

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

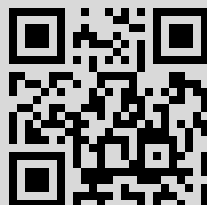
Г. Г. Михайличенко, Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства (в рамках теории физических структур), *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 6, 28–35

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.155.4.86

12 сентября 2018 г., 15:54:24



$$\begin{aligned}
(2\pi i)^r f(A) &= \sum_{I \leq K \leq S} \sum_{I \leq J \leq m_K} (J-I)! \int_{T_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \lambda_K)^J} \prod_{v=1}^r Z_{K,J}^v = \\
&= \sum_{I \leq K \leq S} \sum_{I \leq J \leq m_K} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f(\zeta) D^{J-I} \left[\frac{\varphi^{-m}(\lambda)}{\zeta - \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_K} \varphi^m(\zeta) d\zeta \cdot \prod_{v=1}^r Z_{K,J}^v = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f(\zeta) \left\{ \sum_K \sum_J D^{J-I} \left[\frac{\varphi^{-m}(\lambda)}{\zeta - \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_K} \prod_{v=1}^r Z_{K,J}^v \right\} \varphi^m(\zeta) d\zeta = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f(\zeta) R(A, \zeta) [\varphi^{-1}(A)]^m \varphi^m(\zeta) d\zeta.
\end{aligned}$$

Первое равенство следует из леммы 2, второе — из (9) и (11) после дифференцирования. Третье равенство очевидно, а последнее следует из r -кратного применения формулы (5.4.1) из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланкастер П. Теория матриц. — 2-е изд. — М.: Наука, 1982. — 272 с.
2. Mc Duffee C. The theory of matrices. — N. Y.: Chelsea, 1959. — 110 p.
3. Rinehart R. F. The equivalence of definitions of a matrix function // Amer. Math. Monthly. — 1955. — V. 62. — № 6. — P. 395—414.
4. Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А. Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. — Новосибирск, 1975. — 115 с.
5. Худайберганов Г. Формула Карлемана для функций от матриц // Сиб. матем. журн. — 1988. — Т. 29. — № 1. — С. 207—208.
6. Фок В. А., Куни Ф. М. О введении „гасящей“ функции в дисперсионные соотношения // ДАН СССР. — 1959. — Т. 127. — № 6. — С. 1196—1198.
7. Айзенберг Л. А. О возможности аналитического продолжения в область функции, заданной на дуге границы этой области. Обобщенная теорема Фока-Куни // Комплекс. анализ и мат. физ. — Красноярск, 1988. — С. 5—11.
8. Айзенберг Л. А., Худайберганов Г. О кратной экстраполяции голоморфных функций от матриц и функций, голоморфных в произведении полуплоскостей // Изв. вузов. Математика. — 1988. — № 6. — С. 3—9.
9. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. — Новосибирск, 1979. — 366 с.
10. Голузин Г. М., Крылов В. И. Обобщенная формула Carleman'a и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Матем. сб. — 1933. — Т. 40. — № 2. — С. 144—149.
11. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950. — 336 с.
12. Conchar A. A. On analytic continuation from the „edge of the wedge“ // Annal. Acad. Fenn. — 1985. — V. 10. — P. 221—225.

г. София (НРБ)

Поступила
18.12.1989

Г. Г. Михайличенко

УДК 514.824

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ГИПОТЕЗЫ О БИНАРНОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА (В РАМКАХ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР)

Физические предпосылки гипотезы о бинарной структуре пространства были изложены Ю. С. Владимировым [1] (с. 47—55). Действительно, классические пространственно-временные отношения присущи объектам макромира, т.е. достаточно сложным и массивным образованиям, состоящим из двух видов заряженных частиц. С другой стороны, идея бинарности отношений естественно включена в теорию физических структур (ТФС) Ю. И. Кулакова [2], которая исходит из очень общих понятий и постулатов. В данной работе автор, опираясь на гипотезу о бинарной структуре пространства и исполь-

зуя некоторые свои результаты в ТФС [3], устанавливает симметрию метрики физического пространства и находит для этой метрики явное выражение.

Согласно [3] бинарная физическая структура в общих чертах и кратко может быть определена следующим образом. Пусть множества \mathfrak{M} и \mathfrak{N} суть m -мерное и n -мерное многообразия соответственно. Обозначим локальные координаты этих многообразий через $x = (x^1, \dots, x^m)$ и $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ и будем считать для определенности, что $m \leq n$. Пусть, далее, имеется функция f , сопоставляющая паре $\langle ia \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторое число $f(ia) \in R$. Предполагается, что ее локальное координатное представление есть достаточно гладкая функция

$$f(ia) = f(x(i), \xi(a)) = f(x^1(i), \dots, x^m(i), \xi^1(a), \dots, \xi^n(a)), \quad (1)$$

в которую координаты x и ξ входят существенным образом. Построим функцию F , сопоставляя кортежу длины $m + n + 2$ из прямого произведения $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{M}^{m+1}$ все $(m+1)(n+1)$ чисел, соответствующих упорядоченной по нему совокупности всех пар. Будем говорить, что функция f задает на множествах \mathfrak{M} и \mathfrak{N} бинарную физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$, если локально в $R^{(m+1)(n+1)}$ множество значений построенной функции F является подмножеством множества нулей некоторой достаточно гладкой функции Φ от $(m+1)(n+1)$ переменных с $\text{grad} \Phi \neq 0$ на плотном в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{M}^{m+1}$ подмножестве.

В работе [3] приведена полная сводка локальных результатов для физических структур произвольного ранга. Запишем их здесь с точностью до эквивалентности (локально обратимой замены координат) и переобозначения $\psi(j) \rightarrow f$, где ψ — произвольная функция одной переменной:

$$m = 1, n = 1:$$

$$f(ia) = x(i) + \xi(a); \quad (2)$$

$$m = 1, n = 2:$$

$$f(ia) = x(i)\xi(a) + \eta(a); \quad (3)$$

$$m = 1, n = 3:$$

$$f(ia) = (x(i)\xi(a) + \eta(a))/(x(i) + \nu(a)); \quad (4)$$

$$m = n \geq 2:$$

$$f(ia) = x^1(i)\xi^1(a) + \dots + x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(a) + x^n(i) + \xi^n(a), \quad (5)$$

$$f(ia) = x^1(i)\xi^1(a) + \dots + x^n(i)\xi^n(a); \quad (6)$$

$$m = n - 1 \geq 2:$$

$$f(ia) = x^1(i)\xi^1(a) + \dots + x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(a) + \xi^n(a). \quad (7)$$

Для всех остальных пар значений целых чисел m и n физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ не существуют.

В приложении к геометрии естественно ограничиться случаем $m = n \geq 1$, когда многообразия \mathfrak{M} и \mathfrak{N} имеют одинаковую размерность. Математическим выражением гипотезы о бинарной структуре пространства согласно соображениям Ю. С. Владимирова [1] и идеям Ю. И. Кулакова [4] будет следующая аксиома: А. Существует такое взаимно однозначное локально гладкое отображение $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, что метрика пространства \mathfrak{M} , определяемая выражением

$$L(ij) = f(i, \varphi(j)), \quad (8)$$

удовлетворяет следующему условию

$$L(ij) = \Theta(L(ji)), \quad (9)$$

где Θ — некоторая функция одной переменной с $\Theta' \neq 0$.

Теорема. Метрика (8) пространства \mathfrak{M} , удовлетворяющая условию (9), с точностью до эквивалентности и переобозначения $\psi(L) \rightarrow L$ задается одним из выражений (15), (28), (47), каждое из которых либо симметрично ($a = +1$), либо антисимметрично ($a = -1$).

Проведем доказательство сформулированной теоремы, рассматривая последовательно функции (2), (5), (6), задающие на множествах \mathfrak{M} и \mathfrak{N} бинарные физические структуры ранга $(n+1, n+1)$ с $n \geq 1$.

Для функции (2) метрика $L(ij)$ одномерного пространства \mathfrak{M} в соответствии с определением (8) запишется так:

$$L(ij) = x(i) + \varphi(j), \quad (10)$$

где $\varphi(j) = \varphi(x(j))$, а условие (9) примет вид

$$x(i) + \varphi(j) = \Theta(x(j) + \varphi(i)). \quad (11)$$

Продифференцируем равенство (11) по координате $x(i): 1 = \Theta'(L(ji)) \times \times d\varphi(i)/dx(i)$, и аналогично по координате $x(j): d\varphi(j)/dx(j) = \Theta'(L(ji))$, откуда получаем

$$(d\varphi(i)/dx(i))(d\varphi(j)/dx(j)) = 1. \quad (12)$$

Поскольку соотношение (12) выполняется для любой пары $\langle ij \rangle$, из него следует, что $(d\varphi/dx)^2 = 1$, т. е.

$$d\varphi/dx = a, \quad (13)$$

причем $a^2 = 1$. Для функции φ получено простое уравнение (13), интегрируя которое находим

$$\varphi = ax, \quad (14)$$

где опущена аддитивная постоянная, т. к. результат формулируется с точностью до переобозначения $\psi(L) \rightarrow L$. Подставим теперь функцию (14) в определение (10) метрики $L(ij)$:

$$L(ij) = x(i) + ax(j), \quad (15)$$

где $a = \pm 1$. Из полученного выражения (15) для метрики (10) одномерного пространства \mathfrak{M} , удовлетворяющего условию (11), следует, что она может быть только либо симметричной ($a = +1$), либо антисимметричной ($a = -1$).

Перейдем, далее, к рассмотрению функции (5), в которой $n \geq 2$. Согласно определению (8) для метрики $L(ij)$ имеем выражение

$$L(ij) = x^\mu(i) \varphi_\mu(j) + x^n(i) + \varphi_n(j), \quad (16)$$

где $\varphi_\mu(j) = \varphi_\mu(x^1(j), \dots, x^{n-1}(j), x^n(j))$ и аналогично для $\varphi_n(j)$. Суммирование по немому индексу μ производится в пределах от 1 до $n-1$.

Подставим выражение (16) в условие (9):

$$x^\mu(i) \varphi_\mu(j) + x^n(i) + \varphi_n(j) = \Theta(x^\mu(j) \varphi_\mu(i) + x^n(j) + \varphi_n(i)), \quad (17)$$

затем продифференцируем его по координате $x^\nu(i)$, $\nu = 1, \dots, n-1$:

$$\varphi_\nu(j) = \Theta'(L(ji))(x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\nu(i) + \partial \varphi_n(i) / \partial x^\nu(i)), \quad (18)$$

точно так же — по координате $x^n(i)$:

$$1 = \Theta'(L(ji))(x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^n(i) + \partial \varphi_n(i) / \partial x^n(i)) \quad (19)$$

и, наконец, — по координате $x^n(j)$:

$$x^\mu(i) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^n(j) + \partial \varphi_n(j) / \partial x^n(j) = \Theta'(L(ji)). \quad (20)$$

Поскольку $\Theta' \neq 0$, из равенств (18) и (19) получаем связь

$$\varphi_{\nu}(j) = \frac{x^{\mu}(j) \partial \varphi_{\mu}(i) / \partial x^{\nu}(i) + \partial \varphi_n(i) / \partial x^{\nu}(i)}{x^{\mu}(j) \partial \varphi_{\mu}(i) / \partial x^n(i) + \partial \varphi_n(i) / \partial x^n(i)}, \quad (21)$$

из которой легко выводим

$$\partial \varphi_{\mu} / \partial x^n = 0. \quad (22)$$

С учетом соотношения (22) из равенств (19) и (20) получаем

$$\partial \varphi_n / \partial x^n = a, \quad (23)$$

где $a^2 = 1$, в результате чего связь (21) значительно упростится:

$$a \varphi_{\nu}(j) = x^{\mu}(j) \partial \varphi_{\mu}(i) / \partial x^{\nu}(i) + \partial \varphi_n(i) / \partial x^{\nu}(i).$$

Из этой упрощенной связи следует, что $\partial \varphi_{\mu} / \partial x^{\nu} = \text{const}$, и поэтому с учетом (22) имеем

$$\varphi_{\mu} = b_{\mu\nu} x^{\nu} + c_{\mu}, \quad (24)$$

причем матрица коэффициентов $b_{\mu\nu}$, имеющая порядок $n-1$ — невырожденная, т.к. функции φ_{μ} независимы, $c_{\mu} = \text{const}$.

Подставим выражение (24) в предыдущую связь:

$$a(b_{\mu\nu} x^{\mu}(j) + c_{\nu}) = b_{\mu\nu} x^{\mu}(j) + \partial \varphi_n(i) / \partial x^{\nu}(i),$$

отсюда легко получаем

$$b_{\mu\nu} = a b_{\nu\mu}, \quad (25)$$

где $a = \pm 1$, и дополнительно

$$\partial \varphi_n / \partial x^{\mu} = a c_{\mu}. \quad (26)$$

Из результата (25) следует, что по перестановке индексов μ, ν коэффициенты $b_{\mu\nu}$ выражения (24) либо симметричны ($a = +1$), либо антисимметричны ($a = -1$). В случае антисимметрии порядок матрицы $b_{\mu\nu}$, равный $n-1$, должен быть четным, т.к. определитель ее отличен от нуля, т.е. $n = 3, 5, 7, \dots$

Соотношения (23) и (26) представляют собой систему n уравнений относительно функции φ_n . Решая эту систему, находим

$$\varphi_n = a c_{\mu} x^{\mu} + a x^n, \quad (27)$$

где аддитивная постоянная опущена по тем же соображениям, что и в решении (14).

Подставим выражения (24) и (27) для функций φ_{μ} и φ_n в определение (16) метрики $L(ij)$:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j) + x^n(i) + a x^n(j), \quad (28)$$

где $b_{\mu\nu} = a b_{\nu\mu}$, $a = \pm 1$, и произведено естественное переобозначение последней координаты: $c_{\mu} x^{\mu} + x^n \rightarrow x^n$. Из окончательного выражения (28) и свойства (25) следует, что $L(ij) = a L(ji)$, т.е. определяемая выражением (16) и удовлетворяющая условию (17) метрика n -мерного пространства \mathbb{M} может быть только либо симметричной ($a = +1$), либо антисимметричной ($a = -1$).

Рассмотрим в заключение доказательства функцию (6), в которой также $n \geq 2$. Для метрики $L(ij)$ в соответствии с определением (8) можно выписать следующее выражение:

$$L(ij) = x^\mu(i) \varphi_\mu(j), \quad (29)$$

где нёмое суммирование по индексу μ производится в пределах от $\mu = 1$ до $\mu = n$ (сравни с выражением (16)).

Подставим выражение (29) в условие (9):

$$x^\mu(i) \varphi_\mu(j) = \Theta(x^\mu(j) \varphi_\mu(i)) \quad (30)$$

и продифференцируем его по координатам $x^\nu(i)$, $x^\sigma(i)$, $x^\sigma(j)$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\nu(j) &= \Theta'(L(ji)) x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\nu(i), \\ \varphi_\sigma(j) &= \Theta'(L(ji)) x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\sigma(i), \\ x^\mu(i) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^\sigma(j) &= \Theta'(L(ji)) \varphi_\sigma(i), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

отсюда, исключая производную $\Theta'(L(ji))$, находим два соотношения:

$$\frac{\varphi_\nu(j)}{\varphi_\sigma(j)} = \frac{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\nu(i)}{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\sigma(i)}, \quad (32)$$

$$\frac{\varphi_\nu(j)}{x^\mu(i) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^\sigma(j)} = \frac{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(i) / \partial x^\nu(i)}{\varphi_\sigma(i)}, \quad (33)$$

которые выполняются тождественно по координатам точек i и j . Зафиксируем в первом из них координаты точки i : $\varphi_\nu / b_{\nu\mu} x^\mu = \varphi_\sigma / b_{\sigma\mu} x^\mu$, причем слева и справа нет суммирования по индексам ν и σ , т.е.

$$\varphi_\mu = c b_{\mu\nu} x^\nu, \quad (34)$$

где $b_{\mu\nu} = \text{const}$, а c — некоторая функция координат. В силу предполагаемой независимости функций φ_μ , определитель матрицы коэффициентов $b_{\mu\nu}$ должен быть отличен от нуля и, кроме того, $c \neq 0$.

Итак, из первого соотношения (32) было получено выражение (34), на которое второе соотношение (33) налагает некоторые дополнительные ограничения. Положим в нем сначала $i = j$:

$$\frac{\varphi_\nu(j)}{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^\sigma(j)} = \frac{x^\mu(j) \partial \varphi_\mu(j) / \partial x^\nu(j)}{\varphi_\sigma(j)},$$

а затем $\nu = \sigma$, отсюда получаем $\varphi_\nu = a_\nu x^\mu \partial \varphi_\mu / \partial x^\nu$, причем в правой части по индексу ν нет суммирования и $a_\nu^2 = 1$. Подставляя последнее соотношение в предыдущее, получим $a_\nu a_\sigma = 1$, а поскольку $a_\nu = 1/a_\sigma$, то $a_\nu = a_\sigma = a$. Таким образом, следствием соотношения (33) является уравнение

$$\varphi_\nu = a x^\mu \partial \varphi_\mu / \partial x^\nu, \quad (35)$$

где $a^2 = 1$.

В уравнение (35), а также в исходные соотношения (32) и (33) подставим полученное ранее выражение (34), получим

$$b_{\mu\sigma} x^\mu x^\sigma \partial c / \partial x^\nu = (a b_{\nu\mu} - b_{\mu\nu}) x^\mu c, \quad (36)$$

$$b_{\nu\mu} x^\mu(j) / b_{\sigma\mu} x^\mu(j) = \frac{b_{\mu\nu} x^\mu(j) c(i) + b_{\mu\epsilon} x^\mu(j) x^\epsilon(i) \partial c(i) / \partial x^\nu(i)}{b_{\mu\sigma} x^\mu(j) c(i) + b_{\mu\epsilon} x^\mu(j) x^\epsilon(i) \partial c(i) / \partial x^\sigma(i)}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{b_{\nu\mu} x^\mu(j) c(j)}{b_{\mu\sigma} x^\mu(i) c(j) + b_{\mu\epsilon} x^\mu(i) x^\epsilon(j) \partial c(j) / \partial x^\sigma(j)} = \\ & = \frac{b_{\mu\nu} x^\mu(j) c(i) + b_{\mu\epsilon} x^\mu(j) x^\epsilon(i) \partial c(i) / \partial x^\nu(i)}{b_{\sigma\mu} x^\mu(i) c(i)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Далее соотношения (36), (37), (38) естественно исследовать, предполагая, что либо $b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}$ для всех индексов μ, ν , либо $b_{\mu\nu} \neq ab_{\nu\mu}$ для некоторых индексов μ, ν . Рассмотрим сначала первый случай:

$$b_{\mu\nu} = ab_{\nu\mu}, \quad (39)$$

когда матрица коэффициентов $b_{\mu\nu}$ в выражении (34) симметрична ($a = +1$) или антисимметрична ($a = -1$) по перестановке индексов μ и ν . Соотношение (37) в случае (39) значительно упростится: $b_{\nu\mu} x^\mu(j) \partial c(i) / \partial x^\sigma(i) = b_{\sigma\mu} x^\mu(j) \partial c(i) / \partial x^\nu(i)$, отсюда, дифференцируя по координате $x^\mu(j)$, получаем связь производных $b_{\nu\mu} \partial c / \partial x^\sigma = b_{\sigma\mu} \partial c / \partial x^\nu$. Используя полученную связь, покажем, что $c = \text{const}$. Действительно, предположим, что хотя бы одна из производных функции c не обращается в нуль, напр., $\partial c / \partial x^{\nu'} \neq 0$. Тогда при $\sigma = \nu'$ из предыдущей связи находим $b_{\nu\mu} = b_{\nu'\mu} \partial c / \partial x^{\nu'} (\partial c / \partial x^{\nu'})^{-1}$. Но при таком мультипликативном расщеплении индексов ν и μ в коэффициентах $b_{\nu\mu}$ определитель их матрицы обращается в нуль, что противоречит независимости функций (34). Таким образом, предположение о том, что хотя бы одна из производных функции c не обращается в нуль, приводит к противоречию. Следовательно, $\partial c / \partial x^\mu = 0$, $\mu = 1, \dots, n$, и поэтому $c = \text{const}$ при условии (39).

Рассмотрим теперь второй случай, когда

$$b_{\mu\nu} \neq ab_{\nu\mu} \quad (40)$$

для некоторых индексов μ, ν , причем, как это следует из уравнения (36), $b_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$.

Подставим уравнение (36) в соотношение (38):

$$\begin{aligned} b_{\nu\mu} x^\mu(j) / [b_{\mu\sigma} x^\mu(i) + c_\sigma(j) \tilde{c}_\mu(j) x^\mu(i)] = \\ = [b_{\mu\nu} x^\mu(j) + c_\nu(i) \tilde{c}_\mu(i) x^\mu(j)] / b_{\sigma\mu} x^\mu(i), \end{aligned} \quad (41)$$

где введены новые обозначения: $c_\nu = (ab_{\nu\mu} - b_{\mu\nu}) x^\mu / b_{\mu\mu} x^\mu x^\mu$, $\tilde{c}_\mu = b_{\mu\mu} x^\mu$, из которых следует, что $c_\nu \neq 0$ и $\tilde{c}_\mu \neq 0$ для некоторых индексов ν и μ . По равенству (41) получаем

$$b_{\mu\nu} x^\mu(j) + c_\nu(i) \tilde{c}_\mu(i) x^\mu(j) = A(i, j) b_{\nu\mu} x^\mu(j), \quad (42)$$

где для коэффициента $A(i, j)$ имеем перестановочное свойство

$$A(i, j) A(j, i) = 1. \quad (43)$$

Предположим, далее, что в рамках условия (40) коэффициент $A(i, j)$ зависит от координат обеих точек i и j явным образом:

$$A(i, j) \neq A(i) \text{ и } A(i, j) \neq A(j). \quad (44)$$

Продифференцируем соотношение (42), выполняющееся тождественно, по координате $x^\mu(j)$:

$$b_{\mu\nu} + c_\nu(i) \tilde{c}_\mu(i) = b_{\nu\mu} A(i, j) + b_{\nu\mu} x^\mu(j) \partial A(i, j) / \partial x^\mu(j),$$

после чего зафиксируем все координаты точки j : $b_{\mu\nu} = A(i) b_{\nu\mu} - c_\nu(i) \tilde{c}_\mu(i) + d_\mu \tilde{d}_\mu(i)$. Полученную связь подставим в исходное соотношение (42), решим его относительно $b_{\nu\mu} x^\mu(j)$ и продифференцируем по $x^\mu(j)$:

$$b_{\nu\mu} = d_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}(j)} \left(\frac{\tilde{d}_{\nu}(i) x^{\mu}(j)}{A(i, j) - A(i)} \right),$$

причем в силу предположения (44) знаменатель $A(i, j) - A(i)$ в правой части отличен от нуля. Но мультипликативное расщепление индексов ν и μ в полученном для $b_{\nu\mu}$ выражении означает, что определитель матрицы $b_{\nu\mu}$ равен нулю, что противоречит независимости функций (34).

Предположим, что

$$A(i, j) = A(i) \text{ или } A(i, j) = A(j) \quad (45)$$

дополнительно к условию (40). Перестановочное свойство (43) в этом случае означает, очевидно, что

$$A(i, j) = A = \pm 1. \quad (43')$$

Соотношение (42) продифференцируем по координате $x^{\mu}(j)$, учитывая (43'): $b_{\nu\mu} + c_{\nu}(i) \tilde{c}_{\mu}(i) = A b_{\nu\mu}$, откуда следует $c_{\nu}(i) \tilde{c}_{\mu}(i) = c_{\nu}(j) \tilde{c}_{\mu}(j)$. Пусть при некотором $\nu = \nu'$ отличен от нуля коэффициент $c_{\nu'}$. Тогда $\tilde{c}_{\mu}(i) = c_{\nu'}(j) \tilde{c}_{\mu}(j) / c_{\nu'}(i)$ и поскольку по введенному в соотношении (40) обозначению $\tilde{c}_{\mu}(i) = b_{\nu\mu} x^{\nu}(i)$, имеем $b_{\nu\mu} x^{\nu}(i) = c_{\nu'}(j) \tilde{c}_{\mu}(j) / c_{\nu'}(i)$. Дифференцируя этот результат по координате $x^{\nu}(i)$, получаем мультипликативное расщепление индексов μ и ν в выражении для коэффициентов $b_{\nu\mu}$ функций (34), что противоречит их независимости.

Таким образом, условие (41) необходимо приводит к противоречию с независимостью функций (34) и поэтому не может выполняться. Остается только условие (39), при котором, как было показано выше, в выражениях (34) $c = \text{const}$. Без ограничения общности, очевидно, можно положить $c = 1$ и тогда

$$\varphi_{\mu} = b_{\nu\mu} x^{\nu}, \quad (46)$$

причем $b_{\mu\nu} = a b_{\nu\mu}$, и матрица коэффициентов $b_{\mu\nu}$ невырожденная. В случае $a = -1$, когда $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$, порядок матрицы $b_{\mu\nu}$, равный n , должен быть четным, т. е. $n = 2, 4, 6, \dots$. Подставим найденные выражения (46) для функций φ_{μ} в определение метрики (29):

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j), \quad (47)$$

где $b_{\mu\nu} = a b_{\nu\mu}$, $a = \pm 1$, которая оказывается либо симметричной ($a = +1$), либо антисимметричной ($a = -1$), т. е. $L(ij) = a L(ji)$. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим более подробно геометрическую интерпретацию полученных результатов. Предположим сначала, что $a = +1$, т. е. метрика $L(ij)$ симметрична:

$$L(ij) = L(ji). \quad (48)$$

Выражение (15) в этом случае будет следующим:

$$L(ij) = x(i) + x(j), \quad (15')$$

т. е. $\exp L(ij)$ локально представляет собой скалярное произведение.

Выражение (28) при $a = +1$ запишется так:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j) + x^n(i) + x^n(j), \quad (28')$$

где $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$. Пусть для всех точек $i \in \mathfrak{M}$ дополнительно выполняется условие $L(ii) = 0$, которое уменьшает число независимых координат, т.к. $2x^n + b_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$. Если воспользоваться этой связью координат, то для метрики (28') получим выражение $L(ij) = -0,5b_{\mu\nu} (x^\mu(i) - x^\mu(j))(x^\nu(i) - x^\nu(j))$. Вследствие симметрии и невырожденности матрицы $b_{\mu\nu}$ можно ввести такую локальную обратимую замену координат $x \rightarrow y$, что эта квадратичная форма станет диагональной:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \epsilon_{\mu} (y^{\mu}(i) - y^{\mu}(j))^2, \quad (49)$$

причем $\epsilon_{\mu} = \pm 1$. Полученное выражение (49) задает локально симметричную невырожденную квадратичную метрику в евклидовом или псевдоевклидовом пространстве. Вопрос об интерпретации исходного выражения (28') без дополнительного условия $L(ii) = 0$ остается открытым.

Выражение (47) при $a = +1$, когда $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$, диагонализировав некоторой локально обратимой заменой координат $x \rightarrow y$:

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^n \epsilon_{\mu} y^{\mu}(i) y^{\mu}(j), \quad (50)$$

где $\epsilon_{\mu} = \pm 1$. Метрику (50) естественно интерпретировать как симметричное скалярное произведение в некотором евклидовом или псевдоевклидовом пространстве. Налагая на нее естественное дополнительное условие $L(ii) = \text{const}$, выделяем класс неевклидовых пространств постоянной кривизны (гиперсферы).

Предположим теперь, что $a = -1$, т.е. метрика $L(ij)$ антисимметрична:

$$L(ij) = -L(ji).$$

Выражения (15), (28), (47) при $a = -1$ запишем соответственно так:

$$L(ij) = x(i) - x(j), \quad (15'')$$

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j) + x^n(i) - x^n(j), \quad n = 3, 5, \dots, \quad (28'')$$

$$L(ij) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j), \quad n = 2, 4, \dots, \quad (47'')$$

причем $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$. Первые два выражения (15'') и (28'') задают нелинейную невырожденную метрику симплектического пространства *нечетной* размерности, в то время как третье выражение (47'') задает обычную билинейную невырожденную метрику симплектического пространства *четной* размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров Ю. С. Пространство — время: явные и скрытые размерности. — М. Наука, 1989. — 191 с.
2. Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г. Г.). — Новосибирск, 1968. — 226 с.
3. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // ДАН СССР. — 1972. — Т. 206. — № 5. — С. 1056—1058.
4. Кулаков Ю. И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // ДАН СССР. — 1970. — Т. 193. — № 5. — С. 985—987.

г. Новосибирск

Поступила
25.12.1989