Г. Г. Михайличенко, К вопросу о симметрии расстояния в геометрии, *Изв. вузов. Матем.*, 1994, номер 4, 21–23

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1994 МАТЕМАТИКА № 4 (383)

УДК 514.01

*Г.Г.МИХАЙЛИЧЕНКО*

# К ВОПРОСУ О СИММЕТРИИ РАССТОЯНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

Обычно расстояние $L(ij)$ между точками $i$ и $j$ пространства $\mathfrak{M}$ определяется с помощью некоторой функции $L$: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей системе метрических аксиом. Одной из основных аксиом этой системы является аксиома симметрии, согласно которой для любых точек $i,j\in\mathfrak{M}$ выполняется равенство $L(ij)=L(ji)$, т.е. предполагается, что расстояние симметрично. Однако в геометрии нельзя исключить из рассмотрения так называемые симплектические пространства, для которых "расстояние" $L(ij)$ определяется с помощью антисимметричной функции, так что $L(ij)=-L(ji)$. И хотя такую функцию обычно не называют метрикой, но в некотором более широком смысле она, как функция пары точек, все же может рассматриваться в качестве метрики, а ее значение $L(ij)$ для $\langle ij\rangle\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ называться расстоянием. Аналогично, симметричный интервал между двумя событиями в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского есть расстояние между ними в некотором более широком смысле, т.к. для него выполняются не все метрические аксиомы. Естественно возникает вопрос: почему в геометрии рассматриваются только симметричные и антисимметричные расстояния? Оказывается, что если предположить существование какой-либо функциональной связи между расстояниями $L(ij)$ и $L(ji)$, то будут возможны только такие два типа симметрии. Перейдем к более подробному изложению и точным формулировкам.

Пусть $\mathfrak{M}=\{i,j,k,...\}$ – множество произвольной природы. Расстояние между точками этого множества определим с помощью некоторого функционального соответствия $L$: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$, область определения $\mathfrak{S}_L\subset\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ которого не обязательно совпадает со всем прямым произведением $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. Каждой паре $\langle ij\rangle\in\mathfrak{S}_L$ соответствие $L$ сопоставляет некоторое число $L(ij)\in\mathbb{R}$, называемое расстоянием от точки $i$ до точки $j$. Расстояния $L(ij)$ и $L(ji)$ в общем случае различны и мы будем предполагать, что они определены или не определены одновременно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Будем говорить, что функциональные соответствия $L$: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ и $L'$: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ эквивалентны, если совпадают их области определения $\mathfrak{S}_L$ и $\mathfrak{S}_{L'}$, и существует строго монотонная функция $\psi$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любой пары $\langle ij\rangle\in\mathfrak{S}_L$ имеет место равенство $L'(ij)=\psi(L(ij))$.

Исходя из замечания в работе Ю.И.Кулакова [1], будем аксиому симметрии формулировать следующим образом:

**АКСИОМА СИММЕТРИИ.** Для любых двух точек $i,j\in\mathfrak{M}$ таких, что пары $\langle ij\rangle$ и $\langle ji\rangle$ принадлежат $\mathfrak{S}_L$, расстояния $L(ij)$ и $L(ji)$ связаны соотношением

$$L(ij) = \theta(L(ji)), \tag{1}$$

где $\theta$ – некоторая строго монотонная функция одной переменной, область определения и область значений которой совпадает с областью значений $L(\mathfrak{S}_L)$ исходного функционального соответствия $L$.

**ТЕОРЕМА.** *Если расстояние между точками пространства $\mathfrak{M}$, определяемое с помощью функционального соответствия $L$: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$, удовлетворяет аксиоме симметрии, то это расстояние может быть либо симметричным, либо, с точностью до эквивалентности, антисимметричным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из соотношения (1) для любой пары $\langle ij\rangle\in\mathfrak{S}_L$ получаем соотношение $\theta(\theta(L(ij)))=L(ij)$, из которого следует, что функция $\theta$ является решением функционального уравнения

$$\theta(\theta(x)) = x, \tag{2}$$

где $x\in L(\mathfrak{S}_L)\subset\mathbb{R}$. По предположению функция $\theta$ строго монотонная и имеет обратную. Если функция $\theta$ монотонно возрастает, то $\theta(x)=x$ и расстояние оказывается симметричным. Если функция $\theta$ монотонно убывает, то, перейдя к эквивалентному функциональному соответствию $L'(ij)=\psi(L(ij))$, где $\psi(x)=x-\theta(x)$ (очевидно, строго монотонно возрастающая функция), имеем в силу (1)

$$L'(ij) = L(ij)-\theta(L(ij)) = L(ij)-L(ji), \tag{3}$$

т.е. $L'$ – антисимметричное расстояние. Теорема доказана.

Симметрия или антисимметрия расстояния при наличии некоторой связи (1) были установлены автором в [2] для того случая, когда это расстояние определялось с помощью функционального соответствия $f$: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to\mathbb{R}$ (задающего на $n$-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(n+1,n+1)$) и некоторого локального диффеоморфизма $\varphi$: $\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$:

$$L(ij) = f(i,\varphi(j)). \tag{4}$$

Для расстояния (4) соотношение (1) при известном соответствии $f$ переходит в функциональное уравнение

$$f(i,\varphi(j)) = \theta(f(j,\varphi(i))) \tag{5}$$

относительно функции $\theta$ и диффеоморфизма $\varphi$. Решая уравнение (5) для соответствий

$$\begin{aligned} f(i\alpha) &= x^1(i)\xi^1(\alpha)+\ldots+x^n(i)\xi^n(\alpha),\\ f(i\alpha) &= x^1(i)\xi^1(\alpha)+\ldots+x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha)+x^n(i)+\xi^n(\alpha), \end{aligned} \tag{6}$$

приведенных в работе [3], можно найти одновременно и диффеоморфизм $\varphi$ и функцию $\theta$, определяющую тип симметрии расстояния (4). В специальной системе локальных координат $x=$

$=(x^1,...,x^{n-1},x^n)$ в многообразии $\mathfrak{M}$ выражения для расстояния $L(ij)$ (с точностью до локальной эквивалентности) можно записать в следующем виде

$$L(ij) = g_{\lambda\alpha}x^\lambda(i)x^\sigma(j),$$
$$L(ij) = h_{\mu\nu}x^\mu(i)x^\nu(j)+x^n(i)+ax^n(j), \tag{7}$$

где $a=\pm1$; $g_{\lambda\sigma}=ag_{\sigma\lambda}$, $\lambda,\sigma=1,...,n$; $h_{\mu\nu}=ah_{\nu\mu}$, $\nu,\mu=1,...,n-1$, причем для $a=-1$ размерность $n$ многообразия $\mathfrak{M}$ четна в первом из выражений (7) и нечетна во втором.

Из выражений (7) при некоторых естественных дополнительных условиях можно получить симметричные метрики римановых и псевдоримановых пространств постоянной кривизны $(a=+1)$, а также антисимметричные метрики симплектических пространств *четной* и, обратим внимание, *нечетной* размерности $(a=-1)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Кулаков Ю.И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теоремы физических структур* // ДАН СССР. – 1970. – Т.193. – №5. – С.985–987.

2. Михайличенко Г.Г. *Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства (в рамках теории физических структур)* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – №6. – С.28–35.

3. Михайличенко Г.Г. *Решения функциональных уравнений в теории функциональных структур* // ДАН СССР. – 1972. – Т.206. – №5. – С.1056–1058.



г. Новосибирск

Поступила 19.05.1993