Г. Г. Михайличенко, В. А. Кыров, Гиперкомплексные числа в некоторых геометриях двух множеств. I, *Изв. вузов. Матем.*, 2017, номер 7, 19–29

Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2017, № 7, с. 19–29 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО, В.А. КЫРОВ

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЯХ ДВУХ МНОЖЕСТВ. I

Аннотация. Важнейшей задачей теории феноменологически симметричных геометрий двух множеств является классификация этих геометрий. В данной работе по метрическим функциям некоторых известных феноменологически симметричных геометрий двух множеств (ФС ГДМ) с помощью комплексификации ассоциативными гиперкомплексными числами находятся метрические функции новых таких геометрий. Находятся также уравнения групп движений этих геометрий. Устанавливается феноменологическая симметрия этих геометрий, т. е. находятся функциональные связи между метрическими функциями для определенного конечного числа произвольных точек. В частности, по однокомпонентным метрическим функциям ФС ГДМ рангов $(2,2)$, $(3,2)$, $(3,3)$ определяются $(n+1)$-компонентные метрические функции тех же рангов. Для них находятся конечные уравнения групп движений и уравнения, выражающие их феноменологическую симметрию.

Ключевые слова: геометрия двух множеств, феноменологическая симметрия, групповая симметрия, гиперкомплексные числа.

УДК: 514.16

Введение

0.1. В работах [1], [2] дается определение однометрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств (ФС ГДМ) ранга $(n+1, m+1)$, которая задается дифференцируемой невырожденной метрической функцией с открытой и плотной в $R^m \times R^n$ областью определения:

$$f : R^m \times R^n \to R,$$

а также выполняется аксиома феноменологической симметрии: справедлива функциональная связь

$$\Phi(f(\mu_1, \nu_1), f(\mu_1, \nu_2), \dots, f(\mu_{n+1}, \nu_{m+1})) = 0$$

для открытого и плотного подмножества кортежей $\langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m, \nu_{m+1} \rangle$ длины $n+m+2$ из окрестности $V(\langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m, \nu_{m+1} \rangle) \subset R^{m(n+1)} \times R^{n(m+1)}$. Функция Φ — дифференцируемая и $\operatorname{rang} \Phi = 1$. В данной работе точки из первого множества обозначаются $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$, а точки из второго множества — $\nu, \nu_1, \nu_2, \dots$.

В координатах метрическая функция ФС ГДМ ранга $(n+1, m+1)$ задается в виде

$$f(\mu, \nu) = f(x^1(\mu), \dots, x^m(\mu), \xi^1(\nu), \dots, \xi^n(\nu)),$$

где $(x^1(\mu), \dots, x^m(\mu))$ — координаты точки $\mu \in R^m$, а $(\xi^1(\nu), \dots, \xi^n(\nu))$ — координаты точки $\nu \in R^n$.

Поступила 16.03.2016

Важной задачей является классификация ФС ГДМ. В конце 60-х гг. XX века была построена полная классификация однометрических ФС ГДМ [3], т. е. когда значения метрической функции f принадлежат R. Нас интересуют

ФС ГДМ ранга $(2,2)$:

$$f(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu), \tag{1}$$

ФС ГДМ ранга $(3,2)$:

$$f(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu) + \eta(\nu), \tag{2}$$

ФС ГДМ ранга $(3,3)$:

$$f(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\mu)\eta(\nu), \tag{3}$$

$$f(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\mu) + \eta(\nu). \tag{4}$$

0.2. Как и выше можно определить s-метрическую ФС ГДМ ранга $(n+1, m+1)$, которая задается дифференцируемой невырожденной метрической функцией с открытой и плотной в $R^{sm} \times R^{sn}$ областью определения:

$$f : R^{sm} \times R^{sn} \to R^s.$$

Выполняется аксиома феноменологической симметрии: существует функциональная связь

$$\Phi'(f(\mu_1,\nu_1), f(\mu_1,\nu_2), \ldots, f(\mu_{n+1},\nu_{m+1})) = 0$$

для открытого и плотного подмножества кортежей $\langle\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,\mu_{n+1};\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m,\nu_{m+1}\rangle$ длины $n+m+2$ из окрестности $V(\langle\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,\mu_{n+1};\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m,\nu_{m+1}\rangle) \subset R^{sm(n+1)} \times R^{sn(m+1)}$. Функция Φ' — дифференцируемая и $\operatorname{rang}\Phi' = s$. Полная классификация s-метрических ФС ГДМ еще не построена.

0.3. В данной работе предлагается метод, позволяющий построить частичную классификацию s-метрических ФС ГДМ ранга $(n+1, m+1)$. Суть этого метода состоит в комплексификации уже известных однометрических ФС ГДМ гиперкомплексными числами различного ранга: два, три, четыре и т. д. Например, гиперкомплексными числами ранга 2 являются обычные комплексные числа ($i^2 = -1$), двойные комплексные числа ($i^2 = 1$) и дуальные комплексные числа ($i^2 = 0$) [4], [5], гиперкомплексными числами ранга 4 являются квартернионы [4], а гиперкомплексными числами ранга 8 — октавы [4]. В результате комплексификации получаются метрические функции s-метрических ФС ГДМ. Этот метод апробирован в работе [5], в которой с помощью двумерных и трехмерных гиперкомплексных чисел по метрической функции (2) найдены метрические функции 2-метрических и 3-метрических ФС ГДМ.

С использованием компьютерных технологий показано, что комплексификация метрической фукции (1) неассоциативными трехмерными гиперкомплексными числами дает отрицательный результат. При комплексификации же трехмерными ассоциативными гиперкомплексными числами результат всегда положительный. Поэтому ниже комплексификация будет проводиться только ассоциативными гиперкомплексными числами.

1. Алгебра гиперкомплексных чисел

1.1. Рассмотрим вещественную линейную ассоциативную алгебру $(n+1)$-мерных гиперкомплексных чисел L ([6], с. 462). Примерами таких алгебр служат алгебра комплексных чисел, алгебра кватернионов.

Произвольное гиперкомплексное число имеет вид $x = x^0 i_0 + x^1 i_1 + \cdots + x^n i_n$, где $x^0, x^1, \ldots, x^n \in R$, $i_0 = 1$, $i_1, \ldots, i_n$ — мнимые единицы. Сложение, умножение на действительное число определяются покомпонентно, а произведение записывается следующим

образом: $\forall x, y \in L$:
$$xy = \sum_{k,l=0}^{n} x^k y^l i_k i_l. \tag{5}$$
Произведение мнимых единиц $i_k i_l \in L$ определяется специальной таблицей умножения. Заметим, что произведение (5) в общем случае некоммутативно.

1.2. В алгебре гиперкомплексных чисел могут существовать делители нуля, т. е. такие числа $a \neq 0$ и $b \neq 0$, что $ab = 0$, причем a есть левый, а b — правый делители нуля. Обозначим через $U(L) \subset L$ область без нуля и делителей нуля.

Предложение 1.1 ([6], с. 184)**.** *Пусть $a \in U(L)$, тогда для него существуют левый и правый обратные элементы, причем ${}^{-1}a = a^{-1}$. Множество $U(L)$ является группой по умножению.*

1.3. В качестве первого примера рассмотрим алгебру двумерных гиперкомплексных чисел $z = x + iy$ для $n = 1$.

Предложение 1.2 ([4], с. 9)**.** *Существует только три типа двумерных гиперкомплексных чисел: обычные комплексные числа с квадратом мнимой единицы, $i^2 = -1$, двойные числа $i^2 = 1$, дуальные числа, $i^2 = 0$. Эти числа ассоциативны и коммутативны.*

1.4. В качестве второго примера рассмотрим алгебру трехмерных гиперкомплексных чисел $u = x + iy + jz$ для $n = 2$. Таблица умножения их мнимых единиц i и j приведена в ([1], с. 127):
$$i^2 = a + jb, \quad j^2 = c + id, \quad ij = f + ig + jh, \quad ji = p + iq + jr.$$

Предложение 1.3. *Любые системы трехмерных гиперкомплексных чисел содержат делители нуля.*

Для ассоциативных систем трехмерных гиперкомплексных чисел приведем таблицы умножения их мнимых единиц ([1], с. 128; [7]):
$$i^2 = bg + h^2 + bj, \quad j^2 = dh^2 + g^2 + di, \quad ij = ji = bg - gh + gi + hj,$$
$$i^2 = 1, \quad j^2 = 0, \quad ij = j, \quad ji = -j.$$
Отметим, что для первого случая гиперкомплексные числа коммутативные, а для второго случая нет.

2. Алгебра матриц над гиперкомплексными числами

2.1. Пусть M_2 — множество матриц размера 2×2 над алгеброй ассоциативных гиперкомплексных чисел L. Сложение таких матриц и умножение их на гиперкомплексное число обычные. Произведение матриц определяется по правилу "строка на столбец". Можно доказать, что M_2 — линейная ассоциативная алгебра ([6], с. 184).

Для матриц, как и для гиперкомплексных чисел, можно говорить о левых и правых делителях нуля: ненулевые матрицы $A, B \in M_2$ называются соответственно левым и правым делителями нуля, если $AB = 0$. Обозначим через $U(M_2) \subset M_2$ множество ненулевых матриц, не являющихся ни левым и ни правым делителями нуля. Можно доказать, что множество $U(M_2)$ открыто и плотно в M_2.

Предложение 2.1 ([6], с. 184)**.** *Пусть матрица $A \in U(M_2)$, тогда для нее существуют левая и правая обратные матрицы, причем ${}^{-1}A = A^{-1}$. Множество $U(M_2)$ является группой относительно матричного умножения.*

2.2. Вычисление обратной матрицы.

Предложение 2.2. *Пусть L — алгебра гиперкомплексных чисел. Для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} x(\alpha) & y(\alpha) \\ x(\beta) & y(\beta) \end{pmatrix} \in U(M_2)$$

с элементами из $U(L)$, $\Lambda(\alpha,\beta) = x(\alpha)x^{-1}(\beta) - y(\alpha)y^{-1}(\beta) \in U(L)$, $\alpha = (x(\alpha), y(\alpha))$ — пара гиперкомплексных чисел из $U(L)$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1}(\beta)(\Lambda(\alpha,\beta))^{-1} & x^{-1}(\alpha)(\Lambda(\beta,\alpha))^{-1} \\ -y^{-1}(\beta)(\Lambda(\alpha,\beta))^{-1} & -y^{-1}(\alpha)(\Lambda(\beta,\alpha))^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Доказательство. Решаем уравнение $AB = E$ относительно матрицы $B \in M_2$. □

Множество матриц, о котором говорится в предложении 2.2, обозначим $\overline{U}(M_2)$. Очевидно, что это открытое и плотное подмножество в $U(M_2)$. Легко доказывается

Предложение 2.3. *Для матриц $\begin{pmatrix} x(\alpha) & y(\alpha) \\ x(\beta) & y(\beta) \end{pmatrix} \in \overline{U}(M_2)$ справедливо соотношение*

$$\begin{pmatrix} x(\alpha) & y(\alpha) \\ x(\gamma) & y(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\alpha) & y(\alpha) \\ x(\beta) & y(\beta) \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda(\gamma,\beta)\Lambda^{-1}(\alpha,\beta) & \Lambda(\gamma,\alpha)\Lambda^{-1}(\beta,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u(\alpha,\beta,\gamma) & u(\beta,\alpha,\gamma) \end{pmatrix},$$

где $u(\alpha,\beta,\gamma) = \Lambda(\gamma,\beta)\Lambda^{-1}(\alpha,\beta)$.

3. Однометрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств (ФС ГДМ)

3.1. Во введении дано определение однометрической ФС ГДМ ранга $(n+1, m+1)$, а также приводятся метрические функции для рангов $(2,2)$, $(3,2)$, $(3,3)$. Для них известны функциональные связи [3], которые можно переписать в следующем удобном виде:

для ФС ГДМ ранга $(2,2)$:

$$f(\mu_1,\nu_1)f^{-1}(\mu_2,\nu_1) - f(\mu_1,\nu_2)f^{-1}(\mu_2,\nu_2) = 0, \tag{7}$$

где произвольный кортеж $\langle \mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2 \rangle$ берется из открытого и плотного подмножества в $V(\langle \mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2 \rangle) \subset (R)^2 \times (R)^2$;

для ФС ГДМ ранга $(3,2)$:

$$(f(\mu_1,\nu_1) - f(\mu_2,\nu_1))(f(\mu_1,\nu_1) - f(\mu_3,\nu_1))^{-1} =$$
$$= (f(\mu_1,\nu_2) - f(\mu_2,\nu_2))(f(\mu_1,\nu_2) - f(\mu_3,\nu_2))^{-1}, \tag{8}$$

причем произвольный кортеж $\langle \mu_1, \mu_2, \mu_3; \nu_1, \nu_2 \rangle$ берется из открытого и плотного подмножества в $V(\langle \mu_1, \mu_2, \mu_3; \nu_1, \nu_2 \rangle) \subset (R)^3 \times (R^2)^2$;

для ФС ГДМ ранга $(3,3)$:

первое решение имеет вид

$$F(\mu_1,\mu_2;\nu_1,\nu_2)F^{-1}(\mu_1,\mu_3;\nu_1,\nu_2) = F(\mu_1,\mu_2;\nu_1,\nu_3)F^{-1}(\mu_1,\mu_3;\nu_1,\nu_3), \tag{9}$$

где

$$F(\mu_1,\mu_2;\nu_1,\nu_2) = \begin{pmatrix} f(\mu_1,\nu_1) & f(\mu_1,\nu_2) \\ f(\mu_2,\nu_1) & f(\mu_2,\nu_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\mu_1) & y(\mu_1) \\ x(\mu_2) & y(\mu_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(\nu_1) & \xi(\nu_2) \\ \eta(\nu_1) & \eta(\nu_2) \end{pmatrix},$$

$$F(\mu_1,\mu_2;\nu_1,\nu_2)F^{-1}(\mu_1,\mu_3;\nu_1,\nu_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta(\mu_2,\mu_3)/\Delta(\mu_1,\mu_3) & \Delta(\mu_2,\mu_1)/\Delta(\mu_2,\mu_1) \end{pmatrix},$$

причем $\Delta(\mu_1,\mu_2)$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix} x(\mu_1) & y(\mu_1) \\ x(\mu_2) & y(\mu_2) \end{pmatrix}$;

второе решение имеет вид

$$
\begin{aligned}
&[(f(\mu_1,\nu_1)-f(\mu_1,\nu_3))-(f(\mu_3,\nu_1)-f(\mu_3,\nu_3))]\times\\
&\qquad\times[(f(\mu_2,\nu_1)-f(\mu_2,\nu_3))-(f(\mu_3,\nu_1)-f(\mu_3,\nu_3))]^{-1}=\\
&\qquad=[(f(\mu_1,\nu_2)-f(\mu_1,\nu_3))-(f(\mu_3,\nu_2)-f(\mu_3,\nu_3))]\times\\
&\qquad\qquad\times[(f(\mu_2,\nu_2)-f(\mu_2,\nu_3))-(f(\mu_3,\nu_2)-f(\mu_3,\nu_3))]^{-1}, \quad (10)
\end{aligned}
$$

причем как для первого, так и для второго решений кортежи $\langle\mu_1,\mu_2,\mu_3;\nu_1,\nu_2,\nu_3\rangle$ принадлежат открытому и плотному подмножеству в $V(\langle\mu_1,\mu_2,\mu_3;\nu_1,\nu_2,\nu_3\rangle)\subset(R^2)^3\times(R^2)^3$.

Заметим, что первое решение в ФС ГДМ ранга $(3,3)$ для удобства записано в матричном виде, но оно равносильно одному скалярному равенству, поскольку в (9) у матрицы $F(\mu_1,\mu_2;\nu_1,\nu_2)F^{-1}(\mu_1,\mu_3;\nu_1,\nu_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta(\mu_2,\mu_3)/\Delta(\mu_1,\mu_3) & \Delta(\mu_2,\mu_1)/\Delta(\mu_3,\mu_1)\end{pmatrix}$ первые два элемента — это числа единица и нуль, а третий и четвертый элементы — это одна функция от точек в разной последовательности.

3.2. Вводится понятие движения в ФС ГДМ ранга $(n+1,m+1)$ как локального диффеоморфизма $\lambda\times\sigma: R^m\times R^n \longrightarrow R^m\times R^n$:

$$x'=\lambda(x),\ \xi'=\sigma(\xi),$$

сохраняющего метрическую функцию

$$f(x',\xi')=f(\lambda(x),\sigma(\xi))=f(x,\xi). \tag{11}$$

Заметим, что группа движений действует сразу в двух пространствах. Соотношение (11) является функциональным уравнением на группу движений, решая которое можно найти ее конечные уравнения [8]:

для ФС ГДМ ранга $(2,2)$:

$$x'=ax,\quad \xi'=\xi/a,\quad a\neq 0, \tag{12}$$

для ФС ГДМ ранга $(3,2)$:

$$x'=ax+b,\quad \xi'=\xi/a,\quad \eta'=\eta-b\xi/a,\quad a\neq 0, \tag{13}$$

для ФС ГДМ ранга $(3,3)$:

первое решение имеет вид

$$X'=AX,\quad \Xi'=A^{-1}\Xi, \tag{14}$$

где $X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\Xi'=\begin{pmatrix}\xi'\\\eta'\end{pmatrix}$, $\Xi=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a^{11} & a^{12}\\ a^{21} & a^{22}\end{pmatrix}$ — квадратная невырожденная матрица, а A^{-1} — обратная матрица;

второе решение имеет вид

$$x'=ax+b,\quad y'=y+cx+d,\quad \xi'=(\xi-c)/a,\quad \eta'=\eta-b(\xi-c)/a-d,\quad a\neq 0. \tag{15}$$

Следует отметить, что групповая и феноменологическая симметрии для ФС ГДМ эквивалентны в следующем смысле: по метрической функции можно найти группу движений, а по группе движений находится метрическая функция [1], [7].

4. Комплексификация однометрической ФС ГДМ ранга $(2,2)$ гиперкомплексными числами

4.1. Простейшая однометрическая ФС ГДМ ранга $(2,2)$ задается ([6], с. 9) метрической функцией (1) в $R\times R$, а ее феноменологическая симметрия выражается уравнением (7), где, например, $f(\mu,\nu)=x(\mu)\xi(\nu)$. Эта геометрия наделяется групповой симметрией степени один, определяемой однопараметрической группой движений (12), сохраняющих метрическую функцию (1), т. е. выполняется тождество (11).

4.2. Проведем комплексификацию метрической функции (1), переходя к соответствующим гиперкомплексным функциям и координатам, полагая

$$f_{\text{к}} = \sum_{j=0}^{n} f^j i_j, \quad x = \sum_{j=0}^{n} x^j i_j, \quad \xi = \sum_{j=0}^{n} \xi^j i_j.$$

Тогда комплексифицированная метрическая функция будет иметь вид

$$f_{\text{к}}(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu). \tag{$1'$}$$

Выделяя затем одну действительную и n мнимых частей, получаем $(n+1)$-компонентную метрическую функцию, задающую в пространствах R^{n+1} и R^{n+1} ГДМ. Является ли она феноменологически симметричной ранга (2,2), можно установить тремя различными методами: матричным, групповым и функциональным, т. е. по рангу соответствующей функциональной матрицы, если он равен $3(n+1)$, по степени групповой симметрии, если она равна $n+1$, и по числу уравнений, выражающих ФС ранга (2,2), если оно равно $n+1$.

4.3. Найдем группу движений для комплексифицированной ФС ГДМ ранга $(2,2)$. Для этого решим функциональное уравнение (11) на множество движений.

Теорема 4.1. *Группа движений комплексифицированной ФС ГДМ ранга* $(2,2)$ *с метрической функцией* $(1')$ *задается уравнениями*

$$x' = xa, \quad \xi' = a^{-1}\xi, \tag{16}$$

в которых гиперкомплексный параметр $a \in U(L)$*. Инвариантом этой группы движений является метрическая функция* $(1')$*. Параметрической группой является группа* $U(L)$ *гиперкомплексных чисел без делителей нуля.*

Доказательство. Запишем для метрической функции $(1')$ уравнение (11): $x'\xi' = x\xi$ при $x, x', \xi, \xi' \in U(L)$. Разделим переменные $x^{-1}x' = \xi\xi'^{-1} = a = \text{const}$, так как координаты x и ξ берутся для точек из разных множеств, то $x' = xa$, $\xi' = a^{-1}\xi$. Полученные соотношения, очевидно, справедливы для произвольных x и ξ из L. Таким образом, найдены уравнения (16).

Инвариантность метрической функции доказывается так:

$$f'_{\text{к}} = x'\xi' = (xa)(a^{-1}\xi) = x(aa^{-1})\xi = x\xi = f_{\text{к}}.$$

При доказательстве использовано свойство ассоциативности. Последнее является очевидным следствием уравнений (16). □

Очевидно, что множество (16) является $(n+1)$-параметрической группой движений, так как параметр a является гиперкомплексным числом, включающим в себя $n+1$ вещественных параметров.

4.4. Уравнение, выражающее феноменологическую симметрию ГДМ, задаваемой метрической функцией $(1')$, в гиперкомплексной записи имеет вид

$$f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1)f_{\text{к}}^{-1}(\mu_2,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2)f_{\text{к}}^{-1}(\mu_2,\nu_2) = 0,$$

причем $f_{\text{к}} \in U(L)$. Проверка этого уравнения проводится элементарно.

5. Комплексификация однометрической ФС ГДМ ранга $(3,2)$ гиперкомплексными числами

5.1. Рассмотрим теперь комплексификацию однометрической ФС ГДМ ранга $(3,2)$, задаваемой ([1], с. 18) метрической функцией (2) на $R \times R^2$. Феноменологическая ранга $(3,2)$ симметрия выражается уравнением (8), в котором, например, $f(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu) + \eta(\nu)$, а эквивалентная ей групповая симметрия степени два определяется двухпараметрической группой движений (13), сохраняющих функцию (2).

5.2. Полагая в выражении (2) координаты $x, \xi, \eta \in L$, по использованной выше схеме получаем $(n+1)$-компонентную метрическую функцию

$$f_{\text{к}} = x(\mu)\xi(\nu) + \eta(\nu), \tag{$2'$}$$

задающую ФС ГДМ ранга $(3,2)$ на R^{n+1} и $R^{2(n+1)}$, наделенную групповой симметрией степени $2(n+1)$. Феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_1))(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_1))^{-1} - \\ - (f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_2))(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_2))^{-1} = 0,$$

причем

$f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_1), f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_1), f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_2), f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_2) \in U(L)$.

5.3. Найдем эквивалентную групповую симметрию, т. е. группу движений для комплексифицированной ФС ГДМ ранга (3,2). Для этого решим функциональное уравнение (11) на множество движений.

Теорема 5.1. *Группа движений комплексифицированной ФС ГДМ ранга* $(3,2)$ *с метрической функцией* $(2')$ *задается уравнениями*

$$x' = xa + b, \quad \xi' = a^{-1}\xi, \quad \eta' = \eta - ba^{-1}\xi, \tag{17}$$

в которых гиперкомплексные параметры $a \in U(L)$, $b \in L$. *Инвариантом этой группы движений является метрическая функция* $(2')$. *Параметрической группой является группа* $U(L) \leftthreetimes L \cong \overline{M}_2$, *где* $\overline{M}_2$ — *группа, состоящая из матриц* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right)$, *причем* $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ -ba^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ — *обратная матрица.*

Доказательство. Запишем уравнение (11) для метрической функции $(2')$ и двух пар точек $\langle\mu_1,\nu\rangle$, $\langle\mu_2,\nu\rangle$ с координатами $\mu_1 = (x(\mu_1), y(\mu_1))$, $\mu_2 = (x(\mu_2), y(\mu_2))$, $\nu_1 = (\xi(\nu_1), \eta(\nu_1))$, которые движением переводятся в точки $\mu_1' = (x'(\mu_1), y'(\mu_1))$, $\mu_2' = (x'(\mu_2), y'(\mu_2))$, $\nu_1' = (\xi'(\nu_1), \eta'(\nu_1))$ соответственно:

$$x'(\mu_1)\xi' + \eta' = x(\mu_1)\xi + \eta, \quad x'(\mu_2)\xi' + \eta' = x(\mu_2)\xi + \eta, \tag{$*$}$$

причем $x(\mu_1) - x(\mu_2), x'(\mu_1) - x'(\mu_2), \xi, \xi' \in U(L)$, $\eta, \eta' \in L$. Вычтем из первого уравнения второе:

$$(x'(\mu_1) - x'(\mu_2))\xi' = (x(\mu_1) - x(\mu_2))\xi, \quad x'(\mu_2)\xi' + \eta' = x(\mu_2)\xi + \eta.$$

Разрешим эти тождества относительно ξ' и η', затем фиксируем точки μ_1 и μ_2:

$$\xi' = (x'(\mu_1) - x'(\mu_2))^{-1}(x(\mu_1) - x(\mu_2))\xi,$$

$$\eta' = \eta - [x'(\mu_2)(x'(\mu_1) - x'(\mu_2))^{-1}(x(\mu_1) - x(\mu_2)) - x(\mu_2)]\xi.$$

Далее вводим обозначения

$$a^{-1} = (x'(\mu_1) - x'(\mu_2))^{-1}(x(\mu_1) - x(\mu_2)) = \text{const} \in U(L),$$

$$ba^{-1} = x'(\mu_2)(x'(\mu_1) - x'(\mu_2))^{-1}(x(\mu_1) - x(\mu_2)) - x(\mu_2) = \text{const} \in L.$$

Тогда

$$\xi' = a^{-1}\xi, \; \eta' = \eta - ba^{-1}\xi.$$

Найденное подставим в $(*)$:

$$x'\xi' + \eta' = x\xi + \eta, \quad x'a^{-1}\xi + \eta - ba^{-1}\xi = x\xi + \eta,$$

следовательно, $x' = xa + b$. Таким образом, найдены уравнения (17), которые справедливы для $x, x', \xi, \xi', \eta, \eta' \in L$.

Инвариантность метрической функции доказывается следующим образом:

$$f'_\text{к} = x'\xi' + \eta' = (xa + b)(a^{-1}\xi) + \eta - ba^{-1}\xi = x(aa^{-1})\xi + \eta = x\xi + \eta - ba^{-1}\xi = f_\text{к}.$$

При доказательстве использовано свойство ассоциативности гиперкомплексных чисел. Последнее утверждение очевидно. □

Очевидно, что группа движений (17) является $2(n+1)$-параметрической группой, включающая в себя $2(n+1)$ вещественных параметров.

6. Комплексификация однометрической ФС ГДМ ранга $(3,3)$ гиперкомплексными числами

6.1. Перейдем, далее, к однометрической ФС ГДМ ранга $(3,3)$, которая существует в двух неэквивалентных вариантах ([1], с. 63), задаваемых метрическими функциями (3) и (4) на $R^2 \times R^2$. Для первой метрической функции (3) ФС ранга $(3,3)$ задаваемой ею ГДМ выражается уравнением (9). Групповая же симметрия степени 4 определяется 4-параметрической группой движений (14).

6.2. При переходе в выражении (3) к гиперкомплексным координатам получаем $(n+1)$-компонентную метрическую функцию

$$f_\text{к}(\mu, \nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\nu)\eta(\nu), \tag{3'}$$

которая задает ФС ГДМ, причем ее ФС ранга $(3,3)$ выражается уравнением

$$F_\text{к}(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)F_\text{к}^{-1}(\mu_1, \mu_3; \nu_1, \nu_2) = F_\text{к}(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_3)F_\text{к}^{-1}(\mu_1, \mu_3; \nu_1, \nu_3), \tag{18}$$

где матрица $F_\text{к}(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2) = \begin{pmatrix} f_\text{к}(\mu_1,\nu_1) & f_\text{к}(\mu_1,\nu_2) \\ f_\text{к}(\mu_2,\nu_1) & f_\text{к}(\mu_2,\nu_2) \end{pmatrix} \in \overline{U}(M_2)$. Согласно предложению 2.3 верно равенство $F_\text{к}(\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2)F_\text{к}^{-1}(\mu_1, \mu_3; \nu_1, \nu_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u(\mu_1,\mu_3,\mu_2) & u(\mu_3,\mu_1,\mu_2) \end{pmatrix}$. Значит, матричное уравнение (18) дает только одно нетривиальное скалярное тождество, которое и задает феноменологическую симметрию.

6.3. Найдем эквивалентную групповую симметрию, т. е. группу движений для комплексифицированной ФС ГДМ ранга $(3,3)$. Для этого решим функциональное уравнение (11) на множество движений.

Теорема 6.1. *Группа движений комплексифицированной ФС ГДМ ранга* $(3,3)$ *с метрической функцией* $(3')$ *задается матричным уравнением*

$$X' = XA, \quad \Xi' = A^{-1}\Xi, \tag{19}$$

где $X = (\,x\ y\,)$, $\Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \overline{U}(M_2)$. *Инвариантом этой группы движений является метрическая функция* $(3')$. *Параметрической группой является группа невырожденных матриц* $\overline{U}(M_2)$.

Доказательство. Запишем уравнение (11) для метрической функции $(3')$ и двух пар точек $\langle \mu, \nu_1 \rangle$, $\langle \mu, \nu_2 \rangle$ с координатами $\mu = (x, y)$, $\nu_1 = (\xi(\nu_1), \eta(\nu_1))$, $\nu_2 = (\xi(\nu_2), \eta(\nu_2))$, которые движением переводятся в точки $\mu' = (x', y')$, $\nu'_1 = (\xi'(\nu_1), \eta'(\nu_1))$, $\nu'_2 = (\xi'(\nu_2), \eta'(\nu_2))$ соответственно:

$$x'\xi'(\nu_1) + y'\eta'(\nu_1) = x\xi(\nu_1) + y\eta(\nu_1), \quad x'\xi'(\nu_2) + y'\eta'(\nu_2) = x\xi(\nu_2) + y\eta(\nu_2)$$

или в матричном виде $X'D'{=}XD$ при $D{=}\left(\begin{smallmatrix}\xi(\nu_1) & \xi(\nu_2)\\ \eta(\nu_1) & \eta(\nu_2)\end{smallmatrix}\right){\in}\overline{U}(M_2)$. Разрешая, имеем $X' = XDD'^{-1}$. Видно, что переменные разделились. Поэтому $A{=}DD'^{-1}{=}\left(\begin{smallmatrix}a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right){=}\mathrm{const} \in \overline{U}(M_2)$. Таким образом, $X' = XA$. Аналогично, уравнение (11) запишем для пар $\langle\mu_1,\nu\rangle$, $\langle\mu_2,\nu\rangle$:

$$x'(\mu_1)\xi' + y'(\mu_1)\eta' = x(\mu_1)\xi + y(\mu_1)\eta,\ x'(\mu_2)\xi' + y'(\mu_2)\eta' = x(\mu_2)\xi + y(\mu_2)\eta,$$

в матричном виде оно имеет вид $W'\Xi' = W\Xi$, где $W = \left(\begin{smallmatrix}x(\mu_1) & y(\mu_1)\\ x(\mu_2) & y(\mu_2)\end{smallmatrix}\right) \in \overline{U}(M_2)$, $W' = WA \in \overline{U}(M_2)$. Тогда

$$WA\Xi' = W\Xi,\quad \Xi' = (WA)^{-1}W\Xi = A^{-1}W^{-1}W\Xi = A^{-1}\Xi.$$

Таким образом, найдены уравнения на группу движений (19).

Доказательство инвариантности метрической функции ($3'$) проводится как и в теоремах 4.1 и 5.1. □

Очевидно, группа движений (19) является $4(n+1)$-параметрической группой, включающей в себя $4(n+1)$ вещественных параметров.

6.4. Для второй метрической функции (4) ФС выражается уравнением (10), где, например, $f(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\mu) + \eta(\nu)$. Групповая же симметрия степени 4 задается уравнениями (15).

Если в выражении (4) провести комплексификуцию, то получим $(n+1)$-компонентную метрическую функцию

$$f_{\text{к}}(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\mu) + \eta(\nu), \tag{$4'$}$$

которая задает на $2(n+1)$-мерных многообразиях ФС ГДМ ранга $(3,3)$. Ее феноменологическая симметрия выражается уравнением

$$\begin{aligned}
&[(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3))]\times\\
&\qquad\times [(f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3))]^{-1} =\\
&\qquad= [(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3))]\times\\
&\qquad\qquad\times [(f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3))]^{-1},
\end{aligned}$$

причем $(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3)) \in U(L)$.

Группа движений ФС ГДМ задается выражениями

$$x' = xa + b,\quad y' = y + xc + d,\quad \xi' = a^{-1}(\xi - c),\quad \eta' = \eta - ba^{-1}(\xi - c) - d,$$

где $a \in U(L)$, которые получаются из решений функционального уравнения (11). Инвариантом этой группы движений является метрическая функция ($4'$). Параметрическая группа изоморфна группе, состоящей из матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0\\ 0 & 1 & 0\\ b & d & 1\end{pmatrix},$$

где $a \in U(L)$, $b, c, d \in L$. Несложно вычислить

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}c & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -ba^{-1} & ba^{-1}c - d & 1\end{pmatrix}.$$

В таком случае инвариантность метрической функции ($4'$) проверяется следующим образом:

$$x'\xi' + y' + \eta' = \left(\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix} A\right)\left(A^{-1}\begin{pmatrix}\xi & 1 & \eta\end{pmatrix}^T\right) = x\xi + y + \eta.$$

7. Физический пример

7.1. Комплексифицированные обычными комплесными числами ФС ГДМ рангов $(2,2)$ и $(3,3)$ интерпретируются Ю.С. Владимировым в теории физических взаимодействий [9], [10]. В частности, им дается способ получения спиноров, т. е. некоторых математических объектов, которыми описываются элементарные частицы (лептоны и барионы). Заметим, что в теоретической физике спиноры получают через алгебру Клиффорда. Согласно работам Ю.С. Владимирова для комплексифицированной ФС ГДМ ранга $(3,3)$ точки из первого множества $M = C^2$ интерпретируются как начальные состояния элементарной частицы, а точки из второго множества $N = C^2$ — как конечные состояния, причем для любой точки $\mu \in M$, $\nu = \overline{\mu} \in N$. Черта сверху означает комплексное сопряжение. Далее рассматривается метрическая функция $(3')$ для начального и конечного состояний:

$$f_{\text{к}}(\mu,\nu) = f_{\text{к}}(\mu,\overline{\mu}) = x(\mu)x(\overline{\mu}) + y(\mu)y(\overline{\mu}), \tag{20}$$

где, например, $x(\mu) = x^1(\mu) + ix^2(\mu)$, $x(\overline{\mu}) = x^1(\overline{\mu}) - ix^2(\overline{\mu})$, $i^2 = -1$. Рассмотрим матрицу

$$G = \begin{pmatrix} f_{\text{к}}(\mu_1,\overline{\mu_1}) & f_{\text{к}}(\mu_1,\overline{\mu_2}) \\ f_{\text{к}}(\mu_2,\overline{\mu_1}) & f_{\text{к}}(\mu_2,\overline{\mu_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\mu_1) & y(\mu_1) \\ x(\mu_2) & y(\mu_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\overline{\mu_1}) & x(\overline{\mu_2}) \\ y(\overline{\mu_1}) & y(\overline{\mu_2}) \end{pmatrix},$$

которая интерпретируются как спинтензор второго ранга. Подставляя в нее значения метрической функции (20), получаем

$$G = p_0E_2 + p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3,$$

где $E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ — единичная матрица, $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ — матрицы Паули. В работе [9] отмечается, что равенство $\det G = 1$ сохраняется группой $SU(2)$, поэтому точку μ можно интерпретировать как спинор некоторой элементарной частицы. Несложно также проверить $\det G = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$. Это соотношение интерпретируется как спинтензорный инвариант.

8. Заключение

В работе [11], где исследуется аффинная группа как ФС ГДМ, также рассматривается проблема комплексификации гиперкомплексными числами. В частности, доказывается, что при комплексификации аффинной группы ассоциативными гиперкомплексными числами получаются ФС ГДМ. Описанный в этой статье метод комплексификации гиперкомплексными числами можно применить и для ФС ГДМ рангов $(n+1,n)$, $(n+1,n+1)$, метрические функции которых приведены в работах [1]–[3].

Литература

[1] Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М. *Физические структуры как геометрии двух множеств* (ГАГУ, Горно-Алтайск, 2008).

[2] Михайличенко Г.Г. *Об одной задаче в теории физических структур*, Сиб. матем. журн. **18** (6), 1342–1355 (1977).

[3] Михайличенко Г.Г. *Решение функциональных уравнений в теории физических структур*, ДАН СССР **206** (5), 1056–1058 (1972).

[4] Кантор И.Л., Солодовников А.С. *Гиперкомплексные числа* (Наука, М., 1973).

[5] Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М. *Гиперкомплексные числа в теории физических структур*, Изв. вузов. Матем., № 10, 25–30 (2008).

[6] Кострикин А.И. *Введение в алгебру* (Наука, М., 1977).

[7] Михайличенко Г.Г. *Феноменологическая и групповая симметрия в геометрии двух множеств (теории физических структур)*, ДАН СССР **24** (1), 39–41 (1985).

[8] Михайличенко Г.Г. *Групповые свойства физических структур*, Сиб. матем. журн. (ВИНИТИ, № 1589–B89), 35 (1989).

[9] Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. *Введение в теорию физических структур* (Архимед, М., 1992).

[10] Владимиров Ю.С. *Реляционная теория пространства-времени.* Ч. 2. *Теория физических взаимодействий* (Изд-во МГУ, М., 1999).

[11] Кыров В.А. *Аффинная геометрия как физическая структура*, Журн. сиб. фед. ун-та. Матем. и физика **1** (4), 460–464 (2008).

Г.Г. Михайличенко

Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

В.А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия,

e-mail: kyrovVA@yandex.ru

G.G. Mikhailichenko and V.A. Kyrov

Hypercomplex numbers in some geometries of two sets. I

Abstract. The most important problem in the theory of phenomenologically symmetric geometries of two sets is classification of these geometries. In this work we find metric functions of these new geometries by metric functions of some known phenomenologically symmetric geometries of two sets (PS GTS) with the help of complexification by associative hypercomplex numbers. We also find equations of motion groups of these geometries and phenomenological symmetry of these geometries, i. e., functional relationship between metric functions is specified for definite finite number of arbitrary points. In particular, by single-component metric function of PS GTS of $(2,2)$, $(3,2)$, $(3,3)$ ranks we define $(n+1)$-component metric functions of the same ranks. We find finite equations of motion group and equation expressing their phenomenological symmetry.

Keywords: geometry of two sets, phenomenological symmetry, group symmetry, hyper-complex numbers.

G.G. Mikhailichenko

Gorny Altai State University,
1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000 Russia,

e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

V.A. Kyrov

Gorny Altai State University,
1 Lenkin str., Gorno-Altaisk, 649000 Russia,

e-mail: kyrovVA@yandex.ru