Г. Г. Михайличенко, Тернарная физическая структура ранга $(2, 2, 2)$, *Изв. вузов. Матем.*, 1976, номер 8, 60–67

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1976 МАТЕМАТИКА № 8(171)

УДК 517.948

Г. Г. Михайличенко

ТЕРНАРНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (2, 2, 2)

Ю. И. Кулаковым была дана математическая формулировка теории физических структур [1]. В его работе приведены исходные аксиомы бинарной физической структуры ранга (m, n), где $m, n \geqslant 2$ — целые числа, на двух множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Автором [2] предложена эквивалентная формулировка аксиом для этого же случая, допускающая обобщение. В настоящей работе естественным образом вводятся аксиомы для тернарной физической структуры ранга (m, n, l) на трех множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, где m, n, $l \geqslant 2$, и функциональным методом, предложенным автором при изучении тернарной структуры на двух множествах [3], рассматривается простейший случай $m = n = l = 2$.

Пусть имеются три множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$, элементы которых обозначаются: латинскими буквами множества $\mathfrak{M}$, греческими буквами первой половины алфавита множества $\mathfrak{N}$, греческими буквами второй половины алфавита множества $\mathfrak{L}$, и определена числовая функция $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \to R$, сопоставляющая каждой тройке $\langle i, \alpha, \mu \rangle$ из прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$ действительное число $a_{i\alpha\mu} \in R$. Из соображений удобства, очевидного в дальнейшем, вместо $a_{i\alpha\mu}$ будем писать (i, α, μ),

Два элемента i, $j \in \mathfrak{M}$ будем считать эквивалентными: $i \sim j$, если для любых $\alpha \in \mathfrak{N}$ и $\mu \in \mathfrak{L}$ имеет место равенство $(i, \alpha, \mu) = (j, \alpha, \mu)$. Будем предполагать, что в множестве $\mathfrak{M}$ все элементы, эквивалентные друг другу, отождествлены, т. е., если $i \sim j$, то элементы i, $j \in \mathfrak{M}$ считаются совпадающими: $i = j$, Если же хотя бы для одного $\alpha \in \mathfrak{N}$ или $\mu \in \mathfrak{L}$ выполняется неравенство $(i, \alpha, \mu) \neq (j, \alpha, \mu)$, то элементы i, $j \in \mathfrak{M}$ будем считать различными. Аналогично определяются совпадение и различие элементов в множествах $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{L}$.

В множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$ определим топологию, введя фундаментальные системы окрестностей. Пусть $i_0 \in \mathfrak{M}$ — некоторый фиксированный элемент, который будем называть точкой, и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $P(i_0, \varepsilon)$ множество всех тех элементов $i \in \mathfrak{M}$, для которых имеет место неравенство $|(i, \alpha, \mu) - (i_0, \alpha, \mu)| < \varepsilon$ при любых $\alpha \in \mathfrak{N}$ и $\mu \in \mathfrak{L}$. Семейство всех множеств $P(i_0, \varepsilon)$ для всевозможных значений положительного числа ε принимается за фундаментальную систему окрестностей точки i_0. Произвольной окрестностью $P(i_0)$ назовем всякое подмножество из $\mathfrak{M}$, содержащее некоторую окрестность $P(i_0, \varepsilon)$ из фундаментальной системы. Аналогично вводятся окрестности $Q(\alpha_0, \varepsilon)$, $S(\mu_0, \varepsilon)$ и фундаментальные системы окрестностей точек $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$, $\mu_0 \in \mathfrak{L}$. Произвольные окрестности точек α_0 и μ_0

обозначим через $Q(\alpha_0)$ и $S(\mu_0)$. Легко проверить, что определенные выше системы окрестностей $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$, $S(\mu_0)$ удовлетворяют аксиомам окрестности и определяют на множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$ единственные топологические структуры. Топология в прямом произведении определяется естественным образом по топологии сомножителей. Элемент прямого произведения называется кортежем.

Пусть $\mathfrak{M}^m$ есть m-кратное, $\mathfrak{N}^n$ есть n-кратное и $\mathfrak{L}^l$ есть l-кратные прямые произведения множеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{L}$, соответственно, на себя, причем значения целых чисел m, n, l фиксированы. Исходя из функции $a:\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\times\mathfrak{L}\to R$, построим другую функцию $a^{(m,n,l)}:\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n\times\mathfrak{L}^l\to R^{mnl}$, сопоставляя каждому кортежу $\langle ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau\rangle\in\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n\times\mathfrak{L}^l$ длины $m+n+l$ трехмерную матрицу размера $m\times n\times l$

$$(ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau)\in R^{mnl}, \tag{1}$$

рассматриваемую как точку mnl-мерного пространства R^{mnl}. Множество значений функции $a^{(m,n,l)}:\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n\times\mathfrak{L}^l\to R^{mnl}$ обозначим: через N. Приведем для пояснения линейную развертку матрицы (1). $(ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau)=[(i,\ \alpha,\ \mu),\ \ (i,\ \alpha,\ \nu),\ldots,\ (i,\ \alpha,\ \tau),\ (i,\ \beta,\ \mu),\ldots$ $\ldots,\ (i,\ \beta,\ \tau),\ldots,\ (j,\ \alpha,\ \mu),\ldots,\ (v,\ \delta,\ \tau)]\in R^{mnl}$, т. е. $x_1=(i,\ \alpha,\ \mu)$, $x_2=$ $=(i,\ \alpha,\ \nu),\ldots,\ x_{mnl}=(v,\ \delta,\ \tau)$.

В прямом произведении $\mathfrak{N}^n\times\mathfrak{L}^l$ возьмем кортеж $\langle\alpha\beta\gamma\ldots\delta,$ $\mu\nu\sigma\ldots\tau\rangle$ длины $n+l$ и построим отображение $a[\alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau]:\mathfrak{M}\to$ $\to R^{nl}$, сопоставляя элементу $i\in\mathfrak{M}$ двумерную матрицу $(i,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta,$ $\mu\nu\sigma\ldots\tau)\in R^{nl}$ размера $n\times l$. Проекция этого отображения на подпространство меньшей размерности может быть получена вычеркиванием некоторых элементов в матрице. Например, при отображении проекции $\mathrm{pr}_{(\alpha,\ \mu)}a[\alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau]:\mathfrak{M}\to R^{nl-1}$ каждому $i\in\mathfrak{M}$ сопоставляется матрица $(i,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau)$ без ее элемента $(i,\ \alpha,\ \mu)$. Аналогично могут быть построены отображения $a[ijk\ldots v,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau]:\mathfrak{N}\to R^{ml}$ и $a[ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta]:\mathfrak{L}\to R^{mn}$ для кортежей $\langle ijk\ldots v,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau\rangle\in\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{L}^l$ и $\langle ijk\ldots v,\ \ \alpha\beta\gamma\ldots\delta\rangle\in\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n$, сопоставляющие элементам $\alpha\in\mathfrak{N}$ и $\mu\in\mathfrak{L}$ двумерные матрицы $(ijk\ldots v,\ \alpha,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau)\in R^{ml}$ и $(ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu)\in$ $\in R^{mn}$ соответственно. Можно также рассматривать проекции этих отображений, напр., $\mathrm{pr}_{(i,\ \mu)}a[ijk\ldots v,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau]:\mathfrak{N}\to R^{ml-1}$ и $\mathrm{pr}_{(i,\ \alpha)}a[ijk\ldots v,$ $\alpha\beta\gamma\ldots\tau]:\mathfrak{L}\to R^{mn-1}$. Кортеж из прямого произведения считается недиагональным, если в нем различны все элементы из одного множества.

Будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$ задана тернарная физическая структура ранга $(m,\ n,\ l)$, если выполнены следующие условия (аксиомы физической структуры).

А. Отображение $a^{(m,n,l)}:\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n\times\mathfrak{L}^l\to N$ открыто; отображения $\mathrm{pr}_{(\alpha,\mu)}a[\alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau]:\mathfrak{M}\to R^{nl-1}$, $\mathrm{pr}_{(i,\ \mu)}a[ijk\ldots v,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau]:\mathfrak{N}\to R^{ml-1}$, $\mathrm{pr}_{(i,\ \alpha)}a[ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta]:\mathfrak{L}\to R^{mn-1}$ открыты для любых недиагональных кортежей $\langle\alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau\rangle\in\mathfrak{N}^n\times\mathfrak{L}^l$, $\langle ijk\ldots v,\ \ \mu\nu\sigma\ldots\tau\rangle\in\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{L}^l$, $\langle ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta\rangle\in\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n$ соответственно.

В. Существует аналитическая функция $\Phi:R^{mnl}\to R$ такая, что множество M, задаваемое уравнением $\Phi=0$, совпадает с N, т. е.

$$\Phi[(ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau)]=0 \tag{2}$$

для любого кортежа $\langle ijk\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\ldots\delta,\ \mu\nu\sigma\ldots\tau\rangle\in\mathfrak{M}^m\times\mathfrak{N}^n\times\mathfrak{L}^l$.

С. Градиент Φ отличен от нуля всюду на M, за исключением, может быть, множества меры нуль относительно M.

Ниже будет подробно рассмотрен простейший случай $m = n = l = 2$.

Теорема. *Если четверка* $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L}, a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \to R \rangle$ *образует тернарную физическую структуру ранга* $(2, 2, 2)$, *то в любых окрестностях* $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$, $S(\mu_0)$ *произвольных точек* $i_0 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$, $\mu_0 \in \mathfrak{L}$ *найдутся элементы* $i_1 \in P(i_0)$, $\alpha_1 \in Q(\alpha_0)$, $\mu_1 \in S(\mu_0)$, *в некоторых окрестностях* $P(i_1)$, $Q(\alpha_1)$, $S(\mu_1)$ *которых множество значений функции* $a^{(2,2,2)} : [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2 \to R^8$ *может быть задано уравнением*

$$\Psi[(i, \alpha, \mu)] - \Psi[(i, \alpha, \nu)] - \Psi[(i, \beta, \mu)] + \Psi[(i, \beta, \nu)] -$$
$$- \Psi[(j, \alpha, \mu)] + \Psi[(j, \alpha, \nu)] + \Psi[(j, \beta, \mu)] - \Psi(j, \beta, \nu)] = 0, \qquad (3)$$

где $i, j \in P(i_1)$, $\alpha, \beta \in Q(\alpha_1)$, $\mu, \nu \in S(\mu_1)$, Ψ — *строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки* $(i_1, \alpha_1, \mu_1) \in R$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $m = n = l = 2$ уравнение (2) запишется в виде

$$\Phi[(ij, \alpha\beta, \mu\nu)] = 0 \qquad (2')$$

для любого кортежа $\langle ij, \alpha\beta, \mu\nu \rangle \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2$.

Согласно условию А отображение $\mathrm{pr}_{(\alpha, \mu)} a[\alpha\beta, \mu\nu] : \mathfrak{M} \to R^3$, задаваемое функцией $i \to [(i, \alpha, \nu), (i, \beta, \mu), (i, \beta, \nu)] \in R^3$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle \alpha\beta, \mu\nu \rangle \in \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2$. Проекция этого отображения на одномерное подпространство R также будет открытым отображением. Например, отображение $a[\alpha, \mu] : \mathfrak{M} \to R$, задаваемое функцией $i \to (i, \alpha, \mu)$, будет открытым для любых фиксированных элементов $\alpha \in \mathfrak{N}$ и $\mu \in \mathfrak{L}$. Но в таком случае открытым будет также отображение $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \to R$, когда элементы α и μ не зафиксированы. Пусть $i_0 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$, $\mu_0 \in \mathfrak{L}$ — произвольные элементы. Рассмотрим ε-окрестность точки $(i_0, \alpha_0, \mu_0) \in R$, определяемую неравенством $|x - (i_0, \alpha_0, \mu_0)| < \varepsilon$. Если $i \in P(i_0, \varepsilon_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_0, \varepsilon_2)$, $\mu \in S(\mu_0, \varepsilon_3)$, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \varepsilon$, то $|(i, \alpha, \mu) - (i_0, \alpha_0, \mu_0)| < \varepsilon$ для любой тройки $\langle i, \alpha, \mu \rangle \in P(i_0, \varepsilon_1) \times Q(\alpha_0, \varepsilon_2) \times S(\mu_0, \varepsilon_3)$. Таким образом, мы показали, что исходное отображение $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \to R$ является открытым и непрерывным. В соответствии с условием А отображение $a^{(2,2,2)} : \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2 \to N \subset R^8$ открыто по индуцированной на N топологии. Легко проверить, что оно является также и непрерывным.

Возьмем произвольные точки $i_0 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$, $\mu_0 \in \mathfrak{L}$ и любые их окрестности $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$, $S(\mu_0)$. Множество $N_0 \subset N$ значений функции $a^{(2,2,2)} : [P(i_0)]^2 \times [Q(\alpha_0)]^2 \times [S(\mu_0)]^2 \to R^8$ содержит открытое относительно N подмножество. В соответствии с условием С в множестве N_0 найдется точка, в которой градиент отличен от нуля. Это означает, что в самой точке и некоторой ее окрестности отлична от нуля хотя бы одна из частных производных функции Φ. Условие В позволяет найти такой недиагональный кортеж $\langle i_1 j_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1 \rangle \in [P(i_0)]^2 \times [Q(\alpha_0)]^2 \times [S(\mu_0)]^2$, для которого в соответствующей точке $(i_1 j_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1) \in N_0$ градиент Φ не равен нулю. Предположим, что в точке $(i_1 j_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1)$ отлична от нуля производная функции Φ по аргументу (j, β, ν). По теореме о неявных функциях уравнение $(2')$ может быть однозначно разрешено относительно (j, β, ν) в некоторой окрестности $U = H \times V$ точки $(i_1 j_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1) \in R^8$:

$$(j, \beta, \nu) = \Gamma[(i, \alpha\beta, \mu\nu), (j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu)], \tag{4}$$

причем функция Γ аналитична в семимерной окрестности V. В силу доказанной непрерывности функции $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L} \to R$ по введенной топологии, элементы i, $j \in \mathfrak{M}$, α, $\beta \in \mathfrak{N}$, μ, $\nu \in \mathfrak{L}$, для которых имеет место разрешение (4), будут образовывать некоторые окрестности $P(i_1)$, $P(j_1) \subset \mathfrak{M}$, $Q(\alpha_1)$, $Q(\beta_1) \subset \mathfrak{N}$, $S(\mu_1)$, $S(\nu_1) \subset \mathfrak{L}$ точек $i_1, j_1 \in P(i_0)$, α_1, $\beta_1 \in Q(\alpha_0)$, μ_1, $\nu_1 \in S(\mu_0)$ соответственно. Уравнение (4) задает некоторую окрестность $N_1 = U \cap N$ точки $(i_1 j_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1)$.

В окрестности N_1 может быть найдена такая точка, в которой все производные функции Γ, кроме, может быть, одной, отличны от нуля. Действительно, выделим в правой части уравнения (4) три аргумента (j, α, μ), (j, α, ν), (j, β, μ), содержащие общий им всем элемент j. Если $\alpha \neq \beta$, $\mu \neq \nu$, то отображение $\mathrm{pr}_{(\beta, \alpha)} a[\alpha\beta, \mu\nu]: \mathfrak{M} \to R^3$, задаваемое функцией $j \to [(j, \alpha, \mu), (j, \alpha, \nu), (j, \beta, \mu)] \in R^3$, согласно условию А открыто в R^3, т. е. три числа (j, α, μ), (j, α, ν), (j, β, μ) при фиксированных различных элементах α, $\beta \in \mathfrak{N}$ и μ, $\nu \in \mathfrak{L}$ могут рассматриваться как независимые переменные. Поскольку $i_1 \neq j_1$, $\alpha_1 \neq \beta_1$, $\mu_1 \neq \nu_1$, их окрестности $P(i_1)$, $P(j_1) \subset \mathfrak{M}$, $Q(\alpha_1)$, $Q(\beta_1) \subset \mathfrak{N}$, $S(\mu_1)$, $S(\nu_1) \subset \mathfrak{L}$ можно взять непересекающимися, т. е. для всех элементов из этих окрестностей имеем $i \neq j$, $\alpha \neq \beta$, $\mu \neq \nu$. Предположим, что в окрестности V на множестве положительной меры обращаются в нуль производные по каким-либо двум аргументам из (j, α, μ), (j, α, ν), (j, β, μ), напр., (j, α, μ) и (j, α, ν). В силу аналитичности функции Γ и ее производных это обращение в нуль будет тождественным, т. е. в уравнении (4) функция Γ не зависит от переменных (j, α, μ) и (j, α, ν):

$$(j, \beta, \nu) = \Gamma_1[(i, \alpha\beta, \mu\nu), (j, \beta, \mu)]. \tag{4'}$$

В окрестности $Q(\beta_1)$ точки β_1, где возможно представление (4′), возьмем два различных элемента β', β'', и в окрестности $S(\nu_1)$ точки ν_1 также возьмем два различных элемента ν' и ν''. Запишем уравнение (4′) для кортежей $\langle ij, \alpha\beta', \mu\nu' \rangle$, $\langle ij, \alpha\beta', \mu\nu'' \rangle$, $\langle ij, \alpha\beta'', \mu\nu' \rangle \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2$:

$$(j, \beta', \nu') = \Gamma_1[(i, \alpha\beta', \mu\nu'), (j, \beta', \mu)],$$
$$(j, \beta', \nu'') = \Gamma_1[(i, \alpha\beta', \mu\nu''), (j, \beta', \mu)],$$
$$(j, \beta'', \nu') = \Gamma_1[(i, \alpha\beta'', \mu\nu'), (j, \beta'', \mu)].$$

В соответствии с условием А отображение $\mathrm{pr}_{(\beta'', \nu'')} a[\beta'\beta'', \nu'\nu'']: \mathfrak{M} \to R^3$, задаваемое функцией $j \to [(j, \beta', \nu'), (j, \beta', \nu''), (j, \beta'', \nu')]$, должно быть открыто для недиагонального кортежа $\langle \beta'\beta'', \nu'\nu'' \rangle \in \mathfrak{N}^2 \times \mathfrak{L}^2$. Однако это невозможно, т. к. три координаты (j, β', ν'), (j, β', ν''), (j, β'', ν') являются аналитическими функциями только от двух параметров (j, β', μ) и (j, β'', μ), т. е. совокупность точек $[(j, \beta', \nu'), (j, \beta', \nu''), (j, \beta'', \nu')]$ при фиксированных элементах β', β'' и ν', ν'' образует в R^3 аналитическое множество нулевой меры, которое не открыто в R^3, что противоречит условию А. Таким образом, производные функции Γ по переменным (j, α, μ) и (j, α, ν) могут одновременно обращаться в нуль только на множестве нулевой меры и на множестве полной меры в V одновременно в нуль не обращаются. Аналогично можно показать невозможность одновременного обращения в нуль на множестве полной меры производных по другим парам аргументов из (j, α, μ), (j, α, ν), (j, β, μ). Это означает, что в окрестности V можно найти такую подокрестность V, в которой, по крайней мере, по двум аргументам из трех, содержащих элемент j, производные функции Γ отличны от нуля всюду. Тогда в окрестности $H \times V'$ функция Φ уравнения (2′) будет иметь отличные от нуля производные уже по трем аргументам, содержащим элемент j, т. к. между производными функций Φ и Γ имеется связь, напр.,

$$\Gamma_{(j, \alpha, \mu)} = -\Phi_{(j, \alpha, \mu)}/\Phi_{(j, \beta, \nu)}.$$

Аналогичные рассуждения внутри окрестности $H \times V'$ можно провести относительно переменных, содержащих элементы $i \in \mathfrak{M}$, α, $\beta \in \mathfrak{N}$, μ, $\nu \in \mathfrak{L}$. В результате оказывается, что в N_1 существует такая точка, в которой функция Φ будет иметь отличные от нуля производные по всем аргументам, кроме, может быть, одного. Не внося дополнительных усложнений в обозначение, будем предполагать, что именно точка $(i_1 j_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1)$ обладает этим свойством. Пусть, для определенности, в точке $(i_1 j_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1)$ может обращаться в нуль только производная по переменной (j, β, μ).

В некоторой окрестности точки $(i_1 j_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1)$ возможно разрешение (4), причем функция Γ будет иметь отличные от нуля производные по всем аргументам, кроме, может быть, (j, β, μ). В окрестности $P(i_1)$ точки i_1, где возможно представление (4), возьмем элемент i' и запишем уравнение (4) для кортежа $\langle i'j, \alpha\beta, \mu\nu\rangle$:

$$(j, \beta, \nu) = \Gamma[(i', \alpha\beta, \mu\nu), (j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu)]. \qquad (4'')$$

Сравнивая уравнения (4) и (4″), получаем

$$\Gamma[(i, \alpha\beta, \mu\nu), (j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu)] = \Gamma[(i', \alpha\beta, \mu\nu), (j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu)]. \qquad (5)$$

В соответствии с условием А аргументы $(j, \alpha, \mu\nu)$, (j, β, μ) можно рассматривать как независимые переменные. Фиксируя их и вводя обозначение

$$\Omega_1[(i, \alpha\beta, \mu\nu)] = \Gamma[(i, \alpha\beta, \mu\nu), (j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu)]|_{(j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu) = \text{const}},$$

приходим к уравнению

$$\Omega_1[(i, \alpha\beta, \mu\nu)] - \Omega_1[(i', \alpha\beta, \mu\nu)] = 0, \qquad (6)$$

которое задает множество N в некоторой окрестности точки $(i_1 i_1, \alpha_1\beta_1, \mu_1\nu_1)$. Заметим, что любая производная левой части уравнения (6) отлична от нуля, как это следует из свойств функции Ω_1.

Уравнение (6) можно разрешить относительно аргумента (i', β, ν). Возьмем элемент $\alpha' \in Q(\alpha_1)$. Повторив процесс получения уравнения (6) будем иметь уравнение

$$\Xi_1[(ii', \alpha, \mu\nu)] - \Xi_1[(ii', \alpha', \mu\nu)] = 0, \qquad (7)$$

задающее множество N уже в окрестности точки $(i_1 i_1, \alpha_1\alpha_1, \mu_1\nu_1)$. Наконец, аналогичное преобразование уравнения (7) с использованием элемента $\mu' \in S(\mu_1)$ приводит к уравнению

$$\Sigma[(ii', \alpha\alpha', \mu)] - \Sigma[(ii', \alpha\alpha', \mu')] = 0, \qquad (8)$$

которое задает множество N в некоторой окрестности точки $(i_1 i_1, \alpha_1\alpha_1, \mu_1\mu_1)$, соответствующей диагональному кортежу $\langle i_1 i_1, \alpha_1\alpha_1, \mu_1\mu_1\rangle$.

В дальнейшем будет удобно ввести переобозначение элементов и уравнение (8) записывать в виде

$$\Sigma[(ij,\ \alpha\beta,\ \mu)]-\Sigma[(ij,\ \alpha\beta,\ \nu)]=0, \tag{9}$$

имея в виду, что $i,\ j\in P(i_1),\ \alpha,\ \beta\in Q(\alpha_1),\ \mu,\ \nu\in S(\mu_1)$. Повторяя переход от уравнения (4) к уравнению (9) в другой последовательности, приходим еще к двум уравнениям, задающим множество N в окрестности той же точки $(i_1i_1,\ \alpha_1\alpha_1,\ \mu_1\mu_1)$:

$$\Omega[(i,\ \alpha\beta,\ \mu\nu)]-\Omega[(j,\ \alpha\beta,\ \mu\nu)]=0, \tag{10}$$

$$\Xi[(ij,\ \alpha,\ \mu\nu)]-\Xi[(ij,\ \beta,\ \mu\nu)]=0. \tag{11}$$

Отметим, что функции Ω, Ξ, Σ в уравнениях (10), (11), (9) имеют отличными от нуля все производные. Предположение о том, что уравнение (2′) могло быть разрешено относительно последнего аргумента, не вносило дополнительных ограничений. Как легко видеть, уравнения (9) — (11) могут быть получены и при других предположениях.

Каждое из уравнений (9) — (11) задает некоторую окрестность точки $(i_1i_1,\ \alpha_1\alpha_1,\ \mu_1\mu_1)$, представляющую собой множество значений функции $a^{(2,2,2)}:[P(i_1)]^2\times[Q(\alpha_1)]^2\times[S(\mu_1)]^2\to R^8$. Очевидно, что это обстоятельство налагает на функции Ω, Ξ, Σ дополнительные ограничения.

Разрешим уравнения (10), (11) относительно аргумента $(i,\ \alpha,\ \mu)$:

$$(i,\ \alpha,\ \mu)=X\{\Omega[(j,\ \alpha\beta,\ \mu\nu)],\ (i,\ \beta,\ \mu\nu),\ (i,\ \alpha,\ \nu)\}, \tag{12}$$

$$(i,\ \alpha,\ \mu)=X_1\{\Xi[(ij,\ \beta,\ \mu\nu)],\ (j,\ \alpha,\ \mu\nu),\ (i,\ \alpha,\ \nu)\},$$

откуда получаем функциональное уравнение

$$X\{\Omega[(j,\ \alpha\beta,\ \mu\nu)],\ (i,\ \beta,\ \mu\nu),\ (i,\ \alpha,\ \nu)\}=X_1\{\Xi[(ij,\ \beta,\ \mu\nu)],\ (j,\ \alpha,\ \mu\nu),\ (i,\ \alpha,\ \nu)\}, \tag{13}$$

т. к. все аргументы, входящие в равенство (13), могут рассматриваться как независимые переменные в соответствии с условием А.

Продифференцируем уравнение (13) по переменным $(j,\ \beta,\ \nu)$ $(i,\ \beta,\ \nu)$ и разделим один результат на другой:

$$\frac{X_\xi\{\Omega[(j,\ \alpha\beta,\ \mu\nu)],\ (i,\ \beta,\ \mu\nu),\ (i,\ \alpha,\ \nu)\}\,\Omega_{(j,\beta,\nu)}[(j,\ \alpha\beta,\ \mu\nu)]}{X_{(i,\beta,\nu)}\{\Omega[(j,\ \alpha\beta,\ \mu\nu)],\ (i,\ \beta,\ \mu\nu),\ (i,\ \alpha,\ \nu)\}}=$$

$$=\Xi_{(j,\beta,\nu)}[(ij,\ \beta,\ \mu\nu)]/\Xi_{(i,\beta,\nu)}[(ij,\ \beta,\ \mu\nu)], \tag{14}$$

где X_ξ — производная функции X по первому аргументу. Относительно функции X получено функционально-дифференциальное уравнение. Если в уравнении (14) зафиксировать переменные $(j,\ \beta,\ \mu\nu)$, $(j,\ \alpha,\ \nu)$ и ввести обозначение

$$\xi=\Omega[(j,\ \alpha\beta,\ \mu\nu)]\,|_{(j,\beta,\mu\nu),\,(j,\alpha,\nu)=\mathrm{const}},$$

то оно переходит в однородное уравнение в частных производных для функции X:

$$X_\xi[\xi,\ (i,\ \beta,\ \mu\nu),\ (i,\ \alpha,\ \nu)]\,A_1(\xi)+$$

$$+X_{(i,\beta,\nu)}[\xi,\ (i,\ \beta,\ \mu\nu),\ (i,\ \alpha,\ \nu)]\,B_1[(i,\ \beta,\ \mu\nu)]=0.$$

Поскольку коэффициенты A_1, B_1 не обращаются в нуль, полученное уравнение не имеет особенностей и может быть решено методом характеристик:

$$X[\xi, (i, \beta, \mu\nu), (i, \alpha, \nu)] = X_2\{A(\xi) + B[(i, \beta, \mu\nu)], (i, \alpha, \nu), (i, \beta, \mu)\}, \tag{15}$$

где X_2, A, B — аналитические функции, причем из свойств функции X вытекает, что $A_\xi(\xi) \neq 0$, $B_{(i,\beta,\nu)}[(i, \beta, \mu\nu)] \neq 0$ и отлична от нуля производная функции X_2 по первому аргументу.

Подставим решение (15) в уравнение (12)

$$(i, \alpha, \mu) = X_2\{A[\Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)]] + B[(i, \beta, \mu\nu)], (i, \alpha, \nu), (i, \beta, \mu)\}$$

и разрешим результат подстановки относительно суммы $A+B$:

$$A\{\Omega[(j, \alpha\beta, \mu\nu)]\} = -B[(i, \beta, \mu\nu)] + \Theta_1[(i, \alpha, \mu\nu), (i, \beta, \mu)].$$

Сравнивая последний результат с уравнением (10), получим

$$B[(i, \beta, \mu\nu)] - B[(j, \beta, \mu\nu)] = \Theta_1[(i, \alpha, \mu\nu), (i, \beta, \mu)] - \\ - \Theta_1[(j, \alpha, \mu\nu), (j, \beta, \mu)]. \tag{16}$$

Уравнение (16) запишем для кортежей $\langle ij, \alpha\gamma, \mu\nu\rangle$, $\langle ij, \beta\gamma, \mu\nu\rangle \in [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2$, где элемент γ взят из той же окрестности $Q(\alpha_1)$, которой принадлежат элементы α и β:

$$B[(i, \gamma, \mu\nu)] - B[(j, \gamma, \mu\nu)] = \Theta_1[(i, \alpha, \mu\nu), (i, \gamma, \mu)] - \\ - \Theta_1[(j, \alpha, \mu\nu), (j, \gamma, \mu)],$$

$$B[(i, \gamma, \mu\nu)] - B[(j, \gamma, \mu\nu)] = \\ = \Theta_1[(i, \beta, \mu\nu), (i, \gamma, \mu)] - \Theta_1[(j, \beta, \mu\nu), (j, \gamma, \mu)].$$

Левые части выписанных уравнений совпадают, а потому должны быть равны правые. Фиксируя переменные (ij, γ, μ) при условии $(i, \gamma, \mu) = (j, \gamma, \mu)$, получим

$$\Theta[(i, \alpha, \mu\nu)] - \Theta[(i, \beta, \mu\nu)] - \Theta[(j, \alpha, \mu\nu)] + \Theta[(j, \beta, \mu\nu)] = 0. \tag{17}$$

Заметим, что аналитическая функция Θ от двух переменных имеет отличные от нуля производные по каждой переменной в некоторой окрестности точки $(i_1, \alpha_1, \mu_1\mu_1) \in R^2$. Уравнение (17) является естественным следствием исходных уравнений (10) и (11).

Аналогично, рассматривая совместно уравнения (9) и (10), можно получить еще одно уравнение

$$\Lambda[(i, \alpha\beta, \mu)] - \Lambda[(i, \alpha\beta, \nu)] - \Lambda[(j, \alpha\beta, \mu)] + \Lambda[(j, \alpha\beta, \nu)] = 0, \tag{18}$$

где аналитическая функция Λ имеет отличную от нуля производную по каждой переменной из двух в некоторой окрестности точки $(i_1, \alpha_1\alpha_1, \mu_1) \in R^2$.

Уравнения (17) и (18) задают одно и то же множество значений функции $a^{(2,2,2)}: [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2 \to R^8$. Если эти уравнения представить в виде, разрешенном относительно аргумента (j, α, μ), то полученные выражения должны совпасть, т. е. уравнения (17) и (18) определяют неявно (j, α, μ) как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности (i, α, μ). Из неявных заданий (17) и (18) можно получить

$$\frac{\partial(j, \alpha, \mu)}{\partial(i, \alpha, \mu)} = \frac{\Theta_{(i,\alpha,\mu)}[(i, \alpha, \mu\nu)]}{\Theta_{(j,\alpha,\mu)}[(j, \alpha, \mu\nu)]} = \frac{\Lambda_{(i,\alpha,\mu)}[(i, \alpha\beta, \mu)]}{\Lambda_{(j,\alpha,\mu)}[(j, \alpha\beta, \mu)]}. \tag{19}$$

Вследствие отсутствия в равенстве (19) аргументов (ij, β, ν), оно представляет собой тождество по всем переменным, входящим в него. Зафиксируем в тождестве (19) все переменные, кроме $(i, \alpha, \mu\nu)$:

$$\Theta_{(i, \alpha, \mu)}[(i, \alpha, \mu\nu)] = \Psi_{(i, \alpha, \mu)}[(i, \alpha, \mu)],$$

откуда после интегрирования имеем

$$\Theta[(i, \alpha, \mu\nu)] = \Psi[(i, \alpha, \mu)] + \Psi_1[(i, \alpha, \nu)]. \tag{20}$$

Из свойств функции Θ следует, что аналитические функции Ψ и Ψ_1 имеют отличные от нуля производные в некоторой окрестности точки $(i_1, \alpha_1, \mu_1) \in R$.

Подставим функцию (20) в уравнение (17):

$$\Psi[(i, \alpha, \mu)] - \Psi[(i, \beta, \mu)] - \Psi[(j, \alpha, \mu)] + \Psi[(j, \beta, \mu)] =$$
$$= -\Psi_1[(i, \alpha, \nu)] + \Psi_1[(i, \beta, \nu)] + \Psi_1[(j, \alpha, \nu)] - \Psi_1[(j, \beta, \nu)]. \tag{21}$$

В уравнении (21) можно положить $\mu = \nu$, т. к. $\mu, \nu \in S(\mu_1)$:

$$\Psi[(i, \alpha, \nu)] - \Psi[(i, \beta, \nu)] - \Psi[(j, \alpha, \nu)] + \Psi[(j, \beta, \nu)] =$$
$$= -\Psi_1[(i, \alpha, \nu)] + \Psi_1[(i, \beta, \nu)] + \Psi_1[(j, \alpha, \nu)] - \Psi_1[(j, \beta, \nu)]. \tag{22}$$

Сопоставляя уравнение (21) и соотношение (22), приходим к уравнению (3), которое задает множество значений функции $a^{(2,2,2)}: [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \times [S(\mu_1)]^2 \to R^8$, при этом $i, j \in P(i_1)$, $\alpha, \beta \in Q(\alpha_1)$, $\mu, \nu \in S(\mu_1)$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в схеме тернарных физических структур ранга (m, n, l) полученный здесь результат, как показывают предварительные исследования, является единственно возможным, т. е. тернарные физические структуры существуют только в простейшем случае $m = n = l = 2$, в противоположность бинарным физическим структурам ранга (m, n), которые существуют для $m = n \geqslant 2$, $m = n + 1 \geqslant 3$, $n = m + 1 \geqslant 3$, $m = n + 2 = 4$, $n = m + 2 = 4$ (см. [2]). Указанное отличие бинарных и тернарных структур позволяет понять особую роль, которую играют бинарные отношения в физике и математике.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Г. Решетняку за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю. И. Математическая формулировка теории физических структур. Сиб. матем. журн., т. XII, № 5, 1971, с. 1142—1145.

2. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. ДАН СССР, т. 206, № 5, 1972, с. 1056—1058.

3. Михайличенко Г. Г. Тернарная физическая структура ранга (3, 2) Укр. матем. журн., т. 22, № 6, 1970, с. 837—841.

г. Новосибирск

Поступила
6 XII 1972