Г. Г. Михайличенко, Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства, *Изв. вузов. Матем.*, 1997, номер 9, 41–48

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 512.816

*Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО*

# ТРЕХМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ЛОКАЛЬНО ТРАНЗИТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА

Софус Ли в 1893 г. нашел все конечномерные группы преобразований плоскости $R^2$ [1], список которых воспроизведен также в монографии [2]. Но классификация групп преобразований необходима для отыскания феноменологически симметричных геометрических структур, в которых взаимные расстояния для определенного числа точек пространства функционально связаны [3]. В данной работе проводится полная с точностью до эквивалентности классификация трехмерных локальных групп Ли локально транзитивных преобразований пространства $R^3$. Эта классификация может быть использована для нахождения всех 3-метрических феноменологических симметричных геометрий ранга 3 в $R^3$, когда двум точкам из $R^3$ сопоставляются три числа, являющиеся двухточечными инвариантами соответствующих групп преобразований, причем девять взаимных “расстояний” для трех точек функционально связаны тремя независимыми уравнениями.

Рассмотрим две локальные $r$-мерные группы Ли $\mathfrak{G}^r(\lambda)$ и $\mathfrak{G}^r(\sigma)$ локальных преобразований $n$-мерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с одной и той же параметрической группой $\mathfrak{G}^r$

$$x' = \lambda(x, a), \quad \xi' = \sigma(\xi, a), \tag{1}$$

где $a \in \mathfrak{G}^r$, $x, x' \in \mathfrak{M}$ и $\xi, \xi' \in \mathfrak{N}$, $\lambda$ и $\sigma$ — эффективные гладкие действия $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Обозначим через

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu, \quad \Xi_\omega = \sigma^\mu_\omega(\xi)\partial/\partial \xi^\mu, \tag{2}$$

где $\omega = 1, \dots, r$; $\mu = 1, \dots, n$, инфинитезимальные операторы групп $\mathfrak{G}^r(\lambda)$ и $\mathfrak{G}^r(\sigma)$ в некоторых локальных системах координат $x = (x^1, \dots, x^n)$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ и параметров $a = (a^1, \dots, a^r)$. Поскольку группа $\mathfrak{G}^r$ действует эффективно, операторы $X_\omega$ и $\Xi_\omega$ линейно независимы с постоянными коэффициентами и образуют естественные сопряженные базисы соответствующих изоморфных $r$-мерных алгебр Ли преобразований $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с совпадающими в этих базисах структурными константами.

**Определение.** Группы преобразований $\mathfrak{G}^r(\lambda)$ и $\mathfrak{G}^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу $\mathfrak{G}^r$, называются локально эквивалентными, если существует такое локально обратимое отображение $w : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, при котором действия (1) переходят друг в друга, т. е. имеет место равенство

$$w(\lambda(x, a)) = \sigma(w(x), a)$$

для всех $x$ из некоторой области в $\mathfrak{M}$ и всех $a$ из некоторой окрестности единичного элемента $e \in \mathfrak{G}^r$.

Из теорем С. Ли о связи групп преобразований и их алгебр следует, что группы $\mathfrak{G}^r(\lambda)$ и $\mathfrak{G}^r(\sigma)$ локально эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая замена координат $x \to \xi$ в $\mathfrak{M}$, при которой операторы $x_\omega$ и $\Xi_\omega$ будут иметь одинаковые выражения. Имея это в виду, будем говорить, что эквивалентны сами алгебры Ли с базисами (2), если эквивалентны группы (1), которым эти алгебры соответствуют. Эквивалентные группы преобразований, очевидно, подобны в смысле С. Ли, но, как отмечено в [4], подобные группы не обязательно эквивалентны.

Рассмотрим трехмерную локальную группу Ли эффективных локальных преобразований трехмерного пространства $R^3 = \{x, y, z\}$. Инфинитезимальные операторы этой группы

$$X_\omega = \lambda_w(x,y,z)\partial_x + \sigma_\omega(x,y,z)\partial_y + \tau_\omega(x,y,z)\partial_z \tag{3}$$

линейно независимы и образуют естественный координатный базис трехмерной алгебры Ли преобразований $R^3$. В выражениях (3) полагаем $\omega = 1, 2, 3$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$. Действие группы $\mathfrak{G}^3$ в $R^3$ будет, очевидно, локально транзитивным в том и только том случае, если

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Полная с точностью до изоморфизма классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли была дана Бианки в 1918 г. Приведем ее здесь по монографии [5], записывая соответствующие выражения для трех возможных коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных операторов $X_1$, $X_2$, $X_3$

$$0, \quad 0, \quad 0; \tag{5}$$
$$0, \quad 0, \quad X_1; \tag{6}$$
$$0, \quad -X_1, \quad X_1 + X_2; \tag{7}$$
$$0, \quad -X_1, \quad pX_2; \tag{8}$$
$$0, \quad -X_2, \quad -X_1 + qX_2; \tag{9}$$
$$X_3, \quad X_2, \quad X_1; \tag{10}$$
$$X_3, \quad X_2, \quad -X_1, \tag{11}$$

где $-1 \leq p \leq 1$, $-2 < q < 2$.

**Теорема.** *Базисные операторы* (3) *трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локально транзитивных преобразований трехмерного пространства $R^3$, имеющей в базисе $X_1$, $X_2$, $X_3$ структуру коммутационных соотношений* (5)–(11), *в надлежаще выбранной системе локальных координат $\{x, y, z\}$ задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z; \tag{5$'$}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{6$'$}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{7$'$}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y + \partial_z; \tag{8$'$}$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x+qy)\partial_y + \partial_z; \tag{9$'$}$$

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \\ &X_2 = \operatorname{tg} y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \sec y \sin x \partial_z, \\ &X_3 = \operatorname{tg} y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \sec y \cos x \partial_z; \end{aligned} \tag{10$'$}$$

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \\ &X_2 = \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \exp y \sin x \partial_z, \\ &X_3 = \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \exp y \cos x \partial_z; , \end{aligned} \tag{11$'$}$$

*где* $-1 \leq p \leq +1$, $-2 < q < +2$.

Произведем в $R^3$ локально обратимую гладкую замену координат

$$\xi = \varphi(x,y,z), \quad \eta = \psi(x,y,z), \quad \vartheta = \varkappa(x,y,z), \tag{12}$$

причем $\partial(\varphi,\psi,\varkappa)/\partial(x,y,z) \neq 0$. В новых координатах $\xi,\eta,\vartheta$ для операторов (3) будем иметь следующие выражения:

$$X_\omega = (\lambda_\omega\varphi_x + \sigma_\omega\varphi_y + \tau_\omega\varphi_z)\partial_\xi + (\lambda_\omega\psi_x + \sigma_\omega\psi_y + \tau_\omega\psi_z)\partial_\eta + (\lambda_\omega\varkappa_x + \sigma_\omega\varkappa_y + \tau_\omega\varkappa_z)\partial_\vartheta. \tag{13}$$

Пусть функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ в (12) являются независимыми решениями системы уравнений

$$\begin{aligned} &\lambda_1\varphi_x + \sigma_1\varphi_y + \tau_1\varphi_z = 1, \\ &\lambda_1\psi_x + \sigma_1\psi_y + \tau_1\psi_z = 0, \\ &\lambda_1\varkappa_x + \sigma_1\varkappa_y + \tau_1\varkappa_z = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

в которой, очевидно, $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \tau_1^2 \neq 0$. Тогда для оператора $X_1$ получаем максимально простое выражение $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь в (13) к прежним обозначениям коэффициентов и координат, можем записать

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \\ &X_2 = \lambda_2(x,y,z)\partial_x + \sigma_2(x,y,z)\partial_y + \tau_2(x,y,z)\partial_z, \\ &X_3 = \lambda_3(x,y,z)\partial_x + \sigma_3(x,y,z)\partial_y + \tau_3(x,y,z)\partial_z. \end{aligned} \tag{15}$$

В выражениях (15) $\lambda_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\tau_1 = 0$. Система уравнений (14) с такими коэффициентами значительно упрощается: $\varphi_x = 1$, $\psi_x = 0$, $\varkappa_x = 0$, и ее независимые решения

$$\xi = x + \varphi(y,z), \quad \eta = \psi(y,z), \quad \vartheta = \varkappa(y,z), \tag{16}$$

в которых $\partial(\psi,\varkappa)/\partial(y,z) \neq 0$, определяют такую замену координат в $R^3$, в которой $X_1$ попрежнему имеет простейшую форму.

По классификации (5)–(11) коммутатор $[X_1,X_2]$ либо равен нулю, либо совпадает с оператором $X_3$. Рассмотрим сначала первый случай

$$[X_1,X_2] = 0. \tag{17}$$

Подставим в коммутатор (17) выражения (15) для операторов $X_1$ и $X_2$. В результате получаем уравнения $\lambda_{2x} = 0$, $\sigma_{2x} = 0$, $\tau_{2x} = 0$ с решениями $\lambda_2 = \lambda(y,z)$, $\sigma_2 = \sigma(y,z)$, $\tau_2 = \tau(y,z)$ и потому

$$X_2 = \lambda(y,z)\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z. \tag{18}$$

Если в операторах (15) $\sigma_2 = 0$ и $\tau_2 = 0$, то не будет выполняться условие локальной транзитивности (4), т.е. в операторе (18) должно быть $\sigma^2 + \tau^2 \neq 0$. Осуществим в нем допустимую замену координат (16)

$$X_2 = (\lambda + \sigma\varphi_y + \tau\varphi_z)\partial_\xi + (\sigma\psi_y + \tau\psi_z)\partial_\eta + (\sigma\varkappa_y + \tau\varkappa_z)\partial_\vartheta.$$

Пусть функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ являются решениями уравнений $\lambda + \sigma\varphi_y + \tau\varphi_z = 0$, $\sigma\psi_y + \tau\psi_z = 1$, $\sigma\varkappa_y + \tau\varkappa_z = 0$ с $\partial(\psi,\varkappa)/\partial(y,z) \neq 0$. Тогда для оператора $X_2$ получаем $X_2 = \partial_\eta$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к выражениям

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ &X_3 = \lambda(x,y,z)\partial_x + \sigma(x,y,z)\partial_y + \tau(x,y,z)\partial_z, \end{aligned} \tag{19}$$

с допустимой заменой координат

$$\xi = x + \varphi(z), \quad \eta = y + \psi(z), \quad \vartheta = \varkappa(z), \tag{20}$$

в которой $\varkappa'(z) \neq 0$.

Обратимся теперь ко второму коммутатору $[X_3, X_1]$, который для случая (17) согласно классификации (5)–(11) может быть равен 0, $-X_1$, $-X_2$. Пусть

$$[X_3, X_1] = 0. \tag{21}$$

Подставляя операторы (19) в коммутатор (21), получаем уравнения $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$ с решениями $\lambda = \lambda(y,z)$, $\sigma = \sigma(y,z)$, $\tau = \tau(y,z)$, т. е. вместо (19) можем записать

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ &X_3 = \lambda(y,z)\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z. \end{aligned} \tag{22}$$

Выясним теперь, какие возникают дополнительные ограничения на выражения (22), если третий коммутатор обращается в нуль: $[X_2, X_3] = 0$. Подставляя в это условие операторы (22), получаем уравнения $\lambda_y = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_y = 0$ и, соответственно для оператора $X_3$ выражение

$$X_3 = \lambda(z)\partial_x + \sigma(z)\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (20)

$$X_3 = (\lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (\sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial\vartheta.$$

По условию (4) $\tau \neq 0$ и потому функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ можно взять из решений уравнений $\lambda + \tau\varphi' = 0$, $\sigma + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$. В результате получаем $X_3 = \partial_\vartheta$ и в прежних обозначениях операторы $(5')$.

Итак, для абелевой алгебры (5) получено с точностью до эквивалентности одно представление операторами локально транзитивных преобразований пространства $R^3$, задаваемой выражениями $(5')$ в формулировке теоремы.

Пусть, далее, операторы (22) удовлетворяют условию $[X_2, X_3] = X_1$ алгебры (6). Подставим в это условие операторы (22). В результате получаем уравнения $\lambda_y = 1$, $\sigma_y = 0$, $\tau_y = 0$, а после их интегрирования — выражение для оператора $X_3$

$$X_3 = (y + \lambda(z))\partial_x + \sigma(z)\partial_y + \tau(z)\partial_z.$$

Произведем допустимую замену координат (20)

$$X_3 = (y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (\sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку $\tau \neq 0$, функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ возьмем из решений уравнений $-\psi + \lambda + \tau\varphi' = 0$, $\sigma + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$, т. е. $X_3 = \eta\partial_\xi + \partial_\vartheta$, и в прежних обозначениях координат получаем выражения $(6')$ базисных операторов представления алгебры (6).

Выше был полностью рассмотрен случай коммутирования по условию (21) операторов $X_1$ и $X_3$. Перейдем ко второму случаю из трех возможных, когда по классификации (5)–(11) при условии (17) коммутатор

$$[X_3, X_1] = -X_1. \tag{23}$$

Подставим операторы (19), удовлетворяющие условию (17), в коммутатор (23). Интегрируя получающиеся при этом уравнения $\lambda_x = 1$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$, приходим к выражениям

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ &X_3 = (x + \lambda(y,z))\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z \end{aligned} \tag{24}$$

с допустимой заменой координат (20).

Операторы (24) удовлетворяют двум коммутационным соотношениям (17) и (23). По общей классификации (5)–(11) третий коммутатор $[X_2, X_3]$ может принимать при этом значения $X_1 + X_2$ и $pX_2$, где $-1 \leq p \leq +1$. Рассмотрим отдельно эти два случая. Предположим сначала, что

$[X_2, X_3] = X_1 + X_2$. Подставляя в это условие операторы (24) и интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 1$, $\sigma_y = 1$, $\tau_y = 0$, для оператора $X_3$ получаем выражение

$$X_3 = (x + y + \lambda(z))\partial_x + (y + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем замену координат (20)

$$X_3 = (x + y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (y + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta.$$

По условию локальной транзитивности (4) $\tau \neq 0$, и поэтому функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ можно взять из решений системы уравнений $\lambda - \varphi - \eta + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - \psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$. Для оператора $X_3$ имеем тогда выражение $X_3 = (\xi + \eta)\partial_\xi + \eta\partial_\eta + \partial_\vartheta$, и в прежних обозначениях координат получаем базисные операторы ($7'$) представления алгебры (7).

Предположим теперь, что $[X_2, X_3] = pX_2$, где $-1 \leq p \leq 1$. Подставим в этот коммутатор операторы (24). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 0$, $\sigma_y = p$, $\tau_y = 0$, для оператора $X_3$ приходим к выражению

$$X_3 = (x + \lambda(z))\partial_x + (py + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (20)

$$X_3 = (x + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (py + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку по условию (4) для операторов (24) $\tau \neq 0$, функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ можно взять из решений системы уравнений $\lambda - \varphi + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - p\psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$. Для оператора $X_3$ приходим к выражению $X_3 = \xi\partial_\xi + p\eta\partial_\eta + \partial_\vartheta$, а после возвращения к прежним обозначениям координат получаем базисные операторы ($8'$) представления алгебры (8).

Вернемся к операторам (19), подчиняющимся коммутационному соотношению (17), и потребуем, чтобы они удовлетворяли также соотношению

$$[X_3, X_1] = -X_2, \tag{25}$$

входящему в алгебру (9). Поставим в соотношение (25) операторы (19). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 1$, $\tau_x = 0$, получаем выражения

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y \\ &X_3 = \lambda(y,z)\partial_x + (x + \sigma(y,z))\partial_y + \tau(y,z)\partial_z \end{aligned} \tag{26}$$

с допустимой заменой координат (20).

Операторы (26) удовлетворяют соотношениям (17) и (25). Потребуем для них выполнения третьего коммутационного соотношения $[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2$, где $-2 < q < +2$, входящего в алгебру (9). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 1$, $\sigma_y = q$, $\tau_y = 0$, приходим к следующему выражению для оператора $X_3$:

$$X_3 = (-y + \lambda(z))\partial_x + (x + qy + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (20)

$$X_3 = (-y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (x + qy + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку $\tau \neq 0$, функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ можно взять из решений системы уравнений $\lambda + \psi + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - \varphi + q\psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$ и тогда $X_3 = -\eta\partial_\xi + (\xi + q\eta)\partial_\eta + \partial_\vartheta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы ($9'$) представления алгебры (9).

Выше был полностью рассмотрен случай, когда по классификации (5)–(11) первый коммутатор $[X_1, X_2]$ обращается в нуль. Перейдем к исследованию второго возможного случая, когда этот коммутатор отличен от нуля

$$[X_1, X_2] = X_3. \tag{27}$$

При подстановке операторов (15) в коммутационное соотношение (27) устанавливаются следующие связи: $\lambda_{2x} = \lambda_3$, $\sigma_{2x} = \sigma_3$, $\tau_{2x} = \tau_3$, используя которые перепишем эти операторы, опустив для упрощения записи индекс "2",

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(x,y,z)\partial_x + \sigma(x,y,z)\partial_y + \tau(x,y,z)\partial_z, \\ X_3 &= \lambda_x(x,y,z)\partial_x + \sigma_x(x,y,z)\partial_y + \tau_x(x,y,z)\partial_z, \end{aligned} \tag{28}$$

причем замена координат (16) по-прежнему остается допустимой.

Пусть еще для операторов (28) выполняется второе коммутационное соотношение алгебр (10) и (11)

$$[X_3, X_1] = X_2. \tag{29}$$

При подстановке операторов (28) в соотношение (29) получаем уравнения $\lambda_{xx}+\lambda = 0$, $\sigma_{xx}+\sigma = 0$, $\tau_{xx} + \tau = 0$, общие решения которых хорошо известны

$$\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= \lambda(y,z)\sin x + \mu(y,z)\cos x, \\ \sigma(x,y,z) &= \sigma(y,z)\sin x + \nu(y,z)\cos x, \\ \tau(x,y,z) &= \tau(y,z)\sin x + \rho(y,z)\cos x, \end{aligned} \tag{30}$$

где по условию локальной транзитивности (4) $\sigma^2 + \nu^2 \neq 0$, $\tau^2 + \rho^2 \neq 0$.

Произведем в операторах (28) с коэффициентами (30) допустимую замену координат (16). Функцию $\varphi$ возьмем из решений уравнения $\mu\cos\varphi - \lambda\sin\varphi + (\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi)\varphi_y + (\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi)\varphi_z = 0$. Если $\nu\sin\varphi+\sigma\cos\varphi = 0$ и $\rho\sin\varphi+\tau\cos\varphi = 0$ (и потому, очевидно, $\nu\cos\varphi-\sigma\sin\varphi \neq 0$ и $\rho\cos\varphi-\tau\sin\varphi \neq 0$), то, беря функцию $\varkappa$ из решений уравнения $(\nu\cos\varphi-\sigma\sin\varphi)\varkappa_y+(\rho\cos\varphi-\tau\sin\varphi)\varkappa_z = 0$, приходим к противоречию с условием (4). Аналогичная ситуация возникает и при $\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi = 0$ и $\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi = 0$. Поэтому будем предполагать, что $\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi \neq 0$ или $\rho\sin\varphi + \tau\cos\varphi \neq 0$ и $\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi \neq 0$ или $\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi \neq 0$. Функции $\psi$ и $\varkappa$ возьмем из решений уравнений

$$\begin{aligned} (\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi)\psi_y + (\rho\sin\varphi + \tau\cos\varphi)\psi_z = 0, \\ (\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi)\varkappa_y + (\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi)\varkappa_z = 1, \end{aligned}$$

которые всегда имеют независимые решения. Действительно, если $\nu\tau - \sigma\rho \neq 0$, то независимы отличное от постоянной решение $\psi$ первого уравнения и любое решение $\varkappa$ второго уравнения. Если же $\nu\tau - \sigma\rho \neq 0$, то независимы отличные от постоянных решения $\psi$ и $\varkappa_0$ первого уравнения и однородной части второго. Поэтому, если решение $\psi$ и некоторое частное решение $\varkappa_1$ второго уравнения окажутся зависимыми, то независимыми, очевидно, будут решения $\psi$ и $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1$. Для оператора $X_2$, например, в прежних обозначениях можем записать тогда следующее выражение:

$$X_2 = \lambda(y,z)\sin x\partial_x + \nu(y,z)\cos x\partial_y + (\tau(y,z)\sin x + \cos x)\partial_z. \tag{31}$$

Произведем в операторе (31) допустимую замену координат (16) с $\varphi(y,z) = 0$:

$$X_2 = \lambda\sin x\partial_\xi + (\tau\psi_z\sin x + (\nu\psi_y + \psi_z)\cos x\partial_\eta + (\tau\varkappa_z\sin x + (\nu\varkappa_y + \varkappa_z)\cos x)\partial_\vartheta. \tag{31$'$}$$

Если $\tau = 0$, то полагаем $\nu\varkappa_y + \varkappa_z = 0$. Если же $\tau \neq 0$, но $\nu = 0$, то полагаем $\varkappa_z = 0$. В обоих случаях приходим к противоречию с условием локальной транзитивности (4). Поэтому будем ниже предполагать, что одновременно $\tau \neq 0$ и $\nu \neq 0$.

Забегая несколько вперед, подставим операторы (28) с явным выражением (31) в третий коммутатор $[X_2, X_3] = \varepsilon X_1$ алгебр (10) и (11), где $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$ соответственно. При такой подстановке, в частности, получаем уравнение $\tau\nu_z = 0$, из которого при $\tau \neq 0$ следует $\nu_z = 0$, т. е.

$\nu(y,z)=\nu(y)$. Поэтому функции $\psi$ и $\varkappa$ в операторе (31′) возьмем из независимых решений уравнений $\psi_z=0$, $\nu\psi_y=1$, $\nu\varkappa_y+\varkappa_z=0$ с $\varkappa_z\neq 0$ и тогда $X_2=\tilde\lambda(\eta,\vartheta)\sin\xi\partial_\xi+\cos\xi\partial_\eta+\tilde\tau(\eta,\vartheta)\sin\xi\partial_\vartheta$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, для операторов $X_1$, $X_2$, $X_3$, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
&X_1=\partial_x,\\
&X_2=\lambda(y,z)\sin x\partial_x+\cos x\partial_y+\tau(y,z)\sin x\partial_z,\\
&X_3=\lambda(y,z)\cos x\partial_x-\sin x\partial_y+\tau(y,z)\cos x\partial_z,
\end{aligned}\tag{32}$$

где, очевидно, $\tau\neq 0$.

Операторы (32) удовлетворяют первым двум коммутационным соотношениям (27) и (29) алгебр (10), (11). Предположим, что они удовлетворяют еще третьему коммутационному соотношению $[X_2,X_3]=X_1$ алгебры (10). Уравнения $\lambda_y=\lambda^2+1$ и $\tau_y-\lambda\tau=0$, возникающие при этом, легко интегрируются

$$\lambda(y,z)=\operatorname{tg}(y+a(z)),\quad \tau(y,z)=\tau(z)\sec(y+a(z)),\tag{33}$$

где $a(z)$ и $\tau(z)$ — произвольные функции одной переменной, причем $\tau(z)\neq 0$.

Произведем в операторах (32) с коэффициентами (33) замену координат (20), полагая $\varphi(z)=0$, $\tau(z)\varkappa'(z)=1$, $\psi(z)=a(z)$. Для оператора $X_2$, например, в прежних обозначениях получаем такое выражение

$$X_2=\operatorname{tg}y\sin x\partial_x+(\cos x+\sigma(z)\sec y\sin x)\partial_y+\sec y\sin x\partial_z,$$

где $\sigma(z)$ — произвольная функция одной переменной. В последнем выражении произведем общую допустимую замену координат (16). Функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ при этом возьмем из решений следующей системы шести уравнений:

$$\begin{aligned}
&\varphi_y=\sin\varphi\operatorname{tg}\psi,\quad \psi_y=\cos\varphi,\quad \varkappa_y=\sin\varphi\sec\psi,\\
&\varphi_z=\cos y\cos\varphi\operatorname{tg}\psi-\sigma(z)\sin\varphi\operatorname{tg}\psi-\sin y,\\
&\psi_z=-\sin\varphi\cos y-\sigma(z)\cos\varphi,\\
&\varkappa_z=\cos y\cos\varphi\sec\psi-\sigma(z)\sin\varphi\sec\psi,
\end{aligned}$$

которая интегрируема, т. к. $\varphi_{yz}=\varphi_{zy}$, $\psi_{yz}=\psi_{zy}$, $\varkappa_{yz}=\varkappa_{zy}$, и, кроме того, $\partial(\psi,\varkappa)/\partial(y,z)\neq 0$. В результате получаем базисные операторы (10′) представления алгебры (10).

В заключение подставим операторы (32) в третий коммутатор $[X_2,X_3]=-X_1$ алгебры (11). Возникающие при этом уравнения $\lambda_y=\lambda^2-1$, $\tau_y-\lambda\tau=0$ имеют следующие четыре решения:

$$\lambda(y,z)=1,\qquad \tau(y,z)=\tau(z)\exp y;\tag{34}$$

$$\lambda(y,z)=-1,\quad \tau(y,z)=\tau(z)\exp(-y);\tag{35}$$

$$\lambda(y,z)=-\operatorname{th}(y+a(z)),\qquad \tau(y,z)=\tau(z)/\operatorname{ch}(y+a(z));\tag{36}$$

$$\lambda(y,z)=-\operatorname{cth}(y+a(z)),\quad \tau(y,z)=\tau(z)/\operatorname{sh}(y+a(z)),\tag{37}$$

где $a(z)$ и $\tau(z)$ — произвольные функции одной переменной, причем $\tau(z)\neq 0$.

Произведем в операторах (32) с коэффициентами (34) замену координат $\xi=x$, $\eta=y$, $\vartheta=\varkappa(z)$, полагая $\tau(z)\varkappa'(z)=1$. В прежних обозначениях координат получаем базисные операторы (11′) представления алгебры (11). Аналогично, если в операторах (32) с коэффициентами (35) произвести замену координат $\xi=x+\pi$, $\eta=-y$, $\vartheta=\varkappa(z)$ и положить $\tau(z)\varkappa'(z)=-1$, то в прежних обозначениях координат снова получим базисные операторы (11′).

В операторах (32) с коэффициентами (36) и (37) предварительно произведем замену координат (20), полагая $\varphi(z)=0$, $\psi(z)=a(z)$ и $\tau(z)\varkappa'(z)=1$. В прежних обозначениях для оператора $X_2$, например, получаем такое выражение

$$X_2 = \lambda(y)\sin x\partial_x + (\cos x + \sigma(z)\tau(y)\sin x)\partial_y + \tau(y)\sin x\partial_z,$$

где либо $\lambda(y) = -\operatorname{th} y$ и $\tau(y) = 1/\operatorname{ch} y$, либо $\lambda(y) = -\operatorname{cth} y$ и $\tau(y) = 1/\operatorname{sh} y$, а $\sigma(z)$ — произвольная функция одной переменной.

Далее, в последнем выражении произведем общую допустимую замену координат (16). Функции $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$ при этом возьмем из решений следующей интегрируемой системы шести уравнений:

$$\begin{aligned}
&\varphi_y = \sin\varphi, \quad \psi_y = \cos\varphi, \quad \varkappa_y = \sin\varphi\exp\psi,\\
&\varphi_z = \cos\varphi/\tau(y) - \sigma(z)\sin\varphi - \lambda(y)/\tau(y),\\
&\psi_z = -\sin\varphi/\tau(y) - \sigma(z)\cos\varphi,\\
&\varkappa_z = \cos\varphi\exp\psi/\tau(y) - \sigma(z)\sin\varphi\exp\psi,
\end{aligned}$$

для которой якобиан $\partial(\psi,\varkappa)/\partial(y,z)$ отличен от нуля. В результате снова получаем базисные операторы (11$'$) представления алгебры (11). Этим утверждением и завершается доказательство основной теоремы данной работы, сформулированной сразу после классификации (5)–(11) трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли.

## Литература


1. Lie S., Engel F. *Teorie der Transformations gruppen.* Bd. 3. – Leipzig: Teubner, 1893.
2. Владимиров С.А. *Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля.* – М.: Атомиздат, 1979. – 167 с.
3. Михайличенко Г.Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 269. – № 2. – С. 284–288.
4. Бредон Г.Э. *Введение в теорию компактных групп преобразований.* – М.: Наука, 1980. – 440 с.
5. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 496 с.



*Горно-алтайский государственный университет*



*Поступили*
*первый вариант* 11.05.1995
*окончательный вариант* 22.08.1996