СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ
СТУПЕНИ ЗНАНИЙ

МАТЕМАТИКА

Гельфанд И. М., Шень А. Х.

АЛГЕБРА

Библиотека

СТУПЕНИ ЗНАНИЙ

серия

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД, А. Х. Шень

АЛГЕБРА

ФАЗИС

ББК 22.141
Г 32

Издание осуществлено при поддержке
фонда «КНИГА-НАУКА-КУЛЬТУРА»

Гельфанд И. М., Шень А. Х.
Г 32 Алгебра. – М.: ФАЗИС, 1998. – 192 с.
(Библиотека «Ступени знаний», серия «Математика»)
ISBN 5-7036-0047-2

Эта книга – про алгебру. Алгебра – наука древняя, и от повседневного употребления её сокровища поблекли. Авторы старались вернуть им первоначальный блеск.

Основную часть книги составляют задачи, большинство которых приводится с решениями. Начав с элементарной арифметики, читатель постепенно знакомится с основными темами школьного курса алгебры, а также с некоторыми вопросами, выходящими за рамки школьной программы, так что школьники разных классов (6 – 11) могут найти в книге темы для размышлений.

Издательство ФАЗИС (ЛР № 064705 от 09.08.1996)
123557 Москва, Пресненский вал, 42-44
E-mail: phasis@aha.ru
- - - - - - - - - - - - - - - - -
Типография «Наука» Академиздатцентр РАН
121099 Москва, Шубинский пер., 6
Заказ № 23

ISBN 5-7036-0047-2

Оглавление

1. Предисловие

Эта книга — про алгебру. Алгебра — наука древняя, и от повседневного употребления ее сокровища поблекли. Мы старались вернуть им прежний блеск.

Основную часть книги составляют задачи. Мы советуем такой порядок действий: решить задачу; сравнить свое решение с приведенным в книге (если оно там есть); перейти к следующей задаче. Если Вам не удается решить задачу (а среди них есть и трудные), можно посмотреть указание или прочесть решение. Если решения нет, то можно смело читать дальше и вернуться к этой задаче в другой раз.

Книга состоит из разделов, посвященных самым разным темам. Некоторые из них совсем короткие, есть и подлиннее.

Вы, конечно, прекрасно знаете арифметику, но освежить ее в памяти не помешает. Начнем с самых простых вещей.

2. Перемена мест слагаемых

Сложим 3 и 5:

$$3 + 5 = 8.$$

А теперь переставим слагаемые:

$$5 + 3 = 8.$$

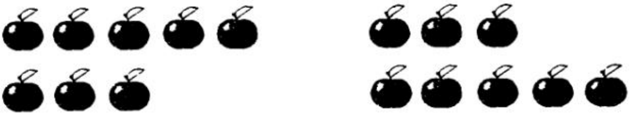
Ответ не изменился. Любитель электроники, для которого сложение — не более чем клавиша «+» на калькуляторе, будет удивлен. Ведь в первый раз он нажимал клавиши в таком порядке

$$\boxed{3}\quad \boxed{+}\quad \boxed{5}\quad \boxed{=}\,,$$

а во второй раз — совсем в другом

$$\boxed{5}\quad \boxed{+}\quad \boxed{3}\quad \boxed{=}\,.$$

Почему же на экране появилось одно и то же число 8? Мы с Вами знаем, в чем здесь дело. Получить сначала 3 яблока, а потом 5 — то же самое, что получить сначала 5, а потом 3 — и так, и этак будет 8 (см. рис. 1): *от перемены мест слагаемых сумма не меняется.*



$5 + 3 \quad = \quad 3 + 5$

Рис. 1

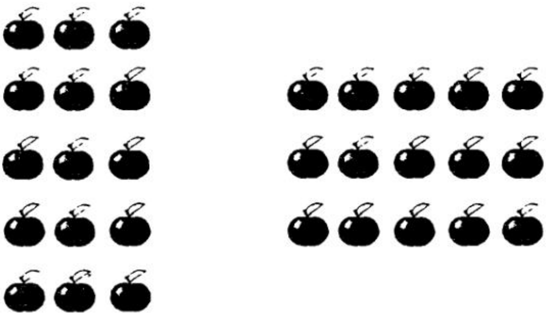
3. Перемена мест сомножителей

Аналогичным свойством обладает умножение. Но прежде договоримся об обозначениях. В арифметике умножение обозначают косым крестом «×». В алгебре этот знак употребляют редко. Обычно его заменяют точкой «·». Будем так делать и мы.

Сравним $3 \cdot 5$ и $5 \cdot 3$. Оба произведения равны 15. Но почему они одинаковы, объяснить уже не так легко. Ведь дать трем мальчикам по пять яблок и дать пятерым мальчикам по три яблока — это вовсе не одно и то же.

Один из авторов как-то спросил первоклассницу, сколько будет дважды четыре. — Восемь — сразу же ответила она. — А четырежды два? Тут девочка задумалась, складывая в уме $2 + 2 + 2 + 2$. Пройдет год, она твердо запомнит, что от перемены мест сомножителей произведение не меняется, и забудет, что когда-то это было вовсе не так уж и ясно.

Проще всего равенство $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$ объяснить на картинке (см. рис. 2).



$5 \times 3 \quad = \quad 3 \times 5$

Рис. 2

4. Сложение столбиком

Чтобы узнать, сколько будет 7+9, можно нарисовать 7 яблок, рядом 9 яблок (рис. 3) и сосчитать, сколько всего яблок: одно, два, три, четыре, ... пятнадцать, шестнадцать. Получим: $7 + 9 = 16$. Таким способом можно складывать любые числа. Но чтобы сложить, к примеру, 137 и 268 таким способом, понадобится изрядное терпение. И математики изобрели другие способы. Один из них — сложение столбиком.

Рис. 3

В разное время и в разных странах люди записывали числа по-разному, и об этом написаны целые книги. Мы так привыкли с детства к записи чисел в десятичной системе с помощью цифр $0, 1, 2, ..., 8, 9$, что с трудом можем представить себе, насколько ее изобретение облегчило вычисления. Даже сама возможность записывать сколь угодно большие числа — и при том достаточно коротко — для древних была вовсе не очевидной. Великий древнегреческий математик Архимед написал книгу «Псаммит, или исчисление песка» о том, что можно записать число, большее числа песчинок, заполняющих целиком сферу с радиусом, равным расстоянию от Земли до неподвижных звезд.

Сейчас десятичная система вне конкуренции, если не считать двоичной системы, которая распространена не среди людей, а среди компьютеров. В двоичной системе всего две цифры (0 и 1), числа записываются длиннее. Компьютеру это не страшно — лишь бы правила арифметических действий были простыми.

О двоичной системе мы еще поговорим, а пока вернемся к сложению чисел, записанных в десятичной системе. Их складывают «в столбик». Мы не будем объяснять Вам, как это делается — это Вы знаете сами. Попробуйте решить такую задачу.

Задача 1. В строку написано несколько восьмерок. Кое-где между ними вставлены знаки «+», причем полученная сумма равна 1000. Как так может быть? Привести пример с минимальным возможным числом слагаемых. (Например, расстановка $88 + 88 + 8 + 8 + 88$ не подходит, так как получается не 1000, а всего лишь 280.)

Решение. Запишем сложение в столбик

$$\begin{array}{r} \ldots 8 \\ \ldots\ldots \\ \underline{\ldots 8} \\ 1000 \end{array}$$

Мы не знаем, сколько слагаемых и сколько восьмерок в каждом слагаемом. Известно, однако, что каждое слагаемое кончается на 8 и что в разряде единиц суммы стоит 0. Чтобы восьмерки дали нуль, нужно как минимум 5 слагаемых

$$\begin{array}{r} \ldots 8 \\ \ldots 8 \\ \ldots 8 \\ \ldots 8 \\ \ldots 8 \\ \hline 1000 \end{array}$$

При этом в уме остается 4, так как $8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$. Чтобы в разряде десятков получить 0, к этой четверке нужно добавить две восьмерки: $4 + 8 + 8 = 20$.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 8 \\ ..88 \\ ..88 \\ \hline 1000 \end{array}$$

В уме остается 2, так что в разряде сотен нужна одна восьмерка

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 88 \\ 888 \\ \hline 1000 \end{array}$$

Ответ: $8 + 8 + 8 + 88 + 888 = 1000$.

З а д а ч а 2. Какие цифры обозначены буквами A, $Б$ и $В$ в примере на сложение столбиком

$$\begin{array}{r} AAA \\ БББ \\ \hline AAAB \end{array}$$

(все буквы A обозначают одну и ту же цифру, буквы $Б$ — другую, буквы $В$ — третью)?

Р е ш е н и е. Цифра A равна единице — только единица может появиться при переносе из разряда сотен в разряд тысяч. Чтобы определить цифру $Б$, зададим себе такой вопрос: происходит ли перенос из разряда единиц в разряд десятков (при сложении A с $Б$)? Если бы он не происходил, то в разрядах единиц, десятков и сотен у суммы стояла бы одна и та же цифра — а это не так. Значит, перенос происходит. Поскольку $A = 1$, это возможно лишь в случае $Б = 9$. Получаем ответ: $A = 1$, $Б = 1$, $В = 0$.

$$\begin{array}{r} 111 \\ 999 \\ \hline 1110 \end{array}$$

5. Таблица умножения. Умножение столбиком

Чтобы умножить, к примеру, 17 на 38, можно нарисовать картинку из 17 рядов по 38 точек и сосчитать все точки. Но так, конечно, не делают, а умножают в столбик.

Способ умножения в столбик (по-ученому «алгоритм умножения в столбик») основан на том, что у Вас в голове есть готовая таблица умножения однозначных чисел. Таблицу эту надо — увы! — вызубрить, и если на заданный посреди ночи вопрос «Сколько будет семью восемь?» Вы не отвечаете немедленно «Пятьдесят шесть!», а складываете спросонья семь восьмерок или восемь семерок, дело плохо.

А вот произведение $17 \cdot 38$ запоминать уже не надо, его можно вычислить в столбик (одним из двух способов):

$$\begin{array}{r} 17 \\ \underline{38} \\ 136 \\ \underline{51} \\ 646 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 38 \\ \underline{17} \\ 266 \\ \underline{38} \\ 646 \end{array}$$

Не удивляет ли Вас — хоть немножко — что результаты совпадают (хотя промежуточные значения разные)?

Вот несколько задач на умножение столбиком.

Задача 3. Умножьте несколько трехзначных чисел на 1001. Объясните наблюдаемую закономерность.

Задача 4. Умножьте 101 010 101 на 57.

Задача 5. Умножьте 10 001 на 1 020 304 050.

Задача 6. Умножьте 11 111 на 1 111.

Задача 7. Шестизначное число, первая цифра которого — единица, увеличится в три раза, если эту первую цифру переставить в конец. Найти число.

Решение. Запишем умножение в столбик:

$$\begin{array}{r} 1АБВГД \\ \underline{3} \\ АБВГД1 \end{array}$$

(А, Б, В, Г, Д обозначают неизвестные цифры; пока мы не знаем, есть ли среди них одинаковые). Цифра Д равна 7, поскольку из произведений $3 \times 0 = 0$, $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 4 = 12$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 6 = 18$, $3 \times 7 = 21$, $3 \times 8 = 24$, $3 \times 9 = 27$ лишь $3 \times 7 = 21$ кончается на 1. Получаем:

$$\begin{array}{r} 1АБВГ7 \\ 3 \\ \hline АБВГ71 \end{array}$$

При умножении 3×7 в уме остается 2, поэтому $3 \times Г$ должно кончаться на 5. Это возможно лишь если $Г = 5$:

$$\begin{array}{r} 1АБВ57 \\ 3 \\ \hline АБВ571 \end{array}$$

Аналогично находим $В = 8$, $Б = 2$, $А = 4$. Ответ:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ 3 \\ \hline 428571 \end{array}$$

6. Деление «уголком»

Самое сложное из арифметических действий — деление. Чтобы почувствовать себя уверенно, решите такие задачи.

Задача 8. Разделите 123 123 123 на 123. (Проверьте ответ умножением!)

Задача 9. Делится ли число 111...1 (100 единиц) на число 1 111 111 без остатка?

Задача 10. Какой остаток получится, если разделить число 1000...0 (20 нулей) на 7?

З а д а ч а 11. Решая предыдущую задачу, Вы могли заметить, что цифры в частном (и остатки) начинают повторяться:

$$
\begin{array}{l|l}
100000000\ldots & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{7} & \underbrace{142857}14\ldots \\
\;\;30 & \\
\;\;\underline{28} & \\
\quad\;\;20 & \\
\quad\;\;\underline{14} & \\
\quad\quad\;\;60 & \\
\quad\quad\;\;\underline{56} & \\
\quad\quad\quad\;\;40 & \\
\quad\quad\quad\;\;\underline{35} & \\
\quad\quad\quad\quad\;\;50 & \\
\quad\quad\quad\quad\;\;\underline{49} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\;10 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\;\;\;\underline{7} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\;30 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\;\underline{28} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\;2\ldots &
\end{array}
$$

Будет ли так продолжаться и дальше — или это случайность?

З а д а ч а 12. Разделите на 7 числа 2000 . . . 000 (20 нулей), 3000 . . . 000 (20 нулей), 4000 . . . 000 (20 нулей) и т. д. Сравните полученные ответы.

З а д а ч а 13. Умножьте число 142 857 на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и сравните результаты. Запомнив число 142 857, можно удивлять своих знакомых фокусом: мгновенно умножать его на любое число от 2 до 7.

З а д а ч а 14. Попробуйте изобрести аналогичные фокусы на основе деления 1000 . . . 0 на другие числа (заменив 7 на другое число).

7. Двоичная система счисления

З а д а ч а 15. Угадайте закономерность и продолжите таблицу 1, написав еще 5–10 строк.

Таблица 1

0
1
10
11
100
101
110
111
1 000
1 001
1 010
1 011
1 100
...

З а д а ч а 16. Имеются гири в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г и 16 г. Убедитесь, что из них можно набрать любой вес от 0 до 31 граммов, продолжив табл. 2 (+ означает «гиря используется», − означает «не используется».

В предыдущей задаче по существу используется та же самая таблица (0 и 1 соответствуют − и +). Эта таблица и задает перевод чисел из десятиной системы счисления в двоичную (см. табл. 3).

У двоичной системы есть преимущество: Вы не должны запоминать целых 10 цифр, достаточно двух. Но она имеет также и недостаток: числа слишком длинные. (Например, число 1 024 в двоичной системе записывается так: 10 000 000 000.)

Таблица 2

	16	8	4	2	1		
0	−	−	−	−	−	00 000	0
1	−	−	−	−	+	00 001	1
2	−	−	−	+	−	00 010	10
3	−	−	−	+	+	00 011	11
4	−	−	+	−	−	00 100	100
5	−	−	+	−	+	00 101	101
6	−	−	+	+	−	00 110	110
7	−	−	+	+	+	00 111	111
8	−	+	−	−	−	01 000	1 000
9	−	+	−	−	+	01 001	1 001
10	−	+	−	+	−	01 010	1 010
11	−	+	−	+	+	01 011	1 011
				...			

Таблица 3

Десятичная запись	Двоичная запись
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1 000
9	1 001
10	1 010
11	1 011
12	1 100
...	...

Задача 17. Догадайтесь, как записывается число 45 в двоичной системе счисления.

Задача 18. Какое число записывается как 10 101 101 в двоичной системе счисления?

Задача 19. Сложите «столбиком» числа, записанные в двоичной системе:

$$\begin{aligned} 1\,010 + 101 &= ? \\ 1\,111 + 1 &= ? \\ 1\,011 + 1 &= ? \\ 1\,111 + 1\,111 &= ? \end{aligned}$$

Проверьте ответы, переводя слагаемые и сумму в десятичную систему счисления.

Задача 20. Выполните вычитание чисел в двоичной системе «в столбик». Проверьте результаты, переведя все числа в десятичную систему.

$$\begin{aligned} 1\,101 - 101 &= ? \\ 110 - 1 &= ? \\ 1\,000 - 1 &= ? \end{aligned}$$

Задача 21. Умножьте записанные в двоичной системе числа 1 101 и 1 010 «в столбик»

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \underline{1010} \\ ???? \end{array}$$

Проверьте результат, перейдя в десятичную систему.

Указание. Вот два образца:

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{11} \\ 1011 \\ \underline{1011} \\ 100001 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1011 \\ \underline{101} \\ 1011 \\ \underline{1011} \\ 110111 \end{array}$$

Задача 22. Разделите 11011 на 101 (двоичная запись) уголком. Проверьте результат, перейдя в десятичную систему.

Указание. Вот образец:

```
11001 | 100
100   |-----
----- | 110← частное
 100
 100
 ---
   01
    0
   --
    1 ← остаток
```

Задача 23. В десятичной системе дробь 1/3 записывается как 0,333... А как эта же дробь запишется в двоичной системе?

Задача 24. Придумайте, как записать числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 в троичной системе счисления.

8. Коммутативность

Вернемся теперь к правилу «от перемены мест слагаемых сумма не меняется». Его можно записать так:

$$\text{Первое слагаемое} + \text{Второе слагаемое} =$$
$$= \text{Второе слагаемое} + \text{Первое слагаемое}$$

или, сокращенно,

$$\text{перв. сл.} + \text{втор. сл.} = \text{втор. сл.} + \text{перв. сл.}$$

Но и эта запись кажется математикам слишком длинной, и они вместо «перв. сл.» и «втор. сл.» пишут просто буквы — например, буквы a и b. Получается:

$$\boxed{a + b = b + a}$$

Правило «от перемены мест сомножителей произведение не меняется» запишется тогда так:

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

Напомним, что точка — знак умножения. Иногда ее опускают и пишут просто

$$ab = ba.$$

Свойство $a + b = b + a$ математики называют «коммутативностью сложения», а свойство $ab = ba$ — «коммутативностью умножения».

Замечание. (Об обозначениях.) Знак умножения можно опускать не всегда: $3 \cdot 7$ равно 21, а вовсе не 37. Отметим, что помимо трех уже известных нам обозначений $a \times b$, $a \cdot b$ и ab для произведения a на b широко распространено четвертое: $a * b$. Оно используется в компьютерах.

9. Ассоциативность

Сложим теперь не два числа, а три:

$$3 + 5 + 11 = 8 + 11 = 19.$$

Но можно сделать и иначе:

$$3 + 5 + 11 = 3 + 16 = 19.$$

Порядок действий обозначают скобками:

$$(3 + 5) + 11$$

означает, что сначала надо сложить 3 и 5, а

$$3 + (5 + 11)$$

требует сложить сначала 5 и 11.

Результат не зависит от порядка действий. Математики называют это свойство «ассоциативность сложения» и записывают его так:

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

Если Вы захотите объяснить наглядно кому-нибудь, что такое ассоциативность, это можно сделать так: сладкий кофе с молоком можно получить, добавив молоко в кофе с предварительно размешанным сахаром — а можно добавить сахар в кофе с молоком. В обоих случаях получится одно и то же — это и есть ассоциативность:

$$(\text{сахар} + \text{кофе}) + \text{молоко} = \text{сахар} + (\text{кофе} + \text{молоко}).$$

Задача 25. Проделайте описанный только что эксперимент с кофе.

Задача 26. Вычислить в уме $357 + 17\,999 + 1$.

Решение. Сложить 357 и 17 999 в уме не так легко. Зато если сложить сначала $17\,999 + 1$, получится 18 000 и прибавить 357 ничего не стоит:

$$357 + (17\,999 + 1) = 357 + 18\,000 = 18\,357.$$

Задача 27. Сложить в уме $357 + 17\,999$.

Решение. $357 + 17\,999 = (356 + 1) + 17\,999 = 356 + (1 + 17\,999) = 356 + 18\,000 = 18\,356$.

Задача 28. Сложить $899 + 1\,343 + 101$.

Указание. Воспользоваться коммутативностью сложения.

Свойством ассоциативности обладает и умножение:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

или, сокращенно

$$(ab)c = a(bc).$$

Задача 29. Перемножить $37 \cdot 25 \cdot 4$.

Задача 30. Перемножить $125 \cdot 37 \cdot 8$.

10. Расстановки скобок

Педант сказал бы — с полным правом — что запись вроде

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

не имеет смысла, пока не сказано, в каком порядке выполнять умножение. Даже если мы не будем переставлять сомножители, возможностей много:

$$\begin{aligned}
&((2 \cdot 3) \cdot 4) \cdot 5 = (6 \cdot 4) \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120,\\
&(2 \cdot (3 \cdot 4)) \cdot 5 = (2 \cdot 12) \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120,\\
&(2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5) = 6 \cdot 20 = 120,\\
&2 \cdot ((3 \cdot 4) \cdot 5) = 2 \cdot (12 \cdot 5) = 2 \cdot 60 = 120,\\
&2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot 5)) = 2 \cdot (3 \cdot 20) = 2 \cdot 60 = 120.
\end{aligned}$$

Задача 31. Расставьте всеми способами скобки в произведении $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, не меняя порядок сомножителей (аналогично только что приведенному примеру). Постарайтесь перебирать все варианты систематически, чтобы чего-нибудь не пропустить. (Указание. Должно получиться 14 способов.)

Задача 32. Сколько нужно использовать левых и правых скобок, чтобы полностью указать порядок действий в произведении

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots 99 \cdot 100?$$

Поскольку результат умножения не зависит от порядка действий, скобки часто опускают, предполагая, что читатель домыслит их сам — все равно как.

Следующая задача показывает возможности, даваемые умелой перестановкой и группировкой слагаемых.

Задача 33. Найти сумму $1+2+3+4+\ldots+98+99+100$.

Решение. Сгруппируем 100 слагаемых в 50 пар: $1+2+$ $+3+4+\ldots+98+99+100=(1+100)+(2+99)+(3+98)+$ $+\ldots+(49+52)+(50+51)$. В каждой паре сумма равна 101, всего пар 50, так что получается $50 \cdot 101 = 5050$.

По преданию, школьник Карл Гаусс (впоследствии великий немецкий математик) шокировал своего учителя, решив эту задачу в уме — в то время как тот надеялся часок отдохнуть, пока ученики заняты сложением ста чисел!

11. Дистрибутивность

Есть еще одно свойство сложения и умножения, называемое «дистрибутивность». Если 2 мальчикам и 3 девочкам дать по 7 яблок, то мальчики получат $2 \cdot 7 = 14$ яблок, девочки получат $3 \cdot 7 = 21$ яблоко, а всего яблок будет

$$2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 14 + 21 = 35.$$

Тот же ответ можно получить иначе: каждый из $2+3=5$ ребят получил 7 яблок, поэтому всего яблок будет

$$(2+3) \cdot 7 = 5 \cdot 7 = 35.$$

Таким образом,

$$(2+3)\cdot 7 = 2\cdot 7 + 3\cdot 7$$

или, в общем виде

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c.$$

Это свойство называется «дистрибутивностью». Переставив сомножители, можно записать его и так:

$$c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b.$$

Задача 34. Вычислить в уме $1001\cdot 20$.

Решение. $1001\cdot 20 = (1000+1)\cdot 20 = 1000\cdot 20 + 1\cdot 20 = 20000 + 20 = 20020$.

Задача 35. Вычислить в уме $1001\cdot 102$.

Решение. $1001\cdot 102 = 1001\cdot(100+2) = 1001\cdot 100 + 1001\times\times 2 = (1000+1)\cdot 100 + (1000+1)\cdot 2 = 100000 + 100 + 2000 + 2 = 102102$.

Свойство дистрибутивности — это правило раскрытия скобок. Раскроем с его помощью скобки в произведении двух сумм

$$(a+b)(m+n).$$

Забудем на минуту, что запись $(m+n)$ — это сумма m и n, и будем считать её «иероглифом», обозначающим некое — неважно какое — число. По правилу дистрибутивности

$$(a+b)\cdot\boxed{m+n} = a\cdot\boxed{m+n} + b\cdot\boxed{m+n}$$

Теперь вспомним, что $\boxed{m+n}$ — это сумма m и n. Снова воспользуемся дистрибутивностью и продолжим равенство:

$$\ldots = a(m+n) + b(m+n) = am + an + bn + bm.$$

Общее правило: чтобы перемножить две суммы, надо *умножить каждый член первой суммы на каждый член второй суммы и потом всё это сложить.*

Задача 36. Сколько слагаемых будет в произведении

$$(a+b+c+d+e)(x+y+z)$$

после того, как мы раскроем скобки?

12. Буквы в алгебре

Постепенно мы все больше и больше используем буквенные обозначения $(a, b, c, \ldots, x, y, z)$. По традиции использование буквенных обозначений («иксов») считается одной из наиболее трудных тем школьного курса математики. Раньше в начальной школе изучалась «арифметика», где никаких иксов не было, а в средней школе (с 5-го класса) переходили к «алгебре» — где уже были иксы. Потом «арифметику» переименовали в «математику» и ввели иксы в начальных классах — чем окончательно запутали бедных школьников (как утверждают скептики).

Мы надеемся, что у Вас, дорогой читатель, не было трудностей с пониманием смысла буквенных обозначений. Тем не менее мы хотим дать Вам совет — на случай, если придется объяснять это своим одноклассникам, брату или сестре, родителям или — в будущем — детям. Смысл букв проще всего объяснить, сказав, что буквы — это сокращения для некоторых слов. Поясним это.

В равенстве

$$a + b = b + a$$

буквы a и b были сокращениями для слов «первое слагаемое» и «второе слагаемое». Записывая $a + b = b + a$, мы имеем в виду, что вместо a и b можно подставить любые числа и получить верное равенство. Таким образом, $a + b = b + a$ можно считать единой сокращенной записью равенств $1+7 = 7+1$, $1028 + 17 = 17 + 1028$ — так же как и бесчисленного множества других равенств того же вида.

Другой пример использования букв дает решение такой задачи:

Задача 37. Малый бидон и большой бидон вместе вмещают 5 литров; в двух малых бидонах и трех больших помещается всего 13 литров. Какова емкость бидонов?

Решение. («Арифметическое».) Емкость малого бидона и емкость большого бидона в сумме равны 5 литрам. Поэтому два малых бидона и два больших вмещают 10 литров ($10 = 2 \cdot 5$). Кроме того, мы знаем, что 2 малых и 3 больших бидона вмещают 13 литров. Таким образом, добавление одного лишнего большого бидона увеличивает суммарную емкость с 10 до 13 литров. Следовательно, емкость большого бидона равна $13 - 10 = 3$ литра. Зная емкость большого бидона, легко найти емкость малого, так как в сумме они дают 5 литров: $5 - 3 = 2$. Ответ: емкость малого бидона — 2 литра, емкость большого — 3 литра.

Это же решение можно записать короче, сократив слова «Емкость малого бидона» до «Емк. М. Б.», а «Емкость большого бидона» до «Емк. Б. Б.». Вот что получится: по условию,

$$\text{Емк. М. Б.} + \text{Емк. Б. Б.} = 5,$$

поэтому

$$2 \cdot \text{Емк. М. Б.} + 2 \cdot \text{Емк. Б. Б.} = 10.$$

По условию,

$$2 \cdot \text{Емк. М. Б.} + 3 \cdot \text{Емк. Б. Б.} = 13.$$

Вычтя из этого равенства предыдущее, находим, что Емк. Б. Б. $= 3$, теперь из первого равенства находим, что Емк. М. Б. $= 2$.

Осталось заменить русские обозначения «Емк. М. Б.» и «Емк. Б. Б.» на традиционные x и y, чтобы получить стандартное «алгебраическое» решение задачи. Вот оно.

Обозначим емкость малого бидона через x, а емкость большого — через y. Получаем систему уравнений:

$$x + y = 5,$$
$$2x + 3y = 13.$$

Умножая первое уравнение на 2, получаем, что

$$2x + 2y = 10.$$

Вычитая это равенство из второго уравнения системы, находим, что

$$y = 13 - 10 = 3.$$

Теперь из первого уравнения

$$x = 5 - y = 5 - 3 = 2.$$

О т в е т. $x = 2$, $y = 3$.

Еще один пример, иллюстрирующий использование буквенных обозначений.

«Ф о к у с». Задумайте число. Прибавьте к нему 3. Умножьте результат на 2. Отнимите задуманное число. Отнимите 4. Отнимите еще раз задуманное число. У Вас получилось 2.

Задача 38. Объяснить, почему этот фокус всегда удается.

Решение. Давайте проследим по табл. 4, что происходит с задуманным числом (мы обозначаем его через x).

Таблица 4

Задумайте число	x
Прибавьте к нему 3	$x+3$
Умножьте результат на 2	$2\cdot(x+3)=2x+6$
Отнимите задуманное число	$(2x+6)-x=x+6$
Отнимите 4	$(x+6)-4=x+2$
Отнимите задуманное число еще раз. Получилось 2	$(x+2)-x=2$

13. Сложение отрицательных чисел

В том, что $3+5=8$, можно убедиться, взяв три яблока, добавив к ним пять яблок и сосчитав получившуюся кучу яблок: «раз, два, три, четыре, ..., семь, восемь». Но как проверить, что $(-3)+(-5)=(-8)$ или что $3+(-5)=(-2)$? Обычно это объясняют на примерах вроде представленных в табл. 5 или табл. 6.

14. Умножение отрицательных чисел

Чтобы подсчитать, чему равно трижды пять, надо сложить три слагаемых, каждое из которых равно пяти:

$$5+5+5=15.$$

Таблица 5

$3 + 5 = 8$	Вчера было 3 градуса тепла, сегодня температура повысилась на 5 градусов и стала 8 градусов.
$(-3) + 5 = 2$	Вчера было -3 градуса, сегодня на 5 градусов теплее, т. е. $+2$ градуса.
$3 + (-5) = (-2)$	Вчера было $+3$ градуса, сегодня на 5 градусов холоднее, т. е. -2 градуса.
$(-3) + (-5) = (-8)$	Вчера было -3 градуса, сегодня на 5 градусов холоднее, т. е. -8 градусов.

Таблица 6

$3 + 5 = 8$	три протона + пять протонов = восемь протонов
$(-3) + 5 = 2$	три антипротона + пять протонов = два протона (не считая γ-излучения)
$3 + (-5) = (-2)$	три протона + пять антипротонов = два антипротона (не считая γ-излучения)[1]
$(-3) + (-5) = (-8)$	три антипротона + пять антипротонов = восемь антипротонов

С некоторой натяжкой то же объяснение годится и для произведения $1 \cdot 5$, если считать, что «сумма» из одного-единст-

[1]Протон и антипротон — элементарные частицы; при встрече протона с антипротоном они аннигилируют, т. е. исчезают, превращаясь в γ-излучение.

венного слагаемого равна этому слагаемому. Но произведение $0 \cdot 5$ или $(-3) \cdot 5$ так не объяснишь: что означает сумма из нуля или из минус трех слагаемых?

Можно, однако, переставить сомножители

$$5 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$5 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15.$$

Если мы хотим, чтобы произведение не изменялось при перестановке сомножителей — как это было для положительных чисел — то тем самым должны считать, что

$$0 \cdot 5 = 0, \quad (-3) \cdot 5 = -15.$$

Теперь перейдем к произведению $(-3) \cdot (-5)$. Чему оно равно: -15 или $+15$? Оба варианта имеют резон. С одной стороны, минус в одном сомножителе уже делает произведение отрицательным — тем более оно должно быть отрицательным, если отрицательны оба сомножителя. С другой стороны, в табл. 7 уже есть два минуса, но только один плюс, и «по справедливости» $(-3)\cdot(-5)$ должно быть равно $+15$. Так что же предпочесть?

Таблица 7

$3 \cdot 5 = +15$	$3 \cdot (-5) = -15$
$(-3) \cdot 5 = -15$	$(-3) \cdot (-5) =\ ?$

Вас, конечно, такими разговорами не запутаешь: из школьного курса математики Вы твердо усвоили, что минус на минус дает плюс. Но представьте себе, что Ваш младший брат или сестра спрашивает Вас: а почему? Что это — каприз учительницы, указание высшего начальства или теорема, которую можно доказать?

Обычно правило умножения отрицательных чисел поясняют на примерах вроде представленного в табл. 8.

Таблица 8

$3 \cdot 5 = 15$	три раза получить по пять рублей — это пятнадцать рублей дохода
$3 \cdot (-5) = -15$	три раза заплатить штраф в пять рублей — пятнадцать рублей убытка
$(-3) \cdot 5 = -15$	три раза недополучить по пять рублей — пятнадцать рублей убытка
$(-3) \cdot (-5) = 15$	три раза не заплатить штраф по пять рублей — пятнадцать рублей дохода

Можно объяснять и иначе. Напишем подряд числа

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Теперь напишем те же числа, умноженные на 3:

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots$$

Легко заметить, что каждое число больше предыдущего на 3. Теперь напишем те же числа в обратном порядке (начав, например, с 5 и 15):

$$\begin{array}{rrrrr} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, \ldots \\ 15, & 12, & 9, & 6, & 3, \ldots \end{array}$$

и продолжим дальше:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4, & -5, \ldots \\ 15, & 12, & 9, & 6, & 3, & 0, & -3, & -6, & -9, & -12, & -15, \ldots \end{array}$$

При этом под числом -5 оказалось число -15, так что $3 \cdot (-5) = -15$: плюс на минус дает минус.

Теперь повторим ту же процедуру, умножая числа $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ на -3 (мы уже знаем, что плюс на минус дает минус):

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \\ -3, & -6, & -9, & -12, & -15, \ldots \end{array}$$

Каждое следующее число нижнего ряда меньше предыдущего на 3. Запишем числа в обратном порядке

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 4, & 3, & 2, & 1 \\ -15, & -12, & -9, & -6, & -3 \end{array}$$

и продолжим:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4, & -5, \ldots \\ -15, & -12, & -9, & -6, & -3, & 0, & 3, & 6, & 9, & 12, & 15, \ldots \end{array}$$

Под числом -5 оказалось 15, так что $(-3) \cdot (-5) = 15$.

Возможно, эти объяснения и удовлетворили бы Вашего младшего брата или сестру. Но Вы вправе спросить, как же обстоят дела на самом деле и можно ли доказать, что $(-3) \cdot (-5) = 15$?

Ответ здесь таков: можно доказать, что $(-3) \cdot (-5)$ должно равняться 15, *если только мы хотим, чтобы обычные свойства сложения, вычитания и умножения оставались верными для всех чисел, включая отрицательные.* Схема этого доказательства такова.

Докажем сначала, что $3 \cdot (-5) = -15$. Что такое -15? Это число, противоположное 15, т. е. число, которое в сумме с 15 дает 0. Так что нам надо доказать, что

$$3 \cdot (-5) + 15 = 0.$$

В самом деле,

$$3 \cdot (-5) + 15 = 3 \cdot (-5) + 3 \cdot 5 = 3 \cdot (-5 + 5) = 3 \cdot 0 = 0.$$

(Вынося 3 за скобку, мы воспользовались законом дистрибутивности $ab + ac = a(b + c)$ при $a = 3$, $b = -5$, $c = 5$ — ведь мы предполагаем, что он остается верным для всех чисел, включая отрицательные.) Итак, $3 \cdot (-5) = -15$. (Дотошный читатель спросит нас, почему $3 \cdot 0 = 0$. Честно признаемся: доказательство этого факта — как и вообще обсуждение того, что такое ноль — мы пропускаем.)

Докажем теперь, что $(-3) \cdot (-5) = 15$. Для этого запишем

$$(-3) + 3 = 0$$

и умножим обе части равенства на -5:

$$((-3) + 3) \cdot (-5) = 0 \cdot (-5) = 0.$$

Раскроем скобки в левой части:

$$(-3) \cdot (-5) + 3 \cdot (-5) = 0,$$

т. е. $(-3) \cdot (-5) + (-15) = 0$. Таким образом, число $(-3) \cdot (-5)$ противоположно числу -15, т. е. равно 15. (В таком рассуждении также есть пробелы: следовало бы доказать, что $0 \cdot (-5) = 0$ и что существует только одно число, противоположное числу -15.)

15. Действия с дробями

Если Вас попросят сравнить дроби

$$\frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \frac{9}{15},$$

то, конечно, Вы сразу скажете, что они равны:

$$\frac{9}{15} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}.$$

Графически это равенство изображено на рис. 4.

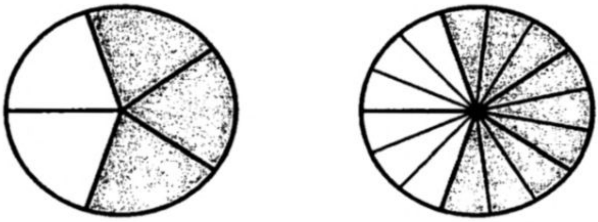


Рис. 4

А что Вы скажете о дробях

$$\frac{221}{391} \quad \text{и} \quad \frac{403}{713}?$$

Если бы Вы помнили наизусть таблицу умножения двузначных чисел, то сразу бы сказали, что они равны:

$$\frac{221}{391} = \frac{17 \cdot 13}{17 \cdot 23} = \frac{13}{23} = \frac{31 \cdot 13}{31 \cdot 23} = \frac{403}{713}.$$

Но как быть, если мы не помним этой таблицы? Тогда надо привести дроби к общему знаменателю:

$$\frac{221}{391} = \frac{221 \cdot 713}{391 \cdot 713} \quad \text{и} \quad \frac{403}{713} = \frac{403 \cdot 391}{713 \cdot 391}.$$

и сравнить числители

$$\begin{array}{r} 713 \\ \underline{221} \\ 713 \\ 1426 \\ \underline{1426} \\ 157573 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 391 \\ \underline{403} \\ 1173 \\ \underline{1564} \\ 157573 \end{array}$$

Так мы убедимся, что дроби равны — но так и не узнаем, что на самом деле обе они равны 13/23!

Задача 39. Что больше: 1/3 или 2/7?

Решение. $1/3 = 7/21$, $2/7 = 6/21$, т. е. $1/3 > 2/7$.

Бытовая формулировка этой задачи («Что больше: бутылка на троих или две на семерых?») подсказывает другое решение: бутылка на троих — это две бутылки на шестерых, а не на семерых, т. е. 1/3 больше 2/7. Говоря научно, мы «привели дроби к одинаковому числителю»:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} < \frac{2}{7}.$$

Задача 40. Что больше: $\dfrac{10001}{10002}$ или $\dfrac{100001}{100002}$?

Указание. Обе дроби меньше 1. На сколько?

Задача 41. Что больше: $\dfrac{12345}{54321}$ или $\dfrac{12346}{54322}$?

Приведение к общему знаменателю — традиционная проблема при изучении арифметики. Классический вопрос: «Сколько торта останется мне, если брат съест половину торта, а сестра — треть торта?» Ответ (одна шестая) виден на рис. 5.

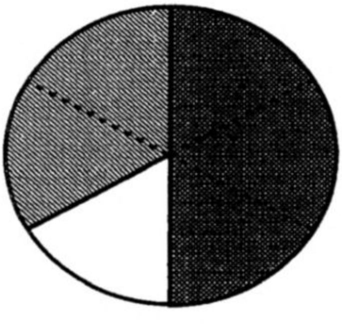


Рис. 5

Мы уверены, что никто из наших читателей не складывает дроби, складывая отдельно числители и знаменатели:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} \longrightarrow \frac{2+5}{3+7} = \frac{7}{10}.$$

Вместо суммы эта операция дает нечто среднее: $7/10 = 0{,}7$ находится между $2/3 = 0{,}666\ldots$ и $5/7 = 0{,}714285\ldots$.

Это легко понять: если в одной компании было две бутылки на троих (по $2/3$ на человека), а в другой компании было пять бутылок на семерых (по $5/7$ на человека), то после встречи все выровняется, и будет семь бутылок на десятерых ($7/10$ на человека).

Задача 42. Назовем дроби $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$ (a, b, c, d — целые положительные числа) соседними, если их разность $\dfrac{ad-bc}{bd}$ имеет числитель ±1, т. е. если $ad - bc = \pm1$.

1. Доказать, что в этом случае обе дроби несократимы.

2. Доказать, что если $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$ соседние, то дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ находится между ними и является соседней с обеими дробями $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$.

3. Доказать, что в этом случае никакая дробь $\dfrac{e}{f}$ с натуральными e и f, у которой $f < b + d$, не находится между $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$.

Задача 43. Метровый стержень разделили на 7 равных частей красными пометками и на 13 равных частей синими пометками. Затем его распилили на 20 равных частей. Докажите, что на всех этих частях (кроме крайних) будет ровно одна пометка — синяя или красная).

Решение. На крайних частях пометок не будет, так как $\dfrac{1}{20}$ меньше, чем $\dfrac{1}{7}$ и $\dfrac{1}{13}$. Остается 18 частей. Достаточно доказать, что на каждой из них будет не более одной пометки. (Всего пометок также 18, поэтому ни одна часть не останется без пометки.) Красная пометка соответствует числу $\frac{k}{7}$, синяя — числу $\frac{l}{13}$; дробь

$$\frac{k+l}{7+13} = \frac{k+l}{20}$$

находится между ними. Следовательно, в ней будет проведен разрез, разделяющий $\frac{k}{7}$ и $\frac{l}{13}$ по разным частям.

Задача 44. Что больше: пять процентов от семи миллионов или семь процентов от пяти миллионов? [«Вопрос мой прост и краток, — промолвил носорог, — Что больше: сорок пяток или пяток сорок?» — А. Милн. Винни-Пух и все-все-все. Пересказ Б. Заходера]

Задача 45. Как отрезать от шнура в 2/3 м кусок в 1/2 м, не имея метра?

Решение. Кусок в 1/2 м составляет три четверти от всего шнура:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

так что от шнура надо отрезать четверть (два раза сложив его пополам).

16. Степени

В последовательности чисел

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots$$

каждое следующее число вдвое больше предыдущего:

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \cdot 2 \\ 8 &= 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \text{(3 раза)} \\ 16 &= 8 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \text{(4 раза)} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Математики применяют такие полезные обозначения:

$$\begin{aligned} 2\cdot 2 &= 2^2\\ 2\cdot 2\cdot 2 &= 2^3\\ 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 &= 2^4\\ &\dots \end{aligned}$$

так что, например, $2^6 = 64$.

Последовательность $2, 4, 8, 16\dots$ можно теперь записать так: $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ Запись a^n читают «a в степени n» или «n-ая степень числа a». При этом a называют *основанием*, n — *показателем степени*. Для a^2 и a^3 есть специальные названия: квадрат числа a, куб числа a. Они объясняются тем, что площадь квадрата со стороной a равна a^2, а объем куба со стороной a равен a^3.

Задача 46. Чему равны: (а) 2^{10}; (б) 10^3; (в) 10^7?

Задача 47. Сколько цифр в десятичной записи числа 10^{1000} ?

Астрономы используют степени 10 для записи больших чисел. Например, скорость света примерно равна

300000 км/с $= 3\cdot 10^5$ км/с $= 3\cdot 10^8$ м/с $= 3\cdot 10^{10}$ см/с.

Задача 48. В астрономии световым годом называют расстояние, которое свет проходит за год. Чему примерно равно расстояние до ближайшей к Солнцу звезды в метрах, если оно составляет около 4 световых лет?

В табл. 9 приведено несколько «больших» чисел.

Замечание. Граница между «большим» и «малым» условна и зависит от единиц измерения: например, расстояние до Солнца, измеренное в световых годах, примерно равно 0,000015.

В дальнейшем мы увидим, что не только очень большие, но и очень малые числа удобно записывать с помощью степеней.

Таблица 9

Число молекул в грамме воды	$\simeq 3 \cdot 10^{22}$
Радиус Земли	$\simeq 6 \cdot 10^6$ м
Расстояние до Луны	$\simeq 4 \cdot 10^8$ м
Расстояние до Солнца («астрономическая единица длины»)	$\simeq 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м
Размер доступной современным наблюдателям части Вселенной	$\simeq 10^{26}$ м
Масса Земли	$\simeq 6 \cdot 10^{24}$ кг
Возраст Земли	$\simeq 5 \cdot 10^9$ лет
Возраст Вселенной	$\simeq 1{,}5 \cdot 10^{10}$ лет
Число людей на Земле	$\simeq 5 \cdot 10^9$
Средняя продолжительность жизни человека	$\simeq 2 \cdot 10^9$ с

Программисты предпочитают иметь дело со степенями двойки, а не десятки. Оказалось, что $2^{10} = 1\,024$ примерно равно $1\,000 = 10^3$ и приставка «кило», обычно обозначающая $1\,000$ (килограмм равен $1\,000$ граммов, километр равен $1\,000$ метров), в программировании означает $1\,024$: 1 килобит = 1 024 бита. (Бит — единица измерения «количества информации»).

Задача 49. 1. Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{20}?

2. Тот же вопрос для числа 2^{100}.

3. Нарисуйте график зависимости числа цифр в десятичной записи 2^n как функции от n.

При пересчете степеней двойки в степеней десятки нужно умножать показатель степени примерно на 0,3: $2^{10} \simeq 10^{0,3\cdot 10}$, $2^n \simeq 10^{0,3n}$.

Многие микрокалькуляторы, умножая большие числа, выдают ответ, содержащий степени:

$$370\,000 \cdot 2\,100{,}000 = 7{,}77 \cdot 10^{11}.$$

На экране при этом не пишется знак умножения и число 10 (а вместо запятой ставится точка, как принято за границей):

7.77   11

Заметим, что в обычной записи

777 000 000 000

ответ не поместился бы на экране калькулятора.

17. Отрицательные степени

Мы выписывали степени числа 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \ldots$$

Попробуем, начиная с какого-либо числа (например, 128), записать эту последовательность в обратном порядке:

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2.$$

В первой последовательности каждое число было вдвое больше предыдущего, теперь — вдвое меньше. Продолжим эту последовательность:

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$

У последовательности

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128\ \ldots$$

было удобное краткое обозначение:

$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ \ldots$$

В обратном порядке:

$$\begin{array}{ccccccc} 128, & 64, & 32, & 16, & 8, & 4, & 2 \\ 2^7, & 2^6, & 2^5, & 2^4, & 2^3, & 2^2, & 2 \end{array}$$

Продолжая по аналогии, можно написать:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 128, & 64, & 32, & 16, & 8, & 4, & 2, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{1}{16}\ldots \\ 2^7, & 2^6, & 2^5, & 2^4, & 2^3, & 2^2, & 2^1, & 2^0, & 2^{-1}, & 2^{-2}, & 2^{-3}, & 2^{-4}\ldots \end{array}$$

Эти обозначения широко используются. Таким образом,

$$2^3 = 8,\ 2^1 = 2,\ 2^0 = 1,\ 2^{-1} = \frac{1}{2},\ 2^{-2} = \frac{1}{4},\ 2^{-3} = \frac{1}{8},\ \text{и т. д.}$$

Раньше, говоря о степенях, мы понимали 2^3 как «2, повторенное сомножителем 3 раза», а 2^5 — как «2, повторенное сомножителем 5 раз». Если еще можно, с некоторой натяжкой, сказать, что 2^1 есть двойка, повторенная сомножителем один раз, то про $2^0 = 1$ или $2^{-3} = \frac{1}{8}$ такое объяснение было бы смешным. Просто математики договорились считать, что (при положительных целых n) 2^{-n} понимается как $\frac{1}{2^n}$.

Мы надеемся, что это соглашение не показалось Вам искусственным. Впоследствии мы увидим, насколько оно удобно и даже — в определенном смысле — неизбежно.

Задача 50. Запишите в виде десятичных дробей числа (а) 10^{-1}; (б) 10^{-2}; (в) 10^{-3}.

В табл. 10 приведено несколько «малых» чисел.

Деление чисел на большие и малые, как мы уже говорили, условно. При желании можно было бы включить в эту таблицу величины из предыдущей: например, радиус Земли $\simeq 6 \cdot 10^3$ км $\simeq 4 \cdot 10^{-5}$ астрономических единиц.

Задача 51. За какое время красный свет проходит расстояние, равное длине волны? (Это время называют периодом колебаний.)

Итак, запомните:

Определение. Для целых положительных n

$$\begin{aligned} a^n &= a \cdot a \ldots a \quad (n \text{ раз}), \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \\ a^0 &= 1. \end{aligned}$$

Задача 52. Верно ли равенство $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ для отрицательных n и для $n = 0$?

Можно ли доказать, что $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$? Нельзя, поскольку запись a^{-n} сама по себе, до принятия нашего соглашения (или, как говорят математики, определения) смысла не имеет. Если вдруг все математики мира почему-либо договорятся понимать a^{-n} как-то иначе, то с этого момента равенство $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ перестанет быть верным. Однако этого не произойдет — зачем менять привычное и удобное соглашение?! Нарушив его, мы чрезвычайно все усложним (см. следующий раздел).

С помощью обозначений для степеней длинное выражение

$$2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot d$$

Таблица 10

1 см	$= 10^{-2}$ м
1 мм	$= 10^{-3}$ м
1 микрон	$= 10^{-6}$ м
1 нанометр	$= 10^{-9}$ м
1 ангстрем	$= 10^{-10}$ м
Масса молекулы воды	$\simeq 3 \cdot 10^{-23}$ г
Размер живой клетки	$\simeq 15 - 350 \cdot 10^{-9}$ м
Граница применимости известных законов физики («элементарная длина», как говорят физики)	$\simeq 10^{-31}$ см
Длина световой волны (красный свет)	$\simeq 7 \cdot 10^{-7}$ м

можно записать короче — как $2a^4b^3c^2d$, а

$$\frac{2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot c \cdot c}{b \cdot b \cdot b \cdot d} \text{ —}$$

как $2a^4b^{-3}c^2d^{-1}$.

Задача 53. Записать с использованием показателей степени

(а) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$;

(б) $\dfrac{2 \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b}$.

Ответ. (а) $a^{10}b^4$; (б) $2a^3b^{-2}$.

Задача 54. Переписать, используя лишь положительные показатели степеней:

$$\text{(а) } a^3b^{-5}; \ \text{(б) } a^{-2}b^{-7}.$$

Ответ. (а) $\dfrac{a^3}{b^5}$; (б) $\dfrac{1}{a^2b^7}$.

18. Как умножить a^m на a^n, или почему наше определение удобно

Умножить a^m на a^n совсем просто, если m и n положительны. Например,

$$a^5 \cdot a^3 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{5 \text{ раз}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{3 \text{ раза}} = a^{5+3} = a^8.$$

Вообще, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Действительно, a^m — это a, повторенное множителем m раз, а a^n — это a, повторенное n раз. Аналогичным образом, для $n = 1$ имеем:

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Но показатели степеней могут быть и отрицательными. Наше правило годится и в этом случае! Например, при $m = 5$, $n = -3$ оно гласит:

$$a^5 \cdot a^{-3} = a^{5+(-3)} = a^2.$$

Проверим: $a^5 \cdot a^{-3}$ по определению есть

$$a^5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^2.$$

Более дотошный читатель попросит проверить еще и такое равенство:

$$a^{-5} \cdot a^3 = a^{-5+3} = a^{-2}.$$

Пожалуйста. По определению,

$$a^{-5} \cdot a^3 = \frac{1}{a^5} \cdot a^3 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}.$$

Еще более дотошные вспомнят, что оба числа m и n могут быть отрицательными и попросят проверить, что

$$a^{-5} \cdot a^{-3} = a^{(-5)+(-3)} = a^{-8}.$$

Действительно,

$$a^{-5} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^8} = a^{-8}.$$

Не думайте, что мы уже разобрали все случаи. Мы забыли, что один из показателей (или даже оба) может быть равен 0, а a^0 мы определяли отдельным соглашением. Разберем и этот случай: проверим, что

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m.$$

Действительно, по определению $a^0 = 1$, так что

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m.$$

Задача 55. Надо ли отдельно разбирать случаи $m < 0$, $m = 0$ и $m > 0$?

Задача 56. Чему равно $\dfrac{a^m}{a^n}$? При всех ли целых m и n ваш ответ годится?

19. Правило умножения степеней

При умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Это правило позволяет удобно работать с большими и малыми числами: например, для умножения $2 \cdot 10^7$ на $3 \cdot 10^{-11}$ достаточно умножить 2 на 3 и сложить 7 и -11:

$$(2 \cdot 10^7) \cdot (3 \cdot 10^{-11}) = (2 \cdot 3) \cdot (10^7 \cdot 10^{-11}) = 6 \cdot 10^{7+(-11)} = 6 \cdot 10^{-4}.$$

Подобным образом обычно выполняется умножение в компьютерах (только вместо 10 используется 2).

Задача 57.

1. $2^{1001} \cdot 2^n = 2^{2000}$. Чему равно n?
2. $2^{1001} \cdot 2^n = 1/4$. Чему равно n?
3. Что больше: 10^{-3} или 2^{-10}?
4. $\dfrac{2^{1000}}{2^n} = 2^{501}$. Чему равно n?
5. $\dfrac{2^{1000}}{2^n} = \dfrac{1}{16}$. Чему равно n?
6. $4^{100} = 2^n$. Чему равно n?
7. $2^{100} \cdot 3^{100} = a^{100}$. Чему равно a?
8. $(2^{10})^{15} = 2^n$. Чему равно n?

Мы говорили, что принятое определение отрицательных степеней неизбежно и что отказ от него приведет к путанице. Сейчас мы поясним, что имелось в виду. Предположим, что мы хотим определить отрицательные степени как-то иначе, но так, чтобы по-прежнему выполнялось равенство $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ при всех m и n. Оказывается, что это невозможно. В самом деле, при $n = 0$ должно быть $a^m \cdot a^0 = a^{m+0}$, т. е. $a^m \cdot a^0 = a^m$. Следовательно, $a^0 = 1$. Но тогда из $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$ с неизбежностью вытекает, что $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Что получится, если степень вновь возвести в степень? Например,

$$(a^2)^3 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{\text{3 раза}} = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6.$$

Аналогично,

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

для любых положительных целых m, n. И вновь наши соглашения об отрицательных степенях «думают за нас»: оказывается, что эта же формула верна и для отрицательных m и n. Например,

$$(a^{-2})^3 = \left(\frac{1}{a^2}\right)^3 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{(-2)\cdot 3}.$$

Задача 58. Проверьте эту формулу для других комбинаций знаков (если $m > 0$, $n < 0$; если оба числа m и n отрицательны; если одно из них равно нулю).

Еще одна, последняя, формула такова:

$$\boxed{(ab)^n = a^n \cdot b^n}$$

Задача 59. Проверьте эту формулу при положительных и отрицательных целых n.

Задача 60. Чему равно $(-a)^{775} : a^{775}$ или $-a^{775}$?

Задача 61. Чему равно $\left(\frac{a}{b}\right)^n$? Верна ли ваша формула для отрицательных n?

Мы определили степени с положительным и отрицательным целым показателем. Однако на этом наши приключения с определением степени не кончатся: вспомните, что помимо целых чисел бывают и дробные.

Задача 62. Как Вы думаете, чему равно $4^{1/2}$? А $27^{1/3}$? Можете ли Вы как-то обосновать свое предположение?

Впоследствии мы узнаем, как возвести число в дробную степень.

20. Формулы сокращенного умножения. Квадрат суммы

Мы уже сталкивались с формулой

$$(a+b)(m+n) = am + an + bm + bn$$

(чтобы перемножить две суммы, нужно каждое слагаемое первой умножить на каждое слагаемое второй, а потом все сложить). Перемножим теперь две одинаковые скобки:

$$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb.$$

Вспоминая, что $ab = ba$ и что для aa и bb у нас есть удобные обозначения a^2 и b^2, получаем

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

или

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Задача 63. Вычислить в уме: (а) 101^2; (б) 1002^2.

Задача 64. Каждый из сомножителей увеличили на 10 процентов. На сколько процентов увеличится их произведение?

Словесная формулировка: «Квадрат суммы равен сумме квадратов плюс удвоенное произведение слагаемых».

Обратите внимание на то, что похожие выражения «квадрат суммы» и «сумма квадратов» обозначают разное: квадрат суммы — это $(a+b)^2$, а сумма квадратов — это a^2+b^2.

Задача 65. «Сын отца» и «отец сына» — это одно и то же или нет?

21. Как объяснить формулу $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ младшему брату или сестре

Добрый волшебник дарил приходившим к нему детям конфеты. Он любил дружных детей и давал каждому столько конфет, сколько детей приходило. (Придя в одиночку, можно было получить одну конфету, а придя вдвоем — по две каждому.)

Как-то раз к нему пришло a мальчиков. Каждый из них получил a конфет — всего a^2 конфет. Только они ушли, пришли b девочек. Каждая получила по b конфет — всего b^2. Всего в этот день мальчики и девочки получили a^2+b^2 конфет.

На следующий день a мальчиков и b девочек пришли вместе. Каждый из $a+b$ ребят получил $a+b$ конфет — всего $(a+b)^2$ конфет. В какой день — первый или второй — мальчики и девочки вместе получили больше конфет и на сколько?

Чтобы ответить на этот вопрос, можно рассуждать так. Во второй день каждый из a мальчиков получил b лишних конфет (за пришедших девочек). Всего мальчики получили лишних ab конфет. Каждая девочка получила лишних a конфет за мальчиков — всего лишних ba конфет. В общей сложности мальчики и девочки получили $ab + ba = 2ab$ лишних конфет во второй день по сравнению с первым. Значит $(a + b)^2$ больше $a^2 + b^2$ на величину $2ab$. Таким образом, $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.

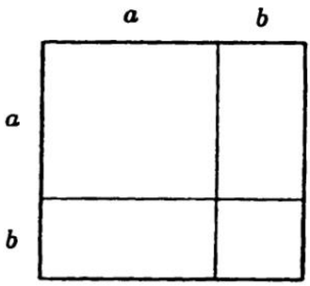


Рис. 6

З а д а ч а 66. Разрезать квадрат со стороной $a + b$ на квадрат со стороной a, квадрат со стороной b и два прямоугольника со сторонами a и b.

Р е ш е н и е. См. рис. 6.

22. Квадрат разности

Формула $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ является сокращенной записью бесчисленного множества равенств вроде $(5 + 7)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 + 7^2$ или $(13 + \frac{1}{3})^2 = 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2$, которые получаются, если вместо a и b подставить конкретные числа. Эти числа могут быть и отрицательными. Подставим, например, $a = 7$, $b = -5$.

$$(7 + (-5))^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot (-5) + (-5)^2.$$

Вспоминая, что плюс на минус дает минус, а минус на минус дает плюс, можно записать

$$(7 - 5)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 + 5^2.$$

Аналогичное равенство верно и для других чисел, так что в общем виде можно записать

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

«Квадрат разности равен сумме квадратов минус удвоенное произведение слагаемых».

Задача 67. Вычислить в уме: (а) 99^2; (б) 998^2.

Задача 68. Что дают формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ при (а) $a = b$; (б) $a = 2b$?

23. Разность квадратов

Задача 69. Перемножить $a+b$ и $a-b$.

Решение. $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + {} + ba - b^2 = a^2 - b^2$ (ab и ba сокращаются). Получаем формулу «разности квадратов»:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Задача 70. Перемножить в уме 101 и 99.

Задача 71. Из квадрата со стороной a вырезан квадрат со стороной b (рис. 7). Разрезать получившуюся фигуру на части и сложить из них прямоугольник со сторонами $a-b$ и $a+b$.

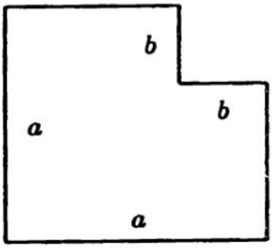


Рис. 7

Приведенные нами формулы (квадрат суммы, квадрат разности и разность квадратов) называют *формулами сокращенного умножения*.

Задача 72. Два целых числа, одно из которых на 2 больше другого, перемножили и к произведению прибавили 1.

Доказать, что получился точный квадрат (квадрат целого числа). Например,

$$\begin{aligned} 3\cdot 5+1 &= 16=4^2,\\ 13\cdot 15+1 &= 196=14^2. \end{aligned}$$

Первое решение. Обозначим меньшее число через n. Тогда большее равно $n+2$. Их произведение равно $n(n+2) = n^2+2n$. Прибавив 1, получим $n^2+2n+1 = (n+1)^2$ (формула квадрата суммы).

Второе решение. Обозначим большее число через n. Тогда меньшее равно $n-2$. Произведение равно $n(n-2) = n^2-2n$. Прибавив 1, получим $n^2-2n+1=(n-1)^2$ (формула квадрата разности).

Третье решение. Если мы не хотим отдавать предпочтение большему или меньшему из чисел, обозначим через n число между ними. Тогда меньшее число равно $n-1$, большее равно $n+1$, произведение равно $(n+1)(n-1) = n^2-1$ (формула разности квадратов), т. е. на единицу меньше точного квадрата.

Задача 73. Напишем квадраты чисел 1, 2, 3, ...:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots$$

и под каждыми двумя числами напишем их разность:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & 49\ \ldots\\ & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13\ \ldots & \end{array}$$

В нижнем ряду каждое число больше предыдущего на 2. Почему?

Решение. Соседние числа n и $n+1$ имеют квадраты n^2 и $(n+1)^2 = n^2+2n+1$. Разница квадратов равна $2n+1$, и при увеличении n на 1 она увеличивается на 2.

З а м е ч а н и е. Последовательности чисел, в которых каждое следующее число больше предыдущего на одну и ту же величину (как в $3, 5, 7, 9, \dots$), называют арифметическими прогрессиями. С ними мы еще встретимся.

З а д а ч а 74. Есть правило, позволяющее находить квадрат чисел, кончающихся на 5: «отбросьте последнюю цифру 5, останется число n; умножьте n на $n+1$ и к полученному числу допишите справа 25». Например:

$$35^2 : \text{отбрасываем 5, остается 3; } 3 \cdot 4 = 12,$$
$$\text{приписываем 25, получаем 1225.}$$
$$115^2 : 11 \cdot 12 = 132;\ 115^2 = 13225$$

Обосновать это правило.

З а д а ч а 75. Вычислить

$$(a+b+c)^2.$$

Р е ш е н и е.

$$(a+b+c)^2 =$$
$$= (a+b+c)(a+b+c) =$$
$$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 +$$
$$+ bc + ca + cb + c^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

(см. рис. 8).

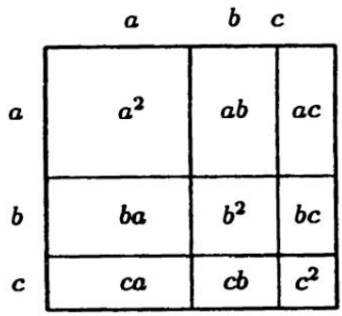


Рис. 8

З а д а ч а 76. Вычислить $(a+b-c)^2$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

З а д а ч а 77. Вычислить $(a+b+c)(a+b-c)$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой разности квадратов.

Задача 78. Вычислить $(a+b+c)(a-b-c)$.

Указание. И здесь полезна формула разности квадратов.

Задача 79. Вычислить $(a+b-c)(a-b+c)$.

Указание. Даже здесь полезна формула разности квадратов.

Задача 80. Вычислить $(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)$.

Первое решение. Это равно

$$(a-b)^2(a+b)^2 = ((a-b)(a+b))^2 = (a^2-b^2)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4.$$

Второе решение.

$$\begin{aligned}&(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2) = \\ &= ((a^2+b^2)+2ab)((a^2+b^2)-2ab) = (a^2+b^2)^2-(2ab)^2 = \\ &= a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2 = a^4+b^4-2a^2b^2.\end{aligned}$$

24. Куб суммы

Найдем формулу для $(a+b)^3$. По определению

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b),$$

и можно было бы раскрыть скобки прямо так. Но мы пойдем другим путем, заметив, что

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b).$$

Раскрывая скобки, мы должны каждое слагаемое первой скобки умножить на a, а затем на b и потом все сложить:

$$(a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^2\cdot a+2ab\cdot a+b^2\cdot a+a^2\cdot b+2ab\cdot b+b^2\cdot b.$$

Вспоминая правило перемножения степеней с одинаковым основанием ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$) и записывая в каждом слагаемом сначала a, а затем b, получим

$$\begin{array}{l} a^3 + 2a^2b + ab^2 + \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3. \end{array}$$

В этой сумме есть подобные члены (отличающиеся лишь числовым множителем). Для наглядности они написаны друг под другом. Собирая их вместе, получаем

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Задача 81. Вычислить в уме 11^3.

Указание. $11 = 10 + 1$.

Задача 82. Вычислить в уме 101^3.

Задача 83. Чему равно $(a-b)^3$?

Решение. Можно было бы действовать как раньше, записав $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$ и раскрыв скобки. Однако проще подставить в формулу для $(a+b)^3$ выражение $(-b)$ вместо b:

$$(a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2 \cdot (-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

или

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

(пользуемся тем, что минус на минус дает плюс, а плюс на минус дает минус).

25. Четвертая степень суммы

Прежде чем вычислять $(a+b)^4$, попытаемся угадать ответ. Для этого выпишем уже известные формулы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Чтобы пополнить наш «экспериментальный материал», можно добавить к ним

$$(a+b)^1 = a + b.$$

Итак, вот что мы уже имеем:

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = ???$$

Попробуем отгадать, что будет дальше. Сколько будет слагаемых? Конечно, пять. Каково будет первое слагаемое? Конечно, a^4. А следующее? Это уже сложнее. Разобьем вопрос на два:

(1) какие будут степени a и b?

(2) какие будут при них числовые коэффициенты?

Первый вопрос проще. Мы знаем, что

в $(a+b)^1$ входят a и b,

в $(a+b)^2$ входят a^2, ab и b^2,

в $(a+b)^3$ входят a^3, a^2b, ab^2 и b^3,

поэтому есть все основания предположить, что

в $(a+b)^4$ входят a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4.

Теперь напишем коэффициенты — при этом для единообразия напишем множитель 1 там, где его нет:

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= 1a+1b\\ (a+b)^2 &= 1a^2+2ab+1b^2\\ (a+b)^3 &= 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3\end{aligned}$$

Сами коэффициенты:

$$\begin{array}{ccccc}1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ ? & ? & ? & ? & ?\end{array}$$

Первый из неизвестных коэффициентов, конечно, равен 1. Второй, вероятно, 4 (поскольку над ним стоят 1, 2, 3)

$$\begin{array}{ccccc}1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & ? & ? & ?\end{array}$$

Еще два коэффициента можно угадать. Так как в $(a+b)^4$ буква b ничем не хуже буквы a, то коэффициент при b^4 такой же, что и при a^4, а коэффициент при ab^3 такой же, как при a^3b:

$$\begin{array}{ccccc}1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & ? & 4 & 1\end{array}$$

Что же касается коэффициента при a^2b^2, то так просто его не угадаешь — надо вычислять. Сделаем это, снова записывая подобные члены друг под другом:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) = \\
&= a^3\cdot a + 3a^2b\cdot a + 3ab^2\cdot a + b^3\cdot a + \\
&\qquad + a^3\cdot b + 3a^2b\cdot b + 3ab^2\cdot b + b^3\cdot b = \\
&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + \\
&\qquad + 3a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 .
\end{aligned}$$

Объединяя (или, как говорят, «приводя») подобные члены, получаем

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4a^3b+b^4}$$

Все наши догадки подтвердились; кроме того, мы нашли коэффициент при a^2b^2, оказавшийся равным 6.

26. $(a+b)^5$, $(a+b)^6$ и треугольник Паскаля

В формуле для $(a+b)^5$ ожидаются члены

$$a^5 \quad a^4b \quad a^3b^2 \quad a^2b^3 \quad ab^4 \quad b^5$$

и коэффициенты

$$1 \quad 5 \quad ? \quad ? \quad 5 \quad 1$$

Чтобы узнать два средних коэффициента — надо полагать, они будут одинаковыми — поступим как обычно:

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b) = \\
&= a^4\cdot a + 4a^3b\cdot a + 6a^2b^2\cdot a + 4ab^3\cdot a + b^4\cdot a + \\
&\qquad + a^4\cdot b + 4a^3b\cdot b + 6a^2b^2\cdot b + 4ab^3\cdot b + b^4\cdot b = \\
&= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 .
\end{aligned}$$

Итак, наша таблица коэффициентов пополнилась еще одним рядом:

$$\begin{array}{lllll}
1\;1 & & & & \\
1\;2 & 1 & & & \\
1\;3 & 3 & 1 & & \\
1\;4 & 6 & 4 & 1 & \\
1\;5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Быть может, Вы уже заметили закономерность: в следующей строке коэффициент получается сложением двух коэффициентов предыдущей — стоящего над ним и стоящего слева вверху: $1+4=5$, $4+6=10$, $6+4=10$, $4+1=5$.

Причина этого станет ясной, если в нашем вычислении $(a+b)^5$ оставить только коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&1\ldots + 4\ldots + 6\ldots + 4\ldots + 1\ldots + \\
&\qquad + 1\ldots + 4\ldots + 6\ldots + 4\ldots + 1\ldots = \\
&= 1\ldots + 5\ldots + 10\ldots + 10\ldots + 5\ldots + 1\ldots\ .
\end{aligned}$$

Для красоты таблицу коэффициентов можно записать симметрично и еще дописать сверху 1, так как $(a+b)^0=1$. Получается треугольник

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

который можно продолжать вниз по правилу: каждое число равно сумме двух чисел над ним (кроме крайних, которые равны 1). Например, следующий ряд будет

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

и это дает формулу

$$\boxed{(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}$$

Построенный нами треугольник называется треугольником Паскаля (Блез Паскаль [1623–1662] — французский математик и философ).

Задача 84. Чему равно 11^3, 11^4, 11^5, 11^6?

Задача 85. Напишите формулу для $(a+b)^7$.

Задача 86. Напишите формулы для $(a-b)^4$, $(a-b)^5$, $(a-b)^6$.

Задача 87. Сложите числа в каждой из строк треугольника Паскаля: не замечаете ли Вы закономерности?

Задача 88. Что дают формулы $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5 \ldots$ при $b=a$?

Задача 89. Нет ли связи между двумя предыдущими задачами?

Задача 90. Что дают формулы $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5 \ldots$ при $b=-a$?

27. Многочлены

Многочленом называют выражение, составленное из букв и чисел с помощью операций сложения, вычитания и умножения. Входящие в него буквы называют переменными. Примеры многочленов:

$$a^4 + a^3b + ab^3 + b^4,$$
$$(5-7x)(x-1)(x-3) + 11,$$
$$(a+b)(a^3+b^3),$$

$$(a+b)(a+2b)+ab,$$
$$(x+y)(x-y)-(y-x)(y+x),$$
$$0,$$
$$(x+y)^{100}.$$

В этих примерах, помимо сложения, вычитания и умножения, используется возведение в целую положительную степень. Это допустимо, так как оно сводится к умножению (a^4, например, есть сокращение для $a \cdot a \cdot a \cdot a$). Но a^{-7} или x^y — не многочлены.

Одночленом называется многочлен, не содержащий сложения и вычитания, т. е. являющиеся произведением букв и чисел. Примеры одночленов:

$$5 \cdot a \cdot 7 \cdot b \cdot a,$$
$$127\,a^{15},$$
$$(-2)\,a^2 b$$

(в последнем примере знак минус — это не вычитание, а часть обозначения числа «-2»).

Записывая одночлен, обычно группируют вместе числа и одинаковые буквы: вместо $5 \cdot a \cdot 7 \cdot b \cdot a$ пишут $35\,a^2 b$.

Обратите внимание, что одночлен — это тоже многочлен: в математике часто один — это уже много. (Математики говорят о «множестве решений» какого-то уравнения, даже если у него только одно решение или решений вообще нет.)

Раскрывая скобки, любой многочлен можно преобразовать в сумму одночленов. Например,

$$(a+b)(a^3+b^3) = aa^3 + ab^3 + ba^3 + bb^3 = a^4 + ab^3 + ba^3 + b^4,$$
$$(a+b)(a+2b) = a^2 + 2ab + ba + b^2.$$

При этом могут возникнуть *подобные* члены — содержащие одни и те же буквы в одинаковых степенях. Например, во втором из только что приведенных примеров одночлены $2ab$ и ba подобны. Подобные одночлены можно объединить:

$$(a+b)(a+2b) = a^2 + 2ab + ba + b^2 = a^2 + 3ab + b^2.$$

Эту операцию называют «приведением подобных членов».

Задача 91. Многочлен $(1 + x + y)(12 - zx - y)$ преобразовать в сумму одночленов и привести подобные члены.

Решение.

$$\begin{aligned}
&(1+x-y)(12-zx-y) = \\
&\quad = 12 - zx - \underline{y} + 12x - xzx - xy - \underline{12y} + yzx + y^2 = \\
&\quad = 12 - zx - 13y + 12x - zx^2 - xy + yzx + y^2
\end{aligned}$$

(подобные члены подчеркнуты).

Строго говоря, это еще не все: по условию должна быть сумма одночленов, а у нас есть вычитание. Это легко исправить, записав

$$12 + (-1)zx + (-13)y + 12x + (-1)zx^2 + (-1)xy + 1yzx + 1y^2$$

(для единообразия мы добавили множители 1).

Стандартным видом многочлена называют его запись в виде суммы одночленов, в которой каждый одночлен есть произведение числа (коэффициента) и степеней различных букв, причём подобные члены уже приведены. Решая предыдущую задачу, мы привели многочлен $(1+x+y)(12-zx-y)$ к стандартному виду.

Чтобы сложить два многочлена в стандартном виде, достаточно сложить коэффициенты при подобных членах. При этом некоторые члены могут сократиться:

$$(1x + (-1)y) + (1y + (-2)x + 1z) =$$

$$(1 + (-2))x + ((-1) + 1)y + 1z = (-1)x + 0y + 1z = (-1)x + 1z.$$

При умножении надо умножить каждое слагаемое на каждое. Умножая два одночлена, мы складываем степени при каждой переменной:

$$(a^5b^7c)\cdot(a^3bd^4) = a^{5+3}b^{7+1}cd^4 = a^8b^8cd^4.$$

После этого надо привести подобные. Например,

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3+\underline{x^2y}+\underline{\underline{xy^2}}-\underline{yx^2}-\underline{\underline{xy^2}}-y^3 = x^3-y^3.$$

(Подобные члены подчеркнуты одинаково; дотошный читатель отметит, что мы нарушили правила записи многочленов в стандартном виде, опустив коэффициенты -1 и 1.)

Задача 92.

1. Перемножить $(1+x)(1+x^2)$.
2. Перемножить $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$.
3. Перемножить $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$.
4. Найти $(1+x+x^2+x^3)^2$.
5. Найти $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10})^2$.
6. Найти коэффициент при x^{30} и x^{29} в
   $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10})^3$.
7. Перемножить $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10})$.
8. Перемножить $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
9. Перемножить $(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9+x^{10})$ и $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10})$.

28. Отступление: какие многочлены считать равными?

Понятие «равны» для многочленов может определяться поразному. Первый вариант: многочлены считаются равными, если один из них может быть преобразован в другой по правилам алгебры (раскрытием скобок, приведением подобных, вынесением за скобку и т. п.). Второй вариант: многочлены считаются равными, если при подстановке любых чисел вместо букв они принимают одно и то же числовое значение. Оказывается, что эти два варианта эквивалентны: многочлены, равные в одном смысле, равны и во втором. В самом деле, если один многочлен преобразуется в другой по правилам алгебры, то эти преобразования сохраняют силу и после подстановки чисел вместо букв. Обратное утверждение («если два многочлена принимают одинаковые значения при подстановке любых чисел вместо букв, то один из них может быть преобразован в другой») доказать не так просто, и мы примем его на веру без доказательства.

Если мы хотим убедить кого-то, что два многочлена равны, удобен первый вариант определения: достаточно показать, как один многочлен преобразуется в другой. Напротив, если мы хотим убедить кого-то, что многочлены не равны, удобней второй вариант: достаточно указать числовые значения букв, при которых многочлены принимают различные числовые значения.

Задача 93. Не раскрывая скобок, убедиться, что

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \neq (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

Решение. При подстановке $x = 1$ левая часть обращается в нуль, а правая нет.

Задача 94. В верном равенстве многочленов

$$(x^2-1)(x+\ldots) = (x-1)(x+3)(x+\ldots)$$

два числа стерли, заменив точками. Что это были за числа?

Указание. Подставить $x = -1$ и $x = -3$.

Пусть теперь нам даны два многочлена, про которые неизвестно заранее, равны они или нет. Как это узнать? Можно подставить на пробу какие-то числа, и сделать несколько проб. Если хоть раз получатся разные результаты, то многочлены не равны. Если же нет, то есть основания подозревать, что они равны.

Задача 95. Ваня подставил в многочлены $(x+1)^2-(x-1)^2$ и x^2+4x-1 числа 1 и -1 вместо x и утверждает, что эти многочлены равны. Прав ли он?

Решение. Нет: достаточно подставить $x=0$.

Так что подозрения — не доказательство (хотя впоследствии мы увидим, что иногда конечного числа проверок бывает достаточно).

Чтобы проверить, равны ли два многочлена, их можно привести к стандартному виду. Если после этого они отличаются лишь порядком одночленов или порядком сомножителей в одночленах, то они, очевидно, равны. Если же нет, то можно доказать, но мы примем это на веру — многочлены не равны.

Иногда равные многочлены называют «тождественно равными», подчеркивая, что имеется в виду равенство для всех числовых значений букв. Так, например, многочлен a^2-b^2 тождественно равен многочлену $(a-b)(a+b)$.

29. Сколько одночленов останется?

Задача 96. Какое максимальное количество одночленов может быть в произведении двух многочленов, каждый из которых содержит 4 одночлена?

З а м е ч а н и е. Ко всякому многочлену можно добавить фиктивные одночлены с коэффициентом 0:

$$x^3 + 4 = x^3 + 0x^2 + 0x + 4.$$

Такие одночлены мы не учитываем.

Р е ш е н и е. Перемножим многочлены $(a + b + c + d)$ и $(x + y + z + u)$:

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)(x + y + z + u) = \\ = ax + ay + az + au + \\ + bx + by + bz + bu + \\ + cx + cy + cz + cu + \\ + dx + dy + dz + du\,.\end{aligned}$$

Всего 16 членов. Ясно, что больше 16 быть не может (каждый из четырех одночленов первого многочлена умножается на четыре одночлена второго).

З а д а ч а 97. Может ли произведение двух многочленов, каждый из которых содержит 4 одночлена, состоять меньше чем из 16 одночленов?

Р е ш е н и е. Да: среди 16 одночленов могут оказаться подобные. Например,

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6,$$

и из 16 членов после приведения подобных остается всего 7.

З а д а ч а 98. Может ли при перемножении двух ненулевых многочленов получиться так, что вообще все члены сократятся друг с другом?

О т в е т. Нет.

Замечание. Вероятно, эта задача кажется Вам бессмысленной, ведь и так ясно, что такого быть не может. В этом случае советуем вернуться к ней позднее.

Задача 99. Может ли при перемножении двух многочленов и последующем приведении подобных остаться единственный одночлен? (Случай, когда каждый из многочленов состоял из одного одночлена, нас не интересует.)

Задача 100. Может ли при перемножении двух многочленов получиться многочлен, в котором меньше одночленов, чем в каждом из сомножителей?

Решение. Да:

$$
\begin{aligned}
&(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2) = \\
&\quad = ((x^2+2y^2)+2xy)((x^2+2y^2)-2xy) = \\
&\quad = (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2 = \\
&\quad = x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2 = \\
&\quad = x^4+4y^4.
\end{aligned}
$$

30. Коэффициенты и значения

Вспомним треугольник Паскаля и формулы для $(a+b)^n$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
(a+b)^0 &=& 1 \\
(a+b)^1 &=& 1a+1b \\
(a+b)^2 &=& 1a^2+2ab+1b^2 \\
(a+b)^3 &=& 1a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &=& 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{array}
$$

Каждая из этих формул является равенством двух многочленов. Из этого равенства можно получить множество числовых равенств, подставив вместо a и b конкретные числа.

Задача 101. Что получится, если подставить $a = 1$, $b = 1$?

Решение.

$$\begin{array}{lcl} (1+1)^0 & = & 1 \\ (1+1)^1 & = & 1+1 \\ (1+1)^2 & = & 1+2+1 \\ (1+1)^3 & = & 1+3+3+1 \\ (1+1)^4 & = & 1+4+6+4+1 \\ & \cdots & \end{array}$$

Поскольку $1 + 1 = 2$, мы доказали, что сумма чисел в любой строке треугольника Паскаля является степенью двойки.

Задача 102. Сложив числа в строках треугольника Паскаля с чередующимися знаками, получаем нули:

$$\begin{array}{l} 1-1=0 \\ 1-2+1=0 \\ 1-3+3-1=0 \\ 1-4+6-4+1=0 \\ \cdots \end{array}$$

Почему так получается?

Указание. Подставьте $a = 1$, $b = -1$.

Задача 103. В многочлене $(1 + 2x)^{200}$ раскрыли все скобки, приведя его к стандартному виду (сумма степеней x с коэффициентами). Чему равна сумма коэффициентов?

Указание. Подставьте $x = 1$.

Задача 104. Тот же вопрос что и в задаче 103, но для многочлена $(1 - 2x)^{200}$.

Задача 105. Многочлен $(1 + x - y)^3$ привели к стандартному виду. Чему равна сумма коэффициентов?

Задача 106. (Продолжение.) Чему равна сумма коэффициентов при тех одночленах, которые не содержат y?

Задача 107. (Продолжение.) Чему равна сумма коэффициентов при тех одночленах, которые содержат x?

31. Разложение на множители

Умножение многочленов — операция подчас трудоемкая, но не требующая сообразительности — надо лишь аккуратно следовать правилам. Обратная операция — разложение многочлена в произведение нескольких множителей — требует большей изобретательности (а иногда и вообще невыполнима). Мы разберем сейчас несколько приемов.

Задача 108. Разложить на множители многочлен $ac+ad+bc+bd$.

Решение. $ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$.

Задача 109. Разложить на множители многочлены:
(а) $ac + bc - ad - bd$;
(б) $1 + a + a^2 + a^3$;
(в) $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{13} + a^{14}$;
(г) $x^4 - x^3 + 2x - 2$.

Иногда оказывается необходимым разбить один член на два, прежде чем удастся сгруппировать члены подходящим образом:

Задача 110. Разложить на множители многочлен $a^2 + 3ab + 2b^2$.

Решение. $a^2 + 3ab + b^2 = a^2 + ab + 2ab + 2b^2 = a(a + b) + 2b(a + b) = (a + 2b)(a + b)$.

Задача 111. Разложить на множители:
(а) $a^2 - 3ab + 2b^2$;
(б) $a^2 + 3a + 2$.

Формулу квадрата суммы можно прочесть «справа налево», рассматривая ее как разложение многочлена $a^2+2ab+b^2$ на множители. Это же разложение можно получить так:

$$a^2+2ab+b^2 = a^2+ab+ab+b^2 = a(a+b)+b(a+b) = (a+b)(a+b).$$

Задача 112. Разложить на множители:
(а) $a^2 + 4ab + 4b^2$;
(б) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$;
(в) $a^2 - 2a + 1$.

Иногда оказывается необходимым добавить и вычесть некоторые одночлены. Этот прием мы продемонстрируем на примере многочлена $a^2 - b^2$ (хотя его разложение нам и так известно):

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a(a-b) + b(a-b) = (a+b)(a-b).$$

Задача 113. Разложить на множители $x^5 + x + 1$.

Решение.

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = \\ = x^3(x^2+x+1) - x^2(x^2+x+1) + (x^2+x+1) = \\ = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Возможно, это решение обескуражило Вас — непонятно, как до него догадаться. Авторам это тоже непонятно.

Посмотрим на разложение $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ еще с одной точки зрения. Если $a = b$, то $a - b = 0$ и правая часть обращается в нуль (один сомножитель равен нулю).

Значит, и левая тоже. Это и понятно: если $a = b$, то $a^2 = b^2$. Аналогично, если $a+b=0$, то $a^2 = b^2$ (в этом случае $a = -b$ и $a^2 = b^2$: от изменения знака числа его квадрат не меняется).

Задача 114. Доказать, что если $a^2 = b^2$, то $a = b$ или $a = -b$.

Таким образом, раскладывая выражение на множители, полезно поинтересоваться, когда оно равно нулю — это может подсказать сомножители.

Задача 115. Разложить на множители $a^3 - b^3$.

Решение. Выражение $a^3 - b^3$ обращается в нуль, если $a = b$. Поэтому можно предположить, что одним из множителей будет $a - b$. После этого найти разложение не так сложно: $a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b) = (a^2 + ab + b^2)(a-b)$.

Задача 116. Разложить на множители $a^3 + b^3$.

Решение. $a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^2(a+b) - ab(a+b) + b^2(a+b) = (a^2 - ab + b^2)(a+b)$.

Это же разложение можно получить из предыдущего, подставив $(-b)$ вместо b.

Задача 117. Разложить на множители $a^4 - b^4$.

Решение. $a^4 - b^4 = a^4 - a^3b + a^3b - a^2b^2 + a^2b^2 - ab^3 + ab^3 - b^4 = a^3(a-b) + a^2b(a-b) + ab^2(a-b) + b^3(a-b) = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

Заметим, что $a^4 - b^4$ можно разложить и иначе:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

Оба разложения получаются из разложения

$$(a^4 - b^4) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$

различной группировкой сомножителей.

Задача 118. Разложить на множители:
(а) $a^5 - b^5$;
(б) $a^{10} - b^{10}$;
(в) $a^7 - 1$.

Задача 119. Разложить на множители $a^2 - 4b^2$.

Решение. Воспользовавшись тем, что $4 = 2^2$, запишем

$$a^2 - 4b^2 = a^2 - 2^2b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a - 2b)(a + 2b).$$

Попытаемся применить тот же прием к многочлену $a^2 - 2b^2$. Здесь нам понадобится число, называемое «квадратный корень из двух», обозначаемое $\sqrt{2}$ и равное примерно 1.4142... — его главное свойство состоит в том, что его квадрат равен 2: $(\sqrt{2})^2 = 2$. (Вообще квадратным корнем из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначается $\sqrt{a}$. Такое число всегда существует, причем только одно; к вопросу о квадратных корнях мы еще вернемся.)

С помощью квадратного корня из 2 мы можем записать:

$$a^2 - 2b^2 = a^2 - (\sqrt{2}b)^2 = (a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b).$$

Таким образом, нам удалось разложить $a^2 - 2b^2$ на множители, правда, в качестве коэффициента пришлось использовать $\sqrt{2}$.

Замечание. Запишем

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

Значит ли это, что нам удалось разложить $a - b$ на множители? Конечно, нет, так как $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ — не многочлен (операция извлечения квадратного корня не допускается в многочленах — только сложение, вычитание и умножение). А как же $a - \sqrt{2}b$? Почему мы считаем это выражение многочленом? Дело в том, что многочлен — по нашему определению —

строится из букв и чисел с помощью операций сложения, вычитания и умножения. А $\sqrt{2}$ — самое настоящее число (хотя и равное квадратному корню из другого числа). Так что все в порядке.

Задача 120. Разложить на множители:
(а) $a^2 - 2$;
(б) $a^2 - 3b^2$;
(в) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$;
(г) $a^2 + 4ab + 3b^2$.

Задача 121. Разложить на множители $a^4 + b^4$. (Известное нам разложение для $a^4 - b^4$ тут не помогает, так как подставив в него $(-b)$ вместо b, мы ничего нового не получаем.)

Решение. Применим хитрость: добавим и вычтем $2a^2b^2$:

$$a^4 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2}ab)^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab).$$

Подведем некоторые итоги. Мы научились разлагать на множители $a^n - b^n$ при любом n (один из множителей равен $a - b$). При нечетном n из этого разложения можно получить разложение для $a^n + b^n$ (подстановка $-b$ вместо b; один из множителей равен $a + b$). Остаются еще многочлены $a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$, $a^6 + b^6$ и т. д. Для второго из них мы нашли разложение на множители.

Задача 122. Какие еще многочлены вида $a^{2n} + b^{2n}$ можно разложить на множители?

Указание. $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3$. Аналогичный прием можно применить в случаях, когда n имеет нечетный делитель, больший 1, или делится на 4 — мы научились разлагать на множители все многочлены вида $a^n + b^n$, кроме $a^2 + b^2$.

Разложить a^2+b^2 можно было бы так:

$$a^2+b^2=a^2-(\sqrt{-1}\cdot b)^2=(a-\sqrt{-1}\cdot b)(a+\sqrt{-1}\cdot b),$$

да вот беда — квадратного корня из -1 (т. е. числа, квадрат которого равен -1) не существует, так как квадрат любого ненулевого числа положителен. Ну что ж, решили математики, если такого числа нет, то его надо выдумать. И выдумали — и получились числа, которые назвали комплексными. Но это уже другая история.

Задача 123. Как Вы думаете, чему равно произведение двух «комплексных чисел»: $(2+3\sqrt{-1})$ и $(2-3\sqrt{-1})$?

В заключение — несколько задач потруднее.

Задача 124. Разложить на множители:
(а) x^4+1;
(б) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$;
(в) $a^{10}+a^5+1$;
(г) $a^3+b^3+c^3-3abc$;
(д) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$;
(е) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

Задача 125. Доказать, что если $a,b>1$, то $a+b<1+ab$.

Указание. Разложить на множители $(1+ab)-(a+b)$.

Задача 126. Доказать, что если $a^2+ab+b^2=0$, то $a=0$ и $b=0$.

Указание. Вспомнить разложение для a^3-b^3. (Другое решение мы увидим дальше, когда речь пойдет о квадратных уравнениях.)

Задача 127. Доказать, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Задача 128. Доказать, что если

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

то среди чисел a, b, c есть равные по величине и противоположные по знаку (т. е. $a = -b$, $a = -c$ или $b = -c$).

32. Рациональные выражения

В многочленах не разрешается деление (только сложение, вычитание и умножение). Если деление разрешить, получится то, что называют «рациональными выражениями». (Единственное ограничение: то, на что делят, не должно тождественно равняться 0.)

Примеры рациональных выражений:

(а) $\dfrac{ab}{c}$; (б) $\dfrac{a/b}{b/c}$; (в) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$; (г) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$;

(д) $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}}{\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}}+1$; (е) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$; (ж) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\Big/2}$.

(Отметим, что, например, $\dfrac{x^2-x^2}{x-x}$ — не рациональное выражение, так как знаменатель тождественно равен 0.)

Заметим, что разрешение использовать деление не обязывает его использовать — так что любой многочлен является рациональным выражением.

33. Преобразование рационального выражения в частное двух многочленов

Рациональное выражение может включать в себя несколько операций деления. Однако его можно преобразовать так, чтобы операция деления была единственной, и притом последней. Другими словами, всякое рациональное выражение может быть преобразовано в частное двух многочленов.

Делается это с помощью таких приемов.

1. Сложение. Пусть мы хотим сложить дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{R}{S}$, где P, Q, R, S — многочлены. Приведем дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{R}{S}$ к общему знаменателю (если не придумаем ничего лучшего, можно домножить P и Q на S, а R и S на Q):

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}=\frac{PS}{QS}+\frac{QR}{QS}=\frac{PS+QR}{QS}.$$

2. Вычитание аналогично:

$$\frac{P}{Q}-\frac{R}{S}=\frac{PS}{QS}-\frac{QR}{QS}=\frac{PS-QR}{QS}.$$

3. Умножение:

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS}.$$

4. Деление:

$$\frac{P}{Q}\Big/\frac{R}{S}=\frac{PS}{QR}.$$

В ходе преобразований иногда удается сократить дробь, выделив один и тот же множитель в числителе и знаменателе:

$$\frac{PX}{QX}=\frac{P}{Q}.$$

З а д а ч а 129. Преобразовать выражения (б)–(д) и (ж) из приведенных нами в качестве примеров к указанному виду (выражения (а) и (е) уже имеют такой вид).

О т в е т ы и р е ш е н и я.

(б) $\frac{ac}{b^2}$; (в) $\frac{x}{x+1}$;

(г) $$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1};\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1+\frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1};$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{x+1}{2x+1};\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{3x+2}{2x+1}.$$

О т в е т. $\dfrac{1}{\dfrac{3x+2}{2x+1}} = \dfrac{2x+1}{3x+2}$.

(д) $$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}}+1 = \frac{(x^2z+y^2x+z^2y)/xyz}{(y^2z+z^2x+x^2y)/xyz}+1 =$$

$$= \frac{(x^2z+y^2x+z^2y)\cdot xyz}{(y^2z+z^2x+x^2y)\cdot xyz}+1 = \frac{(x^2z+y^2x+z^2y)}{(y^2z+z^2x+x^2y)}+1 =$$

$$= \frac{x^2z+y^2x+z^2y+y^2z+z^2x+x^2y}{y^2z+z^2x+x^2y};$$

(ж) $\frac{2ab}{a+b}$.

Отметим, что при преобразованиях одного и того же выражения можно получить разные ответы. Например, выражение

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-1}$$

можно оставить как есть, а можно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

Замечание. Строго говоря, сокращение — не вполне законная операция, ведь при некоторых значениях переменных сокращаемое выражение может равняться нулю. Например, $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-1}$ не имеет смысла при $x=-1$, а $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ имеет. Обычно на этот эффект не обращают внимания, но иногда он становится важным.

Часто предлагаются задачи, в которых требуется «упростить выражение» — привести его к наиболее простому виду. Хотя простота — это дело вкуса, в таких задачах обычно ясно, чего хотят их авторы.

Задача 130. Упростить выражение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Решение. Сложим две первые дроби, приведя их к общему знаменателю $(c-a)(c-b)(b-a)$ (числитель и знаменатель первой дроби умножаем на $b-a$, числитель и знаменатель второй — на $c-a$; используем, что $b-c=-(c-b)$):

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} =$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)(b-a)-(x-a)(x-c)(c-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(x-a)[(x-b)(b-a)-(x-c)(c-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(x-a)[xb - \underline{xa} - b^2 + ab - xc + \underline{xa} + c^2 - ac]}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(x-a)[x(b-c) + a(b-c) - (b-c)(b+c)]}{(c-a)(c-b)(b-a)} =$$

$$= \frac{(x-a)(b-c)(x+a-b-c)}{(c-a)(c-b)(b-a)}.$$

Сократив на $(c-b) = -(b-c)$, получаем

$$\frac{(x-a)(b+c-a-x)}{(c-a)(b-a)}.$$

Прибавим теперь третью дробь (знаменатели у них одинаковы):

$$\frac{(x-a)(b+c-a-x)}{(c-a)(b-a)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} =$$

$$= \frac{xb + xc - xa - x^2 - ab - ac + a^2 + ax + x^2 - xb - xc + bc}{(c-a)(b-a)} =$$

$$= \frac{a^2 + bc - ab - ac}{(c-a)(b-a)} = \frac{a(a-b) - c(a-b)}{(c-a)(b-a)} = \frac{(a-c)(a-b)}{(c-a)(b-a)} = 1.$$

Итак, мы доказали тождество

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

З а д а ч а 131. Проверить это тождество для частных случаев $x = a$, $x = b$ и $x = c$.

Мы увидим впоследствии, что этой проверки на самом деле достаточно, чтобы убедиться в истинности тождества. Так что можно было бы избежать утомительных вычислений, которые мы провели.

В заключение — несколько задач, в которых встречаются рациональные выражения.

Выражение

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Big/2}$$

(обратное к среднему арифметическому чисел, обратных к числам a и b) называется *средним гармоническим* чисел a и b. Оно часто встречается в различных задачах.

Задача 132. Бассейн разделен на две равные части, каждая из которых наполняется своей трубой — одна за a часов, другая за b часов. За сколько часов наполнится бассейн, если включить обе трубы, убрав перегородку?

Задача 133. Двигаясь по течению реки, катер проходит путь из А в Б за a часов, против течения (из Б в А) — за b часов. За сколько времени он прошел бы путь из А в Б, если бы течения не было? (Скорость катера и течения считать постоянными).

Задача 134. Первую половину пути машина ехала со скоростью v_1, вторую — со скоростью v_2. Какова ее средняя скорость?

Задача 135. Известно, что $x+\dfrac{1}{x}=7$. Вычислить (а) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; (б) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

Задача 136. Число $x+\dfrac{1}{x}$ — целое. Доказать, что число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ для любого $n=1,2,3,\ldots$ также является целым.

Задача 137. Преобразовывая выражение (г) на странице 77, мы обнаружили, что

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\frac{x+1}{2x+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}=\frac{2x+1}{3x+2}.$$

Записав в виде отношения многочленов рациональные выражения

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}}},\ldots$$

попытайтесь обнаружить закономерность, которой подчиняются коэффициенты этих многочленов. (Такого рода выражения называются *непрерывными дробями*; коэффициенты многочленов в нашей задаче оказываются так называемыми числами Фибоначчи, см. стр. 112.)

34. Многочлены и рациональные дроби с одной переменной

Если многочлен содержит только одну переменную, то при записи его в стандартном виде одночлены обычно располагают в порядке убывания показателей степени. Одночлен максимальной степени называют *старшим членом*, а его степень — *степенью* многочлена. (Члены с нулевыми коэффициентами не учитываются. Для многочлена, равного нулю, степень не определена.) Например, многочлен $7x^2 + 3x + 1$

имеет старший член $7x^2$, а степень его равна 2. Многочленами степени 0 считают числа, не равные 0.

Задача 138. Каков старший член у многочлена $(2x + 1)^5$?

Задача 139. Один многочлен имеет степень m, а другой n. Какова степень их произведения?

Решение. При перемножении старших членов получится одночлен степени $m + n$ (так как $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$), коэффициент при котором будет равен произведению коэффициентов при x^m и x^n. Этот одночлен ни с чем сократиться не может, так как все другие попарные произведения имеют меньшую степень.

Задача 140. Какую степень может иметь (а) сумма многочлена степени 7 и многочлена степени 9? (б) сумма двух многочленов степени 7?

Ответ. (а) 9; (б) любую, не превосходящую 7.

Задача 141. В многочлен степени 10 с одной переменной x подставили вместо x выражение $y^7 + 5y^2 - y - 4$. Многочлен какой степени получится?

35. Деление многочленов с остатком

Обыкновенные дроби, числитель и знаменатель которых — целые положительные числа, бывают правильные и неправильные. Правильные — это те, у которых числитель меньше знаменателя. Например, $\frac{3}{7}$ и $\frac{1}{15}$ — правильные дроби, а $\frac{7}{5}$, $\frac{11}{11}$ или $\frac{37}{7}$ — неправильные.

Из неправильной дроби можно выделить целую часть, разделив с остатком числитель на знаменатель; останется правильная дробь:

$7 = 1 \cdot 5 + 2$
(частное 1, остаток 2) $\qquad \dfrac{7}{5} = 1 + \dfrac{2}{5} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & \underline{5} \\ \underline{5} & 1 \\ 2 & \end{array}$

$37 = 5 \cdot 7 + 2$
(частное 5, остаток 2) $\qquad \dfrac{37}{7} = 5 + \dfrac{2}{7} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{7} \\ \underline{35} & 5 \\ 2 & \end{array}$

$11 = 1 \cdot 11 + 0$
(частное 1, остаток 0) $\qquad \dfrac{11}{11} = 1 \qquad \begin{array}{r|l} 11 & \underline{1} \\ \underline{11} & 1 \\ 0 & \end{array}$

Сейчас мы научимся выполнять аналогичные преобразования для дробей, числитель и знаменатель которых — многочлены с одной переменной. Такая дробь считается правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя. Например, $\dfrac{10x}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^3-1}$ — правильные дроби, $\dfrac{x^4}{x-2}$, $\dfrac{x+1}{x+2}$, $\dfrac{x^3}{5x}$, $\dfrac{x^3+1}{x+1}$ — неправильные.

Всякая неправильная дробь может быть преобразована к виду (многочлен) + (правильная дробь).

Приведем несколько примеров преобразования неправильной дроби к такому виду.

(а) $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{(x+1)+2}{x+1} = 1 + \dfrac{2}{x+1}$.

(б) $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{(x+2)-2}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2}$.

(в) $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{x+(1/2)}{2x+1} - \dfrac{1/2}{2x+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1/2}{2x+1}$.

(Когда мы говорили, что в многочленах не может быть деления, это не значило, что коэффициенты обязательно целые — они могут быть любыми, в том числе и дробными. Так, например, число $1/2$ — вполне законный многочлен степени 0.)

(г) $\dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{(x^2-4)+4}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)+4}{x-2} = (x+2) + \dfrac{4}{x-2}$.

(д) $\dfrac{x^4}{x-2} = \dfrac{(x^4-16)+16}{x-2} = \dfrac{(x^2+4)(x+2)(x-2)+16}{x-2} =$

$$= (x^2+4)(x+2) + \frac{16}{x-2}.$$

Существует стандартный способ выделения многочлена из неправильной рациональной дроби, аналогичный обычному делению чисел «уголком». Покажем его на примерах:

Пример. Преобразуем неправильную дробь $\dfrac{x^4}{x-2}$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-2x^3} & x^3+2x^2+4x+8 \leftarrow \text{частное} \\
\quad 2x^3 & \\
\quad \underline{2x^3-4x^2} & \\
\qquad\quad 4x^2 & \\
\qquad\quad \underline{4x^2-8x} & \\
\qquad\qquad\quad 8x & \\
\qquad\qquad\quad \underline{8x-16} & \\
\qquad\qquad\qquad 16 \leftarrow \text{остаток} &
\end{array}
$$

Та же процедура может быть записана иначе:

$$\frac{x^4}{x-2} = \frac{x^4-2x^3}{x-2} + \frac{2x^3}{x-2} = x^3 + \frac{2x^3}{x-2} =$$

$$= x^3 + \frac{2x^3-4x^2}{x-2} + \frac{4x^2}{x-2} = x^3 + 2x^2 + \frac{4x^2}{x-2} =$$

$$= x^3 + 2x^2 + \frac{4x^2-8x}{x-2} + \frac{8x}{x-2} =$$

$$= x^3+2x^2+4x+\frac{8x-16}{x-2} + \frac{16}{x-2} = x^3+2x^2+4x+8+\frac{16}{x-2}.$$

Итак, мы получаем:

$$x^4 = (x^3 + 2x^2 + 4x + 8)(x - 2) + 16.$$

Пример. Теперь преобразуем дробь $\dfrac{x^3+2x}{x^2-x+1}$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2 + x} & x + 1 \\
\quad x^2 + x & \\
\quad \underline{x^2 - x + 1} & \\
\qquad 2x - 1 &
\end{array}$$

Другая запись тех же преобразований:

$$\frac{x^3+2x}{x^2-x+1} = \frac{x^3-x^2+x}{x^2-x+1} + \frac{x^2+x}{x^2-x+1} = x + \frac{x^2+x}{x^2-x+1} =$$
$$= x + \frac{x^2-x+1}{x^2-x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1} = (x+1) + \frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Итак,

$$x^3 + 2x = (x+1)(x^2 - x + 1) + (2x - 1).$$

Пример (последний). Преобразуем дробь $\dfrac{x^3}{2x-3}$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & 2x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - (3/2)x^2} & (1/2)x^2 + (3/4)x + (9/8) \\
\quad (3/2)x^2 & \\
\quad \underline{(3/2)x^2 - (9/4)x} & \\
\qquad (9/4)x & \\
\qquad \underline{(9/4)x - 27/8} & \\
\qquad\qquad 27/8 &
\end{array}$$

Те же преобразования:

$$\frac{x^3}{2x-3} = \frac{x^3-(3/2)x^2}{2x-3} + \frac{(3/2)x^2}{2x-3} =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{(3/2)x^2-(9/4)x}{2x-3} + \frac{(9/4)x}{2x-3} =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{(9/4)x-(27/8)}{2x-3} + \frac{27/8}{2x-3} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}\right) + \frac{27/8}{2x-3}.$$

Итак,

$$x^3 = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}\right)(2x-3) + \frac{27}{8}.$$

Деление многочленов с остатком:
(делимое) = (неполное частное) · (делитель) + (остаток)
Степень остатка меньше степени делителя (или остаток равен 0).

Задача 142. Каковы могут быть степени остатка и неполного частного при делении многочлена степени 7 на многочлен степени 3?

Ответ. Степень неполного частного равна 4, степень остатка может быть 0,1,2 или 3; кроме того, остатка может не быть вовсе (т. е. он может быть равен 0).

Задача 143. Доказать, что неполное частное и остаток (обладающие указанными в рамке свойствами) всегда существуют и единственны.

Решение. Метод нахождения неполного частного и остатка был продемонстрирован выше на примерах. Для доказательства единственности предположим, что при делении P на S могут получиться два неполных частных Q_1 и Q_2 и два соответствующих остатка R_1 и R_2. Тогда мы имеем

$$P = Q_1S + R_1,$$
$$P = Q_2S + R_2,$$

причем у обоих многочленов R_1 и R_2 степени меньше, чем у S. Тогда

$$Q_1S + R_1 = Q_2S + R_2$$

и, следовательно,

$$R_1 - R_2 = Q_2S - Q_1S = (Q_1 - Q_2)S.$$

Если получившийся многочлен $R_1 - R_2$ не равен нулю, то его степень *меньше*, чем у S (так как степени обоих многочленов R_1 и R_2 меньше, чем у S). Поэтому равенство $R_1 - R_2 = (Q_1 - Q_2)S$ возможно в одном-единственном случае: если $Q_1 - Q_2 = 0$, $R_1 - R_2 = 0$, т. е. $Q_1 = Q_2$, $R_1 = R_2$.

Что считать остатком и частным, если степень делимого с самого начала меньше степени делителя? В этом случае полагают, что частное равно 0, а остаток равен делимому.

Деление многочленов похоже на обычное деление:

$$
\begin{array}{r|l}
1234 & 11 \\ \cline{2-2}
\underline{11} & 112 \\
13 & \\
\underline{11} & \\
24 & \\
\underline{22} & \\
2 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + x^2}\phantom{{}+3x+4} & x^2 + x + 2 \\
x^2 + 3x\phantom{{}+4} & \\
\underline{x^2 + x}\phantom{{}+4} & \\
2x + 4 & \\
\underline{2x + 2} & \\
2 &
\end{array}
$$

$$1234 = 112 \cdot 11 + 2, \qquad x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x^2 + x + 2)(x + 1) + 2.$$

В этом примере аналогия полная; чтобы убедиться в этом, достаточно подставить 10 вместо x. В других случаях, например,

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2} & x^2 + 3x + 6 \\
\qquad 3x^2 + 3x & \\
\qquad \underline{3x^2 - 3x} & \\
\qquad\qquad 6x + 4 & \\
\qquad\qquad \underline{6x - 6} & \\
\qquad\qquad\qquad 10 &
\end{array}
$$

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x^2 + 3x + 6)(x - 1) + 10$$

аналогия неполная: подставив в последнее равенство $x = 10$, получим равенство $1234 = 136 \cdot 9 + 10$, которое, хотя и верно, но не означает, что при делении 1234 на 9 частное равно 136, а остаток равен 10 (на самом деле частное равно 137, а остаток равен 1).

Задача 144.

1. Разделить $x^3 - 1$ на $x - 1$.
2. Разделить $x^4 - 1$ на $x - 1$.
3. Разделить $x^{10} - 1$ на $x - 1$.
4. Разделить $x^3 + 1$ на $x + 1$.
5. Разделить $x^4 + 1$ на $x + 1$.

Пункты 1–3 являются частным случаем общей формулы

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n+2} + \ldots + x^2 + x + 1,$$

которую легко проверить делением уголком или просто перемножив $x - 1$ и $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1$. На эту формулу можно смотреть как на способ суммирования ряда последовательных степеней некоторого числа x:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

(она годится для всех x, кроме 1). См. ниже о сумме геометрической прогрессии.

Задача 145. Степени двойки

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

обладают таким свойством: сумма нескольких первых чисел этой последовательности на единицу меньше следующего числа:

$$\begin{aligned} 1+2 &= 3 &= 4-1, \\ 1+2+4 &= 7 &= 8-1, \\ 1+2+4+8 &= 15 &= 16-1 \end{aligned}$$

и т. д. Объяснить наблюдаемую закономерность.

Решение. Подставим в равенство

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

значение $x = 2$. Получим

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Возможно другое решение. Чтобы вычислить сумму $1 + 2 + 4 + 8 + 16$, прибавим и вычтем 1:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 4 + 8 + 16 = \\ &\quad = (1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16) - 1 = \\ &\quad = (2 + 2 + 4 + 8 + 16) - 1 = \\ &\quad = (4 + 4 + 8 + 16) - 1 = \\ &\quad = (8 + 8 + 16) - 1 = \\ &\quad = (16 + 16) - 1 = \\ &\quad = 32 - 1. \end{aligned}$$

Аналогично для других степеней.

36. Остаток при делении на $x - a$

Существует способ найти остаток от деления произвольного многочлена на двучлен $x - a$ (где a — любое число), не производя деления.

Пусть, например, нужно найти остаток от деления x^4 на двучлен $x - 2$. Прежде всего заметим, что остаток — это число (его степень должна быть меньше степени $x - 2$). Чтобы найти это число, в равенство

$$x^4 = (\text{неполное частное})(x - 2) + (\text{остаток})$$

подставим $x = 2$. Получим

$$2^4 = (\dots) \cdot 0 + (\text{остаток}),$$

т. е. остаток равен $2^4 = 16$.

Вообще, пусть P — любой многочлен, который мы хотим разделить на $x - a$ (где a — некоторое число). Запишем

$$P = (\text{неполное частное})(x - a) + (\text{остаток})$$

и подставим $x = a$. Получаем такое правило:

> Чтобы найти остаток от деления многочлена на двучлен $x - a$, надо подставить в этот многочлен число a вместо x.

Это правило называют «теоремой Безу». Она позволяет находить остаток (но не частное), не производя деления.

Вот важное следствие теоремы Безу:

> Чтобы узнать, делится ли данный многочлен на двучлен $x - a$ без остатка, достаточно посмотреть, обращается ли он в нуль при подстановке a вместо x.

Число, при подстановке которого многочлен обращается в нуль, называют *корнем многочлена*. Таким образом, многочлен P делится нацело на $x-a$ в том и только в том случае, когда a — корень многочлена P.

Задача 146. 1. При каких n многочлен $x^n - 1$ делится на $x-1$ без остатка? 2. При каких n многочлен x^n+1 делится на $x + 1$ без остатка?

Найдя корень многочлена, мы получаем возможность разложить его на множители, выделив множитель $x - a$ (a — найденный корень). После этого можно пытаться разлагать этот многочлен дальше, применяя этот же прием к частному.

Задача 147. Разложить на множители многочлены
(а) $x^4 + 5x - 6$;
(б) $x^4 + 3x^2 + 5x + 1$;
(в) $x^3 - 3x - 2$.

Задача 148. Известно, что 1 и 2 — корни многочлена P. Доказать, что P делится без остатка на $(x - 1)(x - 2)$.

Решение. Поскольку 1 является корнем P, то P делится нацело на $(x - 1)$, то есть $P = (x - 1) \cdot Q$. Подставив в это равенство $x = 2$, видим, что 2 является корнем Q, то есть Q делится на $x - 2$, $Q = (x - 2) \cdot R$. Тогда $P = (x - 1)(x - 2)R$.

Замечание. Типичное неверное решение таково: P делится на $x-1$ (так как 1 — корень) и на $x-2$ (так как 2 — корень), следовательно, P делится на $(x-1)(x-2)$. Ошибка: «следовательно» здесь не обосновано. Например, 12 делится на 6 и на 4, но мы не можем сказать: «следовательно, 12 делится на $6 \cdot 4 = 24$».

Аналогичным образом можно доказать, что

если различные числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ являются корнями многочлена P, то P делится на $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$.

Задача 149. Какое наибольшее число корней может иметь многочлен степени 5?

Решение. 5 корней. Например, многочлен

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

имеет корни $1, 2, 3, 4, 5$. Больше 5 корней быть не может. В самом деле, если бы многочлен P степени 5 имел 6 корней $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, то он должен был бы делиться на

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6),$$

т. е.

$$P = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6)Q,$$

что невозможно, так как степень правой части не меньше 6.

Вообще многочлен степени n не может иметь больше n различных корней.

Замечание. Мы использовали здесь выражение «различные корни», так как слова «число корней» могут пониматься по-разному. Например, сколько корней у многочлена $x^2 - 2x + 1$? Он тождественно равен многочлену $(x-1)^2$, так что $x = 1$ является его корнем, а любое число, не равное 1 — не является. Таким образом, мы можем сказать, что этот многочлен имеет в точности один корень. С другой стороны, общая формула для многочлена с двумя корнями a и b есть

$$c(x-a)(x-b)$$

и наш многочлен

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$$

является специальным случаем этой формулы для $a = b = 1$ (и $c = 1$), так что математики часто говорят, что этот многочлен имеет «два равных корня». Мы не будем пользоваться этой терминологией, но Вы можете встретить ее, например, в формулировке так называемой «основной теоремы алгебры», гласящей, что «любой многочлен степени n имеет в точности n комплексных корней».

Задача 150. Как проверить, делится ли данный многочлен P на $x^2 - 1$?

Ответ. Надо выяснить, являются ли числа 1 и -1 корнями многочлена P.

Задача 151. При каких n многочлен $x^n - 1$ делится на $x^2 - 1$?

В заключение этого раздела вернемся к тождеству

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} - 1 = 0,$$

которое мы обсуждали на стр. 79 (мы перенесли 1 в левую часть). Пусть a, b, c — различные числа. Рассмотрим левую часть тождества как многочлен от x. Степень этого многочлена не выше 2. Поэтому он может иметь не более двух корней (если только не равен 0 тождественно). Но числа a, b и c являются его корнями. Значит, он тождественно равен нулю!

Дотошный читатель в этом месте укажет, что мы смешиваем равенство рациональных выражений при всех числовых значениях букв (даже не при всех, строго говоря: если $a = b$, то левая часть не имеет смысла) и возможность преобразовать одно выражение в другое по правилам алгебры. Критика справедливая, и ответить на неё не так просто — мы этого делать не будем.

Задача 152. Остаток от деления многочлена P (от одной переменной x) на многочлен $x^2 - 1$ является многочленом степени не выше 1, т. е. имеет вид $ax + b$. Как найти a и b, зная значения P в точках $x = -1$ и $x = 1$?

Указание. Подставить в равенство

$$P = (x^2 - 1)(\text{неполное частное}) + (ax + b)$$

числа $x = 1$ и $x = -1$.

Задача 153. При делении на $x^2 - 1$ многочлен P дает остаток $5x - 7$. Каков будет остаток при делении P на $x - 1$?

Задача 154. Многочлен $P = x^3 + x^2 - 10x + 1$ имеет три корня x_1, x_2, x_3 (авторы за это ручаются). Напишите многочлен с целыми коэффициентами, который бы имел три корня:

(а) $x_1 + 1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 1$; (б) $2x_1,\ 2x_2,\ 2x_3$; (в) $\dfrac{1}{x_1},\ \dfrac{1}{x_2},\ \dfrac{1}{x_3}$.

Задача 155. Найти числа a и b, если известно, что многочлен $x^3 + ax^2 + x + b$ делится без остатка на $x^2 - 3x + 2$.

37. Многочлены, значения, интерполяция

Пусть P — многочлен, содержащий только одну переменную (букву) x. Чтобы подчеркнуть это, будем обозначать его $P(x)$ (читается «P от x»). Подставим вместо x какое-либо число, например, 6, и выполним все вычисления. Полученное число называют значением многочлена $P(x)$ для $x = 6$ и обозначают $P(6)$ (читается «P от 6»).

Например, если $P(x) = x^2 - x - 4$, то $P(0) = 0^2 - 0 - 4 = -4$. Другие значения: $P(1) = -4$, $P(2) = -2$, $P(3) = 2$, $P(4) = 8$, $P(5) = 16$, $P(6) = 26$ и т. д.

Задача 156. Составить таблицу значений $P(0), \ldots, P(6)$ многочлена $P(x) = x^3 - 2$.

Задача 157. Выпишем значения $P(0)$, $P(1)$, $P(2)\ldots$ многочлена $P(x) = x^2 - x - 4$:

$$-4, \quad -4, \quad -2, \quad 2, \quad 8, \quad 16, \quad 26, \quad \ldots$$

Под каждыми двумя соседними числами напишем их разность:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} -4 & & -4 & & -2 & & 2 & & 8 & & 16 & & 26 & & \ldots \\ & 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & \ldots & \end{array}$$

и с полученной последовательностью «первых разностей» сделаем то же самое:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} -4 & & -4 & & -2 & & 2 & & 8 & & 16 & & 26 & & \ldots \\ & 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & \ldots & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \ldots & & \end{array}$$

Получаются двойки. Докажите, что это не случайно, и что все следующие члены в третьей строке — тоже двойки.

Задача 158. Докажите, что для любого многочлена степени 2 все «вторые разности» одинаковы.

Задача 159. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для многочленов третьей степени?

Задача 160. Найдите значения многочлена $P(x) = x^2 + x + 41$ (этот многочлен рассматривал Л. Эйлер) при $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Убедитесь, что все они — простые числа (не делятся нацело ни на что, кроме единицы и самого себя). Может быть, все числа $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ... простые?

Посмотрим теперь, что можно сказать о многочлене, если у нас есть какая-то информация о его значениях.

Многочленом *степени не выше* n (с одной переменной) будем называть многочлен равный нулю, а также любые многочлены степени $0, 1, 2, \ldots n$.

Например, многочлен степени не выше 1 имеет вид $ax+b$. При $a \neq 0$ он имеет степень 1. При $a = 0$, $b \neq 0$ он имеет степень 0. При $a = b = 0$ получается нулевой многочлен (степени не имеющий).

Аналогично многочлен степени не выше 2 имеет вид $ax^2 + bx + c$ и т. д.

Задача 161. Известно, что $P(x)$ — многочлен степени не выше 1, $P(1) = 7$, $P(2) = 5$. Найти $P(x)$.

Решение. По условию $P(x) = ax + b$, где a и b — некоторые числа. Подставим $x = 1$ и $x = 2$.

$$P(1) = a + b = 7,$$
$$P(2) = 2a + b = 5.$$

Сравнивая эти равенства, видим, что от добавления лишнего a число 7 превратилось в 5, поэтому $a = -2$, $b = 9$. Ответ: $P(x) = -2x + 9$.

Тем же способом можно найти любой многочлен степени не выше 1, если заданы его значения для двух различных значений x.

Те из вас, кто знает, что график $y = ax+b$ — прямая, легко объяснят это геометрически: через две различные точки проходит прямая, причем только одна.

Задача 162. Многочлен $P(x)$ степени не выше 1 удовлетворяет условию: $P(1) = 0$, $P(2) = 0$. Докажите, что $P(x) = 0$ при всех x.

Перейдем теперь к многочленам степени не выше 2. Сколько значений нужно знать, чтобы восстановить многочлен? Убедимся, что двух недостаточно.

Задача 163. Многочлен $P(x)$ степени не выше 2 таков, что $P(1) = 0$, $P(2) = 0$. Можно ли утверждать, что $P(x) = 0$?

Решение. Нет: рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2.$$

Мы уже знаем, что многочлен $P(x)$, для которого $P(1) = P(2) = 0$, имеет вид $P(x) = (x-1)(x-2)Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Если к тому же степень $P(x)$ не выше 2, то $Q(x)$ может быть только числом.

Задача 164. Многочлен $P(x)$ степени не выше 2 таков, что $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 4$. Найти $P(x)$.

Первое решение. Как мы только что видели, $P(x) = a(x-1)(x-2)$, где a — некоторое число. Чтобы его найти, подставим $x = 3$:

$$P(3) = a(3-1)(3-2) = 2a = 4,$$

откуда $a = 2$. Ответ: $P(x) = 2(x-1)(x-2) = 2x^2 - 6x + 4$.

Второе решение. Многочлен степени не выше 2 имеет вид $ax^2 + bx + c$. Подставив $x = 1, 2, 3$, получаем:

$$\begin{array}{rcccl} P(1) & = & a+b+c & = & 0 \\ P(2) & = & 4a+2b+c & = & 0 \\ P(3) & = & 9a+3b+c & = & 4 \end{array}$$

Отсюда

$$\begin{array}{rcccl} P(2)-P(1) & = & 3a+b & = & 0 \\ P(3)-P(2) & = & 5a+b & = & 4 \end{array}$$

Добавление $2a$ превращает 0 в 4, поэтому $a = 2$. Отсюда $b = -6$, $c = 4$. Ответ: $2x^2 - 6x + 4$.

Задача 165. Доказать, что многочлен степени не выше 2 однозначно определяется тремя своими значениями.

Это значит, что если $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени не выше 2 и $P(x_1) = Q(x_1)$, $P(x_2) = Q(x_2)$, $P(x_3) = Q(x_3)$

для трех различных чисел x_1, x_2, x_3, то многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

Решение. Рассмотрим многочлен $R(x) = P(x) - Q(x)$. По условию $R(x_1) = R(x_2) = R(x_3) = 0$.

Другими словами, числа x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $R(x)$. Но многочлен степени не выше 2, как мы видели, не может иметь трех корней (если только он не равен нулю).

Задача 166. Известно, что

$$\begin{aligned} 16a + 4b + c &= 0 \\ 49a + 7b + c &= 0 \\ 100a + 10b + c &= 0 \end{aligned}$$

Доказать, что $a = b = c = 0$.

Задача 167. Доказать, что многочлен степени не выше n однозначно задается $n+1$ значением. (Для $n = 2$ эта задача уже была.)

Задача 168. Найти многочлен $P(x)$ степени не выше 2, для которого:

$$\begin{array}{llll} \text{(а)} & P(1) = 0, & P(2) = 0, & P(3) = 4; \\ \text{(б)} & P(1) = 0, & P(2) = 2, & P(3) = 0; \\ \text{(в)} & P(1) = 6, & P(2) = 0, & P(3) = 0; \\ \text{(г)} & P(1) = 6, & P(2) = 2, & P(3) = 4. \end{array}$$

Первое решение. Задача (а) уже была: ответ — $2(x-1)(x-2)$. Аналогично решаются (б) и (в). (Ответы: (б) $-2(x-1)(x-3)$, (в) $3(x-2)(x-3)$). Теперь можно решить (г), сложив три полученных многочлена. Ответ:

$$\begin{gathered} 2(x-1)(x-2) - 2(x-1)(x-3) + 3(x-2)(x-3) = \\ = 2x^2 - 6x + 4 - 2x^2 + 8x - 6 + 3x^2 - 15x + 18 = \\ = 3x^2 - 13x + 16. \end{gathered}$$

Второе решение. (для пункта (г)). Найдем сначала какой-нибудь многочлен Q степени не выше 2, для которого $Q(1)=6$, $Q(2) = 2$. Например, годится многочлен $Q(x) = 10-4x$ (степени 1). У многочлена Q два значения $Q(1)$ и $Q(2)$ какие нужно, а третье $Q(3) = -2$ — не такое. Это можно исправить, рассмотрев многочлен

$$P(x) = Q(x) + a(x-1)(x-2).$$

Каково бы ни было число a, значения $P(1)$ и $P(2)$ не изменятся. А подбором a можно сделать значение $P(3)$ равным требуемому:

$$P(3) = Q(3) + 2a = -2 + 2a.$$

Чтобы $P(3)$ было равно 4, положим $a = 3$. Ответ:

$$\begin{aligned} P(x) &= 10 - 4x + 3(x-1)(x-2) = \\ &= 10 - 4x + 3x^2 - 9x + 6 = 3x^2 - 13x + 16. \end{aligned}$$

Задача 169. Найти многочлен $P(x)$ степени не выше 3, для которого $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 7$.

Задача 170. Пусть $x_1, \ldots, x_{10}$ — попарно различные числа, $y_1, \ldots, y_{10}$ — любые числа. Доказать, что существует ровно один многочлен степени не выше 9, для которого $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2, \ldots,$ $P(x_{10}) = y_{10}$.

Задача 171. Не производя вычислений, убедиться, что существуют такие числа a, b и c, что

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 18{,}37, \\ 36a + 6b + c &= 0{,}05, \\ 4a + 2b + c &= -3. \end{aligned}$$

(Искать a, b и c не нужно, достаточно убедиться в их существовании.)

Задача 172. Старший коэффициент многочлена P равен 1, $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 0, \ldots$, $P(9) = 0$, $P(10) = 0$. Какова наименьшая возможная степень многочлена P? Чему равно в этом случае $P(11)$?

Ответ. Степень равна 10; $P(11) = 3628800$.

38. Арифметические прогрессии

В последовательности чисел

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

каждый член на 2 больше предыдущего; в последовательности

$$10, 9, 8, 7, 6, \ldots$$

каждый член на 1 меньше предыдущего. Такие последовательности называют арифметическими прогрессиями.

Определение. Последовательность, в которой каждый член получается из предыдущего добавлением одного и того же числа, называется *арифметической прогрессией*, а упомянутое число называется ее *разностью*.

Задача 173. Каковы разности прогрессий в приведенных выше примерах?

Ответ. 2 и -1.

Задача 174. Найти третий член арифметической прогрессии

$$5, -2, \ldots$$

Ответ. -9.

Задача 175. Найти 1000-й член прогрессии

$$2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Решение. В прогрессии

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

первый член равен 1, второй член равен 2, ..., 1 000-й член равен 1 000. В нашей прогрессии члены на единицу больше.

Ответ. 1001.

Задача 176. Найти 1 000-й член прогрессии

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

Задача 177. Найти 1 000-й член прогрессии

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

Задача 178. Первый член прогрессии равен a, разность равна d. Чему равен 1000-й член? Чему равен n-й член?

Решение.

1-й член	a
2-й член	$a + d$
3-й член	$a + 2d$
4-й член	$a + 3d$
5-й член	$a + 4d$
...	...
1000-й член	$a + 999d$
...	...
n-й член	$a + (n - 1)d$

Задача 179. Члены арифметической прогрессии с разностью d переписали в обратном порядке. Получится ли арифметическая прогрессия? Если да, какова будет ее разность?

Задача 180. Из арифметической прогрессии с разностью d вычеркнули каждый второй член. Получится ли арифметическая прогрессия? Какова будет ее разность?

Задача 181. Тот же вопрос, если вычеркнули каждый третий член.

Задача 182. Первый член арифметической прогрессии равен 5, а 3-й член равен 8. Чему равен 2-й член?

Ответ. 6,5.

Задача 183. Первый член прогрессии равен a, а 3-й член равен b. Чему равен 2-й?

Ответ. $(a+b)/2$.

Задача 184. Первый член прогрессии равен a, а 4-й член равен b. Чему равны ее 2-й и 3-й члены?

Задача 185. Найти число членов в прогрессии

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 993,\ 995,\ 997,\ 999.$$

Указание. В этой прогрессии n-й член равен $2n-1$. (Другой способ — сравнить ее с прогрессией $2, 4, 6, \ldots, 1\,000$.)

39. Сумма арифметической прогрессии

Задача 186. Найти сумму

$$1+3+5+7+\ldots+999.$$

Решение. Прежде всего найдем число членов (см. выше). Член с номером n равен $1+(n-1)\cdot 2 = 2n-2+1 = 2n-1$. Он равен 999 при $n = 500$. Поэтому в прогрессии 500 членов. Сгруппируем их в 250 пар

$$(1+999)+(3+997)+\ldots+(499+501).$$

Каждая пара в сумме дает $1\,000$.

Ответ. $250\,000$.

Задача 187. Первый член прогрессии из n членов равен a, последний (n-й) равен b. Найти сумму ее членов.

Решение. Соединив члены в пары, как в предыдущей задаче, получим $n/2$ пар, сумма каждой равна $a+b$.

Ответ. $\dfrac{n(a+b)}{2}$.

Задача 188. Решение предыдущей задачи содержит пробел. Найти и исправить его.

Решение. Все сказанное в нем относится к случаю четного n. Если n нечетно, то остается непарный (средний) член в прогрессии. Чтобы не рассматривать случаи четного и нечетного n отдельно, можно применить трюк, который мы покажем на примере суммы

$$S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$$

Напишем ее в обратном порядке:

$$S = 11 + 9 + 7 + 5 + 3$$

и сложим эти равенства

$$\begin{aligned} S = \quad & 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \\ & + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 \quad . \end{aligned}$$

В каждом столбце стоят 2 числа, в сумме дающие 14:

$$3 + 11 = 5 + 9 = 7 + 7 = 9 + 5 = 11 + 3 = 14.$$

Поэтому $2S = 5 \cdot 14 = 70$, $S = \dfrac{5 \cdot 14}{2} = 35$.

В общем случае будет n столбцов с одинаковой суммой, равной сумме первого и последнего членов, т.е. $a + b$. Поэтому

$$S = \frac{n(a+b)}{2}.$$

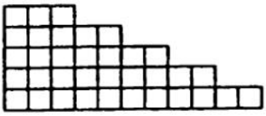


Рис. 9

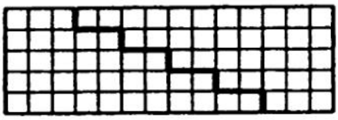


Рис. 10

Это рассуждение можно пояснить картинкой. Сумму $3 + 5 + 7 + 9 + 11$ можно изобразить так, как это показано на рис. 9. и из двух таких фигурок составить прямоугольник 5×14 (см. рис. 10).

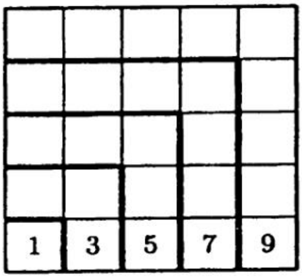


Рис. 11

Задача 189. Докажите, что сумма первых n нечетных чисел есть полный квадрат:

$$1 = 1^2,$$
$$1 + 3 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2 \text{ и т. д.}$$

Указание. Можно использовать предыдущую задачу или рис. 11.

40. Геометрические прогрессии

В последовательности

$$3,\ 6,\ 12,\ 24, \ldots$$

каждый член больше предыдущего в 2 раза. В последовательности

$$6,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27}, \ldots$$

каждый член меньше предыдущего в 3 раза. Такие последовательности называют геометрическими прогрессиями.

Определение. Последовательность, в которой каждый член получается умножением предыдущего на одно и то же число, называется *геометрической прогрессией*, а это число — *знаменателем* прогрессии.

Задача 190. Каковы знаменатели прогрессий в приведенных выше примерах?

Ответ. 2 и 1/3.

Задача 191. Найти третий член геометрической прогрессии

$$2, 3, \ldots$$

Ответ. 9/2.

Задача 192. Найти 1000-й член прогрессии $3, 6, 12, \ldots$

Решение.

1-й член	$3 = 3 \cdot 2^0$
2-й член	$6 = 3 \cdot 2^1$
3-й член	$12 = 3 \cdot 2^2$
...	...
1000-й член	$= 3 \cdot 2^{999}$

Задача 193. Чему равен n-й член прогрессии, первый член которой равен a, а знаменатель равен q?

Решение.

1-й член	$a = a \cdot q^0$
2-й член	$a \cdot q = a \cdot q^1$
3-й член	$a \cdot q^2$
4-й член	$a \cdot q^3$
...	...
n-й член	$a \cdot q^{n-1}$

Задача 194. Первый член геометрической прогрессии равен 1, а третий член равен 4. Чему равен второй член? (Указать все варианты.)

Ответ. Второй член может быть равен не только 2, но и -2.

Задача 195. За 30 минут бактерия заполняет банку, делясь на две каждую минуту. За сколько минут заполнят банку 2 бактерии?

Будет ли последовательность

$$1, 0, 0, 0, \ldots$$

геометрической прогрессией согласно нашему определению? Формально говоря, да: каждый следующий член получается из предыдущего умножением на нуль, а мы не запретили знаменателю быть равным нулю. Хотя такая прогрессия и может показаться странной, мы не будем ее запрещать (зато иногда придется оговаривать, что знаменатель не равен 0).

Задача 196. Геометрическую прогрессию со знаменателем $q \neq 0$ написали задом наперед. Каков знаменатель у получившейся прогрессии?

Ответ. $1/q$.

Задача 197. Из геометрической прогрессии со знаменателем q вычеркнули каждый второй член. Получится ли геометрическая прогрессия? Каков будет ее знаменатель?

Задача 198. Тот же вопрос, если вычеркнули каждый третий член.

Задача 199. Первый член геометрической прогрессии равен a, а третий член равен b. Чему равен второй член?

Решение. Если он равен x, то знаменатель равен x/a и одновременно b/x. Отсюда $x/a = b/x$, умножая на ax, имеем

$x^2 = ab$. Поэтому если $ab < 0$, задача не имеет решения (такой прогрессии не бывает); если $ab = 0$, то $x = 0$; если $ab > 0$, то $x = \pm\sqrt{ab}$ (см. ниже раздел о квадратных уравнениях).

Замечание. Наше решение неприменимо, если $x = 0$ или $a = 0$. Но наша формула оказывается более удачной, чем можно было бы ожидать — она верна всегда. Если, например, $a = 1$ и $b = 0$, наша формула дает правильный ответ: $x = \sqrt{1 \cdot 0} = 0$.

Задача 200. Первый член геометрической прогрессии равен 1, а 4-й равен $a > 0$. Чему равны ее 2-й и 3-й члены?

Указание. См. ниже раздел о корнях n-й степени.

Ответ. $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[3]{a^2}$.

41. Сумма геометрической прогрессии

Задача 201. Вычислить сумму $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 512 + 1024$ (каждый член вдвое больше предыдущего).

Первое решение. Добавим 1:

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 1024 &= \\ = 2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 1024 &= \\ = 4 + 4 + 8 + \ldots + 1024 &= \\ = 8 + 8 + \ldots + 1024 &= \\ = 16 + \ldots + 1024 &= \\ \ldots \\ = 256 + 256 + 512 + 1024 &= \\ = 512 + 512 + 1024 &= \\ = 1024 + 1024 &= \\ = 2048 \end{aligned}$$

Ответ. $2048 - 1 = 2047$.

Второе решение. Обозначим сумму через S:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 512 + 1024.$$

Тогда

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 1024 + 2048.$$

В последней сумме (по сравнению с предыдущей) есть лишний член 2048 и недостает 1. Отсюда имеем:

$$2S - S = 2048 - 1,$$

$$S = 2048 - 1 = 2047.$$

Задача 202. Вычислить суммы $1 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, $\ldots$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1024}$.

Задача 203. Первый член геометрической прогрессии равен a, а знаменатель равен q. Найти сумму ее первых n членов.

Первое решение. Искомая сумма равна

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Вспомнив разложение на множители

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1),$$

находим, что

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Отсюда получаем, что искомая сумма равна

$$a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Второе решение. Обозначим искомую сумму через S:

$$S = a + aq + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}.$$

Умножим ее на q:

$$qS = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Появился член aq^n, а член a пропал, так что

$$\begin{aligned} qS - S &= aq^n - a, \\ (q-1)S &= a(q^n - 1), \\ S &= a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Задача 204. В решении и ответе к предыдущей задаче есть неточность. Что это за неточность?

Решение. При $q = 1$ ответ не имеет смысла: выражение

$$\frac{1^n - 1}{1 - 1}$$

не определено. В этом случае все члены прогрессии равны a и сумма равна na. Так что можно было бы сказать, что

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = n, \quad \text{если } q = 1.$$

(Это шутка, но в ней есть и доля правды; вспомните о ней, когда будете изучать дифференцирование функции $f(x) = x^n$ в курсе математического анализа!)

42. Разные задачи о прогрессиях

Задача 205. Могут ли числа $1/2, 1/3, 1/5$ быть членами (не обязательно соседними) одной арифметической прогрессии?

Указание. Могут; в одном из вариантов ее разность равна $1/30$.

Задача 206. Могут ли числа $2, 3, 5$ быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

Решение. Докажем, что не могут. Предположим, что знаменатель этой прогрессии равен q. Тогда

$$3 = 2q^n, \quad 5 = 3q^m$$

для некоторых m и n. Тогда

$$q^n = \frac{3}{2}, \quad q^m = \frac{5}{3}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = q^{mn} = \left(\frac{5}{3}\right)^n,$$

или

$$\frac{3^m}{2^m} = \frac{5^n}{3^n},$$

откуда $3^{m+n} = 2^m \cdot 5^n$. Слева стоит нечетное число, а справа — четное, если только $m \neq 0$. Значит $m = 0$. Но это тоже невозможно, так как в этом случае было бы

$$5 = 3q^m = 3 \cdot 1 = 3.$$

Полученное противоречие показывает, что требования $3 = 2q^n$ и $5 = 3q^m$ несовместимы. Следовательно, $2, 3$ и 5 не могут быть членами одной и той же геометрической прогрессии.

Задача 207. В решении предыдущей задачи мы предполагали, что в прогрессии число 3 стоит после 2, а число 5 стоит после 3 (считая положительными числа m и n). А что будет в других случаях?

Задача 208. Могут ли первые 2 числа в арифметической прогрессии быть целыми, а все следующие числа — не целыми?

Решение. Не могут: если два соседних члена целые, то разность прогрессии — целое число, и потому все прочие члены — целые.

Задача 209. Могут ли первые 10 чисел в геометрической прогрессии быть целыми, а все остальные — не целыми?

Решение. Могут:

$$512,\ 256,\ 128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

Задача 210. Может ли второй член арифметической прогрессии быть меньше первого и третьего?

Решение. Нет: в этом случае разность прогрессии была бы одновременно положительным и отрицательным числом.

Задача 211. Тот же вопрос для геометрической прогрессии.

Решение. Да: $1, -1, 1$.

Задача 212. Может ли в бесконечной арифметической прогрессии первый член быть целым, а все следующие — не целыми?

Указание. Рассмотреть прогрессию с разностью $\sqrt{2}$ и использовать иррациональность $\sqrt{2}$ (см. ниже).

Задача 213. Может ли бесконечная арифметическая прогрессия содержать в точности 2 целых члена?

Ответ. Нет.

Задача 214. В последовательности

$$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \ldots$$

каждый член получается из предыдущего умножением на 2 и прибавлением 1. Чему равен 1000-й член последовательности?

Ответ. $2^{1000}-1$.

Задача 215. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, в которой каждый член равен сумме двух предыдущих.

Указание. См. раздел о квадратных уравнениях.

Ответ.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 216. Последовательность Фибоначчи

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

определяется так: два первых члена равны 1, а каждый следующий есть сумма двух предыдущих. Подберите такие числа A и B, чтобы n-й член последовательности Фибоначчи равнялся

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

43. Хорошо темперированный клавир

Все знают, что одну и ту же мелодию можно играть в разных тональностях. Но что означают слова «одну и ту же»? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с другого: что такое мелодия? Формально говоря, мелодия — это сыгранные друг за другом звуки разной высоты. А что такое высота звука? С точки зрения физики, звук — это колебания воздуха. Высота звука определяется *частотой* колебаний, т. е. количеством колебаний в секунду. Камертон, колеблющийся 440 раз в секунду (физики говорят «440 герц». Название единицы частоты дано в честь немецкого физика Генриха Герца), дает ноту *ля* первой октавы.

На слух бо́льшая частота соответствует более высоким нотам. Очень низкие и очень высокие звуки становятся уже неслышимыми. Считается, что человек может услышать звуки в диапазоне от 20 герц до 20 килогерц (хотя на самом деле у разных людей эти границы могут быть разными; к старости диапазон слышимых частот уменьшается).

Низкие звуки, которые мы не слышим, иногда называют «инфразвуком», высокие — «ультразвуком». С помощью ультразвуков разговаривают друг с другом дельфины.

Частота тока в электросети — 50 герц, т. е. 50 колебаний в секунду (это относится к Европе, в Америке — 60 герц). Если из-за неисправности сетевой фон проникает в звуковой тракт магнитофона, слышно низкое гудение.

Задача 217. Натягивая струну сильнее, мы изменяем частоту колебаний. Как вы думаете, увеличивается частота или уменьшается? Попробуйте сделать это с натянутой ниткой.

Задача 218. Зажимая струну (например, гитары) пальцем, мы как бы уменьшаем ее длину, почти не меняя натяжения. Как вы думаете, что происходит с высотой звука?

Задача 219. Пластинку на 33 оборота поставили на 45; как изменится частота всех записанных на ней звуков?

Задача 220. Где в рояле более низкие ноты — слева или справа? Как это связано с формой рояля?

Задача 221. Комар зудит почти как камертон. Сколько взмахов в секунду делают его крылья?

Задача 222. Как вы думаете, кто издает более высокий звук — комар или большая муха?

Оказывается, что на слух в первую очередь воспринимаются *отношения частот* соседних свуков мелодии, а не сами частоты. Лишь немногие люди с «абсолютным слухом» (далеко не у всех музыкантов он есть) могут отличить взятую на рояле ноту *ля* от ноты *соль*. Однако почти каждый человек после небольшой практики легко отличит интервал *ре – ля* (квинта, отношение частот *ре* : *ля* = 2 : 3) от *ре – соль* (кварта, отношение частот *ре* : *соль* = 3 : 4).

Задача 223. Найти отношение частот соседних нот *соль* и *ля*, используя эти данные.

Теперь мы можем сказать, какие мелодии звучат одинаково (отличаясь лишь «тональностью») — это те, в которых одинаковы *отношения частот*.

Задача 224. Мелодия *ля – ми – ля* (нисходящая) состоит из трех нот с частотами 440, 330 и 220. Какими будут частоты, если сыграть такую же (с теми же отношениями частот) мелодию, начиная с ноты *ми* (ее частота 330)?

Решение. Согласно сказанному, нужно, чтобы

$$440 : 330 : 220 = 330 : x : y.$$

Поскольку

$$440 : 330 : 220 = 4 : 3 : 2,$$

получаем $y = 330 \cdot (1/2) = 165$, $x = 330 \cdot (3/4) = 247{,}5$. Соответствующие ноты называются *ми – си – ми.*

Посмотреть на клавиатуру рояля, легко заметить, что она «периодична»: одни и те же комбинации белых и черных клавиш повторяются — как говорят, в «разных октавах». Отстоящие на период (на октаву) ноты называются одинаково и отличаются по частоте ровно в 2 раза. Таким образом, ноты «*ля*» в разных октавах имеют частоты

$$\ldots\ 55,\ 110,\ 220,\ 440,\ 880,\ 1760,\ \ldots$$

образующие геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Задача 225. Как много октав может быть у рояля, если все ноты должны быть слышны? (Считайте, что слышны звуки в диапазоне от 20 до 20000 герц.)

Геометрическую прогрессию образуют не только ноты *ля*, но и другие одноименные ноты: ноты *соль* образуют еще одну геометрическую прогрессию (также со знаменателем 2), ноты *фа* — третью и так далее.

Задача 226. Глядя на клавиатуру рояля (рис. 12), подсчитать, сколько всего прогрессий получается (сколько нот в одной октаве).

Ответ. 12 (7 белых клавиш и 5 черных).

Названия нот: черная клавиша между *до* и *ре* называтеся *до диез* или *ре бемоль*, между *ре* и *ми* — *ре диез* или *ми бемоль*, и так далее. (Тем самым *диез* обозначает повышение звука, а *бемоль* — понижение.) Музыканты используют значок ♯ для *диеза* и ♭ для *бемоля*. Используя их, можно записать: *до*♯ = *ре*♭.

Задача 227. Что должен сделать пианист, чтобы сыграть мелодию с удвоенными частотами всех нот?

Решение. Сдвинуть руку вправо на октаву и играть как обычно.

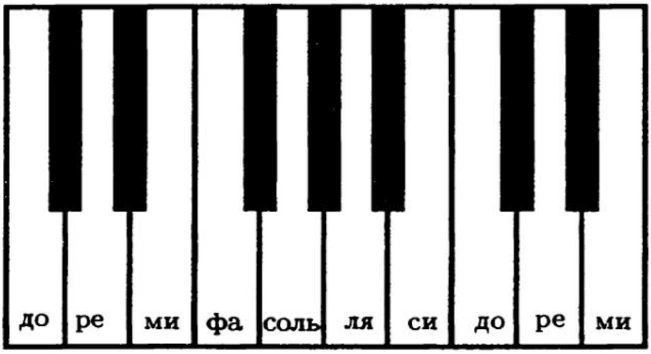


Рис. 12

Теперь сыграем на рояле *хроматическую гамму*, нажимая все клавиши (белые и черные) подряд слева направо:

$$\textit{до} \to \textit{до}\sharp = \textit{ре}\flat \to \textit{ре} \to \textit{ре}\sharp = \textit{ми}\flat \to \textit{ми} \to \textit{фа} \to \textit{фа}\sharp =$$
$$= \textit{соль}\flat \to \textit{соль} \to \textit{соль}\sharp = \textit{ля}\flat \to \textit{ля} \to \textit{ля}\sharp = \textit{си}\flat \to \textit{до} \to \ldots$$

Оказывается,

частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию

Мы увидим, почему так получается, чуть позже.

Задача 228. Считая, что частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию, найти знаменатель прогрессии.

Решение. Обозначим частоту ноты *до* за c, а искомый знаменатель — за q. Тогда *до*$\sharp$ = *ре*$\flat$ имеет частоту $c \cdot q$, *ре* имеет частоту $c \cdot q^2$ и так далее:

до	*до*$\sharp$	*ре*	*ре*$\sharp$	*ми*	*фа*	*фа*$\sharp$	*соль*	*соль*$\sharp$	*ля*	*ля*$\sharp$	*си*	*до*
c	cq	cq^2	cq^3	cq^4	cq^5	cq^6	cq^7	cq^8	cq^9	cq^{10}	cq^{11}	cq^{12}

Нота *до* следующей октавы имеет вдвое большую частоту, так что $cq^{12} = 2c$. Отсюда $q^{12} = 2$, $q = \sqrt[12]{2}$.

Музыканты называют интервал между соседними нотами *полутоном*. Октава состоит, таким образом, из 12 полутонов, и на каждый полутон приходится увеличение частоты в $\sqrt[12]{2}$ раз.

Задача 229. Между нотами *до* и *ре* два полутона (или один *тон*, как говорят музыканты). Найти отношение частот этих нот.

Решение. $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$

Теперь объясним, почему хроматическая гамма дает геометрическую прогрессию. Это необходимо для того, чтобы любую мелодию можно было сыграть, начиная с любой ноты. Поясним это на примере простейшей мелодии из двух нот: *до* и *до диез*. Сыграем ее, начиная с *до диеза*: *до диез* - *ре*. Чтобы эти мелодии звучали одинаково, нужно, чтобы отношения частот были равны:

$$\frac{ре}{до\sharp} = \frac{до\sharp}{до}$$

А это и есть определение геометрической прогрессии.

Задача 230. Для какой ноты x мелодии *до* $\to x$ и $x \to$ *до* (*до* следующей октавы, т. е. удвоенной частоты) будут звучать одинаково?

Такой интервал музыканты называют «тритоном». Он как бы делит октаву пополам, на два равных интервала.

Задача 231. Фуга до минор из первого тома «Хорошо темперированного клавира» Баха открывается такой темой (см. рис. 13).

Рис. 13

Затем эта же тема (с одним изменением) проходит в другой тональности (см. рис. 14).

Рис. 14

Найдите измененное место. Знаки ♯ или ♭ перед нотой означают повышение и понижение на полтона. Обозначения нот указаны на рис. 15.

Рис. 15

Вероятно, внимательный читатель уже заметил несогласованность в наших объяснениях.

З а д а ч а 232. Зная, что хроматическая гамма есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[12]{2}$, найти отношение частот нот *ре* и *ля* (восходящая квинта).

Решение. Между *ре* и *ля* семь полутонов, поэтому отношение частот равно $(\sqrt[12]{2})^7$. С помощью калькулятора его легко найти: $(\sqrt[12]{2})^7 = 1{,}498\ldots$

Это близко к отношению 3 : 2, которое мы называли раньше, но все же не точно совпадает с ним.

Задача 233. Найти отношение частот в восходящей квинте *ре* – *соль* и сравнить его с отношением 4 : 3, которое мы называли раньше.

Решение. $(\sqrt[12]{2})^5 = 1{,}3348\ldots;\qquad 4/3 = 1{,}3333\ldots$

Так что же такое квинта — отношение частот $(\sqrt[12]{2})^7$ или 3 : 2?! В некотором смысле оба ответа правильны. Сейчас мы попробуем объяснить, что имеется в виду.

Если вы услышите одну ноту, а через минуту другую, то не почувствуете гармонии или дисгармонии. Но если сыграть ноты одну за другой, или даже обе сразу, то станет слышно, хорошо ли они звучат вместе. Скрипач, настроив одну из струн по камертону (на практике обычно по роялю аккомпаниатора или гобою в оркестре), затем настраивает вторую так: ведя смычком по обеим струнам, он регулирует натяжение второй струны, пока они не будут хорошо («чисто») звучать вместе.

В каком случае две ноты образуют гармоничный интервал? Оказывается, это бывает, когда *их частоты относятся друг к другу как небольшие целые числа*. Почему так получается, мы говорить не будем — для этого нужно знать немного тригонометрии. Вместо этого перечислим некоторые интервалы и их названия (см. табл. 11).

Задача 234. Вторая нота восходящей мелодии образует с первой октаву, а третья со второй — квинту. Как относятся друг к другу частоты третьей и первой нот?

Ответ. 3 : 1.

Таблица 11

2 : 1	октава
3 : 2	квинта
4 : 3	кварта
5 : 4	большая терция

Задача 235. Тот же вопрос, если третья нота образует со второй большую терцию.

Такие «чистые» интервалы получаются при игре на скрипке или других инструментах, где можно непрерывно менять высоту звука. На рояле чистых интервалов не получается, поскольку все отношения частот являются степенями числа $q = \sqrt[12]{2}$ (см. табл. 12).

Таблица 12

Название	чистые	получаются	
малая терция	$6 : 5 = 1{,}2$	$1{,}1892\ldots$	q^3
большая терция	$5 : 4 = 1{,}25$	$1{,}2599\ldots$	q^4
кварта	$4 : 3 = 1{,}333\ldots$	$1{,}3348\ldots$	q^5
квинта	$3 : 2 = 1{,}5$	$1{,}4983\ldots$	q^7
малая секста	$8 : 5 = 1{,}6$	$1{,}5874\ldots$	q^8
большая секста	$5 : 3 = 1{,}666\ldots$	$1{,}6817\ldots$	q^9
октава	$2 : 1 = 2$	2	q^{12}

Конечно, можно попросить настройщика настраивать рояль иначе — так, чтобы некоторые интервалы были чистыми. Тогда другие интервалы станут еще более далекими от чистых и красивая мелодия, начатая с другой ноты, может звучать ужасно.

До 18-го столетия рояли (точнее, клавесины и органы — современный рояль появился позже) настраивали, стараясь сделать некоторые интервалы чистыми. При этом одни тональности звучали красиво, а другие (как правило, с большим числом черных клавиш) — ужасно, и композиторы старались их избегать, считая, что все равно нормальный органист в них играть не сможет.

Традиция делить тональности на «хорошие» и «плохие» и писать музыку только в хороших была поколеблена великим Бахом, который написал «Хорошо темперированный клавир» — сборник прелюдий и фуг. Он состоит из двух частей. В каждой части — 24 прелюдии и фуги, по одной в каждой мажорной и минорной тональности. Неизвестно, как в точности Бах настраивал свой клавесин — была ли это равномерная темперация, когда хроматическая гамма образует геометрическую прогрессию, или какая-то не вполне равномерная. Но современные исполнители играют его на равномерно темперированных роялях, на которых все интервалы (за исключением октавы) звучат не совсем чисто — но зато одинаково во всех тональностях.

Задача 236. Достаньте запись «Хорошо темперированного клавира» и послушайте.

В заключение обсудим вот какой вопрос: а почему, собственно, в октаве имеено 12 нот (полутонов)? Что мешает изготовить рояль с 13 или 7 клавишами в каждой октаве? В этом случае отношение частот соседних нот было бы $\sqrt[13]{2}$ или $\sqrt[7]{2}$. Оказывается, что тогда основные интервалы (3 : 2, 4 : 3 и так далее) будут значительно менее чистыми.

Задача 237. Найдите отношения частот, если в октаве 7 (равноотстоящих) нот. Если ли среди отношений сколько-нибудь близкие к 3/2 или 4/3? Сравните с приведенной выше таблицей для 12 нот.

Если вы проделаете аналогичные вычисления для других чисел нот в октаве, то убедитесь, что 12 является исключительно удачным выбором — при других (не слишком больших) числах приближения заметно хуже.

Замечательно, что музыканты использовали 12-тоновую систему, ничего не зная о геометрических прогрессиях и не делая никаких вычислений — подобно тому, как пчёлы делали аккуратные шестигранные соты задолго до того, как люди установили, что именно такая форма оптимальна.

44. Сумма бесконечной прогрессии

Один из «парадоксов Зенона» (древнегреческого философа) состоит в следующем (в изложении Льва Толстого в «Войне и мире», т. 3, ч. 3).

> ... Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и т. д. до бесконечности. Задача эта представлялась древним неразрешимою.

Мы включили эту задачу в раздел о прогрессиях, поскольку отрезки, последовательно пробегаемые Ахиллесом, составляют геометрическую прогрессию

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

со знаменателем $1/10$ (за единицу мы принимаем начальное расстояние между Ахиллесом и черепахой). Общее расстояние, пройденное Ахиллесом до встречи с черепахой, есть «сумма бесконечного числа членов»

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

Педант заметил бы нам, что говорить о сумме бесконечного числа членов (не определяя эти понятия специально) не имеет смысла: прибавляя очередные члены, мы никогда не кончим. И он прав. Но мы все же не будем оправдываться, а вместо этого найдем эту сумму разными способами.

Способ 1. Обозначим сумму через S:

$$S=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

Тогда

$$10S=10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots=10+S,$$

откуда

$$9S=10, \quad S=\frac{10}{9}.$$

Способ 2. Будем добавлять слагаемые по одному:

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{10} &= 1{,}1\\
1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100} &= 1{,}11\\
1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000} &= 1{,}111\\
&\ldots
\end{aligned}$$

В итоге получится

$$1{,}111\ldots$$

что, как известно, равно $1\frac{1}{9}$ (так как $1/9=0{,}111\ldots$).

Способ 3. По формуле суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

В нашем случае $q = 1/10$, а n бесконечно (если можно так выразиться). Тогда q^n бесконечно мало (ведь с ростом n число $(1/10)^n$ быстро убывает) и им можно пренебречь. Получаем формулу

$$1 + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1 - q}$$

(мы изменили знаки в числителе и знаменателе). Вспомнив, что $q = 1/10$, получим ответ $\dfrac{1}{0{,}9} = \dfrac{10}{9}$.

Способ 4. Вспомним, наконец, про Ахиллеса и черепаху. Здравый смысл подсказывает, что Ахиллес догонит черепаху, пробежав некоторое расстояние S. За это время черепаха, скорость которой в 10 раз меньше, проползет расстояние $S/10$, и расстояние между ними уменьшится на $S - \dfrac{S}{10} = \dfrac{9}{10}S$. В начале оно равнялось 1, а в момент встречи стало нулевым, так что $(9/10)S = 1$ и $S = 10/9$.

Пусть теперь Ахиллес стал бегать в 10 раз медленнее черепахи. Пока он пробегает расстояние до точки старта черепахи, черепаха уползает на вдесятеро большее расстояние. Когда Ахиллес добежит до этой точки, черепаха уползет на расстояние, в сто раз большее начального, и т. д. Получаем сумму

$$1 + 10 + 100 + \ldots$$

Разумеется, Ахиллес никогда не догонит черепаху. Но тем не менее в формулу

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1 - q}$$

можно подставить $q = 10$ и получить «равенство»

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots = \frac{1}{1-10} = -\frac{1}{9}.$$

Задача 238. Можно ли придать явно нелепому утверждению «Ахиллес догонит черепаху, пробежав $-1/9$ метра» какой-то смысл?

Указание. Можно.

45. Уравнения

Когда мы писали, к примеру, что

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

то подразумевалось, что левая и правая части равны при любых a и b. Такие равенства называют *тождествами*. Тождество можно доказать (преобразовав левую и правую части так, что они станут одинаковыми) или опровергнуть (найдя значения букв, при которых левая и правая часть не равны). Уравнение, как и тождество, состоит из левой и правой части, соединенных знаком равенства, но задача другая: его надо *решить*, т. е. выяснить, при каких значениях букв левая и правая части равны.

Например, уравнение

$$5x + 3 = 2x + 7$$

можно решить так: вычтя $2x + 3$ из обеих частей, получим равносильное уравнение

$$3x = 4$$

(*равносильность* означает, что если одно из уравнений верно для какого-то значения x, то верно и другое). Разделив обе части на 3, получим

$$x = \frac{4}{3}\,.$$

Следовательно, уравнение $5x+3=2x+7$ имеет единственное решение $x=4/3$.

Замечание. Уравнение

$$\frac{x+1}{x+2} = 1$$

не имеет решения. (Доказательство: если $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$, то $x+1=x+2$, что невозможно.) Однако математики не говорят, что зто уравнение неразрешимо. Напротив, они говорят, что уравнение решено, после того как докажут, что оно не имеет решений. Таким образом, «решить уравнение» — значит найти все решения, или доказать, что решений нет.

Терминология здесь такова (см. табл. 13).

Таблица 13

неизвестные	буквы, входящие в уравнение
решение уравнения	значения неизвестных, при которых левая часть равна правой
решить уравнение	найти все решения уравнения или доказать, что их нет
равносильные уравнения	уравнения, имеющие одни и те же решения

Решения уравнения с одной неизвестной называют также его «корнями».

46. Квадратное уравнение

Квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, а x — неизвестное.

Задача 239. Решить уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Решение. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Таким образом, уравнение имеет вид $(x-1)(x-2) = 0$; это равенство выполнено в двух случаях: если $x - 1 = 0$ (т. е. $x = 1$) или $x - 2 = 0$ (т. е. $x = 2$). Ответ: уравнение имеет два решения $x = 1$ и $x = 2$.

Задача 240. Решить уравнения:
(а) $x^2 - 4 = 0$;
(б) $x^2 + 2 = 0$;
(в) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
(г) $x^2 - 2x + 1 = 9$;
(д) $x^2 - 2x - 8 = 0$;
(е) $x^2 - 2x - 3 = 0$;
(ж) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
(з) $x^2 - x - 2 = 0$.

Если в уравнении

$$ax^2 + bx + c = 0$$

коэффициент a равен 0, то оно имеет вид

$$bx + c = 0$$

и имеет единственное решение

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Задача 241. Строго говоря, это не так: при $b = 0$ выражение c/b не имеет смысла. Как исправить эту ошибку?

Если же $a \neq 0$, то можно разделить на a и получить равносильное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Поэтому достаточно научиться решать *приведенные* квадратные уравнения, в которых коэффициент при x^2 равен 1. Обычно такое уравнение записывают в виде

$$x^2 + px + q = 0.$$

47. Случай $p = 0$. Квадратный корень

Начнем с уравнения

$$x^2 + q = 0.$$

Тут есть три варианта

(а) $q = 0$: уравнение $x^2 = 0$ имеет единственное решение $x = 0$.

(б) $q > 0$: решений нет, так как неотрицательное число x^2 в сумме с положительным числом q не дает 0.

(в) $q < 0$: уравнение перепишем в виде $x^2 = -q$ и надо искать числа, квадрат которых равен (положительному) числу $-q$.

Факт. Для любого положительного числа c существует положительное число, квадрат которого равен с.

Определение. Положительное число, квадрат которого равен c, называется квадратным корнем из c и обозначается $\sqrt{c}$. (Кроме того, $\sqrt{0}$ считают равным 0.)

Мы уже встречали $\sqrt{2}$ в разложении на множители $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Теперь мы в тех же целях используем $\sqrt{c}$ вместо $\sqrt{2}$.

Как решить уравнение $x^2 = c$:

$$x^2 - c = 0;$$
$$x^2 - (\sqrt{c})^2 = 0;$$
$$(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0;$$

последнее уравнение имеет два решения $x = \sqrt{c}$ и $x = -\sqrt{c}$ и других решений нет.

Вы спросите: к чему все это? Если $x = \sqrt{c}$, то $x^2 = c$ по определению (и если $x = -\sqrt{c}$ — тоже). Да, это так. Но наше разложение на множители доказывает также, что *других решений нет* (в самом деле, если $x \neq \pm\sqrt{c}$, то оба сомножителя не равны нулю).

Существование квадратного корня из положительного числа c можно объяснить так. Посмотрим, как меняется x^2, если x возрастает, начав с нулевого значения. Чем больше x, тем больше x^2, поэтому x^2 также возрастает. Вначале $x^2 = 0$, т. е. x^2 было меньше c. Когда x очень велико, то x^2 еще больше, поэтому $x^2 > c$ при больших x. Итак, x^2 было меньше c, а стало больше c. Следовательно, в какой-то момент оно должно было сравняться с числом c.

В предыдущей фразе слово «следовательно» заменяет несколько глав учебника высшей математики, где это обосновывается с помощью специальной «теоремы о промежуточных значениях».

Современному человеку привыкшему к калькулятору с клавишей $\boxed{\sqrt{}}$, трудно представить себе, каким потрясением было появление квадратных корней для древних греков, которые первыми обнаружили, что квадратный корень из двух не записывается в виде дроби, числитель и знаменатель которой — целые числа. (А никаких других способов записывать числа у них не было).

Задача 242. Докажите, что

$$\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$$

при любых целых m и n. (Как говорят, $\sqrt{2}$ иррационален; *рациональными* числами называют дроби с целым числителем и знаменателем, *иррациональными* — числа, не представимые в виде таких дробей.)

Решение. Пусть $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$. Возможны три случая:

(а) m и n нечетны;

(б) m четно, n нечетно;

(в) m нечетно, n четно.

(Четвертый случай — m и n четны — можно не рассматривать, так как в этом случае можно сокращать m и n на 2, пока мы не придем к одному из случаев (а) – (в).)

Четное число записывается в виде $2k$, где k — целое; нечетное число записывается в виде $2k + 1$.

(а) $\sqrt{2} = \dfrac{2k+1}{2l+1}$,

$$\left(\frac{2k+1}{2l+1}\right)^2 = 2,$$

$$\frac{(2k+1)^2}{(2l+1)^2} = 2,$$

$$(2k+1)^2 = 2 \cdot (2l+1)^2,$$

$$4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2l+1)^2.$$

Противоречие: (четное число) $+1 =$ (четное число).

(б) $\sqrt{2} = \dfrac{2k}{2l+1}$,

$$\left(\frac{2k}{2l+1}\right)^2 = 2,$$

$$(2k)^2 = 2 \cdot (2l+1)^2,$$

$$4k^2 = 2 \cdot (4l^2 + 4l + 1),$$

$$2k^2 = 4l^2 + 4l + 1.$$

Противоречие: (четное число) $=$ (четное число) $+1$.

(в) $\sqrt{2} = \dfrac{2k+1}{2l}$,

$$(2k+1)^2 = 2 \cdot (2l)^2,$$

$$4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2l)^2.$$

Противоречие: (четное число) $+1 =$ (четное число).

Итак, все три случая невозможны.

Задача 243. Доказать, что число $\sqrt{3}$ иррационально.

Указание. Всякое целое число имеет вид $3k$, $3k+1$ или $3k+2$.

Заявляя, что мы решили уравнение $x^2 - 2 = 0$ и получили ответ «$x = \sqrt{2}$ или $x = -\sqrt{2}$», мы, в сущности, хвастаемся понапрасну. На самом деле мы не решили его, введя обозначение $\sqrt{2}$, а расписались в своем неумении его решать — ведь $\sqrt{2}$ и означает «положительное число, квадрат которого равен 2», т. е. «положительное решение уравнения $x^2 - 2 = 0$».

48. Свойства квадратных корней

Задача 244. Доказать, что

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

при $a, b \geqslant 0$

Решение. Чтобы убедиться, что $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ является квадратным корнем из ab, надо — согласно определению — проверить, что его квадрат равен ab:

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b.$$

Задача 245. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

при $a \geqslant 0$, $b > 0$

Следующий вопрос является традиционной ловушкой для зазевавшихся абитуриентов:

Задача 246. Верно ли, что $\sqrt{a^2} = a$?

Решение. Нет, неверно: при отрицательном a выражение $\sqrt{a^2}$ равно $-a$. Верное равенство будет таким: $\sqrt{a^2} = |a|$, где

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Задача 247. Доказать, что

(а) $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$;

(б) $\dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$.

Задача 248. Что больше: $\sqrt{1001} - \sqrt{1000}$ или $1/10$?

Задача 249. Упростить выражение $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Решение. $3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$.

Ответ. $1 + \sqrt{2}$.

Задача 250. Ваня упростил выражение:

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2 - 2\sqrt{2}} = \\ = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2}.$$

Верно ли это?

Ответ. Так как $1 - \sqrt{2} < 0$, то правильный ответ $\sqrt{2} - 1$.

49. Уравнение $x^2 + px + q = 0$

Задача 251. Решить уравнение

$$x^2 + 2x - 6 = 0.$$

Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 6 &= 0; \\ (x^2 + 2x + 1) - 7 &= 0; \\ (x + 1)^2 - 7 &= 0; \\ (x + 1)^2 &= 7; \\ x + 1 = \sqrt{7} \quad &\text{или} \quad x + 1 = -\sqrt{7}; \\ x = -1 + \sqrt{7} \quad &\text{или} \quad x = -1 - \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Тот же прием применим к другим уравнениям.

Задача 252. Решить уравнение

$$x^2+2x-8=0.$$

Задача 253. Решить уравнение

$$x^2+3x+1=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть

$$x^2+3x+1=x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=$$
$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

Уравнение приобретает вид:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

$$\text{поэтому либо } x+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}}, \quad \text{либо} \quad x+\frac{3}{2}=-\sqrt{\frac{5}{4}},$$

$$\text{откуда } x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{или} \quad x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Замечание. Ответ предыдущей задачи часто записывают как

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Задача 254. Решить уравнение $x^2-2x+2=0$.

Решение. $x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1$. Уравнение $(x-1)^2+1=0$ решений не имеет, так как левая часть всегда больше или равна 1.

Описанный метод называется «выделением полного квадрата». В общем виде он выглядит так:

$$x^2+px+q=0,$$

$$\left(x+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0,$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{p^2}{4}-q.$$

Теперь возможны три случая в зависимости от того, будет ли $\frac{p^2}{4}-q$ положительным, равным нулю или отрицательным.

- Если $\frac{p^2}{4}-q>0$, т. е. два решения

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

- Если $\frac{p^2}{4}-q=0$, т. е. одно решение

$$x=-\frac{p}{2}.$$

- Если $\frac{p^2}{4}-q<0$, решений нет.

Часто все три случая объединяют в формулу

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

считая, что при $\frac{p^2}{4} - q = 0$ решения x_1 и x_2 совпадают (так как под корнем стоит 0), а при $\frac{p^2}{4} - q < 0$ эта формула не дает решений. (Впоследствии математики договорились считать, что квадратный корень из отрицательного числа существует, но мнимый.)

Число $D = \frac{p^2}{4} - q$, от знака которого зависит, есть ли корни и сколько их, называют *дискриминантом.*

50. Теорема Виета

Теорема. Если квадратное уравнение $x^2 + px + q$ имеет два (различных) корня α и β, то

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -p\,; \\ \alpha \cdot \beta &= q\,. \end{aligned}$$

Другая формулировка: Если квадратное уравнение $x^2 + px + q$ имеет два различных корня α и β, то

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta).$$

(Это — действительно другая запись того же утверждения, поскольку

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta,$$

а равенство многочленов $x^2 + px + q$ и $(x - \alpha)(x - \beta)$ означает, что равны их коэффициенты.)

Доказательство. (Первый вариант). По формуле для корней квадратного уравнения

$$\alpha = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}, \quad \beta = -\frac{p}{2} + \sqrt{D},$$

где $D = \frac{p^2}{4} - q$. (Или наоборот:

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}, \quad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{D},$$

но это не важно.) Тогда

$$\alpha + \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} - \frac{p}{2} + \sqrt{D} = -p$$

и

$$\alpha\beta = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2 =$$

$$= \frac{p^2}{4} - D = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Что и требовалось.

(Второй вариант). Будем доказывать теорему Виета во второй из приведенный формулировок. Мы знаем, что если многочлен $P(x)$ имеет корни α и β, то его можно разложить на множители:

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\, R(x).$$

В нашем случае, когда P имеет степень 2, многочлен R может быть только числом (иначе правая часть имеет слишком большую степень), и число это равно 1, так как коэффициенты при x^2 у многочленов x^2+px+q и $(x-\alpha)(x-\beta)$ одинаковы. Значит,

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta).$$

что и требовалось.

Задача 255. Как обобщить теорему Виета на случай уравнения, имеющего ровно один корень? Остаются ли в силе предложеные способы доказательства?

Задача 256. (Теорема Виета для кубического уравнения). Уравнение $x^3+px^2+qx+r=0$ имеет три корня α, β, γ. Доказать, что

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= -p; \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma &= q; \\ \alpha\beta\gamma &= -r. \end{aligned}$$

Задача 257. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразить $x_1^2+x_2^2$ через p и q .

Решение. $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-$ $-2x_1x_2=p^2-2q$.

Задача 258. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразить $(x_1-x_2)^2$ через p и q.

Первое решение. $(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=x_1^2+$ $+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4q$.

Второе решение. x_1-x_2 — разность между корнями; глядя на формулу, видим, что она равна $2\sqrt{D}$, так что $(x_1-x_2)^2=4D=4\left(\dfrac{p^2}{4}-q\right)=p^2-4q$.

Задача 259. Уравнение $x^3+px^2+qx+r=0$ имеет корни x_1, x_2 и x_3. Выразить

$$(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)^2$$

через p, q, r. (Этот многочлен от p, q, r называется *дискриминантом* кубического уравнения. Как и в случае квадратного уравнения, он мал, если два корня близки друг к другу.)

Задача 260. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2, а уравнение $y^2+ry+s=0$ имеет корни y_1, y_2. Выразить

$$(y_1-x_1)(y_2-x_1)(y_1-x_2)(y_2-x_2)$$

через p, q, r, s. (Этот многочлен называется *результантом* двух квадратных многочленов; он равен нулю, если у них есть общий корень.)

Теорема Виета позволяет составить квадратное уравнение с заданными корнями. Точнее, не теорема Виета, а обратная к ней: вот ее формулировка.

Теорема. Если α и β — любые числа, а $p = -(\alpha + \beta)$, $q = \alpha\beta$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни α и β.

Доказательство. Уравнение $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$, очевидно, имеет корни α и β . Раскрыв скобки, убеждаемся, что это и есть уравнение $x^2 + px + q = 0$.

Задача 261. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, имеющее число $4 - \sqrt{7}$ своим корнем.

Указание. Второй корень равен $4 + \sqrt{7}$.

Задача 262. Коэффициенты p, q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ (имеющего два корня) целые. Доказать, что

(а) сумма квадратов его корней — целое число;

(б) сумма кубов его корней — целое число;

(в) сумма n-х степеней его корней при любом натуральном n — целое число.

Задача 263. 1. Доказать, что квадрат числа $a + b\sqrt{2}$ (a, b — целые) также имеет вид $k + l\sqrt{2}$ для некоторых целых k, l.

2. То же для $(a + b\sqrt{2})^n$ при любом целом $n > 1$.

3. Число $(a + b\sqrt{2})^n$ имеет вид $k + l\sqrt{2}$. Какой вид имеет число $(a - b\sqrt{2})^n$?

4. Доказать, что существует бесконечно много целых чисел a, b, для которых $a^2 - 2b^2 = 1$.

Решение. 4. Равенство $a^2 - 2b^2 = 1$ выполнено при $a = 3$, $b = 2$, поскольку $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$. Перепишем это равенство так: $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$. Возведем обе части в n-ую степень: $(3 + 2\sqrt{2})^n(3 - 2\sqrt{2})^n = 1$. Число $(3 + 2\sqrt{2})^n$ равно $k + l\sqrt{2}$ при некоторых k и l, в этом случае $(3 - 2\sqrt{2})^n$ равно $k - l\sqrt{2}$. Итак,

$$(k + l\sqrt{2})(k - l\sqrt{2}) = k^2 - 2l^2 = 1,$$

т. е. k, l — решение уравнения.

Например, $(3+2\sqrt{2})^2 = 9+8+12\sqrt{2} = 17+12\sqrt{2}$. Проверим: $17^2 - 2 \cdot 12^2 = 289 - 2 \cdot 144 = 289 - 288 = 1$.

Задача 264. Доказать, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня разных знаков в том и только в том случае, когда $q < 0$.

Решение. Если уравнение имеет корни разных знаков, то по теореме Виета коэффициент q, равный их произведению, меньше 0. Напротив, если произведение двух корней меньше 0, то корни будут разных знаков — если только корни есть. Убедиться в том, что корни есть, можно, вычислив дискриминант $D = \dfrac{p^2}{4} - q$: если $q < 0$, то $D > 0$.

Другое объяснение: если $q < 0$, то значение выражения x^2+px+q при $x = 0$ отрицательно. При больших x выражение становится положительным (x^2 «перевешивает» $px+q$) — значит, где-то в промежуточной точке оно обращается в нуль и уравнение имеет положительный корень. (Аналогично и для отрицательного корня.)

51. Разложение квадратного трехчлена на множители

Задача 265. Разложить на множители $2x^2 + 5x - 3$.

Решение.

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right).$$

Решим уравнение $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{7}{4};$$

корни: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому (теорема Виета, стр.136)

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = (x - (-3))\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

и

$$2x^2 + 5x - 3 = (x+3)(2x-1).$$

Задача 266. Разложить на множители $2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$.

Задача 267. Разложить на множители $2a^2 + 5ab - 3b^2$.

Решение.

$$2a^2 + 5ab - 3b^2 = b^2\left(2\frac{a^2}{b^2} + 5\frac{a}{b} - 3\right).$$

Если обозначить $\frac{a}{b}$ через x и воспользоваться разложением $2x^2 + 5x - 3 = (x+3)(2x-1)$, это равенство можно продолжить и внести b обратно внутрь скобок, получив

$$\ldots = b^2\left(\frac{a}{b} + 3\right)\left(2\frac{a}{b} - 1\right) = (a+3b)(2a-b).$$

Задача 268. Доказать, что если $a^2+ab+b^2=0$, то $a=b=0$.

Решение. Пусть $a^2+ab+b^2=0$, но $a\neq 0$. (Случай $b\neq 0$ аналогичен.) Поделив уравнение на a^2, получим $1+ +(b/a)+(b/a)^2=0$. Видно, что число $x=b/a$ является корнем уравнения $1+x+x^2=0$, но это уравнение корней не имеет (дискриминант равен $1-4=-3<0$).

52. Формула для корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

Делим уравнение $ax^2+bx+c=0$ на a, получаем уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Таким образом, в формулу для уравнения

$$x^2+px+q=0$$

надо подставить $p=\dfrac{b}{a}$, $q=\dfrac{c}{a}$. Получаем

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-4\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Выражение $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом* уравнения $ax^2+bx+c=0$. Если оно положительно, уравнение имеет два корня. Если $D=0$, уравнение имеет один корень. Если $D<0$, уравнение не имеет корней.

Задача 269. Мы заменили

$$\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

на

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

но, как мы видели, $\sqrt{4a^2}$ равно не $2a$, а $|2a|$. Почему в данном случае это не имеет значения?

Задача 270. Известно, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2. Какие корни имеет уравнение cx^2+ $+bx+a=0$?

Решение. Делим $ax^2+bx+c=0$ на x^2; получаем

$$a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=0 \quad \text{или} \quad c\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+a=0,$$

т. е. $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ будут корнями уравнения $cx^2+bx+a=0$.

Замечание. Сказанное верно, если $x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$. Если один из корней x_1 и x_2 равен нулю, то (по теореме Виета) c равно нулю и уравнение $cx^2+bx+a=0$ имеет не больше одного корня.

53. Еще одна формула корней квадратного уравнения

Формулу

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

зубрят миллионы школьников всех континентов. Между тем есть другая формула, ничем не хуже этой, но мало кому известная:

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Докажем ее: если x — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $y = 1/x$ — корень уравнения $cy^2 + by + a = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$$

отсюда

$$x_{1,2} = \frac{1}{y_{1,2}} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Задача 271. Проверьте прямым вычислением, что

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

(мы написали $\mp$ в знак того, что плюсу в левой части соответствует минус в правой и наоборот).

54. Квадратное уравнение становится линейным

Посмотрим на квадратное уравнение $ax^2 - x + 1 = 0$. По общему правилу оно имеет два корня, если его дискриминант $D = 1 - 4a > 0$, т. е. если $a < 1/4$.

Задача 272. Верно ли это?

Ответ. Неверно, так как при $a = 0$ получается уравнение $-x + 1 = 0$, имеющее единственный корень $x = 1$.

Формалист сказал бы, что при $a = 0$ наше общее правило неприменимо, так как уравнение не является квадратным. И он прав. Но все-таки как же это так: жило-было квадратное уравнение $ax^2 - x + 1 = 0$, имело оно себе два корня, но мы начали менять a и вдруг один корень пропал, когда a стало равно нулю. Куда же он делся?

Чтобы ответить на этот вопрос, посмотрим на формулу для корней из предыдущего пункта:

$$x_{1,2} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1-4a}}.$$

Если a близко к нулю, то $\sqrt{1-4a} \approx 1$, так что

$$x_1 = \frac{2}{1+\sqrt{1-4a}} \approx \frac{2}{1+1} = 1,$$

но

$$x_2 = \frac{2}{1-\sqrt{1-4a}} = \frac{2}{\text{число, близкое к нулю}},$$

т. е. очень велико. Видно, что при приближении a к нулю корень x_1 приближается к 1, а x_2 «уходит в бесконечность» — и «возвращается с другой стороны».

Как это происходит, видно на рис. 16.

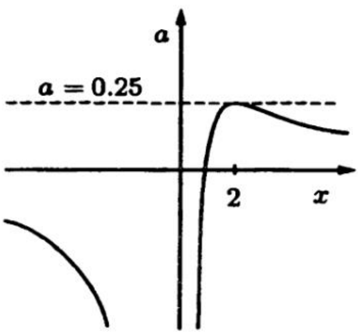


Рис. 16

Нарисуем точки $\langle x, a \rangle$, для которых $ax^2 - x + 1 = 0$, или, другим словами, график функции $a = (x-1)/x^2$. Чтобы найти решения уравнения $ax^2 - x + {}$ ${}+ 1 = 0$ при данном a, надо пересечь горизонтальную прямую, проходящую на высоте a, с данным графиком. Представим себе, что горизонтальная прямая движется сверху вниз, оставаясь горизонтальной. Вначале (при $a > 1/4$) она не пересекает графика — решений нет. Затем (при $a = 1/4$) появляется одна точка пересечения, которая сразу же раздваивается (как только a становится меньше $1/4$). Один из корней уходит в положительную бесконечность, когда a приближается к 0, а затем возвращается из отрицательной бесконечности, после чего оба корня приближаются к нулю с разных сторон.

Задача 273. Что происходит с корнями уравнения

$$\text{(а) } x^2 - x - a = 0; \qquad \text{(б) } x^2 - ax + 1 = 0$$

при изменении a?

55. График квадратного трехчлена

График $y = x^2$ выглядит так (см. рис. 17).

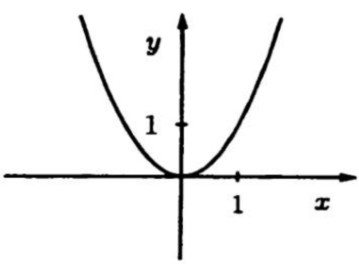


Рис. 17

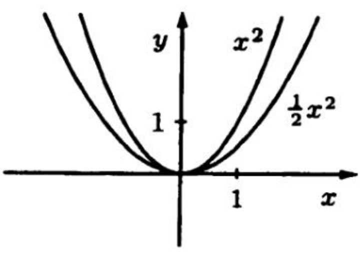


Рис. 18

Зная его, можно построить и другие.

График $y = ax^2$ (где a — постоянное число) получается из $y = x^2$ растяжением (если $a > 1$) или сжатием (если $0 < a < 1$) вдоль вертикальной оси: чем больше a, тем больше он вытянут (см. рис. 18). При $a < 0$ график к тому же и перевернут (см. рис. 19).

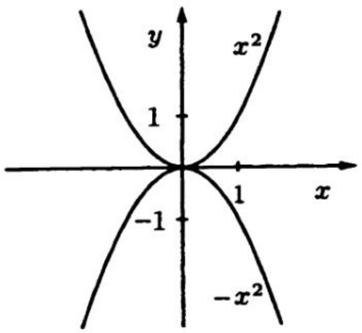


Рис. 19

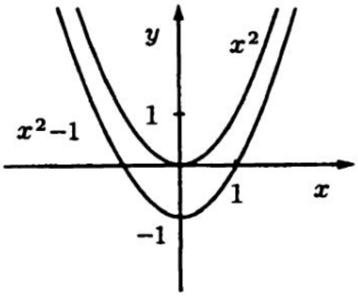


Рис. 20

График $y = x^2 + c$ (рис. 20) получается из $y = x^2$ сдвигом на c (вверх, если $c > 0$, вниз, если $c < 0$). Аналогичным образом $y = ax^2 + c$ получается из $y = ax^2$.

Сложнее понять, что соответствует сдвигу графика влево-вправо. Для примера рассмотрим график $y = \frac{1}{2}x^2$ и сравним его с графиком $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ (см. рис. 21). Положим $x = -3$. При этом выражение $\frac{1}{2}(x+1)^2$ равно $\frac{1}{2}(-2)^2$, т. е. имеет то же значение, что $\frac{1}{2}x^2$ при $x = -2$. Вообще значение выражения $\frac{1}{2}(x+1)^2$ совпадает со значением выражения $\frac{1}{2}x^2$, но при увеличенном на единицу значении x.

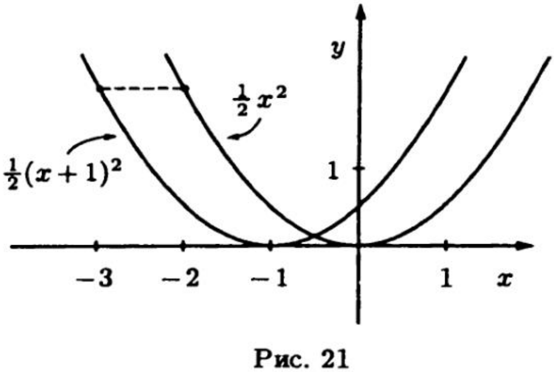


Рис. 21

На графике это выглядит так: точки графика $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ переходят в точки графика $y = \frac{1}{2}x^2$ при сдвиге вправо на 1. Таким образом, график $y = \frac{1}{2}x^2$ получится, если график $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ сдвинуть вправо на 1. Другими словами, график $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ получится, если график $y = \frac{1}{2}x^2$ сдвинуть влево на 1.

Вообще, график $y = a(x+m)^2$ получается из графика $y = ax^2$ сдвигом влево на m единиц (если $m > 0$; при $m < 0$ будет сдвиг вправо).

Теперь мы видим, что любой график вида

$$y = a(x+m)^2 + n$$

можно получить из графика $y = x^2$ в три приема:

(а) растянуть по вертикали в a раз — получится $y = ax^2$;

(б) сдвинуть на m влево — получится $y = a(x+m)^2$;

(в) сдвинуть на n вверх — получится $y = a(x+m)^2 + n$.

Задача 274. Где находится вершина (нижняя или верхняя точка) графика $y = a(x+m)^2 + n$?

Ответ. В точке с координатами $\langle -m, n \rangle$.

Задача 275. Важен ли порядок операций (а), (б) и (в)? Получим ли мы тот же самый график, если к исходному графику $y = x^2$ применить эти же операции, но, например, в обратном порядке (сначала (в), потом (б), потом (а))?

Ответ. Порядок операций важен. Мы получим $x^2 + n$ после (в), затем $(x+m)^2+n$ после (б) и, наконец, $a(x+m)^2+an$ после (а). Так что получится an вместо n.

Задача 276. Операции (а), (б) и (в) можно упорядочить шестью способами. Получим ли мы при этом шесть различных графиков, или некоторые из графиков совпадут?

Так можно построить график любого квадратного трехчлена, так как любой трехчлен может быть записан как

$a(x+m)^2+n$ с помощью выделения полного квадрата

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c =$$
$$= a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c =$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

Обозначив $\dfrac{b}{2a}$ за m, а $-\dfrac{b^2}{4a}+c$ за n, получаем требуемое.

Задача 277. Как узнать знаки чисел a, b и c, глядя на график трехчлена $y = ax^2+bx+c$?

Ответ. При $a>0$ «рожки» направлены вверх, при $a < 0$ — вниз (рис. 22).

Знак b/a определяется положением вершины графика (слева или справа от нуля). Тем самым можно определить знак b, так как знак a уже известен. Знак c можно найти, посмотрев на место пересечения графика с осью ординат (так как ax^2+bx+c равно c при $x=0$).

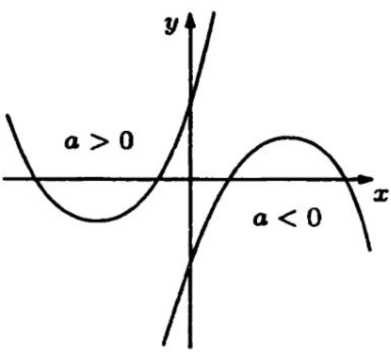


Рис. 22

Замечание. Другой способ определения знака b: если в точке пересечения с осью ординат график идет вправо-вверх, то b положительно; если же в этой точке график идет вправо-вниз, то b отрицательно. Это правило может быть объяснено средствами математического анализа: если функция $f(x) = ax^2+bx+c$ возрастает при значениях x, близких к 0, то ее производная $f'(x) = 2ax + b$ (равная b при $x = 0$) положительна.

56. Квадратные неравенства

Задача 278. Решить неравенство $x^2 - 3x + 2 < 0$. («Решить неравенство» на школьном жаргоне означает: «выяснить, при каких значениях букв оно выполнено».)

Решение. Разложим левую часть на множители:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

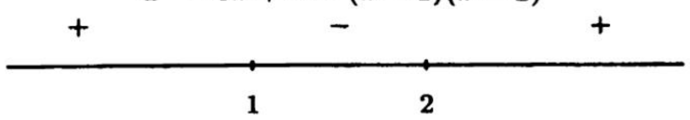


Рис. 23

Она обращается в 0 в точках $x = 1$ и $x = 2$; при $x > 2$ оба сомножителя положительны; при переходе через точку 2 в интервал $(1, 2)$ один сомножитель становится отрицательным, и произведение отрицательно; при переходе через точку 1 оба сомножителя становятся отрицательными (см. рис. 23).

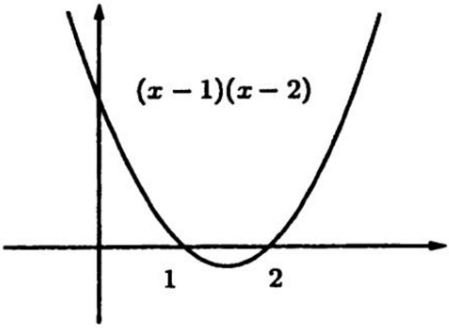


Рис. 24

Ответ. Неравенство выполнено при $1 < x < 2$.

Этот же ответ можно получить, нарисовав график функции $y = (x - 1)(x - 2)$, представленный на рис. 24 (1 и 2 — точки пересечения с осью абсцисс, рожки направлены вверх).

57. Максимум и минимум квадратного трехчлена

Задача 279. Сумма двух чисел равна 1. Какое наибольшее значение может принимать их произведение?

Первое решение. Если одно число обозначить через x, то второе будет равно $1 - x$, а их произведение равно $x \cdot (1-x) = x - x^2$. Трехчлен $-x^2 + x$ направлен рогами вниз (при x^2 стоит минус), а корни его $x = 0$ и $x = 1$, так что вершина, находясь посередине между корнями, имеет абсциссу $x = \frac{1}{2}$, а максимальное значение равно $\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Ответ. Максимальное значение равно $\frac{1}{4}$.

Второе решение. Обозначим одно число за $\frac{1}{2} + x$, тогда второе будет равно $\frac{1}{2} - x$, а их произведение равно

$$\left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{4} - x^2$$

так что максимальное значение достигается, когда $x = 0$ (оба числа равны $\frac{1}{2}$).

Задача 280. Доказать, что квадрат имеет максимальную площадь среди всех прямоугольников данного периметра.

Задача 281. Доказать, что квадрат имеет минимальный периметр среди всех прямоугольников данной площади.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 282. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x + \frac{2}{x}$ при положительных x?

Первое решение. Посмотрим, при каких $c>0$ число c может быть значением выражения $x+\frac{2}{x}$. Другими словами, мы хотим узнать, при каких c уравнение

$$x+\frac{2}{x}=c$$

имеет решение. Это уравнение можно умножить на x и интересоваться, при каких c уравнение

$$x^2+2=cx$$

имеет решение. (Это решение не может быть нулем, так как $0^2+2\neq c\cdot 0$ — так что на x можно будет поделить).

Уравнение $x^2+2=cx$ или, что то же, $x^2-cx+2=0$ имеет решение, когда его дискриминант

$$D=\left(\frac{c}{2}\right)^2-2$$

неотрицателен, т. е. когда $\left(\frac{c}{2}\right)^2\geqslant 2$, т. е.

$$\frac{c}{2}\geqslant\sqrt{2} \quad \text{или} \quad \frac{c}{2}\leqslant-\sqrt{2}.$$

Итак, уравнение $x+\frac{2}{x}=c$ имеет решение при $c\geqslant 2\sqrt{2}$ и $c\leqslant -2\sqrt{2}$. Наименьшее значение выражения $x+\frac{2}{x}$ при положительных x равно $2\sqrt{2}$.

Второе решение. x и $\frac{2}{x}$ — стороны прямоугольника площади 2, а $x+\frac{2}{x}$ — его полупериметр. Он будет минимален, когда прямоугольник — квадрат (см. предыдущую задачу), т. е. когда $x=\frac{2}{x}$, $x^2=2$, $x=\sqrt{2}$. При таком x значение выражения $x+\frac{2}{x}$ равно $2\sqrt{2}$.

58. Биквадратные уравнения

Задача 283. Решить уравнение $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

Решение. Если x — решение этого уравнения, то $y = x^2$ является решением уравнения $y^2 - 3y + 2 = 0$ — и наоборот. Это квадратное (относительно y) уравнение имеет корни

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2};$$

т.е. $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

Поэтому решениями исходного уравнения будут те x, для которых $x^2 = 1$ или $x^2 = 2$, так что оно имеет 4 решения:

$$x = 1, \quad x = -1, \quad x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2}.$$

Подобным образом можно решить любое *биквадратное* уравнение (так называют уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$).

Задача 284. Укажите примеры биквадратных уравнений (если они существуют),

(а) не имеющих решения;
(б) имеющих ровно 1 решение;
(в) имеющих 2 решения;
(г) имеющих 3 решения;
(д) имеющих 4 решения;
(е) имеющих 5 решений.

(Указание. В одном из случаев такого примера нет.)

Задача 285. Сколько решений может иметь уравнение

$$ax^6 + bx^3 + c = 0?$$

Указание. Не забудьте, что a, b или c могут равняться нулю.

Ответ. 0, 1, 2 или бесконечно много.

Задача 286. Тот же вопрос для уравнения

$$ax^8 + bx^4 + c = 0.$$

59. Возвратные уравнения

Задача 287. Решить уравнение

$$2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Решение. Заметим, что $x = 0$ не является корнем. Поэтому мы ничего не потеряем, если разделим это уравнение на x^2:

$$2x^2 + 7x + 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Теперь сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами и противоположными степенями x:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

После этого заметим, что $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ можно выразить через $x + \dfrac{1}{x}$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

откуда

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

Таким образом, если x является решением исходного уравнения, то $y = x + \dfrac{1}{x}$ является решением уравнения

$$2(y^2 - 2) + 7y + 4 = 0,$$

которое можно переписать так:

$$2y^2 - 4 + 7y + 4 = 0,$$

$$2y^2 + 7y = 0,$$
$$y(2y + 7) = 0,$$

откуда $y = 0$ или $y = -7/2$. Поэтому решениями исходного уравнения будут те x, для которых

$$x + \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{или} \qquad x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2}.$$

Решим эти два уравнения:

$$x + \frac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -1 \qquad \text{(решений нет)};$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2} \text{ означает (мы знаем, что } x \neq 0)$$

$$x^2 + 1 = -\frac{7}{2}x, \qquad \text{или} \qquad x^2 + \frac{7}{2}x + 1 = 0;$$

корни:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 4}}{2} = \frac{\frac{-7}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}}{2}.$$

Ответ. Уравнение имеет два решения

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{33}}{4}, \qquad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}.$$

60. Как завалить на экзамене. Советы экзаменатору

Посвящается приемной комиссии мехмата МГУ.

Есть много разных приемов. Вот один из них.

1. Возьмем квадратное уравнение — желательно с нецелыми корнями, например,

$$3x^2 + 2x - 10 = 0$$

(корни $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+120}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{124}}{6} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{31}}{3}$).

2. Подставим вместо x какой-нибудь многочлен второй степени, например, $x = y^2 + y - 1$.

$$x^2 = (y^2+y-1)(y^2+y-1) = y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y + 1,$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x - 10 = 3y^4 + 6y^3 - 3y^2 - 6y + 3 &+ \\ +2y^2 + 2y - 2 &- \\ -10 &= \\ = 3y^4 + 6y^3 - y^2 - 4y - 9&. \end{aligned}$$

3. Предложим экзаменуемому решить уравнение

$$3y^4 + 6y^3 - y^2 - 4y - 9 = 0\,.$$

4. Подождем 10–15 мин.

5. Скажем ему, что его время истекло, и поставим двойку.

6. Когда экзаменуемый скажет, что задача сложная или что уравнения четвертой степени не входят в школьную программу, разъясним ему, что он ошибается и что это уравнение легко сводится к квадратному:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & 3y^4 & + & 6y^3 & - & y^2 & - & 4y & - & 9 & = \\ = & 3y^4 & + & 3y^3 & - & 3y^2 & & & & & \\ & & + & 3y^3 & + & 3y^2 & - & 3y & & & \\ & & & & - & y^2 & - & y & + & 1 & \\ & & & & & & & & - & 10 & = \end{array}$$

$$= 3y^2(y^2+y-1) + 3y(y^2+y-1) - (y^2+y-1) - 10 =$$
$$= 3(y^2+y)(y^2+y-1) - (y^2+y-1) - 10.$$

Если теперь $y^2 + y - 1$ обозначить за x, то получим

$$3(x+1)x - x - 10 = 0,$$
$$3x^2 + 3x - x - 10 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{3}$$

и осталось решить два квадратных уравнения

$$y^2 + y - 1 = \frac{-1 + \sqrt{31}}{3} \quad \text{и} \quad y^2 + y - 1 = \frac{-1 - \sqrt{31}}{3}.$$

Вот, дескать, и все!

Другой — не менее эффективный — рецепт таков: возьмите два квадратных уравнения с нецелыми корнями, например,

$$x^2 + x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

и перемножьте их:

$$(x^2 + x - 3)(x^2 + 2x - 1) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Получившееся уравнение ($x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$) можно смело давать абитуриенту. Не забудьте только бумажку с исходными уравнениями, иначе на апелляции Вы попадете в неловкое положение.

61. Корни

Квадратный корень из числа a — это число, квадрат которого равен a. (Поправка педанта: число a должно быть неотрицательно и квадратный корень — тоже.) Аналогично, *кубический корень* из числа $a \geqslant 0$ — это неотрицательное число x, для которого $x^3 = a$. Так же определяются и корни более высоких степеней. Корень n-ой степени из a обозначают $\sqrt[n]{a}$.

Определение. Корнем n-ой степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число x, для которого $x^n = a$. (Мы предполагаем, что n — положительное целое число).

В связи с этим определением могут возникнуть некоторые вопросы.

Вопрос. А что, если таких чисел несколько?

Ответ. Это невозможно. Чем больше положительное число x, тем больше его n-ая степень x^n (если в произведении n положительных сомножителей увеличить все сомножители, то произведение увеличится). Поэтому два разных числа не могут иметь одинаковую n-ую степень.

Вопрос. А может быть, числа x, для которого $x^n = a$, вообще нет?

Ответ. Подобный вопрос уже возникал при обсуждении квадратных корней. Здесь ситуация совершенно аналогична.

Вопрос. Если n четно, то число $-\sqrt[n]{a}$ также в n-ой степени равно a. Почему мы выбрали именно положительное из двух чисел?

Ответ. Так принято.

Вопрос. Если n нечетно, то и при отрицательных a можно найти такое x, что $x^n = a$. Например, $(-2)^3 = -8$. Почему же мы не говорим, что кубический корень из -8 равен -2 ?

Ответ. Можно было бы так и считать, но для простоты мы этот случай исключаем.

Задача 288. Что больше: $\sqrt[10]{2}$ или 1,2 ?

Задача 289. Вычислить $\sqrt[7]{0{,}999}$ с точностью до трех знаков после запятой.

Задача 290. Что больше: $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$?

Задача 291. Что больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[4]{4}$?

Задача 292. Что больше: $\sqrt{\sqrt{2}}$ или $\sqrt[4]{2}$?

Задача 293. Что такое $\sqrt[1]{a}$ по нашему определению?

Ответ. $\sqrt[1]{a} = a$ (для $a \geqslant 0$).

Теперь мы докажем некоторые свойства корней.

Задача 294. Доказать, что

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Решение. Согласно определению, нужно доказать, что

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = ab\,.$$

По правилу

$$(xy)^n = x^n \cdot y^n$$

получаем (положив $x = \sqrt[n]{a}$, $y = \sqrt[n]{b}$)

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab\,.$$

Задача 295. Доказать, что

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

при $a \geqslant 0$, $b > 0$.

Указание. Использовать равенство

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

предыдущую задачу.

Задача 296. Доказать, что

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

при $a > 0$.

Задача 297. Доказать, что

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$$

при a, b, $c \geqslant 0$.

Решение.

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{(ab)c} = \sqrt[n]{ab}\cdot\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Замечание. Аналогичное утверждение верно не только для трех чисел, но и для четырех, пяти и т. д.

Задача 298. Доказать, что

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

при $a \geqslant 0$.

Решение.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\text{ раз}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}_{m\text{ раз}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Здесь использовано утверждение предыдущей задачи.

Задача 299. В решении задачи 298 рассмотрены не все возможности. Восполните пробел.

Решение. Мы предполагали, что $m \geqslant 2$. При $m = 0$ и 1 утверждение задачи почти очевидно. Проверим его для отрицательных m. Пусть, например, $m = -3$. Тогда

$$\sqrt[n]{a^{-3}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^3}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^3} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-3}.$$

Задача 300. Доказать, что

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

для любых положительных целых m и n и для любого неотрицательного a.

Решение. Согласно определению, надо проверить, что

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = a.$$

В самом деле,

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right)^{n} = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Задача 301. Доказать, что

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$$

$(m, n \geqslant 1,\ a \geqslant 0)$.

Задача 302. Доказать, что

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$$

(n — положительное целое, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$).

62. Степень с дробным показателем

Следующее мнемоническое правило может помочь запомнить свойства корней: *эти свойства* (задачи 278–286) *получаются из свойств степеней, если считать, что*

$$\sqrt{a} = a^{1/2}, \qquad \sqrt[3]{a} = a^{1/3}, \qquad \sqrt[4]{a} = a^{1/4}$$

и т. д.

Например, основное свойство корня (его определение)

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

теперь переписывается в виде

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a$$

и становится частным случаем правила

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

при $p = 1/n$, $q = n$.

Свойство

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

теперь запишется в виде

$$\left(a^{1/m}\right)^{1/n} = a^{1/mn}$$

и получается при $p = 1/m$, $q = 1/n$.

Задача 303. Получите с помощью этого приема все указанные в задачах 294–302 свойства корней (используя свойства степеней).

Иметь дело с мнемоническими правилами всегда несколько унизительно, поэтому давайте поднимем его в ранге и будем считать его определением степени с показателем $1/n$ (раньше мы рассматривали степени только с целым показателем).

Определение. При целом $n \geqslant 1$ и $a \geqslant 0$ полагаем

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Сразу же видно, что этого определения мало. Например, хотелось бы написать, что

$$a^{1/3} \cdot a^{1/3} = a^{1/3+1/3} = a^{2/3}$$

(частный случай правила $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ при $m = n = 1/3$). Но мы не знаем, что такое $a^{2/3}$. Чтобы восполнить этот пробел, определим $a^{2/3}$ как $(a^{1/3})^2$ и вообще $a^{m/n}$ как $(a^{1/n})^m$ или, другими словами, как $(\sqrt[n]{a})^m$.

Определение. Для целого m и целого положительного n определим $a^{m/n}$ так:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Внимательный читатель сразу же отметит подвох в этом определении. Например,

$$a^{10/15} \quad \text{определено как} \quad (\sqrt[15]{a})^{10}$$

в то время как

$$a^{2/3} \quad \text{определено как} \quad (\sqrt[3]{a})^2$$

Между тем $10/15 = 2/3$ и тем самым $a^{10/15}$ обязано равняться $a^{2/3}$. Чтобы наше определение было корректным, необходимо, чтобы

$$(\sqrt[15]{a})^{10} = (\sqrt[3]{a})^2.$$

Задача 304. Проверьте это.

Решение.

$$(\sqrt[3\cdot 5]{a})^{2\cdot 5} = \left(\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}\right)^5\right)^2 = (\sqrt[3]{a})^2.$$

Задача 305. Проверьте, что при сокращении общих множителей в дроби m/n значение выражения $a^{m/n}$ согласно нашему определению не меняется.

Указание. См. предыдущую задачу, где в дроби $10/15$ сократился общий множитель 5.

Теперь свойства степеней, которые мы знали для целых показателей, надо проверить для показателей, равных отношению двух целых чисел (рациональных показателей).

Задача 306. Доказать, что

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

для любых дробей p и q.

Решение. Пусть, например, $p = 2/5$, $q = 3/7$ (в общем случае рассуждения аналогичны). Надо проверить, что

$$a^{2/5} \cdot a^{3/7} = a^{2/5+3/7}.$$

Приведем дроби $2/5$ и $3/7$ к общему знаменателю:

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}, \qquad \frac{3}{7} = \frac{15}{35}.$$

Мы уже знаем, что

$$a^{2/5} = a^{14/35}, \qquad a^{3/7} = a^{15/35},$$

поэтому

$$a^{2/5} \cdot a^{3/7} = a^{14/35} \cdot a^{15/35} = \left(\sqrt[35]{a}\right)^{14} \cdot \left(\sqrt[35]{a}\right)^{15} =$$

$$= \left(\sqrt[35]{a}\right)^{14+15} = a^{(14+15)/35} = a^{14/35+15/35} = a^{2/5+3/7}.$$

Задача 307. Доказать, что

$$(ab)^{m/n} = a^{m/n} \cdot b^{m/n}.$$

Задача 308. Доказать, что

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

для любых рациональных показателей p и q.

Решение. Сначала пусть q — целое, а $p = m/n$.

$$(a^p)^q = \left(a^{m/n}\right)^q = ((\sqrt[n]{a})^m)^q = (\sqrt[n]{a})^{mq} = a^{mq/n} = a^{pq}.$$

Пусть теперь $q = 1/k$ при некотором целом k, а $p = m/n$. Тогда

$$(a^p)^q = \left(a^{m/n}\right)^{1/k} = \sqrt[k]{a^{m/n}} = \sqrt[k]{(\sqrt[n]{a})^m}.$$

Обозначив $\sqrt[n]{a}$ через b, продолжим:

$$\ldots = \sqrt[k]{b^m} = \left(\sqrt[k]{b}\right)^m = \left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = (\sqrt[kn]{a})^m =$$

$$= a^{m/kn} = a^{m/n \cdot 1/k} = a^{pq}.$$

Наконец, для произвольного $q = l/k$ имеем

$$(a^p)^q = (a^p)^{l/k} = \left(\sqrt[k]{a^p}\right)^l = \left((a^p)^{1/k}\right)^l = \left(a^{p/k}\right)^l = a^{pl/k} = a^{pq}.$$

Сначала мы воспользовались тем, что

$$(a^p)^{\frac{1}{k}} = a^{p \cdot \frac{1}{k}},$$

и затем использовали, что

$$\left(a^{p/k}\right)^l = a^{p/k \cdot l}.$$

(Эти два частных случая интересующего нас равенства мы разобрали заранее.)

Задача 309. Доказать, что при $a > 1$ значение a^p увеличивается с ростом p, а при $0 < a < 1$ значение a^p уменьшается с ростом p.

Указание. Приведите сравниваемые значения показателя к общему знаменателю. Не забудьте, что p может быть и отрицательным (и в этом случае утверждение задачи остается верным).

Эта задача открывает возможность определения a^x и для чисел x, не являющихся отношениями двух целых. Например, число

$$2^{\sqrt{2}}$$

можно пытаться определить как число, большее всех чисел вида $2^{p/q}$ при $p/q < \sqrt{2}$ и меньшее всех чисел вида $2^{p/q}$ при $p/q > \sqrt{2}$. (То, что такое число существует и единственно, доказывается в курсе математического анализа.)

Задача 310. Как бы Вы определили $\sqrt[1/2]{a}$ или $\sqrt[-1/2]{a}$?

Ответ. Естественно считать, что $\sqrt[1/2]{a} = a^2$, $\sqrt[-1/2]{a} = a^{-2}$.

63. Доказательства числовых неравенств

Все приводимые в этом разделе неравенства можно в принципе было бы доказать, вычислив левую и правую части. Однако это, как правило, не наилучший способ.

Задача 311. Доказать, что

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200} < 1.$$

Решение. Каждый из 100 членов суммы находится между $\frac{1}{200}$ и $\frac{1}{100}$. Если бы все они равнялись $\frac{1}{200}$, то сумма равнялась бы $\frac{1}{2}$; если бы все они равнялись $\frac{1}{100}$, то в сумме они дали бы 1.

Задача 312. Доказать, что

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} < 1.$$

Решение. Левое неравенство получится, если сгруппировать

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{199}-\frac{1}{200}\right)$$

(первая скобка равна $1/2$, а все следующие положительны).

Правое получится, если записать

$$1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{198}-\frac{1}{199}\right)-\frac{1}{200}.$$

Замечание. На самом деле две предыдущие задачи говорят об одном и том же, так как

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}.$$

Задача 313. Убедитесь в этом.

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{1}{101}&+\ldots+\frac{1}{200}=\\ &=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{200}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}\right)=\\ &=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{200}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{200}\right)=\\ &=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}.\end{aligned}$$

Задача 314. Доказать, что $(1{,}01)^{100}\geqslant 2$.

Первое решение.

$$(1{,}01)^{100}=\underbrace{(1+0{,}01)(1+0{,}01)\ldots(1+0{,}01)}_{100\text{ сомножителей}}$$

Что получится, если раскрыть скобки? Один член будет равен 1 (произведение всех единиц). Еще будут члены, которые получатся, если в одной скобке взять 0,01, а во всех остальных — по единице. Таких членов будет 100, а каждый из них равен 0,01. Будут и другие члены (равные $0{,}01^2$, $0{,}01^3$ и т. п.), но уже эти в сумме дают

$$1 + 100 \cdot 0{,}01 = 2.$$

Второе решение.

$$\begin{aligned}
1{,}01^2 &= 1{,}0201 > 1{,}02,\\
1{,}01^3 &= 1{,}01^2 \cdot 1{,}01 > 1{,}02 \cdot 1{,}01 = (1 + 0{,}02)(1 + 0{,}01) =\\
&= 1 + 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}02 \cdot 0{,}01 > 1{,}03,\\
1{,}01^4 &= 1{,}01^3 \cdot 1{,}01 > 1{,}03 \cdot 1{,}01 = (1 + 0{,}03)(1 + 0{,}01) =\\
&= 1 + 0{,}03 + 0{,}01 + 0{,}03 \cdot 0{,}01 > 1{,}04,\\
1{,}01^5 &> 1{,}05,\\
1{,}01^6 &> 1{,}06,\\
&\ldots\\
1{,}01^{99} &> 1{,}99,\\
1{,}01^{100} &> 2.
\end{aligned}$$

Задача 315. Доказать, что

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{100^2} < 2.$$

Решение.

$$\begin{array}{rcccl}
\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2} & < & \frac{1}{1\cdot 2} & = & \frac{1}{1}-\frac{1}{2},\\
\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2} & < & \frac{1}{2\cdot 3} & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{3},\\
\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2} & < & \frac{1}{3\cdot 4} & = & \frac{1}{3}-\frac{1}{4},\\
 & & \cdots & & \\
\frac{1}{100^2} & < & \frac{1}{99\cdot 100} & = & \frac{1}{99}-\frac{1}{100}.
\end{array}$$

Отсюда (складываем все неравенства)

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{100^2}<$$
$$<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right).$$

Пары противоположных членов ($-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$) сокращаются, и остается $1+1-\frac{1}{100}$, что меньше 2.

Задача 316. Что больше: 1000^{2000} или 2000^{1000} ?

Задача 317. Доказать, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1\,000\,000}<20.$$

Доказать, что при некотором n

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>20.$$

Указание. В выражении

$$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

каждая скобка не меньше 1/2 и не больше 1 (см. выше).

64. Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Средним арифметическим чисел a и b называется их полусумма $\frac{a+b}{2}$. Название объясняется тем, что точка $\frac{a+b}{2}$ числовой прямой находится посередине между точками a и b (см. рис. 25).

Задача 318. Проверьте это.

Решение. Пусть, например, $a < b$, т. е. точка a левее точки b.

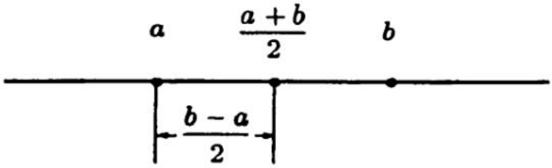


Рис. 25

Расстояние между ними равно $b - a$; прибавив к a половину этого расстояния, получим

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a + b - a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Задача 319. Среднее арифметическое чисел 1 и a равно 7. Чему равно a?

Средним геометрическим неотрицательных чисел a и b называют квадратный корень из их произведения: $\sqrt{ab}$. (Ограничение случаем неотрицательных a и b связано с тем, что при разных знаках a и b произведение ab отрицательно и квадратный корень не извлекается. Если же оба числа отрицательны, то $\sqrt{ab}$ определен, но было бы странно называть положительное число $\sqrt{ab}$ средним между отрицательными числами a и b.)

Задача 320. Среднее геометрическое чисел 1 и a равно 7. Чему равно a?

Задача 321. 1. Чему равна сторона квадрата, периметр которого равен периметру прямоугольника со сторонами a, и b? 2. Чему равна сторона квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами a, b?

Задача 322. Бывают арифметические и геометрические прогрессии, а также арифметическое и геометрическое средние. Случайно ли совпадение терминов?

Решение. Три числа

a, [среднее арифметическое a и b], b

составляют арифметическую прогрессию, а три числа

a, [среднее геометрическое a и b], b

составляют геометрическую прогрессию.

Еще один способ определить среднее арифметическое и геометрическое: среднее арифметическое на столько же больше a, насколько меньше b; среднее геометрическое во столько же раз больше a, во сколько раз меньше b.

65. Среднее геометрическое не больше среднего арифметического

Задача 323. Для неотрицательных чисел a и b

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}\,.$$

Решение. Чтобы сравнить неотрицательные числа $\sqrt{ab}$ и $\dfrac{a+b}{2}$, сравним их квадраты и докажем, что

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Другими словами, надо проверить, что $4ab \leqslant (a+b)^2$, или

$$4ab \leqslant a^2 + 2ab + b^2,$$
$$0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2.$$

В правой части последнего неравенства читатель легко узнает квадрат разности $(a-b)^2$, что и завершает доказательство (квадрат всегда неотрицателен).

Задача 324. В каких случаях среднее арифметическое равно среднему геометрическому?

Решение. Как видно из решения предыдущей задачи, среднее арифметическое чисел a и b равно их среднему геометрическому в том и только том случае, если $(a-b)^2 = 0$, т.е. $a = b$.

66. Задачи на максимум и минимум

Задача 325. 1. Каково максимально возможное значение произведения двух неотрицательных чисел, сумма которых равна c? 2. Каково минимально возможное его значение?

Решение. 1. Среднее арифметическое их равно $c/2$, так что их среднее геометрическое не превосходит $c/2$, а его квадрат (т.е. произведение чисел) не превосходит $c^2/4$ — это максимально возможное значение достигается, когда числа равны.

2. Минимально возможное значение равно 0. Так будет, если одно из чисел равно 0, а другое равно c.

Задача 326. Каковы максимально и минимально возможные значения суммы двух неотрицательных чисел, произведение которых равно $c > 0$?

Решение. Среднее геометрическое этих чисел равно $\sqrt{c}$, поэтому их полусумма не меньше $\sqrt{c}$, а сумма не меньше $2\sqrt{c}$. (Это значение достигается, если числа равны.) Максимального значения не существует — сумма может быть сколь угодно велика, если одно число близко к нулю, а другое велико.

Замечание. Как Вы помните, мы уже встречали две последние задачи, когда говорили о минимальном и максимальном значениях квадратичного многочлена.

Задача 327. Какова максимальная площадь прямоугольного участка, если длина забора 120 м?

Задача 328. Какова максимальная площадь прямоугольного участка пляжа, изображенного на рис. 26, если длина забора 120 м? (От моря пляж не отгорожен!)

Решение. Мысленно возведем симметричный забор в море (см. рис. 27). Периметр полученного прямоугольника будет 240, а площадь его будет максимальной, когда это квадрат со стороной 60, и равна 3600^2. Реальная площадь на берегу вдвое меньше и равна 1800^2, когда забор состоит из кусков длиной 30, 60 и 30.

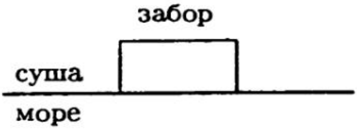


Рис. 26

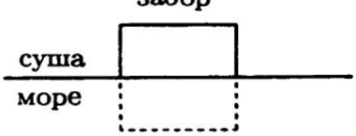


Рис. 27

Задача 329. Каково максимально возможное значение произведения ab, если a и b — неотрицательные числа, для которых $a + 2b = 3$?

Решение. Произведение чисел a и b максимально, когда максимально произведение чисел a и $2b$ — а оно максимально, когда эти числа равны, т.е. $a = 2b = 3/2$. Итак, максимальное значение произведения ab равно

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} .$$

67. Геометрические иллюстрации

Некоторые из доказанных неравенств можно пояснить рисунками.

1. Неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

перепишем в виде

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b$$

и, возведя в квадрат, получим

$$4ab \leqslant (a+b)^2.$$

Это подтверждается тем, что четыре прямоугольника $a \times b$ можно поместить в квадрат со стороной $a + b$ и при этом еще останется свободное место в середине, если $a \neq b$ (см. рис. 28).

Задача 330. Сколько останется места? Сравните результат с алгебраическим доказательством неравенства о средних.

2. Проведем биссектрису прямого угла и построим два равнобедренных прямоугольника треугольника с катетами a и b (см. рис. 29). Их площади равны $a^2/2$ и $b^2/2$. Вместе эти

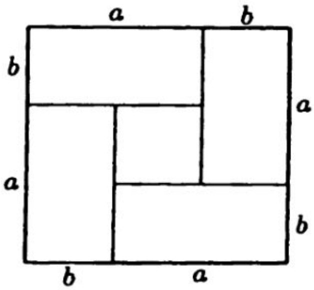


Рис. 28

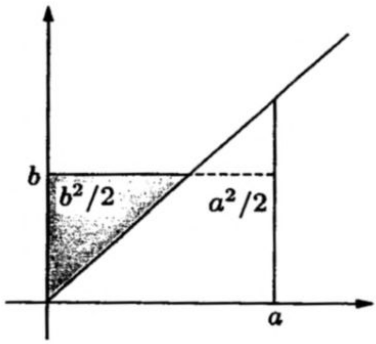


Рис. 29

треугольники покрывают прямоугольник $a \times b$, поэтому

$$ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Чтобы увидеть в этом неравенстве неравенство о средних, подставим $\sqrt{c}$ и $\sqrt{d}$ вместо a и b:

$$\sqrt{c} \cdot \sqrt{d} \leqslant \frac{c + d}{2}.$$

Замечание. Вместо биссектрисы можно было бы провести другие линии (см. рис. 30) и доказать другие неравенства — надо только уметь вычислять площади «криволинейных треугольников». Например, для кривой $y = x^2$ получаем (как подтвердят знатоки математического анализа) «треугольники» площадей $a^3/3$ и $\frac{3}{2}b\sqrt{b}$, и неравенство

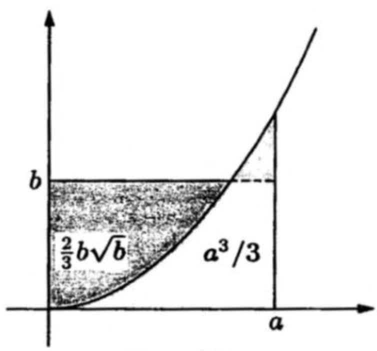


Рис. 30

$$ab \leqslant \frac{a^3}{3} + \frac{2}{3}b\sqrt{b},$$

которое выполняется для любых неотрицательных a и b.

68. Средние многих чисел

Среднее арифметическое трех чисел a, b, c определяется как $\dfrac{a+b+c}{3}$; среднее геометрическое — как $\sqrt[3]{abc}$ (мы вновь предполагаем, что $a, b, c \geqslant 0$). Аналогичные определения даются и для любого количества чисел: среднее арифметическое n чисел $a_1, \ldots, a_n$ определяется как

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n};$$

среднее геометрическое неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$ — как

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}.$$

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом верно для любого количества чисел:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Как и в разобранном ранее случае двух чисел, равенство возможно, только если все числа равны.

Прежде чем доказывать неравенство, извлечем некоторые следствия.

Задача 331. Используя неравенство, доказать, что если $a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа, для которых

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant n,$$

то

$$a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \leqslant 1.$$

Решение.

$$a_1 + \ldots + a_n \leqslant n \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \leqslant 1.$$

В двух следующих задачах также предполагается использовать неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом (без доказательства).

Задача 332. Доказать, что произведение n неотрицательных чисел с заданной суммой максимально, когда эти числа равны.

Задача 333. Доказать, что сумма n неотрицательных чисел с заданным произведением минимальна, когда эти числа равны.

Существуют разные доказательства неравенства о средних арифметическом и геометрическом, но наиболее естественное использует математический анализ (понятие производной). Мы обойдемся без него — но поневоле это будет выглядеть как трюк.

Задача 334. Доказать неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для $n = 4$.

Решение. Нам даны 4 неотрицательных числа a, b, c, d. Будем менять их, сохраняя неизменной их сумму (и, следовательно, среднее арифметическое). При этом их произведение будет меняться — и мы будем следить за тем, как именно. Наше доказательство проходит в несколько этапов.

1. Заменим a и b на два числа, каждое из которых равно $\frac{a+b}{2}$:

$$a,\ b,\ c,\ d \quad\Rightarrow\quad \frac{a+b}{2},\ \frac{a+b}{2},\ c,\ d.$$

Сумма не изменится. Произведение возрастет (или останется прежним, если $a = b$): сомножители c и d не меняются, а произведение двух чисел с заданной суммой $(a+b)$ максимально, когда числа равны.

2. То же самое сделаем с c и d:

$$\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}.$$

Сумма не изменится, произведение снова увеличится (или останется прежним, если $c = d$).

3. Мы выравняли числа в первой паре и во второй паре, теперь будем выравнивать между парами:

$$\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b+c+d}{4}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c+d}{4}, \frac{c+d}{2}.$$

4. Теперь осталось выравнять второе и четвертое числа:

$$\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c+d}{4}, \frac{c+d}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b+c+d}{4}, \frac{a+b+c+d}{4}, \frac{a+b+c+d}{4}, \frac{a+b+c+d}{4}.$$

В конечном итоге мы заменили числа

$$a, b, c, d$$

на числа

$$S, S, S, S,$$

где $S = (a+b+c+d)/4$ — среднее арифметическое, и их произведение возросло (или осталось прежним)

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \leqslant S \cdot S \cdot S \cdot S$$

или

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant S.$$

Что и требовалось.

З а д а ч а 335. Доказать, что неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для четырех чисел превращается в равенство, только если все числа равны.

У к а з а н и е. Из решения предыдущей задачи видно, что равенство возможно лишь, если на всех стадиях описанного там процесса наши числа фактически не изменялись.

З а д а ч а 336. Как доказать неравенство о среднем арифметическом и геометрическом для $n = 8$?

Р е ш е н и е. Точно так же: сначала выравниваем числа в четырех парах, затем между парами — и получается две четверки, затем выравниваем все восемь.

З а д а ч а 337. Доказать неравенство о среднем арифметическом и геометрическом для $n = 3$.

Р е ш е н и е. Из трех чисел a, b, c сделаем четыре, добавив среднее геометрическое: получатся числа

$$a,\ b,\ c,\ \sqrt[3]{abc},$$

к которым применим неравенство для четырех чисел:

$$\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} \leqslant \frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4}.$$

Корень, стоящий в левой части неравенства, представляет собой не что иное, как $\sqrt[3]{abc}$. Чтобы убедиться в этом, возведем оба (неотрицательных) числа $\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}$ и $\sqrt[3]{abc}$ в четвертую степень: получим одно и то же:

$$\left(\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}\right)^4 = abc\sqrt[3]{abc}$$

и

$$\left(\sqrt[3]{abc}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{abc}\right)^3 \sqrt[3]{abc} = abc\sqrt[3]{abc}.$$

Итак,

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4},$$

$$4\sqrt[3]{abc} \leqslant a+b+c+\sqrt[3]{abc},$$

$$3\sqrt[3]{abc} \leqslant a+b+c,$$

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 338. Используя неравенство о средних для $n=8$, доказать его для $n=7$.

Задача 339. Доказать неравенство о средних для $n=6$.

Указание. Воспользоваться предыдущими задачами.

Задача 340. Доказать неравенство о средних для всех целых $n \geqslant 2$.

Указание. Сначала доказываем для $n = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$, а затем спускаемся вниз.

Задача 341. Доказать, что неравенство между арифметическим и геометрическим средними обращается в равенство, только если все числа равны.

Неравенство о среднем арифметическом и геометрическом можно доказывать и по-другому.

Заметим прежде всего, что если все числа $a_1, \ldots, a_n$ увеличить в одно и то же число раз — например, в три раза — то и среднее арифметическое, и среднее геометрическое увеличатся в то же самое число раз. При этом их соотношение сохранится. Поэтому, желая доказать неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, можно изменить все числа во столько раз, чтобы среднее арифметическое стало равно 1. Тем самым достаточно доказать:

$$a_1, \ldots, a_n \geqslant 0, \quad a_1 + \ldots + a_n = n \quad \Rightarrow \quad a_1 \ldots a_n \leqslant 1.$$

Будем доказывать это для различных значений n.

1. Для $n = 2$ мы это уже знаем: если сумма двух чисел равна 2, то их можно записать как $1 + h$ и $1 - h$ и их произведение равно $(1 + h)(1 - h) = 1 - h^2 \leqslant 1$.

2. Докажем это для $n = 3$. Пусть сумма трех положительных чисел a, b, c равна 3. Если не все они равны 1, то среди них есть как числа, большие 1, так и числа, меньшие 1. Пусть например, $a < 1$, $b > 1$. Тогда $a - 1 < 0$, $b - 1 > 0$ и произведение

$$(a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1$$

будет отрицательным, т. е.

$$ab + 1 < a + b.$$

Так как

$$(a + b) + c = 3,$$

то

$$ab + 1 + c < (a + b) + c = 3$$

или

$$ab + c < 2.$$

Глядите-ка: мы имеем два числа ab и c, их сумма меньше 2, а доказать надо, что их произведение не больше 1. А для двух чисел мы это уже знаем.

Внимательный читатель остановит нас: для двух чисел мы доказали, что если сумма равна 2, то произведение не больше 1. А здесь сумма *меньше* 2. Но эта разница несущественна: увеличим одно из чисел, сделав сумму равной 2 — от этого произведение только возрастет.

3. Пусть теперь $n = 4$: мы должны доказать, что

$$a,\ b,\ c,\ d \geqslant 0, \quad a + b + c + d = 4 \quad \Rightarrow \quad abcd \leqslant 1.$$

Опять же одно из чисел (например, a) должно быть меньше 1, а другое (например, b) должно быть больше 1. Тогда

$$ab + 1 < a + b, \quad (a + b) + c + d = 4,$$

поэтому

$$ab + 1 + c + d < 4, \quad ab + c + d < 3.$$

И вновь осталось доказать, что если сумма трех (неотрицательных) чисел меньше 3, то их произведение не больше 1 — мы свели дело к доказанному ранее. И так далее.

Следующее доказательство неравенства о среднем арифметическом и геометрическом для трех чисел является, вероятно, самым коротким — но и самым загадочным.

Из тождества

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}\,(a + b + c)\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2\right),$$

которое легко проверить, раскрыв скобки, следует, что при неотрицательных a, b, c его левая часть неотрицательна, то есть

$$abc \leqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$

Остается подставить вместо a, b и c кубические корни $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{r}$:

$$\sqrt[3]{pqr} \leqslant \frac{p + q + r}{3}.$$

А вот еще одно обоснование неравенства о среднем арифметическом и геометрическом.

Нам нужно доказать, что произведение n неотрицательных чисел с заданной суммой максимально, когда числа равны. Пусть это не так и числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которых произведение максимально, не все равны между собой. Предположим, для примера, что $a_1 \neq a_2$. Будем менять a_1 и a_2, оставляя $a_3, \ldots, a_n$ неизменными, причем так, чтобы сумма $a_1 + a_2$ оставалась постоянной. Произведение $a_1 a_2$, а с ним и произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$ будет меняться. Сделав a_1 и a_2 равными, мы увеличим их произведение, поскольку произведение двух неотрицательных чисел с постоянной суммой максимально, когда числа равны. Тем самым увеличится и произведение $a_1 \ldots a_n$ — значит, оно не было максимально возможным!

Задача 342. Найти недостаток в этом рассуждении.

Ответ. Мы доказали, что максимум произведения $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ (при постоянной сумме) не может достигаться, если числа $a_1, \ldots, a_n$ не равны. Но не доказали, что этот максимум вообще достигается. На самом деле этот факт следует из общих теорем математического анализа, так что пробел может быть восполнен. Кроме того, можно усложнить наше рассуждение, сближая a_1 и a_2 не до полного совпадения, а до тех пор, пока одно из них не станет равным среднему арифметическому чисел $a_1, \ldots, a_n$. Тогда в конце концов все числа станут равными среднему арифметическому.

Задача 343. Числа $a_1, \ldots, a_n$ положительны; доказать, что
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

Задача 344. Доказать, что
$$\sqrt[3]{ab^2} \leqslant \frac{a + 2b}{3}$$
при любых $a, b \geqslant 0$.

Задача 345. Каково минимальное значение $a+b$, если $ab^2 = 1$ и $a,\ b \geqslant 0$.

Задача 346. Доказать неравенство

$$\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt{c} \leqslant \frac{a+2b+3c}{6}$$

для любых неотрицательных a, b и c.

Задача 347. Доказать неравенство

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+2b+3c}{3\sqrt[3]{6}}.$$

Задача 348. Доказать, что

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} < \left(1+\frac{1}{11}\right)^{11}.$$

Решение. Число $\left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10}$ можно представить как произведение 11 сомножителей, из которых один равен 1, а все остальные равны $\left(1+\dfrac{1}{10}\right)$. Сравнивая это произведение с $\left(1+\dfrac{1}{11}\right)^{11}$, видим, что сумма сомножителей осталась неизменной, а все они стали равными. Следовательно, произведение выросло.

Задача 349. Доказать, что

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{11} > \left(1+\frac{1}{11}\right)^{12}.$$

Указание. Правую часть можно представить в виде произведения 11 сомножителей, один из которых равен

$$\left(1+\frac{1}{11}\right)^2=\left(1+\frac{2}{11}+\frac{1}{11^2}\right),$$

а остальные равны $\left(1+\frac{1}{11}\right)$. Левая часть есть произведение 11 одинаковых сомножителей. Достаточно убедиться, что сумма сомножителей левой части больше суммы сомножителей правой части и воспользоваться неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Задача 350. Расположите 4 числа из двух предыдущих задач в порядке возрастания.

69. Среднее квадратическое

Средним квадратическим двух неотрицательных чисел a, b называется неотрицательное число, квадрат которого есть среднее арифметическое квадратов чисел a и b, т.е. число

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Задача 351. В определении речь идет о среднем арифметическом. Что получится, если заменить его на среднее геометрическое?

Задача 352. Доказать, что среднее квадратическое двух чисел $a, b \geqslant 0$ больше или равно их среднего арифметического:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

(Например, среднее квадратическое чисел 0 и a равно $a/\sqrt{2}$, а среднее арифметическое равно $a/2$.)

Решение. Сравним квадраты и докажем, что

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Умножим на 4 и раскроем скобки

$$2(a^2+b^2) \geqslant a^2+b^2+2ab,$$

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab, \qquad a^2+b^2-2ab \geqslant 0.$$

Снова левая часть есть квадрат $(a-b)^2$ и, следовательно, неотрицательна.

Задача 353. При каких a и b среднее квадратическое равно среднему арифметическому?

Задача 354. Доказать, что среднее геометрическое не превосходит среднего квадратического.

Геометрическая иллюстрация представлена на рис. 31. Нарисуем график $y = x^2$. Соединим точки с координатами $\langle a, a^2\rangle$ и $\langle b, b^2\rangle$, лежащие на нем, отрезком. Середина этого отрезка будет иметь координаты, являющиеся средними арифметическими координат концов, т. е.

$$\left\langle \frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2} \right\rangle.$$

Под ней на графике лежит точка

$$\left\langle \frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right\rangle,$$

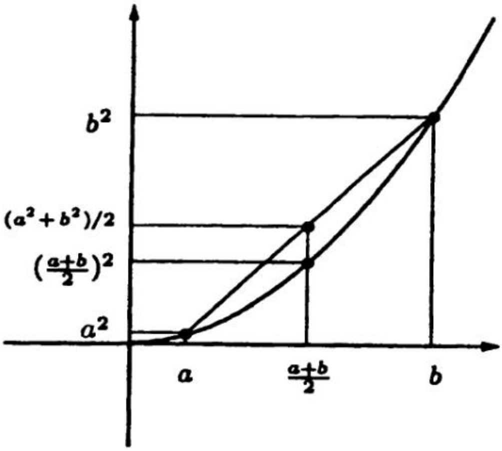


Рис. 31

так что

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Таким образом, неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом означает, что что график $y = x^2$ выпукл вниз (кривая лежит ниже «хорды»).

Задача 355. Поменяв местами оси x и y, из графика $y=x^2$ мы получим график функции $y = \sqrt{x}$, который находится выше любой своей хорды (см. рис. 32). Какому неравенству это соответствует?

Ответ.

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}.$$

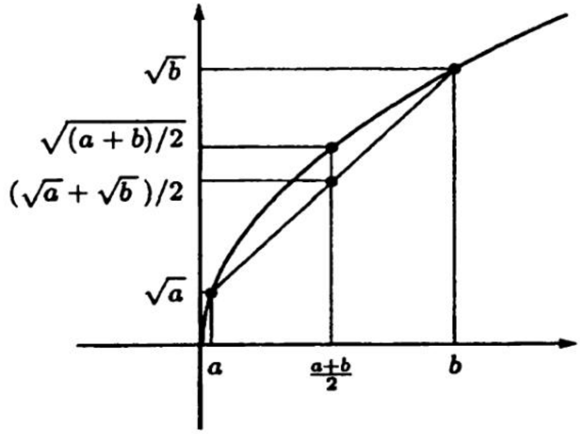
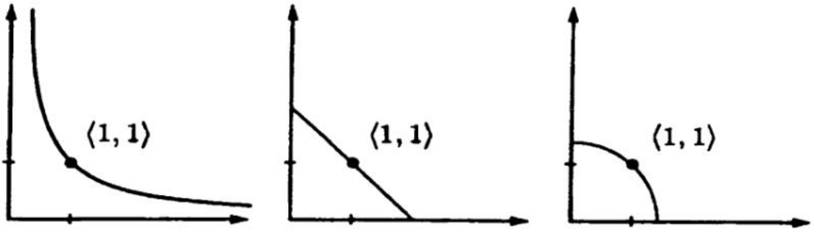


Рис. 32

Мы знаем теперь, что для любых неотрицательных a и b

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Для каждого из этих трех видов среднего нарисуем точки $\langle a, b\rangle$, для которых среднее не превосходит 1 (см. рис. 33 а–в).



а) б) в)

Рис. 33

Совместив их на одном рисунке (рис. 34), видим, что чем больше среднее, тем меньше соответствующая область.

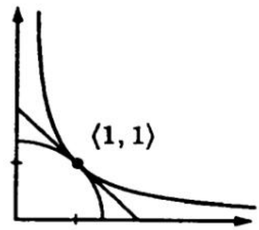


Рис. 34

Задача 356. Доказать неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом для трех чисел:

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Задача 357. (а) Сумма двух положительных чисел равна 2. Каково минимальное значение суммы их квадратов?

(б) Тот же вопрос для суммы квадратов трех положительных чисел, сумма которых равна 3.

70. Среднее гармоническое

Средним гармоническим положительных чисел a, b называется число, обратное к которому является средним арифметическим между $1/a$ и $1/b$, т.е. число

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Big/2}.$$

Задача 358. Доказать, что среднее гармоническое не превосходит среднего геометрического.

Решение. Обратная к среднему гармоническому величина есть среднее арифметическое чисел $1/a$ и $1/b$; обратная к среднему геометрическому величина есть среднее геометрическое чисел $1/a$ и $1/b$ — так что остается сослаться на неравенство о среднем арифметическом и геометрическом.

Задача 359. Числа $a_1 \dots a_n$ положительны. Доказать, что

$$(a_1 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Решение. Искомое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)/n},$$

т.е. надо доказать, что среднее арифметическое n чисел больше или равно их среднего гармонического. Это становится ясным, если вставить между ними среднее геометрическое:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \dots \frac{1}{a_n}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)/n};$$

последнее неравенство сводится к неравенству о среднем арифметическом и геометрическом чисел $1/a_1, \dots 1/a_n$.

Другое решение использует следующий трюк. Будем доказывать более общее неравенство (называемое неравенством Коши—Буняковского)

$$(p_1 q_1 + \dots + p_n q_n)^2 \leqslant (p_1^2 + \dots + p_n^2) \cdot (q_1^2 + \dots + q_n^2)$$

(если подставить в него $p_i = \sqrt{a_i}$, $q_i = \dfrac{1}{\sqrt{a_i}}$, получим требуемое).

Чтобы доказать неравенство Коши—Буняковского, рассмотрим квадратичный трехчлен

$$(p_1 + q_1x)^2 + (p_2 + q_2x)^2 + \ldots + (p_n + q_nx)^2.$$

Раскрыв в нем скобки и сгруппировав члены по степеням x, получим трехчлен

$$Ax^2 + Bx + C,$$

где

$$\begin{aligned} A &= q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2, \\ B &= 2\,(p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n), \\ C &= p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2. \end{aligned}$$

При любых x этот трехчлен неотрицателен — ведь он есть сумма квадратов. Значит, его дискриминант $B^2 - 4AC$ не больше нуля, т. е.

$$B^2 \leqslant 4AC, \qquad \left(\frac{B}{2}\right)^2 \leqslant AC,$$

и

$$(p_1q_1 + \ldots + p_nq_n)^2 \leqslant (p_1^2 + \ldots + p_n^2) \cdot (q_1^2 + \ldots + q_n^2).$$

Как Вам понравился этот трюк?

71. Книги для дальнейшего чтения

Для тех, кому понравилось решать задачи из этой книжки, и кто хочет продолжить знакомство с алгеброй, мы приводим список книг для дальнейшего чтения. К сожалению, математические книги сейчас стали большой редкостью, так что найти их может быть совсем не просто.

Книги, рассчитанные на школьников без специальной подготовки:

Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов, 2-е изд. М.: Просвещение, 1967.

Г. Радемахер, О. Теплиц. Числа и фигуры. М.: Физматгиз, 1962.

Более трудные книги для школьников:

В. Б. Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Наука, 1976.

М. М. Постников. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. М.: Наука, 1978.

Университетские учебники (для студентов младших курсов):

Б. Л. ван дер Варден. Алгебра. М.: Наука, 1976.

И. М. Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. М.: Наука, 1994.