такую функцию φ , что разность $f - \varphi$ вместе со своей производной были бы непрерывны. Ясно, что в качестве функции φ можно взять квадратичный трехчлен

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c,$$

от которого потребуем, во-первых, больше для удобства

$$\varphi(-\pi) = a\pi^2 - b\pi + c = 0,$$

а затем —

$$\begin{aligned}\varphi(\pi) - \varphi(-\pi) &= 2b\pi = f(\pi) - f(-\pi) = 2 \operatorname{sh} \alpha\pi, \\ \varphi'(\pi) - \varphi'(-\pi) &= 4a\pi = f'(\pi) - f'(-\pi) = 2\alpha \operatorname{sh} \alpha\pi.\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$a = \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{sh} \alpha\pi, \quad b = \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \alpha\pi, \quad c = \left(1 - \frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{sh} \alpha\pi.$$

Согласно формулам (9.15) и (9.21) разложением функции в ряд Фурье будет

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \left(1 - \frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{sh} \alpha\pi + \\ &+ \frac{2 \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{\alpha}{n^2} \cos nx + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx \right),\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}f(x) - \varphi(x) &= \left(\frac{1}{\alpha\pi} - 1 + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{sh} \alpha\pi + \\ &+ \frac{2 \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2} - \frac{\alpha}{n^2} \right) \cos nx + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{\alpha^2 + n^2} - \frac{1}{n} \right) \sin nx \right),\end{aligned}$$

или, окончательно

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\frac{\alpha}{2} x^2 + x + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} + \\ &+ \frac{2 \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} \alpha^3}{n^2 (n^2 + \alpha^2)} \cos nx + \frac{(-1)^n \alpha^2}{n (n^2 + \alpha^2)} \sin nx \right).\end{aligned}$$

Несколько особый вид приобретает решаемая нами задача, если в качестве исходного материала задана не сама функция f , а ее разложение в ряд Фурье, причем каждый коэффициент разложения представлен в виде функции от своего номера n . В этом случае следует представить коэффициенты ряда в виде (16.39), (16.40), а затем объединять слагаемые с малыми степенями n в знаменателе в самостоятельные ряды и пытаться находить в явном аналитическом виде их суммы.

Пример. Рассмотрим ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} \sin nx \quad (0 < x \leq \pi)$$

и поставим задачу свести его суммирование к вычислению некоторых простых функций и суммирования ряда Фурье, коэффициенты которого убывают как обратные пятые степени номера n .

Для представления коэффициента

$$b_n = \frac{n}{n^2-1}$$

в виде (16.40) разложим дробь по обратным степеням n (подобные разложения уже встречались нам в §§ 2 и 3 главы 12), и требуемое представление приобретает вид

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3(n^2-1)}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3(n^2-1)}. \quad (16.41)$$

Как было обнаружено в примере из § 6 главы 9, для $0 < x \leq \pi$

$$\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = x,$$

так что суммой первого из рядов в (16.41) является $\frac{\pi-x}{2} - \sin x$.

Вычисление суммы второго ряда также несложно и может быть выполнено различными способами. Например, запишем формулу (9.21) в виде

$$\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) \frac{1}{4} = -\cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \dots,$$

а формулу (9.23) — в виде

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\pi}{4} = \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \dots$$

и, умножив второе из равенств на 2, прибавим к первому. Мы получим

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

Состоящий справа ряд по признаку Вейерштрасса сходится равномерно. Поэтому его можно почленно интегрировать, и это интегрирование

дает

$$\frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{3} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx.$$

Постоянная C может быть здесь определена из того условия, что при $x=0$ сумма ряда обращается в нуль. Следовательно, и $C=0$.

В результате мы окончательно имеем

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{3} - 2 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3 (n^2 - 1)}.$$

§ 9. О равномерной сходимости рядов Фурье

Примененным в предыдущем параграфе для вычислительных целей методом выделения особенностей функций можно воспользоваться и для доказательств теоретических утверждений. В качестве первого примера приведем распространение теоремы 1 § 14 главы 9 о равномерной сходимости сумм Фурье к соответствующей функции, если последняя имеет изломы (разрывы первой производной).

Теорема. Пусть заданная на сегменте $[-\pi, \pi]$ непрерывная функция f разлагается в ряд Фурье и имеет кусочно непрерывную первую производную (т. е. конечное число точек излома) и абсолютно интегрируемую вторую производную.

Тогда суммы Фурье функции f сходятся на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ к f равномерно.

Доказательство. Пусть x_1, \dots, x_r — все точки излома f , т. е. все те точки, в которых

$$f'(x-0) \neq f'(x+0)$$

(в том числе, возможно, и точки $-\pi$ или π , если $f(-\pi) \neq f(\pi)$).

Возьмем заданную на сегменте $[-\pi, \pi]$ и распространенную вне этого сегмента по 2π -периодичности функцию $h(x) = x^2$, разложение которой в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ было нами получено в § 9 главы 9 (см. формулу (9.21)). Сдвинем, согласно § 6 главы 9, сегмент разложения этой функции вправо на $x_i + \pi$ и умножим полученную функцию на

$$\frac{1}{4\pi} (f'(x_i + 0) - f'(x_i - 0))$$

(4π есть величина в точке $-\pi$ скачка производной продолженной с сегмента $[-\pi, \pi]$ по 2π -периодичности функции h).

Легко видеть, что получаемая функция φ_l имеет излом в точке x_l с тем же углом излома, что и функция f в этой точке. Поэтому непрерывная функция

$$f - \sum_{l=1}^r \varphi_l$$

не имеет изломов вовсе. Она, очевидно, разлагается в ряд Фурье, и ее вторая производная на $[-\pi, \pi]$ абсолютно интегрируема. Следовательно, по теореме 1 § 14 главы 9 суммы Фурье этой функции сходятся к ней равномерно. Кроме того, как было замечено в конце § 11 главы 9, суммы Фурье каждой из функций φ_l сходятся к своим функциям также равномерно. Поэтому в силу теоремы из § 3 главы 5 равномерно должны сходиться и суммы Фурье суммы функций

$$\left(f - \sum_{l=1}^r \varphi_l\right) \text{ и } \sum_{l=1}^r \varphi_l,$$

т. е. функции f .

§ 10. Неравномерная сходимость последовательностей непрерывных функций

Частичные суммы рядов Фурье являются непрерывными функциями. Поэтому, согласно § 4 главы 5, сходимость ряда Фурье какой-либо функции в точке ее разрыва не может быть равномерной. Для выяснения поведения рядов Фурье в точках разрыва соответствующих функций рассмотрим некоторые общие черты неравномерной сходимости непрерывных функций.

В примере из § 4 главы 5 в условиях неравномерной сходимости последовательности функций s_n были указаны различные значения двойного предела

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x_n \rightarrow x_0}} s_n(x_n) \quad (16.42)$$

в зависимости от выбираемой последовательности значений аргумента x_n .

Множество всех значений двойного предела (16.42), которые могут быть получены при различных сходящихся к x_0 последовательностях аргумента, имеет вполне определенное строение, которое мы сейчас опишем. Точнее говоря, мы будем рассматривать следующую, несколько более широкую задачу. Пусть последовательность функций s_1, \dots, s_n, \dots сходится к предельной функции s , причем:

1) в любой окрестности некоторой точки $x = x_0$ эта сходимость не является равномерной;

2) точка x_0 , для которой нарушается равномерная сходимость в смысле условия 1), является изолированной, т. е. существует такая окрестность ω точки x_0 , что для любой точки x из ω найдется содержащая ее окрестность, в которой последовательность функций s_1, s_2, \dots сходится равномерно.

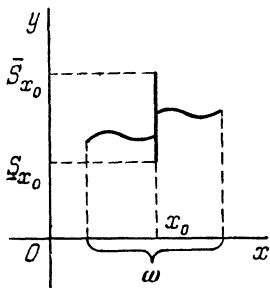


Рис. 22.

Пусть, далее, на плоскости изображены графики всех функций s_1, s_2, \dots . Пределом графиков s_n назовем такое множество S_ω точек на плоскости, что, какова бы ни была точка z этого множества, ее абсцисса принадлежит ω и для любой ее окрестности K (например, для круга малого радиуса с центром в z) графики всех функций s_n с достаточно большими номерами проходят через K .

Опишем вид множества S_ω .

Теорема 1. S_ω состоит из проходящего через ω участка графика функции s и некоторого вертикального отрезка, проходящего через точки $(x_0, s(x_0 - 0))$ и $(x_0, s(x_0 + 0))$ и содержащего отрезок, соединяющий эти точки (рис. 22).

Доказательство. Заметим прежде всего, что если точка x' из ω отлична от x_0 , то в S_ω имеется единственная точка с абсциссой x' : точка $(x', s(x'))$. Действительно, пусть (x', y) — другая такая точка. В некоторой ее окрестности последовательность s_n сходится к s равномерно, и потому, согласно теореме 1 § 4 главы 5, функция s в точке x' непрерывна. Следовательно, во-первых, найдет-

ся такая окрестность ω' точки x' , что для всякой точки x из ω' будет

$$|s(x) - s(x')| < \frac{1}{3} |y - s(x')|,$$

а во-вторых, найдется такая окрестность ω'' точки x' , что для всех x из ω'' , начиная с некоторого номера n , будет

$$|s_n(x) - s(x)| < \frac{1}{3} |y - s(x')|.$$

Значит, для всех x принадлежащих одновременно ω , ω' и ω'' , будет

$$|s_n(x) - s(x')| < \frac{2}{3} |y - s(x')|,$$

и потому

$$|y - s_n(x)| \geq |y - s(x')| - |s(x') - s_n(x)| > \frac{1}{3} |y - s(x')|.$$

Таким образом, точки графиков s_n , начиная с некоторого n , не могут проходить достаточно близко к точке (x', y) , которая тем самым не принадлежит S_ω .

Обратимся к рассмотрению множества S_0 точек из S_ω , имеющих вид (x_0, y) . Покажем, что это множество составляет промежуток: если (x_0, y') и (x_0, y'') с $y' < y''$ принадлежат S_0 и $y' < y < y''$, то (x_0, y) также принадлежит S_0 . В самом деле, возьмем попарно непересекающиеся круги K' , K и K'' с произвольным достаточно малым радиусом $\varepsilon > 0$ и соответственно центрами в точках (x_0, y') , (x_0, y) и (x_0, y'') (рис. 23). По условию, начиная с некоторого n' , все графики s_n проходят через K' , а, начиная с некоторого n'' , — через K'' . Пусть \bar{n} — большее из чисел n' и n'' . Тогда при $n \geq \bar{n}$ график функции s_n должен содержать некоторую точку (x'_n, y'_n) из круга K' и некоторую точку (x''_n, y''_n) из круга K'' (пусть для определенности $x'_n < x''_n$). Здесь мы имеем: $s_n(x'_n) = y'_n$ и $s_n(x''_n) = y''_n$. Ввиду непрерывности функции s_n она на сегменте

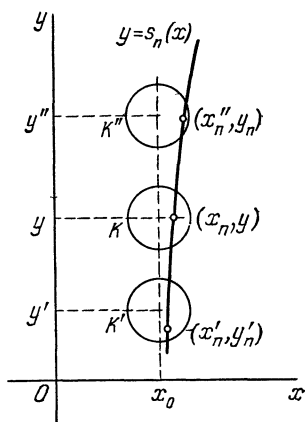


Рис. 23.

$[x'_n, x''_n]$ должна принимать любое промежуточное значение между y'_n и y''_n и в том числе — значение y . Пусть $s_n(x) = y$, где $x'_n < x < x''_n$. Во всяком случае, точка (x_n, y) должна находиться на горизонтальном диаметре круга K . Таким образом, через круг K проходят все графики функций, начиная с n . Значит, точка (x_0, y) принадлежит S_ω , т. е. S_0 .

Возьмем теперь произвольно $x' \leq x_0$ и $x'' \geq x_0$ из ω и обозначим через S^* множество тех точек из S_ω , абсциссы которых лежат в сегменте $[x', x'']$. Покажем, что множество S^* замкнутое, т. е. если имеется сходящаяся к пределу (x^*, y^*) последовательность точек (x_n, y_n) , принадлежащих S^* , то (x^*, y^*) также принадлежит S^* . Это доказывается весьма стандартным образом.

Возьмем точку (x^*, y^*) и опишем вокруг нее произвольный малый круг K^* . Он содержит точки вида (x_n, y_n) при достаточно большом n . Возьмем одну такую точку (x_n, y_n) и опишем около нее произвольный малый круг K_n , содержащийся в круге K^* . Поскольку по условию точка (x_n, y_n) принадлежит S^* , через круг K_n и тем самым — через круг K^* проходят все графики функций s_n с достаточно большими номерами. Следовательно, точка (x^*, y^*) принадлежит S^* .

Отсюда, во-первых, следует, что промежуток $S_{x_0} = S_0$ должен содержать свои концы, т. е. являться сегментом, а во-вторых, что он содержит точки

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} (x, s(x)) = (x_0, s(x_0 - 0))$$

и

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} (x, s(x)) = (x_0, s(x_0 + 0)),$$

а следовательно, по доказанному выше — и соединяющий их отрезок.

Теорема доказана.

Обозначим через $\bar{S}_0 = \bar{S}_{x_0}$ максимальное значение ординаты для точек из $S_0 = S_{x_0}$, а через $\underline{S}_0 = \underline{S}_{x_0}$ — минимальное значение. Эти числа можно находить, пользуясь следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть ω — некоторая окрестность точки x_0 , функция s_n достигает на ω своего наибольшего

значения в точке \bar{x}_n , и $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = x_0$. Тогда

$$\bar{S}_{x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\bar{x}_n). \quad (16.43)$$

Аналогично, если s_n достигает на ω своего наименьшего значения в точке \underline{x}_n и $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = x_0$, то

$$\underline{S}_{x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\underline{x}_n). \quad (16.44)$$

Разумеется, каждая из формул (16.43) и (16.44) имеет место, если существуют стоящие в них справа пределы.

Доказательство. Точки $(x_0, \underline{S}_{x_0})$ и (x_0, \bar{S}_{x_0}) , будучи пределами соответственно для последовательностей точек вида $(\bar{x}_n, s_n(\bar{x}_n))$ и $(\underline{x}_n, s_n(\underline{x}_n))$, очевидно, принадлежат S_{x_0} .

Всякая же вообще точка (x_0, y) из S_ω имеет вид предела некоторой последовательности точек $(x_n, s_n(x_n))$. Но в наших обозначениях для x_n из ω

$$s_n(\underline{x}_n) \leq s_n(x_n) \leq s_n(\bar{x}_n),$$

или, переходя к пределу,

$$\underline{s}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\underline{x}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\bar{x}_n) = \bar{s}(x_0),$$

т. е. y принадлежит сегменту $[\underline{s}(x_0), \bar{s}(x_0)]$.

Примеры.

1. Для последовательности

$$s_n(x_n) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad n=1, 2, \dots,$$

которая вблизи точки $x_0=0$ сходится неравномерно (см. § 4 главы 5), в качестве окрестности ω можно взять всю вещественную прямую. Мы имеем

$$s'_n(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2}{1+n^2x^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{1+n^2x^2} = 0$$

при $x = \pm \frac{1}{n}$, причем $s_n\left(\pm \frac{1}{n}\right) = \pm \frac{1}{2}$. Так как $s_n(0) = 0$ и при больших по модулю значениях x значения функции $s_n(x)$ также близки к нулю, точка $\bar{x}_n = \frac{1}{n}$ действительно оказывается максимумом, а точка $\underline{x}_n = -\frac{1}{n}$ — минимумом функции s_n .

Таким образом, ясно, что

$$\underline{s}(x_0) = -\frac{1}{2}, \quad \bar{s}(x_0) = \frac{1}{2}.$$

Графики функций $s_4(x)$ и $s_{40}(x)$, а также множество S_ω для этого случая изображены на рис. 24.

2. Для последовательности

$$s_n(x) = nxe^{-\frac{1}{2}nx^2},$$

которая также сходится неравномерно лишь вблизи $x_0=0$, можно считать, что ω есть вещественная прямая. Здесь

$$s'_n(x) = ne^{-\frac{1}{2}nx^2} - n^2x^2e^{-\frac{1}{2}nx^2} = ne^{-\frac{1}{2}nx^2}(1-nx^2) = 0$$

при $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Поскольку $s_n(0)=0$ и $s_n(\pm\infty)=0$, точка $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ является максимумом функции s_n , а точка $x = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ — ее минимумом.

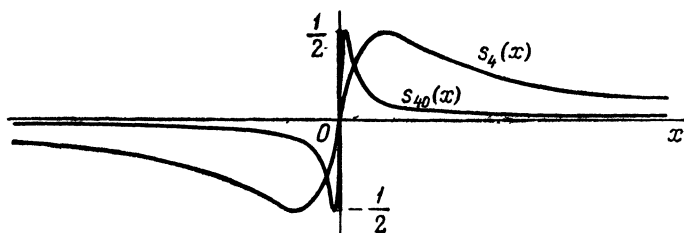


Рис. 24.

Мы имеем $s_n(\pm 1/\sqrt{n}) = \pm \sqrt{\frac{n}{e}}$. Таким образом, последовательность $s_n(1/\sqrt{n})$ неограниченно возрастает, а последовательность $s_n(-1/\sqrt{n})$ неограниченно убывает. S_0 в этом случае есть вся ось ординат.

§ 11. Поведение рядов Фурье функций в точках их разрыва. Явление Гиббса

Обратимся к рассмотрению сходимости рядов Фурье к своим функциям в точках их разрыва. Замечательным здесь является то, что (в обозначениях предыдущего параграфа), какова бы ни была функция f и ее изолированная точка разрыва x_0 , множество предельных точек F_{x_0} перекрывает сегмент между $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ симметричным образом и превосходит его по длине в каждую сторону на долю

$$\frac{\sin \pi}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 0,090,$$

где si есть уже встречавшаяся нам (см. пример 1 из § 12 главы 7) функция интегрального синуса. Этот факт был замечен Гиббсом на примере разложения в ряд Фурье функции

$$\varphi^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{для } 0 \leq x < 2\pi, \\ 0 & \text{для } x = 2\pi, \end{cases} \quad (16.45)$$

(см. § 6 главы 9) и получил название явления Гиббса.

Чтобы воспроизвести результат Гиббса, рассмотрим поведение сумм Фурье s_n^0 функции φ^0 . Мы имеем

$$s_n^0(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k},$$

или

$$s_n^0(x) = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt.$$

Но при $t > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos kt &= \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{k=1}^n \cos kt \sin \frac{t}{2} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sum_{k=1}^n \left(-\sin \frac{2k-1}{2} t + \sin \frac{2k+1}{2} t \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sin \frac{2n+1}{2} t - \sin \frac{t}{2} \right) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (16.46)$$

Продолжая это равенство по непрерывности и на $t=0$, мы получаем

$$s_n^0(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{2} x. \quad (16.47)$$

Будем исследовать превышения значений суммы Фурье $s_n^0(x)$ над соответствующими значениями функции $\varphi^0 = \frac{\pi - x}{2}$:

$$s_n^0(x) - \frac{\pi - x}{2} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt - \frac{\pi}{2}. \quad (16.48)$$

Отметим прежде всего, что стоящий справа интеграл, согласно сказанному в конце § 2, сходится с ростом n равномерно по x из любого сегмента вида $[\alpha, \pi - \alpha]$ при $0 < \alpha < \pi$. Следовательно, равномерно в любом таком сегменте сходятся к своей предельной функции и суммы Фурье $s_n^0(x)$.

Локальные максимумы правой части (16.48) достигаются в точках, для которых

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(s_n^0(x) - \frac{\pi - x}{2} \right) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(s_n^0(x) - \frac{\pi - x}{2} \right) &< 0. \end{aligned} \quad (16.49)$$

Но из (16.45) видно, что

$$\frac{d}{dx} \left(s_n^0(x) - \frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

В нуль эта дробь при $0 < x < \pi$ обращается в точках

$$x_{r,n} = \frac{2r}{2n+1} \pi \quad \text{при } r = 1, \dots, n-1.$$

Далее мы имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dx^2} \left(s_n^0(x) - \frac{\pi - x}{2} \right) \right|_{x=x_{r,n}} &= \frac{1}{2} \frac{\frac{2n+1}{2} \cos \frac{2n+1}{2} \frac{2r}{2n+1} \pi}{\sin \frac{r}{2n+1} \pi} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2n+1}{2} \frac{2r}{2n+1} \pi \cos \frac{r}{2n+1} \pi}{\sin^2 \frac{r}{2n+1} \pi} = \frac{2n+1}{4} \frac{(-1)^r}{\sin \frac{r}{2n+1} \pi}. \end{aligned}$$

Знаменатель последней дроби, очевидно, положителен. Значит, при r нечетном, т. е. вида $2k+1$, имеет место (16.49), и такие точки $x_{r,n}$ являются локальными макси-

мумами функции $s_n^0(x) - \frac{\pi - x}{2}$ (при четных значениях r соответствующие точки $x_{r,n}$ оказываются локальными минимумами). Значение этой функции в точке $x_{r,n}$, согласно (16.48), может быть записано как

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_{r,n}} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{r-1} \int_{x_{l,n}}^{x_{l+1,n}} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

Перейдем от переменной t к переменной u , полагая в l -м интеграле

$$t = x_{l,n} + (x_{l+1,n} - x_{l,n}) \frac{u}{\pi} = \frac{2l}{2n+1} \pi + \frac{2}{2n+1} u.$$

Мы получаем

$$\begin{aligned} s_n^0(x_{r,n}) - \frac{\pi - x_{r,n}}{2} &= \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{r-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(l\pi + u)}{\sin\left(\frac{l}{2n+1}\pi + \frac{1}{2n+1}u\right)} du = \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^r (-1)^l \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin \frac{l\pi + u}{2n+1}} dt. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $l \leq r \leq n-1$, должно быть $\frac{\pi l + u}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\sin \frac{\pi l + u}{2n+1}$ с ростом l при любом u возрастает, так что последний интеграл с ростом l убывает. Отсюда следует, что локальные максимумы превышения убывают слева направо, и первый из них, достигаемый при $x_{1,n} = \frac{2}{2n+1} \pi$, будет наибольшим. В этой точке мы имеем

$$s_n^0(x_{1,n}) - \frac{\pi - x_{1,n}}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n+1}} du,$$

а, переходя к пределу при возрастании n ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^0(x_{1,n}) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{1,n} &= \\ &= -\frac{\pi}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n+1}} du. \quad (16.50) \end{aligned}$$

Но для последнего предела имеет место

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n+1}} du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} \frac{u}{\sin \frac{u}{2n+1}} du = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{u}{2n+1}}{\sin \frac{u}{2n+1}} du = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du = \text{si } \pi, \end{aligned}$$

где si — функция интегрального синуса, о которой упоминалось в примере 1 § 12 главы 7.

Таким образом, (16.50) переписывается как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^0(x_{1,n}) = \text{si } \pi$$

и потому в обозначениях предыдущего параграфа

$$\bar{\Phi}^0 \geq \text{si } \pi. \quad (16.51)$$

С другой стороны, возьмем произвольную сходящуюся справа к нулю последовательность x_1, \dots, x_n, \dots . Сравнивая достижимые на этой последовательности превышения с наибольшими, мы имеем

$$s_n(x_{1,n}) - \frac{\pi - x_{1,n}}{2} \geq s_n(x_n) - \frac{\pi - x_n}{2}$$

или, переходя к пределу по n ,

$$\text{si } \pi - \frac{\pi}{2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) - \frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$\text{si } \pi \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n).$$

Но так как это неравенство справедливо для любой последовательности x_n , число $\text{si } \pi$ должно быть не меньше, чем наибольшее из них по всем последовательностям, т. е.

$$\text{si } \pi \geq \bar{\Phi}^0,$$

что вместе с (16.51) дает

$$\text{si } \pi = \bar{\Phi}^0.$$

Нам остается перейти от абсолютных величин превышений к относительным. Доля гиббсова превышения от скачка

функции φ^0 будет составлять

$$\frac{\sin \pi - (\pi/2)}{\pi} = \frac{\sin \pi}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 0,090,$$

а это и требовалось. Графики функций $s_9(x)$ и $s_{44}(x)$ справа от нуля, а также верхняя половина гиббсова отрезка изображены на рис. 25.

Переход к рассмотрению явления Гиббса для довольно широкого класса функций теперь уже не составляет труда и может быть проведен при помощи метода выделения особенностей.

Теорема. Пусть f — заданная на сегменте $[-\pi, \pi]$ ограниченная, кусочно непрерывная и кусочно дифференцируемая функция с абсолютно интегрируемой второй производной.

Тогда в любой точке разрыва x^* функции f имеет место явление Гиббса:

$$\begin{aligned} \frac{F_{x^*} - \max \{f(x^*+0), f(x^*-0)\}}{|f(x^*+0) - f(x^*-0)|} &= \frac{\sin \pi}{\pi} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{-F_{x^*} + \min \{f(x^*+0), f(x^*-0)\}}{|f(x^*+0) - f(x^*-0)|}. \end{aligned} \quad (16.52)$$

Доказательство. Пусть x_1^*, \dots, x_r^* — все точки разрыва функции f . Для каждого $l=1, \dots, r$ сдвинем в соответствии со сказанным в § 6 главы 9 сегмент разложения функции φ^0 из (16.45) на x_l^* вправо и умножим сдвинутую функцию на

$$\frac{1}{\pi} (f(x_l^*+0) - f(x_l^*-0)).$$

Полученную функцию мы обозначим через φ_l . Очевидно, она задана на сегменте $[-\pi, \pi]$, имеет единственную точку разрыва x_l^* с той же величиной скачка, что и функция f в точке x_l^* , и дифференцируема во всех точках, отличных от x_l^* . Согласно сделанному выше замечанию суммы Фурье $s_{n,l}$ функции φ_l сходятся к ней равномерно вне любой окрестности точки разрыва x_l^* .

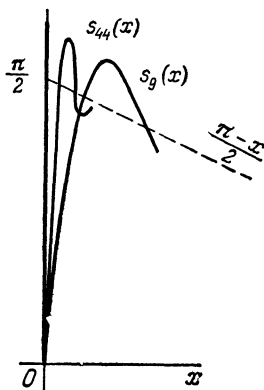


Рис. 25.

Значит, сумма $\sum_{l=1}^r \varphi_l$ является функцией с теми же точками разрыва и скачками в них, что и функция f , а ее суммы Фурье, являющиеся суммами соответствующих сумм Фурье функций φ_l , т. е. $\sum_{l=1}^r s_{n,l}$, сходятся к ней равномерно (см. теорему из § 3 главы 5), за исключением любых наперед заданных окрестностей точек разрыва.

Обозначим через s_n сумму Фурье функции f . Функция

$$\psi = f - \sum_{l=1}^r \varphi_l$$

является непрерывной кусочно дифференцируемой функцией с абсолютно интегрируемой второй производной. Согласно теореме § 9 ее суммы Фурье, каковыми будут

$$s_n - \sum_{l=1}^r s_{n,l},$$

сходятся к ней равномерно.

Возьмем теперь произвольную точку разрыва $x^* = x_{l_0}^*$ функции f . Пусть для определенности функция f в этой точке возрастает, т. е. $f(x^* - 0) < f(x^* + 0)$. Пусть x_1, \dots, x_n, \dots — произвольная последовательность точек непрерывности f , сходящаяся к x^* справа. Мы имеем

$$f = \left(f - \sum_{l=1}^r \varphi_l \right) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l_0}}^r \varphi_l + \varphi_{l_0},$$

или, обращаясь к суммам Фурье этих функций,

$$s_n = \left(s_n - \sum_{l=1}^r s_{n,l} \right) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l_0}}^r s_{n,l} + s_{n,l_0}.$$

Переход к значениям этих сумм Фурье в точках x_n дает нам

$$s_n(x_n) = \left(s_n(x_n) - \sum_{l=1}^r s_{n,l}(x_n) \right) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l_0}}^r s_{n,l}(x_n) - s_{n,l_0}(x_n),$$

а переход по n к пределу —

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s_n(x_n) - \sum_{l=1}^r s_{n,l}(x_n) \right) + \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l_0}}^r s_{n,l}(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,l_0}(x_n).$$

В силу равномерной сходимости к функции ψ ее сумм Фурье, первый предел справа равен значению функции $\psi(x^*)$. По тем же причинам значению функции в точке x^* равен второй предел. В результате, переходя к пределам и заменяя под знаками непрерывных функций $x^* + 0$ на x^* , мы можем написать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = f(x^* + 0) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l_0}}^r \varphi_l(x^*) - \varphi_{l_0}(x^* + 0) + \\ + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l_0}}^r \varphi_l(x^*) + \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,l_0}(x_n). \quad (16.53)$$

Подберем последовательность x_1, x_2, \dots так, чтобы оставшийся справа предел в (16.53) был максимальным. По разобранному в начале параграфа явлению Гиббса для функции φ_{l_0} он будет равен

$$\frac{1}{\pi} (f(x^* + 0) - f(x^* - 0)) \operatorname{si} \pi. \quad (16.54)$$

Кроме того, по определению функции φ_{l_0} должно быть

$$\varphi_{l_0}(x^* + 0) = \frac{1}{\pi} (f(x^* + 0) - f(x^* - 0)) \frac{\pi}{2}. \quad (16.55)$$

Предел в (16.53) слева тогда тоже принимает свое максимальное значение; согласно принятым обозначениям это будет \bar{F}_{x^*} . Тогда подстановка (16.54) и (16.55) в (16.53) дает нам непосредственно

$$\frac{\bar{F}_{x^*} - f(x^* + 0)}{f(x^* + 0) - f(x^* - 0)} = \frac{\operatorname{si} \pi}{\pi} - \frac{1}{2}. \quad (16.56)$$

В случае убывания функции f в ее точке разрыва x^* мы сходным образом получаем

$$\frac{F_{x^*} - f(x^* - 0)}{f(x^* - 0) - f(x^* + 0)} = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Вместе с (16.56) это дает нам левое равенство в (16.52).

Правое равенство в (16.52) получается аналогично.

Явление Гиббса может наблюдаться, как реальный факт. Предположим, что некоторое периодическое колебание с разрывами подвергается преобразованию, полностью гасящему все гармоники с достаточно высокими частотами (такие преобразования, равно, как и осуществляющие их устройства, принято называть *фильтрами*). Тогда, измеряя величину отклонения вблизи точки разрыва, мы можем наблюдать не просто различные значения между верхним и нижним пределами в этой точке, но и значения, выходящие за пределы этого интервала.

§ 12. Экстремальное свойство сумм Фурье

Если функция удовлетворяет надлежащим условиям, то ее суммы Фурье не только неограниченно приближаются к ней в пределе, но каждая из этих сумм в некотором, именно в квадратичном смысле (см. § 3 главы 3) описывает ее наилучшим образом. Точное содержание этого утверждения заключается в следующей теореме.

Теорема. *Если функция f интегрируема на сегменте $[-\pi, \pi]$ с квадратом, то из всех тригонометрических многочленов вида*

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

наиболее близким к f в квадратичном смысле на сегменте $[-\pi, \pi]$ будет n -я сумма Фурье. Иными словами, интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))^2 dx, \quad (16.37)$$

зависящий от многочлена t_n достигает своего минимума при $t_n(x) = s_n(x)$, т. е., когда коэффициенты t_n суть коэффициенты Фурье функции f .

Доказательство. Запишем интеграл (16.57) в виде

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \right)^2 dx.$$

Мы можем рассматривать его как функцию от коэффициентов $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$. Для достижения этим интегралом минимума необходимо, чтобы его частные производные по этим коэффициентам были равны нулю. Например, при $m=1, \dots, n$

$$\frac{\partial J}{\partial a_m} = - \int_{-\pi}^{\pi} 2 \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \right) \cos mx dx = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx - \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx - \\ & - \sum_{k=1}^n a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx - \sum_{k=1}^n b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx = 0. \end{aligned}$$

Вычисляя имеющиеся здесь интегралы по формулам (8.28), (8.29) и (8.30), мы получаем

$$- \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx + \pi a_m = 0,$$

т. е. a_m есть соответствующий коэффициент Фурье. Аналогично можно убедиться в том, что коэффициентами Фурье являются и все числа в b_k и a_0 . Все вторые производные по a_0, a_k и b_k здесь равны π , т. е. положительны, и мы действительно имеем дело с минимумом. («Расщепленность» переменных в исследуемом выражении избавляет нас от необходимости проводить более сложные рассуждения.)

То обстоятельство, что суммы Фурье наилучшим образом описывают поведение функции f в целом, еще не

означает, что они хорошо описывают ее в отдельных точках, даже если те являются точками непрерывности f . Для этой цели более приспособленным оказывается суммирование по Чезаро.

§ 13. Суммирование рядов Фурье по Чезаро. Теорема Фейера

Возникает естественный вопрос об условиях, которым должна удовлетворять функция f , чтобы ее ряд Фурье воспроизводил ее значения. Достаточными являются условия Дирихле, но они иногда могут представляться слишком стеснительными. Вместе с тем и значения функции не обязательно должны получаться как обычная сумма ряда Фурье, а могут определяться и иным, более общим образом.

Ответ на один из вариантов поставленного вопроса связан с переходом от обычного суммирования ряда Фурье функции к его суммированию по Чезаро (см. § 7 главы 15).

Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема Фейера. *Если функция f интегрируема на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодична с периодом 2π , то для всякой точки x , для которой существует предел*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) = \bar{f}(x), \quad (16.58)$$

ряд Фурье f суммируем в этой точке по Чезаро и имеет в ней сумму $\bar{f}(x)$.

Доказательство. На основании (16.26) для n -й частичной суммы Фурье функции f в точке x мы имеем

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt.$$

Приведем выражение в правой части к более удобному для нас виду интеграла Дирихле (см. начало § 3). Пользуясь описанным в § 6 главы 9 сдвигом сегмента разложения, мы можем написать

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

Разбивая этот интеграл на две части: от $-\pi$ до 0 и от 0 до π , заменим в первом интеграле t на $-t$ и переменим местами пределы интегрирования; тогда интеграл приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

Сдвигая сегмент разложения, во втором интеграле мы получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

Все вместе это дает

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt,$$

или, производя подстановку $2t$ вместо t ,

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

Полагая последовательно $n=0, 1, \dots$ и складывая n таких равенств, мы получаем

$$\begin{aligned} s_0(x) + \dots + s_{n-1}(x) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \frac{\sin t + \sin 3t + \dots + \sin(2n-1)t}{\sin t} dt. \end{aligned}$$

Но при $t > 0$ (переход к $t=0$ можно осуществить по непрерывности)

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sin(2r-1)t &= \frac{1}{\sin t} \sum_{r=1}^n \sin t \sin(2r-1)t = \\ &= \frac{1}{2\sin t} \sum_{r=1}^n (\cos(2r-2)t - \cos 2rt) = \\ &= \frac{1 - \cos 2nt}{2\sin t} = \frac{\sin^2 nt}{\sin nt}. \end{aligned} \quad (16.59)$$

Выражение

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} s_n(x)$$

мы обозначим через $\sigma_n(x)$ и будем называть *суммой Фейера* для функции f .

Учитывая (16.59), мы можем написать

$$\sigma_n(x) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt. \quad (16.60)$$

Стоящий здесь интеграл обычно называют *интегралом Фейера*.

Заметим, что для функции $f(x) = 1$ «нулевой» коэффициент Фурье a_0 равен 2, а все остальные коэффициенты Фурье суть нули. Поэтому все частичные суммы ряда Фурье для этой функции равны единице, суммы Фейера от нее также равны единице, так что и интеграл Фейера от нее должен быть равен единице:

$$1 = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt. \quad (16.61)$$

Пусть теперь φ — произвольная интегрируемая на $[0, \pi/2]$ функция, для которой $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$. Покажем, что для нее

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt = 0. \quad (16.62)$$

Возьмем с этой целью произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем в соответствии с предельным условием на φ такое $\delta < \pi/2$, что из $0 < t \leq \delta$ следует $|\varphi(t)| < \varepsilon/2$, и разобьем промежуток интегрирования на две части: от 0 до δ и от δ до $\pi/2$. Для интеграла по первой части мы будем иметь с учетом (16.61)

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{n\pi} \int_0^{\delta} \varphi(t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{2}{n\pi} \int_0^{\delta} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Вместе с тем для интеграла по второй части промежутка

$$\left| \frac{2}{n\pi} \int_{\delta}^{\pi/2} \varphi(t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \right| \leq \frac{2}{n\pi \sin^2 \delta} \int_{\delta}^{\pi/2} \varphi(t) dt.$$

Интегрируемость функции φ на $[0, \pi/2]$ означает ограниченность последнего интеграла, по крайней мере при достаточно малом δ , так что при достаточно большом n вся правая часть станет меньше чем $\varepsilon/2$, и (16.62) установлено.

Теперь мы можем, умножив (16.61) на $\bar{f}(x)$ и отняв почленно от (16.60), получить

$$\sigma_n(x) - \bar{f}(x) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} - \bar{f}(t) \right) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

По условию первый сомножитель под знаком интеграла вместе с t стремится к нулю. Но тогда по только что доказанному к нулю должен стремиться и весь интеграл. Теорема доказана.

Заметим, что описываемая в теореме Фейера сходимость зависит от конкретного значения x лишь в той мере, в какой от x зависит сходимость полусуммы $\frac{1}{2} (f(x+2t) + f(x-2t))$ к пределу $\bar{f}(x)$. Если же функция f на сегменте $[-\pi, \pi]$ непрерывна, а поэтому и равномерно непрерывна, то и сходимость указанной полусуммы к $\bar{f}(x)$ (какое-либо значение в случае непрерывности просто совпадает с $f(x)$) будет равномерной по x на сегменте $[-\pi, \pi]$. Это значит, что равномерной будет сходимость сумм Фейера $\sigma_n(x)$ к $f(x)$.

Таким образом, для случая непрерывных функций теорема Фейера дает следующий весьма законченно выглядящий результат.

Теорема 2. Если функция f непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фурье этой функции в каждой точке x этого сегмента суммируем по Чезаро с суммой $f(x)$, причем сходимость сумм Фейера является равномерной на всем сегменте $[-\pi, \pi]$.

§ 14. Равенство Парсеваля

В качестве первого примера применения теоремы Фейера выведем важное равенство Парсеваля.

Теорема 1. Если f — заданная на $[-\pi, \pi]$ ограниченная функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (16.63)$$

— ее ряд Фурье, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

(последнее равенство и называется *равенством Парсеваля*).

Доказательство. Заметим сначала, что при любом n в силу экстремальности сумм Фурье (см. § 12)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx \quad (16.64)$$

(где, как обычно s_n — суммы Фурье, а σ_n — суммы Фейера для ряда (16.63)). Покажем, что стоящий справа интеграл с ростом n стремится к нулю. Заключим для этого каждую из точек разрыва функции f в малый интервал и обозначим сумму (объединение) всех этих интервалов через ω , а ее дополнение до сегмента $[-\pi, \pi]$ — через Ω . Возьмем n -ю сумму Фейера σ_n функции f и напомним равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx \end{aligned}$$

и будем оценивать каждый из стоящих справа интегралов.

Обозначим верхнюю границу f на ω через M , а сумму длин составляющих ω интервалов через α . В любой точке непрерывности функции f в интеграле Фейера полусумма пределов функции справа и слева может быть заменена просто на значение функции, и формула (16.60)

приобретает вид

$$\sigma_n(x) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dx,$$

так что в нашем случае с учетом (16.61) на основании первой теоремы о среднем будет

$$|\sigma_n(x)| \leq M.$$

Поэтому во всяком случае

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq 2M,$$

и мы получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx \leq \frac{4M^2}{2\pi} \alpha. \quad (16.65)$$

С другой стороны, в силу равномерной на Ω сходимости сумм Фейера σ_n к функции f , каково бы ни было $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n будет $|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx \leq \frac{2\pi}{2\pi} \varepsilon^2 = \varepsilon^2.$$

В итоге мы получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx \leq \frac{2M^2}{\pi} \alpha + \varepsilon^2,$$

причем выбираемые заранее α и ε могут быть взяты сколь угодно малыми. Но тогда в силу (16.64)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx \leq \frac{2M^2}{\pi} \alpha + \varepsilon^2.$$

Заметим, что ввиду неотрицательности подынтегральной функции неотрицательным должен быть и сам интеграл.

Далее мы имеем стандартным образом

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \right)^2 dx = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx f(x) dx - \\
 &\quad - 2 \sum_{k=1}^n b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx f(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx + \\
 &\quad + a_0 \sum_{k=1}^n a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + a_0 \sum_{k=1}^n b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(a_k a_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx + a_k b_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx + \right. \\
 &\quad \left. + b_k a_l \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx dx + b_k b_l \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx \right),
 \end{aligned}$$

или, пользуясь формулами (8.27)–(8.29), (9.5)–(9.7) и элементарными тригонометрическими фактами,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - a_0^2 \pi - 2\pi \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2\pi \sum_{k=1}^n b_k^2 + \\
 &\quad + \frac{a_0^2}{4} 2\pi + \pi \sum_{k=1}^n a_k^2 + \pi \sum_{k=1}^n b_k^2,
 \end{aligned}$$

или

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

и окончательно

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \frac{2M^2}{\pi} \alpha + \varepsilon^2.$$

Отсюда требуемое следует немедленно.

Равенство Парсеваля представляет собой естественное обобщение на ортонормальную систему тригонометрических функций теоремы Пифагора (ср. (8.24)). Механический его смысл (см. § 4 главы 9) состоит в том, что при рассмотрении любого 2π -периодического движения материальной точки энергия этого движения (определяемая интегралом от квадрата амплитуды) полностью исчерпывается энергиями составляющих его гармоник.

В § 14 главы 9 было установлено, что функции из весьма широкого класса разлагаются в тригонометрические ряды единственным образом. Равенство Парсеваля дает возможность в некотором смысле обратное утверждение.

Теорема 2. Один и тот же тригонометрический ряд может быть рядом Фурье не более чем одной заданной на $[-\pi, \pi]$ непрерывной функции.

Доказательство. Пусть f и g — заданные на $[-\pi, \pi]$ непрерывные функции с одними и теми же коэффициентами Фурье. Из самого вида формул (9.5)—(9.7) немедленно вытекает, что в этом случае все коэффициенты Фурье разности $f - g$ суть нули. Но разность $f - g$ вместе с функциями f и g является непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функцией, и к ней применимо равенство Парсеваля, имеющее в данном случае вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

Для непрерывных же функций f и g это возможно лишь при их тождественном равенстве.

§ 15. Теорема Вейерштрасса

В качестве другого важного следствия теоремы Фейера (имеющего многочисленные как теоретические, так и практические приложения), приведем следующую теорему.

Теорема Вейерштрасса (о приближении непрерывных функций полиномами). Если F — заданная на сегменте $[a, b]$ непрерывная функция, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то найдется такой полином P , для которого

$$|F(x) - P(x)| < \varepsilon \text{ при всех } x \text{ из } [a, b]. \quad (16.66)$$

Доказательство. Сдвигая интервал задания функции на a влево и изменяя его длину в $\frac{\pi}{b-a}$ раз, мы

приходим к рассмотрению функции f на сегменте $[0, \pi]$:

$$f(x) = F\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right).$$

Продолжим функцию f на сегмент $[-\pi, 0]$ по четности и будем приближаться к ней, суммируя ее ряд Фурье по Чезаро. В силу установленной в предыдущем параграфе равномерной сходимости этого суммирования, по заданному $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n , будет

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16.67)$$

Но каждая сумма Фурье s_k является суммой конечного числа выражений вида

$$a \cos px + b \sin qx \quad (16.68)$$

с целыми p и q . Поэтому суммой конечного числа таких выражений является и всякая сумма Фейера σ_n .

Каждое из выражений (16.68) разлагается, согласно § 3 главы 7, в ряд Маклорена, который в любой конечной области изменения переменного x сходится и притом равномерно (в чем можно без труда убедиться, применяя к оценке остаточного члена в § 3 главы 7, признак Вейерштрасса из § 7 главы 5). Значит, равномерно сходится и степенный ряд, составляющий сумму Фейера σ_n . Отсюда следует, что мы можем взять некоторую частичную сумму $p(x)$ этого степенного ряда, для которой будет

$$|p(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } x \text{ из } [-\pi, \pi].$$

Вместе с (16.67) это дает нам

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Наконец, полагая

$$p\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right) = P(x)$$

и обращая внимание на то, что P вместе с p также является полиномом, мы окончательно получаем (16.66), а это и требовалось.

**ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ
В ТЕОРИИ ИЗГИБА БАЛОК****§ 1. Общая схема решения задач**

В главе 10 описывалось применение рядов Фурье к исследованию упругих колебаний струны. В данной главе мы рассмотрим некоторые вопросы упругого изгиба балок.

Использование рядов Фурье для решения задач статики упругих тел производится по следующей схеме.

Прежде всего из физических соображений выводится соотношение, которое связывает функцию, описывающую геометрическое состояние деформированного тела, с приложенными к телу нагрузками. Это соотношение, вообще говоря, содержит, помимо самой функции состояния, еще и ее производные, а также некоторые интегральные характеристики.

Затем, исходя из геометрических очертаний тела и кинематических условий, ограничивающих его перемещения, выбирается ортогональная система функций, по которой указанная функция состояния разлагается в ряд Фурье.

Подстановка этого ряда Фурье в выведенное соотношение приводит к тождественному равенству двух рядов Фурье, от которого, пользуясь теоремой 2 § 14 главы 9, можно перейти к равенству коэффициентов при одинаковых функциях. Из этих последних равенств можно вычислить значения коэффициентов Фурье и тем самым описать состояние деформированного тела.

Этот процесс подстановки ряда Фурье в характеризующее изгиб соотношение следует осуществлять достаточно осмотрительно, ибо в ходе его приходится несколько раз почленно дифференцировать ряды Фурье, коэффициенты которых вычисляются лишь впоследствии. Убедиться в правомерности этого дифференцирования, т. е. (см. § 10 главы 5) в равномерной сходимости ряда, составленного

из производных членов дифференцируемого ряда, априори довольно затруднительно. Поэтому при решении каждой конкретной задачи мы будем рассуждать примерно следующим образом.

Сначала мы будем предполагать, что написанный с неизвестными пока коэффициентами ряд Фурье можно (в смысле теоремы § 10 главы 5) почленно дифференцировать нужное число раз. Выписывая производные и решая получающиеся уравнения, мы будем находить интересующие нас коэффициенты Фурье. Это будет означать, что *если* ряд Фурье поддается почленному дифференцированию (и притом столько раз, сколько это требуется), *то* он является вполне определенным, найденным нами рядом. Если теперь из рассмотрения полученных коэффициентов будет видно, что этот построенный, вполне определенный ряд *действительно* почленно дифференцируем, то все операции, сделанные фактически именно над этим рядом, были законными, и найденные коэффициенты Фурье — искомые. Если же окажется, что получился недифференцируемый ряд, то это значит, что сделанные с ним ранее действия были математически некорректными, а полученный на их основе результат — необоснованным, хотя, возможно, и верным. Далее мы познакомимся с примерами исходов обоих типов.

§ 2. Изгиб балки

Будем далее называть балкой достаточно жесткое и тонкое упругое тело. Тонкость и жесткость балки понимаются в том смысле, что как поперечные ее размеры, так и перемещения точек в результате приложения к балке усилий считаются достаточно малыми по сравнению с ее длиной. Мы будем предполагать балку прямолинейной, т. е. считать, что отклонениями ее формы от прямолинейного отрезка можно пренебречь. В отличие от струны (см. § 1 главы 10), балка оказывает сопротивление только изгибающим (т. е. изменяющим кривизну) усилиям. Напротив, мы будем считать, что растягивающим (т. е. изменяющим длину балки как целого) усилиям балка вовсе не поддается. В этом параграфе содержится формальный вывод дифференциальных соотношений, связывающих нагрузку, приложенную к балке, с деформациями балки.

Предположим, что балка расположена вдоль оси Ox между точками $x=0$ и $x=l$. Вертикальное перемещение точки балки с абсциссой x будем обозначать через $v(x)$. Положительным на оси v будем считать направление вниз (рис. 26). Мы ограничимся рассмотрением плоского изгиба, т. е. будем предполагать, что все прикладываемые к балке усилия действуют в плоскости xOv .

Для каждой системы нагрузок R , приложенных к балке, будем через $M_R(x)$ обозначать вызываемый ею (а также порожденными ею реакциями опор) изгибающий момент в сечении x этой балки.

Рассмотрим теперь две прикладываемые к балке системы нагрузок, R и S . Мы будем при этом предполагать, что изгибающие

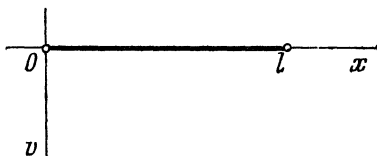


Рис. 26.

усилия, порождаемые нагрузкой S , приложенной к предварительно ненагруженной балке, совпадают с дополнительными изгибающими усилиями $M_{R+S} - M_R$, возникающими в балке, к которой предварительно приложена нагрузка R . Иными словами, мы будем считать, что

$$M_R(x) + M_S(x) = M_{R+S}(x). \quad (17.1)$$

Разумеется, такое предположение носит чисто физический характер и должно каждый раз проверяться. Ясно вместе с тем, что если нагрузка R «не очень сильно» изменяет прямолинейную форму балки, а нагрузка S — поперечная, то предположение (17.1) не противоречит обстоятельствам дела.

Из (17.1), предполагая «непрерывность» зависимости значения изгибающего момента $M_R(x)$ в каждой точке x от нагрузки R и обозначая через αR нагрузку R , «умноженную» на α (т. е. увеличенную в α раз, если $\alpha > 1$, и уменьшенную в $1/\alpha$ раз, если $\alpha < 1$), мы можем получить, что

$$M_{\alpha R}(x) = \alpha M_R(x). \quad (17.2)$$

Возьмем балку, на которую действует распределенная нагрузка R , имеющая некоторую интенсивность $q(x)$ в каждой точке x . Пусть характер прикрепления балки

к несущим ее конструкциям таков, что реакция левой ее опоры состоит из силы P и момента M (рис. 27). В этом случае изгибающий момент $M_R(x)$ в поперечном сечении балки с абсциссой x равен, как легко подсчитать,

$$M + Px - \int_0^x (x-t) q(t) dt. \quad (17.3)$$

Дифференцируя это выражение по x (последнее слагаемое дифференцируется, во-первых, как интеграл с переменным верхним пределом x , а во-вторых, как интеграл, зависящий от параметра x), мы получаем

$$\frac{dM_R(x)}{dx} = P + (x-x)q(x) - \int_0^x q(t) dt = P - \int_0^x q(t) dt.$$

Повторное дифференцирование дает нам

$$\frac{d^2 M_R(x)}{dx^2} = -q(x). \quad (17.4)$$

Обратимся теперь к деформациям балок.

Пусть приложенная к балке нагрузка R состоит из двух моментов, приложенных к ее концам, которые равны

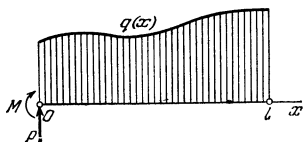


Рис. 27.

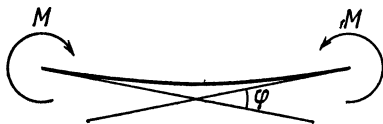


Рис. 28.

по величине M , противоположны по направлению и изгибают балку выпуклостью вниз (т. е. в направлении возрастания y). Будем считать, что никаких других усилий к балке не приложено. В результате действия на балку двух указанных моментов правый конец балки повернется относительно левого на некоторый угол, который мы обозначим через φ (рис. 28). Этот угол, очевидно, является некоторой функцией изгибающего момента M :

$$\varphi = \varphi(M). \quad (17.5)$$

Предположим, что φ есть линейная функция M :

$$\varphi = kM. \quad (17.6)$$

Это предположение соответствует закону Гука о пропорциональности деформаций усилиям. В условиях выбранных нами направлений изгибающих моментов и осей координат (x — направо, а y — вниз) угол φ оказывается отрицательным. Поэтому должно быть $k < 0$.

Считая впредь рассматриваемую балку однородной по длине, можно показать, как это делается во всех курсах сопротивления материалов, что

$$k = - \frac{l}{EI}, \quad (17.7)$$

где l — длина изгибаемой балки, I — момент инерции ее поперечного сечения относительно горизонтальной прямой, лежащей в плоскости этого сечения и проходящей через его центр тяжести, а E — модуль Юнга материала балки.

В целях полноты изложения напомним этот вывод.

В теории изгиба призматических балок обычно принимается «гипотеза плоских сечений» Сен-Венана. Она состоит в предположении, что каждое поперечное сечение ненагруженной балки после приложения к ней изгибающей нагрузки остается плоским и лишь поворачивается около оси изгибающего момента. Формально это равносильно предположению о том, что абсолютное удлинение Δl в направлении каждой нормали к сечению есть линейная функция координаты z , характеризующей положение этой нормали по высоте балки. Тем самым линейной функцией координаты z должно быть и нормальное напряжение σ в каждой точке сечения.

Заметим, что при отсутствии продольной нагрузки на балку равнодействующая внутренних продольных усилий в каждом ее сечении должна быть равна нулю. Значит, при одних значениях z нормальные напряжения положительны, а при других — отрицательны. В качестве начала отсчета z выберем тот уровень по высоте балки, на кото-

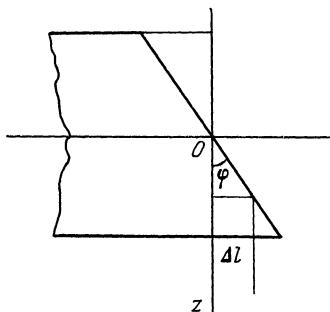


Рис. 29.

ром нормальные напряжения (а потому — и удлинения) равны нулю.

На рис. 29 изображен график удлинения Δl в зависимости от z . Поскольку балка предполагается жесткой, и углы ее поворота — малыми, угол φ можно по величине отождествить с его тангенсом и (с учетом выбора направлений осей) написать:

$$\Delta l = -\varphi z.$$

А так как напряжение σ определяется соотношением

$$\sigma = \frac{\Delta l}{l} E,$$

должно быть

$$\sigma = -\frac{\varphi E}{l} z.$$

Обозначим через $b(z)$ ширину балки на уровне z . Тогда усилие, действующее в «элементарном слое» dz , будет равно

$$\sigma b(z) dz = -\frac{\varphi E}{l} z b(z) dz,$$

а момент всех таких усилий относительно оси $z = 0$ —

$$M = -\frac{\varphi E}{l} \int_{z_1}^{z_2} z^2 b(z) dz.$$

Последний интеграл есть момент инерции I сечения относительно «нейтрального слоя» $z = 0$. Таким образом, $M = -\frac{\varphi E I}{l}$, что вместе с (17.6) и дает (17.7).

В условиях рассматриваемой на рис. 28 нагрузки R в каждом поперечном сечении балки с абсциссой x возникает изгибающий момент $M_R(x)$, который, очевидно, постоянен по длине балки и равен M :

$$M_R(x) = M_0 = M. \quad (17.8)$$

Из (17.6), (17.7) и (17.8) следует, что

$$\frac{\varphi}{l} = -\frac{M_0}{EI}. \quad (17.9)$$

Отношение φ/l есть угол поворота балки, отнесенный к единице ее длины, т. е. средняя кривизна балки. Поскольку в наших условиях балка однородна и действующая

щий в ней изгибающий момент постоянен по ее длине, кривизна балки во всех ее точках одинакова и равна средней кривизне. Но в условиях предполагаемой жесткости балки ее кривизну можно принять равной второй производной вертикального смещения точки балки по ее длине. Поэтому

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Вместе с (17.9) это дает нам

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_0}{EI}. \quad (17.10)$$

Заметим теперь, что кривизна («искривленность») изогнутой балки в некоторой ее точке x зависит только от изгибающего момента $M(x)$ в этой точке и не зависит от того, какими будут его значения в остальных точках балки. «Физически» (т. е. интуитивно) это представляется совершенно очевидным, а с формальной точки зрения это соответствует принимаемой при изучении напряжений в теле возможности отсекал любую его часть и заменять ее действие на оставшуюся часть тела надлежащей системой сил.

Значит, для каждой точки x балки можно написать

$$\frac{d^2v_R(x)}{dx^2} = -\frac{M_R(x)}{EI} \quad (17.11)$$

независимо от приложенной к балке нагрузки R . Иными словами, функция прогиба $v(x)$ балки связана с действующим в балке изгибающим моментом $M(x)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (17.12)$$

Из (17.12) следует, что, какова бы ни была дважды интегрируемая функция $M(x)$, описывающая изгибающий момент в балке, можно указать соответствующую ей функцию $v(x)$, описывающую прогибы этой балки. Эта функция $v(x)$ определяется по $M(x)$ единственным образом с точностью до линейного слагаемого $Ax + B$, соответствующего перемещениям балки как твердого тела. Для определения постоянных A и B следует указывать те или иные способы закрепления концов балки. Коль скоро эти

способы закрепления указаны, функция прогиба $v(x)$ определяется по функции изгибающего момента $M(x)$ однозначно.

С другой стороны, из того же равенства (17.12) следует, что по любой дважды дифференцируемой функции $v(x)$, для которой выполняются те или иные начальные (или краевые) условия, отвечающие кинематическим условиям закрепления балки, можно указать такую функцию $M(x)$, что приложение к балке усилий, приводящих в каждой ее точке x к изгибающему моменту $M(x)$, породит в каждой точке x вертикальное смещение $v(x)$.

Ввиду линейности дифференциального уравнения (17.12) при любых нагрузках R и S , для которых выполняется (17.1), должно иметь место и

$$\frac{d^2 v_{R+S}(x)}{dx^2} = - \frac{M_R(x) + M_S(x)}{EI}, \quad (17.13)$$

а при любом вещественном α из (17.2) следует:

$$\frac{d^2 v_{\alpha R}(x)}{dx^2} = - \alpha \frac{M_R(x)}{EI}. \quad (17.14)$$

Отсюда в свою очередь вытекает, что при исключении перемещения балки как твердого тела должно быть

$$v_{R+S}(x) = v_R(x) + v_S(x) \quad (17.15)$$

и

$$v_{\alpha R}(x) = \alpha v_R(x). \quad (17.16)$$

Отметим, наконец, что из (17.4) и (17.12) следует:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x). \quad (17.17)$$

Это соотношение принято называть *дифференциальным уравнением изгиба балки*.

§ 3. Свободно опертая балка

Пусть балка длины l , находящаяся под воздействием некоторой нагрузки, свободно оперта по концам. Это значит, что на обоих концах балки обращаются в нуль как вертикальные ее смещения:

$$v(0) = v(l) = 0, \quad (17.18)$$

так и изгибающие моменты:

$$M(0) = M(l) = 0 \quad (17.19)$$

(т. е. кривизна балки; см. рис. 30).

Действуя в соответствии с намеченным в § 1 планом решения задачи, выберем в качестве функции состояния балки функцию ее прогиба $v(x)$ и займемся подбором ортогональной системы функций, по которой будем разлагать эту функцию прогиба.

Рассмотрим для этого однородную по длине двухпролетную неразрезную балку с левым концом в $x = -l$ и правым — в $x = l$, одинаково опертую обоими своими концами на опоры и имеющую промежуточную опору при $x = 0$, препятствующую вертикальному смещению балки в этой точке: $v(0) = 0$. Пусть эта балка загружена «нечетным образом», т. е. каждой силе, приложенной к ней в точке $x = c$, соответствует равная ей по величине и противоположная по направлению сила, приложенная к балке в точке $x = -c$, а каждому моменту, приложенному к балке в точке $x = c$, — равный ему по величине и совпадающий по направлению момент, приложенный в точке $x = -c$ (рис. 31).

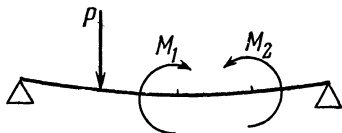


Рис. 30.

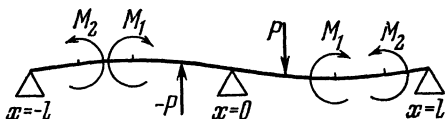


Рис. 31.

Соотношение (17.3) и следствие 1 теоремы § 8 главы 9 показывают, что изгибающий момент $M(x)$ в рассматриваемой балке является нечетной функцией x и, в частности, $M(0) = 0$. «Физически» естественно предполагать, что соответствующая функция прогиба $v(x)$ также является нечетной. Формально это также вытекает из следствия 1 теоремы § 8 главы 9, ибо функция $M(x)$ согласно (17.12) отличается лишь постоянным множителем от второй производной $v''(x)$ функции $v(x)$, а $v(0) = 0$.

Левая половина рассматриваемой неразрезной балки воздействует на правую ее половину лишь некоторой вертикальной («перерезывающей») силой и не прилагает к ней никакого изгибающего момента. Поэтому, если удалить левую половину балки, заменив ее соответствующей реакцией опоры, расположенной в точке $x=0$, то ни на изгибающих усилиях в правой половине балки, ни на значениях функции прогиба $v(x)$ при $x>0$ это никак не скажется. Наоборот, если рассматривать первоначально лишь правую часть балки, то присоединение к ней «по нечетности» левой части не изменит имеющейся картины изгиба.

Таким образом, естественно считать балку с левым концом в $x=0$ и правым в $x=l$ и свободно опертую на опоры своими концами половиной описанной выше «нечетной» неразрезной балки. Будем поэтому, в соответствии со сказанным в § 11 главы 9, рассматривать разложение функции прогиба $v(x)$ такой балки на сегменте $[0, l]$ в ряд Фурье по синусам:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.20)$$

Заметим, что функция прогиба v является непрерывной функцией и поэтому, согласно теореме Дирихле, действительно может быть разложена в ряд Фурье (и в том числе в ряд Фурье по синусам (17.20)), который везде сходится к этой функции.

Возникает соблазн определить коэффициенты этого разложения непосредственно на основании дифференциального уравнения изгиба балки (17.17).

В качестве примера, однако, возьмем случай, когда балка загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q на участке от 0 до $c < l$ и никак не загружена в оставшейся части (рис. 32).

Чтобы воспользоваться при этом дифференциальным уравнением изгиба (17.17), нужно четыре раза продифференцировать почленно ряд, описывающий функцию прогиба. Однако, согласно теореме § 10 главы 5, мы можем быть уверены в правомерности этого дифференцирования и в том, что полученная производная равна правой части (17.17), лишь в случае равномерной сходимости ряда четвертых производных членов ряда (17.20) к функции $q(x)$.

Но в рассматриваемом случае все четвертые производные членов ряда для $v(x)$, являющихся синусами с некоторыми коэффициентами, суть те же синусы, снабженные другими коэффициентами, так что являются во всяком случае непрерывными функциями. Следовательно, и их частичные суммы также непрерывны. В случае равномерной сходимости непрерывной должна быть на основании теоремы из § 8 главы 5 и сумма всего ряда. Но в действительности эта сумма равна $q(x)$, а эта функция разрывна.

Полученное противоречие показывает, что теорема о почленном дифференцировании рядов не дает нам оснований воспользоваться в этом случае дифференциальным уравнением изгиба (17.17) для нахождения коэффициентов ряда из (17.20).

Конечно, все сказанное не означает, что при использовании здесь для наших целей уравнения (17.17) коэффициенты b_n из разложения (17.20) будут определены неверно и что пользоваться уравнением (17.17) заведомо нельзя. Более того, описанный путь в данном случае приводит на самом деле к верному ответу. Однако правомерность такого пути и обоснованность ответа могут быть установлены лишь на основании более тонких и более частных соображений, чем общая теорема о почленном дифференцировании рядов.

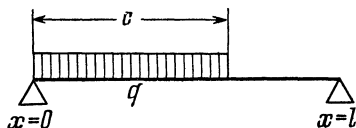


Рис. 32.

§ 4. Первая возможность ограничиться двукратным дифференцированием

В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе естественно попытаться рассматривать такие соотношения, описывающие состояние деформированной балки, которые содержат производные от функции прогиба менее чем четвертого порядка. Такого типа соотношения существуют. Одно из них уже фактически имеется в нашем распоряжении — это равенство (17.12):

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (17.21)$$

Пусть теперь на балку действует некоторая нагрузка R , приводящая к изгибающему моменту $M_R(x)$ в каждой ее точке x . Найдем из соображений статики (в той мере, какой это нам удастся) аналитическое выражение для момента $M_R(x)$ и разложим его в ряд Фурье на $[0, l]$ по синусам:

$$M_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.22)$$

Если приложенная к балке нагрузка R не содержит сосредоточенных моментов, то $M_R(x)$ является непрерывной функцией x , так что ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно (см. § 6 главы 16). Впрочем, во многих конкретных случаях эта равномерная сходимость будет вытекать уже из признака Вейерштрасса (§ 7 главы 5).

Разложением функции прогиба $v_R(x)$ от нагрузки R пусть будет

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Дифференцируя этот ряд почленно два раза (и заломиная, что это дифференцирование накладывает на нас обязательство проверить впоследствии его законность), мы получаем

$$\frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Подставим теперь в (17.21) вместо функций $M(x)$ и $\frac{d^2 v_R(x)}{dx^2}$ их разложения в ряды Фурье; мы будем иметь

$$- \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} n^2 \sin \frac{n\pi}{l} x = - \frac{1}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Если оба эти ряда сходятся равномерно, то приравнивание, в соответствии со сказанным в § 13 главы 7, их коэффициентов дает нам

$$\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 b_{R,n} n^2 = \frac{1}{EI} m_{R,n},$$

откуда

$$b_{R,n} = \frac{1}{\pi^2} \frac{l^2}{EI} \frac{m_{R,n}}{n^2}, \quad (17.23)$$

и окончательно

$$v_R(x) = \frac{1}{\pi^2} \frac{l^2}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{R,n}}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.24)$$

Вторые производные членов стоящего справа ряда пропорциональны соответствующим членам равномерно сходящегося ряда из (17.22). Следовательно, и этот ряд вторых производных сходится равномерно. Тем самым двукратное дифференцирование ряда из (17.23) законно.

Как будет видно из ближайших параграфов, описанная возможность находит довольно широкий круг приложений.

§ 5. Случай сосредоточенной нагрузки

Пусть балка свободно оперта своими концами при $x=0$ и $x=l$ и загружена вертикальной силой P , приложенной вниз к точке $x=c$ (рис. 33).

Очевидно, в этом случае реакции опор направлены вверх и равны $P(l-c)/l$ для левой опоры и Pc/l — для правой. Элементарный статический расчет показывает, что для изгибающего момента M_P справедливо соотношение

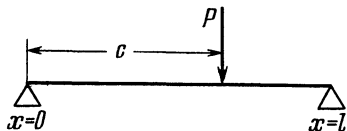


Рис. 33.

$$M_P(x) = \begin{cases} P \frac{l-c}{l} x, & \text{если } 0 \leq x \leq c, \\ P \frac{c}{l} (l-x), & \text{если } c \leq x \leq l. \end{cases} \quad (17.25)$$

Для коэффициентов m_n разложения $M_P(x)$ в ряд Фурье на $[0, l]$ по синусам (см. § 4) мы имеем

$$m_n = \frac{2}{l} \int_0^l M_P(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

или, подставляя выражения для значений функции $M_P(x)$ согласно (17.25) отдельно для $x \leq c$ и для $x \geq c$, имеем

$$m_n = \frac{2}{l} P \frac{l-c}{l} \int_0^c x \sin \frac{n\pi}{l} x + \\ + \frac{2}{l} P \frac{c}{l} l \int_c^l \sin \frac{n\pi}{l} x dx - \frac{2}{l} P \frac{c}{l} \int_c^l x \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (17.26)$$

Интегрирование по частям дает нам при любых a и b

$$\int_a^b x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = -x \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_a^b - \frac{l}{n\pi} \int_a^b \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \\ = -\frac{bl}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} b + \frac{al}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} a + \\ + \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} b - \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} a.$$

Подставляя такие выражения вместо первого и третьего интеграла в (17.26) (и беря второй интеграл непосредственно), мы получаем

$$m_n = \frac{2(l-c)}{l^2} P \left(-\frac{cl}{n\pi} \cos \frac{n\pi c}{l} + \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi c}{l} \right) + \\ + \frac{2c}{l} P \left(\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi c}{l} + (-1)^{n+1} \frac{l}{n\pi} \right) - \\ - \frac{2c}{l^2} P \left(\frac{cl}{n\pi} \cos \frac{n\pi c}{l} + (-1)^{n+1} \frac{l^2}{n\pi} - \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} \right),$$

или, после отбрасывания взаимно уничтожающихся членов,

$$m_n = \frac{2Pl}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{l} c. \quad (17.27)$$

Подстановка в (17.23) дает нам

$$b_n = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} c, \quad (17.28)$$

и окончательно

$$v_P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} c \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.29)$$

Производная функция прогиба по длине балки есть тангенс угла поворота φ ее поперечного сечения. Ввиду

предположенной жесткости балки этот тангенс мы будем при любой нагрузке R балки отождествлять с самым углом поворота:

$$\frac{dv_R(x)}{dx} = \varphi_R(x).$$

Поэтому выражение для $\varphi_R(x)$ может быть получено путем почленного дифференцирования ряда из (17.29):

$$\varphi_R(x) = \frac{2}{\pi^3} \frac{Pl^2}{EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^5} \sin \frac{(2r+1)\pi}{l} x. \quad (17.30)$$

Заметим, что x и c входят в выражение для прогиба балки в (17.29) симметрично. Отсюда вытекает известное «правило взаимности»: прогиб в точке x от силы, приложенной в точке c , равен прогибу в точке c от силы той же величины, приложенной в точке x . Стоящий в (17.29) ряд сходится весьма быстро, и для практических целей достаточно в нем удерживать малое число членов.

Пример. Найдем $v_P(l/2)$ при $c=l/3$. Положив для этого в (17.29) $x=l/2$, мы получим

$$v_P\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{3} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Здесь члены, соответствующие $n=2, 3, 4$, обращаются в нуль, а член с $n=5$ имеет коэффициентом $1/625$. Поэтому, ограничиваясь лишь первым членом ряда и полагая

$$v_P\left(\frac{l}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} = 0,017781 \frac{Pl^3}{EI},$$

мы допускаем относительную ошибку, не превосходящую 0,002.

Действительно, точное значение величины прогиба равно

$$\frac{23}{1296} \frac{Pl^3}{EI} = 0,017747 \frac{Pl^3}{EI}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка R на балку состоит из вертикальных сил P_1, \dots, P_k , приложенных соответственно к точкам с абсциссами $x=c_1, \dots, c_k$.

В этом случае мы можем искать коэффициент разложения

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

при помощи метода наложения, т. е. на основе соотношения

$$M_R(x) = \sum_{i=1}^k M_{P_i}(x), \quad (17.31)$$

которое вытекает из (17.1).

Если теперь положить

$$M_{P_i}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{i,n} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

и, как и раньше,

$$M_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

то из (17.31) будет следовать

$$m_{R,n} = \sum_{i=1}^k m_{i,n}.$$

Но разложение каждой из функций M_{P_i} нам уже известно. Согласно (17.27)

$$m_{i,n} = \frac{2lP_i}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{l} c_i,$$

так что

$$m_{R,n} = \frac{2l}{(n\pi)^2} \sum_{i=1}^k P_i \sin \frac{n\pi}{l} c_i,$$

Поэтому (17.23) дает нам

$$b_{R,n} = \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EI} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^k P_i \sin \frac{n\pi}{l} c_i,$$

и мы получаем

$$v_R(x) = \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^k P_i \sin \frac{n\pi}{l} c_i \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.32)$$

При применении метода наложения мы пользовались только линейностью соотношения (17.1) и не пользовались линейностью дифференциального уравнения (17.12) и вытекающего из него равенства (17.15). В действительности, однако, мы могли бы это сделать; тогда формула

(17.32) получилась бы в результате непосредственного суммирования коэффициентов в ряде Фурье в формулах вида (17.29). Поступая так, мы лишь придерживались обычной в математике «экономии предположений», состоящей в том, чтобы не пользоваться тем, без чего можно обойтись.

§ 6. Прогиб балки от распределенной нагрузки

Пусть балка находится под действием вертикальной нагрузки, распределенной по ее длине с плотностью $q(x)$ (рис. 34).

Мы будем решать эту задачу способом наложения.

Обозначим через $M_c(x)$ изгибающий момент, порожденный в балке элементарной сосредоточенной силой $q(c)dc$, приложенной в точке $x=c$, и напомним интегральный аналог формулы (17.31):

$$M_q(x) = \int_0^l M_c(x) dc.$$

Формула (17.22) дает нам

$$M_q(x) = \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} m_{c,n} \sin \frac{n\pi}{l} x \right) dc,$$

где, в соответствии с формулой (17.27),

$$m_{c,n} = \frac{2l}{(n\pi)^2} q(c) \sin \frac{n\pi}{l} c.$$

Значит,

$$M_q(x) = \frac{2l}{\pi^2} \int_0^l q(c) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} c \right) \sin \frac{n\pi}{l} x dc.$$

Стоящий здесь справа ряд можно понимать как функциональный ряд относительной переменной c . Согласно признаку Вейерштрасса он сходится равномерно, и потому его можно почленно интегрировать:

$$M_q(x) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\int_0^l q(c) \sin \frac{n\pi}{l} c dc \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.33)$$

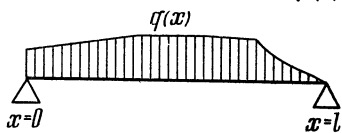


Рис. 34.

Для перехода от разложения в ряд Фурье момента $M_q(x)$ к разложению в ряд Фурье функции прогиба $v_q(x)$ нам остается, в соответствии с формулой (17.23), умножить n -й коэффициент ряда (17.33) на $\frac{1}{\pi^2} \frac{l^2}{EI} \frac{1}{n^2}$. В итоге мы получим

$$v_q(x) = \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(\int_0^l q(c) \sin \frac{n\pi}{l} c \, dc \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.34)$$

Разумеется, как и в предыдущем параграфе, мы могли бы применять метод наложения не к моменту, а непосредственно к прогибам, беря в (17.29) вместо P элементарную силу $q(c) \, dc$ и интегрируя ряд почленно по c .

Пример. Рассмотрим распределенную нагрузку, описанную в примере из § 3. Для нее

$$q(x) = \begin{cases} q & \text{при } 0 \leq x \leq c, \\ 0 & \text{при } c < x \leq l. \end{cases} \quad (17.35)$$

На основании сказанного в § 10 главы 9 (переходя от сегмента $[0, \pi]$ к сегменту $[0, l]$) имеем

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (17.36)$$

где

$$q_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

Учитывая вид описываемой в (17.35) функции $q(x)$, мы получим

$$q_n = \frac{2}{l} \int_0^c q \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{2}{l} q \frac{l}{n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi}{l} x \right) \Big|_0^c = \frac{2q}{n\pi} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{l} c \right). \quad (17.37)$$

Подстановка в (17.34) дает нам

$$v_q(x) = \frac{2}{\pi^4} \frac{l^4}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{1}{\pi} q \frac{1}{n} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{l} c \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

или

$$v_q(x) = \frac{2}{\pi^5} \frac{ql^4}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{l} c \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.38)$$

Дифференцируя $v_q(x)$ по x , мы получаем выражение для тангенса угла поворота сечения балки (который ввиду ее жесткости можно

отождествлять с самим углом):

$$\varphi_q(x) = \frac{dv_q(x)}{dx} = \frac{2}{\pi^4} \frac{ql^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{l} c \right) \cos \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.39)$$

В частности, если $c=l$, т. е. если равномерная нагрузка q распределена по всей длине балки, то мы получим

$$v_q(x) = \frac{4}{\pi^5} \frac{ql^4}{EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^5} \sin \frac{(2r+1)\pi}{l} x, \quad (17.40)$$

и

$$\varphi_q(x) = \frac{4}{\pi^4} \frac{ql^3}{EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4} \cos \frac{(2r+1)\pi}{l} x. \quad (17.41)$$

§ 7. Прогиб от сосредоточенного момента

Пусть та же свободно опертая балка загружена в точке $x=c$ сосредоточенным моментом величины M (рис. 35).

Представим функцию прогиба, как и выше, в виде

$$v_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Для решения этой задачи методом наложения можно взять $\varepsilon > 0$ и заменить момент M парой M_ε вертикальных сил величины M/ε каждая: силы P_1 , приложенной

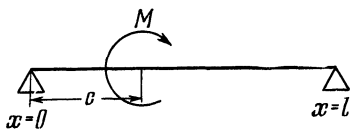


Рис. 35.

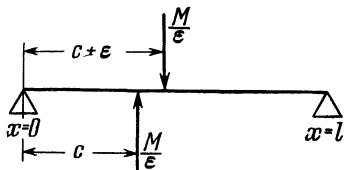


Рис. 36.

в точке c и направленной вверх, и силы P_2 , приложенной в точке $c+\varepsilon$ и направленной вниз (рис. 36), после чего, устремив ε к нулю, перейти к пределу.

Для разнообразия мы применим теперь метод наложения непосредственно к функции прогиба, т. е. воспользуемся равенством (17.15), которое в данном случае

записывается как

$$v_{M_\varepsilon}(x) = -v_{P_1}(x) + v_{P_2}(x),$$

или, после перехода к пределу по ε ,

$$v_M(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{M_\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-v_{P_1}(x) + v_{P_2}(x)).$$

Формула (17.32) дает нам теперь

$$v_M(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi^4} \frac{M}{EI} l^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \times \right. \\ \left. \times \left(\sin \frac{n\pi}{l} (c + \varepsilon) - \sin \frac{n\pi}{l} c \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

откуда (проверка законности почленного дифференцирования ряда по c не составляет труда)

$$\begin{aligned} v_M(x) &= \\ &= \frac{2}{\pi^4} \frac{Ml^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\sin \frac{n\pi}{l} (c + \varepsilon) - \sin \frac{n\pi}{l} c \right) \sin \frac{n\pi}{l} x = \\ &= \frac{2}{\pi^4} \frac{Ml^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} c \sin \frac{n\pi}{l} x = \\ &= \frac{2}{\pi^3} \frac{Ml^2}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi}{l} c \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.42) \end{aligned}$$

Почленное дифференцирование (17.41) по x дает нам

$$\varphi_M(x) = \frac{dv_M(x)}{dx} = \frac{2}{\pi^2} \frac{Ml}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{l} c \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.43)$$

Правую часть этой формулы мы примем, как и раньше, за описание угла поворота сечения балки в точке с абсциссой x .

§ 8. Статически неопределимая балка

Разложение в ряд Фурье функций прогиба и углов поворота изогнутой балки позволяет рассматривать и статически неопределимые задачи. Общий подход здесь не отличается в принципе от обычного. Именно, «лишние»

реакции опор рассматриваются как неизвестные внешние силы, которые вместе с известной нагрузкой осуществляют прогиб, удовлетворяющий кинематическим условиям, вытекающим из особенностей опор. Эти условия записываются в виде уравнений относительно неизвестных реакций. Особенностью рассматриваемого здесь приема являются специфические (в виде рядов Фурье) представления функций прогиба и угла поворота.

Для иллюстрации сказанного ограничимся примером балки длины l , жестко заделанной левым концом, свободно опертой правым и находящейся под воздействием равномерно распределенной по всей длине балки нагрузки q (рис. 37).

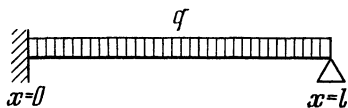


Рис. 37.

Если бы эта балка была свободно оперта на обе опоры, то согласно (17.39) (где следует положить $c=l$) угол ее поворота в точке $x=0$ под воздействием нагрузки q был бы равен

$$\varphi_q(0) = \frac{4}{\pi^3} \frac{ql^3}{EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}. \quad (17.44)$$

Если, далее, в точке $c=0$ к этой балке приложить сосредоточенный изгибающий момент M , то угол поворота от такого момента в точке $x=0$ ввиду (17.43) должен быть равен

$$\varphi_M(0) = \frac{2}{\pi^2} \frac{Ml}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (17.45)$$

Условие жесткой заделки левого конца балки означает, что

$$\varphi_q(0) + \varphi_M(0) = 0.$$

Вместе с (17.44) и (17.45) это дает нам

$$M = - \frac{\frac{4}{\pi^4} \frac{ql^3}{EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}}{\frac{2}{\pi^2} \frac{l}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = - \frac{2}{\pi^2} ql^2 \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}. \quad (17.46)$$

Вступив при изучении изгиба балок на путь использования теории рядов, естественно применять различные известные в этой теории формулы и соотношения. Например, в примере из § 11 главы 9 была вычислена сумма стоящего в знаменателе ряда. Она оказалась равной $\pi^2/6$. Поэтому (17.46) можно переписать как

$$M = -\frac{12}{\pi^4} ql^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}. \quad (17.47)$$

Можно, просуммировав оставшийся здесь ряд, найти, что

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (17.48)$$

Тогда окажется, что

$$M = -\frac{1}{8} ql^2, \quad (17.49)$$

что, как известно, является точным решением задачи.

Можно, наоборот, действуя классическими методами сопротивления материалов, получить формулу (17.49) непосредственно, и тогда (17.47) даст нам формулу (17.48) для суммы ряда. Здесь представляется любопытной логическая эквивалентность формул (17.48) и (17.49) в предположении, что установлена формула (17.47).

Искомая функция прогиба получается теперь путем сложения функций прогиба свободно опертой балки, нагруженной в одном случае равномерно распределенной нагрузкой q , а в другом — моментом M , приложенным к ее левому концу. Для этого надо сложить $v_q(x)$ из формулы (17.34), положив в ней $c=l$, и $v_M(x)$ из формулы (17.41), положив в ней $c=0$. В итоге мы получим

$$\begin{aligned} v(x) = & \frac{2}{\pi^5} \frac{ql^4}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} (1 + (-1)^n) \cos \frac{n\pi}{l} x - \\ & - \frac{2}{\pi^3} \frac{12}{\pi^4} ql^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4} \frac{l^2}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{l} x, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \frac{4}{\pi^5} \frac{ql^4}{EI} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)^5} \cos \frac{2r\pi}{l} x - \frac{2}{\pi^3} \frac{ql^4}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{l} x = \\
 &= \frac{ql^4}{I} \left(\frac{4}{\pi^5} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)^5} \frac{\cos 2r\pi}{l} x - \frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{l} x \right).
 \end{aligned}$$

§ 9. Сложный изгиб балки

Пусть теперь к балке кроме поперечной нагрузки, которую мы всю обозначим через S , приложены в ее концах еще и продольные силы $\pm T$ (рис. 38). Нагрузку,

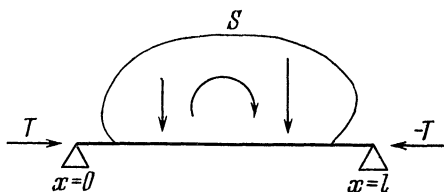


Рис. 38.

состоящую из этих двух продольных сил, обозначим через R . Очевидно, продольная сила при функции прогиба $v(x)$ порождает в точке с абсциссой x изгибающий момент $M_R(x) = Tv(x)$.

Дифференциальное уравнение (17.12)

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

может быть теперь записано как

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{1}{EI} (M_R(x) + M_S(x)) = -\frac{1}{EI} (Tv(x) + M_S(x)). \quad (17.50)$$

Положим, как обычно,

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (17.51)$$

и

$$M_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.52)$$

Мы имеем

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (17.53)$$

так что подстановки в (17.50) согласно (17.51), (17.52) и (17.53) дают нам

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 \sin \frac{n\pi}{l} x &= \\ &= - \frac{1}{EI} \left(T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях справа и слева, мы получаем

$$- \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 b_n n^2 = - \frac{1}{EI} (T b_n + m_n),$$

откуда

$$b_n = \frac{m_n}{\pi^2 \frac{EI}{l^2} n^2 - T},$$

и потому

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{\pi^2 \frac{EI}{l^2} n^2 - T} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.54)$$

Если величина T отрицательная, т. е. если сила T растягивающая, то вычитаемое в знаменателе каждого члена ряда (17.54) положительно и каждый член этого ряда оказывается меньше соответствующего члена ряда (17.24). Это полностью соответствует и наглядным представлениям: приложение растягивающих усилий должно уменьшать прогибы от поперечной нагрузки.

Если величина T положительная, т. е. если сила T сжимающая, то вычитаемое в знаменателях членов ряда (17.54) отрицательно. Его присутствие уменьшает знаменатели и потому увеличивает члены ряда. Это также

достаточно естественно: приложение сжимающих усилий увеличивает прогибы от поперечной нагрузки.

Однако увеличение сжимающего усилия T может происходить лишь до тех пор, пока ни один из знаменателей членов ряда не обратится в нуль, т. е. пока будет

$$T < EI \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, если последнее неравенство будет выполняться при $n=1$, то при всех больших значениях n оно также останется в силе. Значит, одним из необходимых условий применимости формулы (17.54) является

$$T < EI \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (17.55)$$

Сжимающую силу, равную $EI\pi^2/l^2$, принято называть *критической*. При приближении сжимающей силы к критической знаменатель в первом члене ряда (17.54) приближается к нулю, а сам первый член ряда неограниченно возрастает, сколь бы малой ни была поперечная нагрузка R . В строительной механике это явление называется потерей устойчивости при продольном изгибе. Его формальный анализ требует дальнейших рассуждений, которых мы здесь проводить не будем. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда соблюдается неравенство (17.55).

Для осмысленности всех проведенных рассуждений необходимо, чтобы было законным двукратное почленное дифференцирование ряда в (17.51), т. е. фактически ряда в (17.54), а также выполнение почленного интегрирования.

Заметим в этой связи, что при фиксированном T знаменатели в коэффициентах ряда в (17.54) имеют порядок n^2 . Если числители этих коэффициентов, т. е. числа m_n , будут с ростом n убывать, как $1/n^2$, то коэффициенты в целом будут убывать, как $1/n^4$, а их вторые производные — как $1/n^2$. Тогда ряд для $\frac{d^2v(x)}{dx^2}$ будет мажорироваться рядом обратных квадратов (ϵ некоторым постоянным множителем, который, как известно, на сходимость ряда не влияет). Тем самым, согласно теореме Вейерштрасса (см. § 7 главы 5), этот ряд сходится, и притом равномерно и абсолютно. Как и в § 4, замечаем, что умножение членов рядов на ограниченные функции не нарушает

равномерной сходимости. Это замечание оправдывает и почленное интегрирование ряда.

В качестве примера рассмотрим случай, когда поперечная нагрузка S состоит из единственной сосредоточенной силы P , приложенной к балке вертикально вниз в точке с абсциссой $x=c$. В этом случае, как мы видели в § 5 (см. формулу (17.27)), коэффициенты m_n ряда Фурье для $M(x)$ убывают, как $1/n^2$, так что условие двукратной почленной дифференцируемости ряда выполнено.

Фактические выкладки дают нам в результате подстановки в (17.54) значений для m_n из (17.27)

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{\pi^2} \frac{l^2}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2l}{(n\pi)^2} P \sin \frac{n\pi}{l} c}{n^2 - T \frac{l^2}{EI}} \sin \frac{n\pi}{l} x = \\ &= \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{l} c}{n^4 - T n^2 \frac{l^2}{EI}} \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (17.56)$$

Из формулы (17.54) видно, что функция прогиба $v(x)$ в сложном изгибе зависит линейно от коэффициентов m_n , а эти последние зависят линейно от поперечной нагрузки. Это значит, что и $v(x)$ зависит линейно от поперечной нагрузки, и мы можем в случае сложного изгиба по отношению к поперечной нагрузке также применять метод наложения.

В частности, умножение (17.56) на $q(c)$ и интегрирование по c от 0 до l дает нам разложение в ряд Фурье для функции прогиба $v_q(x)$ в случае распределенной нагрузки $q(c)$:

$$v_q(x) = \frac{2}{\pi^5} \frac{l^4}{EI} \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(c) \cos \frac{n\pi}{l} c}{n^5 - n^3 T \frac{l^2}{EI}} \sin \frac{n\pi}{l} x dc, \quad (17.57)$$

а дифференцирование ряда (17.56) по c — разложение в ряд Фурье функции прогиба в случае сосредоточенного

момента M , приложенного в точке $x = c$:

$$v_M(x) = -\frac{2}{\pi^3} \frac{Pl^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{l} c}{n^3 - nT \frac{l^2}{EI}} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.58)$$

Почленное дифференцирование разложений для v_p , v_q и v_M , описываемых формулами (17.56), (17.57) и (17.58), дает нам разложения угла поворота сечения балки для соответствующих нагрузок.

Заметим, наконец, что по отношению к параметру T дифференциальное уравнение (17.50) линейным не является: в нем нагрузка умножается на функцию прогиба $v(x)$, в образовании которой она сама и участвует. Поэтому нет оснований ожидать, что по отношению к продольной нагрузке окажется применимым метод наложения. Формула (17.54) это подтверждает: члены входящего в нее ряда не пропорциональны величине T .

§ 10. Балка на упругом основании

Обратимся к конструкции, анализ которой провести описанным в § 4 приемом не удастся.

Пусть рассматриваемая нами балка имеет кроме жестких опор по концам, препятствующих ее вертикальным смещениям в этих точках, еще упругое основание по всей ее длине, оказывающее сопротивление вертикальным смещениям каждой точки балки. Упругость основания понимается в том смысле, что его реакция в каждой точке балки пропорциональна вертикальному смещению этой точки.

Действие упругого основания на балку можно отождествить с внешней распределенной нагрузкой, интенсивность которой пропорциональна функции прогиба.

Рассмотрим пример, отличающийся от приведенного в конце § 3 лишь наличием у балки упругого основания (рис. 39). Именно будем считать, что на балку действует поперечная нагрузка, равномерно распределенная от 0 до $c < l$ и отсутствующая между c и l . Эту нагрузку

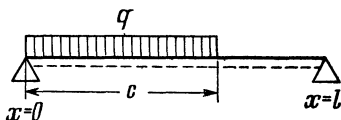


Рис. 39.

обозначим через S_1 . Распределенную нагрузку, являющуюся реакцией упругого основания, обозначим через S_2 .

Здесь по условию

$$q_{S_2}(x) = -kv(x) \quad (17.59)$$

(знак минус означает, что реактивная сила опоры направлена навстречу прогибу).

Далее, согласно (17.1) мы имеем

$$M_{S_1+S_2}(x) = M_{S_1}(x) + M_{S_2}(x), \quad (17.60)$$

а ввиду (17.4) —

$$\frac{d^2 M_{S_1}(x)}{dx^2} = -q_{S_1}(x) \quad (17.61)$$

и, учитывая (17.59),

$$\frac{d^2 M_{S_2}(x)}{dx^2} = -q_{S_2}(x) = kv(x).$$

Вместе с (17.60) и (17.61) это дает нам

$$\frac{d^2 M_{S_1+S_2}(x)}{dx^2} = -q_{S_1}(x) + kv(x). \quad (17.62)$$

Наконец, вспоминая (см. (17.11)), что

$$M_{S_1+S_2}(x) = -EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2},$$

так что

$$\frac{d^2 M_{S_1+S_2}(x)}{dx^2} = -EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4},$$

мы из (17.62) получаем

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + kv(x) = q_{S_1}(x). \quad (17.63)$$

Это соотношение является дифференциальным уравнением изгиба балки, лежащей на упругом основании. Мы видим, что это дифференциальное уравнение — четвертого порядка. Воспользоваться им для непосредственной подстановки в него разложения функции прогиба в ряд Фурье мы не имеем права, как это видно из примера, приведенного еще в § 3. Читатель может убедиться в том, что присутствие в уравнении члена, описывающего действие на балку упругого основания, не спасает положения. Вместе с тем описанная в § 4 возможность ограничиться двукратным почленным дифференцированием ряда здесь

неприложима, так как в дифференциальном уравнении одновременно присутствуют как сама функция v , так и ее четвертая производная.

Из сказанного видно, что для решения дифференциального уравнения (17.63) при помощи ряда Фурье требуется изыскать другую возможность ограничиться не более чем трехкратным почленным дифференцированием ряда. Такая возможность открывается при рассмотрении потенциальной энергии изгиба. Заметим, что описываемый далее энергетический метод имеет весьма широкую область применения, выходящую за пределы теории изгиба балок.

§ 11. Вторая возможность ограничиться двукратным дифференцированием.

Потенциальная энергия изгиба балки

Рассмотрим, как и в § 2, изгиб незакрепленной балки длины l моментами, приложенными к ее концам (см. рис 22).

При изменении момента от M до $M + \Delta M$ определяемый соотношением (17.5) угол φ поворота правого конца балки относительно левого изменится на $\varphi(M + \Delta M) - \varphi(M)$. Следовательно, приложенный к правому концу балки изгибающий момент произведет работу

$$(\varphi(M + \Delta M) - \varphi(M)) M^*, \quad (17.64)$$

где M^* — некоторое промежуточное между M и $M + \Delta M$ значение изгибающего момента. Мы можем положить

$$M^* = M + \theta \Delta M, \quad \text{где } 0 \leq \theta \leq 1,$$

и переписать выражение для работы (17.64) как

$$(\varphi(M + \Delta M) - \varphi(M)) (M + \theta \Delta M). \quad (17.65)$$

Пусть теперь изгибающий момент M изменяется, возрастая непрерывно от нуля до некоторого окончательного значения M_0 (а угол — соответственно от нуля до φ_0). «Мгновенная» работа этого момента, когда его значение равно M , получается из (17.65) при $\Delta M \rightarrow 0$ и равна $M\varphi'(M) dM$, а полная работа —

$$U = \int_0^{M_0} M\varphi'(M) dM. \quad (17.66)$$

В частности, если φ есть линейная функция M (см. формулу (17.6)), то выражение (17.66) для работы изгибающего момента запишется как

$$U = \frac{l}{EI} \int_0^{M_0} M dM,$$

или, выполняя интегрирование, получим

$$U = \frac{1}{2} \frac{l}{EI} M_0^2. \quad (17.67)$$

Иначе, с учетом (17.7), это равенство переписывается как

$$U = \frac{1}{2k} \left(\frac{\varphi_0}{l} \right)^2 l = \frac{1}{2} EI \left(\frac{\varphi_0}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} M_0 \varphi_0. \quad (17.68)$$

Работа приложенного извне усилия переходит в потенциальную энергию изгиба балки. Поскольку балка однородна и, кроме того, в условиях приложенных к ней внешних усилий изгибающий момент во всех ее точках один и тот же, потенциальная энергия изгиба балки распределена равномерно по ее длине. Это значит, что потенциальная энергия изгиба в каждом участке балки пропорциональна длине этого участка. Поэтому, если взять элемент балки длины Δx , то заключенная в нем потенциальная энергия будет равна

$$\frac{1}{2} M_0 \frac{\varphi_0}{l} \Delta x.$$

Но φ_0/l есть угол поворота поперечного сечения балки, отнесенный к ее длине, т. е. кривизна балки. В условиях предполагаемой жесткости балки ее кривизну можно принять равной второй производной смещения точки балки по ее длине: $\frac{\varphi_0}{l} = \frac{d^2 v}{dx^2}$. Вместе с (17.9) и (17.10) это дает нам, что потенциальная энергия изгиба балки на участке длины Δx равна

$$\frac{1}{2} M_0 \frac{d^2 v}{dx^2} \Delta x = \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \Delta x.$$

Далее, количество потенциальной энергии изгиба балки, заключенное в элементе Δx ее длины, зависит только от изгибающего момента в точках этого элемента Δx и не зависит от того, какими будут значения изгибающего момента в остальных точках балки.

Таким образом, «плотность» потенциальной энергии изгиба балки по ее длине в точке x при наличии изгибающего момента M в этой точке равна

$$\frac{1}{2} M \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2. \quad (17.69)$$

Значит, выражение (17.69) описывает плотность потенциальной энергии в балке в той ее точке x , в которой изгибающий момент равен M , независимо от того, чему равен изгибающий момент в остальных ее точках. В частности, эта плотность не зависит ни от характера загрузки балки в целом, ни от способа ее закрепления на опорах.

Поэтому, если внешняя нагрузка на балку такова, что в каждой ее точке x изгибающий момент равен $M(x)$, то потенциальная энергия изгиба всей балки равна

$$\frac{1}{2} \int_0^l M(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(x) dx. \quad (17.70)$$

§ 12. Потенциальная энергия изгиба балки в случае нескольких нагрузок

Обозначим через U_R потенциальную энергию изгиба балки от нагрузки R . Согласно (17.70) мы можем написать

$$U_R = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (17.71)$$

Пусть, как и в § 2, к балке приложены две нагрузки R и S , причем имеет место соотношение (17.1):

$$M_{R+S}(x) = M_R(x) + M_S(x). \quad (17.72)$$

В § 2 мы видели, что если балка закреплена, т. е. не может перемещаться, как твердое тело, то из (17.72) должно следовать

$$v_{R+S}(x) = v_R(x) + v_S(x). \quad (17.73)$$

Далее, применяя формулу (17.71) для трех нагрузок: R , S и $R+S$, мы имеем

$$\begin{aligned} U_{R+S} &= \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v_{R+S}(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 (v_R(x) + v_S(x))}{dx^2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} \right)^2 dx + EI \int_0^l \frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_S(x)}{dx^2} dx + \\ &\quad + \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v_S(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \left(\frac{d^2 v_S(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \\ &= U_R + EI \int_0^l \frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_S(x)}{dx^2} dx + U_S. \quad (17.74) \end{aligned}$$

Потенциальная энергия изгиба U_{R+S} численно равна работе внешних нагрузок R и S , совершаемой ими в результате смещений точек балки, к которым эти нагрузки приложены. С этой точки зрения каждое из трех слагаемых, стоящих в (17.74) справа, имеет свой механический смысл. Пусть сначала на балку действует одна лишь нагрузка R . Тогда потенциальная энергия изгиба балки есть U_R и равна работе A_R , совершаемой усилиями из R . Приложим теперь к балке дополнительную нагрузку S . Составляющие ее усилия совершают работу A_S , равную U_S , но, кроме того, точки приложения усилий из R будут под воздействием S «подаваться»; усилия из R на этих перемещениях произведут работу, которую мы обозначим через $A_{R,S}$ и которая будет равна

$$U_{R+S} - U_R - U_S = EI \int_0^l \frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_S(x)}{dx^2} dx. \quad (17.75)$$

Заметим, что если вторые производные $\frac{d^2 v_R(x)}{dx^2}$ и $\frac{d^2 v_S(x)}{dx^2}$ являются ортогональными (см. § 3 главы 8) функциями, то интеграл в правой части (17.75) обращается в нуль. Это простое соображение будет иметь для нас далее решающее значение.

Пусть теперь к балке приложены нагрузка R и пропорциональная численному параметру α нагрузка αS , причем для любого (или хотя бы для любого достаточно

малого по абсолютной величине) α выполняется равенство, аналогичное (17.72):

$$M_R(x) + \alpha M_S(x) = M_{R+\alpha S}(x),$$

и потому

$$v_R(x) + \alpha v_S(x) = v_{R+\alpha S}(x). \quad (17.76)$$

Потенциальная энергия $U_{R+\alpha S}$ изгиба балки, находящейся под нагрузкой $R + \alpha S$, равно как и работа составляющих эту нагрузку усилий, зависит от α . Обозначим потому их соответственно через $U(\alpha)$ и $A(\alpha)$. В частности, очевидно, что

$$A(0) = A_R, \quad U(0) = U_R.$$

Поскольку мы рассматриваем условия, в которых вся работа внешних сил переходит в потенциальную энергию изгиба, должно быть

$$A(\alpha) = U(\alpha) \quad (17.77)$$

тождественно по α .

С учетом (17.76) формула (17.75) может быть записана как

$$U_{R+\alpha S} - U_R - U_{\alpha S} = \alpha EI \int_0^l \frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_S(x)}{dx^2} dx.$$

Это равенство справедливо тождественно при всех α . Поэтому его можно продифференцировать по α и положить $\alpha = 0$. Ввиду (17.77) мы получим

$$\left. \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{dU(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = EI \int_0^l \frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_S(x)}{dx^2} dx. \quad (17.78)$$

Если выразить $U(\alpha)$ через функцию прогиба $v(x)$ и параметр нагрузки α (а также, разумеется, и через остальные параметры задачи), то мы получим требуемое соотношение, в которое надлежит подставлять вместо функции прогиба v ее разложение в ряд Фурье. По сравнению с уравнением изгиба балки (17.8) мы сейчас, используя соотношение (17.72), получаем (кроме значительной общности рассуждений) то нужное нам преимущество, что должны требовать не четырехкратной почленной дифференцируемости рядов, а только двукратной.

§ 13. Функции прогиба с ортогональными вторыми производными

Способы закрепления концов балки с опорами в точках 0 и l формально выражаются путем фиксации значений функции ее прогиба $v(x)$ и ее производных при $x=0$ и $x=l$. Так, факт «свободной опертости» балки описывается равенствами (17.18) и (17.19).

Пусть функции

$$v_1(x), \dots, v_n(x), \dots$$

удовлетворяют условиям закрепления балки на ее опорах (т. е. *могут оказаться* функциями прогиба балки при некоторых ее нагрузках), а вторые их производные

$$\frac{d^2v_1(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^2v_n(x)}{dx^2}, \dots \quad (17.79)$$

ограничены в совокупности и составляют ортогональную систему (см. § 4 главы 8).

Будем в качестве функции, описывающей состояние балки, рассматривать вторую производную функции прогиба, т. е. $\frac{d^2v(x)}{dx^2}$. Ввиду предположенной жесткости балки можно считать, что эта вторая производная совпадает с кривизной балки в соответствующей точке.

Предположим, что функция $v(x)$ прогиба балки, находящейся под воздействием некоторой нагрузки R , такова, что ее вторая производная представима в виде равномерно сходящегося ряда

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d^2v_n(x)}{dx^2}. \quad (17.80)$$

От вторых производных (17.79) мы можем перейти к «вторым первообразным». Используя при этом произвол в выборе постоянных интегрирования, мы можем обеспечить, чтобы первообразные удовлетворяли условиям закрепления балки. В этом случае по равенству (17.80) мы можем написать

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x).$$

Фиксируем теперь некоторое натуральное n и приложим к балке, как это описывалось в предыдущем параграфе, дополнительную поперечную изгибающую нагрузку αS_n , приводящую к прогибу $\alpha v_n(x)$. Напишем согласно (17.79) выражение для производной U потенциальной энергии изгиба $U_n(\alpha) = U_R + \alpha S_n$ по α при $\alpha = 0$:

$$U'_n(0) = EI \int_0^l \frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} dx,$$

или, пользуясь разложением для $v(x)$,

$$U'_n(0) = EI \int_0^l \left(\frac{d^2}{dx^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m v_m(x) \right) \frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} dx.$$

Двукратное почленное дифференцирование ряда дает нам

$$U'_n(0) = EI \int_0^l \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{d^2 v_m(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} \right) dx.$$

Правомерность почленного дифференцирования ряда обуславливается равномерной сходимостью ряда производных его членов (17.80). После умножения этих членов на ограниченные $v_n''(x)$ равномерная сходимость ряда не нарушится, и его можно почленно интегрировать, что состоит в перемене порядка суммирования и интегрирования:

$$U'_n(0) = EI \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^l \frac{d^2 v_m(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} dx.$$

Из ортогональности на $[0, l]$ вторых производных (17.79) мы получаем

$$U'_n(0) = EI a_n \int_0^l \left(\frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (17.81)$$

Последнее выражение, как было установлено в предыдущем параграфе, равно работе внешней нагрузки на балку на перемещениях, соответствующих прогибу v_n . С другой стороны, мы можем записать выражение для этой работы непосредственно, как сумму (интеграл) произведений сил на линейные перемещения, или моментов на угловые

перемещения, или и тех и других вместе. Приравнивание этих двух выражений дает нам уравнение, из которого можно определить коэффициент a_n .

В следующих параграфах мы рассмотрим несколько конкретных случаев.

§ 14. Свободно опертая нагруженная балка

Пусть к балке, свободно опертой своими концами при $x=0$ и $x=l$, приложена некоторая поперечная нагрузка R . Напишем разложение функции прогиба $v_R(x)$ этой балки в ряд Фурье по синусам на сегменте $[0, l]$:

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.82)$$

Все синусы обращаются в нуль при $x=0$ и $x=l$, а вторые их производные суть также синусы (с некоторыми коэффициентами) и потому составляют ортогональную систему на $[0, l]$. Следовательно, мы можем воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

В нашем случае формула (17.81) переписывается как

$$U'_n(0) = EIb_n \int_0^l \left(\frac{d^2}{dx^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \right)^2 dx,$$

или, выполняя простые преобразования, получим

$$U'_n(0) = EIb_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = EIb_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2},$$

и мы имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EI} \frac{1}{n^4} U'_n(0). \quad (17.83)$$

Вычисляя $U'_n(0)$, как работу внешних сил на перемещениях, соответствующих прогибу $\sin \frac{n\pi}{l} x$, мы находим коэффициенты b_n и тем самым — искомое разложение для $v_R(x)$.

Пример. Рассмотрим прогиб свободно опертой балки под действием поперечной сосредоточенной силы (см. рис. 26),

Пусть рассмотренная выше свободно опертая балка загружена вертикальной силой P , приложенной в точке с абсциссой $x=c$ (см. § 5).

Работа $U_n'(0)$ силы P на перемещении, соответствующем функции прогиба $\sin \frac{n\pi}{l} x$, очевидно, равна $P \sin \frac{n\pi}{l} c$. Значит, (17.83) дает нам

$$b_n = \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EI} \frac{1}{n^4} P \sin \frac{n\pi}{l} c.$$

Поэтому разложение функции прогиба $v_P(x)$ будет таким:

$$v_P(x) = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} c \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (17.84)$$

что совпадает с формулой (17.29). Проверка законности двукратного почленного дифференцирования этого ряда была нами проделана в § 5.

§ 15. Работа продольных сил при сложном изгибе балки

Рассмотрим теперь имеющую две опоры балку, которая, помимо изгиба поперечной нагрузкой, подвергается еще растяжению или сжатию продольными силами.

Нагрузку на балку, состоящую из поперечных и продольных усилий, обозначим через R .

Выше мы не делали различия между расстоянием, отсчитываемым от левой опоры балки по направлению к правой по прямой линии, и расстоянием, отсчитываемым вдоль искривленной линии прогиба балки, характеризуя оба одной и той же координатой x . Теперь нам придется различать эти два вида расстояний. Поскольку основные соотношения, описывающие потенциальную энергию изгиба балки, касались точек самой балки, а не точек объемлющего ее пространства, мы сохраним x для обозначения расстояния вдоль балки. Расстояние же по прямой линии мы будем характеризовать координатой ξ .

Как было условлено в «определении» балки (см. начало § 2), мы не будем учитывать изменения длины балки от приложенных к ней продольных усилий, считая его пренебрежимо малым. Это значит, что x -координаты концов балки (и тем самым — ее опор) будут равны 0 и l независимо от ее деформаций, вызываемых нагрузками.

Напротив, изменение расстояния между концами балки, измеренного по прямой, нам учитывать придется. ξ -координату левой опоры мы при любых вариантах нагрузки будем считать равной нулю, а ξ -координату правой опоры в условиях нагрузки R , зависящую от R , будем обозначать через l_R . Очевидно, $l_R \leq l$, потому что после загрузки балки она искривляется и расстояние между ее опорами уменьшается.

Разность $l - l_R$ можно подсчитать следующим образом.

Пусть $v_R(x)$ — функция прогиба балки от воздействия нагрузки R . Из рассмотрения элемента дуги искривленной балки (рис. 40) видно, что $d\xi^2 = (dx)^2 - (dv_R(x))^2$, откуда

$$d\xi = \sqrt{1 - \left(\frac{dv_R(x)}{dx}\right)^2} dx.$$

В результате интегрирования мы находим расстояние между опорами балки:

$$l_R = \int_0^l \sqrt{1 - \left(\frac{dv_R(x)}{dx}\right)^2} dx. \quad (17.85)$$

Считая что все значения $\frac{dv_R}{dx}$ достаточно малы (что вытекает из предположения о жесткости балки), мы можем (17.85) переписать как

$$l_R = \int_0^l \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dv_R(x)}{dx}\right)^2\right) dx = l - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_R(x)}{dx}\right)^2 dx,$$

откуда

$$l - l_R = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_R(x)}{dx}\right)^2 dx. \quad (17.86)$$

Вернемся теперь к схеме рассуждений из § 12 и § 14.

В качестве «основной» нагрузки (как и в § 12, мы ее обозначили через R) мы выберем действующие на балку продольные силы $\pm T$ (см. рис. 38). Представим функцию

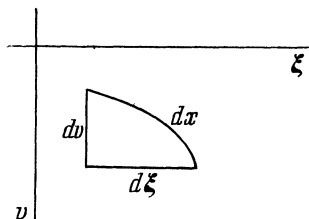


Рис. 40.

прогиба $v_R(x)$ от нагрузки R на сегменте $[0, l]$ в виде разложения по системе функций

$$v_1(x), \dots, v_n(x), \dots,$$

имеющих попарно ортогональные на $[0, l]$ вторые производные:

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x). \quad (17.87)$$

В качестве «дополнительной» нагрузки (в обозначениях § 12 это нагрузка αS) возьмем поперечную нагрузку, порождающую прогиб $\alpha v_n(x)$.

Подсчитаем теперь в соответствии со сказанным в конце § 12 работу основной нагрузки на перемещениях, обусловленных дополнительной нагрузкой. Очевидно, это будет работа силы T на перемещении, равном изменению расстояния между опорами, вызванному добавлением к основной нагрузке дополнительной нагрузки.

Эта работа равна

$$T(l_R - l_{R+\alpha S}),$$

или, учитывая формулу (17.86) вместе с ее вариантом, получающимся при замене R на $R + \alpha S$, получим

$$\begin{aligned} T(l_R - l_{R+\alpha S}) &= \\ &= T \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_{R+\alpha S}(x)}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_R(x)}{dx} \right)^2 dx \right) = \\ &= T \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{d(v_R(x) + \alpha v_S(x))}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_R(x)}{dx} \right)^2 dx \right) = \\ &= T \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_R(x)}{dx} \right)^2 dx + \alpha \int_0^l \frac{dv_R(x)}{dx} \frac{dv_S(x)}{dx} dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_S(x)}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_R(x)}{dx} \right)^2 dx \right) = \\ &= T \left(\alpha \int_0^l \frac{dv_R(x)}{dx} \frac{dv_S(x)}{dx} dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_S(x)}{dx} \right)^2 dx \right). \end{aligned}$$

Производная этой работы по α при $\alpha = 0$ равна

$$T \int_0^l \frac{dv_R(x)}{dx} \frac{dv_S(x)}{dx} dx. \quad (17.88)$$

§ 16. Общий случай изгиба балки

Вернемся к изгибу свободно опертой балки, лежащей на упругом основании, описанному в § 10. В целях краткости изложения мы ограничимся рассмотрением наиболее общего случая изгиба, считая, что на балку действуют разнообразные поперечные нагрузки, а также приложенные к концам продольные силы (рис. 41).

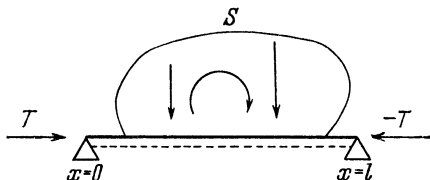


Рис. 41.

Будем по-прежнему искать функцию прогиба этой балки в виде ее разложения

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x),$$

причем коэффициенты a_n будем находить из уравнения (17.81).

Примем для определенности, что поперечная нагрузка S на балку состоит из сосредоточенных сил P_1, \dots, P_k , приложенных в точках $x = c_1, \dots, c_k$, моментов M_1, \dots, M_l , приложенных в точках $x = d_1, \dots, d_l$, и распределенной нагрузки с интенсивностью $q(x)$ в каждой точке x .

Пусть продольная нагрузка R состоит из сжимающих сил $\pm T$, приложенных к концам балки. Коэффициент упругости основания примем равным k , а реактивную нагрузку на балку со стороны упругого основания обозначим через S^* .

Подсчитаем работу $U_n(0)$ всех внешних сил на перемещениях, соответствующих прогибу $v_n(x)$.

Работа сосредоточенных сил P_1, \dots, P_r , как уже было выяснено в предыдущем параграфе, равна

$$\sum_{i=1}^r P_i v_n(c_i).$$

Работа моментов M_1, \dots, M_l равна сумме произведений величин этих моментов на углы поворота соответствующих поперечных сечений балки в точках d_1, \dots, d_l , т. е.

$$\sum_{j=1}^l M_j v'_n(d_j).$$

Работу распределенной нагрузки $q(x)$ можно получить интегрированием по x работы элементарной силы $q(x) dx$, приложенной в точке x балки:

$$\int_0^l q(x) v_n(x) dx.$$

Аналогично, работа сил S^* реакции упругого основания есть

$$-k \int_0^l |v_n(x)| dx.$$

Знак модуля выражает здесь то обстоятельство, что упругое основание поглощает энергию, т. е. совершает «отрицательную» работу независимо от смещения точек балки вверх или вниз, т. е. независимо от знака $v_n(x)$.

Наконец, работа продольных сил $\pm T$ в соответствии с формулой (17.88) равна

$$T \int_0^l \frac{dv_R(x)}{dx} \frac{dv_n(x)}{dx} dx.$$

Таким образом, формула (17.81) может быть записана в нашем случае как

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r P_i v_n(c_i) + \sum_{j=1}^l M_j v'_n(d_j) + \int_0^l q(x) v_n(x) dx - \\ & - k \int_0^l |v_n(x)| dx + T \int_0^l \frac{dv_R(x)}{dx} \frac{dv_n(x)}{dx} dx = E I a_n \int_0^l \left(\frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (17.89)$$

§ 17. Общий случай изгиба свободно опертой балки

Пусть мы имеем дело со свободно опертой балкой на упругом основании, которая загружена системой усилий R , как это описано в предыдущем параграфе.

Будем искать функцию прогиба этой балки в виде ее разложения в ряд Фурье на $[0, l]$ по синусам:

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17.90)$$

В этом случае $v_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$, так что $\frac{dv_n(x)}{dx} = \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} x$. Интеграл же

$$\int_0^l |v_n(x)| dx = \int_0^l \left| \sin \frac{n\pi}{l} x \right| dx$$

есть суммарная площадь, ограниченная осью абсцисс и n полуволнами синусоиды $\sin \frac{n\pi}{l} x$. Но площадь одной такой полуволны равна

$$\int_0^{l/n} \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{1}{n} \int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x dx = \frac{l}{n\pi},$$

значит, $\int_0^l |v_n(x)| dx = n \frac{l}{n\pi} = \frac{l}{\pi}$.

Далее,

$$\frac{dv_R(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi}{l} x = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{m\pi}{l} \cos \frac{m\pi}{l} x,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{dv_R(x)}{dx} \frac{dv_n(x)}{dx} dx &= \int_0^l \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{m\pi}{l} \cos \frac{m\pi}{l} x \right) \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{nm\pi^2}{l^2} b_m \int_0^l \cos \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \\ &= \frac{n^2\pi^2}{l^2} b_n \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{n^2\pi^2}{2l} b_n. \end{aligned}$$

Наконец, $\frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x$, откуда

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 v_n(x)}{dx^2}\right)^2 dx = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{n^4 \pi^4}{2l^3}.$$

Подставляя все вычисленные выражения в формулу (17.89), мы находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r P_i \sin \frac{n\pi}{l} c_i + \sum_{j=1}^l M_j \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} d_j + \\ + \int_0^l q(n) \sin \frac{n\pi}{l} x dx - k \frac{l}{\pi} + T \frac{n^2 \pi^2}{l} b_n = EI b_n \frac{n^4 \pi^4}{2l^3}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^r P_i \sin \frac{n\pi}{l} c_i + \sum_{j=1}^l M_j \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} d_j + \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx - \frac{kl}{\pi}}{EI \frac{n^4 \pi^4}{2l^3} - T \frac{n^2 \pi^2}{2l}}.$$

Нам остается подставить это выражение для b_n в формулу (17.90).

§ 18. Изгиб симметрично нагруженной балки, жестко заделанной по концам

Рассмотрим случай, когда балка с опорами в точках $x=0$ и $x=l$ жестко заделана по концам (рис. 42). Формально это значит, что для функции прогиба балки имеют место соотношения

$$v(0) = v(l) = 0, \quad (17.91)$$

$$v'(0) = v'(l) = 0. \quad (17.92)$$

Балку с так устроенными опорами можно, подобно тому как это делалось в § 8, исследовать как статически неопределимую систему, т. е. представить ее как свободно опертую балку с той же нагрузкой, но к которой по концам приложены дополнительно моменты M_0 и M_l , пока неизвестные. Величина этих моментов определяется так, чтобы они в соответствии с уравнениями (17.92) компен-

сировали «до нуля» углы поворота от внешней нагрузки в точках $x=0$ и $x=l$.

Однако в том случае, когда нагрузка балки оказывается симметричной относительно ее середины, более эффективен другой метод.

Симметричность нагрузки балки относительно ее середины состоит в том, что каждой силе, приложенной к балке x , соответствует равная ей по величине и совпадающая по направлению сила, приложенная в точке $l-x$, а каждому моменту, приложенному в точке x , — равный ему по величине и противоположный по направлению момент, приложенный в точке $l-x$ (рис. 43).

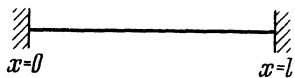


Рис. 42.

Если для удобства перенести начало координат в середину балки, то, как и в аналогичном случае, разобранным в § 3, из следствия теоремы § 8 главы 9 и выражения (17.3) для

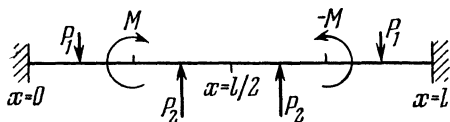


Рис. 43.

изгибающего момента в сечении балки следует, что $M_R\left(x - \frac{l}{2}\right)$, а потому и $v_R\left(x - \frac{l}{2}\right)$ суть четные функции от $x - \frac{l}{2}$. Иначе говоря, это означает, что v_R и $\frac{d^2 v_R}{dx^2}$ суть функции, симметричные относительно $x = l/2$.

Для исследования изгиба таких балок найдем, в соответствии со сказанным в § 13, систему функций

$$v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), \dots, \quad (17.93)$$

которые

1) были бы симметричны относительно $x = l/2$:

$$v_R(x) = v_n(l-x), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (17.94)$$

2) удовлетворяли бы условиям (17.91) и (17.92):

$$v_n(0) = v_n(l) = 0, \quad v'_n(0) = v'_n(l) = 0; \quad (17.95)$$

3) вторые производные которых были бы попарно ортогональны на сегменте $[0, l]$:

$$\int_0^l \frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_m(x)}{dx^2} dx = 0 \text{ при } n \neq m. \quad (17.96)$$

В качестве такой системы функций можно взять систему

$$v_n(x) = 1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x.$$

Для этих функций мы имеем

$$v'_n(x) = \frac{2n\pi}{l} \sin \frac{2n\pi}{l} x, \quad (17.97)$$

$$v''_n(x) = \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2 \cos \frac{2n\pi}{l} x. \quad (17.98)$$

То, что для них выполняются условия (17.94), (17.95) и (17.96), видно непосредственно.

Покажем, что всякую функцию прогиба $v(x)$, удовлетворяющую условиям (17.91) и (17.92), можно разложить по таким функциям в ряд:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x\right). \quad (17.99)$$

Действительно, составим разложение функции $v(x)$ в промежутке $[0, l]$ в ряд Фурье по косинусам:

$$v(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{l} x. \quad (17.100)$$

Так как вторая производная функции прогиба $v(x)$ пропорциональна изгибающему моменту, она, очевидно, должна быть интегрируемой и ограниченной. Следовательно, по теореме § 5 главы 16, стоящей в (17.100) справа, ряд сходится при всех x равномерно и абсолютно. Поэтому мы можем написать

$$v(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x\right).$$

При $x=0$ левая часть этого равенства и все разности справа обращаются в нуль, и мы имеем $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Нам остается положить $-a_n = \lambda_n$.

После сказанного исследование изгиба симметрично загруженных балок с жестко заделанными концами проводится стандартным образом по схеме, описанной в §§ 13 и 14.

§ 19. Функция прогиба симметрично загруженной балки с жестко заделанными концами

Рассмотрим балку с жестко заделанными концами на упругом основании, которая загружена симметричной относительно $x=l/2$ системой усилий R . Обозначения для отдельных элементов нагрузки соответствуют введенным в § 16.

Будем искать функцию прогиба этой балки в виде разложения в ряд на $[0, l]$ вида

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x \right). \quad (17.101)$$

Здесь $v_n(x) = 1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x$, и выражения для первых и вторых производных этих функций нами уже были выписаны в (17.97) и (17.98).

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^l \left| 1 - \cos \frac{2\pi n}{l} x \right| dx &= \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{l} x \right) dx = \\ &= l - \frac{l}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{l} x \Big|_0^l = l. \end{aligned}$$

Мы имеем $\frac{dv_R(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{2\pi n}{l} \sin \frac{2\pi n}{l} x$, так что в силу

ортogonalности синусов

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{dv_R(x)}{dx} \frac{dv_n(x)}{dx} dx &= \int_0^l \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{2\pi k}{l} \sin \frac{2\pi k}{l} \right) \frac{2\pi n}{l} \sin \frac{2\pi n}{l} x dx = \\ &= \left(\frac{2\pi n}{l} \right)^2 \lambda_n \int_0^l \sin \frac{2\pi n}{l} x dx = \frac{2\pi^2 n^2}{l} \lambda_n, \end{aligned}$$

и, наконец, из формулы (17.98) получаем

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 v_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \left(\frac{2\pi n}{l} \right)^4 \frac{l}{2} = \frac{8\pi^4 n^4}{l^3}.$$

Подстановка всех найденных выражений в (17.89) дает нам

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{l} c_i \right) + \sum_{j=1} M_j \frac{2\pi n}{l} \sin \frac{2\pi n}{l} d_j + \\ + \int_0^q q(x) \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{l} x \right) dx - kl + T \frac{2\pi^2 n^2}{l} \lambda_n = EI \lambda_n \frac{8\pi^4 n^4}{l^3}. \end{aligned}$$

Остается из каждого такого линейного относительно λ_n уравнения найти соответствующее λ_n и подставить полученные значения в (17.101).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель	Abel, Niels Henrik (1802—1829)
Бернулли	Bernoulli, Daniel (1700—1782)
Бертран	Bertrand, Joseph (1822—1900)
Вейерштрасс	Weierstrass, Karl (1815—1897)
Гаусс	Gauss, Carl Friedrich (1777—1855)
Гиббс	Gibbs, Josiah Willard (1839—1903)
Гук	Hooke, Robert (1635—1703)
Даламбер	D'Alembert, Jean Lerond (1717—1783)
Дирихле	Lejeune-Dirichlet, Peter Gustav (1805—1859)
Коши	Cauchy, Augustin (1789—1857)
Крылов Алексей Николаевич	(1863—1945)
Куммер	Kummer, Ernst Eduard (1810—1893)
Лагранж	Lagrange, Joseph Lois (1736—1813)
Лейбниц	Leibnitz, Gottfried Wilhelm (1646—1716)
Лопиталь	L'Hospital, Guillaume Francois Antoine (1661—1704)
Маклорен	Maclaurin, Colin (1698—1746)
Марков Андрей Андреевич	(1856—1922)
Парсеваль	Parseval, Marc Antoine de (1755—1836)
Пуассон	Poisson, Siméon Denis (1781—1840)
Раабе	Raabe, Joseph Ludwig (1801—1859)
Риман	Riemann, Bernhard (1826—1866)
Ролль	Rolle, Michel (1652—1719)
Сен-Венан	Saint-Venant, Adhémar Jean Claude Barré de (1797—1886)
Таубер	Tauber, Alfred (1866—?)
Тейлор	Taylor, Brook (1685—1731)
Фейер	Fejer, Lipot (1880—1956)
Фурье	Fourier, Joseph (1768—1830)
Чезаро	Cesaro, Ernesto (1859—1906)
Эйлер	Euler, Leonhard (1707—1783)
Юнг	Joung, Thomas (1773—1829)