Г. Г. Михайличенко, Двуметрические физические структуры ранга $(n+1,2)$, *Сиб. матем. журн.*, 1993, том 34, номер 3, 132–143

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 1993. Том 34, № 3

УДК 512.816

ДВУМЕТРИЧЕСКИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ РАНГА $(n+1,2)$

Г. Г. Михайличенко

Следуя [1], сначала дадим краткое определение s-метрической физической структуры ранга $(n+1, m+1)$, где $s \geqslant 1$ и $n \geqslant m \geqslant 1$ — целые числа. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — (точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами) гладкие многообразия размерностей sm и sn соответственно, а $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, $\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ — s-компонентная функция сопоставляющая каждой паре $\langle i\alpha\rangle \in \mathfrak{S}_f$ s вещественных чисел $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \dots, f^s(i\alpha)) \in \mathbb{R}^s$. Предполагается, что функция f гладкая, невырожденная (см. ниже) и область ее определения $\mathfrak{S}_f$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что *функция* $f = (f^1, \dots, f^s)$ *невырожденна*, если для плотных в $\mathfrak{N}^m$ и $\mathfrak{M}^n$ множеств кортежей $\langle \gamma_1 \dots \gamma_m\rangle$, $\langle k_1 \dots k_n\rangle$ длины m и n функциональные соответствия $i \mapsto (f(i\gamma_1), \dots, f(i\gamma_m)) \in \mathbb{R}^{sm}$, $\alpha \mapsto (f(k_1\alpha), \dots, f(k_n\alpha)) \in \mathbb{R}^{sn}$ имеют максимальные ранги sm и sn для плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств точек i и α соответственно.

В вводимой ниже геометрии двух множеств (физической структуре) функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$ назовем *s-метрикой*. Обозначим через $x = (x^1, \dots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{sn})$ локальные координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Тогда в некоторой окрестности пары $\langle i\alpha\rangle$ для исходной функции f можно записать ее координатное выражение:

$$f(i\alpha) = f(x^1(i), \dots, x^{sm}(i), \xi^1(\alpha), \dots, \xi^{sn}(\alpha)). \qquad (1)$$

Построим, далее, функцию F с естественной в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ областью определения $\mathfrak{S}_F$, сопоставляя кортежу $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau\rangle$ длины $m+n+2$, где $\langle ijk \dots v\rangle \in \mathfrak{M}^{n+1}$ и $\langle \alpha\beta\gamma \dots \tau\rangle \in \mathfrak{N}^{m+1}$, точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \dots, f(v\tau)) \in \mathbb{R}^{s(n+1)(m+1)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что *функция* $f = (f^1, \dots, f^s)$ *задает на множествах* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *s-метрическую физическую структуру ранга* $(n+1, m+1)$, если существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau\rangle$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle i \dots \tau\rangle)$ найдется такая гладкая ранга s функция $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_s)$, определенная в некоторой области из $\mathbb{R}^{s(n+1)(m+1)}$, содержащей точку $F(\langle i \dots \tau\rangle)$, что множество значений $F(U(\langle i \dots \tau\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, т. е.

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \dots, f(v\tau)) = 0 \qquad (2)$$

для всех кортежей из $U(\langle i \dots \tau\rangle)$.

Таким образом, локально множество $F(\mathfrak{S}_F)$ принадлежит некоторой регулярной коразмерности s поверхности в $\mathbb{R}^{s(n+1)(m+1)}$, не обязательно совпадая с ней. Будем говорить также, что *функция f задает на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую феноменологически симметричную* *геометрию,* так как уравнение (2) по терминологии работы [2] выражает принцип феноменологической симметрии. Согласно основным положениям теории физических структур [2] уравнение (2) является аналитической записью физического закона в феноменологически инвариантной форме. Этот закон выражает наличие s не сводимых друг к другу функциональных связей $\Phi_1 = 0, \dots, \Phi_s = 0$ между $s(n+1)(m+1)$ измеряемыми в опыте значениями s-компонентной физической величины $f = (f^1, \dots, f^s)$. Заметим, что не всякие функции f могут задавать физическую структуру, и потому одной из основных задач теории является их полная классификация. В случае однометрических структур ($s = 1$) такая классификация была проведена для всех $n \geqslant m \geqslant 1$ [3], а в случае двуметрических ($s = 2$) — только для $n \geqslant m = 1$ (см. ниже теорему).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что *функции* $f : \mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}^s$ *и* $f' : \mathfrak{S}_{f'} \to \mathbb{R}^s$, где $\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}_{f'} \subset \mathfrak{M}'\times\mathfrak{N}'$, *эквивалентны,* если существуют такие локальные диффеоморфизмы $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$, $w : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$, $\psi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$, что для открытого и плотного в $\mathfrak{S}_f$ множества пар $\langle i\alpha\rangle$ пары $\langle v(i), w(\alpha)\rangle$ принадлежат $\mathfrak{S}_{f'}$ и имеет место соотношение $\psi(f(v(i), w(\alpha))) = f(i\alpha)$. Физические структуры, задаваемые на множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ эквивалентными функциями f и f', будем называть *эквивалентными.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Два локальных диффеоморфизма $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ и $\sigma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ назовем *движением,* если при них сохраняется функция f, т. е. если для каждой пары $\langle i\alpha\rangle \in \mathfrak{S}_f$ такой, что $\langle \lambda(i), \sigma(\alpha)\rangle \in \mathfrak{S}_f$ имеет место равенство $f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha)$.

Множество всех движений есть группа, для которой функция f является двухточечным инвариантом. В работе [1] доказано, что невырожденная функция f задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ в том и только в том случае, если эта функция допускает smn-мерную локальную группу локальных движений. Последнее, более точно, означает, что в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ существуют открытые и плотные множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия smn-мерной локальной группы Ли G^{smn} в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, такие что действия указанной группы в окрестностях $U(i)$, $U(j)$ и $U(\alpha)$, $U(\beta)$ совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$ и функция f является двухточечным инвариантом:

$$f(\lambda(i, a), \sigma(\alpha, a)) = f(i\alpha), \tag{3}$$

где $a \in G^{smn}$. Если для функции f использовать координатное выражение (1) и ввести в действующей группе G^{smn} локальные параметры $a = (a^1, \dots, a^{smn})$, то уравнение (3) можно записать в следующем виде:

$$f(\lambda(x, a), \sigma(\xi, a)) = f(x, \xi), \tag{3'}$$

где $f(x, \xi) = f(x^1, \dots, x^{sm}, \xi^1, \dots, \xi^{sn})$ и опущены обозначения конкретных точек i и α.

Таким образом, на открытых и плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествах заданы изоморфные smn-мерные линейные семейства гладких векторных полей X и Ξ, замкнутые относительно операции коммутирования, т. е. алгебры Ли локальных преобразований (см. [4, § 60]). Соответствующие базисные векторные поля этих семейств запишем в операторной форме:

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi^\nu}, \tag{4}$$

где $\omega = 1, \dots, smn$; $\mu = 1, \dots, sm$; $\nu = 1, \dots, sn$, причем по «немым» индексам μ и ν проводится суммирование в указанных пределах.

Известно (см. [5, § 17]), что функция $f(x,\xi)$ будет по равенству (3) двухточечным инвариантом группы движений в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе уравнений $X_\omega f + \Xi_\omega f = 0$ с операторами (4):

$$\lambda^\mu_\omega(x)\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial x^\mu} + \sigma^\nu_\omega(\xi)\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial \xi^\nu} = 0. \tag{5}$$

Следующие три леммы относятся к случаю $m = 1$, т. е. к s-метрическим физическим структурам ранга $(n+1,2)$.

Лемма 1. *В группе движений невырожденной функции f локальное действие σ группы G^{sn} в sn-мерном многообразии $\mathfrak{N}$ транзитивно.*

Предположим противное, т. е. группа G^{sn} действует в $\mathfrak{N}$ интранзитивно. Тогда общий ранг квадратной матрицы $\sigma^\nu_\omega(\xi)$ будет меньше sn (см. [6, § 16.10]). А это означает, что найдутся такие переменные коэффициенты $c^\omega(\xi)$, не все одновременно и тождественно равные нулю, для которых выполняется равенство $c^\omega(\xi)\cdot\sigma^\nu_\omega(\xi) = 0$. При этом по системе (5) получаем уравнение

$$c^\omega(\xi)\lambda^\mu_\omega(x)\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial x^\mu} = 0, \tag{6}$$

которому удовлетворяет каждая компонента функции $f = (f^1,\dots,f^s)$. Будем рассматривать уравнение (6), записанное для $f^1,\dots,f^s$, как систему s линейных однородных уравнений относительно s неизвестных $c^\omega(\xi)\lambda^\mu_\omega(x)$, где $\mu = 1,\dots,s$ при $m = 1$. Поскольку функция f невырожденна в смысле определения 1, якобиан $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ отличен от нуля, и потому система имеет только нулевое решение: $c^\omega(\xi)\lambda^\mu_\omega(x) = 0$. Тогда для операторов X_ω по выражениям (4) имеем $c^\omega(\xi)X_\omega = 0$. Полагая в последнем соотношении $\xi = \xi_0$, т. е. фиксируя координату ξ, не входящую в X_ω, получаем линейную связь $c^\omega(\xi_0)X_\omega = 0$ с постоянными не обращающимися в нуль одновременно коэффициентами $c^\omega(\xi_0)$, что невозможно, так как базисные векторные поля X_ω, вследствие эффективности действия группы G^{sn} в многообразии $\mathfrak{M}$, линейно независимы. Данное противоречие и доказывает лемму 1.

Лемма 2. *В группе движений невырожденной функции f локальное действие λ группы G^{sn} в s-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ эквивалентно этой функции.*

Поскольку размерности группы G^{sn} и многообразия $\mathfrak{N}$ совпадают, ее локальное действие σ в $\mathfrak{N}$ ввиду леммы 1 не только транзитивно, но и просто транзитивно. А все просто транзитивные действия, как известно (см. [6, § 16.11]), подобны первой параметрической группе и, очевидно, любому ее транзитивному действию в себе, например $b \to a^{-1}b$, где $a,b \in G^{sn}$. Это означает, что найдется такой локальный диффеоморфизм $w : \mathfrak{N} \to G^{sn}$, что имеет место соотношение $\sigma(\xi,a) = w^{-1}(a^{-1}w(\xi))$, выполняющееся тождественно для всех $a \in G^{sn}$ и ξ из некоторой окрестности $U \subset \mathfrak{N}$. Подставим это соотношение в уравнение (3′): $f(\lambda(x,a), w^{-1}(a^{-1}w(\xi))) = f(x,\xi)$, положим в нем $a = w(\xi)$ и введем дополнительно обозначение $\psi(\lambda(x,w(\xi))) = f(\lambda(x,w(\xi)), w^{-1}(e))$, где $e \in G^{sn}$ — единичный элемент. В результате получаем связь между функцией f и действием λ:

$$f(x,\xi) = \psi(\lambda(x,w(\xi))), \tag{7}$$

в которой функция $\psi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ имеет, очевидно, ранг s. Установленная связь выражает эквивалентность функции f и действия λ в смысле определения 3. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Всякое невырожденное локальное действие λ группы G^{sn} в s-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ эквивалентно некоторой функции f, задающей на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую физическую структуру ранга $(n+1,2)$.*

Пусть $w : \mathfrak{N} \to G^{sn}$ — некоторый локальный диффеоморфизм. По данному действию $\lambda(x,a)$ определим функцию f следующим образом: $f(x,\xi) = \lambda(x, w(\xi))$. Покажем, что эта функция допускает sn-мерную группу движений, состоящую из локальных действий $\lambda(x,a)$ и $\sigma(\xi,a) = w^{-1}(a^{-1}w(\xi))$, т. е. для них выполняется уравнение (3). Действительно, имеем $f(\lambda(x,a),\sigma(\xi,a)) = \lambda(\lambda(x,a),w(w^{-1}(a^{-1}w(\xi)))) = \lambda(\lambda(x,a),a^{-1}w(\xi)) = \lambda(x,w(\xi)) = f(x,\xi)$. Поскольку действие λ по условию леммы невырожденно, функция f, допускающая sn-мерную группу движений будет задавать согласно [1] на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую физическую структуру ранга $(n+1,2)$. Лемма 3 доказана.

Перейдем к основной задаче настоящей работы, т. е. к полной классификации двуметрических физических структур ранга $(n+1,2)$, где $n \geqslant 1$, задаваемых на двумерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ функцией (1), когда $s=2$ и $m=1$.

В двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ локальные координаты x^1, x^2 обозначим через x, y. Согласно леммам 2, 3 любая функция $f=(f^1,f^2)$, задающая на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1,2)$, эквивалентна некоторому локальному действию $\lambda = (\lambda^1,\lambda^2)$ группы G^{2n} в $\mathfrak{M}$, а любое невырожденное в смысле определения 1 действие λ, в свою очередь, эквивалентно некоторой такой функции f. Следовательно, с точностью до эквивалентности полная классификация двуметрических физических структур ранга $(n+1,2)$ совпадает с полной классификацией невырожденных локальных действий группы G^{2n} в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$. Не ограничивая общности результатов и следуя доказательству леммы 3, как обычно будем полагать

$$\begin{aligned} f^1 &= \lambda^1(x,y,w^1(\xi),\dots,w^{2n}(\xi)),\\ f^2 &= \lambda^2(x,y,w^1(\xi),\dots,w^{2n}(\xi)), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\xi = (\xi^1,\dots,\xi^{2n})$ и $w : \mathfrak{N} \to G^{2n}$ — некоторый локальный диффеоморфизм. Однако в ряде случаев для упрощения получающихся по формуле (8) выражений удобно использовать еще и специально подобранные функцию $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и локальный диффеоморфизм $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, допускаемые определением 3. По двуметрическим физическим структурам ранга $(n+1,2)$ можно получить исчерпывающий результат, так как имеется полная классификация всех гладких локальных действий конечномерных групп Ли в плоскости, проведенная С. Ли в 1883 г. [7]. Поскольку эта классификация существенно используется в последующем изложении, мы воспроизведем ее полностью в формулировке и обозначениях самого С. Ли (см. также [8, с. 25, 26]).

Теорема С. Ли [7, с. 71–73]. *Каждая конечная непрерывная группа точечных преобразований плоскости x, y при помощи точечных преобразований подобна одной и в общем только одной из следующих групп, задаваемых генераторами ($p = \partial/\partial x, q = \partial/\partial y$).*

А. *Примитивные*:

1) $p, q, xq, xp - yq, xp + yq, x^2p + xyq, xyp + y^2q, yp$;
2) $p, q, xq, xp - yq, yp, xp + yq$;
3) $p, q, xq, xp - yq, yp$.

Б. *Импримитивные*:

4) $q, xq, p, 2xp + yq, x^2p + xyq$;

5) $q, xq, \ldots, x^r q, p, 2xp + ryq, x^2p + rxyq \quad (r > 2)$;
6) $q, xq, \ldots, x^r q, yq, p, xp, x^2p + rxyq \quad (r > 0)$;
7) $yq, p, xp, x^2p + xyq$;
8) $q, xq, \ldots, x^r q, yq, p, xp \quad (r > 0)$;
9) $q, xq, \ldots, x^r q, p, xp + cyq \quad (r > 0, c \neq 1)$;
10) $q, xq, \ldots, x^{r-1}q, p, xp + (ry + x^r)q \quad (r > 1)$;
11) $q, xq, \ldots, x^m q, e^{\alpha_k x}q, xe^{\alpha_k x}q, \ldots, x^{m_k}e^{\alpha_k x}q, yq, p$
$(k = 1, 2, \ldots, l, l > 0, l + m + m_1 + \ldots + m_l > 0, \alpha_1 = 1)$;
12) $q, xq, F_1(x)q, \ldots, F_r(x)q, yq \quad (r \geqslant 0)$;
13) $q, xq, x^2q, p, xp + yq, x^2p + 2xyq$;
14) $p, 2xp + yq, x^2p + xyq$;
15) $q, xq, \ldots, x^r q, p, xp + yq \quad (r > 0)$;
16) $q, p, xp + (x + y)q$;
17) $e^{\alpha_k x}q, xe^{\alpha_k x}q, \ldots, x^{m_k}e^{\alpha_k x}q, p$
$(\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l, l > 0, \quad l + m_1 + \ldots + m_l > l)$;
18) $q, xq, F_1(x)q, \ldots, F_r(x)q \quad (r \geqslant 0)$;
19) q, yq, y^2q, p, xp, x^2p;
20) $p + q, xp + yq, x^2p + y^2q$;
21) q, yq, y^2q, p, xp;
22) q, yq, y^2q, p;
23) q, yq, y^2q;
24) q, yq, p, xp;
25) $q, p, xp + cyq \quad (c \neq 0, 1)$;
26) q, yq, p;
27) q, yq;
28) $p, q, xp + yq$;
29) $q, xp + yq$;
30) p, q;
31) q.

Таблица теоремы построена для комплексных групп преобразований комплексной плоскости. Для действительных групп преобразований действительной плоскости нужно внести некоторые изменения (см. [7, с. 28]). К трем примитивным группам необходимо добавить еще пять:
32) $p, q, xq - yp, xp + yq, (x^2 - y^2)p + 2xyq, 2xyp + (y^2 - x^2)q$;
33) $p, q, xq - yp, xp + yq$;
34) $p, q, xq - yp + c(xp + yq)$;
35) $p + (x^2 - y^2)p + 2xyq, q + 2xyp + (y^2 - x^2)q, yp - xq$;
36) $p - (x^2 - y^2)p - 2xyq, q - 2xyp - (y^2 - x^2)q, yp - xq$
и, кроме того, группу 11 заменить группой
11′) $e^{\alpha_k x}\cos\beta_k xq, xe^{\alpha_k x}\cos\beta_k xq, \ldots, x^{m_k}e^{\alpha_k x}\cos\beta_k xq, yq,$
$e^{\alpha_k x}\sin\beta_k xq, xe^{\alpha_k x}\sin\beta_k xq, \ldots, x^{m_k}e^{\alpha_k x}\sin\beta_k xq, p,$
а группу 17 — группой
17′) $e^{\alpha_k x}\cos\beta_k xq, xe^{\alpha_k x}\cos\beta_k xq, \ldots, x^{m_k}e^{\alpha_k x}\cos\beta_k xq, p,$
$e^{\alpha_k x}\sin\beta_k xq, xe^{\alpha_k x}\sin\beta_k xq, \ldots, x^{m_k}e^{\alpha_k x}\sin\beta_k xq.$

Теорема. *Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$ существуют для $n = 1, 2, 3, 4$ и не существуют для $n \geqslant 5$. С точностью до эквивалентности функция $f = (f^1, f^2)$, задающая на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (двумерном и $2n$-мерном многообразиях) двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1, 2)$, в надлежаще выбранной системе локальных координат $(x^1, x^2) = (x, y)$ и $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \ldots) = (\xi, \eta, \mu, \nu, \ldots)$ определяется следующими выражениями:*
для $n = 1$

$$f^1 = x + \xi, \quad f^2 = y + \eta, \tag{9}$$

$$f^1 = x\xi, \quad f^2 = y\xi + \eta; \tag{10}$$

для $n = 2$

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + \nu, \quad \varepsilon = 0, \pm 1, \tag{11}$$

$$f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu, \quad c \neq 1, \tag{12}$$

$$f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln\xi + \nu, \tag{13}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu, \quad f^2 = x\eta + y\nu; \tag{14}$$

для $n = 3$

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(x + \rho) - \varepsilon(x\eta + y\xi + \nu)(y + \tau)}{(x + \rho)^2 - \varepsilon(y + \tau)^2}, \\ f^2 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(y + \tau) - (x\eta + y\xi + \nu)(x + \rho)}{(x + \rho)^2 - \varepsilon(y + \tau)^2}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$,

$$\begin{aligned} f^1 &= (x\xi + \mu)/(x + \rho), \\ f^2 &= (x\eta + y\nu + \tau)/(x + \rho), \end{aligned} \tag{16}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho, \quad f^2 = x\eta + y\nu + \tau; \tag{17}$$

для $n = 4$

$$f^1 = (x\xi + y\mu + \rho)/(x\varphi + y + \omega), \quad f^2 = (x\eta + y\nu + \tau)/(x\varphi + y + \omega). \tag{18}$$

Двуметрики (14), (17), (18), а также (12) для случая $c = 0$ в эквивалентной форме $f^1 = x\xi + y + \mu$, $f^2 = x\eta + y + \nu$, ранее и независимо от автора были обнаружены Е. Л. Лозицким (частное сообщение), остальные же впервые были найдены автором.

Сформулированная выше теорема утверждает полноту приведенной в ней классификации двуметрик. Доказательство теоремы представляет собой последовательное вычисление по соответствующим из списка 1–36 генераторам вышеприведенной классификационной таблицы С. Ли всех невырожденных локальных действий $\lambda = (\lambda^1(x, y, a^1, \ldots, a^{2n}), \lambda^2(x, y, a^1, \ldots, a^{2n}))$ группы G^{2n} в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$. Эти действия определяют по формуле (8) функцию

$$f = (f^1, f^2) = \big(\lambda^1(x, y, w^1(\xi), \ldots, w^{2n}(\xi)), \lambda^2(x, y, w^1(\xi), \ldots, w^{2n}(\xi))\big),$$

задающую на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (двумерном и $2n$-мерном многообразиях) двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1, 2)$. Приступим к доказательству.

Пусть сначала $n = 1$. В этом случае действующая группа G^2 и многообразие $\mathfrak{N}$ двумерны. Обозначим локальные координаты ξ^1, ξ^2 в многообразии $\mathfrak{N}$ через ξ, η. В приведенной выше полной классификации С. Ли имеются четыре двумерные группы преобразований плоскости, базисные векторные поля X_1, X_2 которых (генераторы по С. Ли) задаются выражениями

$$\left.\begin{aligned} &18) \quad X_1 = q, \quad X_2 = xq; \\ &27) \quad X_1 = q, \quad X_2 = yq; \\ &29) \quad X_1 = q, \quad X_2 = xp + yq; \\ &30) \quad X_1 = p, \quad X_2 = q. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

С помощью экспоненциального отображения (см., например, [9, гл. 1, § 9]) найдем соответствующие локальные действия групп G^2 в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$:

$$
\begin{aligned}
&18)\quad \lambda^1 = x, \quad \lambda^2 = y + a^2 x + a^1;\\
&27)\quad \lambda^1 = x, \quad \lambda^2 = y \exp a^2 + a^1;\\
&29)\quad \lambda^1 = x \exp a^2, \quad \lambda^2 = y \exp a^2 + a^1;\\
&30)\quad \lambda^1 = x + a^1, \quad \lambda^2 = y + a^2.
\end{aligned}
\tag{19'}
$$

Из четырех локальных действий списка (19′) только действия 29 и 30 будут невырожденными, так как для них оба якобиана $\frac{\partial(\lambda^1,\lambda^2)}{\partial(x,y)}$ и $\frac{\partial(\lambda^1,\lambda^2)}{\partial(a^1,a^2)}$ отличны от нуля. Действия 18 и 27 вырожденны, так как для них обращается в нуль второй якобиан. Вводя для действий (29) и (30) локальные диффеоморфизмы $\exp a^2 = \xi$, $a^1 = \eta$ и $a^1 = \xi$, $a^2 = \eta$, получаем выражения (10) и (9) соответственно для функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (двумерных многообразиях) двуметрическую физическую структуру ранга (2, 2).

Заметим, что вырождение действий 18 и 27 можно было бы установить сразу по выражениям соответствующих генераторов из списка (19). Действительно, ни одно из них не содержит оператор $p = \frac{\partial}{\partial x}$, и потому $\lambda^1 = x$. Но тогда $\frac{\partial(\lambda^1,\lambda^2)}{\partial(a^1,a^2)} = 0$ при любой второй компоненте $\lambda^2(x,y,a^1,a^2)$ действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, что и означает его вырождение. Аналогичные рассуждения позволят в дальнейшем сразу установить, какие генераторы классификации С. Ли определяют вырожденные локальные действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, не вычисляя их заранее с помощью экспоненциального отображения.

Пусть, далее, $n = 2$. В этом случае действующая группа G^4 и многообразие $\mathfrak{N}$ четырехмерны. Обозначим локальные координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4 в многообразии $\mathfrak{N}$ через ξ, η, μ, ν. Якобиан $\frac{\partial(\lambda^1,\lambda^2)}{\partial(x,y)}$ отличен от нуля, так как действие $\lambda(\lambda^1(x,y,a^1,a^2,a^3,a^4), \lambda^2(x,y,a^1,a^2,a^3,a^4))$ обратимо. Поэтому оно будет невырожденным, если для плотного и открытого в $\mathfrak{M}$ множества пар $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle$ будет дополнительно отличен от нуля еще и якобиан $\frac{\partial(\lambda^1(1),\lambda^2(1),\lambda^1(2),\lambda^2(2))}{\partial(a^1,a^2,a^3,a^4)}$, где, например, $\lambda^1(1) = \lambda^1(x_1,y_1,a^1,a^2,a^3,a^4)$. В классификации С. Ли имеются одиннадцать четырехмерных групп преобразований плоскости, базисные векторные поля которых задаются выражениями 7, 9, 10, 11′, 12, 15, 17′, 18, 22, 24, 33. Однако в выражениях 11′, 12, 17′, 18, 22 оператор дифференцирования $p = \frac{\partial}{\partial x}$ присутствует явно не более чем в одном из четырех генераторов, что приводит к вырождению соответствующих локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, так как в них компонента λ^1 зависит явно не более чем от одного из четырех параметров $a = (a^1,a^2,a^3,a^4)$ групп G^4. Выпишем ниже только те выражения для генераторов X_1, X_2, X_3, X_4, для которых действия невырожденны:

$$
\begin{aligned}
&7)\quad yq, p, xp, x^2p + xyq;\\
&9)\quad q, xq, p, xp + cyq, c \neq 1;\\
&10)\quad q, xq, p, xp + (2y + x^2)q;\\
&15)\quad q, xq, p, xp + yq;\\
&24)\quad q, yq, p, xp;\\
&33)\quad p, q, xq - yp, xp + yq.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Соответствующие локальные действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ групп G^4 в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ найдем по экспоненциальному отображению:

$$\begin{aligned}
&7)\quad \begin{cases} \lambda^1 = ((1-a^2+a^3)x + a^2)/(1-a^4x-a^1), \\ \lambda^2 = y/(1-a^4x-a^1); \end{cases} \\
&9)\quad \lambda^1 = x\exp a^4 + a^3, \lambda^2 = y\exp ca^4 + a^2x + a^1; \\
&10)\quad \begin{cases} \lambda^1 = x\exp a^4 + a^3, \\ \lambda^2 = y\exp 2a^4 + a^2x + x^2a^4\exp 2a^4 + a^1; \end{cases} \\
&15)\quad \lambda^1 = x\exp a^4 + a^3, \lambda^2 = y\exp a^4 + a^2x + a^1; \\
&24)\quad \lambda^1 = x\exp a^4 + a^3, \lambda^2 = y\exp a^2 + a^1; \\
&33)\quad \begin{cases} \lambda^1 = x(\exp a^4 + \cos a^3 - 1) - y\sin a^3 + a^1, \\ \lambda^2 = y(\exp a^4 + \cos a^3 - 1) + x\sin a^3 + a^1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{20'}$$

Из шести локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ списка (20), используя в основном формулу (8), найдем выражения (11)–(14) для функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (двумерном и четырехмерном многообразиях) двуметрическую физическую структуру ранга (3, 2). Двуметрики (11), где $\varepsilon = 0, +1, -1$, эквивалентны локальным действиям 15, 24, 33 соответственно, двуметрика (12) эквивалентна действию 9, двуметрика (13) — действию 10 и двуметрика (14) — действию 7. Локальные диффеоморфизмы $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $w : \mathfrak{N} \to G^4$ и функция $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, устанавливающие по определению 3 эту эквивалентность для каждой из двуметрик (11)–(14), очевидны.

Рассмотрим теперь случай $n = 3$, когда действующая группа G^6 и многообразие $\mathfrak{N}$ шестимерны. Локальные координаты $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^6$ многообразия $\mathfrak{N}$ обозначим через ξ, η, μ, ν, ρ, τ соответственно. Локальное действие $\lambda = (\lambda^1(x, y, a^1, \ldots, a^6), \lambda^2(x, y, a^1, \ldots, a^6))$ обратимо, и потому $\frac{\partial(\lambda^1, \lambda^2)}{\partial(x,y)} \neq 0$. Невырожденность действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ означает, что дополнительно для плотного и открытого в $\mathfrak{M}^3$ множества троек $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle$ отличен от нуля якобиан

$$\frac{\partial(\lambda^1(1), \lambda^2(1), \lambda^1(2), \lambda^2(2)\lambda^1(3), \lambda^2(3))}{\partial(a^1, \ldots, a^6)}.$$

В классификации С. Ли имеются тринадцать шестимерных групп преобразований плоскости, базисные векторные поля которых задаются выражениями 2, 6, 8, 9, 10, 11′, 12, 13, 15, 17′, 18, 19, 32. Однако оператор дифференцирования $p = \frac{\partial}{\partial x}$ в выражениях 8, 9, 10, 11′, 12, 15, 17′, 18 присутствует явно не более чем в двух генераторах из шести, что приводит к вырождению соответствующих локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, так как в них компонента λ^1 зависит явно не более чем от двух из шести параметров $a = (a^1, a^2, \ldots, a^6)$ групп G^6. Из перечисленных выше тринадцати выражений для генераторов $X_1, X_2, \ldots, X_6$ выпишем ниже только те, которые приводят к невырожденным действиям:

$$\begin{aligned}
&2)\quad p, q, xq, xp - yq, yp, xp + yq; \\
&6)\quad q, xq, yq, p, xp, x^2p + xyq; \\
&13)\quad q, xq, x^2q, p, xp + yq, x^2p + 2xyq; \\
&19)\quad q, yq, y^2q, p, xp, x^2p; \\
&32)\quad \begin{cases} p, q, xq - yp, xp + yq, \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq, 2xyp + (y^2 - x^2)q. \end{cases}
\end{aligned} \tag{21}$$

По экспоненциальному отображению найдем соответствующие локальные действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ групп G^6 в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{array}{l}
2)\quad \lambda^1 = a^1x + a^2y + a^3, \lambda^2 = a^4x + a^5y + a^6;\\
6)\quad \begin{cases} \lambda^1 = (a^1x + a^2)/(a^3x + a^4),\\ \lambda^2 = (a^5x + a^6y + a^7)/(a^3x + a^4),\end{cases}\\
\text{где}\quad a^1a^4 - a^2a^3 = 1;\\
13)\quad \begin{cases} \lambda^1 = (a^1x + a^2)/(a^3x + a^4),\\ \lambda^2 = (y + a^5x + a^6x^2 + a^7)/(a^3x + a^4)^2,\end{cases}\\
\text{где}\quad a^1a^4 - a^2a^3 = 1;\\
19)\quad \begin{cases} \lambda^1 = (a^1x + a^2)/(a^3x + a^4),\\ \lambda^2 = (a^5y + a^6)/(a^7y + a^8),\end{cases}\\
\text{где}\quad a^1a^4 - a^2a^3 = 1,\ a^5a^8 - a^6a^7 = 1;\\
32)\quad \lambda = (az + b)/(cz + d),
\end{array}\right\} \qquad (21')$$

где $\lambda = \lambda^1 + i\lambda^2$, $z = x + iy$, $a = a^1 + ia^2$, $b = a^3 + ia^4$, $c = a^5 + ia^6$, $d = a^7 + ia^8$, $i^2 = -1$, причем $ad - bc = 1$.

Из пяти локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ списка (21′) найдем выражения (15)–(17) для функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (двумерном и шестимерном многообразиях) двуметрическую физическую структуру ранга (4, 2). Двуметрики (15), где $\varepsilon = 0, +1, -1$, эквивалентны соответственно локальным действиям 13, 19, 32, двуметрика (16) эквивалентна действию 6 и двуметрика (17) — действию 2. Для каждой из двуметрик (15), (16), (17) легко найти локальные гомеоморфизмы $w : \mathfrak{N} \to G^6$, $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ и функцию $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, устанавливающие по определению 3 их эквивалентность с соответствующими локальными действиями из списка (21′).

Еще рассмотрим отдельно случай $n = 4$, когда действующая группа G^8 и многообразие $\mathfrak{N}$ восьмимерны. Локальные координаты $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^8$ в многообразии $\mathfrak{N}$ обозначим через ξ, η, μ, ν, ρ, τ, φ, ω. По-прежнему якобиан $\frac{\partial(\lambda^1, \lambda^2)}{\partial(x,y)}$ отличен от нуля, так как локальное действие

$$\lambda = \big(\lambda^1(x, y, a^1, \ldots, a^8), \lambda^2(x, y, a^1, \ldots, a^8)\big)$$

группы G^8 в $\mathfrak{M}$ обратимо. Поэтому невырожденность действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ означает, что дополнительно отличен от нуля якобиан

$$\frac{\partial\big(\lambda^1(1), \lambda^2(1), \ldots, \lambda^1(4), \lambda^2(4)\big)}{\partial(a^1, \ldots, a^8)}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^4$ множества четверок $\big\langle(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\big\rangle$.

В полной классификации С. Ли имеются одиннадцать восьмимерных групп преобразований плоскости, базисные векторные поля которых задаются выражениями 1, 5, 6, 8, 9, 10, 11′, 12, 15, 17′, 18. Заметим, однако, что во всех этих выражениях, кроме первого, оператор дифференцирования $p = \frac{\partial}{\partial x}$ присутствует явно не более чем в трех генераторах из восьми, что приводит к вырождению соответствующих локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, так как в них компонента λ^1 зависит явно не более чем от трех из восьми параметров $a = (a^1, a^2, \ldots, a^8)$ групп G^8. Выпишем поэтому только выражения 1 для генераторов $X_1, X_2, \ldots, X_8$:

$$p, q, xq, xp - yq, xp + yq, \quad x^2p + xyq, xyp + y^2q, yp \qquad (22)$$

и по экспоненциальному отображению найдем соответствующее невырожденное локальное действие $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ группы G^8 в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$:

$$\lambda^1 = \frac{a^1x + a^2y + a^3}{a^7x + a^8y + a^9}, \qquad \lambda^2 = \frac{a^4x + a^5y + a^6}{a^7x + a^8y + a^9}, \tag{22'}$$

причем $\det a = 1$. По локальному действию (22′) легко получаем выражение (18) для функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (двумерном и восьмимерном многообразиях) двуметрическую физическую структуру ранга (5, 2).

В заключение рассмотрим случай $n \geqslant 5$, когда размерность действующей группы G^{2n} и размерность многообразия $\mathfrak{N}$, равные $2n$, не меньше десяти. В классификации С. Ли имеются десять групп преобразований плоскости с такой размерностью. Базисные векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ для них задаются выражениями 5, 6, 8, 9, 10, 11′, 12, 15, 17′, 18. Однако во всех этих выражениях оператор дифференцирования $p = \frac{\partial}{\partial x}$ присутствует явно не более чем в трех генераторах. Соответствующие локальные действия

$$\lambda = \big(\lambda^1(x, y, a^1, \ldots, a^{2n}), \lambda^2(x, y, a^1, \ldots, a^{2n})\big)$$

оказываются вырожденными, так как первая компонента λ^1 в них зависит явно не более чем от трех из $2n$ параметров $a = (a^1, \ldots, a^{2n})$ групп G^{2n}, и потому для всех кортежей $\big\langle (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\big\rangle$ длины n из $\mathfrak{M}^n$ обращается в нуль якобиан

$$\frac{\partial\big(\lambda^1(1), \lambda^2(1), \ldots, \lambda^1(n), \lambda^2(n)\big)}{\partial(a^1, \ldots, a^8)}.$$

Поскольку для $n \geqslant 5$ нет невырожденных локальных действий групп G^{2n} в $\mathfrak{M}$, по лемме 2 нет также и невырожденных функций $f = (f^1, f^2)$, задающих на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (двумерном и $2n$-мерном многообразиях) двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1, 2)$, т. е. такие физические структуры не существуют. Теорема полностью доказана.

Ранее методом, аналогичным только что использованному в доказательстве теоремы, автор в работе [10] исследовал вещественные однометрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$, задаваемые однокомпонентной функцией f на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (одномерном и n-мерном многообразиях). Было установлено, что эти структуры существуют только для $n = 1, 2, 3$ и соответствующая функция f с точностью до эквивалентности определяется следующими выражениями:

для $n = 1$

$$f = x + \xi; \tag{23}$$

для $n = 2$

$$f = x\xi + \mu; \tag{24}$$

для $n = 3$

$$f = (x\xi + \mu)/(x + \rho). \tag{25}$$

Сравнивая результаты по однометрическим и двуметрическим физическим структурам, замечаем, что двуметрические структуры, в отличие от однометрических, не единственны, исключая случай $n = 4$. Двуметрики (11) и (15) могут быть получены комплексификацией соответствующих по рангу структуры однометрических выражений (24) и (25). Комплексификация в данном случае состоит из следующих двух этапов: а) замены вещественных функций и координат на комплексные по схеме $f \to f^1 + ef^2$, $x \to x + ey$, $\xi \to \xi + e\eta$, $\mu \to \mu + e\nu$, $\rho \to \rho + e\tau$, где e — мнимая ($e^2 = -1$), дуальная ($e^2 = 0$) или двойная ($e^2 = +1$) единицы в зависимости от типа комплексного числа; б) отделения вещественной (реальной) и невещественной (мнимой, дуальной или двойной) частей из получающихся комплексных выражений. Дополнительно заметим, что двуметрики (11) и (15) для случая $\varepsilon = +1$ являются еще и прямой композицией соответствующих однометрических выражений, так как с точностью до эквивалентности они могут быть записаны в следующем виде:

$$f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = y\eta + \nu; \tag{11'}$$

$$f^1 = (x\xi + \mu)/(x + \rho), \quad f^2 = (y\eta + \nu)/(y + \tau). \tag{15'}$$

Двуметрики (9) и (10), задающие физические структуры ранга (2, 2), можно использовать для одновременного определения в $\mathbb{R}^2$ двух бинарных операций — сложения и умножения:

$$(x, y) \oplus (\xi, \eta) = (x + \xi, y + \eta), \tag{26}$$

$$(x, y) \otimes (\xi, \eta) = (x\xi, y\xi + \eta). \tag{27}$$

Сложение (26) обычное, а умножение (27) обладает некоторыми особенностями: оно некоммутативно, ассоциативно, дистрибутивно слева, но не дистрибутивно справа. Возможно деление на (x, y), если $x \neq 0$, хотя левое и правое частные не совпадают. Единица равна $(1, 0)$, левое и правое обратные к (x, y) совпадают.

Сохраняя сложение (26), умножение в $\mathbb{R}^2$ можно определить и с помощью любой из трех двуметрик (11), (12), (13), задающих физические структуры ранга (3, 2):

$$(x, y) \otimes (\xi, \eta) = (x\xi + \varepsilon y\eta, x\eta + y\xi), \quad \varepsilon = 0, \pm 1; \tag{28}$$

$$(x, y) \otimes (\xi, \eta) = (x\xi, x\eta + y\xi^c), \quad c \neq 1; \tag{29}$$

$$(x, y) \otimes (\xi, \eta) = (x\xi, x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi). \tag{30}$$

Умножение (28) коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно. Единица умножения равна (1, 0). Деление на (x, y) возможно, если $x^2 - \varepsilon y^2 \neq 0$. Ясно, что элементы плоскости $\mathbb{R}^2$ с операциями (26) и (28) оказываются комплексными числами трех типов: обычными комплексными числами ($\varepsilon = -1$), дуальными ($\varepsilon = 0$) или двойными ($\varepsilon = +1$). Умножение (29) некоммутативно, ассоциативно, дистрибутивно справа, но не дистрибутивно слева. Деление на (x, y) возможно, если $x \neq 0$, левая единица равна (1, 0), а правая отсутствует.

Таким образом, из четырех бинарных операций (27)–(30), интерпретируемых как умножение, только операция (28) позволяет задать в $\mathbb{R}^2$ структуру кольца, так как только она дистрибутивна справа и слева по отношению к сложению (26). Операция (28) является также единственной бинарной операцией, которую можно определить при сложении (26) с помощью двуметрики (15) физической структуры ранга (4, 2). Двуметрики (16), (17) этой же структуры, а также двуметрики (14) и (18) структур ранга (3, 2) и (5, 2) не определяют при сложении (26) бинарных операций. Отмеченное обстоятельство можно рассматривать как своего рода обоснование введения трех типов комплексных чисел. Содержательный физический и математический смысл операций (27), (29), (30) пока остается неясным, поэтому полезно было бы более детально исследовать алгебры с этими операциями, а также и со всеми другими не обязательно бинарными, которые можно определить с помощью двуметрик $f = (f^1, f^2)$, задающих физические структуры разных рангов.

В заключение отметим, что коммутативные гиперкомплексные числа размерности $s \geqslant 1$ естественным образом появляются при рассмотрении s-метрических физических структур, определенных в начале этой работы.

Автор выражает благодарность А. И. Фету, Ю. Г. Решетняку, В. К. Ионину, А. А. Урману, Е. Л. Лозицкому, высказавшим ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г. Г.* Групповые свойства структур / Ред. «Сиб. мат. журн.» М., 1989. Деп. в ВИНИТИ 10.03.89, № 1584-В 89 (Реферат // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 3. С. 210).
2. *Кулаков Ю. И.* Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г. Г.). Новосибирск: НГУ, 1968.
3. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 5. с. 1056–1058.
4. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
5. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.
6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. *Lie S., Engel F.* Teorie der Transformationgruppen. Leipzig: Taubner, 1893. Bd 3.
8. *Владимиров С. А.* Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля. М.: Атомиздат, 1979.
9. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.
10. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия геометрии двух множеств // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 11. С. 1501–1506.

г. Новосибирск *Статья поступила 9 января 1992 г.*