Г. Г. Михайличенко, Простейшие полиметрические геометрии. I, *Сиб. матем. журн.*, 1998, том 39, номер 2, 377–395

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 1998. Том 39, № 2

УДК 512.816

ПРОСТЕЙШИЕ ПОЛИМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ. I

Г. Г. Михайличенко

Полиметрические геометрии, т. е. геометрии с более чем одним расстоянием, естественно возникают в теории физических структур Ю. И. Кулакова [1]. Дело в том, что в рамках этой теории расстояние понимается в самом общем смысле как числовая функция пары точек, причем все взаимные расстояния для некоторого конечного числа точек по аксиоме так называемой феноменологической симметрии должны быть функционально связаны. Следующий физический пример подтверждает, в частности, содержательность понятия двуметрической геометрии, делая ее возможным объектом точного определения и математического исследования.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество равновесных состояний некоторой термодинамической системы, задаваемых двумя параметрами P и V, т. е. давлением и объемом. Каждой паре состояний $\langle ij\rangle \in \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$, взятых в определенном порядке, сопоставим два числа $f^1(ij) = A_{PV}(i\mapsto j)$ и $f^2(ij) = A_{VP}(i\mapsto j)$, равных работе внешних сил по переводу системы из состояния i в состояние j сначала по изобаре, а потом по изохоре в первом случае (процесс PV) и сначала по изохоре, а затем по изобаре — во втором (процесс VP). Если состояния i и j задаются параметрами $P(i), V(i)$ и $P(j), V(j)$, то для величин $f^1(ij)$ и $f^2(ij)$ имеем следующие выражения:

$$f^1(ij) = P(i)(V(i) - V(j)), \quad f^2(ij) = P(j)(V(i) - V(j)). \tag{1}$$

Числа $f^1(ij)$ и $f^2(ij)$ будем называть *расстояниями* (соответственно первым и вторым) от точки i до точки j, а саму функцию $f : \mathfrak{M}\times\mathfrak{M} \to R^2$, где $f = (f^1, f^2)$, — *двуметрикой*. Говорить об обычных метрических аксиомах в случае двуметрики не всегда уместно, хотя для конкретной двуметрики (1) аксиома симметрии, например, выполняется в следующем смысле: $f^1(ji) = -f^2(ij)$. Не совсем ясно, как интерпретировать для двуметрики неравенство треугольника. Кроме того, расстояния $f^1(ij)$ и $f^2(ij)$ не обязательно положительно определенны и могут обращаться в нуль не только для совпадающих точек i и j. Поэтому ниже удобно будет двуметрику $f = (f^1, f^2)$ понимать как некоторую функцию пары точек, на которую наложены достаточно общие и естественные условия гладкости и невырожденности.

Рассмотрим, далее, три состояния $i, j, k \in \mathfrak{M}$, взятых в определенном порядке, т. е. тройку $\langle ijk\rangle \in \mathfrak{M}^3$, и выпишем все шесть расстояний для пар $\langle ij\rangle, \langle ik\rangle, \langle jk\rangle$, в которых порядок состояний определяется их следованием в исходном кортеже $\langle ijk\rangle$. Кроме выражений (1) будем иметь еще четыре выражения:

$$\begin{aligned} f^1(ik) = P(i)(V(i) - V(k)), \quad f^2(ik) = P(k)(V(i) - V(k)), \\ f^1(jk) = P(j)(V(j) - V(k)), \quad f^2(jk) = P(k)(V(j) - V(k)). \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая из шести расстояний (1), (2) шесть параметров $P(i)$, $V(i)$, $P(j)$, $V(j)$, $P(k)$, $V(k)$ трех состояний i, j, k, сравнительно нетрудно получить две независимые функциональные связи между этими расстояниями:

$$\begin{vmatrix} 0 & -f^2(ij) & -f^2(ik) \\ f^1(ij) & 0 & -f^2(jk) \\ f^1(ik) & f^1(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{3а}$$

$$\begin{vmatrix} f^1(ij) & f^1(jk) & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & 0 & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & -f^2(ij) & -f^2(jk) \end{vmatrix} = 0. \tag{3б}$$

Наличие двух соотношений (3а) и (3б) между шестью расстояниями (1), (2) для любой тройки состояний $\langle ijk\rangle \in \mathfrak{M}^3$ означает в терминологии теории физических структур, что исходная функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ задает на множестве состояний $\mathfrak{M}$ двуметрическую физическую структуру ранга 3 или двуметрическую феноменологически симметричную геометрию того же ранга.

В работе [2] автор, следуя идеям Ю. И. Кулакова [3], дал определение однометрических физических структур, т. е. феноменологически симметричных геометрий с одним расстоянием. Там же было показано, что метрика $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ допускает нетривиальную локальную группу Ли локальных движений, сохраняющих расстояние между двумя точками. Аналогичная ситуация должна иметь место и в случае двуметрических геометрий, а также и s-метрических, где $s \geqslant 2$, к определению которых мы ниже перейдем. Используя групповую симметрию этих геометрий, можно в некоторых частных случаях построить их полную классификацию, что и будет сделано во второй части работы для двуметрических и триметрических феноменологически симметричных геометрий наименьшего ранга 3.

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$, являющееся sn-мерным гладким многообразием, где $s \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$ — целые числа, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, а также функциональное соответствие $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^s$, сопоставляющее каждой паре $\langle ij\rangle$ из области его определения $\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(ij) = (f^1(ij), \ldots, f^s(ij)) \in \mathbb{R}^s$. Функциональное соответствие $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем называть *s-метрикой*, не требуя, однако, положительной определенности ее компонент и выполнения аксиом обычной 1-метрики. Заметим, что в общем случае функциональное соответствие f не является функцией, т. е. не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляется s чисел, но в дальнейшем удобно в явной записи s-расстояния $f(ij)$ подразумевать, что $\langle ij\rangle \in \mathfrak{S}_f$.

Обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}$, через $U(\langle ij\rangle)$ — окрестность пары $\langle ij\rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ и аналогично будем обозначать окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}$ на себя. Для некоторого кортежа $\langle k_1 \ldots k_n\rangle \in \mathfrak{M}^n$ длины n введем функциональные соответствия $\bar{f}^n[k_1 \ldots k_n] : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^{sn}$ и $\bar{\bar{f}}^n[k_1 \ldots k_n] : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^{sn}$, сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ точки $(f(ik_1), \ldots, f(ik_n)) \in \mathbb{R}^{sn}$ и $(f(k_1 i), \ldots, f(k_n i)) \in \mathbb{R}^{sn}$ соответственно, если $\langle ik_1\rangle, \ldots, \langle ik_n\rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $\langle k_1 i\rangle, \ldots, \langle k_n i\rangle \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения соответствий $\bar{f}^n$ и $\bar{\bar{f}}^n$ могут не совпадать друг с другом и с исходным множеством $\mathfrak{M}$. В отношении пространства $\mathfrak{M}$ и s-метрики $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будем предполагать выполнение следующих трех аксиом.

I. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функционального соответствия $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^s$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множество.

II. Функциональное соответствие f в области своего определения $\mathfrak{S}_f$, есть достаточно гладкая функция.

III. В $\mathfrak{M}^n$ плотно множество таких кортежей длины n, для которых функциональное соответствие $\bar{f}^n(\bar{\bar{f}}^n)$ имеет максимальный ранг, равный sn, в точках плотного в $\mathfrak{M}$ множества.

Достаточная гладкость означает, что в области определения непрерывна как сама s-метрика, так и все ее производные достаточно высокого порядка. Гладкую s-метрику $f = (f^1, \ldots, f^s)$, для которой выполняется аксиома III, будем называть *невырожденной*. Заметим также, что ограничения в аксиомах I–III открытыми и плотными множествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

Пусть $m = n + 2 \geqslant 3$. Введем функциональное соответствие $F : \mathfrak{M}^m \to \mathbb{R}^{sm(m-1)/2}$, сопоставляя кортежу $\langle ijk \ldots vw\rangle$ длины m из $\mathfrak{M}^m$ точку $(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $sm(m-1)/2$ расстояний для всех пар его точек: $\langle ij\rangle, \langle ik\rangle, \ldots, \langle vw\rangle$, если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения соответствия F обозначим через $\mathfrak{S}_F$. Очевидно, что область $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}^m$ множество.

Определение I. Будем говорить, что *функциональное соответствие $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$ задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ s-метрическую феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга $m = n + 2$*, если кроме аксиом I–III дополнительно имеет место следующая аксиома.

IV. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество такое, что для каждого кортежа $\langle ijk \ldots vw\rangle$ элементов этого множества длины $m = n + 2$ и некоторой окрестности $U(\langle ijk \ldots vw\rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathscr{E} \to R^s$, определенная в некоторой области $\mathscr{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $F(\langle ijk \ldots vw\rangle)$, что в ней $\operatorname{rang}\Phi = s$ и множество $F(u(\langle ijk \ldots vw\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, т. е.

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0 \tag{4}$$

для всех кортежей из $U(\langle ijk \ldots vw\rangle)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Она выражает требование, чтобы $sm(m-1)/2$ расстояний между точками любого кортежа длины $m = n+2$ из $U(\langle ijk \ldots vw\rangle)$ были функционально связаны, удовлетворяя системе s уравнений (4). Условие на $\operatorname{rang}\Phi$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (т. е. $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_s = 0$) независимы.

Если $x = (x^1, \ldots, x^{sn})$ — локальные координаты в многообразии $\mathfrak{M}$, то для s-метрики $f = (f^1, \ldots, f^s)$ в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $\langle ij\rangle \in \mathfrak{S}_f$ можно выписать явно ее локальное координатное представление

$$f(ij) = f(x(i), x(j)) = f(x^1(i), \ldots, x^{sn}(i), x^1(j), \ldots, x^{sn}(j)), \tag{5}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III. Поскольку ранги функциональных соответствий $\bar{f}^n$ и $\bar{\bar{f}}^n$, равные sn, максимальны, координаты $x(i)$ и $x(j)$ входят в представление (5) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально обратимая гладкая замена координат не приведет к уменьшению их числа, т. е. не существует такой локальной системы координат, в которой представление (5) можно записать в виде $f(ij) = f(x^1(i), \ldots, x^{n'}(i), x^1(j), \ldots, x^{n''}(j))$, где или

$n' < sn$, или $n'' < sn$. Действительно, если, например, $n' < sn$, то для любого кортежа $\langle j_1 \dots j_n \rangle \in (U(j))^n$ длины n и для любой точки из $U(i)$ ранг функционального соответствия $\bar{f}^n[j_1 \dots j_n]$ будет заведомо меньше sn, что противоречит аксиоме III. Заметим, однако, что существенная зависимость представления (5) от локальных координат $x(i)$ и $x(j)$ не гарантирует выполнения аксиомы III.

Используя (5), запишем локальное координатное представление введенного выше соответствия F:

$$f(ij) = f(x(i), x(j)), \ f(ik) = f(x(i), x(k)), \ \dots, \ f(vw) = f(x(v), x(w)), \tag{6}$$

матрица Якоби которого

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} & \dfrac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial f(ik)}{\partial x(i)} & 0 & \dfrac{\partial f(ik)}{\partial x(k)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{\partial f(vw)}{\partial x(v)} & \dfrac{\partial f(vw)}{\partial x(w)} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

имеет $sm(m-1)/2$ строк и smn столбцов. Здесь через $\frac{\partial f}{\partial x}$ обозначена матрица Якоби для соответствия $f = (f^1, \dots, f^s)$ по координатам $x = (x^1, \dots, x^{sn})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{sn}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f^s}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial f^s}{\partial x^{sn}} \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Представление (6) для соответствия F задается системой $sm(m-1)/2$ функций $f(ij), f(ik), \dots, f(vw)$, зависящих специальным образом от smn координат $x^1(i), \dots, x^{sn}(i), \dots, x^1(w), \dots, x^{sn}(w)$ всех точек кортежа $\langle ijk \dots vw \rangle$ длины $m = n+2$. Поскольку число функций в системе (6) не больше общего числа координат, наличие связи (4) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольной системы типа (6).

Соответствие F согласно его координатному представлению (6) отображает окрестность $U(\langle ijk \dots vw \rangle) \subset \mathfrak{S}_F$ в $R^{sm(m-1)/2}$. Функциональной матрицей отображения F является матрица Якоби (7) системы функций (6), а его рангом называется ранг этой матрицы.

Теорема 1. *Для того чтобы функциональное соответствие $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$, удовлетворяющее аксиомам I–III, задавало на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ s-метрическую феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга $m = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $sm(m-1)/2 - s$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Докажем сначала необходимость условия теоремы 1.

Лемма 1. *В функциональной матрице (7) отображения F с координатным представлением (6) имеется квадратная подматрица порядка $sm(m-1)/2 - s$, определитель которой отличен от нуля.*

Выделим в матрице (7) квадратную ступенчатую подматрицу, диагональными клетками которой являются следующие квадратные матрицы Якоби: для sn функций $f(ik), \dots, f(iw)$ по sn переменным $x(i)$, для sn функций $f(jk), \dots, f(jw)$ по sn переменным $x(j)$, для $s(n-1)$ функций $f(kl), \dots, f(kw)$ по некоторым $s(n-1)$ переменным из $x(k), \dots$, для

s функций $f(vw)$ по некоторым s переменным из $x(v)$. Из аксиомы III, как легко понять, следует, что для любого $r \leqslant sn$ в функциональной матрице соответствия f^n обязательно найдется минор порядка r, который не обращается в нуль. Поэтому ранг выделенной выше ступенчатой подматрицы для некоторого кортежа из $U(\langle ijk \ldots vw\rangle)$ оказывается равным $sn+sn+s(n-1)+\cdots+s = s(n^2+3n)/2 = sm(m-1)/2-s$, где $m = n+2$.

Следствие. *Ранг функциональной матрицы* (7) *не меньше* $sm(m-1)/2-s$.

Согласно аксиоме IV в любой окрестности произвольного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ найдутся такой кортеж $\langle ijk \ldots vw\rangle$ и такая его окрестность $U(\langle ijk \ldots vw\rangle)$, что множество значений $F(U(\langle ijk \ldots vw\rangle))$ будет удовлетворять уравнениям (4), причем $\operatorname{rang}\Phi = s$ в точке $F(\langle ijk \ldots vw\rangle)$. Поскольку функция Φ достаточно гладкая, можно без ограничения общности считать, что $\operatorname{rang}\Phi = s$ для всех точек области ее определения $\mathscr{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$ и, конечно же, на множестве значений $F(U(\langle ijk \ldots vw\rangle))$. Но тогда множество нулей функции Φ, но не обязательно множество $F(U(\langle ijk \ldots vw\rangle))$, будет гладкой без особых точек поверхностью в $R^{sm(m-1)/2}$ коразмерности s.

Продифференцируем уравнение (4) по каждой из smn координат $x^1(i), \ldots, x^{sn}(i), \ldots, x^1(w), \ldots, x^{sn}(w)$ точек кортежа $\langle ijk \ldots vw\rangle$. В результате получим smn линейных однородных уравнений относительно $sm(m-1)/2$ производных от компонент функции $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f(ij)} \frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} + \cdots + \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f(iw)} \frac{\partial f(iw)}{\partial x(i)} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f(iw)} \frac{\partial f(iw)}{\partial x(w)} + \cdots + \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f(vw)} \frac{\partial f(vw)}{\partial x(w)} = 0,
\end{gathered} \tag{9}$$

где $\sigma = 1, \ldots, s$,

$$\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f} = \left\| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f^1} \cdots \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f^s} \right\|,$$

а через $\frac{\partial f}{\partial x}$ обозначена матрица Якоби (8). Матрица же системы уравнений (9) совпадает с матрицей Якоби (7) системы функций (6) с точностью до транспонирования.

Лемма 2. *Ранг матрицы системы уравнений* (9) *не может быть больше чем* $sm(m-1)/2-s$.

Предположим противное, т. е. пусть ранг матрицы системы (9) равен $sm(m-1)/2-s'$, где $s' < s$. Но тогда система (9) будет иметь всего s' линейно независимых ненулевых решений, число которых, как известно, определяется разностью между числом неизвестных в системе ($= sm(m-1)/2$) и рангом ее матрицы ($= sm(m-1)/2-s'$). Однако уравнения системы (9) имеют по крайней мере s таких решений в некоторой окрестности $U(\langle ijk \ldots vw\rangle)$, так как по аксиоме IV $\operatorname{rang}\Phi = s$ в точке $F(\langle ijk \ldots vw\rangle)$. Установленное противоречие и доказывает лемму.

Из леммы 2 и следствия леммы 1 однозначно вытекает, что ранг матрицы (7) для некоторого кортежа $\langle i_1 j_1 k_1 \ldots v_1 w_1\rangle \in U(\langle i \ldots w\rangle)$ будет точно равен $sm(m-1)/2-s$. Легко понять, что множество таких кортежей плотно в $\mathfrak{S}_F$, так как плотно в $\mathfrak{S}_F$ множество кортежей $\langle ijk \ldots vw\rangle$, о которых говорится в аксиоме IV. На этом завершается доказательство необходимости условия теоремы 1.

Перейдем теперь к доказательству достаточности условия теоремы 1.

Лемма 3. *Ни для одного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы* (7), *т. е. ранг отображения F, не может быть больше $sm(m-1)/2-s$.*

Действительно, если для некоторого кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (7) будет больше $sm(m-1)/2-s$, то он в силу гладкости функций системы (6) будет больше того же значения и в какой-то его окрестности $U \subset \mathfrak{S}_F$. Но тогда в этой окрестности не найдется ни одного кортежа, для которого ранг отображения F был бы равен $sm(m-1)/2-s$, что противоречит условию доказываемой теоремы.

Пусть для кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества, о котором говорится в условии теоремы 1, ранг отображения F, задаваемого системой функций (6), равен $sm(m-1)/2-s$. Из леммы 3, очевидно, следует, что для всякой окрестности кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ ранг матрицы Якоби (7) не больше $sm(m-1)/2-s$ и равен для него этому значению. По теореме о функциональной зависимости для некоторой окрестности $U(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ существует такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathscr{E} \to R^s$, определенная в соответствующей области $\mathscr{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $F(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, в которой $\operatorname{rang}\Phi = s$, что множество $F(U(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, т. е. имеют место уравнения (4) для всех кортежей из $U(\langle ijk\ldots vw\rangle)$. Ясно также, поскольку ранг матрицы (7) для исходного кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ равен $sm(m-1)/2-s$ и максимален в окрестности $U(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, что существуют такие его окрестность $U'(\langle ijk\ldots vw\rangle) \subset U(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ и соответствующая область $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$, для которых множество значений $F(U'(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ совпадает с множеством нулей функции Φ в $\mathscr{E}'$, являясь гладкой без особых точек поверхностью в $R^{sm(m-1)/2}$ коразмерности s. Теорема 1 полностью доказана.

Рассмотрим теперь групповые свойства s-метрической феноменологически симметричной геометрии, введенной выше определением 1.

Пусть λ — взаимно однозначное отображение области $U \subset \mathfrak{M}$ на область $U' \subset \mathfrak{M}$. Гладкое преобразование

$$\lambda : U \to U' \tag{10}$$

называется *локальным движением*, если при нем сохраняется s-метрика. Последнее означает, что для любой пары $\langle ij\rangle \in \mathfrak{S}_f$ такой, что $i, j \in U$, и соответствующей пары $\langle \lambda(i), \lambda(j)\rangle$, если она принадлежит $\mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij), \tag{11}$$

выполняющееся для каждой компоненты s-метрики $f = (f^1, \ldots, f^s)$.

Множество всех движений (10) есть локальная группа, для которой s-метрика согласно равенству (11) является *двухточечным инвариантом*. Если s-метрика известна, то равенство (11) представляет собой уравнение, решая которое можно найти полную группу локальных движений (10). Нам же о s-метрике известно, что она является невырожденной и удовлетворяет некоторому уравнению (4). Но этого оказывается достаточно для установления существования группы ее движений с $sn(n+1)/2$ параметрами.

Для большей ясности последующего изложения воспроизведем в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя монографии [4, с. 435]. Пусть $\mathfrak{G}^r$ — r-мерная локальная группа Ли и U — некоторая область гладкого многообразия $\mathfrak{M}$. Допустим, что каждому элементу $a \in \mathfrak{G}^r$ поставлено в соответствие непрерывно зависящее от a гомеоморфное отображение λ_a области U на некоторую область U' многообразия $\mathfrak{M}$, относящее точке $i \in U$ некоторую точку $i' \in U'$, т. е. $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i, a)$. Будем говорить, что $\mathfrak{G}^r$ есть локальная группа Ли преобразований области U, если выполнены следующие условия: 1) единице e группы $\mathfrak{G}^r$ соответствует тождественное преобразование $\lambda(i,e)=i$ области U на себя и $\lambda(\lambda(i,a),b)=\lambda(i,ab)$, т. е. произведению элементов $a,b\in\mathfrak{G}^r$ соответствует произведение преобразований; 2) два преобразования λ_a и λ_b совпадают только тогда, когда $a=b$ (иначе это условие можно сформулировать, потребовав, чтобы преобразование λ_a было тождественным лишь при условии, что a есть единица e группы $\mathfrak{G}^r$); 3) в координатной форме $\lambda(i,a)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция точки $i\in U$ и элемента $a\in\mathfrak{G}^r$.

Определенная только что группа преобразований по условию 2 эффективна, и потому сами элементы группы $\mathfrak{G}^r$ могут считаться преобразованиями, т. е. можно говорить о r-мерной локальной группе Ли локальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, которую обозначим через $\mathfrak{G}^r(\lambda)$. Таким образом, в области U задано эффективное гладкое действие группы $\mathfrak{G}^r$, причем условия 1–3 выполняются для некоторой ее части, т. е. некоторой зависящей от U окрестности единичного элемента $e\in\mathfrak{G}^r$.

Определение 2. Будем говорить, что *функциональное соответствие $f:\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to R^s$ задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ s-метрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$*, если кроме аксиом I–III дополнительно имеет место следующая аксиома.

IV$'$. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$-мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$ такое, что действия ее в окрестностях $U(i),U(j)$ двух точек i,j совпадают в пересечении $U(i)\cap U(j)$ и что функциональное соответствие f является двухточечным инвариантом.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IV$'$, определяют локальную подвижность жестких фигур в sn-мерном пространстве $\mathfrak{M}$, аналогичную подвижности твердых тел в евклидовом пространстве. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы $\mathfrak{G}^{sn(n+1)/2}$ определены согласно аксиоме IV$'$ в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Множество пар, для которых s-метрика f определена и является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. Будем говорить также, что s-метрика f *допускает* $sn(n+1)/2$-мерную локальную группу Ли локальных движений.

Из аксиомы IV$'$ следует, что на открытом и плотном в $\mathfrak{M}$ множестве задано $sn(n+1)/2$-мерное линейное семейство гладких векторных полей X, замкнутое относительно операции коммутирования, т. е. алгебра Ли преобразований (см. [4, § 60]). В некоторой локальной системе координат базисные векторные поля этого семейства запишем в операторной форме:

$$X_\omega=\lambda^\mu_\omega(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{12}$$

где $\omega=1,\ldots,sn(n+1)/2$, а по немому индексу μ производится суммирование в пределах от 1 до sn. Функциональное соответствие $f=(f^1,\ldots,f^s)$ будет двухточечным инвариантом локальной группы Ли преобразований некоторых окрестностей $U(i),U(j)$ точек i,j в том и только в том случае, если оно покомпонентно удовлетворяет системе уравнений

$$X_\omega(i)f(ij)+X_\omega(j)f(ij)=0$$

с операторами (12):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu_\omega(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(j)} = 0, \tag{13}$$

где $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(x(i)) = \lambda^\mu_\omega(x^1(i), \ldots, x^{sn}(i))$ и аналогично для $\lambda^\mu_\omega(j)$ (см. [5, с. 229, 237]).

Если векторное поле X ненулевое, то в области его задания есть хотя бы одна точка, в которой оно отлично от нуля. Однако в других точках этой области поле X может обращаться в нуль. Если же для соответствующей группы Ли преобразований, алгебре Ли которой принадлежит поле X, s-метрика является невырожденным двухточечным инвариантом, то имеет место следующая

Лемма 4. *Множество точек, где ненулевое векторное поле X алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований, удовлетворяющей аксиоме* IV′, *отлично от нуля, открыто и плотно в $\mathfrak{M}$.*

Предположим противное. Пусть ненулевое векторное поле X имеет вид $X = a^\omega X_\omega$, где a^ω, $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$ — постоянные, не все равные нулю одновременно, в некоторой окрестности $U(i)$ точки i обращаются в нуль тождественно. Поле X ненулевое, поэтому в какой-то другой точке j, а значит, и в некоторой ее окрестности $U(j)$ оно отлично от нуля. Поскольку область $\mathfrak{S}_f$ открыта и плотна в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ по аксиоме I, можно считать, что $\langle ij \rangle \in \mathfrak{S}_f$. Тогда согласно аксиоме IV′ s-метрика f будет двухточечным инвариантом, являясь решением системы $sn(n+1)/2$ уравнений (13). С учетом того, что по предположению $X(i) = a^\omega X_\omega(i) = 0$ и $X(j) = a^\omega X_\omega(j) \neq 0$, из этой системы получаем уравнение

$$a^\omega \lambda^\mu_\omega(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(j)} = 0, \tag{13′}$$

в которое входят производные только по координатам точки j и только от этих же координат зависят коэффициенты $a^\omega \lambda^\mu_\omega(j)$ при производных, причем по крайней мере один из них отличен от нуля. Следовательно, уравнение (13′) может быть решено методом характеристик. Система уравнений характеристик для него имеет не более $sn-1$ независимых интегралов, и потому общим решением уравнения (13′) будет

$$f(ij) = f(x^1(i), \ldots, x^{sn}(i), \psi^1(j), \ldots, \psi^{n'}(j)),$$

где, например, $\psi^1(j) = \psi^1(x^1(j), \ldots, x^{sn}(j))$ и $n' \leqslant sn - 1$. Но в полученное для s-метрики f выражение sn координат точки j входят несущественным образом через $n' < sn$ функций $\psi^1(j), \ldots, \psi^{n'}(j)$, что, очевидно, противоречит аксиоме III. Таким образом, в окрестности $U(i)$ обязательно найдется точка, где исходное векторное поле отлично от нуля. Поскольку область задания поля X плотна и открыта в $\mathfrak{M}$, множество точек, где оно отлично от нуля, тоже плотно и открыто в $\mathfrak{M}$, хотя может и не совпадать с областью его задания. Лемма 4 доказана.

Следствие. *Множество точек, где базисные векторные поля X_ω, $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$, алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований, удовлетворяющей аксиоме* IV′, *одновременно отличны от нуля, открыто и плотно в $\mathfrak{M}$.*

Следствие очевидно, так как по доказанной выше лемме 4 каждое базисное векторное поле X_ω отлично от нуля на открытом и плотном в $\mathfrak{M}$ множестве, пересечение же конечного числа таких множеств открыто и плотно в $\mathfrak{M}$.

Теорема 2. *Для того чтобы функциональное соответствие* $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$, *удовлетворяющее аксиомам* I–III, *задавало на* sn*-мерном многообразии* $\mathfrak{M}$ s*-метрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени* $sn(n+1)/2$, *необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения* F *был равен* $sm(m-1)/2 - s$, *где* $m = n+2$, *на плотном в* $\mathfrak{S}_F$ *множестве.*

Докажем сначала необходимость условия теоремы 2.

Пусть $\langle ijk\ldots vw\rangle \in \mathfrak{M}^m$ такой кортеж длины $m = n+2$, что его точки $i, j, k, \ldots, v, w$ принадлежат открытому и плотному в $\mathfrak{M}$ множеству, о котором говорится в аксиоме IV$'$ определения 2. Ясно, что множество таких кортежей открыто и плотно в $\mathfrak{M}^m$, а его пересечение с $\mathfrak{S}_F$ открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\langle ijk\ldots vw\rangle \in \mathfrak{S}_F$. Согласно аксиоме IV$'$ существуют такие окрестности $U(i), U(j), \ldots, U(w)$ точек этого кортежа, что действия некоторой $sn(n+1)/2$-мерной локальной группы Ли в них сохраняет s-метрику f, определенную в каждой из окрестностей $U(i)\times U(j), U(i)\times U(k), \ldots, U(v)\times U(w)$. Возьмем теперь произвольную m-точечную фигуру, соответствующую некоторому кортежу длины m из окрестности $U(i)\times U(j)\times\cdots\times U(w) \subset \mathfrak{S}_F$. Движение этой фигуры как жесткой конструкции означает, что при действии группы $\mathfrak{G}^{sn(n+1)/2}$ в окрестностях $U(i), U(j), \ldots, U(w)$, т. е. при изменении координат ее точек, все $sm(m-1)/2$ расстояний в ней, определяемые системой функций (6), сохраняются, будучи двухточечными инвариантами. Инвариантность же функций (6) при локальных преобразованиях, задаваемых векторными полями

$$X = \lambda^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{14}$$

в окрестностях $U(i), U(j), \ldots, U(w)$, означает, что эти функции удовлетворяют следующей системе уравнений, аналогичных уравнению (13):

$$\begin{gathered}
\lambda^\mu(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(j)} = 0,\\
\lambda^\mu(i)\frac{\partial f(ik)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu(k)\frac{\partial f(ik)}{\partial x^\mu(k)} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\lambda^\mu(v)\frac{\partial f(vw)}{\partial x^\mu(v)} + \lambda^\mu(w)\frac{\partial f(vw)}{\partial x^\mu(w)} = 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Система (15) при известной s-метрике $f = (f^1, \ldots, f^s)$ может быть рассмотрена как система $sm(m-1)/2$ линейных однородных уравнений относительно $m\cdot(sn)$ компонент векторного поля (14) в некоторых окрестностях точек $i, j, k, \ldots, v, w$. Заметим, что матрица этой системы совпадает с функциональной матрицей (7) отображения F. Алгебры Ли векторных полей (14) $sn(n+1)/2$-мерны, так как такую размерность имеют согласно аксиоме IV$'$ локальные группы Ли преобразований окрестностей $U(i), U(j), \ldots, U(w)$. Система (15), следовательно, имеет решение

$$\lambda^\mu(i) = a^\omega\lambda^\mu_\omega(i), \ldots, \lambda^\mu(w) = a^\omega\lambda^\mu_\omega(w), \tag{16}$$

где a^ω — произвольные числовые коэффициенты и по индексу ω производится суммирование в пределах от 1 до $sn(n+1)/2$, причем функции $\lambda^\mu_\omega(x)$ линейно независимы по этому индексу с постоянными коэффициентами в соответствующих окрестностях каждой точки кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$.

Таким образом, система (15) имеет $sn(n+1)/2$ линейно независимых с постоянными коэффициентами ненулевых решений. Их можно выписать по общему решению (16), взяв $sn(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых векторов $(a^1, \dots, a^{sn(n+1)/2})$, например, $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$:

$$\lambda^\mu_\omega(i), \lambda^\mu_\omega(j), \dots, \lambda^\mu_\omega(w), \tag{16'}$$

где $\mu = 1, \dots, sn$ и $\omega = 1, \dots, sn(n+1)/2$.

Лемма 5. *Решения (16′) линейно независимы не только с постоянными коэффициентами, но и с переменными коэффициентами, т. е. в общем смысле.*

Предположим противное. Пусть найдутся такие переменные коэффициенты $c^\omega = c^\omega(\langle ijk \dots vw\rangle)$, $\omega = 1, \dots, sn(n+1)/2$, что имеют место следующие $m \cdot (sn)$ соотношений:

$$c^\omega \lambda^\mu_\omega(i) = 0,\ c^\omega \lambda^\mu_\omega(j) = 0,\ \dots,\ c^\omega \lambda^\mu_\omega(w) = 0, \tag{17}$$

вытекающие из предполагаемой линейной зависимости решений (16′), которые, напомним, линейно независимы с постоянными коэффициентами. Коэффициенты c^ω суть решения системы уравнений (17) и по предположению являются некоторыми функциями координат точек кортежа $\langle ijk \dots vw\rangle$, одновременно в нуль не обращающимися ни для одного из таких кортежей. Заметим, что система (17) не обязательно имеет ненулевое решение, так как в ней число уравнений больше числа неизвестных.

Рассмотрим движение произвольной фигуры $\langle k \dots vw\rangle$, содержащей n точек, и фигуры $\langle jk \dots vw\rangle$, содержащей $n+1$ точку, причем переход от первой фигуры ко второй состоит в добавлении точки j. Поскольку при движении второй фигуры сохраняются также и sn расстояний $f(jk), \dots, f(jw)$, относительно sn компонент векторного поля $X(j)$, т. е. поля (14), в некоторой окрестности $U(j)$ точки j, естественно возникает система sn линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{gathered}\lambda^\mu(j)\frac{\partial f(jk)}{\partial x^\mu(j)} = -\lambda^\mu(k)\frac{\partial f(jk)}{\partial x^\mu(k)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda^\mu(j)\frac{\partial f(jw)}{\partial x^\mu(j)} = -\lambda^\mu(w)\frac{\partial f(jw)}{\partial x^\mu(w)}.\end{gathered}$$

Ранг матрицы этой системы согласно аксиоме III равен sn по крайней мере для одного кортежа $\langle k \dots vw\rangle$ и одной точки j из соответствующих окрестностей. Решая уравнения системы, выражаем компоненты векторного поля $X(j)$ через компоненты векторных полей $X(k), \dots, X(w)$:

$$\lambda^\mu(j) = b^\mu_{1\nu}\lambda^\nu(k) + \dots + b^\mu_{n\nu}\lambda^\nu(w),$$

где $b^\mu_{\sigma\nu} = b^\mu_{\sigma\nu}(\langle jk \dots vw\rangle)$, $\sigma = 1, \dots, n$. В соответствии с решением (16) и в силу произвольности коэффициентов a^ω в нем из этих выражений получаем линейную связь:

$$\lambda^\mu_\omega(j) = b^\mu_{1\nu}\lambda^\nu_\omega(k) + \dots + b^\mu_{n\nu}\lambda^\nu_\omega(w). \tag{18}$$

Запишем подсистему из sn^2 уравнений системы (17), относящуюся к укороченному кортежу $\langle k \dots vw\rangle$ длины n:

$$c^\omega \lambda^\mu_\omega(k) = 0, \dots, c^\omega \lambda^\mu_\omega(w) = 0. \tag{17'}$$

Соответствующая подсистема системы (17) для кортежа $\langle jk\dots vw\rangle$ длины $n+1$ получается добавлением к подсистеме (17$'$) sn уравнений $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j)=0$, которые по линейной связи (18) являются следствием уравнений подсистемы (17$'$), т. е. ранги матриц подсистем системы (17), относящиеся к кортежам $\langle jk\dots vw\rangle$ и $\langle k\dots vw\rangle$, совпадают. Пусть ранг матрицы подсистемы (17$'$) равен r. Ясно, что он не превышает значения $sn(n+1)/2$ и по следствию леммы 4 не может быть меньше единицы. Однако в случае $r=sn(n+1)/2$ вся система (17) будет иметь только нулевое решение, что противоречит сделанному предположению. Если же $sn(n+1)/2=1$, то обязательно должно быть $r=sn(n+1)/2$, поэтому будем считать, что $sn(n+1)/2>1$, т. е. что или $n>1$ или $s>1$. Тогда в матрице подсистемы (17$'$) найдется квадратная подматрица ненулевого порядка $r<sn(n+1)/2$, определитель которой отличен от нуля. Возьмем подматрицу порядка $r+1$, содержащую эту квадратную подматрицу в качестве минора порядка r и одну строку из матрицы подсистемы системы (17) для кортежа $\langle jk\dots vw\rangle$, в которую входят функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$. Поскольку по доказанному выше ранг матрицы подсистемы системы (17) для кортежа $\langle jk\dots vw\rangle$ тоже равен r, определитель указанной подматрицы порядка $r+1$ должен обращаться в нуль. Раскрывая его по элементам строки, содержащей функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$, для каждого индекса $\mu=1,\dots,sn$ получаем связь

$$\tilde{c}^{\omega}(\langle k\dots vw\rangle)\lambda^{\mu}_{\omega}(j)=0,$$

где $\tilde{c}^{\omega}(\langle k\dots vw\rangle)$ есть алгебраическое дополнение к $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$, зависящее от координат точек кортежа $\langle k\dots vw\rangle$ и не зависящее от координат точки j. Заметим, что хотя бы одно из этих алгебраических дополнений тождественно в нуль не обращается. Фиксируя в полученной связи координаты точек кортежа $\langle k\dots vw\rangle$, по которым эта связь выполняется тождественно, устанавливаем, что функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$ линейно зависимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Но этот результат противоречит основному условию аксиомы IV$'$, согласно которому размерность локальной группы Ли преобразований окрестности $U(j)$ равна $sn(n+1)/2$, и потому такую же размерность имеет соответствующая алгебра Ли векторных полей $X(j)$ с базисом $X_{\omega}(j)=\lambda^{\mu}_{\omega}(j)\partial/\partial x^{\mu}(j)$, где $\omega=1,\dots,sn(n+1)/2$. Установленное противоречие и доказывает лемму 5.

Итак, по только что доказанной лемме 5 система уравнений (15) имеет $sn(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений в некоторой окрестности $U(i)\times U(j)\times\dots\times U(w)$ кортежа $\langle ijk\dots vw\rangle$. Предположим, что в этой окрестности найдется такой кортеж длины $m=n+2$, для которого ранг матрицы (7), т. е. матрицы системы (15), равен $sm(m-1)/2-s'$, где $s>s'\geqslant 0$, и этот ранг максимален. В силу гладкости s-метрики f ранг матрицы (7) будет равен $sm(m-1)/2-s'$ и в некоторой окрестности указанного кортежа, содержащейся в окрестности $U(i)\times U(j)\times\dots\times U(w)$. Как известно, максимальное число линейно независимых (для системы (15) в общем смысле) ненулевых решений системы линейных однородных уравнений равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы. В предполагаемом случае для системы (15) оно будет равно $smn-sm(m-1)/2+s'=sn(n+1)/2-(s-s')$, где $m=n+2$, т. е. меньше $sn(n+1)/2$, хотя по лемме 5 эта система имеет $sn(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений. Таким образом, ранг матрицы (7) в окрестности $U(i)\times U(j)\times\dots\times U(w)$ не может быть больше $sm(m-1)/2-s$. С другой стороны, в матрице (7) по лемме 1 имеется квадратная подматрица порядка $sm(m-1)/2-s$ с отличным от нуля определителем для некоторого кортежа из окрестности $U(i)\times U(j)\times\dots\times U(w)$. Следовательно, в любой окрестности плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей $\langle ijk\dots vw\rangle$, упомянутых в самом начале доказательства теоремы 2, найдется такой кортеж, для которого ранг матрицы (7), т. е. ранг отображения F, задаваемого системой функций (6), точно равен $sm(m-1)/2-s$. Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathfrak{S}_F$, что и завершает доказательство необходимости условия теоремы 2.

Перейдем к доказательству достаточности условия теоремы 2.

Пусть для кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ длины $m=n+2$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества, о котором говорится в условии теоремы 2, ранг отображения F с функциональной матрицей (7) равен $sm(m-1)/2-s$. Опираясь на лемму 3, можем полагать, что ранг матрицы (7) будет равен $sm(m-1)/2-s$ для всех кортежей из некоторой окрестности $U(i)\times U(j)\times\cdots\times U(w)\subset\mathfrak{S}_F$. Поскольку число столбцов в этой матрице, равное smn, больше ее ранга, между ними существует линейная связь. Запишем эту связь между столбцами по элементам каждой строки:

$$\begin{gathered}\lambda^\mu[i]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(i)}+\lambda^\mu[j]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(j)}=0,\\ \lambda^\mu[i]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^\mu(i)}+\lambda^\mu[k]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^\mu(k)}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda^\mu[v]\frac{\partial f(vw)}{\partial x^\mu(v)}+\lambda^\mu[w]\frac{\partial f(vw)}{\partial x^\mu(w)}=0,\end{gathered}\tag{19}$$

где, например, $\lambda^\mu[i]$ — коэффициент линейной зависимости при столбце с дифференцированием по координате $x^\mu(i)$, $\mu=1,\ldots,sn$, а для его отличия от компоненты $\lambda^\mu(i)$ векторного поля (14) в окрестности $U(i)$, входящей в уравнения (15), здесь использованы квадратные скобки. Соотношения (19) при известной s-метрике $f=(f^1,\ldots,f^s)$ будем рассматривать как систему $sm(m-1)/2$ линейных однородных уравнений относительно smn коэффициентов линейной зависимости $\lambda^\mu[i],\lambda^\mu[j],\ldots,$ $\lambda^\mu[w]$, которые одновременно в нуль не обращаются ни для одного кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ из окрестности $U(i)\times U(j)\times\cdots\times U(w)$. Матрица системы (19) совпадает с матрицей (7), поэтому ее ранг равен $sm(m-1)/2-s$. Максимальное число линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений системы (19) равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы, т. е. равно $sn(n+1)/2$. Выпишем общее решение системы (19):

$$\begin{gathered}\lambda^\mu[i]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(i,\langle ijk\ldots vw\rangle),\\ \lambda^\mu[j]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(j,\langle ijk\ldots vw\rangle),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda^\mu[w]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(w,\langle ijk\ldots vw\rangle),\end{gathered}\tag{20}$$

где $c^\omega=c^\omega(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ — коэффициенты общего решения в его выражении через линейно независимые ненулевые для каждого кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ решения этой же системы, причем суммирование по индексу ω производится в пределах от 1 до $sn(n+1)/2$. Однако в отличие от решения (16) аналогичной системы (15) здесь учтена возможная зависимость выражений $\lambda^\mu[i],\lambda^\mu[j],\ldots,\lambda^\mu[w]$ не только от координат той точки, по координатам которой проводится дифференцирование в соответствующем столбце матрицы Якоби (7), но и от координат всех точек кортежа, входящих в коэффициенты уравнения (19). Кроме того, в решении (20) линейные коэффициенты c^ω являются в общем случае произвольными функциями координат точек кортежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$, тогда как в решении (16) они были только произвольными числами.

Лемма 6. *Общее решение* (20) *системы уравнений* (19) *может быть записано в такой форме, что координаты точки i и точки j входят явно в функции λ^μ_ω только для выражений $\lambda^\mu[i]$ и $\lambda^\mu[j]$ соответственно.*

Пусть сначала $n = 1$. Тогда в системе (19) будет $3s$ уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda^\mu[i]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu[j]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(j)} = 0, \\ \lambda^\mu[i]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu[k]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^\mu(k)} = 0, \\ \lambda^\mu[j]\frac{\partial f(jk)}{\partial x^\mu(j)} + \lambda^\mu[k]\frac{\partial f(jk)}{\partial x^\mu(k)} = 0, \end{aligned} \tag{19*}$$

где $\mu = 1, \ldots, s$. Ранг матрицы этой системы равен $2s$ в окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k)$, поэтому она имеет там s линейно независимых ненулевых решений. По аксиоме III в этой окрестности найдется такая тройка (кортеж длины три), для которой отличны от нуля якобианы $\left|\frac{\partial f(ik)}{\partial x(i)}\right|$ и $\left|\frac{\partial f(jk)}{\partial x(j)}\right|$, где $\frac{\partial f}{\partial x}$ есть матрица Якоби (8), которая для случая $n = 1$ будет квадратной. Общее решение системы уравнений (19*) тем самым можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda^\mu[k] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(k, \langle k\rangle), \\ \lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, \langle k\rangle), \\ \lambda^\mu[j] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(j, \langle k\rangle), \end{aligned} \tag{20*}$$

где $\omega = 1, \ldots, s$ и через $\langle k\rangle$ условно обозначено возможное присутствие координат точки k во всех выражениях этого решения.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Обозначим через l точку, следующую за точкой k в кортеже $\langle ijkl \ldots vw\rangle$. Возьмем кортеж длины $n = m - 2$, полученный из первоначального кортежа $\langle ijkl \ldots vw\rangle \in U(i) \times U(j) \times \cdots \times U(w)$ длины m опусканием точек i и j. Выделим из системы (19) подсистему $sn(n-1)/2$ уравнений, которые не включают в себя координат точки i из окрестности $U(i)$ и точки j из окрестности $U(j)$:

$$\begin{aligned} \lambda^\mu[k]\frac{\partial f(kl)}{\partial x^\mu(k)} + \lambda^\mu[l]\frac{\partial f(kl)}{\partial x^\mu(l)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^\mu[v]\frac{\partial f(vw)}{\partial x^\mu(v)} + \lambda^\mu[w]\frac{\partial f(vw)}{\partial x^\mu(w)} = 0. \end{aligned} \tag{19'}$$

В матрице подсистемы (19′) имеется минор порядка $sn(n-1)/2$, по аксиоме III не обращающийся в нуль всюду. Соответствующая квадратная матрица ступенчатая, и ее диагональными клетками являются следующие квадратные матрицы Якоби: для $s(n-1)$ функций $f(kl), \ldots, f(kw)$ по $s(n-1)$ переменным из $x(k), \ldots$, для s функций $f(vw)$ по s переменным из $x(v)$ (см. аналогичную лемму 1), т. е. ранг матрицы подсистемы (19′) равняется своему максимальному значению $sn(n-1)/2$ по крайней мере для одного укороченного кортежа длины n из $U(k) \times \cdots \times U(w)$ и некоторой его окрестности. Но тогда подсистема (19′) имеет в этой окрестности $sn(n+1)/2$ и не более линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений, так как максимальное число таких решений равно числу входящих в нее неизвестных ($= sn^2$) минус ее ранг ($= sn(n-1)/2$). В матрице подсистемы (19′) нет зависимости от координат точек i и j, и потому ее общее решение можно записать в такой форме, в которой функции λ^μ_ω не зависят от этих координат:

$$\begin{aligned} \lambda^\mu[k] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(k, \langle k \ldots vw\rangle), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^\mu[w] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(w, \langle k \ldots vw\rangle). \end{aligned} \tag{21}$$

При этом суммирование по индексу ω, как и в общем решении (20) всей системы (19), производится в пределах от 1 до $sn(n+1)/2$.

Выделим из системы (19) подсистему sn уравнений, содержащих координаты точки i:

$$\begin{gathered}\lambda^\mu[i]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^\mu(i)}+\lambda^\mu[k]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^\mu(k)}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda^\mu[i]\frac{\partial f(iw)}{\partial x^\mu(i)}+\lambda^\mu[w]\frac{\partial f(iw)}{\partial x^\mu(w)}=0,\end{gathered}\tag{19''}$$

и подсистему sn уравнений, содержащих координаты точки j:

$$\begin{gathered}\lambda^\mu[j]\frac{\partial f(jk)}{\partial x^\mu(j)}+\lambda^\mu[k]\frac{\partial f(jk)}{\partial x^\mu(k)}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda^\mu[j]\frac{\partial f(jw)}{\partial x^\mu(j)}+\lambda^\mu[w]\frac{\partial f(jw)}{\partial x^\mu(w)}=0.\end{gathered}\tag{19'''}$$

Относительно sn неизвестных $\lambda^\mu[i]$ и $\lambda^\mu[j]$ эти подсистемы неоднородны и по аксиоме III имеют ранг sn. Но тогда неизвестные коэффициенты $\lambda^\mu[i]$ и $\lambda^\mu[j]$ могут быть однозначно выражены через общее решение (21) подсистемы (19$'$):

$$\begin{gathered}\lambda^\mu[i]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(i,\langle k\ldots vw\rangle),\\ \lambda^\mu[j]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(j,\langle k\ldots vw\rangle).\end{gathered}\tag{22}$$

Ранг подсистемы уравнений (19) без первых s уравнений

$$\lambda^\mu[i]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(i)}+\lambda^\mu[j]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(j)}=0,\tag{23}$$

содержащих s расстояний $f(ij)=(f^1(ij),\ldots,f^s(ij))$, равен рангу самой системы (19), в чем легко убедиться, составляя ее из подсистем (19$'$), (19$''$) и (19$'''$). Поэтому первые s уравнений системы (19), т. е. уравнения (23), являются следствием всех остальных и никаких дополнительных ограничений на решения (22) не налагают. Совокупность решений (21) и (22) систем (19$'$) и (19$''$), (19$'''$) для $n\geqslant 2$, а также решение (20*) системы (19*) для $n=1$ в некоторой окрестности некоторого кортежа из $U(i)\times U(j)\times\cdots\times U(w)$ для любого $n\geqslant 1$ задает общее решение системы (19), причем в этом решении координаты точек i и j входят явно в функции λ^μ_ω только для коэффициентов $\lambda^\mu[i]$ и $\lambda^\mu[j]$ соответственно. Лемма 6 доказана.

Рассмотрим, далее, такой кортеж $\langle p\ldots q\rangle\in\mathfrak{M}^n$ длины n, что любая упорядоченная по нему пара его элементов принадлежит $\mathfrak{S}_f$. Множество таких кортежей, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M}^n$. Запишем систему уравнений (19$'$) для этого кортежа и некоторой его окрестности $U(p)\times\cdots\times U(q)$. Эта система, как показано выше, имеет не более $sn(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых решений. Общее ее решение можно записать по решению (21) простой заменой точек кортежа $\langle kl\ldots vw\rangle$ соответствующими точками кортежа $\langle p\ldots q\rangle$:

$$\begin{gathered}\lambda^\mu[p]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(p,\langle p\ldots q\rangle),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda^\mu[q]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(q,\langle p\ldots q\rangle).\end{gathered}\tag{21*}$$

Функции λ^μ_ω, очевидно, линейно независимы в общем смысле по нижнему индексу ω для совокупности точек кортежа $\langle p\ldots q\rangle$. Случай $n=1$

можно естественным образом включить в решение (21*), полагая просто $\lambda^\mu[p] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(p, \langle p\rangle)$.

Пусть i такая точка из $\mathfrak{M}$, что все пары $\langle ip\rangle, \ldots, \langle iq\rangle$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Запишем систему sn уравнений (19″) для кортежа $\langle ip\ldots q\rangle$ длины $n+1$ и некоторой его окрестности $U(i)\times U(p)\times\cdots\times U(q)$:

$$\begin{gathered}
\lambda^\mu[i]\frac{\partial f(ip)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu[p]\frac{\partial f(ip)}{\partial x^\mu(p)} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\lambda^\mu[i]\frac{\partial f(iq)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu[q]\frac{\partial f(iq)}{\partial x^\mu(q)} = 0.
\end{gathered}\tag{24}$$

Общее решение этой системы можно записать по решению (22):

$$\lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, \langle p\ldots q\rangle),\tag{25}$$

где, напомним, суммирование по индексу ω производится в пределах от 1 до $sn(n+1)/2$.

Лемма 7. *Функции* $\lambda^\mu_\omega(i,\langle p\ldots q\rangle)$ *в решении* (25) *системы* (24) *линейно независимы по нижнему индексу* ω *с постоянными коэффициентами.*

Предположим противное, т. е. что найдутся такие числа $a^\omega, \omega = 1,\ldots, sn(n+1)/2$, не все равные нулю одновременно, с которыми для каждого значения индекса $\mu = 1,\ldots,sn$ имеет место соотношение $a^\omega\lambda^\mu_\omega(i, \langle p\ldots q\rangle) = 0$. Естественно при этом, что хотя бы для одной из точек кортежа $\langle p\ldots q\rangle$ и некоторого значения индекса μ в отношении функций λ^μ_ω в решении (21*), будет выполняться неравенство $a^\omega\lambda^\mu_\omega \neq 0$, например, $a^\omega\lambda^\mu_\omega(p,\langle p\ldots q\rangle)\neq 0$. Подставим выражение (25) для $\lambda^\mu[i]$ и первое выражение решения (21*) для $\lambda^\mu[p]$ в первые s уравнений системы (24). С учетом независимости коэффициентов c^ω получаем уравнения

$$\lambda^\mu_\omega(i,\langle p\ldots q\rangle)\frac{\partial f(ip)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu_\omega(p,\langle p\ldots q\rangle)\frac{\partial f(ip)}{\partial x^\mu(p)} = 0,$$

из которых при сделанных предположениях легко получаем уравнение

$$a^\omega\lambda^\mu_\omega(p,\langle p\ldots q\rangle)\frac{\partial f(ip)}{\partial x^\mu(p)} = 0.$$

В нем неизвестными считаем компоненты s-метрики $f = (f^1,\ldots,f^s)$. Фиксируя в полученном уравнении координаты всех точек кортежа $\langle ip\ldots q\rangle$, кроме координат точек i и p, получаем для пары $\langle ip\rangle$ уравнение типа (13′), следствием которого является несущественная зависимость s-метрики $f(ip)$ от координат точки p, противоречащая аксиоме III. Значит, должно быть равенство $a^\omega\lambda^\mu_\omega(p,\langle p\ldots q\rangle) = 0$. Аналогично устанавливаем, что равенство $a^\omega\lambda^\mu_\omega = 0$ будет иметь место и для всех остальных точек кортежа $\langle p\ldots q\rangle$ в решении (21*). Однако это противоречит тому, что решение (21*) системы (19′) для кортежа $\langle p\ldots q\rangle$ общее и максимальное число ее линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений равно $sn(n+1)/2$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Множество решений* (25) *различных систем* (24), *отличающихся друг от друга выражениями* (21*) *для множителей* $\lambda^\mu[p],\ldots, \lambda^\mu[q]$, *образуют линейное семейство.*

Пусть $\lambda[i]$ и $\tilde\lambda[i]$ — два решения систем уравнений (24) с множителями $\lambda^\mu[p],\ldots,\lambda^\mu[q]$ и $\tilde\lambda^\mu[p],\ldots,\tilde\lambda^\mu[q]$ соответственно. Эти множители, в свою очередь, получаются из выражений общего решения (21*) при подстановке коэффициентов c^ω и $\tilde{c}^\omega$. Тогда линейная комбинация $a\lambda^\mu[i] + b\tilde{\lambda}^\mu[i]$, где a и b — произвольные числа, также будет решением системы (24) с множителями $a\lambda^\mu[p] + b\tilde{\lambda}^\mu[p], \ldots, a\lambda^\mu[q] + b\tilde{\lambda}^\mu[q]$, которые можно получить из общего решения (21*) при подстановке коэффициентов $ac^\omega + b\tilde{c}^\omega$. Лемма 8 доказана.

Согласно аксиоме III в окрестности $U(p) \times \cdots \times U(q)$ найдется такой кортеж $\langle p_0 \ldots q_0 \rangle$ длины n, что ранг функционального соответствия $\bar{f}^n[p_0 \ldots q_0] : \mathfrak{M} \to R^{sn}$ будет равен sn для некоторого плотного в $\mathfrak{M}$ множества точек i. Записывая системы уравнений (24) для кортежей $\langle ip_0 \ldots q_0 \rangle$ длины $n+1$ и некоторых их окрестностей $U(i) \times U(p_0) \times \cdots \times U(q_0)$, получаем их решения

$$\lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, \langle p_0 \ldots q_0 \rangle) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \tag{25'}$$

которые по доказанной выше лемме 8 образуют линейное семейство, причем точка i принадлежит некоторому открытому и плотному в $\mathfrak{M}$ множеству.

Рассмотрим такой кортеж $\langle ijk \ldots vw \rangle \in \mathfrak{S}_F$, что каждая его точка принадлежит области определения линейного семейства (25'). Множество таких кортежей, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Тогда в некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times \cdots \times U(w) \subset \mathfrak{S}_F$ определено линейное семейство

$$\lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \ldots, \lambda^\mu[w] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(w). \tag{26}$$

Коэффициенты (26) являются некоторым решением системы (19) аналогично тому, как решения (22) подсистем (19″) и (19‴) являлись некоторым решением уравнений (23), т. е. первых s уравнений системы (19). Взяв для коэффициентов $(c^1, \ldots, c^{sn(n+1)/2})$ значения $(1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1)$, получаем следующую совокупность $sn(n+1)/2$ решений системы (19):

$$\lambda^\mu_\omega(i), \lambda^\mu_\omega(j), \ldots, \lambda^\mu_\omega(w), \tag{27}$$

где $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$. Эти решения согласно лемме 7 линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Но они оказываются линейно независимыми не только с постоянными коэффициентами, но и с переменными, т. е. в общем смысле, что можно установить точно так же, как это было сделано в отношении решений (16′) системы (15) при доказательстве леммы 5. Поскольку, с другой стороны, система (19) имеет не более $sn(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений, ее общее решение может быть записано в форме (26) с произвольными переменными коэффициентами $c^\omega = c^\omega(\langle ijk \ldots vw \rangle)$.

Каждое из $sn(n+1)/2$ решений (27) определяет в некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times \cdots \times U(w)$ исходного кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ длины $m = n+2$ гладкое векторное поле, а совокупность всех решений (27) образует базис $sn(n+1)/2$-мерного линейного семейства таких полей. Любое поле этого семейства может быть представлено в базисе (27) выражениями

$$\lambda^\mu(i) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \ldots, \lambda^\mu(w) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(w), \tag{28}$$

но в отличие от аналогичных выражений (26) здесь коэффициенты a^ω являются произвольными числами.

Лемма 9. *Линейное $sn(n+1)/2$-мерное семейство гладких векторных полей (28) с базисом (27) замкнуто относительно операции коммутирования.*

Пусть векторное поле

$$\lambda^\mu(i), \lambda^\mu(j), \ldots, \lambda^\mu(w) \tag{29}$$

есть коммутатор каких-либо двух векторных полей семейства (28). Ясно, что любой коммутатор имеет форму (29) вследствие независимости координат, относящихся к разным точкам кортежа $\langle ijk\dots vw\rangle$. С другой стороны, коммутатор (29) является некоторым решением системы (19), поэтому он может быть записан по ее общему решению (26):

$$\lambda^\mu(i) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \dots, \lambda^\mu(w) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(w), \tag{30}$$

в котором коэффициенты c^ω не обязательно являются числами, т. е. могут зависеть от координат точек кортежа $\langle ijk\dots vw\rangle$. Убедимся, однако, в том, что в решении (30) коэффициенты c^ω в действительности постоянны. Для этого будем рассматривать совокупность выражений (30) как систему smn линейных неоднородных уравнений относительно коэффициентов c^ω, где $\omega = 1, \dots, sn(n+1)/2$. Выделим из нее подсистему $sn(n+1)$ уравнений, опуская выражения $\lambda^\mu(i) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i)$, где $\mu = 1, \dots, sn$. Столбцами матрицы этой подсистемы являются ненулевые решения $\lambda^\mu_\omega(j), \dots, \lambda^\mu_\omega(w)$ уравнений (19′), (19‴) системы (19), линейная независимость которых в общем смысле устанавливается точно так же, как и линейная независимость в общем смысле решений (16′) системы (15). Таким образом, выделенная из системы (30) опусканием sn выражений для $\lambda^\mu(i)$ подсистема $sn(n+1)$ уравнений имеет ранг $sn(n+1)/2$, точно равный числу неизвестных коэффициентов c^ω, и потому ее решение может зависеть только от координат точек укороченного кортежа $\langle jk\dots vw\rangle$, т. е. $c^\omega = c^\omega(\langle jk\dots vw\rangle)$. Подставим это решение в опущенные выражения

$$\lambda^\mu(i) = c^\omega(\langle jk\dots vw\rangle)\lambda^\mu_\omega(i) \tag{31}$$

и предположим, что для некоторого коэффициента c^ω его производная по какой-либо из координат точек кортежа $\langle jk\dots vw\rangle$ отлична от нуля. Дифференцируя правую и левую части выражения (31) по указанной координате, а затем фиксируя все координаты, кроме координат точки i, приходим к соотношению $a^\omega \lambda^\mu_\omega(i) = 0$, в котором коэффициенты $a^\omega = \tilde{c}^\omega(\langle j_1k_1\dots v_1w_1\rangle)$ постоянны и по крайней мере один из них отличен от нуля. Но такой результат противоречит лемме 7, так как по обозначению в решении (25′) $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(i, \langle p_0, \dots q_0\rangle)$. Следовательно, в выражениях (30) для коммутатора (29) $c^\omega = \mathrm{const}$, $\omega = 1, \dots, sn(n+1)/2$, т. е. коммутатор (30) принадлежит семейству векторных полей (28), которое тем самым оказывается замкнутым относительно операции коммутирования. Лемма 9 доказана.

Линейное семейство гладких векторных полей (28) с базисом (27), по лемме 9 замкнутое относительно операции коммутирования, является $sn(n+1)/2$-мерной алгеброй Ли преобразований некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times \dots \times U(w)$ кортежа $\langle ijk\dots vw\rangle$, множество которых открыто и плотно не только в $\mathfrak{S}_F$, но и, очевидно, в $\mathfrak{M}^m$, где $m = n+2$. В окрестности же $U(i)$ составляющей

$$\lambda^\mu(i) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(i) \tag{32}$$

семейства (28) определяется $sn(n+1)/2$-мерное линейное семейство гладких векторных полей с теми же структурными константами коммутационных соотношений в базисе

$$\lambda^\mu_\omega(i), \tag{33}$$

что и у исходного семейства (28) в базисе (27). Поэтому семейство (32) является $sn(n+1)/2$-мерной алгеброй Ли преобразований окрестности $U(i)$, изоморфной алгебре (28), причем базисы (33) и (27) соответствуют друг другу.

Множество точек i, в какой-либо окрестности $U(i)$ которых определены векторные поля $\lambda^\mu(i)$, открыто и плотно в $\mathfrak{M}$. Поэтому, не конкретизируя точки i, векторные поля (32) удобно записывать в общекоординатной операторной форме (14), а базисные векторные поля (33) — в операторной форме (12). Векторные поля $\lambda^\mu(i)$ и $\lambda^\mu(j)$, заданные в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ двух точек i и j, совпадают, очевидно, в пересечении $U(i) \cap U(j)$. Если пара $\langle ij \rangle$ принадлежит $\mathfrak{S}_f$, то s-метрика $f(ij)$ удовлетворяет уравнению (23):

$$\lambda^\mu(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(i)} + \lambda^\mu(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(j)} = 0, \tag{34}$$

из которого в соответствующих базисах $\lambda^\mu_\omega(i)$ и $\lambda^\mu_\omega(j)$ получается система уравнений (13).

Согласно второй (обращенной) теореме Ли (см., например, [4, с. 438]) $sn(n+1)/2$-мерная алгебра Ли гладких векторных полей (32) с базисом (33) однозначно определяет эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$-мерной группы Ли в некоторой окрестности точки i. Множество таких точек открыто и плотно в $\mathfrak{M}$. При этом действия в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ двух точек i и j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$. Таким образом, алгебра Ли векторных полей (32) (в операторной форме — (14)) с базисом (33) (в операторной форме — (12)) определяет $sn(n+1)/2$-мерную локальную группу Ли локальных преобразований некоторого открытого и плотного в sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ множества, для которой исходное функциональное соответствие (s-метрика) $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая уравнению (34), а в соответствующих базисах — системе уравнений (13), является двухточечным инвариантом. Теорема 2 полностью доказана.

Итоговым результатом всего вышеизложенного является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий s-метрической геометрии, задаваемой на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ функциональным соответствием $f = (f^1, \ldots, f^s)$. Эта эквивалентность является следствием доказанных выше теорем 1 и 2, необходимые и достаточные условия которых совпадают.

Теорема 3. *Для того чтобы функциональное соответствие $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$ задавало на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ s-метрическую феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга $m = n+2$, необходимо и достаточно, чтобы это соответствие задавало на $\mathfrak{M}$ s-метрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$.*

Заметим, что необходимое и достаточное условие теорем 1 и 2 о ранге отображения F можно включить как четвертую аксиому в определение s-метрической геометрии, задаваемой на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ функциональным соответствием $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R^s$. Такая геометрия будет, с одной стороны, феноменологически симметрична (определение 1, аксиома IV), а с другой, — наделена групповой симметрией соответствующей степени (определение 2, аксиома IV′), причем обе симметрии окажутся эквивалентными в смысле теоремы 3, вытекая одна из другой.

Из теоремы 3 следует, что s-метрика f допускает группу движений, размерность которой равна $sn(n+1)/2$. Оказывается, что эта размерность максимальна.

Теорема 4. *Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых s-метрикой $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающей на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m =$*

$n+2$, или геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$, не превышает этой степени.

Предположим противное, т. е. что s-метрика f допускает такую группу движений, размерность которой больше $sn(n+1)/2$. Тогда система уравнений (15) будет иметь более $sn(n+1)/2$ линейно независимых с постоянными коэффициентами ненулевых решений. Возьмем из них любые $sn(n+1)/2+1$ решений. Эти решения будут также линейно независимы и с переменными коэффициентами, т. е. в общем смысле. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно повторить рассуждения, следующие за системой уравнений (17), в которых надо учесть только, что $\omega \leqslant sn(n+1)/2+1$. Поскольку система (15) имеет тогда не менее $sn(n+1)/2+1$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений, ранг ее матрицы, т. е. матрицы (7), должен быть меньше $sm(m-1)/2-s$, где $m=n+2$. Однако это противоречит следствию леммы 1. Полученное противоречие и доказывает теорему 4.

Во второй части этой работы будут найдены s-метрические феноменологически симметричные геометрии наименьшего ранга 3, задаваемые на s-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ функциональным соответствием $f : \mathfrak{M}\times\mathfrak{M} \to R^s$. Согласно теореме 3 все такие геометрии наделены групповой симметрией степени s, т. е. s-метрика $f=(f^1,\dots,f^s)$ допускает s-мерную локальную группу локальных движений, причем по теореме 4 такая размерность максимальна. В простейших случаях $s=2,3$ удается провести полную классификацию соответствующих групп преобразований и тем самым найти все s-метрики как их двухточечные инварианты. В случае $s \geqslant 4$ задача классификации становится технически сложной и громоздкой, но принципиально совершенно ясной. Упрощение же метода должно опираться на невырожденность s-метрики, которая обнаруживается обычно несколько раньше, чем доводится до конца классификация групп преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулаков Ю. И.* Элементы теории физических структур (с дополнением Г. Г. Михайличенко). Новосибирск: НГУ, 1968.
2. *Михайличенко Г. Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 99–113.
3. *Кулаков Ю. И.* Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 5. С. 985–987.
4. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы М.: Наука, 1973.
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

г. Горно-Алтайск *Статья поступила 25 января 1993 г.*