



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Михайличенко, Феноменологически симметричная геометрия двух множеств ранга $(3, 2)$, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, номер 2, 48–53

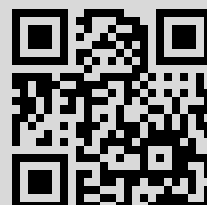
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.155.4.86

12 сентября 2018 г., 15:36:23



Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДВУХ МНОЖЕСТВ РАНГА (3, 2)

Аннотация. Определяется и изучается одна из простейших феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга (3, 2), задаваемая на одномерном и двумерном многообразиях метрической функцией.

Ключевые слова: геометрия двух множеств, метрическая функция, феноменологическая симметрия.

УДК: 514.146

Пусть имеются одномерное и двумерное многообразия M и N , точки которых обозначим строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также метрическая функция f , сопоставляющая некоторым парам $\langle i\alpha \rangle \in M \times N$ действительное число $f(i\alpha) \in R$. Заметим, что метрическая функция f сопоставляет число двум точкам из *разных* множеств и поэтому она не может быть обычной метрикой. Предположим, прежде всего, выполнение следующих двух аксиом.

A1. Область определения функции f открыта и плотна в $M \times N$.

A2. Метрическая функция f достаточно гладкая.

Если x и ξ, η — локальные координаты в многообразиях M и N , то для метрической функции f можно записать ее координатное представление

$$f = f(x, \xi, \eta), \quad (1)$$

причем, например, $f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$.

Предположим также выполнение еще одной аксиомы.

A3. Локальные координаты x и ξ, η в представлении (1) входят существенным образом.

Математическим выражением аксиомы **A3** будут следующие неравенства:

$$\partial f(x, \xi, \eta) / \partial x \neq 0, \quad \partial(f(x_1, \xi, \eta), f(x_2, \xi, \eta)) / \partial(\xi, \eta) \neq 0, \quad (2)$$

если $x_1 \neq x_2$, которые запишем и для некоторых точек многообразий

$$\partial f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha) / \partial x_i \neq 0, \quad \partial(f(x_j, \xi_\alpha, \eta_\alpha), f(x_k, \xi_\alpha, \eta_\alpha)) / \partial(\xi_\alpha, \eta_\alpha) \neq 0, \quad (2')$$

если $j \neq k$.

Построим функцию F , сопоставляя кортежу $\langle ijk, \alpha\beta \rangle \in M^3 \times N^2$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta))) \in R^6$, и введем последнюю аксиому.

A4. Множество значений функции F лежит в R^6 на гладкой невырожденной гиперповерхности

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)) = 0. \quad (3)$$

Определение. Будем говорить, что метрическая функция f задает на одномерном и двумерном многообразиях M и N феноменологически симметричную геометрию двух множеств (ФС ГДМ) ранга (3,2), если выполнены аксиомы **A1–A4**.

Уравнение (3) устанавливает нетривиальную связь шести функций: $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, $f(k\alpha)$, $f(k\beta)$ от семи переменных x_i , x_j , x_k , ξ_α , η_α , ξ_β , η_β , для существования которой необходимо и достаточно, чтобы ранг соответствующей функциональной матрицы

$$\begin{vmatrix} f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) \\ f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 \\ f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) \\ 0 & f_\eta(i\beta) & 0 & f_\eta(j\beta) & 0 & f_\eta(k\beta) \end{vmatrix} \quad (4)$$

размера 7×6 был меньше шести.

Теорема. Если метрическая функция f задает на одномерном и двумерном многообразиях M и N феноменологически симметричную геометрию двух множеств (ФС ГДМ) ранга (3,2), то с точностью до замены координат в многообразиях и ее масштабного преобразования представление (1) может быть записано в канонической форме

$$f = x\xi + \eta. \quad (5)$$

Доказательство. Возьмем два обращаящихся в нуль якобиана порядка 6, полученные из матрицы (4) вычеркиванием седьмой и шестой строк, и разложим их по элементам первого столбца

$$\begin{aligned} & -f_x(i\alpha)f_\xi(i\beta)f_x(j\beta)f_x(k\beta)A(jk, \alpha) - f_\xi(i\alpha)f_x(i\beta)B_1(jk, \alpha\beta) + \\ & + f_\eta(i\alpha)f_x(i\beta)C_1(jk, \alpha\beta) = 0, \\ & -f_x(i\alpha)f_\eta(i\beta)f_x(j\beta)f_x(k\beta)A(jk, \alpha) - f_\xi(i\alpha)f_x(i\beta)B_2(jk, \alpha\beta) + \\ & + f_\eta(i\alpha)f_x(i\beta)C_2(jk, \alpha\beta) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A(jk, \alpha\beta) &= \begin{vmatrix} f_\xi(j\alpha) & f_\xi(k\alpha) \\ f_\eta(j\alpha) & f_\eta(k\alpha) \end{vmatrix} \neq 0, \\ B_1(jk, \alpha\beta) &= \begin{vmatrix} f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) \\ f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) \end{vmatrix}, \\ C_1(jk, \alpha\beta) &= \begin{vmatrix} f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) \\ f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

а миноры $B_2(jk, \alpha\beta)$ и $C_2(jk, \alpha\beta)$ получаются из миноров $B_1(jk, \alpha\beta)$ и $C_1(jk, \alpha\beta)$ соответственно заменой $f_\xi(j\beta) \rightarrow f_\eta(j\beta)$, $f_\xi(k\beta) \rightarrow f_\eta(k\beta)$.

В результате получена система двух дифференциально-функциональных соотношений (6), ранг матрицы коэффициентов которой при производных $f_x(i\alpha)$, $f_\xi(i\alpha)$, $f_\eta(i\alpha)$ равен двум, так как, например,

$$\begin{vmatrix} B_1(jk, \alpha\beta) & C_1(jk, \alpha\beta) \\ B_2(jk, \alpha\beta) & C_2(jk, \alpha\beta) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, при раскрытии этого определителя получаем произведение

$$f_x(j\alpha)f_x(j\beta)f_x(k\alpha)f_x(k\beta) \begin{vmatrix} f_\xi(j\alpha) & f_\xi(k\alpha) \\ f_\eta(j\alpha) & f_\eta(k\alpha) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_\xi(j\beta) & f_\xi(k\beta) \\ f_\eta(j\beta) & f_\eta(k\beta) \end{vmatrix} \neq 0,$$

в котором каждый из сомножителей отличен от нуля согласно неравенствам (2).

Каждое из соотношений (6) разделим на $f_x(i\beta)A(jk, \alpha)$, после чего зафиксируем точки j, k и β . Тогда в отношении функции $f(i\alpha)$ получается система двух линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, ранг которой равен двум. Запишем ее, введя удобные обозначения коэффициентов и опуская у переменных (координат) точечные индексы i и α ,

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_x + \sigma_1 f_\xi + \tau_1 f_\eta &= 0, \\ \lambda_2 f_x + \sigma_2 f_\xi + \tau_2 f_\eta &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $f = f(x, \xi, \eta)$, $\lambda = \lambda(x)$, $\sigma = \sigma(\xi, \eta)$, $\tau = \tau(\xi, \eta)$, причем $\lambda \neq 0$, $\sigma^2 + \tau^2 \neq 0$.

В системе (7) произведем замену переменных

$$y = \omega(x), \quad \mu = \varphi(\xi, \eta), \quad \nu = \psi(\xi, \eta),$$

при которой первое ее уравнение запишется в виде

$$\lambda_1 \omega_x f_y + (\sigma_1 \varphi_\xi + \tau_1 \varphi_\eta) f_\mu + (\sigma_1 \psi_\xi + \tau_1 \psi_\eta) f_\nu = 0,$$

а функции этой замены возьмем из решений интегрируемых уравнений

$$\lambda_1 \omega_x = 1, \quad \sigma_1 \varphi_\xi + \tau_1 \varphi_\eta = 1, \quad \sigma_1 \psi_\xi + \tau_1 \psi_\eta = 0.$$

Если в системе (7) вернуться к прежним обозначениям коэффициентов и новых переменных, т. е. новых координат в многообразиях M и N , то ее уравнения запишутся в более простом виде

$$f_x + f_\xi = 0, \quad \lambda f_x + \sigma f_\xi + \tau f_\eta = 0, \quad (7')$$

причем во втором уравнении за ненадобностью опущен нижний индекс 2.

Покажем, что в системе (7') $\tau \neq 0$ и $\lambda \neq \text{const}$. Если $\tau = 0$, то из системы (7'), имеющей ранг, равный двум, получим $f_x = 0$, $f_\xi = 0$, что, очевидно, противоречит условиям (2). Если же $\lambda = c = \text{const}$, то из системы (7') возникает связь производных $(\sigma - c)f_\xi + \tau f_\eta = 0$, которая также противоречит условиям (2).

Продифференцируем второе уравнение системы (7') по переменным x и ξ , после чего сложим результаты с учетом первого уравнения:

$$\lambda_x f_x + \sigma_\xi f_\xi + \tau_\xi f_\eta = 0. \quad (8)$$

Если ранг расширенной системы (7')–(8) из трех уравнений равен трем, то получим вырождение метрической функции по всем координатам, так как $f_x = 0$, $f_\xi = 0$, $f_\eta = 0$. Поэтому

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \sigma & \tau \\ \lambda_x & \sigma_\xi & \tau_\xi \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, раскрывая определитель, устанавливаем

$$\lambda_x = \lambda \frac{\tau_\xi}{\tau} - \frac{\sigma \tau_\xi - \tau \sigma_\xi}{\tau}. \quad (9)$$

Соотношение (9) продифференцируем по переменной x , разделяя переменные,

$$\frac{\lambda_{xx}}{\lambda_x} = \frac{\tau_\xi}{\tau} = a = \text{const},$$

откуда после частичного интегрирования этого результата получаем уравнения для коэффициентов системы (7'):

$$\lambda_x = a\lambda + b, \quad \sigma_\xi = a\sigma + b, \quad \tau_\xi = a\tau, \quad (10)$$

причем $a^2 + b^2 \neq 0$, так как $\lambda \neq \text{const.}$

При интегрировании уравнений (10) отдельно рассмотрим следующие два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$. В первом случае

$$a = 0, \quad (11)$$

и уравнения (10) становятся более простыми

$$\lambda_x = b, \quad \sigma_\xi = b, \quad \tau_\xi = 0,$$

а их решения можно записать в виде

$$\lambda(x) = bx + c, \quad \sigma(\xi, \eta) = b\xi + b\sigma(\eta), \quad \tau(\xi, \eta) = b\tau(\eta),$$

где, очевидно, $b \neq 0$ и $\tau(\eta) \neq 0$.

Запишем систему (7') для метрической функции при найденных в случае (11) ее коэффициентах

$$f_x + f_\xi = 0, \quad xf_x + (\xi + \sigma(\eta))f_\xi + \tau(\eta)f_\eta = 0. \quad (12)$$

В системе (12) произведем замену переменных

$$\mu = \xi + \varphi(\eta), \quad \nu = \psi(\eta), \quad (13)$$

причем $\psi' \neq 0$, учитывая, что при такой замене

$$f_\xi = f_\mu, \quad f_\eta = \varphi'(\eta)f_\mu + \psi'(\eta)f_\nu.$$

Первое уравнение системы (12) сохранит свою простейшую форму, а второе изменится

$$f_x + f_\mu = 0, \quad xf_x + (\xi + \sigma(\eta) + \tau(\eta)\varphi'(\eta))f_\mu + \tau(\eta)\psi'(\eta)f_\nu = 0.$$

Функции φ и ψ в замене переменных (13) возьмем из решений уравнений

$$\sigma(\eta) + \tau(\eta)\varphi'(\eta) = \varphi(\eta), \quad \tau(\eta)\psi'(\eta) = 1.$$

После возвращения к прежним обозначениям переменных система (12) записывается в следующем максимально простом для случая (11) виде:

$$f_x + f_\xi = 0, \quad xf_x + \xi f_\xi + f_\eta = 0. \quad (12')$$

Решение $f = \theta(x + \xi, \eta)$ первого уравнения системы (12'), где $\theta = \theta(u, v)$ — функция двух переменных $u = x + \xi$ и $v = \eta$, подставим в ее второе уравнение: $u\theta_u + \theta_v = 0$. Интегрируя полученное уравнение, находим $\theta(u, v) = \chi(u \exp(-v))$, где χ — произвольная функция одной переменной с отличной от нуля производной. В результате для метрической функции получаем выражение $f = \chi((x - \xi) \exp(-\eta))$, которое перепишем в виде $\chi^{-1}(f) = x \exp(-\eta) - \xi \exp(-\eta)$, где χ^{-1} — обратная к χ функция. Из него видно, что с точностью до замены переменных $\exp(-\eta) \rightarrow \xi$, $-\xi \exp(-\eta) \rightarrow \eta$ и масштабного преобразования $\chi^{-1}(f) \rightarrow f$ оно совпадает с каноническим выражением (5), приведенным в доказываемой теореме. Заметим, что все использованные выше при решении исходной системы (7) замены переменных суть замены координат в многообразиях M и N .

Во втором случае, когда

$$a \neq 0, \quad (14)$$

решения дифференциальных уравнений (10) для коэффициентов системы (7') можно записать в виде

$$\lambda(x) = c \exp ax - b/a, \quad \sigma(\xi, \eta) = c\sigma(\eta) \exp a\xi - b/a, \quad \tau(\xi, \eta) = a\tau(\eta) \exp a\xi,$$

где $c \neq 0$, $\tau(\eta) \neq 0$, так как $\lambda_x \neq 0$ и $\tau(\xi, \eta) \neq 0$.

Введем найденные коэффициенты в систему (7'), произведя дополнительно замену переменных $ax \rightarrow x$, $a\xi \rightarrow \xi$,

$$f_x + f_\xi = 0, \quad \exp(x - \xi)f_x + \sigma(\eta)f_\xi + \tau(\eta)f_\eta = 0. \quad (15)$$

Решение $f = \theta(x - \xi, \eta)$ первого уравнения системы (15) подставим в ее второе уравнение $(\exp u - \sigma(v))\theta_u + \tau(v)\theta_v = 0$, где, как и при рассмотрении первого случая, $u = x - \xi$, $v = \eta$. Это уравнение решается методом характеристик

$$\theta(u, v) = \chi(\varphi(v) \exp(-u) + \psi(v)),$$

где функции $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ являются решениями других уравнений

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = -\frac{\sigma(v)}{\tau(v)}, \quad \frac{\psi'(v)}{\varphi(v)} = \frac{1}{\tau(v)}.$$

Для метрической функции (1) получаем тогда выражение

$$f = \chi(\varphi(\eta) \exp(-x + \xi) + \psi(\eta)),$$

которое, очевидно, с точностью до его масштабного преобразования $\chi^{-1}(f) \rightarrow f$ и замены переменных $\exp(-x) \rightarrow x$ и $\varphi(\eta) \exp \xi \rightarrow \xi$, $\psi(\eta) \rightarrow \eta$ (замены координат в многообразиях M и N) может быть записано в канонической форме (5).

Убедимся в том, что для метрической функции (5), удовлетворяющей, очевидно, неравенствам (2) аксиомы **A3**, ранг функциональной матрицы (4) равен пяти. Другими словами, для этой функции существует единственное независимое уравнение (3), выражающее феноменологическую симметрию ранга (3, 2) задаваемой ею (на одномерном и двумерном многообразиях) геометрии двух множеств.

Подставим метрическую функцию (5) в функциональную матрицу (4):

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \xi_\alpha & \xi_\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta \\ x_i & 0 & x_j & 0 & x_k & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_i & 0 & x_j & 0 & x_k \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (16)$$

Поскольку у матрицы (16) якобиан пятого порядка, полученный вычеркиванием последних ее двух строк и последнего столбца, равный $-\xi_\alpha \xi_\beta^2 (x_i - x_j)$, отличен от нуля, а любой якобиан шестого порядка равен нулю, ее ранг действительно равен пяти.

Для шести функций

$$\begin{aligned} f(i\alpha) &= x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha, & f(i\beta) &= x_i \xi_\beta + \eta_\beta, \\ f(j\alpha) &= x_j \xi_\alpha + \eta_\alpha, & f(j\beta) &= x_j \xi_\beta + \eta_\beta, \\ f(k\alpha) &= x_k \xi_\alpha + \eta_\alpha, & f(k\beta) &= x_k \xi_\beta + \eta_\beta \end{aligned}$$

уравнение (3) находится исключением всех семи координат $x_i, x_j, x_k, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta$ точек кортежа $\langle ijk, \alpha\beta \rangle$:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

Заметим, что ФС ГДМ ранга (3,2) наделена групповой симметрией степени 2, так как множество ее движений, сохраняющих метрическую функцию (5), состоит из *двухпараметрических* групп преобразований многообразий M и N

$$x' = ax + b, \quad \xi' = \xi/a, \quad \eta' = \eta - b\xi/a,$$

которые находятся ([1], § 5) как решения функционального уравнения

$$x'\xi' + \eta' = x\xi + \eta.$$

Таким образом, Эрлангенская программа Ф. Клейна (1872), сформулированная им для обычных геометрий на одном множестве, справедлива и в отношении данной феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (3, 2).

ФС ГДМ ранга (3, 2) естественно возникает при анализе строения закона Ома ([2], с. 121–123) и потому называется еще физической структурой. Впервые строгое ее математическое определение было дано в работе автора [3], но соответствующая теорема существования и единственности для нее была доказана там более сложным и громоздким методом. В работе [4] сделан естественный переход к аналогичным ФС ГДМ более высокого ранга $(n + 3, 2)$, задаваемым на n -мерном и $n(n + 2)$ -мерном многообразиях M и N метрической функцией $f : M \times N \rightarrow R^n$. Оказалось, что с точностью до замены координат в многообразиях и ее масштабного преобразования функция f локально изоморфна группе проективных преобразований пространства R^n , определяя на нем n -мерную проективную геометрию.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mihailichenko G.G., Muradov R.M. *The geometry of two sets* (LAP LAMBERT Academic Publ., Saarbrucken, 2013).
- [2] Кулаков Ю.И. *Теория физических структур* (Доминико, М., 2004).
- [3] Михайличенко Г.Г. *Бинарная физическая структура ранга (3, 2)*, Сиб. матем. журн. **14** (5), 1057–1064 (1973).
- [4] Кыров В.А. *Проективная геометрия и теория физических структур*, Изв. вузов. Матем., № 11, 48–59 (2008).

Г.Г. Михайличенко

профессор, кафедра физики,

Горно-Алтайский государственный университет,

ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

G.G. Mikhailichenko

Phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank (3, 2)

Abstract. We determine and study one of the simplest phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank (3, 2), given on one- and two-dimensional manifolds by metric function.

Keywords: geometry of two sets, metric function, phenomenological symmetry.

G.G. Mihailichenko

Professor, Chair of Physics,

Gorny Altai State University,

1 Lenkin str., Gorno-Altai, 649000 Russia,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru