Э. Г. Готман

Стереометрические задачи и методы их решения

Москва
Издательство МЦНМО, 2006

УДК 514.113
ББК 22.151.0
Г73

Готман Э. Г.

Г73 Стереометрические задачи и методы их решения. — М.: МЦНМО, 2006. — 160 с.: ил.

ISBN 5-94057-263-4

Книга содержит задачи по стереометрии, предназначенные для дополнительного образования учащихся старших классов. Она может также служить пособием для подготовки к математическим олимпиадам и к вступительным экзаменам по математике в высшие учебные заведения.

ББК 22.151.0

Эдгар Готлибович Готман

СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Редактор Семенов А. В.

Подписано в печать 20.09.2006 г. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 10. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-263-4

Оглавление

Предисловие

Задачи по стереометрии — прекрасные упражнения, способствующие развитию пространственных представлений, умения логически мыслить, способствующие более глубокому усвоению всего школьного курса математики.

Решение стереометрической задачи чаще всего сводится к решению планиметрических задач. Поэтому, решая задачи по стереометрии, всё время приходится возвращаться к планиметрии, повторять теоремы, вспоминать формулы, необходимые для решения. При решении стереометрических задач ещё в большей мере, чем в планиметрии, используются средства алгебры и тригонометрии, применяются векторный и координатный методы, дифференцирование и интегрирование. Таким образом, стереометрические задачи способствуют творческому овладению всей совокупностью математических знаний.

Настоящее пособие является продолжением книги автора «Задачи по планиметрии и методы их решения» (М.: Просвещение, 1996). Тем не менее, пользоваться настоящим пособием можно и тем, кто не знаком с книгой по планиметрии, здесь нет ссылок на ту книгу. По своей структуре книга «Задачи по стереометрии» несколько отличается от предыдущей. Классификация задач в основном проводится не по методам решения, а по содержанию, по характеру геометрических фигур. Книга предназначена главным образом для учащихся старших классов, желающих углубить свои знания по математике, и может служить пособием для подготовки к математическим олимпиадам и к вступительным экзаменам по математике в высшие учебные заведения. Книга будет полезна также учителям математики, руководителям математических кружков, студентам педагогических институтов.

Данное пособие содержит много довольно простых задач, по трудности мало отличающихся от задач, помещённых в школьных учебниках. Особое внимание уделено классификации задач. Для решения предлагаются не разрозненные задачи, а серии задач, связанных между собой по содержанию и методам решения. Задачи расположены в порядке возрастания трудности, так что решение первых более простых задач помогает находить решения следующих за ними.

В начале каждой главы рассказано о методах решения, приводятся решения типичных задач, даны необходимые теоретические сведения.

Главы 1 и 2 содержат задачи о многогранниках и телах вращения. В главах 3 и 4 собраны задачи, для решения которых целесообразно пользоваться векторным и координатным методами. Глава 5 посвящена геометрии тетраэдра. При решении задач этой главы рекомендуется использовать, где это возможно, аналогию между треугольником и тетраэдром. Глава 6 содержит разнообразные задачи на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин. При этом особо выделены задачи, решаемые элементарными средствами, без применения производной. В последнюю главу 7 включены задачи на комбинацию многогранников и тел вращения. Среди них много задач повышенной трудности.

Ко всем задачам на вычисление даны ответы. Большинство трудных задач снабжено указаниями или краткими решениями.

Глава 1

Многогранники

В курсе стереометрии особую роль играет чертёж. Если в планиметрии всегда есть возможность выполнить точный чертёж, то в стереометрии изображение на плоскости не может быть точной копией оригинала — пространственной фигуры. Тем не менее, следует стараться чертёж выполнить так, чтобы по нему можно было получить ясное представление об оригинале.

Существуют различные способы изображения пространственных фигур на плоскости. В школьной практике пользуются методом параллельного проецирования.

При изображении многогранников часто удобно пользоваться кабинетной проекцией, известной из курса черчения.

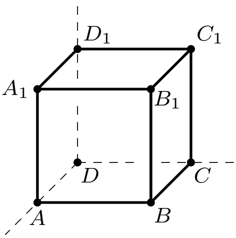

Рис. 1

На рис. 1 в кабинетной проекции изображён куб. Изображениями двух граней, параллельных плоскости чертежа, являются квадраты. Каждая из остальных граней куба изображается в виде параллелограмма с острым углом $45°$, у которого одна сторона совпадает со стороной квадрата, а смежная с ней вдвое короче.

На рис. 2 дано изображение правильной треугольной пирамиды $NABC$. Плоскость AKN, где NK — апофема пирамиды, параллельна плоскости чертежа, поэтому отрезки AN и KN, как и угол NAK наклона бокового ребра к плоскости основания, изображаются без искажений.

В кабинетной проекции удобно изображать прямоугольный параллелепипед, прямую призму, правильную пирамиду и другие простейшие многогранники.

Конечно, чертёж может быть выполнен в произвольной параллельной проекции. Важно лишь, чтобы чертёж был верным, наглядным и не слишком трудным для выполнения.

В данном пособии стереометрические задачи на построение, задачи на проекционном чертеже, приёмы и методы решения которых подробно описаны в учебной литературе, специально не рассматриваются. Однако имеется ряд комбинированных задач на построение сечений с последующими вычислениями.

В главу 1 включены в основном задачи на доказательство и вычисление.

Для решения задач на доказательство чаще всего применяется геометрический метод, используются теоремы планиметрии и стереометрии, доказываемое утверждение устанавливается с помощью логических рассуждений. При этом часто приходится выполнять различные дополнительные построения.

В некоторых случаях кроме изображения пространственной фигуры полезно сделать плоский чертёж, представляющий собой какое-либо сечение данного тела, развёртку его поверхности или проекцию на некоторую плоскость.

Основным методом решения стереометрических задач на вычисление является алгебраический. Используются как алгебраические, так и тригонометрические тождества и уравнения.

Необходимо обращать внимание на начальную стадию решения каждой задачи — анализ, когда намечается ход решения, причём нередко правильный путь находится не сразу, а после ряда неудачных попыток. Выполнив чертёж, следует внимательно изучить связи между данными и неизвестными элементами фигуры и попытаться связать их цепочкой промежуточных величин.

Рассмотрим конкретные примеры.

П р и м е р 1. Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне её основания, длина которой a. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противоположному ребру.

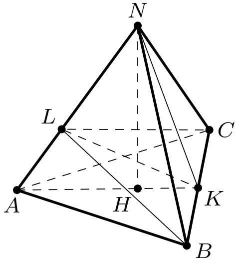

Рис. 2

Р е ш е н и е. Пусть NH — высота данной пирамиды $NABC$ и BCL — сечение плоскостью, перпендикулярной ребру AN (рис. 2). Поскольку пирамида правильная, то H — центр правильного треугольника ABC. Треугольник BCL — равнобедренный. Чтобы найти его высоту KL, достаточно последовательно вычислить длины отрезков AK, AH и AN.

Треугольник ABC — правильный и $AB = a$, и мы легко находим:

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad AH = \frac{2}{3}AK = \frac{\sqrt{3}}{3}a \quad \text{(радиус описанной окружности)}.$$

По теореме Пифагора из треугольника AHN получаем:

$$AN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}a.$$

Далее, выразив двумя способами площадь треугольника AKN, получим:

$$KL = \frac{AK \cdot NH}{AN}.$$

Подставив найденные значения, найдём: $KL = \frac{3}{4}a$. Следовательно, площадь треугольника BCL равна

$$S = \frac{3}{8}a^2.$$

При решении данной задачи мы использовали метод, который называют поэтапно-вычислительным или методом прямого счёта. Он является разновидностью алгебраического метода. При поэтапном решении последовательно вычисляются промежуточные величины, с помощью которых искомые величины связываются с данными.

После того, как задача решена, следует убедиться в правильности решения и попытаться найти более короткий путь, ведущий к решению задачи.

Просматривая предложенное решение, можно заметить, что высоту KL треугольника BCL можно вычислить по-другому. Отрезок KL является катетом прямоугольного треугольника AKL, гипотенуза его $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, угол α наклона бокового ребра AN к плоскости основания можно найти. Таким образом, приходим к такому решению задачи.

Из треугольника AHN находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{NH}{AH}$, а так как $NH = a$ и $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\alpha = 60^\circ$. Из треугольника AKL имеем:

$$KL = AK \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a.$$

Следовательно,

$$S = \frac{3}{8}a^2.$$

Это решение можно ещё немного упростить, если заметить, что треугольник BCL есть ортогональная проекция треугольника ABC на плоскость BCL, и поэтому

$$S = S_{ABC} \cdot \cos\beta,$$

где $\beta = \angle AKL$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BCL и ABC.

Так как $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $\beta = 30^\circ$, то

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cos 30^\circ = \frac{3}{8}a^2.$$

Решая задачу вторым способом, мы узнали свойство правильной треугольной пирамиды: если её высота равна стороне основания, то боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $\alpha = 60^\circ$.

При решении задачи третьим способом мы использовали теорему о площади ортогональной проекции многоугольника на плоскость

$$S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi,$$

где S — площадь данного многоугольника, $S_{\text{пр}}$ — площадь его проекции на плоскость, φ — угол между плоскостью данного многоугольника и плоскостью его проекции.

Доказательство этой теоремы можно найти в учебных пособиях по геометрии. Формула находит применение при решении некоторых задач на вычисление площадей поверхностей пирамид и площадей сечений многогранников (см. пример 6).

Теперь рассмотрим задачу, похожую на предыдущую.

Пример 2. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположному боковому ребру. Сторона основания равна a, секущая плоскость делит боковое ребро в отношении $3:2$, считая от вершины пирамиды. Найти боковое ребро и площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Воспользуемся рис. 2 и уже введёнными обозначениями. Из треугольника ABN длину бокового ребра AN прямым счётом найти не удаётся, но можно применить метод составления уравнений, хорошо известный из курса алгебры.

Обозначим $AL = 2x$, $LN = 3x$. Тогда $AN = BN = 5x$.

Боковое ребро AN перпендикулярно плоскости BCL, поэтому оно перпендикулярно прямой BL, значит, треугольники ABL и BLN — прямоугольные. Выразим двумя способами их общий катет BL, пользуясь теоремой Пифагора:

$$BL^2 = a^2 - 4x^2 \quad \text{и} \quad BL^2 = 25x^2 - 9x^2.$$

Получим уравнение:

$$16x^2 = a^2 - 4x^2,$$

откуда $20x^2 = a^2$, $x = \dfrac{\sqrt{5}}{10}a$, а так как $AN = 5x$, то $AN = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

Все другие элементы пирамиды теперь можно найти прямым счётом.

Из треугольника BKN, согласно теореме Пифагора, имеем:

$$KN = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a.$$

Следовательно,

$$S_{\text{бок}} = \frac{3}{2}a^2.$$

Решение стереометрической задачи иногда упрощается, если составить не алгебраическое, а тригонометрическое уравнение. Рассмотрим пример.

П р и м е р 3. Основанием пирамиды служит ромб, две боковые грани которого перпендикулярны плоскости основания. Под каким углом наклонены к плоскости основания две другие грани, если площадь боковой поверхности пирамиды вдвое больше площади его основания?

Р е ш е н и е. Пусть $NABCD$ — данная пирамида, грани ADN и CDN которой перпендикулярны плоскости основания (рис. 3). Поскольку

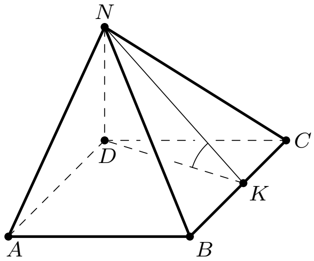

Рис. 3

$ABCD$ — ромб и $AD = CD$, то прямоугольные треугольники ADN и CDN равны, значит, $AN = CN$. Треугольники ABN и BCN также равны (три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого). Проведём $DK \perp BC$, тогда $NK \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах. Следовательно, DKN — линейный угол двугранного угла при ребре BC.

Для нахождения угла DKN составим уравнение. Пусть $\angle DKN = x$. Введём ещё два вспомогательных параметра: $AB = a$ и $DK = h$. Из треугольника DKN имеем:

$$DN = h \cdot \operatorname{tg} x, \qquad KN = \frac{h}{\cos x}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды равна $S_{\text{бок}} = 2S_{ADN} + 2S_{BCN}$, или

$$S_{\text{бок}} = AD \cdot DN + BC \cdot KN.$$

Подставив в это равенство значения AD, DN и KN, получим:

$$S_{\text{бок}} = ah\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right).$$

Согласно условию задачи $S_{\text{бок}} = 2S_{\text{осн}}$, но $S_{\text{осн}} = ah$, следовательно,

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = 2.$$

Полученное уравнение, где $0^\circ < x < 90^\circ$ и $\operatorname{tg} x < 2$, можно решить разными способами. Запишем его в виде:

$$2 - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат и воспользуемся формулой $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Получим

$$4 \operatorname{tg} x = 3.$$

Итак, $\angle DKN = \operatorname{arctg} \dfrac{3}{4}$.

Замечаем интересное свойство данной пирамиды: угол наклона не зависит от угла ромба. Ответ не изменится, если основанием пирамиды является квадрат.

Тригонометрические функции при решении стереометрических задач применяются довольно часто. Рассмотрим задачу, в которой устанавливается зависимость между углами.

П р и м е р 4. Прямая a образует с плоскостью угол α и пересекает её в точке O. В данной плоскости через точку O проведена прямая b, образующая с проекцией прямой a на плоскость угол β ($\beta \neq 90^\circ$). Найти угол γ между прямыми a и b.

Р е ш е н и е. Пусть AC — перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки A прямой a к плоскости, OC — проекция наклонной AO (рис. 4). Затем в плоскости проведём перпендикуляр CB к прямой b. Тогда $AB \perp OB$ по теореме о трёх перпендикулярах.

Из прямоугольных треугольников AOC, COB и AOB находим:

$$\frac{OC}{OA} = \cos\alpha, \qquad \frac{OB}{OC} = \cos\beta, \qquad \frac{OB}{OA} = \cos\gamma.$$

Перемножив первые два равенства почленно, получим:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

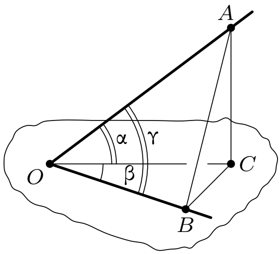

Рис. 4

Заметим, что $OABC$ — трёхгранный угол, двугранный угол при ребре OC которого прямой. Полученная формула выражает зависимость между его плоскими углами, она находит применение при решение задач и её стоит запомнить.

Соотношение $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ называют теоремой Пифагора для трёхгранного угла или теоремой о трёх косинусах.

При решении некоторых задач целесообразно для нахождения искомой величины сначала найти некоторую другую величину. Её называют вспомогательной неизвестной. Иногда следует ввести несколько вспомогательных неизвестных.

Приведём пример.

Пример 5. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равносторонний треугольник ABC. Вершина A_1 верхнего основания проектируется в центр H нижнего основания. Определить площадь боковой поверхности призмы, если $AB = a$ и $\angle A_1AH = \alpha$.

Решение. Прежде всего заметим, что грань BCC_1B_1 призмы является прямоугольником (рис. 5). Поскольку $BC \perp AH$, то $BC \perp AA_1$

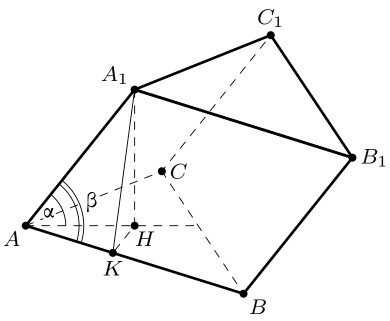

Рис. 5

(по теореме о трёх перпендикулярах). Прямые BC и AA_1 — скрещивающиеся. А так как $BB_1 \parallel AA_1$, то $BC \perp BB_1$. Две другие боковые грани призмы — равные параллелограммы (они симметричны относительно плоскости AA_1H).

Введём вспомогательные неизвестные. Пусть $AA_1 = b$ и $\angle A_1AB = \beta$. Площадь боковой поверхности призмы равна

$$S_{\text{бок}} = ab + 2ab\sin\beta = ab(1 + 2\sin\beta).$$

Проведём $A_1K \perp AB$. Точка A_1 одинаково отстоит от вершин A и B, значит, K — середина отрезка AB. Из треугольника AA_1K имеем:

$$b = \frac{a}{2\cos\beta}.$$

Остаётся найти вспомогательный угол β. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Двугранный угол с ребром AH трёхгранного угла AA_1HK — прямой, $\angle A_1AH = \alpha$, $\angle BAH = 30^\circ$, следовательно,

$$\cos\beta = \cos 30^\circ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha, \quad \text{и} \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha}.$$

Подставив найденные значения в формулу площади боковой поверхности призмы, получим:

$$S_{\text{бок}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}\cos\alpha}(1 + \sqrt{4 - 3\cos^2\alpha}).$$

Задачу можно решить и прямым счётом, последовательно вычисляя длины отрезков AH, HK, A_1H, AA_1 и A_1K, но вычисления будут более громоздкими.

Обратим внимание на один важный момент. Решение задачи начинается с выполнения чертежа и анализа; выясняются геометрические свойства фигуры и намечается план решения. При оформлении нельзя ограничиваться одними вычислениями, необходимо дать полное обоснование решения. Так, при решении приведённой задачи было доказано, что одна из граней призмы — прямоугольник, а две другие — равные параллелограммы.

На примере следующей задачи покажем применение теоремы об ортогональной проекции многоугольника на плоскость.

Пример 6. Рассмотрим правильную четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, диагональное сечение которой — квадрат. Через вершину D_1 и середины рёбер AB и BC проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения, если $AB = a$.

Решение. Построение сечения видно на рис. 6, где K и L — середины сторон AB и BC основания призмы, E и F — точки пересечения прямой KL соответственно с продолжениями сторон DA и DC. Сечением является пятиугольник $KLMD_1N$, площадь которого можно най-

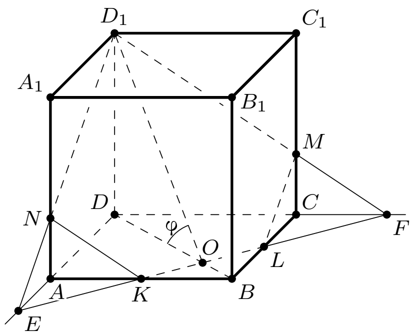

Рис. 6

ти. Можно сначала вычислить площади треугольников EFD_1 и LFM, а потом от площади первого треугольника вычесть удвоенную площадь второго (поскольку треугольники LFM и EKN равны). Однако в данном случае проще воспользоваться формулой

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos\varphi}.$$

Проекция пятиугольника $KLMD_1N$ на плоскость основания призмы есть пятиугольник $AKLCD$, площадь которого найдём, вычитая из площади квадрата $ABCD$ площадь треугольника BKL:

$$S_{\text{пр}} = a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2.$$

Пусть диагональ BD основания пересекает отрезок KL в точке O. Так как $KL \perp BD$ и $KL \perp OD_1$ (согласно теореме о трёх перпендикулярах), то $\angle DOD_1 = \varphi$ — линейный угол двугранного угла KL.

Далее легко находим:

$$DD_1 = BD = \sqrt{2}a, \quad DO = \frac{3}{4}BD = \frac{3\sqrt{2}}{4}a.$$

Из прямоугольного треугольника D_1DO по теореме Пифагора имеем:

$$D_1O = \frac{5\sqrt{2}}{4}a.$$

Значит, $\cos\varphi = \dfrac{DO}{D_1O} = \dfrac{3}{5}$ и $S_{\text{сеч}} = \dfrac{7}{8}a^2 : \dfrac{3}{5} = \dfrac{35}{24}a^2$.

Как видно из предыдущих примеров, иногда существуют различные пути, ведущие от известных элементов фигуры, к неизвестным, и одна и та же задача может быть решена различными способами. Естественно стремиться к тому, чтобы найти наиболее простое и красивое решение задачи. Известный математик Д. Пойа в своей книге «Как решать задачу» писал: «Два доказательства лучше, чем одно. Как говорит пословица: „надёжнее стоять на двух якорях“».

Следующую задачу решим тремя способами.

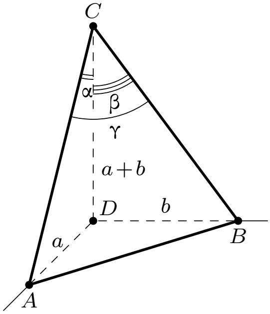

Рис. 7

П р и м е р 7. Дан тетраэдр $ABCD$, все плоские углы при вершине D которого прямые, а ребро CD равно сумме рёбер AD и BD. Доказать, что сумма всех плоских углов при вершине C равна $90°$.

Р е ш е н и е 1. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр (рис. 7). Для краткости введём обозначения: $AD = a$, $BD = b$, $AC = m$, $BC = n$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Поскольку $AD < CD$ и $BD < CD$, то каждый из углов α и β меньше $45°$ и $0° < \alpha + \beta < 90°$. Значит, также и $0° < \gamma < 90°$. Докажем, что $\sin(\alpha + \beta) = \cos\gamma$.

Так как $\sin\alpha = \dfrac{a}{m}$, $\sin\beta = \dfrac{b}{n}$, $\cos\alpha = \dfrac{a+b}{m}$, $\cos\beta = \dfrac{a+b}{n}$, то

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{a(a+b)}{mn} + \frac{b(a+b)}{mn} = \frac{(a+b)^2}{mn}.$$

Из треугольника ABC, где $AB^2 = a^2 + b^2$, по теореме косинусов находим:

$$\cos\gamma = \frac{m^2 + n^2 - (a^2 + b^2)}{2mn}.$$

Треугольники ACD и BCD прямоугольные, поэтому

$$m^2 + n^2 = a^2 + (a+b)^2 + b^2 + (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(a+b)^2.$$

Следовательно,

$$\cos\gamma = \frac{(a+b)^2}{mn}.$$

Таким образом, $\sin(\alpha+\beta) = \cos\gamma$, или $\sin(\alpha+\beta) = \sin(90^\circ - \gamma)$. Откуда, учитывая допустимые значения углов, получим: $\alpha+\beta = 90^\circ - \gamma$, или $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$.

Анализируя полученное решение задачи аналитическим методом, замечаем, что соотношение $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{(a+b)^2}{mn}$ можно получить геометрически без использования формулы суммы синусов двух углов.

Решение 2. Повернём грань BCD вокруг ребра CD так, чтобы треугольники ACD и BCD оказались в одной плоскости и лежали по разные стороны от их общего катета CD. Поскольку углы этих треугольников при вершине D прямые, получим треугольник $AB'C$ со стороной AB', равной $a+b$, и высотой CD, также равной $a+b$. Выразим площадь этого треугольника двумя способами и составим уравнение:

$$mn\sin(\alpha+\beta) = (a+b)^2,$$

откуда

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{(a+b)^2}{mn}.$$

Можно обойтись и без использования теоремы косинусов. Применим теорему Пифагора к трёхгранному углу с вершиной C (см. пример 4). Двугранный угол CD прямой, следовательно,

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

А так как $\cos\alpha = \dfrac{a+b}{m}$, $\cos\beta = \dfrac{a+b}{n}$, то

$$\cos\gamma = \frac{(a+b)^2}{mn}.$$

Итак, $\sin(\alpha+\beta) = \cos\gamma$ и, следовательно, $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$.

Р е ш е н и е 3. Назовём грань ABD тетраэдра основанием тетраэдра $ABCD$, а все другие — боковыми гранями. При решении задачи вторым способом мы рассмотрели развёртку из двух боковых граней. Теперь же сделаем развёртку боковой поверхности, разрезав тетраэдр по рёбрам AD, BD и CD. Покажем, что эта развёртка есть пятиугольник $A_1D_1C_1D_2B_1$ с прямым углом C_1 (рис. 8).

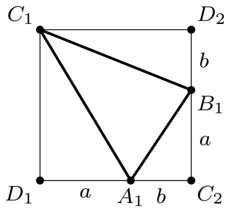

Рис. 8

Построим квадрат $C_1D_1C_2D_2$ со стороной, равной $a+b$. На сторонах D_1C_2 и C_2D_2 отложим отрезки D_1A_1 и C_2B_1, равные a. Тогда $A_1C_2 = B_1D_2 = b$. Прямоугольные треугольники ACD, BCD и ABD равны соответственно треугольникам $A_1C_1D_1$, $B_1C_1D_2$ и $A_1B_1C_2$ (катеты их соответственно равны). Значит, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ и $AB = A_1B_1$. Поэтому треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ также равны. Таким образом, пятиугольник $A_1D_1C_1D_2B_1$ есть развёртка боковой поверхности тетраэдра $ABCD$. Отсюда следует, что сумма плоских углов тетраэдра при вершине C равна углу $D_1C_1D_2$ квадрата, т. е. равна $90°$.

Если сопоставить решение это задачи аналитическим способом с последним, геометрическим, то бросается в глаза отсутствие вспомогательных построений в первом случае, естественность хода решения, тогда как при решении задачи геометрическим методом основная трудность состоит в том, чтобы догадаться использовать развёртку поверхности тетраэдра и выполнить вспомогательные построения. Доказательство же чрезвычайно просто: использованы лишь простейшие теоремы планиметрии (признаки равенства треугольников) и получено наглядное и красивое решение.

Итак, основным методом решения геометрических задач на вычисление и доказательство следует считать аналитический метод, имеющий две разновидности: метод поэтапного решения, который заключается в том, что последовательно вычисляются элементы ряда треугольников, а иногда и более сложных фигур, и метод составления уравнений. Другим важным методом является геометрический, к которому относят и метод геометрических преобразований. При решении конкретной задачи часто пользуются и тем, и другим методами. Например, сначала доказывают, что данная фигура обладает определённым свойством, а потом делают вычисления, пользуясь прямым счётом или методом составления уравнений. В таком случае можно говорить о решении задачи комбинированным методом.

Геометрические задачи настолько разнообразны, что невозможно дать указания к решению всех задач. Владея основными методами, при решении конкретной задачи уже легче отыскать новый метод или приём, позволяющий получить рациональное решение задачи.

Задачи главы 1 подобраны так, что для их решения не требуется знаний всех формул стереометрии. Лишь в конце параграфа имеется небольшое число задач на вычисление объёмов призм и пирамид.

Для решения задач требуется пространственное воображение, знание планиметрии, а также алгебры и тригонометрии. Если среди данных или искомых имеются углы, то без использования тригонометрических функций, как правило, не обойтись. Кроме того, применение тригонометрии часто позволяет упростить вычисление.

§ 1. *Призма, параллелепипед, куб*

1. Через концы трёх рёбер DA, DB и DC параллелепипеда проведена плоскость ABC. Диагональ DE параллелепипеда пересекает эту плоскость в точке M. Докажите, что M — центроид (точка пересечения медиан) треугольника ABC и $DM = \frac{1}{3}DE$.

2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через вершину A и центры P и Q граней $A_1B_1C_1D_1$ и BB_1C_1C проведите плоскость. В каком отношении делит эта плоскость ребро B_1C_1?

3. Докажите, что если диагонали четырёхугольной призмы пересекаются в одной точке, то эта призма — параллелепипед.

4. Докажите, что во всяком параллелепипеде сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его рёбер.

* * *

5. Докажите, что параллелепипед, у которого все диагонали равны, прямоугольный.

6. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c. Найдите площади диагональных сечений и сравните их, если $a < b < c$.

7. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм со сторонами 3 м и 4 м. Одна из диагоналей параллелепипеда равна 5 м, а другая — 7 м. Найдите величину острого угла параллелограмма, лежащего в основании, и площадь полной поверхности параллелепипеда.

8. Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб $ABCD$, угол A которого равен 60°. Боковые грани — квадраты со стороной, равной a. Найдите площади сечений, проведённых а) через диагональ BD_1 и вершину A; б) через диагональ BD_1 и середину K ребра AA_1.

9. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 4$ м, $AD = 2$ м, и $AA_1 = 5$ м. На ребре AA_1 взята точка K такая, что $\dfrac{AK}{KA_1} = 4$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью BD_1K и докажите, что она меньше площади диагонального сечения A_1BCD_1.

* * *

10. Докажите, что плоскость, проходящая через концы трёх рёбер куба, имеющих общую вершину, перпендикулярна диагонали куба, выходящей из той же вершины.

11. В прямоугольном параллелепипеде диагональ перпендикулярна плоскости, проходящей через концы трёх рёбер, имеющих с диагональю общую вершину. Докажите, что параллелепипед является кубом.

12. Через центр куба проведите плоскость перпендикулярно его диагонали. Определите вид полученного сечения.

13. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны a и b. Найдите расстояние между диагональю параллелепипеда и непересекающим его ребром.

14. Постройте общий перпендикуляр скрещивающихся диагоналей двух смежных граней куба и найдите его длину, если ребро куба равно a.

* * *

15. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с рёбрами, выходящими из той же вершины, углы α, β, γ. Найдите γ, если $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 60^\circ$.

16. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 2 м, а площадь боковой поверхности равна 4 м^2. Найдите угол наклона диагонали к плоскости основания и площадь основания.

17. Найдите высоту правильной четырёхугольной призмы со стороной основания a, если сумма углов, образованных диагональю призмы со стороной и диагональю основания, выходящими из одной и той же вершины, равна 135°.

18. Диагональ правильной четырёхугольной призмы составляет с основанием угол α и с боковой гранью угол β. Найдите зависимость между этими углами. Вычислите α и β, если $\alpha + \beta = 75^\circ$.

19. Непересекающиеся диагонали двух смежных граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите угол γ между этими диагоналями.

* * *

20. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону основания AB и вершину C_1 проведена плоскость. Сторона основания равна a, угол наклона сечения к основанию равен φ. Найдите объём призмы.

21. Высота правильной треугольной призмы равна h. Угол между диагоналями боковых граней, выходящими из одной вершины, равен α. Найдите объём призмы и вычислите его при $\alpha = 45^\circ$.

22. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, наклонена к основанию под углом α и к боковой грани под углом β. Найдите объём параллелепипеда.

23. Основанием прямой призмы служит ромб со стороной a и острым углом α. Сечение плоскостью, проведённой через большую диагональ основания и через вершину тупого угла другого основания, представляет собой прямоугольный треугольник. Найдите объём призмы.

24. Большая диагональ правильной шестиугольной призмы, равная d, образует со стороной основания, выходящей из той же вершины, угол α. Найдите объём призмы.

25. Сечение правильной четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через её диагональ, представляет собой ромб с острым углом α. Найдите объём призмы, если её диагональ равна d.

* * *

26. Три ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b и c. Первые два ребра взаимно перпендикулярны, а третье образует с каждым из них острый угол α. Найдите объём параллелепипеда.

27. Основанием наклонной призмы служит прямоугольник со сторонами a и b. Две смежные боковые грани составляют с основанием острые углы, равные α и β соответственно. Найдите объём призмы, если боковое ребро равно c.

§ 2. *Пирамида, усечённая пирамида*

28. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту пирамиды.

29. Основание пирамиды — трапеция, параллельные стороны которой равны 6 см и 8 см, а высота равна 7 см. Каждое боковое ребро равно 13 см. Найдите высоту пирамиды.

30. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Все двугранные углы при сторонах основания равны 75°. Найдите высоту пирамиды.

31. Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник. Каждый из двугранных углов при основании равен β. Высота пирамиды равна h. Найдите площадь основания.

* * *

32. Основанием пирамиды $NABC$ служит равнобедренный треугольник, $AC = BC = b$. Все боковые рёбра наклонены к основанию под углом φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро NC и высоту пирамиды.

33. Основание пирамиды $NABC$ — треугольник с равными сторонами AC и BC, $\angle ACB = \gamma$. Каждое боковое ребро наклонено к основанию под углом $45°$. Через вершину C и высоту NO пирамиды проведена плоскость. Докажите, что $S_{\text{сеч}} \geqslant \frac{1}{2}S_{\text{осн}}$. При каком условии а) $S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}S_{\text{осн}}$; б) $S_{\text{сеч}} = S_{\text{осн}}$?

34. Сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту пирамиды, есть прямоугольный треугольник. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её основания.

* * *

35. Дана правильная треугольная пирамида $NABC$, NH — её высота, NK — апофема, $\angle NAH = \alpha$, $\angle NKH = \beta$, $\angle ANB = \gamma$. Докажите, что

$$\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{3}\cos\beta.$$

36. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине вдвое больше угла наклона бокового к плоскости основания. Найдите высоту пирамиды.

37. Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне её основания. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания и двугранный угол при боковом ребре.

38. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен γ, двугранный угол при боковом ребре равен δ. Докажите, что

$$\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}.$$

39. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно b и двугранный угол при боковом ребре равен δ.

40. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a и двугранный угол при боковом ребре вдвое больше двугранного угла при основании.

* * *

41. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна a, плоский угол при вершине равен γ. Через середины рёбер основания AB и BC проведена плоскость, параллельная ребру BD. Найдите площадь сечения.

42. Противоположные рёбра AC и BD треугольной пирамиды $ABCD$ равны. Через точку K, принадлежащую ребру AB, проведена плоскость параллельно рёбрам AC и BD. Докажите, что в сечении получится параллелограмм, периметр которого не зависит от выбора точки K.

43. В треугольной пирамиде $ABCD$ проводятся сечения, параллельные рёбрам AC и BD. Найдите сечение наибольшей площади.

44. Докажите, что правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и боковым ребром b можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился квадрат. Найдите длину стороны квадрата.

45. Докажите, что любую треугольную пирамиду можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится ромб.

46. Правильная треугольная пирамиды со стороной основания a и двугранным углом β при основании пересечена плоскостью, делящей двугранный угол при основании пополам. Найдите площадь сечения. Вычислите её при $\beta = 60^\circ$.

* * *

47. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположному ребру. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a и плоский угол при вершине равен γ. При каких значениях γ задача разрешима?

48. Через сторону основания правильной четырёхугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположному ребру. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a и боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β.

49. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, угол при вершине диагонального сечения равен α. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному ребру. При каких значениях α задача имеет решение?

50. Найдите двугранный угол при основании правильной четырёхугольной пирамиды, если плоскость, проходящая через сторону основания, делит этот угол и площадь боковой поверхности пирамиды пополам.

* * *

51. В основании пирамиды $NABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $AB = a$ и $AD = a\sqrt{2}$. Все боковые рёбра наклонены к основанию под углом 30°. Через диагональ основания AC проведена плоскость параллельно ребру DN. Найдите плоские углы при вершине пирамиды и площадь сечения.

52. В основании пирамиды лежит ромб с углом 60°. Каждая из боковых граней пирамиды наклонена к основанию под углом β. Большее боковое ребро пирамиды равно b. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. Вычислите её при $\beta = 45^\circ$.

53. Основанием пирамиды $NABCD$ является квадрат со стороной $AB = a$. Боковая грань NAB перпендикулярна плоскости основания, $AN = BN$. Найдите площадь грани NCD, если она наклонена к плоскости основания под углом, вдвое меньшим угла ANB.

* * *

54. Основанием пирамиды $NABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, катеты AC и BC которого равны a. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, $\angle ANC = \gamma$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проведённой через ребро AB перпендикулярно противоположному ребру CN.

55. В основании пирамиды $NABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом BAC при вершине, равным α. Грани NAB и NAC перпендикулярны основанию, $NA = h$. Площади граней NAB и NBC равны. Найдите площадь основания пирамиды.

56. Основанием треугольной пирамиды служит прямоугольный треугольник. Боковые грани равновелики и все боковые рёбра имеют длину, равную 1. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

* * *

57. Основанием пирамиды $NABC$ служит равносторонний треугольник ABC со стороной a. Грань NBC перпендикулярна основанию, $\angle NAB = \angle NAC = \alpha$. Найдите объём пирамиды. Вычислите объём при $\alpha = 60^\circ$.

58. Основание пирамиды — квадрат со стороной a. Линейные углы двугранных углов при основании пропорциональны числам 2, 3, 5 и 3. Найдите объём пирамиды.

59. Основание пирамиды $NABCD$ — квадрат. Ребро ND перпендикулярно основанию и равно h. Двугранный угол при ребре NB равен β. Найдите объём пирамиды.

* * *

60. В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде стороны оснований равны 36 см и 14 см. Плоскость, проведённая через сторону нижнего основания перпендикулярно противолежащей боковой грани, проходит через сторону верхнего основания. Найдите площадь сечения.

61. Площади оснований правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равны Q и q. Угол, образованный боковым ребром со стороной основания, равен 60°. Найдите площадь диагонального сечения.

62. Найдите площадь боковой поверхности правильной усечённой треугольной пирамиды, боковые рёбра которой наклонены к основанию под углом α, а стороны оснований равны a и b $(a > b)$.

63. Плоскость, параллельная основаниям правильной усечённой пирамиды, делит площадь её боковой поверхности пополам. Найдите площадь сечения, если площади оснований равны S_1 и S_2.

64. Через середины боковых рёбер произвольной усечённой пирамиды проведена плоскость. Площади оснований пирамиды равны S_1 и S_2, площадь её среднего сечения — S. Докажите, что

$$\sqrt{S} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}.$$

Глава 2

Тела вращения

Построение изображения круглых тел требует определённых навыков. Шар принято изображать в ортогональной проекции. При этом проекцией шара является круг. Чтобы изображение шара сделать более наглядным, кроме контурной окружности изображают ещё большую окружность — экватор в виде эллипса, а иногда и диаметр шара, перпендикулярный к плоскости экватора, концы которого (полюсы шара) располагаются внутри контурной окружности (рис. 9).

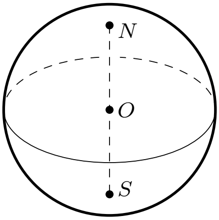

Рис. 9

Шар можно получить при вращении полукруга вокруг диаметра. Границей шара служит сфера.

Прямой круговой цилиндр, а только такой и рассматривается в курсе геометрии средней школы, можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг его стороны. Основания цилиндров изображаются в виде равных эллипсов, контурные образующие — как касательные к ним.

Прямой конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета. При изображении конуса необходимо учитывать, что касательные к эллипсу, построенные в концах одного из его диаметров, параллельны. Поэтому контурные образующие не должны проходить через вершины эллипса, изображающего основание конуса (рис. 10).

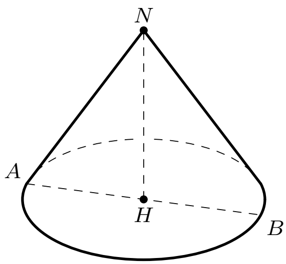

Рис. 10

При решении простейших задач, как и задач на комбинацию круглых тел, можно пользоваться упрощённом чертежом, например, изображением лишь осевого сечения фигуры.

П р и м е р 1. В сферу вписан конус. Площадь боковой поверхности конуса составляет $\frac{3}{8}$ площади сферы. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

Р е ш е н и е. Сечение конуса и сферы плоскостью, проходящей через высоту NH конуса, есть равнобедренный треугольник ABN, вписанный в окружность (рис. 11). Продолжим высоту NH треугольника до пересечения с окружностью в точке M. Тогда MN — диаметр сферы, $\angle MAN = 90°$, AH — радиус основания конуса, $\angle NAH$ — угол наклона образующей к плоскости основания, причём $\angle NAH = \angle AMN$.

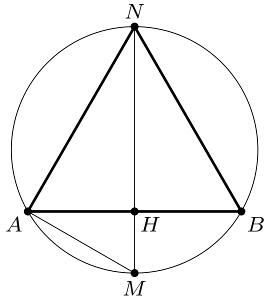

Рис. 11

Обозначим $MN = 2R$, $AH = r$, $AN = l$ и $\angle HAN = x$. Согласно условию задачи, имеем:

$$\pi rl = \frac{3}{8} \cdot 4\pi R^2,$$

или

$$2rl = 3R^2.$$

Из прямоугольных треугольников AMN и AHN находим:

$$l = 2R\sin x,$$
$$r = l\cos x = 2R\sin x\cos x.$$

Подставив значения l и r в предыдущее равенство, получим тригонометрическое уравнение:

$$8\sin^2 x\cos x = 3, \quad 0° < x < 90°,$$

которое равносильно уравнению:

$$8\cos^3 x - 8\cos x + 3 = 0.$$

Полагая $2\cos x = z$, получим:

$$z^3 - 4z + 3 = 0.$$

Это уравнение решим путём разложения левой части на множители:

$$z^3 - z - 3z + 3 = 0,$$
$$(z-1)(z^2 + z - 3) = 0.$$

Положительные корни уравнения $z_1 = 1$ и $z_2 = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$ удовлетворяют условию задачи. Итак, $\cos x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $\cos x_2 = \dfrac{\sqrt{13}-1}{4} \approx 0{,}65$. Задача имеет два решения: $x_1 = 60°$ и $x_2 \approx 49°20'$.

Большинство задач настоящей главы сразу сводятся к планиметрическим. Для их решения используются методы алгебры и тригонометрии. Решение задач не вызовет затруднений, если знать теоремы и формулы геометрии и иметь навыки в решении планиметрических задач.

Пример 2. Около сферы радиуса r описан усечённый конус, образующая которого равна l. Найти площадь полной поверхности усечённого конуса.

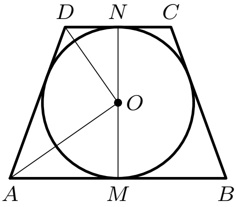

Рис. 12

Р е ш е н и е. Центр сферы одинаково удалён от оснований усечённого конуса и совпадает с серединой O отрезка MN, соединяющего центры оснований. Осевое сечение конуса представляет собой равнобочную трапецию, описанную около окружности (рис. 12).

Введём обозначения: r_1 и r_2 — радиусы оснований усечённого конуса ($r_1 < r_2$), $S_{\text{бок}}$ — площадь его боковой поверхности.

Воспользуемся формулой

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Согласно свойству сторон четырёхугольника, описанного около окружности, имеем:

$$r_1 + r_2 = l.$$

Значит,

$$S_{\text{бок}} = \pi l^2.$$

Треугольники AOM и DON подобны, поэтому

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r}{r_2}, \quad \text{откуда} \quad r_1 r_2 = r^2.$$

Найдём сумму площадей оснований конуса:

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)^2 - 2\pi r_1 r_2 = \pi(l^2 - 2r^2).$$

Таким образом, площадь полной поверхности усечённого конуса

$$S = \pi l^2 + \pi(l^2 - 2r^2).$$

Окончательно получим:

$$S = 2\pi(l^2 - r^2).$$

П р и м е р 3. В конус вписан шар, объём которого в два раза меньше объёма конуса. Радиус основания конуса равен R. Найти радиус шара и высоту конуса.

Р е ш е н и е. Обозначим радиус шара и высоту конуса через r и h. Тогда по условию

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{8}{3}\pi r^3,$$

откуда $R^2 h = 8r^3$.

Можно составить ещё одно уравнение, содержащее неизвестные r и h, но проще применить способ введения вспомогательного угла.

Обозначим угол HAN наклона образующей конуса к плоскости основания через 2α, тогда $\angle HAO = \alpha$ (рис. 13). Выразим через R и α радиус OH шара и высоту NH конуса. Из прямоугольных

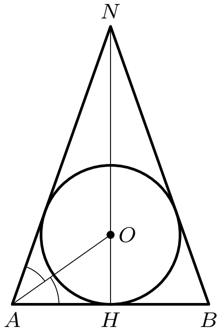

Рис. 13

треугольников AOH и ANH имеем:

$$r = R\operatorname{tg}\alpha, \qquad h = R\operatorname{tg}2\alpha.$$

Подставив значения r и h в равенство $R^2h = 8r^3$, получим уравнение:

$$\operatorname{tg}2\alpha = 8\operatorname{tg}^3\alpha, \qquad 0^\circ < \alpha < 45^\circ.$$

Так как $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$ и $\operatorname{tg}\alpha \neq 1$, то уравнение после упрощений принимает вид:

$$4\operatorname{tg}^4\alpha - 4\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 0,$$

или

$$(2\operatorname{tg}^2\alpha - 1)^2 = 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Далее находим: $\operatorname{tg}2\alpha = 2\sqrt{2}$, и, следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}R, \qquad h = 2R\sqrt{2}.$$

Рассмотрим задачу о шарах, касающихся друг друга. Если попытаться построить изображение комбинации таких шаров, то чертёж получится очень сложным, и трудно будет увидеть на таком чертеже взаимное расположение элементов фигуры. Между тем, для решения задачи изображения шаров и не нужно, достаточно изобразить центры шаров и соединить их отрезками.

Пример 4. Три одинаковых шара радиуса R касаются друг друга и некоторой плоскости. Четвёртый шар касается трёх первых и той же плоскости. Найдите радиус четвёртого шара.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры трёх шаров одинакового радиуса, O — центр четвёртого шара; A, B, C и P — точки касания их с плоскостью (рис. 14). Так как расстояние между центрами двух внешне касающихся шаров равно сумме их радиусов, а расстояние от центра шара до плоскости, касающейся шара, равно радиусу шара, то $AB = BC = CA = 2R$, $AO_1 = R$ и $ABCO_1O_3O_2$ — правильная призма.

Обозначим радиус четвёртого шара через x, тогда $O_1O = R + x$, $OP = x$. Точка P — центр равностороннего треугольника, поэтому $AP = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Таким образом, задача сводится к вычислению

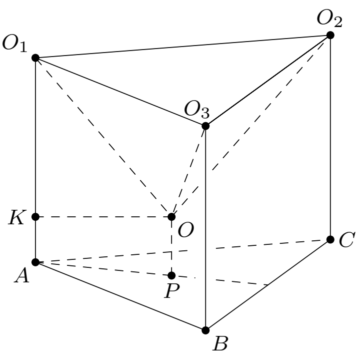

Рис. 14

меньшего основания прямоугольной трапеции AO_1OP. Из вершины O проведём $OK \perp AO_1$ и получим прямоугольный треугольник OKO_1 с катетами, равными $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ и $R-x$. Составим уравнение

$$(R+x)^2 = (R-x)^2 + \frac{4R^2}{3},$$

откуда $x = \frac{1}{3}R$. Итак, $OP = \frac{1}{3}R$.

Задачи о комбинациях пространственных тел требуют хорошо развитого пространственного воображения. Поэтому, прежде, чем приступить к решению таких задач, полезно поупражняться в решении более простых задач, помещённых в начале главы. Некоторые из них могут быть решены даже без чертежа, для решения других достаточно изобразить только часть геометрической фигуры, например, осевое сечение. При решении более трудных задач, помещённых в § 4 и § 5, следует сначала сделать полный чертёж, а затем — дополнительный, более пригодный для выполнения вычислений.

В главе 2 чаще всего используются следующие обозначения и формулы:

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности,

S — площадь полной поверхности,

V — объём.

Если r — радиус основания конуса, l — его образующая, h — высота, то

$$S_{\text{бок}} = \pi rl, \qquad S = \pi r(l+r), \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Если r_1 и r_2 — радиусы оснований усечённого конуса, l — его образующая, h — высота, то

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1+r_2)l, \qquad S = \pi(r_1+r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2, \qquad V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

§ 3. *Цилиндр, конус, усечённый конус*

65. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади его основания.

66. Осевые сечения двух цилиндров — равновеликие прямоугольники. Докажите, что площади их боковых поверхностей равны.

67. Высота одного цилиндра вдвое больше высоты другого, а осевые сечения — равные прямоугольники. Найдите отношение их объёмов.

68. Развёртка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник, диагональ которого равна d, а угол между диагоналями, обращённый к образующей, равен α. Найдите объём цилиндра.

69. Осевое сечение цилиндра — прямоугольник $ABCD$. Кратчайшее расстояние по боковой поверхности цилиндра от точки A до точки C равно l_1, длина ломаной ABC равна l_2. Сравните пути l_1 и l_2, если а) $AB = BC$, б) $AB = 2BC$.

* * *

70. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Найдите отношение площади его боковой поверхности к площади основания.

71. Цилиндр и конус имеют равные основания и равные высоты. Отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади боковой поверхности конуса равно k. В каких границах может изменяться k? Найдите угол наклона образующей конуса к основанию, если $k = 1$.

72. Отношение полных поверхностей конусов, полученных вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AC и вокруг катета BC, равно 2. Найдите острые углы треугольника.

73. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α. Найдите центральный угол в развёртке его боковой поверхности. При каком значении α развёртка боковой поверхности есть полукруг?

74. Прямоугольный треугольник ABC вращается сначала вокруг гипотенузы AB, а затем вокруг катета BC. Найдите отношение объёмов тел вращения, если угол A треугольника равен α.

* * *

75. Высота усечённого конуса равна 4. Радиус одного основания конуса в два раза больше радиуса другого, а сумма площадей оснований равна площади боковой поверхности. Найдите радиусы оснований и образующую усечённого конуса.

76. Образующая усечённого конуса наклонена к плоскости большего основания под углом α. Диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. Найдите отношение площади боковой поверхности усечённого конуса к сумме площадей его оснований.

77. Прямоугольная трапеция $ABCD$ вращается сначала вокруг большего основания AB, а потом вокруг меньшей боковой стороны AD. Найдите отношение объёмов полученных тел вращения, если $AB = 2CD$ и $\angle ABC = \beta$.

78. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большему катету и отстоит от него на 3 см. Найдите объём тела вращения.

§4. *Комбинация круглых тел*

79. В сферу вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого составляет $\frac{2}{5}$ площади сферы. Найдите отношение высоты цилиндра к диаметру его основания.

80. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их объёмов и отношение площадей их поверхностей.

81. В конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади основания конуса. Найдите угол α наклона образующей конуса к плоскости его основания.

82. В сферу вписан конус, радиус основания которого равен $\frac{1}{2}$ радиуса сферы. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

83. В шар радиуса R вписан конус. Объём конуса составляет $\frac{1}{4}$ объёма шара. Найдите высоту конуса.

* * *

84. Около сферы радиуса r описан конус, высота которого равна h. Найдите площадь полной поверхности конуса.

85. В конус вписана сфера. Площадь сферы составляет $\frac{2}{3}$ площади боковой поверхности конуса. Найдите образующую конуса, если радиус его основания равен R.

86. Около шара радиуса r описан конус, объём которого в два раза больше объёма шара. Найдите высоту конуса.

87. В конус вписан шар. Докажите, что отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно отношению их объёмов.

88. В конус вписан шар, площадь поверхности которого равна площади основания конуса. Какую часть объёма конуса составляет объём шара?

89. В конус вписан шар и через их линию касания проведена плоскость. Найдите отношение объёма отсечённого конуса к объёму данного, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α.

* * *

90. Около сферы описан усечённый конус, образующая которого составляет с большим основанием угол α. Площадь сферы равна Q. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

91. Площадь сферы составляет $\frac{3}{4}$ площади поверхности описанного около сферы усечённого конуса. Найдите радиусы оснований усечённого конуса и радиус сферы, если образующая усечённого конуса равна l.

92. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, образующая которого равна $R\sqrt{2}$, а угол наклона её к плоскости нижнего основания равен α. Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса.

93. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол β. Угол между диагоналями в осевом сечении конуса, обращённый к основанию, равен α. Найдите площадь осевого сечения конуса.

94. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, высота которого равна h. Диагонали осевого сечения конуса перпендикулярны. Найдите объём усечённого конуса. Имеет ли задача решение, если а) $h = \frac{2}{3}R$, б) $h = \frac{3}{2}R$?

§ 5. *Касание круглых тел*

95. Три шара, радиусы которых равны $2a$, $3a$ и $3a$, касаются попарно внешним образом. Найдите радиус сферы, касающейся каждого из них внутренним образом, если её центр и центры данных трёх шаров лежат в одной плоскости.

96. Три шара лежат на плоскости и попарно касаются друг друга. Расстояние между точками касания их с плоскостью равны a, b и c. Найдите радиусы шаров.

97. Внутри сферы расположены четыре шара одного и того же радиуса r. Каждый из них касается трёх других и сферы. Найдите радиус сферы.

98. Четыре одинаковых шара радиуса r лежат на плоскости. Центры их находятся в вершинах квадрата со стороной $2r$. Пятый шар того же радиуса касается всех четырёх. Найдите расстояние от центра пятого шара до плоскости.

99. На основании конуса лежат три шара радиуса r, каждый из которых касается двух других и боковой поверхности конуса. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $60°$. Найдите радиус основания конуса.

100. На основании конуса лежат два шара радиуса r. На них лежит четвёртый шар того же радиуса. Каждый из этих четырёх шаров касается боковой поверхности конуса и трёх других шаров. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания и высоту конуса.

101. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса $2a$ и один шар радиуса a так, что каждый шар касается двух других, нижнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найдите радиус основания цилиндра.

102. На плоскости лежат три шара, попарно касающихся друг друга. Радиусы их равны r, $3r$ и $3r$. Четвёртый шар касается первых трёх и той же плоскости. Найдите радиус четвёртого шара.

103. Три шара, радиусы которых равны 3, 1 и $\frac{3}{4}$, попарно касаются друг друга и некоторой плоскости. Четвёртый шар касается первых трёх и той же плоскости. Найдите радиус четвёртого шара.

104. Два шара одного радиуса и два другого лежат на плоскости и каждый касается трёх других. Найдите отношение радиуса большего шара к радиусу меньшего.

105. Четыре шара расположены так, что каждый из них касается трёх остальных. Радиусы трёх шаров равны R, радиус четвёртого шара r. Найдите радиус пятого шара, касающегося всех четырёх шаров, если $R = 6$ и $r = 1$.

Глава 3

Векторный метод

При решении геометрических задач, кроме традиционных методов с использованием алгебры и тригонометрии, могут применяться и другие методы, в частности, векторный. Умение пользоваться векторами требует определённых навыков. Надо научиться переводить геометрические утверждения на векторный язык, а также, наоборот, векторные соотношения истолковать геометрически. Векторный метод, как и любой другой, применим не всегда. Умение заранее предвидеть, годится ли он для решения конкретной задачи или нет, вырабатывается опытом.

Естественно вначале научиться применять векторы к решению планиметрических задач. Такие задачи можно найти в книге автора «Задачи по планиметрии и методы их решения» и других учебных пособиях.

В настоящей главе помещены планиметрические задачи, в § 6 — задачи на параллельность, принадлежность трёх точек одной прямой и четырёх точек одной плоскости, на отношение отрезков параллельных прямых. Такие задачи называют аффинными. Для их решения используются операции сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число и их свойства. Задачи на вычисление расстояний, углов и некоторые другие, помещённые в § 7, не могут быть решены только с помощью указанных операций и требуют применения скалярного произведения векторов. Такие задачи называются метрическими.

Приведём основные векторные соотношения и формулы, на которых основано решение задач.

1) Для любых трёх точек A, B, C имеет место равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{(правило треугольника).}$$

2) Для любых трёх точек A, B и O выполняется равенство:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \text{(правило вычитания векторов).}$$

3) Для того, чтобы точка C лежала на прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число k, что

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Из этого равенства следует, что $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = k$.

4) Пусть A и B — две различные точки прямой и C — точка этой прямой такая, что $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = k$. Докажем истинность формулы:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{1+k},$$

где O — произвольная точка.

Заметим, что $k \neq -1$, иначе было бы $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$, или $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Но это невозможно, поскольку A и B — различные точки.

Пусть $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = k$ или $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{CB}$. Пользуясь правилом вычитания векторов, получим:

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}),$$

или

$$\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB},$$

откуда

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}.$$

Эту формулу называют формулой деления отрезка в данном отношении.

Если C — середина отрезка AB, то $k = 1$ и $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

5) Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих равенств: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, где O — произвольная точка пространства.

6) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то для любого вектора $\vec{c}$, лежащего с $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в одной плоскости, существует единственная пара чисел x и y таких, что

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

7) В пространстве для каждого вектора $\vec{p}$ существует единственное разложение по трём данным некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

(x, y, z — однозначно определённые числа).

В частности, если $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, то $x = y = z = 0$.

8) Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой, тогда для того, чтобы точка D лежала в плоскости ABC, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая пара чисел α и β, что

$$\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}.$$

Покажем, как доказать известную теорему о медианах треугольника векторным методом.

Пример 1. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

Решение. Возьмём на медиане CD треугольника ABC точку M, такую, что $\frac{CM}{MD}=2$ (рис. 15). Согласно формуле деления отрезка в данном отношении

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}}{3},$$

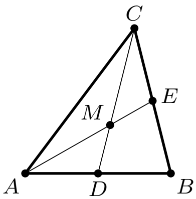

Рис. 15

где O — произвольная точка пространства. А так как D — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

Из этих двух равенств следует, что

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Пусть точка M' делит любую из двух других медиан в отношении $2:1$, считая от вершины. Тогда для вектора $\overrightarrow{OM'}$ аналогично получим тоже самое выражение, т. е. $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}$. Значит, точки M и M' совпадают. Таким образом, все три медианы треугольника ABC имеют общую точку M, которая делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

Теорема доказана. Попутно мы получили формулу, выражающую вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, которая верна и в том случае, когда точка O не лежит в плоскости треугольника и $OABC$ — тетраэдр. Точка M пересечения медиан треугольника называется его центроидом.

Тетраэдр имеет ряд свойств, аналогичных свойствам треугольника.

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, называют медианой тетраэдра. Медианы тетраэдра, как и медианы треугольника, пересекаются в одной точке.

Докажем теорему о медианах тетраэдра тем же способом, что и предыдущую.

Пример 2. Доказать, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины.

Решение. Возьмём на медиане DM_1 тетраэдра $ABCD$ точку M такую, что $\frac{DM}{MM_1}=3$ (рис. 16). По формуле деления отрезка в данном

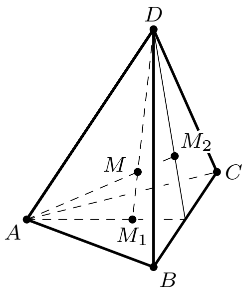

Рис. 16

отношении имеем:
$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{OM_1}}{4},$$
где O — любая точка пространства (на рис. 16 не изображена).

Учитывая, что центроид M_1 треугольника ABC удовлетворяет соотношению
$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$
получим:
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

Для точки M', делящей любую из трёх других медиан тетраэдра $ABCD$ в отношении $3:1$, считая от вершины, получим то же самое выражение (оно симметрично относительно $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$). Значит, $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}$ и все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке M и каждая из них делится этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины тетраэдра. Точку M называют центроидом тетраэдра.

Формула, выражающая вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, в дальнейшем находит применение при решении задачи.

Рассмотрим ещё одну аффинную задачу, при решении которой используется теорема о разложении вектора и признак принадлежности четырёх точек одной плоскости.

П р и м е р 3. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм. Проведена плоскость, пересекающая боковые рёбра SA, SB, SC, SD пирамиды соответственно в точках K, L, M, N таких, что $SK=\frac{1}{k}SA$, $SL=\frac{1}{l}SB$, $SM=\frac{1}{m}SC$, $SN=\frac{1}{n}SD$. Найти зависимость между числами k, l, m и n.

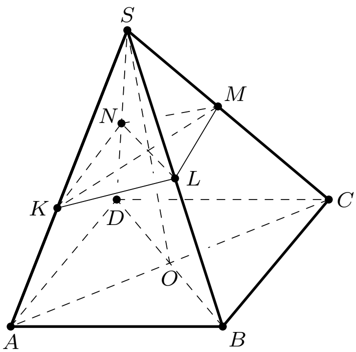

Рис. 17

Р е ш е н и е. Согласно условию принадлежности четырёх точек K, L, M и N одной плоскости имеем:
$$\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MK}+\beta\overrightarrow{ML}.$$

Представим каждый из векторов, входящих в это равенство, в виде разности двух векторов с общим началом в точке S (рис. 17). Получим:
$$\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SM}=\alpha(\overrightarrow{SK}-\overrightarrow{SM})+\beta(\overrightarrow{SL}-\overrightarrow{SM}).$$

Отсюда
$$\overrightarrow{SN} = \alpha\overrightarrow{SK} + \beta\overrightarrow{SL} + \gamma\overrightarrow{SM},$$
где $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

Учитывая условие задачи, предыдущее равенство перепишем так
$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{\alpha}{k}\overrightarrow{SA} + \frac{\beta}{l}\overrightarrow{SB} + \frac{\gamma}{m}\overrightarrow{SC}.$$

Обозначим через O точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Так как O — середина диагоналей AC и BD, то
$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}.$$

Значит,
$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

Таким образом, вектор $\dfrac{1}{n}\overrightarrow{SD}$ выражен двумя способами через некомпланарные векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

В силу единственности разложения вектора получаем числовые равенства:
$$\frac{\alpha}{k} = \frac{1}{n}, \quad \frac{\beta}{l} = -\frac{1}{n}, \quad \frac{\gamma}{m} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда, учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$, находим:
$$\frac{k}{n} - \frac{l}{n} + \frac{m}{n} = 1,$$
или
$$k + m = l + n.$$

Приведём числовой пример. Если плоскость проходит через вершину A тетраэдра $ABCD$ и пересекает его рёбра SB и SD в точках L и N таких, что $\overrightarrow{SL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$, то $k = 1$, $l = 2$, $n = 3$, следовательно, $m = 2 + 3 - 1 = 4$, т. е. $\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SC}$.

При решении различных геометрических задач на вычисление длин отрезков и величин углов, на доказательство геометрических неравенств и некоторых других эффективно может быть использовано скалярное произведение векторов. Напомним его важнейшие свойства.

1) Из определения скалярного произведения следует, что
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2,$$
т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины. Следовательно, для нахождения длины отрезка AB может быть использована формула
$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2.$$

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

2) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место неравенство

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \geqslant \vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}^{\,2}.$$

3) Отрезки AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0.$$

4) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место формула:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2}.$$

Для успешного применения векторов полезно знать некоторые равенства, часто используемые при решение задач. В частности, следующие.

5) Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выполняется равенство:

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}.$$

6) Для любых трёх точек A, B и C:

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

(теорема косинусов).

7) Для любых четырёх точек A, B, C, D:

$$AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Доказательство этого равенства несложно. Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ в левой части представим в виде разности двух векторов, отложенных от точки A. Получим:

$$AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2 = \overrightarrow{AD}^{\,2} + (\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2 - \overrightarrow{AC}^{\,2} - (\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2 =$$
$$= 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Доказанное равенство является обобщением равенства 6), которое вытекает из него при совпадении точек D и A.

Приведём примеры метрических задач, при решении которых целесообразно пользоваться скалярным умножением векторов.

Пример 4. Доказать, что длина медианы m_c треугольника ABC выражается через длины его сторон формулой:

$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Р е ш е н и е. Пусть CD — медиана треугольника ABC (см. рис. 15). Тогда

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

Вычислив скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{CD}$, получим:

$$CD^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}).$$

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ найдём, используя векторное равенство

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

Отсюда $c^2 = a^2 + b^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$,

$$2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2 + b^2 - c^2.$$

Следовательно,

$$CD^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

или

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Задачу нетрудно решить и элементарными способами. Например, можно достроить треугольник до параллелограмма и применить теорему о сумме квадратов его диагоналей. Однако аналогичную задачу для тетраэдра предпочтительнее решать векторным методом, что не требует дополнительных построений и громоздких вычислений.

П р и м е р 5. Выразить длину медианы DM_1 тетраэдра $ABCD$ через длины его рёбер.

Р е ш е н и е. Длина рёбер тетраэдра $ABCD$ обозначим так: $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$ (см. рис. 16).

Так как M_1 — центроид треугольника ABC, то

$$\overrightarrow{DM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

(см. пример 1).

Возведём это равенство в квадрат и получим:

$$DM_1^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}).$$

Так же, как при решении предыдущей задачи, запишем равенство

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}.$$

Вычислив скалярный квадрат, получим

$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB},$$

откуда

$$2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = a^2 + b^2 - c_1^2.$$

Аналогично найдём, что $2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = a^2 + c^2 - b_1^2$, $2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = b^2 + c^2 - a_1^2$. Подставив значения скалярных произведений в исходное равенство, получим формулу

$$m_D^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{9},$$

выражающую длину m_D медианы DM_1 тетраэдра через длины его рёбер.

Для решения задачи был выбран базис, состоящий из трёх некомпланарных векторов $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$. Затем вектор $\overrightarrow{DM_1}$, длину которого требовалось найти, мы разложили по этому базису. После чего вычислили скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{DM_1}$.

При векторном решении задач на вычисление углов поступают аналогично. Прежде всего, искомый угол между прямыми заменяют углом между векторами, которые параллельны данным прямым. Затем эти векторы выражают через базисные векторы и, пользуясь определением скалярного произведения векторов, находят угол.

П р и м е р 6. Боковые грани правильной шестиугольной призмы — квадраты. Найти величину угла между скрещивающимися диагоналями смежных граней призмы.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма (рис. 18). Требуется найти угол между прямыми AB_1 и BC_1. Разложим векторы $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ по некомпланарным векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$. Получим:

$$\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c}.$$

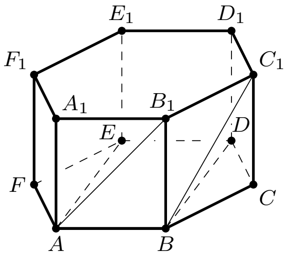

Рис. 18

Длина векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ одинаковы, примем их за 1, тогда $AB_1 = BC_1 = \sqrt{2}$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°, $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1} = (\vec{a}+\vec{c})(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Пусть φ — угол между прямыми AB_1 и BC_1, тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{AB_1\cdot BC_1} = \frac{3}{4}.$$

Итак, $\varphi = \arccos\dfrac{3}{4}$.

Векторные решения часто значительнее проще и эффективнее решений, полученных элементарными средствами, и отличаются большей общностью.

П р и м е р 7. Построить общий перпендикуляр скрещивающихся диагоналей двух смежных граней куба. Найти расстояние между этими диагоналями, если ребро куба равно 1.

Р е ш е н и е. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 19). Требуется построить общий перпендикуляр MN скрещивающихся прямых BA_1 и CB_1.

Введём обозначения: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$. Пусть $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CB_1}$. Разложим векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{CN}$ по базисным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Получим:

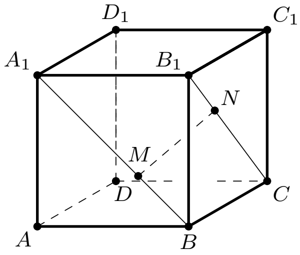

Рис. 19

$$\overrightarrow{BA_1} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{CB_1} = \vec{c} - \vec{b},$$
$$\overrightarrow{BM} = x(\vec{a} + \vec{c}), \quad \overrightarrow{CN} = y(\vec{c} - \vec{b}).$$

Значит, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -x\vec{a} + (1-y)\vec{b} + (y-x)\vec{c}$. Отрезок MN является общим перпендикуляром прямых BA_1 и CB_1 тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0$ и $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно перпендикулярны, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$. Согласно условию задачи $\vec{a}^{\,2} = \vec{b}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} = 1$. Учитывая это, выполним скалярное умножение векторов и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad y = \frac{2}{3}.$$

Значит, точки M и N делят диагонали BA_1 и CB_1 в отношении $1:2$, считая от точек B и B_1. Отрезок MN можно построить.

При найденных значениях x и y имеем:

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

Вычислив скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{MN}$, найдём расстояние между прямыми BA_1 и CB_1:

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Заметим ещё, что с помощью таких же вычислений можно решить более общую задачу: найти расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней прямоугольного параллелепипеда, измерения которого известны.

П р и м е р 8. Плоские углы трёхгранного угла равны α, β и γ. Найти его двугранные углы (теорема косинусов для трёхгранного угла).

Р е ш е н и е. Отложим на рёбрах трёхгранного угла от его вершины O единичные векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{e_3}$. Согласно условию $\angle BOC=\alpha$, $\angle COA=\beta$, $\angle AOB=\gamma$. Величины двугранных углов OA, OB, OC обозначим через A, B и C. Перпендикулярно прямой OA проведём отрезки BM и CN (рис. 20). Тогда $\angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NC})=\angle A$, $\overrightarrow{OM}=\cos\gamma\vec{e_1}$, $\overrightarrow{ON}=\cos\beta\vec{e_1}$. По правилу сложения векторов

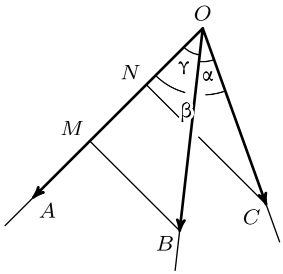

Рис. 20

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}.$$

Учитывая, что $MB\perp ON$, $NC\perp OM$, перемножим скалярно эти равенства и получим:

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NC},$$

или

$$\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=\cos\beta\cos\gamma+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NC}.$$

Но $\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=\cos\alpha$, $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NC}=\sin\beta\sin\gamma\cos A$, следовательно,

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

откуда

$$\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Это одна из важнейших формул для трёхгранного угла. В частном случае, если двугранный угол при ребре OA — прямой, то $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$, и обратно.

При выводе формулы были использованы единичные векторы, что позволило упростить выкладки. Такой же приём целесообразно применить при решении задач §7, в которых речь идёт о биссектрисах плоских углов трёхгранного угла.

§6. *Аффинные задачи*

106. Даны четыре произвольные точки пространства A, B, C, D. Точка M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

Используя это равенство, докажите, что если отрезки AD и BC не параллельны, то существует треугольник, стороны которого равны MN, $\frac{1}{2}AD$ и $\frac{1}{2}BC$.

107. В пространстве даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки K, L, M, N — соответственно середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Докажите, что если точки K, L, M, N различны и не лежат на одной прямой, то $KLMN$ — параллелограмм.

108. Два параллелограмма $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ с общей вершиной O лежат в разных плоскостях. Докажите, что

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1}.$$

Выясните геометрический смысл этого равенства.

109. Дан тетраэдр $ABCD$. На рёбрах AB и CD взяты точки M и N так, что $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = 2$. Докажите, что прямые AC, BD и MN параллельный одной плоскости.

110. Дан тетраэдр $ABCD$. На рёбрах AB и CD взяты соответственно точки M и N, делящие их в равных отношениях: $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k$. Выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

* * *

111. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке (центроид тетраэдра) и делятся ею пополам.

112. а) Докажите, что точка M является центроидом треугольника ABC тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

б) Докажите, что точка M является центроидом тетраэдра $ABCD$ тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

113. а) В пространстве даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Точки M и M_1 — их центроиды. Докажите, что

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}).$$

б) Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость, $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Найдите расстояние между центроидами этих треугольников.

114. а) Даны два тетраэдра $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки M и M_1 — их центроиды. Докажите, что

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}).$$

б) Прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, проходящие через соответственные вершины двух тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, параллельны. Докажите, что прямая MM_1, проходящая через центроиды M и M_1 этих тетраэдров, параллельна прямой AA_1.

115. а) Дан треугольник ABC и его медиана CM. Прямая l пересекает отрезки CA, CB и CM соответственно в точках A_1, B_1 и M_1 таких, что $\frac{CA_1}{CA}=k$, $\frac{CB_1}{CB}=l$, $\frac{CM_1}{CM}=m$. Докажите, что имеет место равенство

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}\right).$$

б) Даны тетраэдр $ABCD$ и его медиана DM. Плоскость π пересекает отрезки DA, DB, DC и DM соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и M_1. Докажите, что

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{n}\right),$$

где $\frac{DA_1}{DA}=k$, $\frac{DB_1}{DB}=l$, $\frac{DC_1}{DC}=n$, $\frac{DM_1}{DM}=m$.

* * *

116. а) Докажите, что середины сторон треугольника являются вершинами треугольника, гомотетичного данному. Чему равен коэффициент гомотетии?

б) Докажите, что центроиды граней тетраэдра являются вершинами тетраэдра, гомотетичного данному. Укажите центр гомотетии и коэффициент гомотетии.

117. Для каждой вершины тетраэдра строится точка, симметричная ей относительно центроида противоположной грани. Докажите, что построенные точки являются вершинами тетраэдра, гомотетичного данному. В какой точке находится центр гомотетии и каков коэффициент гомотетии?

118. а) Даны треугольник ABC и точка P в его плоскости. Докажите, что точки, симметричные точке P относительно середин сторон треугольника, являются вершинами треугольника, симметричного данному. Постройте центр симметрии этих треугольников.

б) Дан тетраэдр $ABCD$ и произвольная точка P пространства. Точка M_1 — центроид грани BCD. Построена точка A_1 такая, что $\overrightarrow{PA_1}=3\overrightarrow{PM_1}$. Аналогичным способом построены точки B_1, C_1 и D_1. Докажите, что тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ симметричен тетраэдру $ABCD$ относительно центра S, где $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{PM}$ и M — центроид тетраэдра $ABCD$.

* * *

119. Плоскость, проходящая через середины K и M рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$, пересекает ребро BC в точке L и ребро AD в точке N. Докажите, что $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AN}{ND}$ и отрезок LN делится прямой KM пополам.

120. На сторонах AB, BC, CD, DA неплоского четырёхугольника $ABCD$ (или на их продолжениях) даны соответственно точки K, L, M и N. Докажите, что эти точки принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда $\dfrac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MD}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NA}} = 1$ (теорема Менелая).

* * *

121. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На прямых BA_1 и CB_1 взяты соответственно точки M и N так, что $\dfrac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{BA_1}} = \dfrac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{CB_1}}$. Докажите, что прямая MN параллельна одной из граней параллелепипеда.

122. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведите прямую, параллельную его диагонали AC_1 и пересекающую диагонали BA_1 и CB_1 его граней.

123. Дан тетраэдр $ABCD$. Через середины M и N рёбер CD и AB проведены прямые BM и CN. Постройте прямую, пресекающую эти прямые и параллельную медиане DE грани ACD.

§7. *Метрические задачи*

124. Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы, $AB = a$, $\angle BAD_1 = 60^\circ$. Найдите длины диагоналей AC_1 и BD_1.

125. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD$ — квадрат со стороной a, ребро AA_1 также равно a и образует с рёбрами AB и AD углы, равные 60°. Найдите длины диагоналей и площадь диагонального сечения ACC_1A_1.

126. Высота правильной четырёхугольной призмы вдвое больше высоты основания. Найдите величину угла между диагональю призмы и не пересекающей её диагональю боковой грани.

127. Точка K — середина ребра BB_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\angle AKC_1 > 90^\circ$. При каком отношении высоты призмы к стороне основания $\angle AKC_1 = 120^\circ$?

128. В тетраэдре $ABCD$ ребро AD перпендикулярно грани ABC, $AD = a$, $AB = b$, $\angle BAC = 45^\circ$. Найдите угол между прямыми AC и BD. Вычислите этот угол при $a = b$.

129. Дан тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине D. Точки M и N — середины рёбер AB и CD. Найдите угол между прямыми AN и DM, если $DA = DB = 1$ и $DC = 2$.

* * *

130. а) Докажите, что если биссектрисы двух плоских углов трёхгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна первым двум биссектрисам.

б) Проведены биссектрисы плоских углов трёхгранного угла. Докажите, что углы между этими биссектрисами, взятыми попарно, либо все острые, либо все прямые, либо все тупые.

131. а) Выразите через плоские углы α, β, γ трёхгранного угла косинус угла между его ребром и биссектрисой противолежащего угла.

б) Докажите, что если сумма двух плоских углов трёхгранного угла равна 180°, то их общая сторона перпендикулярна биссектрисе третьего плоского угла.

132. а) Известны плоские углы трёхгранного угла $OABC$: $\angle BOC=\alpha$, $\angle COA=\beta$, $\angle AOB=\gamma$. Вычислите косинус угла между биссектрисами углов BOC и COA.

б) Найдите зависимость между плоскими углами α, β, γ трёхгранного угла, если их биссектрисы, взятые попарно, образуют три равных между собой угла.

133. Докажите, что биссектрисы двух плоских углов трёхгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

* * *

134. а) Докажите, что для любых трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеет место равенство:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})+\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0.$$

б) Докажите, что для любых четырёх точек A, B, C, D пространства имеет место векторное равенство

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

135. а) Докажите, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что если противоположные рёбра AB и CD, AC и BD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны, то противоположные рёбра AC и BD также перпендикулярны.

136. а) Высоты треугольника ABC (или их продолжения) пересекаются в точке H, точка O — центр окружности, описанной около треугольника. Докажите, что

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

(Точка H называется ортоцентром треугольника ABC).

б) Дан тетраэдр $ABCD$, высоты которого пересекаются в одной точке H. Докажите, что

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$

где O — центр сферы, описанной около тетраэдра.

137. Докажите, что высоты тетраэдра или их продолжения пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны.

(Тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке H, называется ортоцентрическим, а точка H — ортоцентром тетраэдра.)

138. Вычислите длину отрезка, соединяющего середину рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$, если известны длины его рёбер: $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$.

* * *

139. а) Докажите, что во всяком треугольнике ABC центр O описанной окружности, центроид M и ортоцентр H лежат на одной прямой, причём $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}$.

б) Докажите, что центр O описанной сферы, центроид M и ортоцентр H ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ лежат на одной прямой, причём точка O и H симметричны относительно точки M.

* * *

140. а) Докажите, что если O — центр описанной около треугольника ABC окружности и M — его центроид, то

$$OM^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

где R — радиус описанной окружности и a, b, c — стороны треугольника.

б) Известны длины рёбер тетраэдра $ABCD$ и радиус R сферы, описанной около него. Вычислите расстояние от центра O сферы до точки пересечения M медиан тетраэдра.

Какие следствия можно вывести из задач а) и б)?

* * *

141. а) Докажите, что расстояние от любой точки P пространства до вершин треугольника ABC и до его центроида M связаны соотношением

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3PM^2.$$

(теорема Лейбница).

б) Докажите, что если M — центроид тетраэдра $ABCD$ и P — произвольная точка пространства, то

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + 4PM^2.$$

142. а) В плоскости треугольника ABC найдите точку, сумма квадратов расстояний от которого до вершин треугольника наименьшая.

б) Найдите точку пространства, сумма квадратов расстояний от которой до вершин данного тетраэдра наименьшая.

в) Дан треугольник ABC и некоторая точка P пространства. Докажите, что

$$PM^2 = \frac{1}{3}(PA^2 + PB^2 + PC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2),$$

где M — центроид треугольника.

143. Дана сфера радиуса R с центром O. Через точку M, не принадлежащую сфере, проведена прямая, пересекающая сферу в точках A и B. Докажите, что

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2.$$

* * *

144. Даны две точки A и B. Найдите множество точек M пространства, для которых $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, где k — данное действительное число.

145. Даны три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой. Найдите множество точек M пространства, для которых

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

146. Дан треугольник ABC. Найдите множество точек M пространства, для которых

$$MA^2 + MB^2 = 2MC^2.$$

147. Дан треугольник ABC. Найдите множество точек M пространства, для которых

$$MA^2 + MB^2 = MC^2.$$

* * *

148. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих её сторон.

Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для тетраэдра.

149. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что

$$DA^2 + DB^2 + DC^2 > \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

150. Даны четыре точки A, B, C, D пространства. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geqslant AC^2 + BD^2.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

151. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите косинус угла φ между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней. Вычислите φ, если $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

152. Длины всех рёбер правильной треугольной призмы равны a. Постройте общий перпендикуляр двух скрещивающихся диагоналей боковых граней и найдите его длину.

153. Все плоские углы тетраэдра $ABCD$ при вершине D прямые. Точка K — середина ребра AB. Найдите косинус угла φ между прямыми CA и DK. Докажите, что $\angle BAC = \varphi$. Найдите расстояние от точки K до прямой AC, если $DA = 1$, $DB = DC = 2$.

154. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В каком отношении делит общий перпендикуляр прямых AA_1 и BD_1 отрезки AA_1 и BD_1, если $AB = a$ и $AD = b$? Найдите длину этого перпендикуляра.

155. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, каждое ребро которой равно 1. Постройте общий перпендикуляр MN прямых AB и SC и найдите его длину. В каком отношении точки M и N делят отрезки AB и SC?

Глава 4

Метод координат

Некоторые метрические задачи удобно решать при помощи координат. Это прежде всего задачи, в которых речь идёт о кубе, прямоугольном параллелепипеде или тетраэдре с прямым трёхгранным углом. Прямоугольная система координат в пространстве естественным образом связывается с этими многогранниками, при этом среди координат их вершин много нулей, что упрощает вычисления.

Сущность координатного метода, как и векторного, заключается в том, что геометрическая задача переводится на язык алгебры, и её решение сводится к решению уравнений, неравенств или их систем. При решении некоторых задач настоящей главы могут потребоваться некоторые уравнения и формулы, которые в школьном курсе геометрии не изучаются. Необходимый дополнительный материал, помещённый ниже, можно изучить самостоятельно.

Из курса стереометрии известно, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n} = \{A,\, B,\, C\}$ в прямоугольной системе координат имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$\text{или}\quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{где}\quad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Обратно, всякое уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет в координатном пространстве единственную плоскость, которая перпендикулярна вектору с координатами $\{A,\, B,\, C\}$.

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется заданием трёх точек, не лежащих на одной прямой. Пусть данная плоскость пересекает оси координат в точках $M_1(a,\, 0,\, 0)$, $M_2(0,\, b,\, 0)$, $M_3(0,\, 0,\, c)$, но не проходит через начало координат. Подставив координаты этих точек в общее уравнение плоскости, получим:

$$Aa + D = 0, \quad Bb + D = 0, \quad Cc + D = 0,$$

где числа a, b, c и D отличны от нуля. Отсюда находим:

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c},$$

и уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ приводится к виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Полученное уравнение называют уравнением плоскости в отрезках. Оно находит применение при решении задач.

Как известно, расстояние между двумя точками $A(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $B(x_2,\, y_2,\, z_2)$ вычисляется по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пользуясь этой формулой, легко вывести уравнение сферы.

В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C(a,\, b,\, c)$ имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

В частности, если центр сферы совпадает с началом координат, то уравнение принимает вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

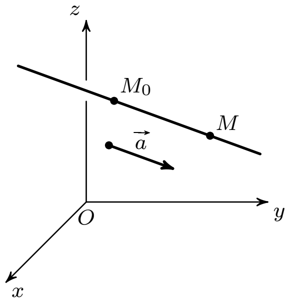

Рис. 21

Рассмотрим способы задания прямой в координатном пространстве.

Пусть прямая l проходит через данную точку $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ и параллельна ненулевому вектору $\vec{a} = \{a_1,\, a_2,\, a_3\}$. Вектор $\vec{a}$ называют направляющим вектором прямой l (рис. 21).

Произвольная точка $M(x,\, y,\, z)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, т. е. когда выполняется равенство:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, \quad \text{или} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\vec{a},$$

где t — некоторое число (параметр). Это соотношение в координатах равносильно трём уравнениям:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases}$$

Их называют параметрическими уравнениями прямой.

Если прямая l параллельна оси Oz, то вектор $\vec{k} = \{0,\, 0,\, 1\}$ является её направляющим вектором, и уравнения прямой принимают вид: $x = x_0$, $y = y_0$ (координата z принимает любое значение).

Пусть ни одна из координат вектора $\vec{a}$ не равна нулю. Тогда, исключив из полученных уравнений параметр t, получим уравнения

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Они называются каноническими уравнениями прямой.

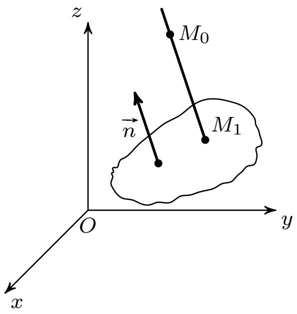

Рис. 22

Выведем формулу для вычисления расстояния от данной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пусть перпендикуляр, проведённый из точки M_0 к плоскости α, пересекает её в точке M_l (рис. 22). Тогда

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x,\ y_1 - y,\ z_1 - z\}.$$

Так как вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости α и, следовательно, коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_0M_1}$, то, согласно определению скалярного произведения,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot (\pm 1).$$

Обозначим $|\overrightarrow{M_0M_1}| = d$. Тогда

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{n}|}.$$

Выразим скалярное произведение, стоящее в числителе дроби, через координаты векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$. Получим:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = A(x_l - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) =$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Точка M_1 лежит в плоскости α, поэтому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Таким образом, имеем:

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}| = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|.$$

Учитывая, что $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, получаем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Итак, для того, чтобы вычислить расстояние от точки M_0 до плоскости α, надо в многочлен $Ax + By + Cz + D$ вместо x, y, z подставить координаты точки M_0, взять модуль полученного числа и разделить его на число $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Пример 1. Дан тетраэдр $ABCD$, у которого все плоские углы при вершине D прямые, $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$ и $DH = h$, где DH — высота тетраэдра. Доказать, что

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Решение. Примем точку D за начало, а направленные прямые DA, DB, DC — за оси прямоугольной системы координат. Вершины тетраэдра будут иметь координаты: $A(a,\,0,\,0)$, $B(0,\,b,\,0)$, $C(0,\,0,\,c)$. Запишем уравнение плоскости ABC как уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

По формуле расстояния от точки до плоскости найдём высоту тетраэдра:

$$h=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}},$$

и получим соотношение:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

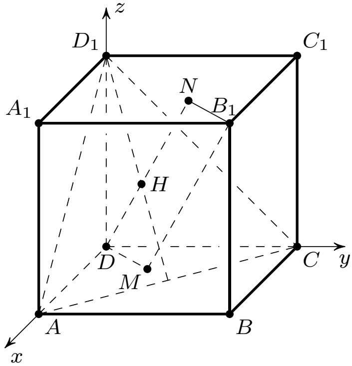

Рис. 23

Пример 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD=a$, $AB=b$, $AA_1=c$. Через вершину B_1 проведена прямая l перпендикулярно плоскости ACD_1. Доказать, что если $a>b>c$, то прямая l пересекает грань $ABCD$ в некоторой точке M. Найти B_1M.

Решение. Введём в пространстве прямоугольную систему координат с началом в точке D, как показано на рис. 23.

Вершины параллелепипеда будут иметь координаты $A(a,\,0,\,0)$, $C(0,\,b,\,0)$, $D_1(0,\,0,\,c)$, $B_1(a,\,b,\,c)$.

Запишем уравнение плоскости ACD_1:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Вектор $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{a},\,\dfrac{1}{b},\,\dfrac{1}{c}\right\}$ перпендикулярен плоскости ACD_1 и является направляющим вектором прямой l. Уравнения прямой l:

$$\begin{cases} x=a+\dfrac{1}{a}t,\\[2mm] y=b+\dfrac{1}{b}t,\\[2mm] z=c+\dfrac{1}{c}t, \qquad \text{где} \quad t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Найдём координаты точки $M(x_1,\,y_1,\,z_1)$ пересечения прямой l с плоскостью Oxy. Пусть $z_1=0$, тогда $t=-c^2$, $x_1=\dfrac{a^2-c^2}{a}$, $y_1=\dfrac{b^2-c^2}{b}$.

Очевидно, если $a > b > c$, то $0 < x_1 < a$, $0 < y_1 < b$. Значит, точка M лежит внутри прямоугольника $ABCD$.

По формуле расстояния между двумя точками находим

$$B_1M = c^2\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}},$$

или $B_1M = \dfrac{c^2}{h}$, где h — расстояние от точки D до плоскости ACD_1.

П р и м е ч а н и е. Полученная формула показывает, как получить элементарно-геометрическое решение задачи.

Пусть перпендикуляр DH к плоскости ACD_1 пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ в точке N. Тогда $MDNB_1$ — параллелограмм. Из треугольника DND_1 следует, что $DN = \dfrac{DD_1^2}{DH}$, и поэтому $B_1M = \dfrac{c^2}{h}$.

При решении задач методом координат обычно удаётся избежать искусственных дополнительных построений. Однако по возможности следует сочетать аналитический и геометрический методы, чтобы получить более простое решение задачи. После решения задачи координатным методом советуем попытаться отыскать также элементарно-геометрическое решение, которое часто бывает более наглядным и простым. Это иногда удаётся, как показано на примере предыдущей задачи.

П р и м е р 3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какое наибольшее значение может принимать угол наклона его диагонали BD_1 к плоскости ACD_1?

Р е ш е н и е. Выберем в пространстве прямоугольную систему координат так же, как при решении предыдущей задачи (рис. 24). Уравнение

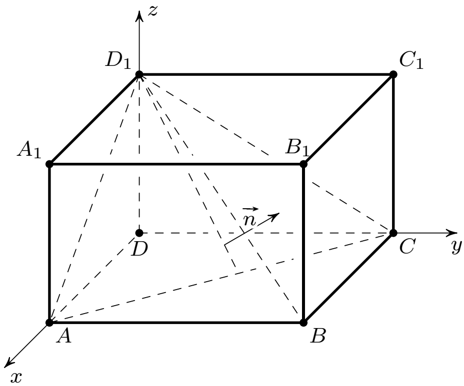

Рис. 24

плоскости ACD_1 имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Вектор $\vec{n} = \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}$ перпендикулярен плоскости ACD_1. Обозначим искомый угол через φ. Легко доказать, что $\sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{|\overrightarrow{D_1B} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{D_1B}| \cdot |\vec{n}|}$. Находим: $\overrightarrow{D_1B} = \{a,\, b,\, -c\}$, $\overrightarrow{D_1B} \cdot \vec{n} = 1$. Значит,

$$\sin\varphi = \frac{1}{k}, \quad \text{где} \quad k^2 = (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Из очевидного неравенства $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 \geqslant 0$ следует, что $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geqslant 2$. Следовательно,

$$k^2 = 3 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) \geqslant 9$$

и $k \geqslant 3$, причём $k = 3$ только тогда, когда $a = b = c$.

Таким образом, $\sin\varphi \leqslant \frac{1}{3}$ и φ принимает наибольшее значение, равное $\arcsin\frac{1}{3}$ лишь при условии, что параллелепипед является кубом.

Итак, если $\vec{a}$ — направляющий вектор данной прямой и $\vec{n}$ — вектор, перпендикулярный плоскости α, то угол φ между прямой и этой плоскостью находится из равенства

$$\sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Величина угла между двумя плоскостями берётся по определению от 0° до 90°. Если $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ — векторы, перпендикулярные соответственно плоскостям α и β, то угол φ между этими плоскостями находится из равенства

$$\cos\varphi = |\cos\angle(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}.$$

(этот угол либо равен углу между векторами $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$, либо дополняет его до 180°).

Пример 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между плоскостями ABD_1 и BCD_1.

Решение. Так как $DA_1 \perp AD_1$ и $DA_1 \perp AB$, то вектор $\overrightarrow{DA_1}$ перпендикулярен плоскости ABD_1. Аналогично, вектор $\overrightarrow{DC_1}$ перпендикулярен плоскости BCD_1 (рис. 25).

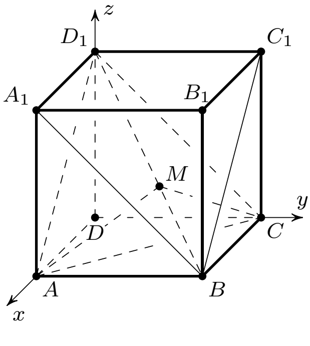

Рис. 25

Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке D и координатными векторами $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD_1}$. Тогда вершины куба будут иметь координаты $A(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$, $A_1(1, 0, 1)$, $C_1(0, 1, 1)$, а векторы $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{DC_1}$ — такие же координаты, как точки A_1 и C_1: $\overrightarrow{n_1}=\{1, 0, 1\}$, $\overrightarrow{n_2}=\{0, 1, 1\}$.

Угол φ между плоскостями ABD_1 и BCD_1 найдём по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}.$$

Так как $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1$ и $|\overrightarrow{n_1}|=|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{2}$, то $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$ и $\varphi=60^\circ$.

Заметим, что линейный угол AMC двугранного угла с ребром BD_1 тупой и равен 120°.

Традиционное решение задачи заключается в построении линейного угла AMC двугранного угла BD_1, вычисления сторон треугольника AMC, а затем и угла AMC.

Аналитическое решение задачи подсказывает ещё один более простой способ решения. Треугольник DA_1C_1 — равносторонний, так как каждая его сторона равна диагонали квадрата со стороной 1. Значит, угол между векторами $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$ равен 60°.

При решении задач данной главы советуем не ограничиваться применением координатного метода, а каждый раз пытаться решить задачу и элементарно-геометрическим методом и сравнивать результаты.

Метод координат с успехом может применяться при решении задач на отыскание множества точек, обладающих определённым свойством.

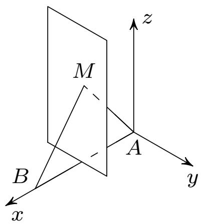

Рис. 26

Пример 5. Даны две точки пространства A и B. Найти множество точек M пространства, для которых

$$MA^2-MB^2=c^2,$$

где c — данный отрезок.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке A, оси абсцисс придадим направление луча AB (рис. 26).

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства, $AB=a$. Точка B будет иметь координаты $(a, 0, 0)$. По формуле расстояния между двумя точками получим уравнение:

$$x^2+y^2+z^2-(x-a)^2-y^2-z^2=c^2,$$

или $2a-a^2=c^2$, откуда $x=\dfrac{a^2+c^2}{2a}$.

Следовательно, искомое множество точек является плоскостью, перпендикулярной прямой AB.

§8. *Вычисление расстояний и углов*

156. Дан тетраэдр $ABCD$, все плоские углы при вершине D которого прямые. Точка M, принадлежащая грани ABC, одинаково удалена от всех других граней. Найдите DM, если $DA = a$, $DB = b$ и $DC = c$.

157. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с прямым углом C. Из вершины C проведена прямая перпендикулярно плоскости ABC_1, пересекающая плоскость $A_1B_1C_1$ в точке M. Найдите CM, если $CC_1 = 1$, $CA = 2$ и $CB = 3$.

158. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды $NABCD$ образует с основанием угол $45°$. Найдите синус угла наклона ребра ND к плоскости ABN.

159. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна стороне основания и равна $\sqrt{3}$. Через вершину A проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру SB, пересекающая ребро SB в точке N. Найдите объём пирамиды $NABC$.

* * *

160. Все плоские углы тетраэдра $ABCD$ при вершине D прямые. Точки M и N — середины рёбер AC и BD. Найдите длину отрезка MN и угол наклона прямой MN к плоскости ABC, если $DA = 1$, $DB = DC = 2$.

161. В основании пирамиды $NABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро ND перпендикулярно основанию. Плоскость, проходящая через вершину B и середины рёбер NA и NC, пересекает ребро ND в точке L. Найдите BL, площадь сечения и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если $AD = 2$, $AB = 4$, $DN = 6$.

162. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AA_1 = 2$, $AB = 3$, $AD = 4$. Через вершину A проведите плоскость, перпендикулярную диагонали B_1C грани, и вычислите площадь сечения.

163. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в которой $AB = a$ и $AA_1 = 2a$. Через вершину A проведите плоскость, перпендикулярную диагонали DB_1 призмы, и найдите площадь сечения. В каком отношении точка M пересечения прямой DB_1 с плоскостью сечения делит отрезок DB_1?

* * *

164. Через точку M, делящую диагональ куба в отношении $2:3$, проведите плоскость перпендикулярно этой диагонали. Найдите периметр сечения, если ребро куба равно a.

165. Через центр куба проведите плоскость перпендикулярно его диагонали. Докажите, что сечение куба этой плоскостью есть правильный шестиугольник.

§9. *Многогранники и сфера*

166. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и углом $60°$. Высота пирамиды равна h. Двугранные углы при основании пирамиды равны. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду. Вычислите радиус при $a = 4$ и $h = 3$.

167. В правильную четырёхугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h вписана сфера. Найдите радиус сферы, если $a = 12$ и $h = 8$.

168. а) Внутри прямого угла дана точка A, расстояния от которой до сторон угла равны m и n. Вычислите радиус окружности, проходящей через точку A и касающейся сторон данного угла. Сколько решений имеет данная задача?

б) Через данную внутри прямого трёхгранного угла точку A проведена сфера, касающаяся всех его граней. Найдите радиус этой сферы, если расстояния от точки A до граней равны соответственно m, n и p. Вычислите радиус сферы, если: 1) $m = 1$, $n = 2$, $p = 5$; 2) $m = n = 1$, $p = 4$; 3) $m = 1$, $n = 2$, $p = 6$.

169. Дан прямоугольный тетраэдр $OABC$ с прямым трёхгранным углом при вершине O. Точка P расположена в плоскости грани ABC, причём $\frac{AP}{AO} = u$, $\frac{BP}{BO} = v$, $\frac{CP}{CO} = w$. Докажите, что

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

где α — угол наклона прямой OP к плоскости ABC.

Примечание. Эта формула используется в теории изображения пространственных фигур (в аксонометрии).

170. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ прямые, $DA = 4$, $DB = 8$, $DC = 12$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр.

171. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите радиус сферы, проходящей через середину E ребра AB и вершины A, A_1 и C_1 куба.

172. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a, высота равна $\sqrt{2}a$. Найдите радиус сферы, проходящей через середины рёбер AA_1, BB_1 и через вершины A и C_1. Докажите, что эта сфера проходит также через вершину B.

173. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник ABC, ребро SC перпендикулярно плоскости основания, $AB = 1$ и $SC = 3$. Сфера проходит через середину M ребра SA, касается плоскости ABC в точке B и пересекает ребро SB в точке N. Найдите радиус сферы и отношение $\frac{SN}{NB}$.

* * *

174. В куб, ребро которого равно a, вписана сфера. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки сферы до вершин куба постоянна. Вычислите эту сумму.

175. Дан куб, ребро которого равно a. Найдите множество точек пространства, сумма квадратов расстояний от которых до вершин куба равна $12a^2$.

* * *

176. Даны две точки A и B. Найдите множество точек M пространства, для которых
$$MA^2 + MB^2 = 2AB^2.$$

177. а) Даны две точки A и B. Найдите множество точек M пространства, удалённых от A вдвое дальше, чем от B.

б) Даны две точки A и B. Найдите множество точек M пространства таких, что
$$\frac{MA}{MB} = k, \quad k > 1.$$

178. Дан треугольник ABC с прямым углом C. Найдите множество точек M пространства, для которых
$$MA^2 + MB^2 = 3MC^2.$$

179. а) В плоскости равностороннего треугольника ABC найдите множество точек M таких, что из отрезков AM, BM и CM можно составить прямоугольный треугольник с гипотенузой CM.

б) Дан равносторонний треугольник ABC. Найдите множество точек M пространства, для которых
$$MA^2 + MB^2 = MC^2.$$

180. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, ребро которого равно a. Найдите множество точек M пространства, сумма квадратов расстояний от которых до вершин тетраэдра равна $3a^2$.

Глава 5

Наибольшие и наименьшие значения

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин ещё в глубокой древности привлекали внимание крупнейших математиков. Так, Евклид, живший около 300 года до н. э., в VI книге своих знаменитых «Начал» показал, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Задачи на максимум и минимум (или, короче, задачи на экстремум) часто возникают в повседневной жизни, в технике, экономике, естествознании. Для решения существуют различные элементарные приёмы и методы. Некоторые планиметрические задачи изящно решаются с помощью геометрических преобразований: осевой симметрии, параллельного переноса, поворота вокруг точки, другие — решаются аналитически и сводятся к исследованию квадратичной функции. Аппарат дифференциального исчисления даёт общий, единообразный метод отыскания экстремальных значений функций, рассматриваемых в задачах. Тем не менее, при решении стереометрических задач иногда к цели можно прийти быстрее и более коротким путём, используя неравенства и тригонометрические функции.

Из школьного курса математики хорошо известно неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

При решении ряда задач настоящей главы может оказаться полезным неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трёх положительных чисел:

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3},$$

а также некоторые другие. Например, из очевидного неравенства

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$$

вытекает цепочка неравенств:

$$ab + bc + ca \leqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2,$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c$.

Чтобы убедится в справедливости неравенства

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3},$$

положим: $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$. Тогда доказываемое неравенство приводится к виду:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0.$$

Многочлен, стоящий в левой части неравенства, разложим на множители:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Из приведённого выше неравенства следует, что

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geqslant 0.$$

Учитывая, что $x+y+z>0$, получаем:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $x=y=z$, что для исходного неравенства равносильно условию $a=b=c$.

Из неравенства $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$ следует, что если $a+b+c=k$, где k — постоянное число, то $abc \leqslant \left(\dfrac{k}{3}\right)^3$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=b=c$.

Другими словами, произведение нескольких (в приведённом случае — трёх) положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей.

Точно так же, сумма нескольких положительных переменных слагаемых, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение при равенстве слагаемых.

Пользуясь этими следствиями, можно получить экономные решения ряда геометрических задач на максимум и минимум.

Предварительно полезно решить несколько примеров на нахождение экстремальных значений функций элементарными способами. Например, следующие.

Найти наименьшие значения функций:

1) $y=4x+\dfrac{1}{x}$, $x>0$ ($y=4$ при $x=\dfrac{1}{2}$);

2) $y=x^2-4x+3$ ($y=-1$ при $x=2$).

Найти наибольшие значения функций:

3) $y=x\sqrt{4-x^2}$, $0<x<2$ ($y=2$ при $x=\sqrt{2}$);

4) $y=x^2(a-2x)$, $0<x<\dfrac{a}{2}$.

Представим функцию y в виде произведения: $y=x\cdot x\cdot(a-2x)$. Так как сумма сомножителей — постоянное число: $x+x+(a-2x)=a$, то функция y принимает наибольшее значение при $x = a - 2x$, т. е. $x = \frac{1}{3}a$, при этом $y_{\max} = \frac{1}{27}a^3$.

Большинство стереометрических задач на отыскание наибольших и наименьших значений решается аналитически. Чаще всего используется соответствующая формула, выбирается независимая переменная, которую обычно обозначают буквой x, получают функцию, выражающую величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти, определяют границы изменения аргумента x. Полученная функция исследуется элементарными методами или средствами математического анализа.

П р и м е р 1. Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует цилиндр наибольшего объёма.

Р е ш е н и е. Пусть прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг стороны CD (рис. 27). Согласно условию задачи $AB + BC = p$. Введём независимую переменную: $BC = x$. Тогда $AB = p - x$. Объём V цилиндра, полученного при вращении прямоугольника, выразится функцией:

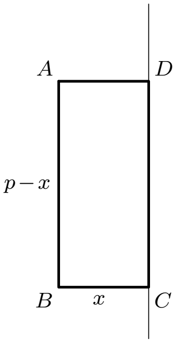

Рис. 27

$$V = \pi x^2(p - x), \quad 0 < x < p.$$

Наибольшее значение функции V можно найти без использования производной. Представим выражение V следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}\pi x \cdot x(2p - 2x).$$

Так как сумма сомножителей, содержащих x, постоянна и равна $2p$, то их произведение будет наибольшим при $x = 2p - 2x$, т. е. $x = \frac{2}{3}p$. Высота цилиндра при этом будет равна $\frac{1}{3}p$ и $V_{\max} = \frac{4\pi}{27}p^3$.

Независимую переменную обычно можно выбрать разными способами. Её желательно выбрать так, чтобы более коротким путём получить выражение искомой функции и чтобы это выражение было по возможности более простым.

П р и м е р 2. В сферу радиуса R вписан конус. При какой высоте конуса его объём будет наибольшим?

Р е ш е н и е 1. Обозначим через r и h радиус основания и высоту конуса соответственно. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник ABN, вписанный в окружность, диаметр MN которой равен

$2R$, ND — высота конуса, AD — радиус его основания (рис. 28). Воспользуемся формулой объёма конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

За независимую переменную удобно принять h. Так как $\angle MAN = 90^\circ$, то треугольник MAN — прямоугольный и в силу известной теоремы планиметрии сразу получаем:

$$AD^2 = MD \cdot DN, \quad \text{или} \quad r^2 = (2R - h) \cdot h.$$

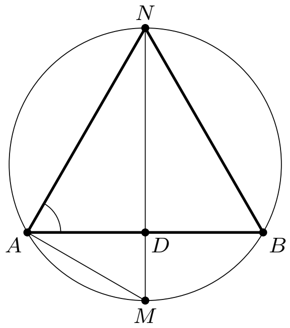

Рис. 28

Таким образом, объём V конуса есть функция переменной h:

$$V = \frac{1}{3}\pi(2R - h)h^2, \quad 0 < h < 2R.$$

Наибольшее значение функции V можно почти устно найти без использования производной. Рассмотрим произведение

$$(4R - 2h) \cdot h \cdot h.$$

Сумма положительных сомножителей постоянна, она равна $4R$, значит, произведение будет наибольшим при $h = 4R - 2h$, откуда $h = \frac{4}{3}R$.

Итак, при $h = \frac{4}{3}R$ объём конуса — наибольший и, как легко подсчитать, $V_{\max} = \frac{32}{27}\pi R^3$.

Решение 2. Примем за независимую переменную величину угла наклона образующей конуса к плоскости его основания, обозначим $\angle DAN = x$ (см. рис. 28). Переменные h и r можно выразить через R и x из прямоугольных треугольников AMN и ADN. Получим:

$$AN = 2R\sin x, \quad h = AN\sin x = 2R\sin^2 x, \quad AD = 2R\sin x\cos x.$$

Значит, $V = \frac{8}{3}\pi R^3 \sin^4 x \cos^2 x$, $0^\circ < x < 90^\circ$.

Потребовались более длинные вычисления, чем при решении задачи первым способом. Покажем, что наибольшее значение функции V снова можно найти без применения производной.

Функция V имеет наибольшее значение одновременно с функцией

$$y = 2\sin^4 x\cos^2 x, \quad \text{или} \quad y = \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot (2 - 2\sin^2 x),$$

т. е. при $\sin^2 x = 2 - 2\sin^2 x$. Отсюда $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Остаётся найти соответствующее значение h. Подставив найденное значение $\sin x$ в формулу $h = 2R\sin^2 x$, получим $h = \frac{4}{3}R$.

Заметим, что наибольшее или наименьшее значение комбинации тригонометрических функций иногда очень просто найти, если использовать подходящие формулы тригонометрии. Приведём примеры.

Найти наибольшее значение функции:

1) $y = \sin x \cos x$, $0^\circ < x < 180^\circ$.

Используя формулу синуса двойного аргумента, получаем: $y = \dfrac{\sin 2x}{2}$. Значит, $y_{\max} = \dfrac{1}{2}$ при $x = 45^\circ$.

2) $y = \sin x \sin(\alpha - x)$. Ответ. $y_{\max} = \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$ при $x = \dfrac{\alpha}{2}$.

3) $y = \sin x + \cos x$.

Используя формулу $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + 45^\circ)$, получаем $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = 45^\circ$.

4) $y = a\sin x + b\cos x$.

Воспользуемся тождеством:

$$(a\sin x + b\cos x)^2 + (a\cos x - b\sin x)^2 = a^2 + b^2.$$

Откуда $a\sin x + b\cos x \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} x = \dfrac{a}{b}$.

Пример 3. Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α вращается вокруг оси, проведённой через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. При каком значении угла α площадь поверхности тела вращения будет наибольшей?

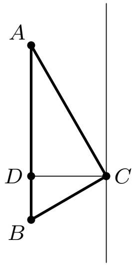

Рис. 29

Решение. Пусть прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = c$ и углом α, вращается вокруг оси l, параллельной AB (рис. 29). Поверхность тела вращения состоит из боковой поверхности цилиндра с образующей c и боковых поверхностей двух конусов. Радиусы оснований как цилиндра, так и конусов, равны высоте CD треугольника ABC.

Введём обозначения: $CD = r$, $BC = l_1$, $AC = l_2$. Площадь S поверхности вращения выражается формулой:

$$S = 2\pi cr + \pi r l_1 + \pi r l_2, \quad \text{или} \quad S = \pi r(2c + l_1 + l_2).$$

Из прямоугольных треугольников ABC и ACD имеем:

$$l_1 = c\sin\alpha, \quad l_2 = c\cos\alpha, \quad r = c\sin\alpha\cos\alpha.$$

В итоге получаем:

$$s = \frac{1}{2}\pi c^2 \sin 2\alpha(2 + \sin\alpha + \cos\alpha), \quad \text{где} \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Надо найти наибольшее значение функции S. Замечаем, что наибольшее значение функции $\sin 2\alpha$ равно 1 при $\alpha = 45^\circ$, а наибольшее значение функции $\sin\alpha + \cos\alpha$, как показано выше, равно $\sqrt{2}$, также при

$\alpha = 45°$. Значит, и S имеет наибольшее значение при $\alpha = 45°$, причём $S_{\max} = \frac{1}{2}\pi c^2(2 + \sqrt{2})$.

Замечаем, что тот же результат можно было бы получить и геометрическим путём, доказав, что высота CD, как и сумма катетов $l_1 + l_2$ прямоугольного треугольника ABC, имеют наибольшее значение, когда $AC = BC$, или $\alpha = 45°$. Ясно, что если наибольшее значение функции S находить с помощью производной, то вычисления будут очень громоздкими.

Далеко не все геометрические задачи на экстремум можно решить с помощью элементарных приёмов. Поэтому важно овладеть общим методом решения задач с применением производной. Рассмотрим следующую задачу.

Пример 4. Через диагональ правильной четырёхугольной призмы проведена плоскость, пересекающая оба основания. Высота призмы h, длина диагонали основания $2r$. Найти наибольшее и наименьшее значения площади сечения при 1) $h = 2$, $r = 3$; 2) $h = 4$, $r = 9$.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, через диагональ AC которой проведена плоскость, пересекающая отрезок B_1D_1 в некоторой точке M (рис. 30). Центры квадратов

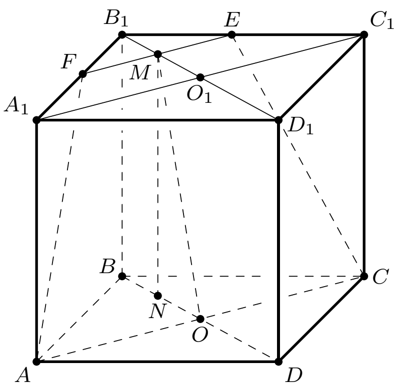

Рис. 30

$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ обозначим соответственно O и O_1. Плоскость A_1AC является плоскостью симметрии призмы. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда точка M принадлежит отрезку B_1O_1. Сечением призмы является равнобочная трапеция $ACEF$, которая вырождается в равнобедренный треугольник, если точка M совпадает с точкой B_1, и в прямоугольник, если M совпадает с точкой O_1.

Призма симметрична относительно плоскости B_1BD, MO — ось симметрии сечения ACE, $EM = MF = B_1M$.

Проведём перпендикуляр MN к плоскости основания. Обозначив $B_1M = x$, имеем $EF = 2x$, $NO = r - x$,

$$MO = \sqrt{(r-x)^2 + h^2}.$$

Площадь сечения $ACEF$ равна

$$S = (r+x)\sqrt{(r-x)^2 + h^2}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant x \leqslant r.$$

Функция S положительна на отрезке $[0; r]$ и имеет производную в каждой его точке. Следовательно, задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции y:

$$y = S^2 = (r+x)^2(x^2 - 2rx + r^2 + h^2)$$

на отрезке $[0; r]$.

Найдём производную от функции y:

$$y' = 2(r+x)(2x^2 - 2rx + h^2).$$

Так как $r + x > 0$, то $y' = 0$, если

$$2x^2 - 2rx + h^2 = 0. \tag{1}$$

1) При $h = 2$ и $r = 3$ уравнение (1) имеет вид

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

откуда $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Вычислив значения функции

$$S_1 = (3+x)\sqrt{(3-x)^2 + 4}$$

в этих точках и на концах промежутка $[0; 3]$, заполним таблицу 1.

Таблица 1

x	0	1	2	3
$S_1(x)$	$3\sqrt{13} \approx 10{,}8$	$8\sqrt{2} \approx 11{,}3$	$5\sqrt{5} \approx 11{,}1$	12

Сравнивая найденные значения, видим, что функция S_1 принимает наибольшее и наименьшее значения на концах промежутка $[0; 3]$, наибольшую площадь имеет диагональное сечение ACC_1A_1, а наименьшую — треугольник ACB_1.

2) При $h = 4$ и $r = 9$ уравнение (1) имеет вид

$$x^2 - 9x + 8 = 0.$$

Отсюда $x_1 = 1$ и $x_2 = 8$. Вычислив значения функции

$$S_2 = (9 + x)\sqrt{(9 - x)^2 + 16}$$

в этих точках и на концах промежутка $[0; 9]$, составим таблицу 2.

Таблица 2

x	0	1	8	9
$S_2(x)$	$9\sqrt{97} \approx 88$	$40\sqrt{5} \approx 89$	$17\sqrt{17} \approx 70$	72

По таблице видно, что функция S_2 принимает наибольшее значение в точке $x_1 = 1$ и наименьшее в точке $x_2 = 8$.

Задача интересна тем, что при одних значения параметров функция имеет экстремальные значения в критических точках, при других — на концах промежутка. Ещё несколько задач такого рода включено в § 11.

§ 10. *Применение элементарных методов*

181. Среди прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю найдите тот, который имеет наибольшую площадь полной поверхности.

182. а) Какую наибольшую площадь боковой поверхности может иметь правильная четырёхугольная призма с данной диагональю d?

б) Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю найдите тот, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

183. Каковы должны быть размеры открытого бассейна данного объёма V, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала?

* * *

184. а) В данный треугольник впишите прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна сторона прямоугольника лежала на большей стороне треугольника.

б) В данный конус впишите цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности.

185. В данный конус впишите цилиндр наибольшего объёма.

186. В правильную четырёхугольную пирамиду впишите прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма так, чтобы одна грань параллелепипеда лежала в плоскости основания пирамиды, а вершины противоположной грани принадлежали боковым рёбрам.

* * *

187. а) Из всех цилиндров, вписанных в данную сферу, найдите тот, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

б) В сферу вписан цилиндр с наибольшей площадью полной поверхности. Чему равно отношение площади сферы к площади поверхности цилиндра?

188. В сферу радиуса R вписана правильная n-угольная пирамида. Какова должна быть высота пирамиды, чтобы её объём был наибольшим?

* * *

189. Около шара радиуса R описан конус. При какой высоте конуса его объём будет наименьшим? Докажите, что

$$V \geqslant 2V_1,$$

где V — объём конуса, V_1 — объём шара.

190. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины принадлежат боковым рёбрам пирамиды, а остальные четыре — плоскости её основания. Докажите, что

$$V_1 \leqslant \frac{4}{9}V,$$

где V_1 — объём куба, V — объём пирамиды. При каком условии имеет место равенство?

* * *

191. Из квадратного листа жести со стороной a требуется сделать коробку без крышки, вырезая по углам квадраты и загибая затем получающиеся выступы так, чтобы коробка получилась наибольшего объёма. Каковы должны быть длины сторон вырезанных квадратов?

192. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно l. При каком отношении высоты пирамиды к стороне основания объём пирамиды будет наибольшим? Чему равен этот объём?

193. Образующая конуса равна l и составляет с основанием угол φ. При каком значении φ объём конуса будет наибольшим? Чему равен этот объём?

* * *

194. Длины двух противоположных рёбер тетраэдра равны x, а все остальные имеют длину, равную 1. Выразите объём тетраэдра как функцию x. При каком значении x объём тетраэдра имеет наибольшее значение?

195. Длина одного бокового ребра четырёхугольной пирамиды равна x, все остальные рёбра имеют длину, равную 1. Выразите объём тетраэдра как функцию x. При каком значении x объём пирамиды принимает наибольшее значение?

* * *

196. Куб, ребро которого равно a, пересекается плоскостью, проходящей через его диагональ. Какую наименьшую площадь может иметь сечение и при каком угле наклона сечения к плоскости основания?

197. а) Тетраэдр $ABCD$ пересечён плоскостью, параллельной его рёбрам AD и BC. Найдите периметр сечения, если $AD = BC = a$.

б) Тетраэдр $ABCD$ пересечён плоскостью так, что в сечении получился четырёхугольник. Какое наименьшее значение может принимать периметр сечения, если $AD = BC = a$, $BD = AC = b$, $CD = AB = c$?

198. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Через вершину A и середину K ребра SC проведена плоскость, пересекающая рёбра SB и SD в точках M и N. Докажите, что

$$\frac{1}{3}V \leqslant V_1 \leqslant \frac{3}{8}V,$$

где V — объём пирамиды $SABCD$, а V_1 — объём пирамиды $SAMKN$. При каком условии каждое неравенство обращается в равенство?

199. а) Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{a^2 + b^2},$$

где $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b$. При этом неравенство обращается в равенство, если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

б) Из всех треугольников ABC с общим основанием AB и данной высотой CH найдите тот, который имеет наименьший периметр.

в) Из всех тетраэдров $ABCD$ с общим основанием ABC и данной высотой DH найдите тот, который имеет наименьшую площадь боковой поверхности.

200. а) Докажите, что для любых действительных чисел a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 выполняется неравенство

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

причём равенство имеет место только, если $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ (неравенство Коши—Буняковского).

б) Дан тетраэдр $ABCD$, рёбра AD, BD, CD которого попарно перпендикулярны, причём $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$. Докажите, что для любой точки M, лежащей в грани ABC, сумма s расстояний от вершин A, B и C до прямой DM удовлетворяет неравенству

$$s \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

При каком положении DM имеет место равенство? Рассмотрите частный случай: $a=b=\sqrt{6}$, $c=2$.

201. Из точки A, расположенной вне плоскости, проведены к ней перпендикуляр AO и наклонные AB и AC. Известно, что $BO=1$, $CO=2\sqrt{2}$ и $\angle BOC=45°$. Найдите расстояние AO, при котором $\angle BAC=45°$. Какое наибольшее значение может принимать этот угол?

202. Около сферы описан конус. Какую наименьшую площадь боковой поверхности может иметь конус, если площадь сферы равна Q?

203. Около сферы радиуса r описана правильная четырёхугольная пирамида. При каком угле наклона боковой грани к плоскости основания площадь полной поверхности пирамиды будет наименьшей? Найдите значение этой площади.

§11. *Применение производной*

204. Бак цилиндрической формы должен вмещать V литров воды. Каковы должны быть его размеры, чтобы площадь его поверхности без крышки была наименьшей?

205. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна S, имеет наибольшую вместимость?

206. Консервная банка данного объёма V имеет форму цилиндра. Каковы должны быть её размеры, чтобы на её изготовление пошло минимальное количество жести?

* * *

207. В сферу радиуса R вписан цилиндр. При какой высоте цилиндра объём его будет наибольшим?

208. Какой наибольший объём может иметь правильная треугольная призма, вписанная в сферу радиуса R?

209. Объём правильной треугольной призмы равен V. Каковы должны быть высота и сторона основания, чтобы площадь полной поверхности призмы была наименьшей?

210. Около полушара радиуса r описан конус так, что центр основания конуса совпадает с центром шара. При какой высоте конуса объём его будет наименьшим?

211. В полушар радиуса R вписана правильная четырёхугольная призма так, что одно её основание лежит в плоскости большого круга полушара, а вершины другого основания принадлежат поверхности полушара. При какой высоте призмы сумма длин всех её рёбер будет наибольшей?

* * *

212. Прямоугольная трапеция вращается вокруг большего основания. Меньшее основание равно 5 см, большая боковая сторона равна 15 см. Какой наибольший объём может иметь тело вращения и при какой длине большего основания трапеции?

213. Равнобочная трапеция вращается вокруг большего основания. Меньшее основание трапеции равно 2, боковая сторона равна 3. При какой длине большего основания объём полученного тела вращения будет наибольшим?

* * *

214. Высота правильной четырёхугольной пирамиды $NABCD$ равна h, диагональ основания равна $2r$. Какую наибольшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину N параллельно диагонали AC основания, если $h=2$ и $r=9$?

215. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, высота призмы h. Какую наибольшую площадь может иметь сечение призмы плоскостью, проходящей через сторону основания, если $a=14$ см и $h=6$ см?

216. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, высота которой равна h, сторона AB основания равна a, высота CH основания равна l. Через сторону AB проведена плоскость, пересекающая верхнее основание призмы. Найдите наибольшее и наименьшее значения площади сечения при 1) $a=2$, $h=2$, $l=3$; 2) $a=9$, $h=4$, $l=9$.

217. Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ — равнобедренные треугольники с общим основанием AB. Двугранный угол при ребре AB — прямой. Через середины рёбер AC и BC проведена плоскость, пересекающая грань ABD. Найдите наибольшее и наименьшее значения площади сечения, если $AB=a$ и высоты треугольников ABC и ABD, проведённые из вершин C и D, равны соответственно h и l. Рассмотрите случаи: 1) $a=h=l=1$; 2) $a=4$, $h=2$, $l=3$.

218. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник, у которого $\angle C=90^\circ$, $BC=a$ и $AB=c$. Через ребро AB проведена плоскость, пересекающая рёбра B_1C_1 и A_1C_1 соответственно в точках M и N. В каких границах заключена площадь сечения, если $a=1$, $c=2$ и $h=AA_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$?

* * *

219. В сферу, площадь которой равна Q, вписан конус. Какую наибольшую площадь боковой поверхности может иметь конус и при каком угле α наклона его образующей к плоскости основания?

220. В сферу радиуса R вписан конус наибольшего объёма. В конус, в свою очередь, вписан цилиндр наибольшего объёма. Найдите высоту цилиндра.

221. Треугольник, две стороны которого равны соответственно $\sqrt{21}$ и 4, вращается вокруг третьей стороны. При какой длине этой стороны объём тела вращения будет наибольшим?

222. В сферу вписана правильная четырёхугольная пирамида, а в пирамиду вписана правильная четырёхугольная призма, сторона основания и высота которой равны 2 и 1 соответственно. Какое наименьшее значение может иметь радиус сферы? При какой высоте пирамиды достигается это значение?

Глава 6

Треугольник и тетраэдр

Изучая пространственные фигуры, полезно сравнивать их с более простыми плоскими фигурами. Параллелограмм и параллелепипед, многоугольник и многогранник, окружность и сфера во многом похожи. Тетраэдр (треугольная пирамида) имеет сходство с треугольником. Треугольник есть многоугольник с наименьшим числом сторон, тетраэдр — многогранник с наименьшим числом граней. В стереометрии тетраэдр играет такую же роль, какую в планиметрии играет треугольник. Тетраэдр имеет целый ряд свойств, аналогичных свойствам треугольника. Так, около любого треугольника можно описать окружность, и при том только одну. Около любого тетраэдра можно описать сферу, и при том только одну. Точно так же, в любой треугольник можно вписать окружность, и при том только одну, в любой тетраэдр можно вписать сферу, и при том только одну.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая из них делится этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины. Точку пересечения медиан треугольника называют его центром тяжести или центроидом. Середину отрезка назовём его центроидом. Тогда медиану треугольника можно определить как отрезок, соединяющий вершину треугольника с центроидом противоположной стороны. По аналогии вводится понятие медианы тетраэдра. Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, называется медианой тетраэдра.

Все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой центроидом тетраэдра, и каждая из них делится этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины. Доказательство этого утверждения приводится с помощью векторов в главе 3 (см. примеры 1 и 2). Теорему можно доказать и элементарно-геометрическим способом, лишь немного изменив доказательство теоремы о медианах треугольника.

Прямое отношение к центроиду тетраэдра имеют отрезки, соединяющие середины его противоположных рёбер. Их называют бимедианами тетраэдра. Все три бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке — центроиде тетраэдра, и каждая из них делится центроидом пополам (см. задачу 111).

Высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке. По аналогии можно предположить, что высоты любого тетраэдра тоже пересекаются в одной точке. Покажем, что это не так.

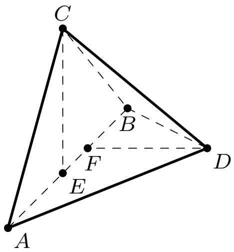

Рис. 31

Пусть $ABCD$ — тетраэдр с прямым двугранным углом при ребре AB (рис. 31). В таком случае высоты CE и DF тетраэдра являются высотами треугольников ABC и ABD. Если $AC = BC$ и $AD = BD$, то точки E и F совпадают с серединой отрезка AB, т. е. высоты CE и DF тетраэдра пересекаются. При этом две другие высоты тетраэдра через точку их пересечения не проходят. Если же $AC = BC$, но $AD \neq BD$, то прямые CE и DF скрещиваются. Таким образом, даже две высоты тетраэдра могут не иметь общей точки.

Тем не менее, существуют тетраэдры, все четыре высоты которых пересекаются в одной точке. Таким, например, является тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине D. Рёбра DA, DB и DC — его высоты — вместе с четвёртой высотой DD_1 тетраэдра имеют общую точку D. Её называют ортоцентром тетраэдра.

Тетраэдр называется ортоцентрическим, если все его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке, которая называется ортоцентром тетраэдра.

В задачах 136, 137, 139 главы 3 указаны некоторые условия, определяющие ортоцентрический тетраэдр. Для доказательства использовался аппарат векторной алгебры. В § 14 и § 15 включены задачи, более полно раскрывающие свойства ортоцентрического тетраэдра. Большинство из них просто решается элементарно-геометрическим способом, однако в некоторых случаях предпочтительнее пользоваться векторным или координатным методом. Полезно одну и ту же задачу решить разными способами и сравнить результаты.

В тех же параграфах под одним номером включены задачи для треугольника и аналогичные задачи для тетраэдра. Параллельное изучение свойств треугольника и тетраэдра полезно во многих отношениях. Повторяется курс планиметрии. Похожие теоремы и формулы легко запоминаются. При внимательном анализе задачи результат иногда можно предугадать.

Довольно часто способ решения задачи о треугольнике можно приспособить для решения аналогичной задачи о тетраэдре.

Пример 1. Из точки M, лежащей внутри треугольника ABC, к его сторонам BC, CA и AB проведены перпендикуляры, длины которых равны d_a, d_b, d_c соответственно. Доказать, что

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1,$$

где h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC.

Какие следствия можно вывести из этого равенства?

Решение. Соединим точку M с вершинами треугольника ABC. Площади треугольников BCM, CAM, ABM обозначим соответственно через S_1, S_2, S_3 и площадь треугольника ABC — через S (рис. 32). Тогда

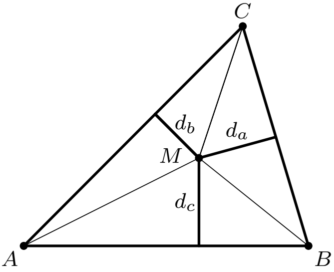

Рис. 32

$$S_1 = \frac{1}{2}ad_a \quad \text{и} \quad S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Отсюда $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{d_a}{h_a}$. Аналогично, $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{d_b}{h_b}$ и $\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{d_c}{h_c}$. Учитывая, что $S_1 + S_2 + S_3 = S$, сложим эти равенства почленно и получим

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1. \qquad (1)$$

Следствие 1. *Если M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то равенство* (1) *принимает вид:*

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Следствие 2. *Если $h_a = h_b = h_c = h$, то в силу соотношений $ah = bh = ch = 2S$ имеем: $a = b = c$. При этом из равенства* (1) *следует, что $d_a + d_b + d_c = h$.*

Итак, сумма расстояний от любой точки, расположенной внутри равностороннего треугольника, есть величина постоянная, равная высоте треугольника.

Следствие 3. *Пусть $h_a < h_b < h_c$, тогда*

$$\frac{d_a + d_b + d_c}{h_a} > 1 \quad \text{и} \quad \frac{d_a + d_b + d_c}{h_c} < 1.$$

Следовательно, сумма расстояний от любой точки, расположенной внутри неравностороннего треугольника, заключена между наименьшей и наибольшей высотами: $h_a < d_a + d_b + d_c < h_c$.

После того, как исследована задача о треугольнике, аналогичная задача для тетраэдра уже не представляет особых трудностей.

Пример 2. Из точки M, расположенной внутри тетраэдра $ABCD$, проведены перпендикуляры к плоскостям граней BCD, ACD, ABD и ABC, длины которых d_1, d_2, d_3, d_4. Доказать, что

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} + \frac{d_4}{h_4} = 1,$$

где h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать это утверждение, используя аналогию. Заметим только, что вместо площадей треугольников следует ввести в рассмотрение объёмы тетраэдров. Так: если V_1 объём тетраэдра $BCDM$ и V — объём тетраэдра $ABCD$, то

$$\frac{V_1}{V} = \frac{d_1}{h_1}.$$

Сформулируйте и докажите следствия, аналогичные тем, что получены для треугольника.

Итак, поиск решения стереометрической задачи часто значительно упрощается, если сначала рассмотреть аналогичную планиметрическую задачу. Однако следует иметь в виду, что тетраэдр — более сложная фигура, чем треугольник, свойства его более многообразны. Аналогии может и не быть.

В настоящей главе применяются следующие обозначения элементов тетраэдра.

Длины рёбер тетраэдра обозначаются так: $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$;

S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней, противолежащих соответственно вершинам A, B, C, D;

h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра, проведённые соответственно из вершин A, B, C, D;

m_1, m_2, m_3, m_4 — медианы тетраэдра, проведённые соответственно из вершин A, B, C, D;

R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы;

V — объём тетраэдра.

§ 12. *Метрические соотношения в тетраэдре*

223. Докажите, что для всякого тетраэдра имеют место соотношения и сравните их с аналогичными формулами для треугольника.

1) $h_i = \dfrac{3V}{S_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$;

2) $r = \dfrac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}$;

3) $m_4^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \dfrac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}$.

224. Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ — прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AB. Докажите, что медианы тетраэдра, проведённые из вершин C и D, равны.

225. Вычислите длину бимедианы, соединяющей середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$, если известны длины рёбер тетраэдра.

226. Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ — равнобедренные треугольники с общим основанием AB. Найдите длину бимедианы EF, соединяющей середины рёбер AD и BC, если $AB = c_1$ и $CD = c$.

227. Рёбра AC и BD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что бимедианы KL и MN, соединяющие середины рёбер AB и CD, AD и BC, равны.

* * *

228. Длина одного ребра тетраэдра равна $\sqrt{2}$, а каждое из остальных рёбер имеет длину, равную 1. Найдите объём тетраэдра, площадь его полной поверхности, радиусы описанной и вписанной сфер.

229. Найдите объём тетраэдра, одно ребро которого равно b, а каждое из остальных рёбер равно a. Найдите объём правильного тетраэдра, ребро которого равно a.

230. Одно ребро тетраэдра равно x, каждое из остальных равно 1. При каком значении x объём тетраэдра будет наибольшим?

* * *

231. Найдите объём тетраэдра $ABCD$, если $DA = DB = DC = 1$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle CDA = \beta$ и $\angle ADB = \gamma$.

232. Известны плоские углы тетраэдра $ABCD$ при вершине D. Вычислите угол наклона ребра DC к плоскости грани ABD.

233. Выразите объём тетраэдра $ABCD$ через длины трёх его рёбер, исходящих из вершины D, и величины плоских углов при вершине D.

234. Найдите объём тетраэдра $ABCD$, если $DA = 3$, $DB = 4$, $DC = AB = 5$, $BC = \sqrt{21}$, $AC = \sqrt{19}$.

235. Найдите объём тетраэдра $ABCD$ и радиус вписанной в него сферы, если грань ABD — равносторонний треугольник, $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$, $DC = 2$.

* * *

236. Докажите, что объём любого тетраэдра может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{T}{6R},$$

где R — радиус сферы, описанной около тетраэдра, а T — площадь треугольника, стороны которого численно равны aa_1, bb_1, cc_1.

237. Известны длины рёбер тетраэдра $ABCD$: $DA = DB = DC = AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, $CA = \sqrt{3}$. Найдите объём тетраэдра и радиус описанной около него сферы.

238. а) Докажите истинность следующих соотношений для треугольника:

1) $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$;

2) $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

б) Докажите, что для тетраэдра имеют место следующие соотношения:

1) $\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}+\dfrac{1}{h_4}=\dfrac{1}{r}$;

2) $m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2=\dfrac{4}{9}Q$,

где Q — сумма квадратов длин всех рёбер тетраэдра.

* * *

239. а) В треугольник вписана окружность радиуса r. Параллельно его сторонам к окружности проведены касательные и в образовавшиеся малые треугольники вписаны окружности радиусов r_1, r_2 и r_3. Докажите, что

$$r_1+r_2+r_3=r.$$

б) В тетраэдр вписана сфера радиуса r. Параллельно граням тетраэдра к сфере проведены касательные плоскости и в образовавшиеся малые тетраэдры вписаны сферы радиусов r_1, r_2, r_3 и r_4. Докажите, что

$$r_1+r_2+r_3+r_4=2r.$$

240. а) Через произвольную точку, лежащую внутри треугольника площади S, проведены прямые параллельно его сторонам. Площади образовавшихся трёх треугольников равны соответственно S_1, S_2 и S_3. Докажите, что

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}.$$

б) Через произвольную точку, лежащую внутри тетраэдра, проведены плоскости параллельно его граням. Объёмы образовавшихся при этом четырёх тетраэдров равны соответственно V_1, V_2, V_3 и V_4. Докажите, что

$$\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2}+\sqrt[3]{V_3}+\sqrt[3]{V_4}.$$

* * *

241. а) Докажите, что для всякого треугольника имеют место неравенства:

$$9r\leqslant h_a+h_b+h_c\leqslant m_a+m_b+m_c\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

б) Докажите, что для всякого тетраэдра имеют место неравенства:

$$16r \leqslant h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \leqslant m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{Q},$$

где Q — сумма квадратов всех рёбер тетраэдра.

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

242. а) Докажите, что для всякого треугольника ABC справедливы неравенства

$$4r^2 \leqslant \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \leqslant R^2.$$

б) Докажите, что для всякого тетраэдра $ABCD$ имеют место неравенства

$$9r^2 \leqslant \frac{1}{16}Q \leqslant R^2,$$

где Q — сумма квадратов всех рёбер тетраэдра.

243. а) Докажите, что для любого треугольника имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

б) Докажите, что для всякого тетраэдра справедливо неравенство

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{6}Q,$$

где Q — сумма квадратов всех рёбер тетраэдра.

При каком условии имеет место равенство?

§ 13. *Прямоугольный тетраэдр*

Если через концы трёх рёбер DA, DB, DC прямоугольного параллелепипеда провести плоскость, то она отсечёт от него тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине D (рис. 33). Такой тетраэдр называется прямоугольным. Грань ABC будем называть основанием, а три другие грани — боковыми гранями, рёбра DA, DB, DC — боковыми рёбрами тетраэдра.

244. Докажите, что основание ABC прямоугольного тетраэдра $ABCD$ — остроугольный треугольник.

245. а) Дан тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине D. Докажите, что основание высоты DH тетраэдра является ортоцентром треугольника ABC.

б) Вычислите объём прямоугольного тетраэдра $ABCD$, если $AD = a$, $BC = a_1$, $\angle DAH = \alpha$.

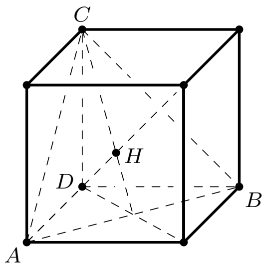

Рис. 33

246. а) Докажите, что площадь боковой грани прямоугольного тетраэдра есть среднее пропорциональное между площадью основания и площадью проекции этой грани на плоскость основания.

б) Докажите, что если S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней прямоугольного тетраэдра, а S — площадь его основания, то

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$$

(теорема Пифагора для прямоугольного тетраэдра).

247. Боковые рёбра прямоугольного тетраэдра равны a, b и c. Докажите, что

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

где h — высота тетраэдра, проведённая к основанию.

248. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ прямые, $DB = 2$, $DC = \sqrt{2}$, площадь грани ACD вдвое меньше площади основания ABC. Найдите высоту DH тетраэдра, длину ребра DA и угол наклона ребра DA к плоскости основания.

249. Боковые рёбра прямоугольного тетраэдра $ABCD$ равны a, b, и c. Найдите медиану DM тетраэдра и радиус описанной сферы.

250. Боковое ребро AD прямоугольного тетраэдра $ABCD$, равное a, образует с основанием ABC угол α. Найдите радиус R описанной сферы и медиану DM тетраэдра.

251. Вычислите площадь основания ABC прямоугольного тетраэдра $ABCD$, если $DA = a$ и $\angle BAC = \alpha$.

* * *

252. Боковые рёбра прямоугольного тетраэдра образуют с основанием углы α, β, γ. Двугранные углы при основании равны α_1, β_1, γ_1. Докажите, что

а) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$;

б) $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma = 1$.

253. Боковые рёбра DA, DB, DC прямоугольного тетраэдра $ABCD$ наклонены к основанию соответственно под углами α, β, γ. Докажите, что

а) $\sin\varphi = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$;

б) $\cos\varphi = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, где $\varphi = \angle AHB$ и H — ортоцентр треугольника ABC.

254. Найдите боковые рёбра DA, DB, высоту DH и объём тетраэдра $ABCD$, если $DC = c$, $\angle DAH = 30°$ и $\angle DBH = 45°$.

* * *

255. Докажите, что радиус сферы, вписанной в прямоугольный тетраэдр, может быть вычислен по формуле

$$r = \frac{S_1 + S_2 + S_3 - S}{a + b + c},$$

где a, b, c — длины боковых рёбер, S — площадь основания тетраэдра.

256. В плоскости основания ABC прямоугольного тетраэдра $ABCD$ взята точка L, одинаково удалённая от боковых граней. Докажите, что

$$l = DL = \frac{abc\sqrt{3}}{ab + bc + ca}$$

(отрезок DL называется биссектрисой тетраэдра).

257. а) Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c имеет место неравенство

$$a + b \leqslant c\sqrt{2}.$$

б) Докажите, что площади граней прямоугольного тетраэдра удовлетворяют неравенству

$$S_1 + S_2 + S_3 \leqslant S\sqrt{3},$$

где S — площадь основания.

При каком условии имеет место равенство?

258. Докажите, что площадь основания прямоугольного тетраэдра и радиус описанной около него сферы связаны соотношением

$$S\sqrt{3} \leqslant 2R^2.$$

259. а) Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника имеют место неравенства:

$$h \leqslant (\sqrt{2} + 1)r \leqslant l \leqslant \sqrt{S} \leqslant \frac{a + b}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2}c = R.$$

б) Докажите, что для всякого прямоугольного тетраэдра справедливы неравенства:

$$h \leqslant (\sqrt{3} + 1)r \leqslant l \leqslant \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{2(S_1 + S_2 + S_3)} \leqslant \frac{2}{3}R.$$

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

260. В сферу радиуса R вписан прямоугольный тетраэдр, высота которого h. Найдите боковые рёбра тетраэдра, если $R = 3$ и $h = 2$.

261. Какое наименьшее значение может иметь объём прямоугольного тетраэдра, высота которого равна 2 м?

§ 14. *Ортоцентрический тетраэдр*

262. а) Докажите, что если высоты AA_1 и BB_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются, то его рёбра AB и CD перпендикулярны. Верна ли обратная теорема?

б) Докажите, что если две высоты тетраэдра пересекаются, то две другие высоты также пересекаются.

263. а) Докажите, что если две пары противоположных рёбер тетраэдра взаимно перпендикулярны, то рёбра третьей пары также перпендикулярны.

б) Докажите, что все четыре высоты тетраэдра или их продолжения пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны.

264. Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) основание одной из высот тетраэдра есть ортоцентр соответствующей грани;

б) суммы квадратов противоположных рёбер равны;

в) бимедианы тетраэдра равны.

265. а) Высоты AA_1 и BB_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке H. Докажите, что точка H лежит на общем перпендикуляре прямых AB и CD.

б) Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры трёх пар противоположных рёбер проходят через ортоцентр тетраэдра.

266. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре все плоские углы при одной вершине одновременно либо острые, либо прямые, либо тупые, и одна из граней — остроугольный треугольник.

267. а) Докажите, что угол C треугольника ABC острый, прямой или тупой, в зависимости от того, будет ли $s<0$, $s=0$ или $s>0$, где

$$s=m_c^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2)$$

($a=BC$, $b=AC$ и m_c — медиана треугольника, проведённая из вершины C).

б) Докажите, что все плоские углы при вершине D ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ острые, прямые или тупые, в зависимости от того, будет ли $s<0$, $s=0$ или $s>0$, где

$$s=m_D^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

($a=DA$, $b=DB$, $c=DC$ и m_D — медиана тетраэдра, проведённая из вершины D).

268. а) Докажите, что во всяком треугольнике ABC центр O описанной окружности, центроид M и ортоцентр H принадлежат одной прямой, причём $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}$ (прямая Эйлера).

б) окажите, что центр O описанной сферы, центроид M и ортоцентр H ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ принадлежат одной прямой, причём точки O и H симметричны относительно точки M (прямая Эйлера ортоцентрического тетраэдра).

269. а) Докажите, что середины трёх сторон треугольника, основания трёх его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

б) Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центроиды четырёх граней, основания четырёх высот тетраэдра и точки, которые делят каждый из отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, в отношении $1:2$, считая от ортоцентра, лежат на одной сфере (сфера 12 точек).

§ 15. *Равногранный тетраэдр*

Тетраэдр называется равногранным, если все его грани равны. Такой тетраэдр можно построить. Проведём скрещивающиеся диагонали AB и CD двух противоположных граней прямоугольного параллелепипеда. Легко доказать, что их концы являются вершинами тетраэдра $ABCD$, противоположные рёбра которого равны, и, следовательно, равны и грани (рис. 34).

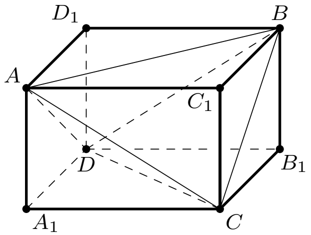

Рис. 34

Обратно, если $ABCD$ — равногранный тетраэдр, то через каждое его ребро можно провести плоскость, параллельную противоположному ребру, и тем самым достроить тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда. Такое построение иногда помогает решить задачу о тетраэдре.

Рассмотрите сначала несколько простых задач.

270. а) Периметры четырёх граней тетраэдра равны. Докажите, что противоположные рёбра тетраэдра равны.

б) Все грани тетраэдра — равные треугольники. Докажите, что противоположные рёбра равны.

271. Докажите, что грани равногранного тетраэдра — остроугольные треугольники и сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°. Верно ли обратное утверждение?

* * *

272. Докажите, что тетраэдр равногранный тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) бимедианы являются его осями симметрии;

б) медианы равны;

в) бимедианы попарно перпендикулярны;

г) суммы плоских углов при каких-либо трёх вершинах равны 180°.

273. а) Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ равновелики. Докажите, что общий перпендикуляр прямых AB и CD проходит через середину ребра CD.

б) Докажите, что если площади всех граней тетраэдра равны, то тетраэдр равногранный.

274. Докажите, что тетраэдр равногранный тогда и только тогда, когда его высоты равны.

* * *

275. Около тетраэдра описан параллелепипед так, что скрещивающиеся рёбра являются диагоналями противоположных граней параллелепипеда. Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда описанный параллелепипед прямоугольный.

276. В тетраэдре $ABCD$ проведены медианы DA_1, DB_1, DC_1 его граней DBC, DAC, DAB. Докажите, что тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ является равногранным тогда и только тогда, когда трёхгранный угол D тетраэдра $ABCD$ прямой (т. е. все плоские углы при вершине D тетраэдра прямые).

* * *

277. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) центр сферы, описанной около тетраэдра, совпадает с его центроидом;

б) центр сферы, вписанной в тетраэдр, совпадает с его центроидом;

в) центр сферы, вписанной в тетраэдр, совпадает с центром описанной около него сферы.

278. Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда его противоположные рёбра видны из центра описанной сферы под равными углами.

279. Точка O — центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$. Докажите, что равенство

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

выполняется тогда и только тогда, когда тетраэдр $ABCD$ равногранный.

* * *

280. Противоположные рёбра равногранного тетраэдра равны a, b, c. Докажите, что

1) $m = \frac{4}{3}R = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$;

2) $V = \frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$,

где R — радиус описанной сферы, m — медиана, V — объём тетраэдра.

281. Плоские углы при одной из вершин равногранного тетраэдра равны α, β, γ. Докажите, что

$$4r = h = 4R\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$
$$V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

282. Противоположные рёбра равногранного тетраэдра равны a, b, c. Найдите расстояния между ними.

283. В тетраэдре $ABCD$ суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны 180°. Найдите объём тетраэдра и расстояние между рёбрами AB и CD, если $BC=4$, $CA=5$, $AB=6$.

284. Найдите радиус сферы, описанной около равногранного тетраэдра $ABCD$, если $BC=AD=6$ см и расстояние между рёбрами BC и AD равно 8 см.

285. Равногранный тетраэдр $ABCD$ достроен до призмы $ABCDB_1C_1$ (грань ABC — основание призмы). Докажите, что грань BCC_1B_1 ромб. Найдите расстояние от вершины D до этой грани, если $DA=a$, $DB=b$ и $DC=c$.

Вычислите объём тетраэдра, пользуясь указанным построением.

286. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри равногранного тетраэдра, до его граней есть величина постоянная. Пользуясь этим свойством, докажите, что $r = \frac{1}{4}h$, где r — радиус вписанной сферы и h — высота равногранного тетраэдра.

287. Докажите, что радиус сферы, вписанной в равногранный тетраэдр, вдвое меньше радиуса сферы, касающейся одной грани и продолжений трёх других граней.

* * *

288. Докажите, что в равногранном тетраэдре противоположные двугранные углы равны.

289. Величины двугранных углов произвольного тетраэдра равны α_i, $i=1,\,2,\,\ldots,\,6$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{6} \cos\alpha_i \leqslant 2,$$

где равенство имеет место в том случае, когда тетраэдр равногранный.

290. Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство

$$R^2 \geqslant \frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда тетраэдр равногранный.

Глава 7

Комбинации геометрических тел

В настоящей главе собраны задачи, требующие хороших пространственных представлений. При решении их могут быть использованы как геометрические, так и аналитические методы. Решение каждой задачи следует начинать с тщательного выполнения чертежа. Иногда полезно сделать несколько чертежей и остановиться на том из них, который является наиболее наглядным.

§ 16. *Призмы и пирамиды*

291. Дана четырёхугольная призма. Середины сторон её нижнего основания и произвольная точка верхнего основания являются вершинами вписанной в призму четырёхугольной пирамиды. Найдите отношение объёма пирамиды к объёму призмы.

292. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Найдите объём тетраэдра, вершинами которого являются точка D_1 и середины рёбер AB, BC и BB_1 куба.

293. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ прямые. В тетраэдр вписан куб так, что одна его вершина совпадает с вершиной D куба, а противоположная ей вершина лежит в грани ABC. Вычислите длину ребра куба, если $DA = a$, $DB = b$ и $DC = c$.

294. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна диагонали её основания. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на апофемах пирамиды, а другие четыре — в плоскости основания. Объём пирамиды равен V. Найдите объём куба.

295. Даны правильная четырёхугольная пирамида и куб, вершинами одной из граней которого являются середины рёбер основания пирамиды. Каждое ребро противолежащей грани куба пересекает одно из боковых рёбер пирамиды. Найдите отношение объёма куба к объёму пирамиды.

296. Основанием четырёхугольной пирамиды $NABCD$ служит квадрат. Боковые грани NAD и NCD пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а грань NAB образует с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписан куб так, что четыре вершины куба лежат на боковых рёбрах пирамиды, четыре другие — в плоскости основания. Найдите: а) отношение k объёма пирамиды к объёму куба; б) величину угла α, при котором $k = \dfrac{8}{3}$; в) наименьшее возможное значение k.

297. Высота правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше диагонали её основания, объём пирамиды равен V. В пирамиду вписываются правильные четырёхугольные призмы так, что боковые рёбра одной грани лежат в плоскости основания пирамиды и параллельны диагоналям основания, а вершины противоположной грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найдите наибольшее значение объёма рассматриваемых призм.

§ 17. *Правильная пирамида и сфера*

Как известно, около всякой правильной пирамиды можно описать сферу и в неё можно вписать сферу. Пусть NH — высота правильной n-угольной пирамиды $NA_1A_2\ldots A_n$, точка H — центр её основания (рис. 35). При повороте пирамиды вокруг оси NH на углы $\dfrac{2\pi}{k}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ точки оси, и только они, остаются на месте, вершины же основания переходят в другие вершины, а пирамида переходит в себя. В себя переходят также сферы, описанная и вписанная. Значит, их центры — неподвижные точки, лежащие на оси NH. Рассмотрим подробнее расположение центров этих сфер относительно пирамиды.

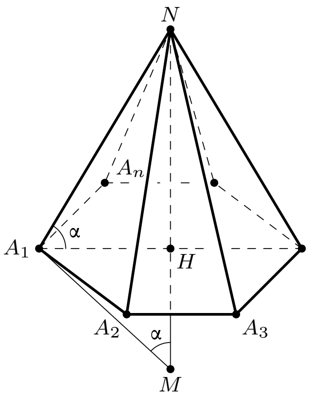

Рис. 35

Центр описанной сферы одинаково удалён от вершин основания и поэтому лежит на прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр основания, т. е. на высоте NH пирамиды или на её продолжении за точку H. Если продолжение высоты NH пересекает сферу в точке M, то MN — диаметр сферы и, следовательно, $\angle MA_1N = 90^\circ$. Центр описанной сферы совпадает с точкой H, когда $\angle NA_1H = 45^\circ$, он лежит на высоте пирамиды или на её продолжении в зависимости от того, будет ли $\angle NA_1H$ больше или меньше 45°.

Введём обозначения: $MN=2R$, $A_1A_2=a$, $NA_1=b$, $NH=h$, $A_1H=R_1$, $\angle NA_1H=\alpha$. Учитывая, что A_1H — высота прямоугольного треугольника A_1MN, проведённая к его гипотенузе, получим соотношения, которыми удобно пользоваться при решении задач на вычисление элементов правильной пирамиды: $b^2 = 2Rh$, $R_1^2 = (2R - h)h$, $a = 2R_1 \sin\frac{\pi}{n}$, $b = 2R\sin\alpha$, $h = b\sin a$, $R_1 = b\cos\alpha$.

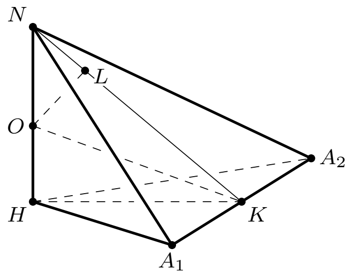

Рис. 36

Центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, всегда лежит внутри пирамиды, на её высоте. Пусть NK — апофема правильной n-угольной пирамиды $NA_1A_2\ldots A_n$ (на рис. 36 изображена лишь часть пирамиды). Поскольку $NK \perp A_1A_2$ и $NH \perp A_1A_2$, то ребро A_1A_2 перпендикулярно плоскости NHK в силу теоремы о двух перпендикулярах. Проведём биссектрису угла HKN, она пересечёт высоту NH в точке, которую обозначим через O. Докажем, что O — центр сферы, вписанной в пирамиду.

Проведём перпендикуляр OL к апофеме NK. Тогда $OL = OH$, и сфера радиусом OL с центром O касается основания пирамиды в точке H. Она касается также боковой грани NA_1A_2. Это следует из того, что $OL \perp A_1A_2$ и $OL \perp NK$. Значит, плоскость NA_1A_2 перпендикулярна радиусу OL и касается сферы в точке L. Поскольку при поворотах вокруг оси NH на углы $\frac{2\pi}{k}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ грань NA_1A_2 пирамиды переходит во все другие грани, а точка O остаётся неподвижной, то расстояния от точки O до всех граней пирамиды одинаковы и равны OL, т. е. сфера с центром O и радиусом OH является вписанной в пирамиду. Центр O сферы есть точка пересечения высоты NH пирамиды и биссектрисы угла NKH (угол NKH — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды). Введём обозначения: $NH = h$, $OH = r$, $\angle HKN = \beta$, тогда $\frac{r}{h-r} = \cos\beta$ (так как KO — биссектриса угла треугольника HKN), откуда $r = \frac{h\cos\beta}{1+\cos\beta}$. Радиус r можно вычислить также по формуле $r = HK\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, или $r = h\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Форма правильной n-угольной пирамиды определяется заданием одного из её угловых элементов. Например, если известен угол α наклона бокового ребра к плоскости основания, то можно вычислить величину плоского угла γ при вершине пирамиды, или отношение высоты пирамиды к стороне основания и т. д. В таком случае говорят, что пирамида определена с точностью до подобия. Если задан один из углов, кроме того, один линейный элемент пирамиды, то можно вычислить любые другие её элементы.

При решении задач о правильной пирамиде часто приходится находить зависимости между некоторыми её углами. Приведём примеры.

Пример 1. Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α, двугранный угол при основании равен β, плоский угол при вершине равен γ. Докажите, что

а) $\operatorname{tg}\alpha = \cos\dfrac{\pi}{n}\operatorname{tg}\beta$,

б) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\sin\dfrac{\gamma}{2}$,

в) $\cos\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

Решение. Пусть AB — сторона основания правильной n-угольной пирамиды, NH — высота пирамиды, NK — её апофема (рис. 37). Тогда $\angle NAH = \alpha$, $\angle NKH = \beta$, $\angle ANB = \gamma$ и $\angle AHB = \dfrac{2\pi}{n}$. Прямоугольные треугольники ANH и HNK имеют общий катет NH. Обозначив $NH = h$, имеем:

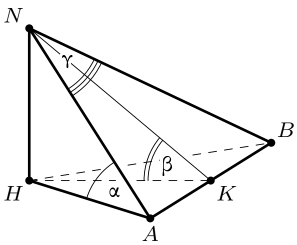

Рис. 37

$$AH = h\operatorname{ctg}\alpha, \qquad HK = h\operatorname{ctg}\beta.$$

Так как HK — высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника AHB и $\angle AHB = \dfrac{2\pi}{n}$, то $\angle AHK = \dfrac{\pi}{n}$ и $\dfrac{HK}{AH} = \cos\dfrac{\pi}{n}$. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha} = \cos\frac{\pi}{n}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\beta.$$

Из прямоугольных треугольников ANH и ANK, имеющих общую гипотенузу $AN = b$, находим

$$AH = b\cos\alpha, \qquad AK = b\sin\frac{\gamma}{2}.$$

А так как $AK = AH\sin\dfrac{\pi}{n}$, то $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\sin\dfrac{\gamma}{2}$

Аналогично найдём соотношение между углами β и γ. Имеем:

$$HK = l\cos\beta, \qquad AK = l\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

где $l = KN$. А так как $HK = NK\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$, то $\cos\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

Формулы а), б), в) находят применение при решении более сложных задач. Желательно научиться их быстро выводить для данных значений n.

П р и м е р 2. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида. Плоский угол при вершине пирамиды равен γ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. При каком значении γ площадь боковой поверхности будет наибольшей?

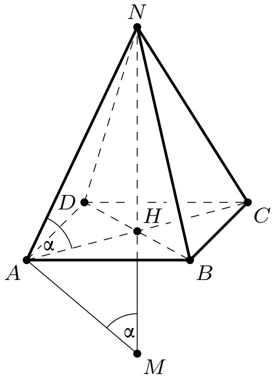

Рис. 38

Р е ш е н и е. Пусть $NABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, NH — её высота, MN — диаметр описанной сферы (рис. 38).

Обозначив длину бокового ребра пирамиды через b, имеем

$$S_{\text{бок}} = 2b^2 \sin\gamma.$$

Выразим площадь боковой поверхности пирамиды $S_{\text{бок}}$ как функцию угла γ. Применим способ введения вспомогательного угла. Пусть $\angle NAH = \alpha$. Тогда

$$b = 2R\sin\alpha \quad \text{и} \quad S_{\text{бок}} = 8R^2 \sin^2\alpha \sin\gamma.$$

Воспользуемся соотношением, приведённым в предыдущей задаче:

$$\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Получим:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \cos\gamma.$$

Следовательно, $S_{\text{бок}} = 8R^2 \sin\gamma\cos\gamma = 4R^2 \sin 2\gamma$.

Наибольшее значение $S_{\text{бок}}$ равно $4R^2$ при $\gamma = 45°$.

П р и м е р 3. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, плоский угол при вершине равен γ. Найти радиус сферы: вписанной в пирамиду; вычислить его при $\gamma = 60°$.

Р е ш е н и е. Центр O сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду $NABC$, лежит на его высоте NH (рис. 39). Проведём высоту AK треугольника ABC. Тогда $NK \perp$ $\perp BC$ (согласно теореме о трёх перпендикулярах) и $\angle HKN$ — линейный угол двугранного угла BC.

Пусть $\angle HKN = \beta$. Так как KO — биссектриса треугольника HKN, то

$$\frac{r}{h-r} = \cos\beta \quad \text{и} \quad r = \frac{h\cos\beta}{1+\cos\beta}.$$

Воспользуемся формулой перехода от γ к β:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \quad \text{(см. пример 1),}$$

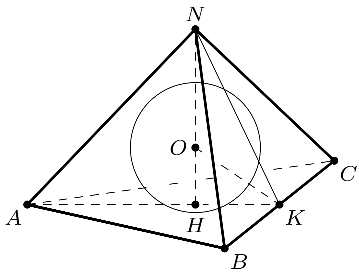

Рис. 39

и окончательно получим:

$$r = \frac{h \operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2}}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2}}, \quad 0^\circ < \gamma < 90^\circ.$$

Если $\gamma = 60^\circ$, то $r = \dfrac{1}{4}h$.

Аналогично решается большинство задач настоящего параграфа, одни — «прямым счётом», другие — способом составления уравнений. Часто наиболее простое решение удаётся получить, пользуясь способом введения вспомогательных элементов: в частности, вспомогательных углов.

* * *

298. а) Высота правильной треугольной пирамиды и сторона её основания имеют одинаковую длину, равную 6 см. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания и радиус описанной около пирамиды сферы.

б) Правильная треугольная пирамида вписана в сферу, радиус которой равен 4 см. Сторона основания пирамиды равна 6 см. Найдите высоту пирамиды.

299. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите радиус описанной сферы.

300. Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиуса R, плоский угол при вершине пирамиды равен γ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды и вычислите её при $\gamma = 45^\circ$.

301. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Двугранный угол при основании равен β, двугранный угол при боковом ребре равен δ. Докажите, что

а) $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \dfrac{\delta}{2}$;

б) $\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cos \dfrac{\delta}{2}$.

302. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, двугранный угол при боковом ребре равен δ. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды. Какие значения может принимать δ? При каком значении δ радиус сферы равен $\dfrac{3}{2}h$?

303. Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды вдвое больше двугранного угла при основании. Докажите, что радиус сферы, описанной около пирамиды, равен её боковому ребру.

* * *

304. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Двугранный угол при основании равен β. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

305. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, высота её равна h. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, если $a=4$ см и $h=8$ см.

306. Высота правильной треугольной пирамиды равна h. Двугранный угол при основании равен двугранному углу при боковом ребре. Найдите радиус вписанной сферы.

307. В правильную треугольную пирамиду вписана сфера, радиус которой равен r. Высота пирамиды равна h. Найдите двугранный угол при основании и объём пирамиды, если $r=1$ и $h=3$.

* * *

308. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, двугранный угол при боковом ребре которой равен δ. Найдите высоту пирамиды. Какие значения может принимать δ?

309. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ. Найдите объём пирамиды. При каком значении γ объём пирамиды будет наибольшим?

310. Отношение радиуса сферы, описанной около правильной четырёхугольной пирамиды, к стороне основания равно $\sqrt{2}$. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

* * *

311. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, высота которой равна h и плоский угол при вершине равен γ.

312. Радиус сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, равен $\frac{1}{3}$ высоты пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если её боковое ребро равно b.

313. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, высота которой равна h. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если $R=5$ см и $h=8$ см.

314. В правильную четырёхугольную пирамиду вписана сфера, расстояние от центра которой до вершины пирамиды равно d. Плоский угол при вершине пирамиды равен γ. Найдите радиус r сферы, вписанной в пирамиду, и радиус R сферы, описанной около неё.

315. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Радиус сферы, вписанной в пирамиду, вдвое меньше стороны основания. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

* * *

316. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной сфер правильной n-угольной пирамиды, h — её высота, γ — плоский угол при вершине. Докажите, что

$$\frac{h}{R} = \frac{(1+k^2)\cos\gamma + k^2 - 1}{k^2},$$
$$\frac{r}{R} = \frac{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2},$$

где $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

317. Отношение высоты правильной треугольной пирамиды к радиусу описанной около неё сферы равно k. Найдите величину угла δ между её боковыми гранями. Вычислите δ при $k = \frac{2}{3}$.

318. Правильная n-угольная пирамида вписана в сферу радиуса R. Высота пирамиды равна h. Найдите объём пирамиды. При каком значении h объём будет наибольшим?

319. Радиус сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, в три раза больше радиуса вписанной сферы. Найдите величину двугранного угла при основании пирамиды.

320. Найдите величину двугранного угла при основании правильной n-угольной пирамиды, у которой центры вписанной и описанной сфер симметричны относительно плоскости основания.

321. Докажите, что расстояние d между центрами вписанной и описанной сфер правильной n-угольной пирамиды выражается формулой

$$d = \frac{\left|\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{n}\right)\right|}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

322. Докажите, что в правильной n-угольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают тогда и только тогда, когда плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$, т. е. сумма всех плоских углов при вершине равна π.

323. Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной сфер правильной n-угольной пирамиды. Докажите, что

$$\frac{R}{r} \geqslant 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

324. а) Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на вписанной в него окружности. Найдите величину угла при основании треугольника и отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

б) Центр сферы, описанной около правильной четырёхугольной пирамиды, лежит на вписанной сфере. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды и отношение радиусов описанной и вписанной сфер.

325. В правильную треугольную пирамиду вписана сфера радиуса r и около неё описана сфера радиуса R. Найдите высоту пирамиды h и расстояние d между центрами этих сфер, если $r=1$ и $R=1+\sqrt{5}$.

326. В правильной n-угольной пирамиде центр описанной сферы лежит на вписанной сфере. Докажите, что отношение радиусов описанной и вписанной сфер

$$\frac{R}{r}=1+\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}.$$

327. Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной сфер правильной n-угольной пирамиды, d — расстояние между их центрами. Докажите, что

а) $d^2=R^2-2Rr-r^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}$;

б) $\frac{R}{r}\geqslant 1+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$, причём равенство имеет место только тогда, когда центры сфер совпадают.

§ 18. *Правильная пирамида и сфера, касающаяся всех её рёбер*

Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка — точкой касания. Любая прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания A, называется касательной к сфере (рис. 40). Говорят также, что сфера касается прямой в точке A.

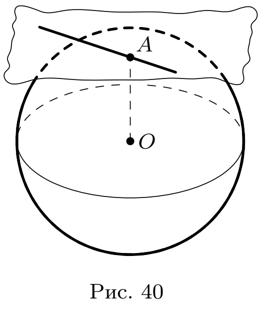

Рис. 40

Для прямой, касательной к сфере, имеет место теорема, аналогичная теореме о касательной прямой к окружности.

Т е о р е м а 1. *Если прямая касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. Обратно, если прямая проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, то она является касательной к сфере.*

Рассмотрим в пространстве множество точек — центров сфер, касающихся сторон данного треугольника ABC.

Прежде всего заметим, что центр O вписанной в треугольник ABC окружности является центром одной такой сферы (рис. 41). Если K, L, M — точки касания окружности со сторонами AB, BC, CA соответственно, то сфера с центром O и радиусом OK касается всех сторон треугольника ABC. Теперь нетрудно доказать, что искомое множество точек есть перпендикуляр m к плоскости треугольника ABC, проходящий через точку O. Действительно, если S — точка, принадлежащая m, то $SK = SL = SM$, как наклонные, имеющие на плоскости ABC равные проекции. Кроме того, согласно теореме о трёх перпендикулярах, $SK \perp AB$, $SL \perp BC$, $SM \perp CA$. Значит, в силу теоремы 1, сфера с центром S и радиусом SK касается всех сторон треугольника ABC.

Если же точка S не лежит на перпендикуляре m к плоскости, то не все расстояния от точки S до прямых AB, BC и CA равны (согласно теореме о наклонных и их проекциях на плоскость). Поэтому точка S не является центром сферы, касающейся всех сторон треугольника ABC.

Ясно, что в пространстве множество точек — центров сфер, касающихся сторон правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ — также есть перпендикуляр к плоскости многоугольника, проходящий через его центр.

Если $ABCD$ — произвольная треугольная пирамида, то сфера, касающаяся всех её шести рёбер, существует не всегда, а только тогда, когда суммы её противоположных рёбер равны. В случае же правильной пирамиды имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для всякой правильной пирамиды существует сфера, касающаяся всех её рёбер.*

Доказательство. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — правильная n-угольная пирамида, NH — её высота, NK — апофема, P — центр окружности, вписанной в грань NA_1A_2 (на рис. 42 изображена лишь часть пира-

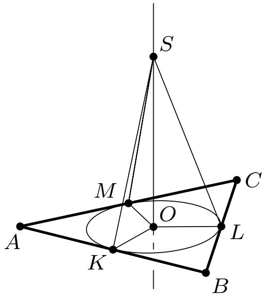

Рис. 41

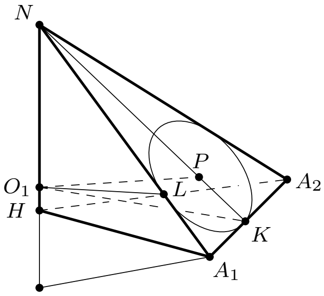

Рис. 42

миды). Множество центров сфер, касающихся сторон треугольника NA_1A_2, есть перпендикуляр m к плоскости NA_1A_2, проходящий через точку P. Центр сферы, касающейся всех сторон правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, лежит на высоте NH пирамиды или на её продолжении за точку H. Прямые m и NH лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке O_1. Действительно, так как $A_1A_2 \perp NH$ и $A_1A_2 \perp NK$, то, согласно теореме о двух перпендикулярах, A_1A_2 — перпендикуляр к плоскости HKN. Поэтому плоскости NHK и NA_1A_2 перпендикулярны. Следовательно, прямая m лежит в плоскости NHK и, поскольку угол HKN острый, пересекает прямую NH. Отсюда следует, что точка O_1 есть центр сферы, касающейся сторон основания пирамиды и боковых рёбер NA_1 и NA_2. Радиус её равен O_1K. Эта сфера касается и всех других боковых рёбер пирамиды, так как расстояния от точки O_1 до боковых рёбер равны между собой и равны O_1L, где L — точка касания окружности, вписанной в грань NA_1A_2, и ребра NA_1, и, причём $O_1L = O_1K$.

Таким образом, всегда существует сфера, касающаяся всех рёбер правильной пирамиды. При этом каждая грань пересекает сферу по окружности, вписанной в грань, а точки касания окружности с рёбрами являются в то же время точками касания сферы и рёбер. Центр сферы лежит на высоте пирамиды или на её продолжении. □

Рассмотрим несколько задач, в которых речь идёт о сфере, касающейся всех рёбер правильной пирамиды.

Пример 1. Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды равно b, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Найти радиус сферы, касающейся всех рёбер пирамиды. При каком значении α центр этой сферы совпадает с центром основания пирамиды?

Решение. Воспользуемся прежними обозначениями и рис. 42. Так как $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный многоугольник, то, полагая $A_1A_2 = a$, имеем: $A_1L = A_1K = \frac{1}{2}a$ (отрезки A_1L и A_1K равны как отрезки касательных к окружности, вписанной в грань NA_1A_2).

Прямоугольные треугольники HA_1N и LO_1N подобны, следовательно, $\angle LO_1N = \angle HA_1N = \alpha$. Обозначив радиус искомой сферы через R_1, находим:

$$R_1 = LN \operatorname{ctg}\alpha, \quad LN = b - \frac{1}{2}\alpha, \quad HA_1 = b\cos\alpha,$$

$$a = 2HA_1 \sin\frac{\pi}{n} = 2b\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$R_1 = b\operatorname{ctg}\alpha\Big(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\Big).$$

Эта формула находит применение при решении ряда задач.

Далее находим: $NH = b\sin\alpha$, $NO_1 = \dfrac{R_1}{\cos\alpha} = \dfrac{b\left(1-\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha\right)}{\sin\alpha}$.

Центр O_1 совпадает с точкой H при условии, что $NH = NO_1$, или

$$\sin^2\alpha = 1-\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha, \quad \text{где} \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Полученное тригонометрическое уравнение легко приводится к виду:

$$\cos\alpha\left(\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{n}\right)=0.$$

А так как $\cos\alpha\neq 0$, то отсюда получаем:

$$\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{n}, \quad \alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}.$$

В частности, если $n=6$, то $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

П р и м е р 2. В сферу радиуса R вписана правильная шестиугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ. Найти радиус R_1 сферы, касающейся всех рёбер пирамиды, и отношение $\dfrac{R_1}{R}$.

Р е ш е н и е. Сохраним обозначения, введённые при решении предыдущей задачи, и воспользуемся формулой:

$$R_1 = b\operatorname{ctg}\alpha\left(1-\frac{1}{2}\cos\alpha\right), \quad \text{где} \quad b=NA_1 \quad \text{и} \quad \alpha=\angle NA_1H.$$

Пусть высота NH пирамиды при продолжении за точку H пересекает сферу в точке M (рис. 42). Тогда MN — диаметр сферы. Из прямоугольного треугольника MNA_1, в котором $\angle HA_1N=\alpha$, находим:

$$b=2R\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1-\frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

В случае n-угольной пирамиды получаем формулу:

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right),$$

которая в дальнейшем также находит применение.

Поскольку вспомогательный угол α и данный угол γ связаны соотношением $\cos\alpha = 2\sin\dfrac{\gamma}{2}$ (см. § 18, пример 1), то окончательно получаем:

$$R_1 = 4R\sin\frac{\gamma}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right).$$

Отсюда следует, что
$$\frac{R_1}{R} = 4\sin\frac{\gamma}{2}\left(1 - \sin\frac{\gamma}{2}\right).$$
Заметим, что $0° < \gamma < 60°$, поскольку $\angle A_1NA_2 < \angle A_1HA_2$.

П р и м е р 3. Найти радиус R_1 сферы, касающейся всех рёбер правильной треугольной пирамиды, зная радиус r сферы, вписанной в пирамиду, и радиус R описанной сферы, если $r = 1$ и $R = 3$.

Р е ш е н и е 1. Воспользуемся формулой
$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right),$$
где α — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания, и результатом задачи 216:
$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{3},$$
где γ — величина плоского угла при вершине пирамиды.

Подставив в последнее равенство значения r и R, получим тригонометрическое уравнение:
$$\sqrt{3}\sin\gamma + \cos\gamma = 2.$$
По смыслу задачи $\gamma < 0° < 120°$. Уравнение приводится к виду:
$$\sin(\gamma + 30°) = 1,$$
откуда $\gamma = 60°$.

Далее воспользуемся формулой $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\gamma}{2}$. При $\gamma = 60°$ получим: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $R_1 = \sqrt{3}$.

Р е ш е н и е 2. Воспользуемся формулой:
$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right).$$

Для нахождения $\cos\alpha$ введём вспомогательные неизвестные: высоту h и двугранный угол β при основании пирамиды. Тогда имеем:
$$h = 2R\sin^2\alpha, \qquad r = \frac{h\cos\beta}{1+\cos\beta} \quad \text{(см. примеры § 18)}.$$
Исключив из этих уравнений h и подставив значения $r = 1$ и $R = 3$, получим:
$$6\sin^2\alpha - 1 = \frac{1}{\cos\beta} \tag{1}$$
Углы α и β связаны соотношением $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$ (см. § 18, пример 1).

Применив формулу $1+\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{1}{\cos^2\beta}$, получим:

$$\frac{1}{\cos^2\beta}=\frac{3\sin^2\alpha+1}{1-\sin^2\alpha} \qquad (2)$$

Из (1) и (2) исключим $\cos\beta$ и получим уравнение:

$$36\sin^4\alpha-12\sin^2\alpha+1=\frac{3\sin^2\alpha+1}{1-\sin^2\alpha}, \quad \text{где} \quad 0^\circ<\alpha<90^\circ,$$

которое после упрощения принимает вид:

$$9\sin^4\alpha-12\sin^2\alpha+4=0,$$

откуда $\sin^2\alpha=\dfrac{2}{3}$. Значит, $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Подставив найденное значение $\cos\alpha$ в исходную формулу, получим: $R_1=\sqrt{3}$.

Примечание. Известно, что для всякого тетраэдра справедливо неравенство $\dfrac{R}{r}\geqslant 3$, причём равенство имеет место только для правильного тетраэдра. Если использовать этот факт, то вычисления в данной задаче можно значительно упростить. Приведённый способ годится для решения задачи при любых числовых данных.

В общем виде для вычисления $\sin\alpha$ получается уравнение:

$$R^2\sin^4\alpha-R(R+r)\sin^2\alpha+r(R+r)=0,$$

откуда

$$\sin^2\alpha=\frac{(R+r)\pm\sqrt{(R+r)(R-r)}}{2R}.$$

Задача имеет решение при $R\geqslant 3r$.

* * *

328. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, боковое ребро равно b. Найдите радиус R_1 сферы, касающейся всех рёбер пирамиды. Вычислите угол α наклона бокового ребра к плоскости основания, если $R_1=\dfrac{1}{2}a$.

329. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите радиус R_1 сферы, касающейся всех рёбер пирамиды, радиус R описанной сферы и высоту h пирамиды.

330. Около правильной треугольной пирамиды описана сфера, радиус которой равен 6. Радиус сферы, касающейся всех рёбер этой пирамиды, равен $2\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной сферы и высоту пирамиды.

331. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен γ. Найдите радиус сферы, касающейся всех рёбер пирамиды.

332. Радиусы R_1 и R сфер, касающейся всех рёбер правильной шестиугольной пирамиды и описанной около неё, равны 3 и 4 соответственно. Найдите высоту пирамиды и расстояние между центрами этих сфер.

* * *

333. Высота правильной n-угольной пирамиды равна h. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите радиус сферы, касающейся всех рёбер пирамиды, и расстояние от вершины пирамиды до центра этой сферы. При каком значении α центр сферы совпадает с основанием высоты пирамиды?

334. Высота правильной n-угольной пирамиды равна h, плоский угол при вершине пирамиды равен γ. Найдите радиус R_1 сферы, касающейся всех рёбер пирамиды.

335. Найдите радиус R_1 сферы, касающейся всех рёбер правильной n-угольной пирамиды, если радиус сферы, вписанной в пирамиду, равен r и двугранный угол при основании пирамиды равен β. Вычислите R_1, если $r = 1$ и $\beta = 60^\circ$.

* * *

336. Пусть R_1 и R — соответственно радиус сферы, касающейся всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды, и радиус описанной около неё сферы. Докажите, что

$$\frac{R}{R_1} \geqslant \sqrt{2}.$$

При каком условии имеет место равенство?

337. Докажите, что радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, больше радиуса сферы, касающейся всех её рёбер.

* * *

338. Докажите, что расстояние d между центром O сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, и центром O_1 сферы, касающейся всех её рёбер, может быть выражено формулами:

а) $d = \dfrac{|a-b|}{2\sin\alpha}$,

б) $d = \dfrac{b\left|1 - 2\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha\right|}{2\sin\alpha}$, где a и b — длины стороны основания и бокового ребра пирамиды, α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

339. При каком условии центр сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, совпадает с центром сферы, касающейся всех её рёбер?

340. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α. На каком расстоянии от плоскости основания находится а) центр сферы, касающейся всех рёбер пирамиды; б) центр сферы, описанной около пирамиды?

341. В правильной n-угольной пирамиде центр сферы, описанной около пирамиды, симметричен центру сферы, касающейся всех её рёбер. Найдите угол наклона α бокового ребра пирамиды к плоскости её основания. Вычислите α при $n = 6$.

§ 19. *Разные задачи*

342. В конус вписан куб, ребро которого в два раза меньше высоты конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

343. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90^\circ$. Найдите радиус описанной сферы, если $AD = BC = 6$ и $AC = 3$.

344. Основанием пирамиды $NABCD$ служит квадрат со стороной, равной a. Боковое ребро ND перпендикулярно основанию, грань NAB наклонена к основанию под углом β. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды, и площадь боковой поверхности пирамиды.

345. Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого равны 13 см, 14 см и 15 см. Вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 12 см. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

346. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан шар, радиус которого равен r. Найдите высоту h пирамиды, если её объём равен V. Вычислите h при $r = 1$ м и $V = 12$ м^3.

* * *

347. Основанием прямой призмы, описанной около шара, служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c и острый угол равен α. Найдите объём призмы.

348. Около конуса описана четырёхугольная пирамида, основанием которой служит равнобочная трапеция с острым углом α. Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объём пирамиды.

349. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен β. В пирамиду вписан шар, к шару проведена касательная плоскость, параллельная основанию пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности полученной усечённой пирамиды.

350. Основанием прямой призмы служит треугольник ABC, в котором $\angle C = 45^\circ$ и $AB = 4$. Высота призмы также равна 4. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины треугольника ABC и касающейся верхнего основания призмы.

351. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб, острый угол которого равен a. Большая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол, равный φ. Докажите, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\varphi.$$

352. Основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной a. Одно из боковых рёбер образует со сторонами основания острые углы, каждый из которых равен α. Известно, что в параллелепипед можно вписать сферу, касающуюся всех его граней. Найдите длину бокового ребра параллелепипеда и радиус вписанной сферы.

353. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит равнобочная трапеция $ABCD$, в которой $AB = 3$, $BC = 6$, $\angle B = 60^\circ$. Боковое ребро призмы равно 9. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины основания $ABCD$ и касающейся верхнего основания.

* * *

354. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна 2, боковое ребро равно 3. Сфера проходит через вершины нижнего основания призмы и касается сторон верхнего основания. Найдите радиус этой сферы.

355. Сфера проходит через вершины нижнего основания прямой треугольной призмы и касается сторон верхнего основания. Докажите, что призма правильная.

356. Основание призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник, в котором $AB = AC = 6$ и $BC = 4$. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$. Сфера проходит через все вершины основания ABC и касается всех сторон основания $A_1B_1C_1$. Найдите радиус этой сферы.

* * *

357. В правильную четырёхугольную пирамиду помещены два шара, касающиеся друг друга и всех боковых граней пирамиды. Больший шар касается также основания пирамиды. Отношение радиуса большего шара к радиусу меньшего шара равно n. Найдите двугранный угол β при основании пирамиды. Вычислите β при $n = 3$.

358. Стороны оснований правильной шестиугольной усечённой пирамиды равны 3 и 4, высота равна 7. Найдите радиус описанной сферы.

359. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная усечённая пирамида, стороны оснований которой равны a и b. Найдите высоту h пирамиды, если $a = 8$, $b = 6$ и $R = 5\sqrt{2}$.

* * *

360. Около сферы описана правильная треугольная призма и около призмы описана сфера. Как относятся между собой площади этих сфер?

361. Найдите отношение площадей трёх сфер, если первая сфера вписана в правильный тетраэдр, вторая касается всех его рёбер, а третья проходит через его вершины.

362. Найдите отношение радиусов трёх сфер, первая из которых вписана в правильную четырёхугольную пирамиду с плоским углом при вершине, равным 60°, вторая касается всех её рёбер, третья описана около этой пирамиды.

363. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, а в пирамиду вписан куб. Высота пирамиды равна стороне её основания. Найдите ребро куба.

364. В сферу вписан конус, а в конус вписан цилиндр. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α, высота цилиндра равна диаметру его основания и равна h. Найдите радиус сферы.

365. Высота правильной треугольной пирамиды вдвое больше стороны её основания. В пирамиду вписаны две сферы: одна касается всех граней пирамиды, а вторая касается первой сферы и трёх боковых граней пирамиды. Найдите отношение радиусов этих сфер.

366. Внутри правильной треугольной призмы лежат три шара одинакового радиуса, каждый из которых касается двух других шаров, двух боковых граней и обоих оснований призмы. Четвёртый шар касается этих трёх шаров и нижнего основания призмы. Найдите отношение объёма всех четырёх шаров к объёму призмы.

Ответы, указания, решения

1. У к а з а н и е. Рассмотрите диагональное сечение параллелепипеда, проходящее через ребро CD.

2. $\dfrac{B_1K}{KC_1}=2$, где K — точка пересечения ребра B_1C_1 с плоскостью APQ.

3. У к а з а н и е. Диагональные сечения призмы — параллелограммы. Докажите, что основания — тоже параллелограммы.

4. У к а з а н и е. Примените теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

5. У к а з а н и е. Диагональное сечение параллелепипеда — прямоугольник. Докажите, что грани — тоже прямоугольники. Используйте теорему о двух перпендикулярах.

6. $a\sqrt{b^2+c^2}$; $b\sqrt{a^2+c^2}$; $c\sqrt{a^2+b^2}$ (в порядке возрастания).

7. 60°, $40\sqrt{3}$ м^2. **8.** $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **9.** 12 м^2.

10. Р е ш е н и е. Рассмотрим диагональ DB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $DB \perp AC$, следовательно, $DB_1 \perp AC$ по теореме о трёх перпендикулярах. $DA_1 \perp AD_1$, следовательно, $DB_1 \perp AD_1$ по теореме о трёх перпендикулярах. Так как диагональ DB_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости ACD_1, то $DB_1 \perp ACD_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

11. б) Пусть диагональ DB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости ACD_1. Тогда $DB_1 \perp AC$ и по теореме о трёх перпендикулярах $DB \perp AC$. Следовательно, прямоугольник $ABCD$ является квадратом. Аналогично докажите, что ADD_1A_1 также квадрат.

12. Правильный шестиугольник. **13.** $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

14. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатами задач 1 и 10.

15. 60°. У к а з а н и е. Докажите, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

16. Два решения: $22{,}5^\circ$, $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ м^2; $67{,}5^\circ$, $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ м^2.

17. $2a\sqrt{2}$. У к а з а н и е. Обозначив через x угол наклона диагонали параллелепипеда к плоскости основания, составьте уравнение

$$\cos(135^\circ - x) = \cos 45^\circ \cos x, \quad 0^\circ < x < 90^\circ.$$

18. $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 45^\circ$, $0^\circ < \alpha+\beta < 90^\circ$. У к а з а н и е. При $\alpha+\beta=75^\circ$ получим уравнение $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin(75^\circ-\alpha)$. Воспользуйтесь тем, что $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ и $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

19. $\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta$. Указание. Примените теорему косинусов.

20. $\dfrac{3a^3}{8}\operatorname{tg}\varphi$. **21.** $\dfrac{h^3\sqrt{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha - 1}$, $0° < \alpha < 60°$; $\dfrac{h^3\sqrt{6}}{4}$ при $\alpha = 45°$.

22. $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$, $0° < \alpha+\beta < 90°$.

23. $a^3\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}$.

24. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}d^3\cos^2\alpha\sqrt{1-4\cos^2\alpha}$, $60° < \alpha < 90°$. Указание. Установите, что если β — угол наклона большей диагонали призмы к плоскости основания, то $\cos\beta = 2\cos\alpha$.

25. $\dfrac{1}{2}d^3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$. Указание. Если β — угол наклона диагонали призмы к основанию, то $\cos\beta = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ и объём призмы выражается формулой $V = \dfrac{1}{2}d^3\cos^2\beta\sin\beta$.

26. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $45° < \alpha < 90°$.

27. $\dfrac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$. Решение. Пусть AA_1 — боковое ребро призмы, A_1H — её высота. Проведём перпендикуляры A_1M и A_1N к сторонам AB и AD основания. В силу теоремы о трёх перпендикулярах $\angle A_1MH$ и $\angle A_1NH$ — линейные углы двугранных углов с ребрами AB и AD. Треугольник AMN — прямоугольный, $MN = AH$.

Высоту A_1H призмы обозначим через h, а угол A_1AH наклона бокового ребра к основанию — через x. Согласно теореме Пифагора из треугольника AMN имеем: $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta$.

А так как $h = c\cdot\sin x = \dfrac{c}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$, то, подставив найденные значения в формулу $V = abh$, выражающую объём призмы, получим

$$V = \frac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}.$$

28. $6\dfrac{1}{4}$ см.

29. 12 см. Указание. Пусть $NABCD$ — данная пирамида, NO — её высота, $ABCD$ — трапеция с большим основанием AB. Докажите, что $AD = BC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle ABD = 45°$ и $AO = 5$ см (O — центр окружности, описанной около основания).

30. $4(2+\sqrt{3})$ см.

31. $(3+2\sqrt{2})h^2\operatorname{ctg}^2\beta$. Указание. Катет треугольника, лежащего в основании пирамиды, равен $r(\operatorname{ctg}45° + \operatorname{ctg}22{,}5°) = r(\sqrt{2}+2)$, где r — радиус вписанной окружности.

32. $\dfrac{1}{4}b^2\operatorname{tg}\varphi$. Решение. Пусть NO — высота пирамиды. Так как все боковые рёбра наклонены к основанию под одним и тем же углом, то O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Радиус R этой окружности определяется формулой $R=\dfrac{b^2}{2CK}$, где CK — высота треугольника ABC.

Высота NO пирамиды равна $R\operatorname{tg}\varphi$, т. е. $NO=\dfrac{b^2}{2CK}\operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, площадь сечения $S=\dfrac{1}{2}CK\cdot NO=\dfrac{1}{2}CK\cdot\dfrac{b^2}{2CK}\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{1}{4}b^2\operatorname{tg}\varphi$.

Заметим, что площадь сечения не зависит от величины угла ACB.

33. а) $\gamma=30^\circ$; б) $\gamma=30^\circ$ или $\gamma=150^\circ$.

34. $\sqrt{3}$. Указание. Установите, что $\operatorname{tg}^2\beta=2$, где β — величина двугранного угла при основании пирамиды.

35. Решение. Прямоугольные треугольники ANH и KNH имеют общий катет NH (рис. 43). Положим $NH=h$. Тогда $AH=h\operatorname{ctg}\alpha$ и $KH=h\operatorname{ctg}\beta$. А так как $AH=2KH$, то $\operatorname{ctg}\alpha=2\operatorname{ctg}\beta$, откуда следует: $\operatorname{tg}\beta=2\operatorname{tg}\alpha$.

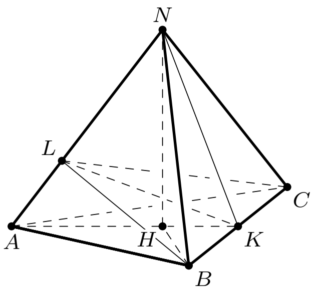

Рис. 43

Из треугольников BNH и BNK, полагая $BN=b$, находим: $BH=b\cos\alpha$ и $BK=b\sin\dfrac{\gamma}{2}$ А так как $\dfrac{BK}{BH}=\sin 60^\circ$, то $\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

Аналогично, обозначив $KN=l$, из треугольников BKN и HKN имеем: $BK=l\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, $HK=l\cdot\cos\beta$. Разделив первое из этих равенств на второе, получим $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{3}\cos\beta$.

36. $\dfrac{1}{2}a$. **37.** 60°, $\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}$.

38. Решение. Пусть $NABC$ — правильная треугольная пирамида, NH — её высота, NK — апофема, $\angle BLC$ — линейный угол двугранного угла с ребром AN (см. рис. 43).

Треугольники BKN, BKL и BLN — прямоугольные, BK — общая сторона первых двух, BL — второго и третьего, $\angle BNK=\dfrac{\gamma}{2}$, $\angle BLK=\dfrac{\delta}{2}$, $\angle BNK=\gamma$. Имеем: $\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{BK}{BN}=\dfrac{BK}{BL}\cdot\dfrac{BL}{BN}=\sin\dfrac{\delta}{2}\sin\gamma$.

Учитывая, что $\sin\gamma=2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, получим $\cos\dfrac{\gamma}{2}\cdot\sin\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{1}{2}$.

39. $\dfrac{b}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}$, $60^\circ<\delta<180^\circ$. Указание. Примените способ введения вспомогательного угла. Установите, что $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}$, где $\alpha=\angle NAH$ (см. рис. 43).

40. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}a^2$. Указание. Используя соотношения $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{3}\cos\beta$ и $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}$, выведите формулу $\cos\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$.

При $\delta = 2\beta$ отсюда следует: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Площадь боковой поверхности пирамиды найдите по формуле $S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta}$.

Заметим, что другой вывод соотношения $\cos\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$ можно получить, если, пользуясь теоремой о площади проекции многоугольника, записать равенства: $S = 3S_1\cos\beta$, $S_1 = S\cos\beta + 2S_1\cos\delta$, где S — площадь основания и S_1 — площадь боковой грани пирамиды. Отсюда получим: $3\cos^2\beta + 2\cos\delta - 1 = 0$. После чего остаётся выполнить несложные тригонометрические преобразования.

41. $\dfrac{a^2}{8\sin\dfrac{\gamma}{2}}$, $0° < \gamma < 120°$.

42. Пусть $AC = BD = a$, тогда периметр параллелограмма (сечения пирамиды плоскостью) равен $2a$.

43. Наибольшую площадь имеет сечение плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC, AD и CD.

44. $\dfrac{ab}{a+b}$.

46. $S_{\text{сеч}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}\cos\dfrac{\beta}{2}}{2(1+3\cos\beta)}$; если $\beta = 60°$, то $S_{\text{сеч}} = \dfrac{3}{10}a^2$. Указание. Пусть $NABC$ — правильная треугольная пирамида, KN — её апофема (K — середина стороны BC). Тогда $\angle AKN$ — линейный угол двугранного угла с ребром BC. Пусть плоскость, делящая двугранный угол BC пополам, пересекает ребро AN в точке L. Биссектриса KL треугольника BCL является и его высотой. Для вычисления KL воспользуйтесь формулой $l_c = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{\beta}{2}$, где l_c — биссектриса треугольника ABC.

47. $S_{\text{сеч}} = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{1+2\cos\gamma}$, $\gamma < 90°$.

48. $a^2\sin^3\beta$, $45° < \beta < 90°$. Указание. Установите, что сечение пирамиды $NABCD$ плоскостью, проходящей через ребро AB, есть равнобочная трапеция $ABEF$. Через высоту NH пирамиды и середину K ребра AB проведите плоскость. Эта плоскость пересечёт EF в некоторой точке L. Тогда KL — высота трапеции $ABEF$. Используя подобие треугольников NCD и NEF, вычислите EF и убедитесь, что $AB + EF = 2a\sin^2\beta$.

49. $\dfrac{a^2\cos\alpha}{\cos\dfrac{a}{2}}$, $0° < \alpha < 90°$.

50. 45°. Указание. Пусть плоскость, проходящая через сторону основания пирамиды, рассекает апофему противоположной грани на отрезки h_1 и h_2, а боковое ребро — на отрезки l_1 и l_2, считая от вершины пирамиды. Тогда $\frac{l_2}{l_1} = \frac{h_2}{h_1} = 2\cos x$, где x — величина искомого угла. Учитывая, что плоскость делит площадь боковой поверхности пирамиды пополам, получите соотношение $l_2 = l_1\sqrt{2}$. После чего искомый угол находится из уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

51. $\angle ANB = 60^\circ$, $\angle AND = 90^\circ$; $S_{\text{сеч}} = \frac{\sqrt{11}}{8}a^2$.

52. $\frac{2b^2\cos^2 x}{1+\cos^2\beta}$, где x — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания и $\operatorname{ctg} x = 2\operatorname{ctg}\beta$. При $\beta = 45^\circ$ получим:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{4}{5}, \quad S_{\text{бок}} = \frac{6}{5}b^2.$$

53. $\frac{\sqrt{6}}{3}a^2$. Указание. Если α — угол наклона грани NCD к плоскости основания и $\angle ANB = \gamma$, то $2\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

54. $\frac{a^2}{2}\sqrt{\cos\gamma}$. Указание. Задачу можно решить методом введения вспомогательного угла. Обозначив угол наклона бокового ребра к плоскости основания через α, докажите, что $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, а площадь сечения $S = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$.

55. $\frac{2\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}h^2$, $0^\circ < \alpha < 60^\circ$. Указание. Обозначив через x угол наклона грани NBC к плоскости основания, докажите, что $\sin x = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.

56. $\sqrt{2}$. Решение. Пусть $NABC$ — данная пирамида, $NA = NB = NC = l$, AB — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC. Обозначим $\angle BNC = \alpha$, $\angle ANC = \beta$, $\angle ANB = \gamma$. Поскольку $AB > BC$ и $AB > AC$, то γ — наибольший из плоских углов при вершине N пирамиды. Боковые грани равновелики, следовательно, $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$. Учитывая, что $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$ и $0^\circ < \gamma < 180^\circ$, отсюда получаем: $\alpha = \beta$ и $\gamma = 180^\circ - \alpha$. По теореме косинусов из треугольников BNC и ANB находим:

$$BC^2 = 2 - 2\cos\alpha, \quad AB^2 = 2 + 2\cos\alpha.$$

А так как треугольники BNC и ANC равны, то $AC = BC$, и, применив теорему Пифагора к треугольнику ABC, получим:

$$2 - 2\cos\alpha = 1 + \cos\alpha,$$

откуда $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Следовательно, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, и площадь боковой поверхности пирамиды $S_{\text{бок}} = \sqrt{2}$.

57. $\dfrac{a^3}{16\cos\alpha}\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$, $30^\circ<\alpha<90^\circ$; $\dfrac{\sqrt{2}}{8}a^3$ при $\alpha=60^\circ$. Указание. Проведите высоту NH пирамиды и, обозначив $\angle NAH= =x$, установите, что объём пирамиды $V=\dfrac{a^3}{8}\operatorname{tg}x$. Вспомогательный угол x найдите, используя теорему Пифагора для трёхгранного угла с вершиной A: $\cos\alpha=\cos 30^\circ\cos x$.

58. $\dfrac{1}{6}a^3$. Указание. Пусть $2x$ — величина меньшего двугранного угла. Составьте уравнение $\operatorname{ctg}2x+\operatorname{ctg}5x=2\operatorname{ctg}3x$, где $0^\circ<x<18^\circ$. Это уравнение приводится к виду $\sin 5x-\sin 3x=\sin x$, откуда $\cos 4x=\dfrac{1}{2}$ и $x=15^\circ$.

59. $\dfrac{1}{6}h^3\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}-1\right)$, $90^\circ<\beta<180^\circ$. **60.** 750 см^2.

61. $\dfrac{Q-q}{2}$. Указание. Пусть α — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания. Тогда $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

62. $\dfrac{(a^2-b^2)\sqrt{3(4-3\cos^2\alpha)}}{4\cos\alpha}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$. Указание. Обозначив угол, образованный боковым ребром со стороной основания через β, докажите, что $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

63. $\dfrac{S_1+S_2}{2}$. Указание. Докажите, что если основания трапеции равны a и b, а x — длина отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на две равновеликих трапеции, то $x^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

64. Указание. Воспользуйтесь теоремой об отношении площадей подобных многоугольников.

65. 4. **67.** $\dfrac{1}{2}$. **68.** $\dfrac{1}{8}\pi d^3\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$. **69.** а) $l_1<l_2$; б) $l_1>l_2$.

70. 2. **71.** $0<k<2$, 30° при $k=1$.

72. $\approx 31^\circ 22'$, $\approx 58^\circ 38'$. Указание. Найдите отношение катетов.

73. $2\pi\sin\dfrac{\alpha}{2}$; 60°. **74.** $\sin\alpha$.

75. $r_1=3$, $r_2=6$, $l=5$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований и l — образующая усечённого конуса. Указание. Задача сводится к решению системы уравнений: $r_2=2r_1$, $(r_1+r_2)l=r_1^2+r_2^2$, $l^2=(r_2-r_1)^2+16$.

76. $2\sin\alpha$, $45^\circ<\alpha<90^\circ$. **77.** $\dfrac{4}{7}\operatorname{tg}\beta$. **78.** 280π см^3.

79. Два решения: $\dfrac{1}{2}$ или 2.

80. $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$. Указание. Пусть V_1 и S_1 соответственно объем и площадь поверхности шара, а V и S — объем и площадь полной поверхности цилиндра. Тогда $\frac{V_1}{V} = \frac{S_1}{S} = \frac{2}{3}$.

81. $\operatorname{arctg} 2$. **82.** Два решения: 30° или 150°.

83. Два решения: R или $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$. Указание. Обозначив радиус основания и высоту конуса через r и h, установите, что $r^2h = R^3$ и $r^2 = (2R-h)h$.

Отсюда $h^3 - 2Rh^2 + R^3 = 0$, $0 < h < 2R$. Полученное уравнение решите путём разложения левой части на множители.

84. $\frac{\pi h^2 r}{h-2r}$. Указание. Примените метод введения вспомогательного угла. Обозначив угол наклона образующей конуса к плоскости основания через 2α, докажите, что

$$\cos 2\alpha = \frac{r}{h-r}, \quad R = r \operatorname{tg}\alpha, \quad l = \frac{R}{\cos 2\alpha}.$$

85. Два решения: $2R$ или $3R$.

86. $\frac{8}{3}r$. Указание. Если 2α — угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, то $R = r\operatorname{tg}\alpha$ и $h = \frac{2r}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

88. $\frac{3}{8}$. **89.** $(1-\sin\alpha)^3$.

90. $\frac{Q}{\sin^2\alpha}$. Указание. Воспользуйтесь формулой $S_{\text{бок}} = \pi(r_1+r_2)l$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований и l — образующая усечённого конуса. Установите, что $r_1 + r_2 = l$.

91. $\frac{1}{4}l$, $\frac{1}{2}l$.

92. $(2\sin\alpha+1)\pi R^2$. Указание. Докажите, что $r_1 + r_2 = R\sqrt{2}\sin\alpha$, $r_2 - r_1 = R\sqrt{2}\cos\alpha$, откуда $r_1^2 + r_2^2 = R^2$.

93. $2R^2\sin\alpha\sin^2\beta$. Указание. Воспользуйтесь формулой $S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$, где d — диагональ сечения.

94. $\frac{1}{6}\pi h(h^2+R^2)$, $R < h < R\sqrt{2}$. Указание. Пусть l — образующая конуса, h — его высота. Установите, что $l = R\sqrt{2}$, $2(r_1^2+r_2^2) = l^2$, $r_1 + r_2 = h$. Если $\frac{R}{h} = \frac{2}{3}$ или $\frac{R}{h} = \frac{3}{2}$, то задача решений не имеет.

95. $6a$. Указание. Рассмотрите сечение сфер плоскостью, проходящей через центры сфер.

96. $\frac{bc}{2a}$, $\frac{ac}{2b}$, $\frac{ab}{2c}$. **97.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+2\right)r$. **98.** $(\sqrt{2}+1)r$.

99. $5r$. Р е ш е н и е. Пусть O_1 — центр одного из трёх шаров, касающихся основания конуса, NH — высота конуса (рис. 44). Плоскость HNO_1 пересекает боковую поверхность конуса по образующей AN. Расстояния от точки O_1 до основания конуса и до образующей AN равны r. Значит, AO_1 — биссектриса угла HAN, равного $60°$. Пусть B — точка касания шара с основанием конуса, тогда $\angle BAO_1 = 30°$, $O_1B = r$ и $AB = r\sqrt{3}$.

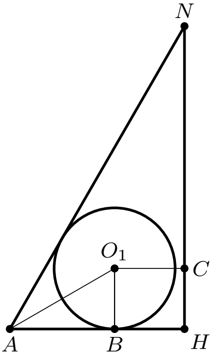

Рис. 44

Так как центры O_1, O_2, O_3 касающихся шаров являются вершинами равностороннего треугольника и $O_1O_2 = 2r$, то расстояние O_1C от вершины O_1 до центра этого треугольника, лежащего на высоте конуса, равно $\frac{2r}{\sqrt{3}}$. Итак, $AH = AB + BH = AB + {}$ ${}+ O_1C = r\sqrt{3} + \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{5r\sqrt{3}}{3}$. Из треугольника AHN имеем: $NH = AH \operatorname{tg} 60° = 5r$.

100. $\arccos\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}(2\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + 3)r$.

101. $4{,}5a$. У к а з а н и е. Пусть O_1 — центр меньшего шара, O_2, O_3 — центры двух других шаров и A, B, C — их проекции на основание цилиндра (рис. 45). Тогда $AO_1 = a$, $BO_2 = CO_3 = 2a$, $O_1O_2 = O_1O_3 = 3a$, $O_2O_3 = 4a$. Установите, что $AB = AC = 2\sqrt{2}a$, AO — биссектриса угла BAC и $\angle BAC = 90°$. Обозначив радиус основания цилиндра через x, примените теорему косинусов к треугольнику ABO и составьте уравнение:

$$(x - 2a)^2 = 8a^2 + (x - a)^2 - 4(x - a)a,$$

откуда $2x = 9a$.

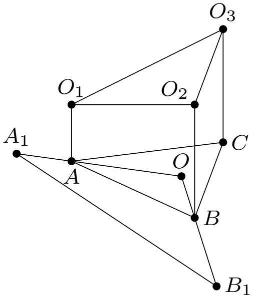

Рис. 45

102. $\frac{3}{4}r$ и $3r$ (два решения). У к а з а н и е. Пусть O_1 — центр меньшего шара, O_2, O_3 — центры двух других, A, B, C — точки касания их с плоскостью. Тогда $AO_1 = r$, $BO_2 = CO_3 = 3r$, $O_1O_2 = O_1O_3 = 4r$, $O_2O_3 = 6r$. Докажите, что $AB = AC = 2r\sqrt{3}$, $BC = 6r$, $\angle BAC = 120°$.

Пусть четвёртый шар с центром O касается той же плоскости в точке P. Обозначив его радиус через x, установите, что $AP = 2\sqrt{rx}$, $BP = {}$ ${}= BC = 2\sqrt{3rx}$. Примените к треугольнику ABP теорему косинусов, получите уравнение: $\sqrt{3rx} = 3r - 2x$, если точка P лежит внутри треугольника ABP, и уравнение $\sqrt{3rx} = 2x - 3r$, если она лежит вне треугольника ABP.

103. Два решения: 3 и $\frac{3}{7}$.

104. $2+\sqrt{3}$. Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры больших шаров, радиусы которых равны R, а O_3, O_4 — центры двух других шаров, радиусы которых равны r (рис. 46). Из условия следует, что $O_1O_2O_3O_4$ — тетраэдр, $O_1O_2 = 2R$, $O_3O_4 = 2r$ и длины остальных рёбер тетраэдра равны $R+r$.

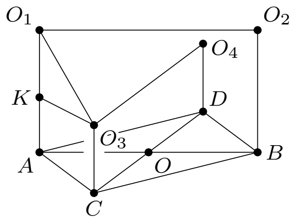

Рис. 46

Обозначим точки касания шаров с плоскостью соответственно через A, B, C и D. Тогда $AO_1 = R$, $CO_3 = r$, ACO_3O_1 — прямоугольная трапеция. Проведём перпендикуляр O_3K к AO_1 и по теореме Пифагора из треугольника O_1O_3K найдём: $AC^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$. Четырёхугольник $ACBD$ является ромбом, каждая его сторона равна $2\sqrt{Rr}$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, тогда $\angle AOC = 90^\circ$, $AO = R$ и $CO = r$. Применив теорему Пифагора к треугольнику ACO, получим:

$$4Rr = R^2 + r^2, \quad \text{или} \quad R^2 - 4Rr + r^2 = 0,$$

откуда

$$R = (2+\sqrt{3})r.$$

105. Два решения: 1 или 2. Указание. Докажите, что четвёртый шар, радиус которого равен 1, касается плоскости α, проходящей через центры трёх первых шаров. Если центры четвёртого и пятого шаров лежат по разные стороны от плоскости α, то они симметричны относительно этой плоскости. Если же их центры лежат по одну сторону от плоскости α, то, обозначив радиус пятого шара через x, получим уравнение

$$(6+x)^2 = (2+x)^2 + 48,$$

откуда $x = 2$.

106. Указание. По правилу сложения векторов

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

Эти равенства сложите почленно.

107. Указание. Воспользуйтесь формулой предыдущей задачи и докажите, что $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM}$.

108. Решение. Так как $OABC$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$. Аналогично, $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB_1}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BB_1}.$$

Из полученного равенства следует, что а) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны некоторой плоскости, б) если векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ не коллинеарны, то существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам AA_1, BB_1 и CC_1.

109. Указание. На ребре BC тетраэдра постройте точку K так, что $\frac{BK}{CK} = \frac{1}{2}$, тогда $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

110. Указание. Воспользуйтесь формулой деления отрезка в данном отношении.

111. Решение. Пусть K и N — середины рёбер AB и CD тетраэдра, а M — середина отрезка KN. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Значит, середина каждого из отрезков, соединяющих середины противоположных рёбер тетраэдра (их называют бимедианами тетраэдра) совпадает с центроидом тетраэдра (см. пример 2). Таким образом, семь отрезков, четыре медианы и три бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке.

112. а) Указание. Воспользуйтесь формулой $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ и возьмите вместо точки O точку M.

б) Указание. Воспользуйтесь формулой $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ и возьмите вместо точки O точку M.

113. а) Указание. Воспользуйтесь формулой $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ и правилом вычитания векторов $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM}$. б) $\frac{1}{3}(a+b+c)$.

114. а) Указание. Так как $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ и $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1})$, то $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1})$. Вектор MM_1 параллелен каждому из векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$, в частности вектору $\overrightarrow{AA_1}$.

б) Указание. Воспользуйтесь пунктом а).

115. а) Решение. Точки A_1, B_1, M_1 лежат на одной прямой. Полагая $\frac{\overrightarrow{A_1M}}{\overrightarrow{M_1B}} = \lambda$, применим формулу деления отрезка в данном отношении: $\overrightarrow{CM_1} = \frac{\overrightarrow{CA_1} + \lambda\overrightarrow{CB_1}}{1+\lambda}$.

Согласно условию задачи $\overrightarrow{CA_1} = k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB_1} = l\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CM_1} = m\overrightarrow{CM}$. Подставив эти значения в формулу, получим:

$$m\overrightarrow{CM} = \frac{k\overrightarrow{CA} + \lambda l\overrightarrow{CB}}{1+\lambda}.$$

Поскольку M — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\frac{m}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{k}{1+\lambda}\overrightarrow{CA} + \frac{\lambda l}{1+\lambda}\overrightarrow{CB}.$$

В силу единственности разложения по неколлинеарным векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, получим:

$$\frac{m}{2} = \frac{k}{1+\lambda}, \qquad \frac{m}{2} = \frac{\lambda l}{1+\lambda}.$$

Откуда $\lambda = \frac{k}{l}$. Подставив значение λ в первое равенство, получим:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right).$$

б) Указание. Решение аналогично решению задачи пункта а). Воспользуйтесь условием принадлежности четырёх точек одной плоскости (см. пример 8).

116. а) Коэффициент гомотетии $k = -\frac{1}{2}$, центр гомотетии — центроид треугольника.

б) Коэффициент гомотетии $k = -\frac{1}{3}$, центр гомотетии — центроид тетраэдра.

117. Указание. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, M — его центроид, M_1 — центроид грани BCD, A_1 — точка, симметричная вершине A тетраэдра относительно точки M_1. Докажите, что $\overrightarrow{MA_1} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{MA}$.

118. а) Решение. Обозначим точки, симметричные точке P относительно середин сторон BC, CA и AB треугольника ABC, соответственно через A_1, B_1 и C_1. Так как середины отрезков PA_1 и BC совпадают, то

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Это равенство справедливо при любом выборе точки O. Пусть точка O совпадает с центроидом M треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ и полученное равенство принимает вид:

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MP}.$$

Аналогично найдём, что $\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MP}$.

Значит, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 имеют общую середину S, причём

$$\overrightarrow{MS} = \frac{\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA}}{2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MP},$$

т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ симметричны относительно центра S и $\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MP}$.

б) У к а з а н и е. Из условия задачи, учитывая, что M — центроид тетраэдра ABC и $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$, выведите соотношения:

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD_1}+\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MP}.$$

119. У к а з а н и е. Воспользуйтесь признаком принадлежности четырёх точек пространства одной плоскости:

$$\overrightarrow{KN}=\alpha\overrightarrow{KL}+\beta\overrightarrow{KM}.$$

Обозначив $\dfrac{BL}{LC}=\lambda$, $\dfrac{AN}{ND}=\mu$, выразите векторы $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KN}$ через векторы $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{KD}$.

120. Р е ш е н и е. Пусть $\dfrac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}}=\alpha$, $\dfrac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}}=\beta$, $\dfrac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MD}}=\gamma$, $\dfrac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NA}}=\delta$. Будем рассматривать векторы, отложенные от точки K. Тогда имеем:

$$\overrightarrow{KL}=\frac{\overrightarrow{KB}+\beta\overrightarrow{KC}}{1+\beta},\quad \overrightarrow{KM}=\frac{\overrightarrow{KC}+\gamma\overrightarrow{KD}}{1+\gamma},$$

$$\overrightarrow{KN}=\frac{\overrightarrow{KD}+\delta\overrightarrow{KA}}{1+\delta}\quad\text{или}\quad \overrightarrow{KN}=\frac{\overrightarrow{KD}-\alpha\delta\overrightarrow{KB}}{1+\delta},$$

так как $\overrightarrow{KA}=-\alpha\overrightarrow{KB}$.

Точки K, L, M и N принадлежит одной плоскости тогда и только тогда, когда существуют такие числа λ и μ, что

$$\overrightarrow{KN}=\lambda\overrightarrow{KL}+\mu\overrightarrow{KM},$$

или такие числа x и y, что

$$(1+\delta)\overrightarrow{KN}=x(1+\beta)\overrightarrow{KL}+y(1+\gamma)\overrightarrow{KM}.$$

После подстановки в это равенство значений векторов $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KD}$ получим:

$$(\alpha\delta+x)\overrightarrow{KB}+(\beta x+y)\overrightarrow{KC}+(\gamma y-1)\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{0}.$$

Но векторы $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{KD}$ неколлинеарны, следовательно,

$$a\delta+x=0,\quad \beta x+y=0,\quad \gamma y-1=0.$$

Отсюда вытекает необходимое и достаточное условие принадлежности точек K, L, M и N одной плоскости: $\alpha\beta\gamma\delta=1$.

121. У к а з а н и е. Согласно условию задачи $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CN}=$ $=\lambda\overrightarrow{CB_1}$. Обозначив $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$, установите, что

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=-\lambda\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}.$$

122. Р е ш е н и е. Пусть искомая прямая пересекает прямые BA_1 и CB_1 в точках M и N соответственно (рис. 47). Найдём разложение векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{NM}$ по векторам $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$. Имеем:

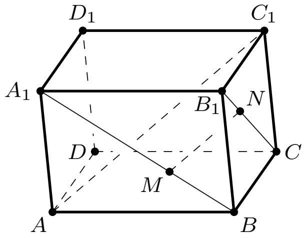

Рис. 47

$$\overrightarrow{AC_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{BA_1} = \vec{a} + \vec{c},$$
$$\overrightarrow{CB_1} = \vec{c} - \vec{b}.$$

Полагая $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CB_1}$, получим:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -x\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{CB_1} =$$
$$= -x(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + y(\vec{c} - \vec{b}) = -x\vec{a} + (1-y)\vec{b} + (y-x)\vec{c}.$$

Прямые MN и AC_1 параллельны тогда и только тогда, когда найдётся такое число λ, что $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{AC_1}$, т. е. при условии, что

$$x = \lambda, \quad 1 - y = \lambda, \quad y - x = \lambda,$$

откуда $x = \frac{1}{3}$ и $y = \frac{2}{3}$. Итак, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB_1}$. Прямую MN легко построить. При этом $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$.

123. Р е ш е н и е. Пусть P и Q — точки пересечения искомой прямой с прямыми BM и CN соответственно (рис. 48). Обозначим $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Тогда имеем:

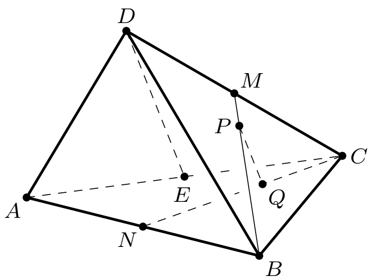

Рис. 48

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}.$$

Положим $\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{CQ} = y\overrightarrow{CN}$. Так как $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ}$, то получим:

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{y}{2}\vec{a} + \left(\frac{y}{2} - x\right)\vec{b} + \left(\frac{x}{2} - y + \frac{1}{2}\right)\vec{c}.$$

В силу соотношений $\overrightarrow{PQ} = \lambda\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$, имеем систему уравнений:

$$y = \lambda, \quad y = 2x, \quad \lambda = x - 2y + 1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{2}{5} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{DE}.$$

124. $AC_1 = \sqrt{6}a$, $BD_1 = \sqrt{2}a$.

125. $AC_1 = \sqrt{5}a$, $BD_1 = B_1D = \sqrt{3}a$, $A_1C = a$. Треугольник AA_1C равен треугольнику ABC, площадь диагонального сечения ACC_1A_1 равна a^2.

126. $\arccos\sqrt{\dfrac{3}{10}}$.

127. Пусть $AB = a$, $AA_1 = h$, $\angle AKC_1 = \varphi$. Тогда $\cos\varphi = -\dfrac{h^2}{4a^2 + h^2}$, $\varphi = 120^\circ$ при $h = 2a$.

128. $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$, где α — угол между прямыми AC и BD. Если $a = b$, то $\alpha = 60^\circ$.

129. 60°.

130. б) Решение. Пусть дан трёхгранный угол. Отложим на его рёбрах от вершины единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тогда векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{a}$ имеют направления биссектрис плоских углов. Имеем:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = \\ = (\vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}.$$

Так как скалярные произведения одинаковы, то углы между биссектрисами будут одновременно острыми, прямыми или тупыми.

131. а) Решение. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — единичные векторы, сонаправленные с рёбрами OA, OB и OC трёхгранного угла $OABC$. Вектор $\vec{b} + \vec{c}$ сонаправлен с биссектрисой угла BOC. Требуется найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b} + \vec{c}$. По определению скалярного произведения векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\gamma$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = \cos\beta$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

132. а) $\cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}$.

б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1$. (Пример: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \gamma = 120^\circ$.)

133. Указание. Пусть $OABC$ — трёхгранный угол и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — единичные векторы, сонаправленные с лучами OA, OB и OC. Тогда векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ коллинеарны биссектрисам углов AOB, BOC и угла, смежного с углом AOC.

134. б) Решение. Обозначим $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Тогда $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Очевидно, что доказываемое равенство равносильно тождеству а).

135. а) Решение. Пусть высоты треугольника ABC, проведённые из вершин A и B, пересекаются в точке H. Тогда $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$. В силу тождества (задача 134, б) имеем:

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

Следовательно, также $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Это означает, что высота треугольника ABC, проведённая из вершины C, проходит через точку H.

б) Указание. Воспользуйтесь тождеством задачи 134, б).

136. а) Решение 1. Пусть прямые, содержащие высоты треугольника ABC, пересекаются в точке H. Тогда $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Так как O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, то $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$. Отсюда находим:

$$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{BC}=0,$$
$$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

Вычтем из первого равенства второе и получим:

$$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

или $\vec{x}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, где $\vec{x}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

Аналогично находим, что $\vec{x}\cdot\overrightarrow{BA}=0$. Так как векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ неколлинеарны, то $\vec{x}=\vec{0}$, или $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Решение 2. Пусть ABC — треугольник, отличный от прямоугольного (рис. 49). Найдём сумму векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

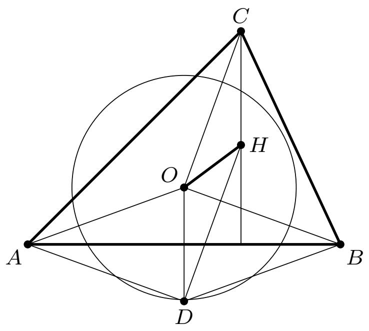

Рис. 49

Для этого построим точку D, симметричную точке O относительно стороны AB. Тогда $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Затем построим точку H так, что

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Докажем, что точка H и есть ортоцентр треугольника ABC.

По построению прямые CH и OD параллельны, OD — серединный перпендикуляр к отрезку AB, следовательно, прямая CH также перпендикулярна к прямой AB, и точка H лежит на высоте треугольника, проведённой из вершины C. Если повторить построение, начиная с векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, то получится та же точка H, но уже принадлежащая высоте треугольника, проведённой из вершины B. Аналогично получим, что точка H лежит и на высоте, проведённой из вершины A. Следовательно, высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H, причём $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Легко проверить, что теорема верна и для прямоугольного треугольника.

б) Пусть все четыре высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке H (рис. 50). Тогда $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$ и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$. А так как $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH}$, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, значит, $AB \perp CD$.

Аналогично докажем, что $AC \perp BD$ и $BC \perp AD$.

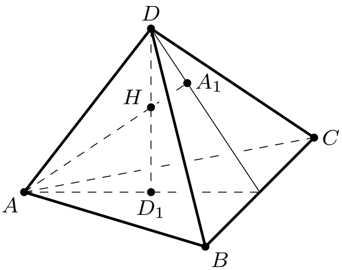

Рис. 50

Итак, если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то его противоположные рёбра попарно перпендикулярны. Впрочем, это легко доказать и без использования векторов.

Докажем теперь истинность векторного равенства

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Так как H — точка пересечения высот тетраэдра $ABCD$, то $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ и, как мы уже доказали, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Кроме того, $\overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OB}^2 = 0$, поскольку OA и OB — радиусы описанной около тетраэдра сферы. Отсюда находим:

$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Умножим первое из этих равенств на 2 и вычтем из него два других. Получим:

$$(2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

или $\vec{x} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, где $\vec{x} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Аналогично находим, что $\vec{x} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ и $\vec{x} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не компланарны, то $\vec{x} = \vec{0}$, откуда следует, что

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

137. Решение. Пусть $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ и $\overrightarrow{DP} \neq \vec{0}$. Докажем, что P — точка пересечения высот тетраэдра $ABCD$. Имеем:

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC}).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Но $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, поэтому и $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Аналогично, $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Следовательно, прямая DP перпендикулярна плоскости ABC. Точно так же докажем, что прямые AP, BP и CP перпендикулярны соответственно плоскостям BCD, ACD и ABD. Значит, точка P есть точка пересечения высот тетраэдра $ABCD$.

138. $MN^2=\frac{1}{4}(a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)$, где M и N — середины рёбер AB и CD. Указание. Воспользуйтесь равенством $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

139. а) Решение. Воспользуемся результатом задачи 136:

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Сравнивая это равенство с равенством $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, заключаем, что $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OM}$.

140. а) Решение. Для центроида M треугольника ABC имеет место равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

Отсюда $\overrightarrow{OM}^2=\frac{1}{9}(3R^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})$. Так как $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA^2+OB^2-AB^2=2R^2-c^2$, то получим

$$OM^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

Отсюда следует, что для любого треугольника выполняется неравенство $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$.

б) $OM^2=R^2-\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2)$.

Следствие. *Для всякого тетраэдра справедливо неравенство*:

$$a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2\leqslant 16R^2.$$

141. а) Решение. Согласно правилу сложения векторов имеем: $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC}$. Возведём обе части каждого равенства в квадрат. Затем воспользуемся соотношением $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$ (см. задачу 112) и получим:

$$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2=3PM^2+AM^2+BM^2+CM^2.$$

142. б) Центроид тетраэдра.

143. Р е ш е н и е. Имеем:
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=OM^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$. Пусть C — середина отрезка AB. Тогда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OC}$. Откуда (так как $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=R$) получим: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2OC^2-R^2$. Таким образом, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=OM^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}+2OC^2-R^2=OM^2-R^2-2\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$. Но $\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CM}=0$, так как $OC\perp CM$. Следовательно,
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=OM^2-R^2.$$

Аналогичный результат получится, если вместо сферы взять окружность.

Итак, произведение $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ зависит только от расстояний точки M до центра сферы (окружности) и не зависит от выбора секущей, проходящей через точку M. Число OM^2-R^2 называют степенью точки относительно данной сферы (окружности).

144. Р е ш е н и е. Данное равенство $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ можно записать так: $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=k$, или $OM^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=k$. Пусть O — середина отрезка AB и $OA=R$. Тогда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-R^2$. Таким образом, данное равенство приводится к виду:
$$OM^2=k+R^2.$$
Отсюда следует, что искомое множество точек представляет собой сферу радиуса $\sqrt{k+R^2}$ с центром O, если число $k+R^2$ положительно, точку или пустое множество, если оно равно нулю или отрицательно.

145. Перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, проходящий через ортоцентр этого треугольника.

146. Р е ш е н и е. Согласно условию задачи имеем:
$$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})^2+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})^2=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM})^2,$$
или
$$2\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})=OA^2+OB^2-2OC^2.$$

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда $OA=OB=OC$ и $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}$, где D — середина отрезка AB. Получаем:
$$\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=0,$$
или
$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{CD}=0.$$
Отсюда следует, что искомое множество точек есть плоскость, проходящая через центр окружности, описанной около треугольника ABC перпендикулярно медиане CD треугольника.

147. Р е ш е н и е. Имеем:

$$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})^2+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})^2-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM})^2=0,$$

или

$$OM^2+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OM}+OA^2+OB^2-OC^2=0.$$

В качестве начальной точки O выберем середину отрезка AB. Тогда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{0}$ и $OA=OB$. Предыдущее равенство принимает вид:

$$OM^2+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}=OC^2-2OA^2,$$

или

$$(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC})^2=2(OC^2-OA^2).$$

Пусть D — точка, симметричная точке C относительно точки O, т. е. D — вершина параллелограмма $ABCD$. В таком случае $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DM}$, и равенство принимает простой вид:

$$DM^2=2(OC^2-OA^2).$$

Итак, если $OC>OA$, то искомое множество есть сфера радиуса $\sqrt{2(OC^2-OA^2)}$; если $OC=OA$, то искомое множество — одна точка D, при этом $\angle ACB=90°$; если $OC<OA$, то искомое множество точек — пустое.

148. Р е ш е н и е. Если CM — медиана треугольника, то

$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}).$$

Так как векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ не коллинеарны, то

$$CM=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|<\frac{1}{2}(CA+CB).$$

Задача для тетраэдра решается аналогично.

Если DM — медиана тетраэдра, то

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}).$$

Векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ не коллинеарны, следовательно,

$$DM<\frac{1}{3}(DA+DB+DC).$$

Значит, медиана тетраэдра меньше $\frac{1}{3}$ суммы трёх рёбер, исходящих из той же вершины.

149. У к а з а н и е. Установите, что $(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})^2>0$, и воспользуйтесь теоремой косинусов $2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=DA^2+DB^2-AB^2$.

150. Р е ш е н и е. Вектор $\vec{s}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$ равен нулевому вектору тогда и только тогда, когда $ABCD$ — параллелограмм, в противном случае $\vec{s}^{\,2} > 0$. Итак, имеем:

$$AB^2 + AD^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} \geqslant 0.$$

Применив теорему косинусов, получим:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2 \geqslant 0,$$

где равенство достигается только для параллелограмма (включая вырожденный случай).

151. $\cos\varphi = 1 - \dfrac{3}{2}\cos^2\alpha$; если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, то $\varphi = 60^\circ$.

152. Р е ш е н и е. Рассмотрим правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 51). Требуется построить общий перпендикуляр MN прямых BA_1 и CB_1.

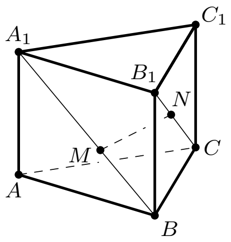

Рис. 51

Выберем базисные векторы: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$. Положим $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1N} = y\overrightarrow{B_1C}$. Выразим векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{B_1N}$, $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Получим:

$$\overrightarrow{BA_1} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{B_1C} = \vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{BM} = x(\vec{a} + \vec{c}), \quad \overrightarrow{B_1N} = y(\vec{b} - \vec{c}),$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1N},$$

$$\text{или} \quad \overrightarrow{MN} = -x\vec{a} + y\vec{b} + (1 - x - y)\vec{c}.$$

Так как MN — общий перпендикуляр прямых BA_1 и CB_1, то $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BA_1} = 0$ и $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{B_1C} = 0$. Согласно условию задачи $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ и $\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{2}a^2$. Получаем систему уравнений:

$$x + 4y - 2 = 0, \quad 4x + y - 2 = 0.$$

Отсюда $x = y = \dfrac{2}{5}$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{5}(-2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$, $MN^2 = \dfrac{1}{5}a^2$, $MN = \dfrac{1}{\sqrt{5}}a$.

Найденные значения x и y дают возможность построить общий перпендикуляр прямых BA_1 и CB_1.

153. Р е ш е н и е. Пусть $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Длины этих векторов обозначим соответственно через a, b, c.

Имеем:

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\cos\varphi = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad 0^\circ < \varphi < 90^\circ.$$

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$, то

$$\cos\alpha = \cos\angle BAC = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Следовательно, $\angle BAC = \varphi$.

Расстояние от точки K до прямой AC равно $d = AK\sin\varphi$.

Если $DA = 1$, $DB = DC = 2$, то $AK = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\cos\varphi = \frac{1}{5}$, $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $d = \sqrt{1{,}2} \approx 1{,}1$.

154. $MN = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BN}{ND_1} = \frac{a^2}{b^2}$, MN — общий перпендикуляр прямых AA_1 и BD_1.

155. $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NS} = 2$, $MN = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Решение. Пусть $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BS} = \vec{c}$ (рис. 52). Положим $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CS}$. Согласно правилу сложения векторов

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN},$$

или $$\overrightarrow{MN} = -x\vec{a} + (1-y)\vec{b} + y\vec{c}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BA} = 0 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CS} = 0.$$

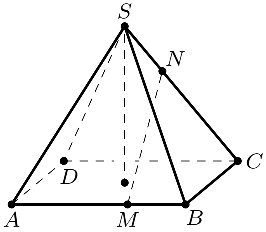

Рис. 52

Так как длины всех рёбер пирамиды равны 1, то $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ABS = \angle CBS = 60^\circ$. Значит, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}$. $\vec{a}^{\,2} = \vec{b}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} = 1$. Подставив найденные значения в предыдущие равенства, получаем систему уравнений:

$$2x - y = 0, \qquad x - 2y + 1 = 0,$$

откуда $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. Далее находим: $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NS} = 2$, $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$, $MN^2 = \frac{2}{3}$.

156. $\frac{abc}{ab+bc+ca}$.

157. $\frac{7}{6}$. Указание. Точку C примите за начало координат, а направленные прямые CA, CB и CC_1 — за оси координат. Вершины призмы будут иметь координаты: $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 3,\ 0)$, $C_1(0,\ 0,\ 1)$.

Уравнение плоскости ABC_1: $3x + 2y + 6z - 6 = 0$. Вектор $\vec{n} = \{3,\ 2,\ 6\}$ является направляющим вектором прямой CM, уравнение которой

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}.$$

Запишите уравнение плоскости $A_1B_1C_1$ и решите систему полученных уравнений. Точка M имеет координаты $\left(\frac{1}{2}, 13, 1\right)$.

158. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Решение. Введём в пространстве прямоугольную систему координат с началом в центре O квадрата $ABCD$. Осям координат придадим направления векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{ON}$. Так как $\angle NAO = 45°$, то $OA = ON$ и вершины пирамиды будут иметь координаты: $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $N(0, 0, 1)$, $D(0, -1, 0)$. Запишем уравнение плоскости ABN: $x + y + z = 1$. Вектор $\vec{n} = \{1, 1, 1\}$ перпендикулярен плоскости ABN. Вектор $\overrightarrow{DN}$ имеет координаты $\{0, 1, 1\}$. Обозначив искомый угол через φ, а угол между векторами $\overrightarrow{DN}$ и $\vec{n}$ — через α. Легко доказать, что $\sin\varphi = |\cos\alpha|$, следовательно

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{DN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{DN}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Координаты векторов $\overrightarrow{DN}$ и $\vec{n}$ найдены, значит,

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

159. $\frac{3}{32}$ (куб. ед.). Указание. Введите прямоугольную систему координат с началом в центре O треугольника ABC, а осям координат придайте направление векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{OS}$. Тогда вершины пирамиды будут иметь координаты: $A(1, 0, 0)$, $B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$, $S(0, 0, \sqrt{3})$.

160. $MN = 1{,}5$; $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$. **161.** $BL = 6$, $S_{\text{сеч}} = 6$ (кв. ед.), $\arccos\frac{2}{9}$.

162. $3\sqrt{17}$ (кв. ед.).

163. $S_{\text{сеч}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a^2$, $\frac{DM}{MB_1} = \frac{1}{5}$. Указание. Введите в пространстве прямоугольную систему координат с началом в точке D так, чтобы вершины призмы имели координаты $A(a, 0, 0)$, $C(0, a, 0)$, $D_1(0, 0, 2a)$. Запишите уравнение плоскости сечения: $x + y + 2z = a$. Докажите, что эта плоскость пересекает ребро DD_1 в такой точке E, что $DE = \frac{1}{2}a$.

164. $3\sqrt{3}a$.

166. $\frac{1}{3}$. Указание. Пусть $NABCD$ — данная пирамида. Все двугранные углы при основании пирамиды равны, значит, центр сферы, вписанной в пирамиду, лежит на её высоте. Основание высоты NO пирамиды есть точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Введите прямоугольную систему координат с осями OA, OB и ON. Пусть r — радиус вписанной сферы, тогда её центр имеет координаты $(0, 0, r)$. Для вычисления r составьте уравнение, учитывая, что расстояние от центра сферы до плоскости ABN равно r.

167. 3.

168. а) $m+n\pm\sqrt{2mn}$, задача имеет два решения.

б) $2r=m+n+p\pm\sqrt{2mn+2mp+2np-m^2-n^2-p^2}$, где r — радиус сферы. 1) Два решения: $r_1=3$ и $r_2=5$. 2) Одно решение: $r=3$. 3) Решений нет.

169. Решение. Выберем вершину O — тетраэдра $OABC$ за начало прямоугольной системы координат, а оси выберем так, чтобы другие вершины имели координаты: $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$. Введём ещё обозначения: $P(x, y, z)$, $OP=p$, $AP=a$, $BP=b$, $CP=c_1$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$a_1^2=(x-a)^2+y^2+z^2,\quad p^2=x^2+y^2+z^2.$$

Отсюда $a_1^2=a^2\left(1-\frac{2x}{a}\right)+p^2$. Аналогично, $b_1^2=b^2\left(1-\frac{2y}{c}\right)+p^2$, $c_1^2=$ $=c^2\left(1-\frac{2z}{c}\right)+p^2$. Следовательно, $\frac{a_1^2}{a^2}+\frac{b_1^2}{b^2}+\frac{c_1^2}{c^2}=3-2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)+$ $+p^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$. Точка P принадлежит плоскости ABC, поэтому $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Далее, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$ (см. пример 1). А так как $\frac{a_1}{a}=u$, $\frac{b_1}{b}=v$, $\frac{c_1}{c}=w$ и $\frac{p^2}{h^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha$, то полученное выше равенство принимает вид:

$$u^2+v^2+w^2=2+\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

170. $\frac{4}{3}$ **171.** $\frac{\sqrt{14}}{4}a$.

172. $\frac{\sqrt{22}}{4}a$. Указание. Ведите прямоугольную систему координат с началом в точке A так, чтобы вершины B, D, A_1 призмы имели координаты: $B(a, 0, 0)$, $D(0, a, 0)$, $A_1(0, 0, \sqrt{2}a)$. Пусть $O(x, y, z)$ — центр сферы. Докажите, что $x=\frac{a}{2}$, $y=a$, $z=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

173. 1, $\frac{SN}{NB}=\frac{2}{3}$. Указание. Прямоугольную систему координат можно выбрать так, чтобы вершины пирамиды имели координаты: $C(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $S(0, 0, 3)$, $M\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Используя условие $OB=OM$, найдите z.

174. $8a^2$. **175.** Сфера, описанная около куба.

176. Сфера. Центр сферы — середина отрезка AB, радиус равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, где $a = AB$.

177. а) Сфера, центр которой лежит на луче AB на расстоянии $\frac{4}{3}b$, где $b = AB$. Радиус сферы равен $\frac{2}{3}b$. Указание. Точку A примите за начало прямоугольной системы координат. Ось Oy проведём через точку B. Полагая $B(0,\ b,\ 0)$ и $M(x,\ y,\ z)$, получите уравнение:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8by + 4b^2 = 0,$$

или

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}b\right)^2 + z^2 = \frac{4}{9}b^2.$$

Полезно сначала решить задачу для точек плоскости.

б) Сфера, если $k > 1$. Плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через середину отрезка.

178. Сфера, уравнение которой $(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2)$, где $a = CA$, $b = CB$, точка C — начало координат.

179. а) Окружность, проходящая через вершины A и B (без точек A и B), центр которой симметричен вершине C треугольника относительно прямой AB.

б) Сфера, проходящая через вершины A и B треугольника с центром, симметричным вершине C относительно прямой AB. Решение. Выберем прямоугольную систему координат с началом O в середине отрезка AB, а за оси Ox и Oy примем направленные прямые OC и OB. Полагая $AB = 2$, вершинам треугольника ABC можно придать координаты: $A(0,\ -1,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$. Пусть $M(x,\ y,\ z)$ — произвольная точка пространства. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$MA^2 = x^2 + (y+1)^2 + z^2,$$
$$MB^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2,$$
$$MC^2 = (x - \sqrt{3})^2 + y^2 + z^2.$$

Подставив в равенство $MA^2 + MB^2 = MC^2$ эти значения, получим уравнение:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0,$$

или

$$(x + \sqrt{3})^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Итак, искомое множество точек есть сфера радиуса $R = 2$ с центром в точке $D(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$.

180. Сфера, описанная около тетраэдра.

181. Куб. Указание. Воспользуйтесь неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \leqslant xy + yz + zx$.

182. а) $\sqrt{3}d^2$. б) Параллелепипед, основанием которого служит квадрат, а боковое ребро равно диагонали основания. Указание. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед, $AC_1 = d$. Введите переменные: $\angle CAC_1 = \alpha$ и $\angle CAB = \beta$. Установите, что площадь боковой поверхности есть функция

$$S_{\text{бок}} = d^2 \sin 2\alpha(\sin\beta + \cos\beta),$$

которая при $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ принимает наибольшее значение.

183. Дно бассейна должно иметь форму квадрата, высота же — вдвое меньше стороны квадрата. Решение. Обозначим через x и y — линейные размеры дна и через z — глубину бассейна. Тогда объём бассейна $V = xyz$, а площадь дна и стен $S = xy + 2xz + 2yz$. Применив неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трёх положительных чисел, получим:

$$S \leqslant 3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

Равенство имеет место только при $xy = 2xz = 2yz$, т. е. когда $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V}$.

184. а) Высота прямоугольника вдвое меньше высоты треугольника. б) Высота цилиндра должна составлять половину высоты конуса.

185. Высота цилиндра наибольшего объёма равна $\frac{1}{3}$ высоты конуса.

186. Указание. Обозначьте через a и h соответственно сторону основания и высоту пирамиды, через V — объём вписанного параллелепипеда, через x — его высоту. Установите, что

$$V = \frac{a^2}{h^2}(h-x)^2x, \quad \text{где} \quad 0 < x < h.$$

Полученную формулу представьте в виде:

$$V = \frac{a^2}{2h^2}2x(h-x)(h-x).$$

Поскольку сумма трёх последних сомножителей постоянна и равна $2h$, то $V_{\max} = \frac{4}{27}a^2h$ при $x = \frac{1}{3}h$.

187. а) Цилиндр с квадратным осевым сечением. б) $\sqrt{5}-1$. **188.** $\frac{4}{3}R$.

189. $V_{\max} = \frac{8}{3}\pi R^3$ при $h = 4R$. Решение. Обозначим через h и r высоту конуса и радиус его основания соответственно. Выразим объём конуса по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

В качестве независимого переменного возьмём угол наклона образующей конуса к плоскости основания. Обозначим его через $2x$. Тогда имеем: $r = R\operatorname{ctg} x$, $h = R\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 2x$, и $V = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg}^3 x \operatorname{tg} 2x$.

Требуется найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\operatorname{ctg}^3 x \operatorname{tg} 2x, \quad \text{где} \quad 0^\circ < x < 45^\circ.$$

Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ и, выполнив несложные преобразования, получим:

$$f(x)=\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}^2 x)}.$$

Знаменатель дроби имеет наибольшее значение, а функция $f(x)$ — наименьшее, когда $\operatorname{tg}^2 x = 1-\operatorname{tg}^2 x$, т. е. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. При этом $r=R\sqrt{2}$ и $h=4R$. Наименьшее значение объёма конуса равно $\dfrac{8}{3}\pi R^3$, объём шара $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, следовательно, $V \geqslant 2V_1$.

191. $\dfrac{1}{6}a$. Р е ш е н и е. Обозначим сторону вырезаемого квадрата через x, тогда сторона квадратного дна коробки равна $a-2x$, высота коробки равна x. Следовательно, объём коробки равен

$$V=(a-2x)^2x=\frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x.$$

Так как сумма $(a-2x)+(a-2x)+4x=2a$ постоянна, то объём принимает наибольшее значение при $4x=a-2x$, откуда $x=\dfrac{1}{6}a$.

192. $V_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\,l^3$, при этом высота пирамиды вдвое меньше стороны основания.

193. $V_{\max}=\dfrac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$ при $\varphi=\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$.

194. $V=\dfrac{1}{12}x^2\sqrt{4-2x^2}$, $0<x<\sqrt{2}$, $V_{\max}=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$ при $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

195. $V=\dfrac{1}{6}x\sqrt{3-x^2}$, $0<x<\sqrt{3}$, $V_{\max}=\dfrac{1}{4}$ при $x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. У к а з а н и е. Пусть $NABCD$ — четырёхугольная пирамида, $NA=x$ и каждое из остальных семи рёбер имеет длину, равную 1. Основанием пирамиды служит ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что $AO=OC=ON$ и $\angle ANC=90^\circ$.

Плоскость ANC является плоскостью симметрии пирамиды $NABCD$, поэтому её объём можно найти по формуле $V=\dfrac{1}{3}S_{ANC}\cdot BD$.

196. $S_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a^2$ при $\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Р е ш е н и е 1. Пусть плоскость, проходящая через диагональ BD_1 куба, пересекает его ребро AA_1 в точке K (рис. 53). Тогда она пересечёт ребро CC_1 в точке L, симметричной K относительно центра куба. В сечении получится параллелограмм BKD_1L, площадь которого равна удвоенной площади треугольника BKD_1. Проведём высоту KM треугольника BKD_1. Введём обозначения: $BD_1 = d$, $KM = h$, $BM = y$, $AK = x$.

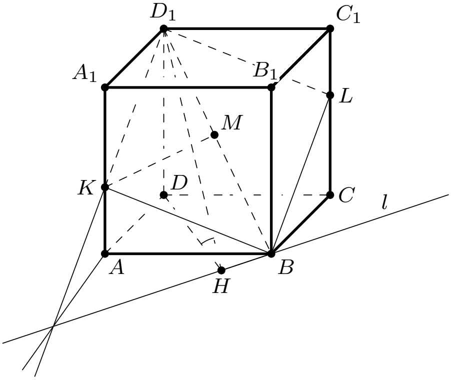

Рис. 53

Площадь сечения определяется формулой $S = dh$, где $d = \sqrt{3}a$. Следовательно, задача сводится к нахождению наименьшего значения h. Из прямоугольных треугольников BKM и D_1KM, выразив двумя способами KM, получим уравнение:

$$(a^2 + x^2) - y^2 = a^2 + (a - x)^2 - (d - y)^2,$$

откуда $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(a + x)$.

Следовательно, $h^2 = a^2 + x^2 - \dfrac{1}{3}(a + x)^2 = \dfrac{2}{3}(x^2 - ax + a^2)$. Применив способ выделения полного квадрата, находим:

$$h^2 = \frac{2}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}, \quad \text{где} \quad 0 < x < a.$$

Отсюда следует, что h принимает наименьшее значение, равное $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, при $x = \dfrac{a}{2}$, а наименьшее значение площади сечения равно $\dfrac{\sqrt{6}}{2}a^2$.

Угол φ между плоскостью сечения и плоскостью $ABCD$ найдём по формуле $\cos\varphi = \dfrac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{сеч}}}$, получим $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Р е ш е н и е 2. Задача сводится к нахождению кратчайшего расстояния h между скрещивающимися прямыми AA_1 и BD_1. Так как ребро

AA_1 параллельно плоскости BDB_1, то h равно расстоянию от вершины A куба до плоскости BDB_1, т. е. равно высоте AP прямоугольного треугольника ABD. Получаем:

$$h = AP = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

А так как $BD_1 = \sqrt{3}a$, то наименьшее значение площади сечения

$$S_{\text{сеч}} = BD_1 \cdot AP = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2.$$

Угол наклона сечения к плоскости основания найдём также, как при решении задачи первым способом.

Решение 3. Ещё одно простое геометрическое решение получим, пользуясь формулой

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi} = a^2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

где φ — угол между плоскостью сечения и плоскостью грани $ABCD$.

Построим линию пересечения этих плоскостей, прямую l, и проведём $D_1H \perp l$. По теорем о трёх перпендикулярах $DH \perp l$, следовательно, $\angle D_1HD = \varphi$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$. Площадь сечения будет наименьшей, когда угол φ — наименьший из возможных.

Так как $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{DD_1}{DH} = \dfrac{a}{DH}$, то φ имеет наименьшее значение, когда DH имеет наибольшее значение, т. е. когда $DH = DB$. При этом $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $S_{\text{сеч}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a^2$.

197. а) В сечении тетраэдра любой плоскостью, параллельной рёбрам AD и BC, получится параллелограмм с периметром $2a$.

б) $2a$, если $a < b < c$. Указание. Данный тетраэдр является равногранным, так как все его грани равные треугольника. Постройте развёртку тетраэдра в виде параллелограмма, составленного из этих треугольников.

198. $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{3}$, если $MN \parallel BD$; $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{3}{8}$, если $KN \parallel AB$ или $KM \parallel AD$. Указание. Обозначив $\dfrac{SM}{SB} = x$, установите, что

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

199. а) Решение. Зададим на плоскости прямоугольную систему координат и построим ломанную $P_0P_1\ldots P_n$ так, чтобы числа a_i, b_i были координатами вектора $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$. Так как

$$\overrightarrow{P_0P_n} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n},$$

то каждая координата вектора $\overrightarrow{P_0P_n}$ равна сумме соответствующих координат слагаемых и вектор $\overrightarrow{P_0P_n}$ имеет координаты a, b, где

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Выразив длины векторов через их координаты, получим:

$$|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad |\overrightarrow{P_0P_n}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

А так как длина ломанной не меньше длины отрезка, соединяющего его концы, то

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2},$$

причём равенство достигается только тогда, когда векторы $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ сонаправлены, т. е. $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

б) Р е ш е н и е. Обозначим $AB = c$, $CH = h$, $AH = x$, $BH = y$. Тогда

$$AC + CB = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{y^2 + h^2} \leqslant \sqrt{c^2 + 4h^2},$$

причём равенство имеет место только при $x = y$, т. е. для равнобедренного треугольника.

в) Р е ш е н и е. Обозначим ориентированные расстояния от точки H до прямых BC, CA и AB соответственно через x, y, z ($x > 0$, если точка H и A лежат по одну сторону от прямой BC, и $x < 0$, если они лежат по разные стороны от неё). Длины сторон треугольника ABC, полупериметр и площадь его обозначим: a, b, c, p и S. Тогда при любом расположении точки H относительно треугольника ABC имеем:

$$2S = ax + by + cz,$$

$$2S_{\text{бок}} = a\sqrt{h^2 + x^2} + b\sqrt{h^2 + y^2} + c\sqrt{h^2 + z^2},$$

где $h = DH$ и $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности тетраэдра. Применив неравенство а), получим:

$$2S_{\text{бок}} \geqslant \sqrt{(ah + bh + ch)^2 + (ax + by + cz)^2},$$

или

$$S_{\text{бок}} \geqslant \sqrt{p^2h^2 + S^2}.$$

Равенство достигается только при $x = y = z$. Отсюда следует, что H есть центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

200. а) У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой скалярного произведения векторов в координатах и неравенством $\vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

б) Введём обозначения: $\angle ADM = \alpha$, $\angle BDM = \beta$, $\angle CDM = \gamma$. Тогда

$$s = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma.$$

Применив неравенство а), получим:

$$s \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}.$$

Известно, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, поэтому

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

Следовательно,

$$s \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Равенство возможно тогда и только тогда, когда $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$, откуда

$$\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{\sin^2\gamma}{c^2} = \frac{2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Заметим, что эти равенства возможны лишь при условии, что

$$a^2 \leqslant b^2 + c^2, \quad b^2 \leqslant c^2 + a^2, \quad c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Итак, равенство $s = d\sqrt{2}$, где $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, имеет место тогда и только тогда, когда каждое из рёбер AB, BC и AC тетраэдра $ABCD$ не меньше противоположного ребра и

$$\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}, \quad \sin\beta = \frac{b\sqrt{2}}{d}, \quad \sin\gamma = \frac{c\sqrt{2}}{d}.$$

При $a = b = \sqrt{6}$ и $c = 2$ получим: $d = 4$, $\alpha = \beta = 60^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$.

201. Решение. Пусть $\angle BAC = \varphi$, $AO = x$. Применив теорему Пифагора к треугольникам AOB и AOC и теорему косинусов к треугольникам BOC и ABC, выразим из полученных равенств $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^4+9x^2+8}}.$$

Пусть $\varphi = 45^\circ$. Тогда из уравнения $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^4+9x^2+8}}$ находим $x = 1$.

Чтобы найти наибольшее значение φ, заметим, что

$$\cos\varphi = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^4+9x^2+8}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \cdot \frac{6(x^2+1)+(x^2+8)}{2\sqrt{6(x^2+1)\cdot(x^2+8)}} \leqslant \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом, причём равенство достигается при $6(x^2+1) = x^2+8$, т. е. при $x = \sqrt{0{,}4}$. Наибольшее значение φ равно $\arccos\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

202. $\dfrac{1}{4}(3+2\sqrt{2})Q$. Решение. Обозначив угол наклона образующей конуса к плоскости его основания через $2x$, выразим площадь S боковой поверхности конуса через x и радиус r сферы:

$$S = \frac{\pi r^2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}, \quad 0^\circ < x < 45^\circ.$$

Наименьшее значение функции $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}$ можно найти без применения производной. Выполнив несложные преобразования, получим:

$$y=\frac{\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)}.$$

Для краткости обозначим $\cos^2 x=z$. Тогда выражение для y можно записать так:

$$y=\frac{1}{3-\left(2z+\dfrac{1}{z}\right)},\qquad \frac{1}{2}<z<1.$$

Но $2z+\dfrac{1}{z}\leqslant 2\sqrt{2}$, где равенство достигается лишь при $2z=\dfrac{1}{z}$, т. е. при $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Итак, $y_{\min}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$. Значит, $S_{\min}=\dfrac{1}{4}(3+2\sqrt{2})Q$ при $\cos 2x=\sqrt{2}-1$.

203. $32r^2$, $\arccos\dfrac{1}{3}$. Р е ш е н и е. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции:

$$S_{\text{пол}}=\frac{4r^2\operatorname{ctg}^2 x(1+\cos 2x)}{\cos 2x}=\frac{4r^2(1+\cos 2x)^2}{\cos 2x(1-\cos 2x)},$$

где $2x$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды. Обозначив $\cos 2x=z$, будем иметь:

$$S_{\text{пол}}=\frac{4r^2(1+z)^2}{z(1-z)}.$$

Требуется найти наименьшее значение функции:

$$y=\frac{z^2+2z+1}{z-z^2},\qquad 0<z<1.$$

Имеем:

$$(1+y)z^2+(2-y)z+1=0.$$

Дискриминант этого уравнения положителен или равен нулю:

$$(2-y)^2-4(1+y)\geqslant 0,\qquad \text{или}\qquad y^2-8y\geqslant 0,$$

значит, $y\geqslant 8$.

Итак, наименьшее значение площади полной поверхности пирамиды $S_{\text{пол}}=32r^2$, при этом $z=\cos 2x=\dfrac{1}{3}$.

204. Р е ш е н и е. Пусть r и h — радиус основания и высота цилиндрического бака, S — площадь поверхности бака (без крышки). Тогда

$$V=\pi r^2 h,$$
$$S=\pi r^2+2\pi r h.$$

За независимую переменную примем r. Так как $\pi r h = \dfrac{V}{r}$, то

$$S = \pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0.$$

Найдём наименьшее значение функции S. Имеем:

$$S' = 2\pi r - \frac{2V}{r^2},$$

$S' = 0$ при $\pi r^3 = V$, т. е. при $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ и $h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

Легко проверить, что при найденном значении r функция S имеет наименьшее значение, причём $S_{\min} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

205. Длина ванны равна диаметру поперечного сечения.

206. Высота цилиндра равна диаметру основания: $h = 2r = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

207. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}R$. **208.** $\dfrac{1}{6}R^3$ при $h = \dfrac{2}{\sqrt{3}}R$, где h — высота призмы.

209. $a = \sqrt[3]{4V}$, $h = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, где a — сторона основания и h — высота призмы.

210. $h = \sqrt{3}r$, h — высота конуса.

211. $\dfrac{1}{3}R$. Указание. Обозначив высоту призмы через x, установите, что сумма s длин всех её рёбер есть функция

$$s = 4(2\sqrt{2R^2 - 2x^2} + x), \quad 0 < x < R.$$

Наибольшее значение этой функции равно $12R$ и достигается при $x = \dfrac{1}{3}R$.

212. $\dfrac{4000\pi}{3}$ см^2; 10 см. Указание. Пусть AB — большее основание трапеции $ABCD$, в которой $\angle B = 90°$. Проведите высоту DH трапеции и за независимую переменную x примите длину отрезка AH. Тогда объём тела вращения есть функция

$$V = \frac{1}{3}\pi(225 - x^2)(15 + x), \quad 0 < x < 15.$$

213. $\dfrac{64\pi}{3}$ при $AB = 4$ (AB — большее основание трапеции).

214. $10\sqrt{5}$. Решение. Пусть LMN — сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC, и прямая LM пересекает диагональ BD основания в точке K (рис. 54). Так как $LM \parallel AC$ и $AC \perp OB$, то по теореме о трёх перпендикулярах $LM \perp KN$.

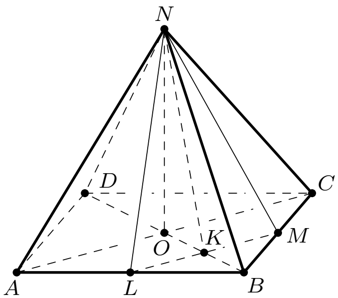

Рис. 54

Значит, KN — высота треугольника LMN, который является равнобедренным и его площадь $S = LK \cdot KN$.

Обозначим $OK = x$, тогда $LK = BK = r - x$. Для площади треугольника LMN получаем:

$$S = (r-x)\sqrt{h^2 + x^2}, \quad 0 < x < r.$$

Функции S и S^2 принимают наибольшее и наименьшее значения при одних и тех же значениях x. Имеем:

$$y = S^2 = (r-x)^2(h^2 + x^2),$$
$$y' = -2(r-x)(2x^2 - rx + h^2).$$

Так как $x \neq r$, то критические точки находятся из уравнения:

$$2x^2 - rx + h^2 = 0.$$

При $h = 2$ и $r = 9$ получаем: $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = 4$.

Найдём значения функции S на концах промежутка $[0; 9]$ и в критических точках:

$$S(0) = 18; \quad S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17\sqrt{17}}{4} \approx 17{,}5; \quad S(4) = 10\sqrt{5} \approx 22{,}4; \quad S(9) = 0.$$

Итак, наибольшее значение функции S равно $10\sqrt{5}$ при $x = 4$.

215. 96 см^2.

216. Указание. Сечение призмы плоскостью есть трапеция $ABDE$ или треугольник ABC_1. Проведите $C_1F \perp DE$. Обозначив $C_1F = x$, найдите площадь сечения: $S = \dfrac{a}{2l}(l+x)\sqrt{(l-x)^2 + h^2}$, $0 \leqslant x < l$. Критические точки функции S находятся из уравнения $2x^2 - 2lx + h^2 = 0$.

Ответ. 1) При $a = 2$, $h = 2$ и $l = 3$ наибольшую площадь имеет треугольник ABC_1, наименьшей не существует.

2) При $a = 9$, $h = 4$ и $l = 9$ наибольшее значение $S_{\max} = 20\sqrt{5} \approx 45$, наименьшее $S_{\min} = \dfrac{17\sqrt{17}}{2} \approx 35$ при $x = 1$ и $x = 8$ соответственно.

217. 1) При $a = h = l = 1$ наименьшую площадь, равную $\dfrac{\sqrt{5}}{8}$, имеет сечение плоскостью, проходящей через вершину D. Площадь любого другого сечения больше $\dfrac{\sqrt{5}}{8}$, но меньше $\dfrac{3}{8}$.

2) При $a = 4$, $h = 2$ и $l = 3$ наименьшую площадь, равную $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$, имеет сечение плоскостью, проходящей через середины рёбер AD и BD. Наибольшая площадь равна $\dfrac{17\sqrt{17}}{24}$.

218. $\frac{\sqrt{39}}{6} \leqslant S < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Наименьшую площадь имеет сечение плоскостью, проходящей через вершину C_1. Р е ш е н и е. Легко доказать, что $ABMN$ — трапеция, $MN \parallel AB$ и треугольник MNC_1 подобен треугольнику ABC. Пусть $C_1M = x$, тогда $\frac{MN}{x} = \frac{c}{a}$, откуда $MN = \frac{cx}{a}$.

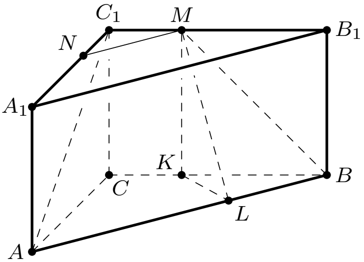

Рис. 55

Проведём $MK \perp BC$ и $ML \perp AB$ (рис. 55). Тогда MK — перпендикуляр к плоскости основания призмы, а так как наклонная ML перпендикулярна AB, то и KL — перпендикуляр к AB в силу теоремы о трёх перпендикулярах. Значит, треугольник BKL подобен треугольнику ABC и поэтому $\frac{KL}{BK} = \frac{AC}{AB}$. Так как $BK = B_1M = a - x$, то, обозначив AC через b, получим:

$$KL = \frac{b(a-x)}{c}.$$

Из треугольника KLM найдём высоту ML трапеции $ABMN$:

$$ML = \sqrt{h^2 + \frac{b^2(a-x)^2}{c^2}}.$$

Таким образом, площадь сечения призмы есть функция

$$S(x) = \frac{c}{2}\left(\frac{x}{a} + 1\right)\sqrt{h^2 + \frac{b^2(a-x)^2}{c^2}}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant x < a.$$

При $a = 1$ и $c = 2$ имеем $b = \sqrt{3}$ и

$$y = S^2(x) = (x+1)^2\left(h^2 + \frac{3}{4}(x-1)^2\right), \quad 0 \leqslant x < 1.$$

Найдём производную этой функции:

$$y' = (x+1)(3x^2 - 3x + 2h^2).$$

Так как $x \neq -1$, то производная обращается в 0, если

$$x^2 - x + \frac{2}{3}h^2 = 0.$$

При $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$ получим:

$$x^2 - x + \frac{2}{9} = 0,$$

откуда $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

Найдём значения функции $S(x) = (x+1)\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{3(1-x)^2}{4}}$ при $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ и на концах отрезка $[0; 1]$. Получим: $S(0) = \sqrt{\frac{13}{12}} \approx 1{,}04$ (сечением является треугольник ABC_1), $S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 1{,}08$; $S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}\sqrt{53}\approx 1{,}07$; $S(1)=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1{,}15$.

Итак, $\frac{\sqrt{39}}{6}\leqslant S<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

219. $\frac{2Q}{3\sqrt{3}}$, $\arccos\sqrt{\frac{1}{3}}$. **220.** $\frac{4}{9}R$.

221. 5. Указание. Пусть треугольник ABC вращается вокруг стороны AB, $BC=\sqrt{21}$ и $AC=4$. Тогда объём тела вращения выражается формулой $V=\frac{1}{3}\pi CD^2\cdot AB$, где CD — высота треугольника ABC. Полагая $AD=x$, установите, что

$$V=\frac{1}{3}\pi(16-x^2)\cdot(x+\sqrt{5+x^2}),\quad 0\leqslant x<4.$$

Приравняв производную этой функции к нулю, получите уравнение

$$3x^4+52x^2-256=0,$$

откуда $x=2$ и, следовательно, $V_{\max}=20\pi$.

222. Радиус сферы принимает наименьшее значение, равное $\frac{9}{4}$, при высоте пирамиды, равной 3. Указание. Пусть R — радиус сферы, a — сторона основания и h — высота пирамиды $NABCD$, вписанной в сферу. Из прямоугольного треугольника AMN, где MN — диаметр сферы, следует, что

$$(2R-h)h=\frac{a^2}{2}.$$

Учитывая, что в пирамиду вписана правильная четырёхугольная призма, сторона основания и высота которой равны 2 и 1 соответственно, составьте пропорцию

$$\frac{h-1}{h}=\frac{2}{a},\quad \text{откуда}\quad a=\frac{2h}{h-1}.$$

Выразив R как функцию h, приравняйте производную к нулю и получите уравнение:

$$h^3-3h^2+h-3=0,$$

откуда $h=3$.

223. Решение. Пусть M — центроид треугольника ABC, K — середина ребра BC. Тогда AK и DK — медианы треугольников ABC и BCD, DM — медиана тетраэдра $ABCD$, $AM=\frac{2}{3}AK$.

Обозначим $AB=x$, $DK=y$ и $\angle DAK=\alpha$. Применив к треугольникам ADM и ADK теорему косинусов, получим:

$$DM^2=a^2+\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{3}ax\cos\alpha,\quad y^2=a^2+x^2-2ax\cos\alpha.$$

Отсюда, исключив $\cos\alpha$, получим: $DM^2 = \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}y^2$. Согласно известной формуле для медианы треугольника имеем:

$$x^2 = \frac{b_1^2 + c_1^2}{2} - \frac{a_1^2}{4}, \quad y^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a_1^2}{4}.$$

Подставив эти значения в предыдущее равенство, получим:

$$DM^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}.$$

Векторное решение задачи дано в главе 3 (пример 5).

224. Указание. Пусть DM и CN — медианы тетраэдра $ABCD$ и K — середина ребра AB. Докажите, что $CK = DK$, рассмотрев треугольники CKN и DKM.

Аналитическое решение задачи можно получить, применив тождество $m_4^2 - m_3^2 = \frac{4}{9}(a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2)$.

225. $MN^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2)$, где M и N — середины рёбер AB и CD. Указание. Середину N ребра CD соедините с вершинами A и B. Примените формулу, выражающую длину медианы треугольника через длины его сторон.

226. $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + c_1^2}$. Указание. Докажите, что рёбра AB и CD перпендикулярны. Середину ребра AC обозначим через K. Тогда $EK = \frac{c}{2}$, $FK = \frac{c_1}{2}$ и $\angle EKF = 90^\circ$. Остаётся вычислить гипотенузу прямоугольного треугольника EKF.

Задачу также легко решить, используя формулу задачи 225.

228. $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$, $S_{\text{пол}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

229. $\frac{1}{12}ab\sqrt{3a^2 - b^2}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ при $b = a$. **230.** $V_{\max} = \frac{1}{8}$ при $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

231. $V = \frac{1}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. Указание. Пусть S — площадь треугольника ABC и R — радиус описанной около него окружности. Тогда имеем:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}S\sqrt{1 - R^2} = \frac{1}{3}S\sqrt{1 - \frac{a^2b^2c^2}{16S^2}} = \frac{1}{12}\sqrt{16S^2 - a^2b^2c^2},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника ABC. Выразите площадь S треугольника по формуле Герона и воспользуйтесь теоремой косинусов.

232. $\sin\varphi = \frac{1}{\sin\gamma}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$, где φ — искомый угол.

233. $V=\dfrac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. Указание. Примените формулу $V=\dfrac{1}{3}Sh$, где $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, $h=c\sin\varphi$, и воспользуйтесь результатом задачи 232.

234. $10\sqrt{2}$. Указание. Из треугольников BCD, CAD и ABD найдите косинусы углов при вершине D и подставьте их значения в формулу задачи 233.

235. $V=\dfrac{\sqrt{5}}{12}$, $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

236. Решение. Пусть DE — диаметр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$ (рис. 56). Тогда угол DAE — прямой, а угол ADE — острый. Через некоторую точку F диаметра DE проведём плоскость, перпендикулярную DE. Так как углы ADE, BDE и CDE острые, то эта плоскость пересечёт рёбра DA, DB, DC (или их продолжения) в некоторых точках A', B', C' соответственно.

Положим: $DA=a$, $DB=b$, $DC=c$, $BC=a_1$, $CA=b_1$ и $AB=c_1$. Высоту DF тетраэдра $A'B'C'D$ обозначим через h, а его объём — через V'.

Из подобия прямоугольных треугольников ADE и $DA'F$ имеем:

$$\frac{DA'}{DF}=\frac{DE}{DA'} \quad \text{или} \quad DA'=\frac{2Rh}{a}.$$

Аналогично находим, что $DB'=\dfrac{2Rh}{b}$ и $DC'=\dfrac{2Rh}{c}$. Так как $\dfrac{DA'}{DB'}=\dfrac{b}{a}$, то треугольники ABD и $A'B'D$ подобны и $\angle DAB=\angle DB'A'$. Из подобия этих треугольников имеем:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{DA'}{DB}.$$

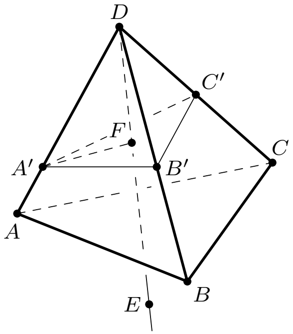

Рис. 56

А так как $DA'=\dfrac{2Rh}{a}$, то $A'B'=\dfrac{2Rhc_1}{ab}$.

Поскольку точка F на диаметре DE выбрана произвольно, то можно положить: $\dfrac{abc}{2Rh}=1$, или $h=\dfrac{abc}{2R}$. Тогда $A'B'=cc_1$, $B'C'=aa_1$, $C'A'=bb_1$ и

$$V'=\frac{1}{3}Th.$$

При этом $DA'=bc$, $DB'=ac$, $DC'=ab$.

Воспользуемся равенством: $\dfrac{V}{V'}=\dfrac{DA\cdot DB\cdot DC}{DA'\cdot DB'\cdot DC'}$, и получим $V=\dfrac{V'}{abc}$.

А так как $abc=2Rh$ и $V'=\dfrac{1}{3}Th$, то $V=\dfrac{T}{6R}$.

Использованное для доказательства равенство можно получить следующим образом. Пусть φ — угол наклона ребра CD к плоскости ABD и $\angle ADB = \gamma$. Тогда

$$V = \frac{1}{6} DA \cdot DB \cdot DC \cdot \sin\gamma \sin\varphi, \quad V' = \frac{1}{6} DA' \cdot DB' \cdot DC' \cdot \sin\gamma \sin\varphi,$$

откуда $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{DA \cdot DB \cdot DC}{DA' \cdot DB' \cdot DC'}$.

237. $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$, $R = 1$.

239. а) Решение. Пусть касательная к вписанной в треугольник ABC окружности, проведённая параллельно стороне BC, пересекает стороны AB и AC треугольника в точках B_1 и C_1 соответственно. Из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 имеем: $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \dfrac{2r}{h_a}$, где r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1. Аналогично находим, что $\dfrac{r_2}{r} = 1 - \dfrac{2r}{h_b}$, $\dfrac{r_3}{r} = 1 - \dfrac{2r}{h_c}$. Сложив эти три равенства почленно, получим:

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = 3 - 2r\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = 1,$$

так как $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$ (см. задачу 238, а).

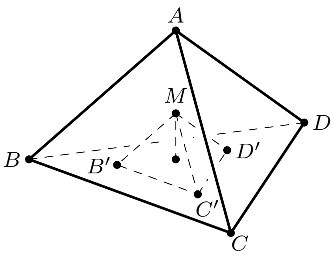

Рис. 57

240. б) Решение. Пусть M — произвольная точка, лежащая внутри тетраэдра $ABCD$ (рис. 57). Плоскости, проходящие через точку M, параллельные граням данного тетраэдра, образуют четыре тетраэдра с общей вершиной M, каждый из которых подобен данному тетраэдру.

Высоту тетраэдра, проведённую из вершины M к его грани, лежащей в плоскости BCD, обозначим через d_1, и через h_1 — высоту тетраэдра $ABCD$, проведённую из вершины A. Тогда имеем: $\dfrac{\sqrt[3]{V_1}}{\sqrt[3]{V}} = \dfrac{d_1}{h_1}$. Таким же образом получим ещё три равенства. Сложим их почленно и, воспользовавшись соотношением, приведённым в начале этой главы, получим: $\dfrac{\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}}{\sqrt[3]{V}} = \dfrac{d_1}{h_1} + \dfrac{d_2}{h_2} + \dfrac{d_3}{h_3} + \dfrac{d_4}{h_4} = 1$. Отсюда $\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}$.

241. а) Указание. Воспользуйтесь тождествами задачи 238, а) и неравенствами:

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9, \quad (a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

которые верны для любых положительных чисел a, b, c и обращаются в равенства только при $a=b=c$.

б) Указание. Воспользуйтесь тождествами задачи 238, б) и алгебраическими неравенствами:

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)\geqslant 16,$$
$$(a_1+a_2+a_3+a_4)^2\leqslant 4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2),$$

которые имеют место для любых положительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4.

242. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 140 и неравенствами задачи 241.

243. б) Равенство имеет место лишь для правильного тетраэдра.

245. б) $\frac{1}{6}a^2b\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

247. Указание. Воспользуйтесь тем, что объём тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{1}{6}abc$, а площадь его основания вычисляется по формуле

$$S^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

248. $DH=1$, $DA=2$, $\angle DAH=30^\circ$. **249.** $m=\frac{4}{3}R=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

250. $R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$, $DM=\dfrac{a}{3\sin\alpha}$.

251. $\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha$. Решение. Пусть $\angle DAB=\beta$ и $\angle DAC=\gamma$. Тогда $AB=\dfrac{a}{\cos\beta}$, $AC=\dfrac{a}{\cos\gamma}$. Для прямого трёхгранного угла имеет место формула $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma$, и площадь треугольника ABC

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha=\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha.$$

252. Указание. Воспользуйтесь формулой задачи 247.

253. а) Указание. Воспользуйтесь тем, что площадь треугольника ABH равна площади треугольника ABD, умноженной на $\sin\gamma$.

254. $DA=c$, $DB=\frac{\sqrt{2}}{2}c$, $DH=\frac{1}{2}c$, $V=\frac{\sqrt{2}}{12}c^3$.

256. Указание. Выразите объём тетраэдра $ABCD$ как сумму объёмов трёх тетраэдров: $LABD$, $LACD$ и $LBCD$.

257. б) Равенство имеет место тогда и только тогда, когда боковые рёбра тетраэдра равны.

259. а) Решение. Неравенство $h\leqslant(\sqrt{2}+1)r$ получим, выразив $\dfrac{h}{r}$ через стороны треугольника и применив неравенство $a+b\leqslant\sqrt{2}c$.

Так как $2S=ch=2pr$, то $\dfrac{h}{r}=\dfrac{a+b+c}{c}=\dfrac{a+b}{c}+1\leqslant\sqrt{2}+1$.

Аналогично докажем неравенство $l \geqslant (\sqrt{2}+1)r$. Имеем:

$$l = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}, \quad r = \frac{ab}{a+b+c}.$$

Следовательно, $\dfrac{l}{r} = \dfrac{(a+b+c)\sqrt{2}}{a+b} = \sqrt{2} + \dfrac{c\sqrt{2}}{a+b} \geqslant \sqrt{2}+1$. В силу неравенства $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ сразу получим:

$$\frac{l}{\sqrt{S}} \leqslant \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leqslant 1, \quad \text{или} \quad l \leqslant \sqrt{S}.$$

б) Решение. Имеем: $h = \dfrac{3V}{S}$, $r = \dfrac{3V}{S_1+S_2+S_3+S}$.

Так как $S_1+S_2+S_3 \leqslant S\sqrt{3}$ (см. задачу 257, б), то

$$\frac{h}{r} = \frac{S_1+S_2+S_3+S}{S} \leqslant \sqrt{3}+1.$$

С другой стороны

$$l = \frac{abc\sqrt{3}}{ab+bc+ca}.$$

Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим трёх положительных чисел имеем: $ab+bc+ca \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Следовательно,

$$l \leqslant \frac{abc\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}}.$$

Докажем последнее неравенство. Так как $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$, то

$$\frac{2}{3}R = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{ab+bc+ca} = \frac{1}{3}\sqrt{2(S_1+S_2+S_3)}.$$

Равенство везде имеет место тогда и только тогда, когда $a=b=c$.

260. $a=b=c=2\sqrt{3}$.

261. $\sqrt{48} \approx 6{,}9$ (м^3).

262. Указание. Докажите, что если высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H, то ребро CD перпендикулярно плоскости ABH.

Обратная теорема также верна.

263. а) Решение. Пусть в тетраэдре $ABCD$ рёбра AB и CD перпендикулярны, рёбра AC и BD также перпендикулярны. Проведём высоту DD_1 тетраэдра. Тогда $CD_1 \perp AB$ и $BD_1 \perp AC$ в силу теоремы о трёх перпендикулярах. Так как высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке, то и $AD_1 \perp BC$. Но AD_1 — проекция ребра AD, поэтому $BC \perp AD$. Итак, противоположные рёбра третьей пары также перпендикулярны.

См. также решение задачи 135, б) с использованием векторного равенства.

б) Р е ш е н и е. Так как противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны, то согласно задаче 262 каждые две высоты тетраэдра пересекаются между собой. Следовательно, все высоты лежат в одной плоскости или проходят через одну и ту же точку. Но в одной плоскости они лежать не могут, так как иначе в одной плоскости лежали бы и вершины тетраэдра. Значит, высоты пересекаются в одной точке.

264. б) У к а з а н и е. Воспользуйтесь векторным равенством

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2$$

и результатом задачи 263.

в) У к а з а н и е. Пусть t_{AB} длина бимедианы, соединяющей середины рёбер AB и CD. Тогда $t_{AB}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2)$ (см. задачу 138). Следовательно, $t_{AB}^2 - t_{AC}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2)$.

266. Р е ш е н и е 1. Пусть $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр, $\angle BDC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a_1^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b_1^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c_1^2}{2ab}.$$

Так как суммы квадратов противоположных рёбер тетраэдра равны, то $b^2 + c^2 - a_1^2 = a^2 + c^2 - b_1^2 = a^2 + b^2 - c_1^2$. Значит, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ одного и того же знака, т. е. α, β, γ все острые углы, или прямые, или тупые.

Р е ш е н и е 2. Поскольку противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$, или $(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{DC} = 0$. Отсюда $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$. Аналогично, из равенства $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ следует, что $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}.$$

Значит, косинусы углов ADB, BDC и CDA либо все положительны, либо все отрицательны, либо все равны нулю, а углы — одноимённые.

Во всяком треугольнике по крайней мере два угла острые. Поэтому, если, например, $\angle BDC \geqslant 90^\circ$, то все плоские углы при вершинах A, B, C — острые, и ABC — остроугольный треугольник.

267. У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой, выражающей длину медианы тетраэдра через длины его рёбер, и установите, что

$$9s = (a^2 + b^2 - c_1^2) + (a^2 + c^2 - b_1^2) + (b^2 + c^2 - a_1^2).$$

268. а) Р е ш е н и е. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. При гомотетии с центром в точке M и коэффициентом $\left(-\frac{1}{2}\right)$ треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$ и образом ортоцентра H треугольника ABC является ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$, т. е., как легко доказать, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Следовательно,

$$\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MH} \quad \text{или} \quad \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}.$$

б) Решение. Пусть K и L — середины рёбер AB и CD. Тогда центроид M тетраэдра $ABCD$ — середина отрезка KL. Точка H лежит в плоскости, проходящей через ребро CD и перпендикулярной ребру AB, а точка O — в плоскости, проходящей через точку K и также перпендикулярной ребру AB. Эти плоскости параллельны и проходят через точки K и L, симметричные относительно точки M. Следовательно, плоскости также симметричны относительно центроида M.

Точку H можно рассматривать как точку пересечения шести плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра и перпендикулярна его противоположному ребру. Точку O можно рассматривать как точку пересечения шести плоскостей, каждая из которых перпендикулярна одному из рёбер тетраэдра и проходит через его середину. Отсюда следует, что точка H пересечения шести плоскостей симметрична точке O пересечения шести других плоскостей относительно точки M.

Приведённое решение сравните с векторным (см. задачу 139, б).

269. а) Решение. Пусть AM_0 — медиана треугольника ABC. Докажем, что точка M_1, симметричная ортоцентру H треугольника относительно точки M_0, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Так как $BHCM_1$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OM_1}$, где O — любая точка, будем считать её центром описанной окружности. По формуле задачи 136, а)

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Исключив из этих двух равенств $\overrightarrow{OH}$, получим: $\overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OA}$. Значит, точка M_1 симметрична вершине A треугольника относительно центра O описанной окружности, и AM_1 — диаметр этой окружности.

Построим точку H_1, симметричную ортоцентру H треугольника относительно стороны BC. Тогда $\angle AH_1M_1 = 90°$. Следовательно, точка H_1 также лежит на описанной окружности.

Аналогично докажем, что кроме точек M_1 и H_1 ещё четыре точки, расположенные относительно сторон AB и AC так же, как точки M_1 и H_1 относительно стороны BC, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

Применим гомотетию с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда эти шесть точек и три вершины треугольника ABC перейдут в точки, о которых говорится в условии задачи, а окружность, описанная около треугольника ABC, перейдёт в окружность, проходящую через эти девять точек. Центр O_9 окружности девяти точек определяется условием: $\overrightarrow{HO_9} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$. Значит, радиус окружности девяти точек в два раза меньше радиуса описанной окружности, и центр её лежит на прямой Эйлера.

б) Указание. Задачу для ортоцентрического тетраэдра можно решить, используя аналогию. Пусть AM_0 и AH_0 — медиана и высота тетраэдра $ABCD$, H — его ортоцентр, M_1 и H_1 — точки, такие что, $\overrightarrow{HM_1} = 3\overrightarrow{HM_0}$, $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{HH_0}$. Используйте соотношение, приведённое в задаче 136, б):

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$

и докажите, что точки M_1 и H_1 лежат на сфере, описанной около тетраэдра $ABCD$. Затем примените гомотетию с центром H и коэффициентом $k = \frac{1}{3}$.

Убедитесь, что радиус сферы 12 точек в три раза меньше радиуса описанной сферы, и центр её лежит на прямой Эйлера.

270. а) Имеем: $a + c + b_1 = b + c + a_1 = a + b + c_1 = a_1 + b_1 + c_1$. Отсюда следует, что $a + b_1 = a_1 + b$, $a + b = a_1 + b_1$. Сложив эти равенства почленно, получим: $a = a_1$. Значит, $b = b_1$, $c = c_1$.

273. а) Решение. Пусть CM и DN — высоты граней ABC и ABD (рис. 58). Из середины L ребра CD проведём перпендикуляр LK к прямой AB. Так как KM и KN — проекции равных отрезков LC и LD прямой CD, то $KM = KN$, т. е. K — середина отрезка MN.

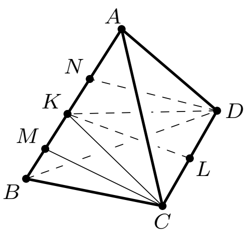

Рис. 58

Площади треугольников ABC и ABD равны, значит, $CM = DN$. Из равенства прямоугольных треугольников CKM и DKN следует, что $CK = DK$, и поэтому $KL \perp CD$. Таким образом, общий перпендикуляр KL скрещивающихся рёбер AB и CD проходит через середину L ребра CD.

б) Решение. Пусть грани ABC и ABD, а также грани ACD и BCD равновелики. Тогда, используя результат задачи п. а), заключаем, что общий перпендикуляр рёбер AB и CD проходит как через середину ребра CD, так и через середину ребра AB и, следовательно, является осью симметрии тетраэдра.

Если же все грани тетраэдра $ABCD$ равновелики, то все его бимедианы являются осями симметрии тетраэдра, и, согласно задаче 272, а), тетраэдр $ABCD$ является равногранным.

277. а) Р е ш е н и е. Если центр O сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, совпадает с его центроидом M, то $MA = MB = MC = MD = R$. Точка M делит каждую медиану тетраэдра в отношении $3:1$, считая от вершины. Значит, медианы тетраэдра равны:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \frac{4}{3}R.$$

Остаётся использовать результат задачи 272, б).

279. Р е ш е н и е. Согласно задаче 112, б), равенство

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

выполняется тогда и только тогда, когда O — центроид тетраэдра $ABCD$. Если же центроид совпадает с центром сферы, описанной около тетраэдра, то тетраэдр — равногранный, как это следует из задачи 277, а).

280. 2) Р е ш е н и е. Через вершины A, B, C равногранного тетраэдра $ABCD$ проведём прямые, параллельные противоположным сторонам BC, CA и AB треугольника ABC (рис. 59). Обозначив точки пересечения этих прямых через A_1, B_1, C_1, и соединим их с вершиной D. Так как $DA = BC = AB_1 = AC_1$, то $\angle B_1DC_1 = 90°$. Точно так же $\angle C_1DA_1 = \angle A_1DB_1 = 90°$. Значит, $A_1B_1C_1D$ — прямоугольный тетраэдр. Объём его в четыре раза больше объёма тетраэдра $ABCD$.

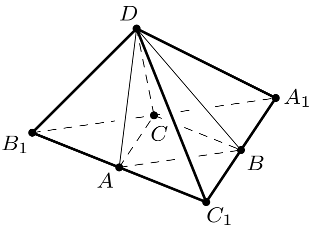

Рис. 59

Обозначим $DA_1 = x$, $DB_1 = y$, $DC_1 = z$. Тогда объём прямоугольного тетраэдра выразится формулой $V_1 = \dfrac{1}{6}xyz$.

Пользуясь теоремой Пифагора, составим систему уравнений:

$$x^2 + y^2 = 4c^2, \quad y^2 + z^2 = 4a^2, \quad z^2 + x^2 = 4b^2.$$

Сложив эти уравнения, получим $x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Следовательно, $x^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2)$, $y^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2)$, $z^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)$. Теперь найдём объём тетраэдра $ABCD$: $V = \dfrac{1}{4}V_1 = \dfrac{1}{24}xyz$, и окончательно:

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

Задачу можно решить и другим способом, выполнив вспомогательное построение, указанное в задаче 275.

282. $t_{AB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)}$, t_{AB} — расстояние между рёбрами AB и CD.

283. $V = \dfrac{15\sqrt{6}}{4}$, $t_{AB} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. Указание. Построив развёртку тетраэдра, докажите, что тетраэдр равногранный.

284. 5 см. **285.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)}$.

288. Решение. Пусть $ABCD$ — равногранный тетраэдр. При симметрии относительно прямой, проходящей через середины рёбер AD и BC, грани ABC и ABD отображаются соответственно на грани DCB и DCA, а двугранный угол AB — на двугранный угол DC. Следовательно, эти двугранные углы равны. Аналогично докажем, что двугранные углы BC и AD, CA и BD также равны.

290. Решение. Воспользуемся результатом задачи 140, б):

$$OM^2 = R^2 - \frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

где O — центр сферы, описанной около тетраэдра, M — его центроид. Отсюда сразу следует, что $R^2 \geqslant \dfrac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2)$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда точки O и M совпадают, т. е. когда тетраэдр является равногранным (см. задачу 277, а).

291. $\dfrac{1}{6}$. **292.** $\dfrac{5}{48}a^3$.

293. $\dfrac{abc}{ab+bc+ca}$. Решение. Пусть вершина M куба принадлежит грани ABC. Объём тетраэдра $ABCD$ равен сумме объёмов трёх тетраэдров: $MABD$, $MBCD$ и $MCAD$. Так как треугольник ABD — прямоугольный и CD — высота тетраэдра $ABCD$, то его объём равен $\dfrac{1}{2}abc$. Аналогично найдём объёмы трёх других тетраэдров. Обозначив длину ребра куба через x, получим уравнение: $(ab+bc+ca)x = abc$, откуда $x = \dfrac{abc}{ab+bc+ca}$.

294. $\dfrac{2}{9}V$.

295. $\dfrac{3}{4}$. Указание. Установите, что площадь основания пирамиды вдвое больше площади куба и высота пирамиды вдвое больше ребра куба.

296. а) $k = \dfrac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}{3\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) при $k = \dfrac{8}{3}$ два решения: $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = \operatorname{arctg}(2+\sqrt{5})$; в) $k = \dfrac{9}{4}$.

Решение. а) Пусть сторона основания пирамиды равна a и высота её равна h. Используя подобие треугольников, найдём, что ребро куба равно $\dfrac{ah}{a+h}$. Объём пирамиды $V = \dfrac{1}{3}a^2h$, объём куба $V_1 = \dfrac{a^3h^3}{(a+h)^3}$. Значит $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{(a+h)^3}{3ah^2}$. А так как $\dfrac{h}{a} = \operatorname{tg}\alpha$, то $k = \dfrac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}{3tg^2\alpha}$.

б) Пусть $\dfrac{h}{a} = x$ и $k = \dfrac{8}{3}$. Тогда $\dfrac{(1+x)^3}{3x^2} = \dfrac{8}{3}$. Отсюда

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Полученное уравнение представим в виде: $(x-1)(x^2-4x-1)=0$. Условию задачи удовлетворяют корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 2+\sqrt{5}$. Поскольку $x = \operatorname{tg}\alpha$, получим: $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = \operatorname{arctg}(2+\sqrt{5})$.

в) Наименьшее значение функции $k = \dfrac{(1+x)^3}{3x^2}$, где $x > 0$, найдём с помощью производной. Получим: $k_{\min} = \dfrac{9}{4}$ при $x = 2$, т. е. при $h = 2a$.

297. $\dfrac{16}{81}V$. Указание. Обозначив высоту призмы через x, докажите, что объем призмы равен $V_1 = \dfrac{1}{2}x^2(h-3x)$, где h — высота пирамиды и $0 < x < \dfrac{h}{3}$.

298. а) $R = 4$ см; $\alpha = 60^\circ$. б) Два решения: 2 см и 6 см. **299.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}\sin 2\alpha}$.

300. $2R^2(\sin\gamma + \sin 2\gamma)$, $0^\circ < \gamma < 120^\circ$; $(2+\sqrt{2})R^2$ при $\gamma = 45^\circ$.
Решение. Пусть в сферу вписана правильная треугольная пирамида $NABC$, NH — высота пирамиды, MN — диаметр описанной сферы (рис. 60). Положим $\angle HAN = \alpha$ и $AN = b$. Тогда

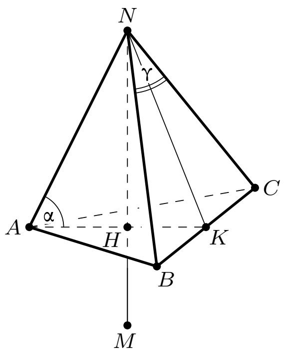

Рис. 60

$$S_{\text{бок}} = \frac{3}{2}b^2\sin\gamma, \qquad b = 2R\sin\alpha.$$

Следовательно, $S_{\text{бок}} = 6R^2\sin^2\alpha\sin\gamma$.

Воспользуемся формулой $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\gamma}{2}$ (см. пример 1), и получим:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}(1+2\cos\gamma).$$

Итак, $S_{\text{бок}} = 2R^2(1+2\cos\gamma)\sin\gamma = 2R^2(\sin\gamma + {} + \sin 2\gamma)$.

302. $R = \dfrac{3}{2}h\operatorname{tg}^2\dfrac{\delta}{2}$, $\delta > 60^\circ$; $R = \dfrac{3}{2}h$ при $\delta = 90^\circ$.

303. Указание. Воспользуйтесь формулами $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{ctg}\beta$ и докажите, что $\alpha = 30^\circ$.

304. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$. **305.** 1 см.

306. $\dfrac{1}{4}h$. Указание. Воспользуйтесь формулой $\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}$ (см. задачу 301, б).

307. $\beta = 60^\circ$, $V = 9\sqrt{3}$. **308.** $2R\operatorname{ctg}^2\dfrac{\delta}{2}$, $90^\circ < \delta < 180^\circ$.

309. $V=\dfrac{16}{3}R^3(1-\cos\gamma)\cos^2\gamma$, $V_{\max}=\dfrac{64}{81}R^3$ при $\gamma=\arccos\dfrac{2}{3}$.

310. Два решения: 15° и 75°.

311. $\dfrac{h}{1+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}}$. Указание. Воспользуйтесь соотношениями $\dfrac{r}{h-r}=$ $=\cos\beta$ и $\cos\beta=\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, где r — радиус вписанной сферы и β — величина двугранного угла при основании пирамиды.

312. $\dfrac{8}{5}b^2$. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. Установите, что $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{2}$ и $\sin\gamma=\dfrac{4}{5}$. Площадь боковой поверхности пирамиды найдите по формуле $S_{\text{бок}}=2b^2\sin\gamma$.

313. 2 см. Указание. Пусть α — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания. Тогда $h=2R\sin^2\alpha$. Вычислив $\sin\alpha$, найдите $\cos\beta$ (β — величина двугранного угла при основании). Затем воспользуйтесь формулой $r=\dfrac{h\cos\beta}{1+\cos\beta}$.

314. $r=d\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, $r=\dfrac{d\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\right)}{2\cos\gamma}$. **315.** $\dfrac{13}{12}a$.

316. Решение. Применим способ введения вспомогательного угла. Пусть NH — высота пирамиды, MN — диаметр описанной около неё сферы, $\angle NAH=\alpha$ (рис. 61). Тогда

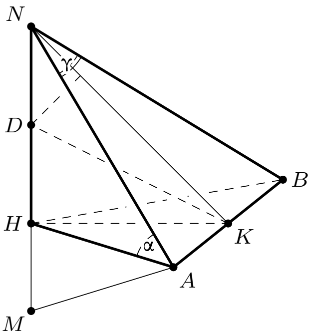

Рис. 61

$$h=2R\sin^2\alpha=2R(1-\cos^2\alpha).$$

Воспользуемся формулой $\cos\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$ и получим:

$$h=2R\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{\gamma}{2}}{\sin^2\dfrac{\pi}{n}}\right).$$

Выполним несложные преобразования:

$$2\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-\cos\gamma,\qquad \sin^2\frac{\pi}{n}=\frac{k^2}{1+k^2},$$

$$\text{где}\quad k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

и выражение для h приведём к виду:

$$h=2R\left(1-\frac{(1+k^2)(1-\cos\gamma)}{2k^2}\right),$$

откуда

$$\frac{h}{R}=\frac{(1+k^2)\cos\gamma+k^2-1}{k^2}.$$

Для доказательства второго соотношения введём вспомогательные отрезки. Пусть AB — сторона основания правильной пирамиды, NK — апофема (см. рис. 61). Обозначим $AB = 2a$, $NH = h$, $NK = l$, $HK = m$.

Из прямоугольных треугольников AMN и AKN имеем: $b^2 = 2Rh$ и $b^2 = a^2 + l^2$. Откуда

$$R = \frac{a^2 + l^2}{2h}.$$

Так как центр D сферы, вписанной в пирамиду, лежит на высоте NH, и KD — биссектриса треугольника HKN, то $\frac{r}{h-r} = \frac{m}{l}$, откуда $r = \frac{hm}{l+m}$. Таким образом, получаем:

$$\frac{r}{R} = \frac{2h^2 m}{(l+m)(a^2+l^2)}.$$

Из правой части полученного равенства исключим вспомогательные неизвестные h и m. Так как $h^2 = l^2 - m^2$ и $m = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, то после несложных преобразований получим:

$$\frac{r}{R} = \frac{2(kl-a)a}{(a^2+l^2)k^2}, \quad \text{где} \quad k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Числитель и знаменатель выражения, стоящего в правой части равенства, разделим на l^2. Учитывая, что $\frac{a}{l} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, будем иметь:

$$\frac{r}{R} = \frac{2\left(k - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)k^2}.$$

А так как $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \sin\gamma$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \dfrac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}$, то окончательно получим:

$$\frac{r}{R} = \frac{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2}.$$

317. $\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{3k}{2}}$; при $k = \frac{2}{3}$ имеем $\delta = 90^\circ$.

318. $\frac{n}{6}(2R-h)h^2\sin\frac{2\pi}{n}$. Указание. Объём пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$, Если R_1 — радиус окружности, описанной около основания, то $S_{\text{осн}} = \frac{n}{2}R_1^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}(2R-h)h\sin\frac{2\pi}{n}$.

Объём пирамиды наибольший при $h = \frac{4}{3}R$ (независимо от n). Наибольшее значение V можно найти без использования производной, если заметить, что сумма сомножителей произведения $(4R-2h)\cdot h\cdot h$ постоянна и равна $4R$, и поэтому произведение принимает наибольшее значение при $h=4R-2h$.

319. $\cos\beta=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{7}$.

320. $\cos\beta=\dfrac{1+\sqrt{5+k^2}}{4+k^2}$, где $k=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$, β — величина двугранного угла при основании пирамиды. Указание. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в задаче 316. Центры сфер симметричны относительно плоскости основания тогда и только тогда, когда $h+r=R$.

Получаем уравнение $(2+k^2)\cos\gamma+k\sin\gamma-2=0$. Вычислив $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, воспользуйтесь формулой $\cos\beta=\dfrac{1}{k}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$ и установите, что

$$\cos\beta=\frac{1+\sqrt{5+k^2}}{4+k^2}.$$

321. Указание. Пусть N — вершина правильной пирамиды, J — центр вписанной сферы и O — центр описанной сферы. Тогда

$$NJ=h-r,\quad NO=R\quad \text{и}\quad d=JO=|NO-NJ|=|R+r-h|.$$

Затем воспользуйтесь формулами задачи 316.

322. Решение 1. Пусть $NA_1A_2\ldots A_n$ — правильная n-угольная пирамида, у которой центры вписанной и описанной сфер совпадают (на рис. 62 изображена лишь часть пирамиды). Из общего их центра O проведём перпендикуляр OL к грани NA_1A_2. Тогда $A_1L=A_2L=NL$, как проекции равных наклонных OA_1, OA_2, ON. Значит, L — центр окружности, описанной около треугольника NA_1A_2, и поэтому $\angle A_1NA_2=\dfrac{1}{2}\angle A_1LA_2$ (вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу). Поскольку O в то же время и центр вписанной сферы, то $OH=OL$. Теперь легко доказать, что $A_1L=A_1H$ и $\triangle A_1LA_2=\triangle A_1HA_2$. Следовательно, $\angle A_1HA_2=\angle A_1LA_2=\dfrac{2\pi}{n}$, а $\angle A_1NA_2=\dfrac{\pi}{n}$.

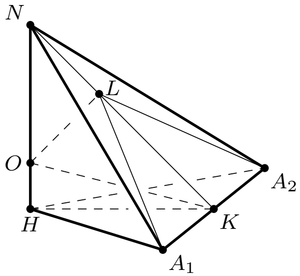

Рис. 62

Верно и обратное предложение.

Решение 2. Из формулы задачи 321 следует, что $d=0$ тогда и только тогда, когда $\sin\left(\gamma-\dfrac{\pi}{n}\right)=0$, при этом $0<\gamma<\dfrac{2\pi}{n}$. Значит, $\gamma=\dfrac{\pi}{n}$.

323. Решение. Воспользуемся формулой задачи 316:

$$\frac{R}{r}=\frac{k^2}{k\sin\gamma+\cos\gamma-1},\qquad \text{где}\quad 0<\gamma<\frac{2\pi}{n}.$$

Легко проверить истинность тождества

$$(k\sin\gamma+\cos\gamma)^2+(k\cos\gamma-\sin\gamma)^2=1+k^2,$$

откуда $k\sin\gamma+\cos\gamma\leqslant\sqrt{1+k^2}$. Значит, $\dfrac{R}{r}\leqslant\dfrac{k^2}{\sqrt{1+k^2}-1}=1+\sqrt{1+k^2}$, или $\dfrac{R}{r}\leqslant 1+\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$, причём равенство достигается только тогда, когда $k\cos\gamma=\sin\gamma$, или $\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$ и, значит, $\gamma=\dfrac{\pi}{n}$.

Итак, равенство имеет место тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают (см. задачу 322).

324. а) Два решения: 45° и $\arccos\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$. Указание. Возможны два случая: либо центр окружности, описанной около треугольника, есть середина его основания, либо он лежит внутри треугольника. Обозначим угол при основании равнобедренного треугольника через α, а радиус описанной и вписанной окружностей соответственно через R и r.

В первом случае $\alpha=45^\circ$ и $\dfrac{R}{r}=\operatorname{ctg}22{,}5^\circ=1+\sqrt{2}$.

Во втором случае получаем систему уравнений:

$$\frac{r}{R+r}=\cos\alpha,\qquad 2r=-R\cos2\alpha,$$

откуда $R^2-2Rr-r^2=0$, $\dfrac{R}{r}=1+\sqrt{2}$ и $\cos\alpha=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Задачу можно решить проще, если воспользоваться теоремой Эйлера $d^2=R^2-2Rr$, где d — расстояние между центрами окружностей.

б) 30° или 60°, в том и другом случае $\dfrac{R}{r}=1+\sqrt{3}$.

325. Два решения: $h=1+\sqrt{5}$ и $h=3+\sqrt{5}$, в том и другом случае $d=1$ и центр описанной сферы лежит на вписанной сфере.

327. Решение. Пусть α — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания, β — угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, h — высота пирамиды. Используя условие задачи, составим систему уравнений:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\alpha,\qquad h=2R\sin^2\alpha,\qquad \frac{r}{R-r}=\cos\beta.$$

Первое уравнение почленно возведём в квадрат и получим:

$$\frac{1}{\cos^2\beta}-1=\frac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right).$$

Из второго уравнения находим: $\cos^2\alpha=\dfrac{2R-h}{2R}$. Значения $\cos^2\alpha$ и $\cos^2\beta$ подставим в предыдущее равенство и после несложных преобразований получим квадратное уравнение относительно h:

$$h^2 - 2(R+r)h + 4Rr + \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = 0,$$

откуда $h = R + r \pm \sqrt{(R-r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}}$. Расстояние между центрами описанной и вписанной сфер равно $d = |h - R - r|$. Следовательно,

$$d = \sqrt{(R-r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}}, \quad \text{или} \quad d^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Из полученной формулы следует, что если $d = r$, т. е. центр описанной сферы лежит на вписанной сфере, то $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}}$ (задача 326). Кроме того, получаем неравенство $R - r \geqslant \frac{r}{\cos \frac{\pi}{n}}$, или

$$\frac{R}{r} \geqslant 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}},$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

328. $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{2b^2 - a^2}}$. **329.** $R_1 = \frac{b\sqrt{3}}{4}$, $R = b$, $h = \frac{1}{2}b$.

330. $r = 2$, $h = 8$. Указание. Воспользуйтесь формулой

$$R_1 = 2R\cos\alpha \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) \quad \text{(см. пример 3).}$$

331. $\frac{a\left(1 - \sin\frac{\gamma}{2}\right)}{2\sqrt{2\cos\gamma - 1}}$, $0^\circ < \gamma < 60^\circ$.

332. $h = 6$, $d = 2$ (d — расстояние между центрами сфер).

333. $R_1 = \frac{h\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Решение. Пусть O_1 — центр сферы, касающейся всех рёбер пирамиды, R_1 — её радиус. Воспользуемся формулой $R_1 = b\operatorname{ctg}\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right)$ (см. пример 1) и соотношениями $h = b\sin\alpha$, $NO_1 = \frac{R_1}{\cos\alpha}$.

Получим:

$$R_1 = \frac{h\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}, \quad NO_1 = \frac{h\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}, \quad \text{где } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Центр O_1 сферы лежит на продолжении высоты NH пирамиды, если

$$\frac{1-\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha}{\sin^2\alpha} > 1,$$

или $\sin\dfrac{\pi}{n} < \cos\alpha$, откуда $\sin\dfrac{\pi}{n} < \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ и, значит, $\alpha < \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$.

Если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$, то центр сферы совпадает с центром основания пирамиды; если $\alpha > \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$, то он лежит на высоте пирамиды.

334. $\dfrac{h\sin\dfrac{\gamma}{2}\left(1-\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$, $0 < \gamma < \dfrac{2\pi}{n}$.

335. $R_1 = h\cos\alpha\left(1-\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha\right)$, где $h = \dfrac{r(1+\cos\beta)}{\cos\beta}$ и $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2\dfrac{\pi}{n}\operatorname{tg}^2\beta}}$.

336. Указание. Воспользуйтесь формулой

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right).$$

$\dfrac{R}{R_1} = \sqrt{2}$ только при $\alpha = 45^\circ$ (центр сферы, касающейся всех рёбер пирамиды, совпадает с центром описанной сферы).

338. Указание. Центры сфер, описанной около правильной пирамиды и касающейся всех её рёбер, лежит на высоте пирамиды или её продолжении. Пусть N — вершина пирамиды. Тогда $d = |NO - NO_1|$. Докажите, что $NO = \dfrac{b}{2\sin\alpha}$, $NO_1 = \dfrac{2b-a}{2\sin\alpha}$, $a = 2b\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha$.

339. Центры сфер совпадают тогда и только тогда, когда $n=3$, $n=4$ или $n=5$ и все рёбра пирамиды равны.

340. а) $\dfrac{a\left|\sin\dfrac{\pi}{n}-\cos\alpha\right|}{2\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\alpha}$, б) $\dfrac{a|\operatorname{ctg}2\alpha|}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$.

341. $\cos\alpha = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}+\sqrt{\sin^2\dfrac{\pi}{n}+4}}{4}$; если $n=6$, то $a \approx 50^\circ$. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. Для вычисления угла α составьте уравнение: $4\cos^2\alpha - 2\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha - 1 = 0$.

342. $\arccos\dfrac{1}{3}$.

343. 4,5. Указание. Докажите, что центр описанной сферы есть середина ребра BD.

344. $\dfrac{a}{2}\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\beta}$; $\dfrac{(1+\sin\beta)a^2}{\cos\beta}$.

345. $2\sqrt{2}$ см. Указание. Установите, что $\cos\beta = \dfrac{1}{3}$ (β — величина угла при основании пирамиды).

346. Два решения: $h_1 = 3$ м и $h_2 = 6$ м. Указание. Введите вспомогательные неизвестные: пусть a — длина стороны основания пирамиды и β — величина двугранного угла при основании. Составьте систему уравнений: $V = \dfrac{1}{3}a^2h$, $\cos\beta = \dfrac{r}{h-r}$, $a = 2r\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$. Откуда $4r^2h^2 - 3Vh + 6rV = 0$.

При $r = 1$ м и $V = 12$ м^2 получим: $h_1 = 3$ м, $h_2 = 6$ м.

347. $\dfrac{1}{4}c^3\sin 2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$. **348.** $\dfrac{2l^3\sin^2\beta\cos\beta}{\sin\alpha}$. **349.** $\dfrac{a^2}{\cos^4\dfrac{\gamma}{2}}$.

350. $R = 3$.

352. $\dfrac{a}{\sin\alpha}$; $\dfrac{a}{2}\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$. Решение. Расстояние между двумя любыми параллельными гранями параллелепипеда равно диаметру $2r$ вписанной сферы. Так как объём параллелепипеда равен произведению площади грани на соответствующую высоту, равную $2r$, то все грани параллелепипеда имеют одинаковую площадь. Обозначив длину бокового ребра через b, получим: $ab\sin\alpha = a^2$, откуда $b = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Пусть боковое ребро AA_1 параллелепипеда образует со сторонами AB и AD основания углы, равные α. Проведём высоту A_1H параллелепипеда и высоту A_1K боковой грани. Тогда точка H лежит на диагонали основания, и легко находим: $A_1K = a$, $HK = AK = a\operatorname{ctg}\alpha$. Из прямоугольного треугольника A_1HK получим: $2r = A_1H = a\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

353. $R = 5$. **354.** $\dfrac{\sqrt{34}}{3} \approx 1{,}9$.

356. $\dfrac{\sqrt{97}}{8} \approx 3{,}5$. Указание. Центр сферы, проходящей через вершины треугольника ABC, лежит на перпендикуляре m к плоскости ABC, проходящем через центр описанной около него окружности. Легко установить, что радиус этой окружности равен $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

Плоскость $A_1B_1C_1$ пересекает сферу по окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, точки касания которой со сторонами треугольника одинаково удалены от центра сферы, что возможно только тогда, когда перпендикуляр m к плоскости ABC проходит через центр вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности. Радиус этой окружности легко вычислить, он равен $\sqrt{2}$. Далее найдите высоту призмы и, пользуясь теоремой Пифагора, вычислите радиус R сферы.

357. $\arccos\dfrac{n-1}{n+1}$; если $n=3$, то $\alpha=60^\circ$. **358.** $R=5$.

359. Два решения: $7\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. **360.** $1:5$. **361.** $1:3:9$.

362. $(\sqrt{3}-1):\sqrt{2}:2$. **363.** $\dfrac{2}{3}R$. **364.** $\dfrac{h(2+\operatorname{tg}\alpha)}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

365. $\dfrac{4}{3}$. Указание. Пусть R и r — радиусы шаров, β — величина двугранного угла при основании пирамиды. Установите, что $\cos\beta = \dfrac{R-r}{R+r}$, откуда $\dfrac{R}{r}=\dfrac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}$. Вычислите $\operatorname{tg}\beta$ и $\cos\beta$.

366. $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{82\pi(2\sqrt{3}-3)}{243}$. Указание. Пусть R — радиус каждого из трёх шаров с центрами O_1, O_2, O_3 и a — длина стороны основания. Рассмотрите сечение призмы плоскостью $O_1O_2O_3$ и установите, что $a=2R(1+\sqrt{3})$.

Докажите, что радиус r четвёртого шара равен $\dfrac{R}{3}$, поэтому общий объём всех четырёх шаров равен $V_1=4\pi R^3+\dfrac{4}{81}\pi R^3=4\pi R^3\cdot\dfrac{82}{81}$. Объём же призмы $V=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2R=4R^3\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$.

Отсюда $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{82\pi(2\sqrt{3}-3)}{243}\approx 0{,}49$.

Обозначения и формулы

I. Тетраэдр

Длины рёбер тетраэдра $ABCD$ обозначаются: $AD=a$, $DB=b$, $DC=c$, $BC=a_1$, $CA=b_1$, $AB=c_1$;

S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней, противолежащих соответственно вершинам A, B, C, D;

$S_{\text{пол}}$ — площадь полной поверхности тетраэдра;

h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра;

m_1, m_2, m_3, m_4 — медианы тетраэдра, проведённые, соответственно, из вершин A, B, C, D;

t_{AB}, t_{AC}, t_{BC} — бимедианы тетраэдра, соединяющие середины рёбер AB и CD, AC и BD, BC и DA;

V — объём тетраэдра; R — радиус описанной сферы;

r — радиус вписанной сферы; M — точка пересечения медиан;

O — центр описанной сферы; J — центр вписанной сферы.

Метрические соотношения

1. $V = \dfrac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$,
где $\alpha=\angle BDC$, $\beta=\angle CDA$, $\gamma=\angle ADB$;

2. $h_i = \dfrac{3V}{S_i}$, $i=1, 2, 3, 4$;

3. $m_4^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} - \dfrac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{9}$;

4. $t_{AB}^2 = (a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)/4$;

5. $r = 3V/S_{\text{пол}}$;

6. $R=\dfrac{T}{6V}$, где T — площадь треугольника, стороны которого численно равны aa_1, bb_1, cc_1.

II. Правильная пирамида

В правильной n-угольной пирамиде $NA_1A_2\ldots A_n$ высота NH, NK — апофема; $A_1A_2=a$, $NA_1=b$, $NH=h$, $NK=l$ (рис. 36 и 37).

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

S — площадь полной поверхности;

R — радиус описанной сферы; r — радиус вписанной сферы;

R_1 — радиус окружности, описанной около основания.

Зависимости между элементами пирамиды

1. $a = 2R_1 \sin\frac{\pi}{n}$; **2.** $b^2 = 2Rh$; **3.** $R_1^2 = h(2R - h)$;
4. $b = 2R\sin\alpha$; **5.** $h = 2R\sin^2\alpha$; **6.** $R_1 = R\sin 2\alpha$;
7. $h = l\sin\beta$; **8.** $r = \dfrac{h\cos\beta}{1+\cos\beta}$; **9.** $S_{\text{бок}} = \dfrac{n}{2}b^2\sin\gamma$.

n-угольная пирамида	$n=3$	$n=4$	$n=6$
$\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\beta$
$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2}$	$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\gamma}{2}$	$\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$	$\cos\alpha = 2\sin\frac{\gamma}{2}$
$\cos\beta = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$	$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$	$\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$	$\cos\beta = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$
$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$	$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$	$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$	$\sin\alpha = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$
$\sin\beta = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\delta}{2}$	$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}$	$\sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}$	$\sin\beta = 2\cos\frac{\delta}{2}$

III. Тела вращения

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;
S — площадь полной поверхности; V — объём.

Цилиндр

R — радиус основания; h — высота цилиндра.
1. $S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$; **2.** $S = 2\pi R(R+h)$; **3.** $V = \pi R^2 h$.

Шар

R — радиус шара.
1. $S = 4\pi R^2$; **2.** $V = 4\pi R^3/3$.

Конус

r — радиус основания конуса; h — высота; l — образующая.
1. $S_{\text{бок}} = \pi Rl$; **2.** $S = \pi r(l+r)$; **3.** $V = \pi r^2 h/3$.

Усечённый конус

r_1 и r_2 — радиусы оснований усечённого конуса; h — высота;
l — образующая.
1. $S_{\text{бок}} = \pi(r_1+r_2)l$; **2.** $S = \pi(r_1+r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$;
3. $V = \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3$.