

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ISSN 1992-6138

Математическое Образование

**Журнал Фонда математического
образования и просвещения**

Год восемнадцатый

№ 1 (69)

январь - март 2014 г.

Москва

О некоторых «треугольных» кониках (окончание)

Алексей Мякишев

Окончание статьи, в которой изучаются коники, проходящие через точки, выбранные специальным образом относительно данного треугольника. Первая часть статьи напечатана в предыдущем номере журнала.

Конец доказательства в тексте помечается значком \square . Для котангенса используется международное обозначение \cot , в отличие от принятого в России ctg .

§ 6. Равноквадратная коника

Заменим равные окружности Пааша на пары одинаковых квадратов, вписанных в углы треугольника — так, что каждая пара квадратов имеет общую сторону¹.

Оказывается, тогда имеет место теорема, во многом аналогичная теоремам 5.1 и 5.2.

Теорема 6.1. Все шесть точек, расположенных на сторонах (или их продолжениях) исходного треугольника и являющихся вершинами соответствующих пар одинаковых квадратов (но отличные от общих вершин пары!) — всегда лежат на одной конике.

Центр коники (всегда конечный) есть точка $X(590)$ в ETC с барицентрическими координатами вида

$$2 + \cot B + \cot C : 2 + \cot C + \cot A : 2 + \cot A + \cot B = 4S + a^2 : 4S + b^2 : 4S + c^2.$$

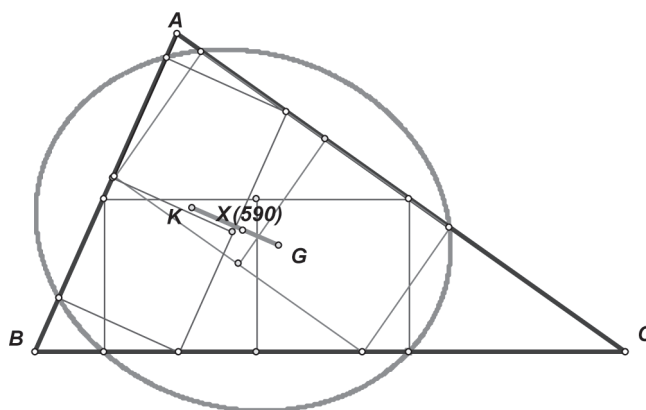


Рис. 15.

Она делит отрезок GK^2 в следующем отношении: $\frac{GX_{590}}{KX_{590}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{S}$.

Тип коники определяется углами треугольника:

- если все его углы меньше $\frac{3\pi}{4}$ (135°), то получается *эллипс* (рис. 16);
- если найдется угол, *большой* $\frac{3\pi}{4}$, то получается *гипербола* (рис. 17);
- если же один из углов в точности *равен* $\frac{3\pi}{4}$, то коника вырождается в пару параллельных прямых³ (рис. 18).

¹Если треугольник тупоугольный, то некоторые вершины оснований двух пар одинаковых квадратов обязательно попадут на продолжения сторон треугольника — а именно, квадратов с основаниями на прямых, содержащих стороны треугольника и вершину тупого угла.

² K — точка Лемуана ($X(6)$ у Кимберлинга). Является изогонально сопряженной центроиду G — см. [1]–[3], [6]. Прямую GK иногда называют осью Лемуана.

³Причем две пары равных квадратов имеют общую вершину, совпадающую с вершиной тупого угла. Через нее же проходит «серединная» параллель, содержащая точку $X(590)$.

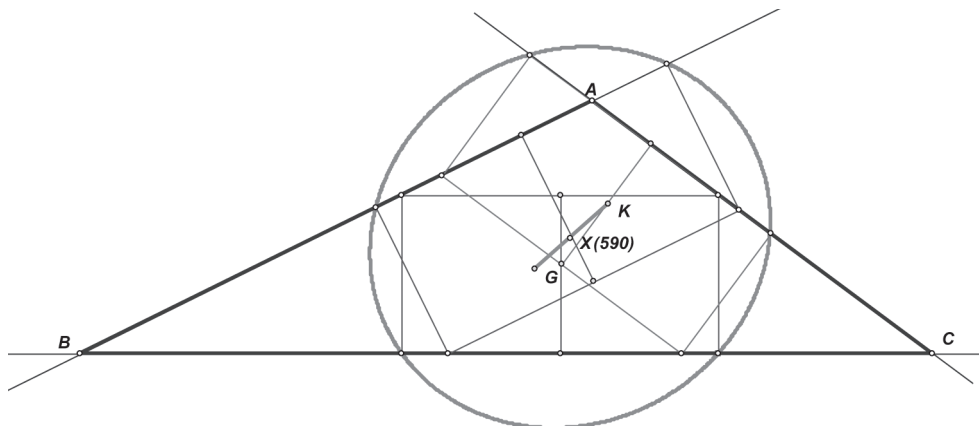


Рис. 16.

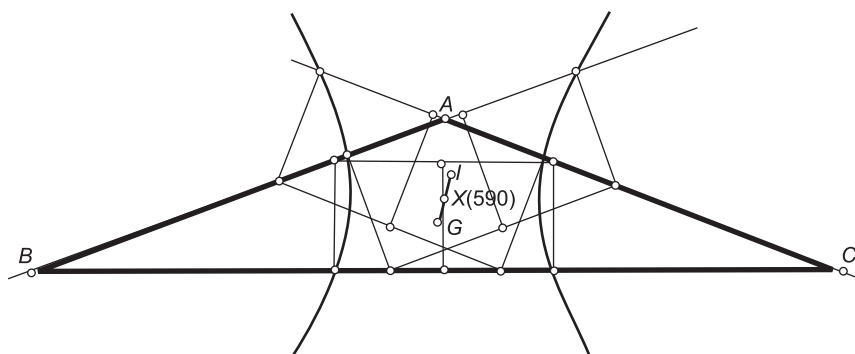


Рис. 17.

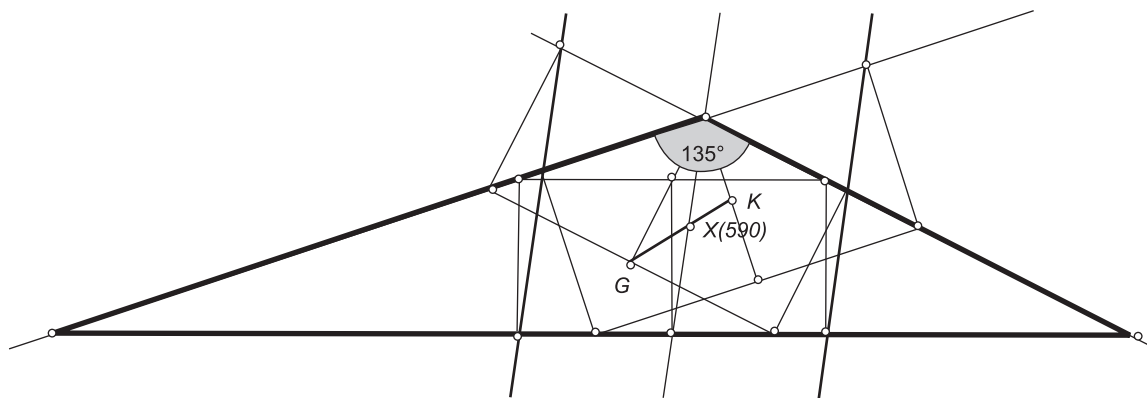


Рис. 18.

Доказательства всех этих утверждений почти дословно повторяют доказательства **теорем 5.1 и 5.2** (а также **замечания 5.2**).

Выкладки практически полностью аналогичны, нужно только всюду поменять котангенсы половинных углов на «просто» их котангенсы: $\cot \frac{A}{2} \rightarrow \cot A$, $\cot \frac{B}{2} \rightarrow \cot B$, $\cot \frac{C}{2} \rightarrow \cot C$.

Уравнение коники запишется тогда в виде

$$d(2+d)x^2 + e(2+e)y^2 + f(2+f)z^2 - 2(2+e+f+ef)zy - 2(2+f+d+fd)2(2+d+e+de)yx = 0,$$

(где $d = \cot A$, $e = \cot B$ и $f = \cot C$). Вид коники будет определяться знаком выражения $\Phi = 16(1+d)(1+e)(1+f)(3+(d+e+f))$.

И, например, при $d = -1$ (т.е. $\cot A = -1$, $A = \frac{3}{4}\pi$) коника распадется на две параллельные прямые $x - ey + (f+2)z = 0$ и $x + (e+2)y - fz = 0$. И т.д. и т.п. \square

Замечание 6.1. «Квадратный» бонус — гипербола Киперта!

Как мы видели, в конфигурации с равными окружностями прямые, соединяющие вершины исходного треугольника с противоположными точками касания пары окружностей, *конкурентны*.

А как же обстоит дело в «равноквадратном» аналоге? Касание ведь в этом случае распространяется на *все* общие точки общих сторон каждой пары.

Прежде всего, очевидно, что тройка прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими им «верхними» точками касания, пересекается в его центроиде G .

Несложно также показать (стороны квадрата, все необходимые барицентрические координаты тривиально вычисляются через углы данного треугольник), что конкурентными будут еще две тройки прямых — одна из них соединяет вершины с «нижними» точками (и точкой пересечения будет $X(485)$ с координатами

$$\frac{\sin A}{\sin A + \cos A} : \frac{\sin B}{\sin B + \cos B} : \frac{\sin C}{\sin C + \cos C} =$$

$$\sin A \csc \left(A + \frac{\pi}{4} \right) : \sin B \csc \left(B + \frac{\pi}{4} \right) : \sin C \csc \left(C + \frac{\pi}{4} \right).$$

Это — так называемая точка Вектена (Vecten point). Ее еще можно получить, построив на сторонах треугольника квадраты вовне, а затем соединить их центры с противоположными вершинами.)

Другая же проходит через вершины и *середины* противолежащих общих сторон соответствующих пар квадратов (и точкой конкурентности здесь окажется $X(3316)$ с координатами $\frac{\sin A}{2 \sin A + \cos A} : \frac{\sin B}{2 \sin B + \cos B} : \frac{\sin C}{2 \sin C + \cos C}$. (Мы оставляем все эти несложные выкладки читателю) (рис. 19).

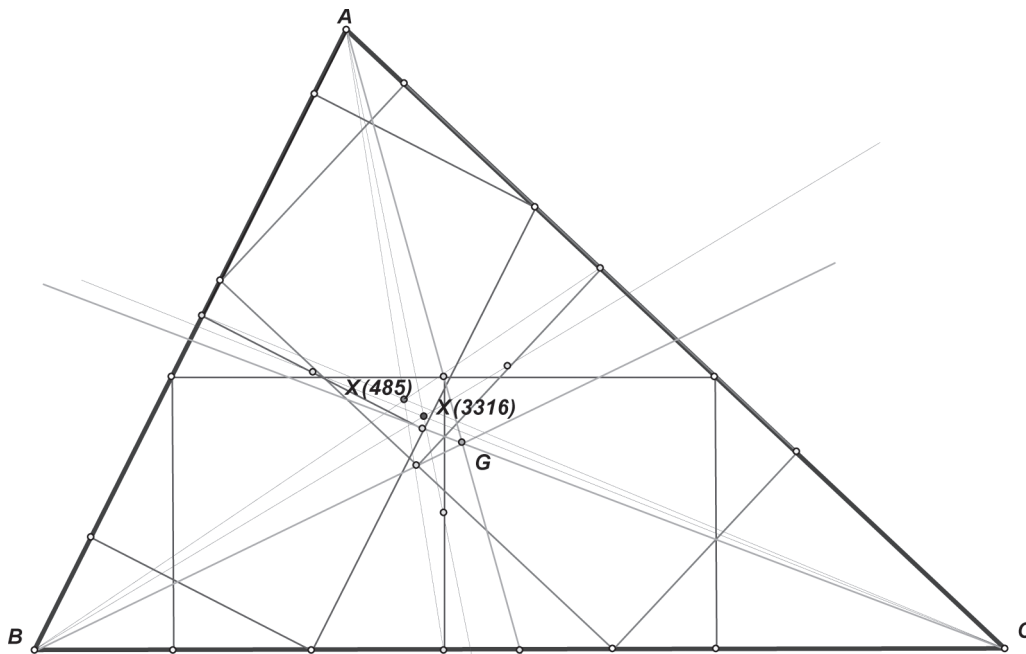


Рис. 19.

Тут-то и родилась гипотеза — а что, если существует *бесконечное множество* точек конкурентности? Только надо сообразить, по какому правилу следует задавать тройку точек на смежных сторонах. Первое, что пришло в голову (и как оказалось, пришло довольно удачно) — станем выбирать эти точки *на прямых, содержащих смежные стороны пар*, так, чтобы отрезки с началом в нижних точках общих оснований и концом в выбранной точке *имели бы длину, пропорциональную соответствующей стороне пары одинаковых квадратов, с одним и тем же*

коэффициентом пропорциональности для всех трех отрезков (причем все три отрезка откладываются одновременно либо вовне, либо вовнутрь треугольника).

Компьютер эту догадку подтвердил полностью, и даже *более чем*.

Согласно проницательной железяке — оказалось, что не только все такие тройки прямых пересекаются, но и притом «замегают» классическое ГМТ (по английскому совсем коротко — *locus*) — а именно, т.н. *гиперболу Киперта* — это гипербола, описанная около исходного треугольника ABC , и содержащая его центр тяжести G и ортоцентр H (рис. 20).

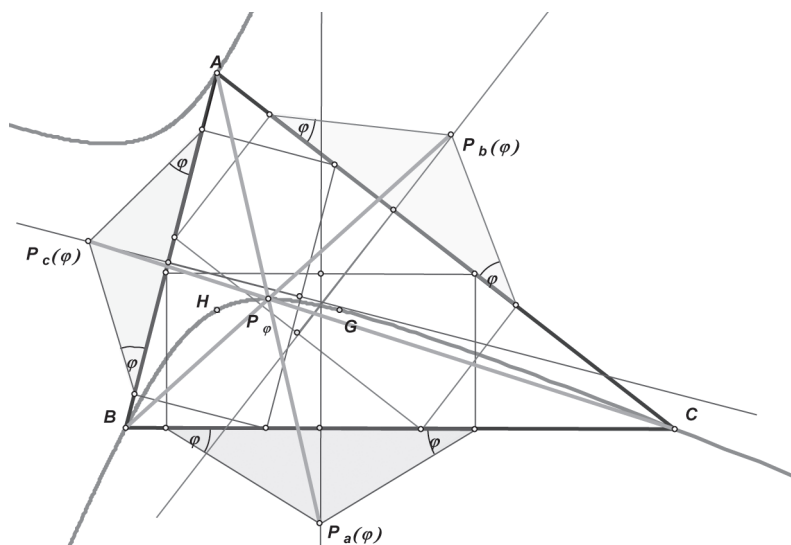


Рис. 20.

Поначалу этот факт (назовем его **утверждение 6.1**) застал меня несколько врасплох, но потом я обратил внимание на следующие два обстоятельства, в свете которых всё стало выглядеть довольно естественно.

Прежде всего заметим, что наш выбор трех точек на общих прямых в «равноквадратной» конфигурации, очевидно, эквивалентен рассмотрению вершин трех равнобедренных треугольников, построенных на смежных сторонах соответствующих пар, как на основаниях, с одинаковыми при них углами φ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), положительным значениям угла соответствует «внешняя» вершина, а отрицательным — «внутренняя». Предельному значению $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ соответствует ортоцентр H — поскольку вершины равнобедренных треугольников тогда уходят на бесконечность и «обращаются» — с проективных позиций — в бесконечно удаленные точки соответствующих высот.

А предельному же значению $\varphi = 0$ соответствует, как следует из вышесказанного, точка Вектема $X(485)$.

Но и с гиперболой Киперта дела примерно такие же.

Вот ее схожее описание посредством так называемых *перспекторов Киперта*

Утверждение 6.2. Рассмотрим вершины $P_a(\varphi)$, $P_b(\varphi)$, $P_c(\varphi)$ трех равнобедренных треугольников, построенных на сторонах исходного треугольника ABC , как на основаниях, с одинаковыми при них углами φ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), положительным значениям угла соответствует «внешняя» вершина, а отрицательным — «внутренняя» (рис. 21).

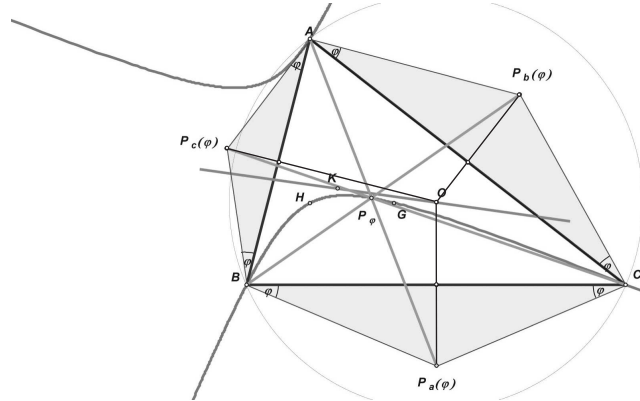


Рис. 21.

Тогда прямые $AP_a(\varphi)$, $BP_b(\varphi)$, $CP_c(\varphi)$ всегда пересекаются в некоторых точках P_φ , и все такие точки образуют описанную около треугольника ABC гиперболу, проходящую через ортоцентр H и центр G . Эта гипербола является *изогональным* образом прямой OK (так называемой *оси Брокара*).

Итак, аналогии просматриваются — но все же пока остается неясным и не доказанным совпадение и даже существование обоих ГМТ (перспекторов Киперта — и «равноквадратичных» — т.е. пока что мы не привели еще доказательств **утверждений 6.1 и 6.2**)

Ниже мы эти пробелы восполним, но прежде перечислим еще некоторые замечательные свойства гиперболы Киперта и вообще описанных коник без доказательств, просто из любви, как говорится, к чистому искусству. (Если кого-то из читателей это заинтересует — все необходимые материалы имеются в [1], [2], [6], [8], [9]. В особенности обратите внимание на [1] и [8]. Помимо всего прочего, там приведено чисто геометрическое доказательство **утверждения 6.2**, основанное на одной мощной теореме — так называемой *теореме Сонда*. Вероятно, с ее помощью можно доказать геометрически и **утверждение 6.1** — и мы очень рекомендуем попытаться это сделать).

Итак, имеют место быть:

Факт 6.1. Всякая описанная около треугольника коника есть изогональный образ некоторой прямой (если эта прямая пересекает описанную окружность в двух точках — то после преобразования получим гиперболу; если касается — параболу; если пересечений нет — то эллипс. Что связано с известным свойством описанной окружности — она и только она переходит при изогональном сопряжении в бесконечно удаленную прямую).

Факт 6.2. Если описанная коника содержит ортоцентр H , то она представляет собой *равностороннюю гиперболу* (т.е. *асимптоты ее перпендикулярны*), а центр лежит на *окружности Эйлера* (она же — *девяти точек*).

(А так как гипербола Киперта ортоцентр содержит, то указанное только что свойство справедливо и для нее.)

Факт 6.3. Четвертой точкой пересечения гиперболы Киперта с описанной окружностью является точка $X(98)$ — *точка Тарри* (Tarry point).

Факт 6.4. Асимптоты гиперболы Киперта (естественно, пересекающиеся в ее центре) есть *прямые Симсона–Валлиса*⁴, порожденные точками пересечения оси Брокара OK с описанной окружностью.

Факт 6.5. Центр гиперболы Киперта есть также точка пересечения окружности Эйлера и окружности, описанной около подерного треугольника центроида G — из двух точек пересечения это та, которая ближе расположена к ортоцентру H .

⁴Если опускать из некоторой точки P перпендикуляры на прямые, содержащие стороны треугольника ABC , то их основания служат вершинами нового треугольника, который называют *педальным* (или *подерным*) *треугольником* точки P относительно треугольника ABC . Треугольник вырождается в отрезок тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной около ABC окружности. А прямые, эти отрезки содержащие, и называются *прямыми Симсона–Валлиса* точки P .

Факт 6.6. Гипербола Киперта задается в барицентрических координатах следующим уравнением:

$$(b^2 - c^2)yz + (c^2 - a^2)zx + (a^2 - b^2)xy = 0.$$

Впечатляет, не правда ли (рис. 22)?

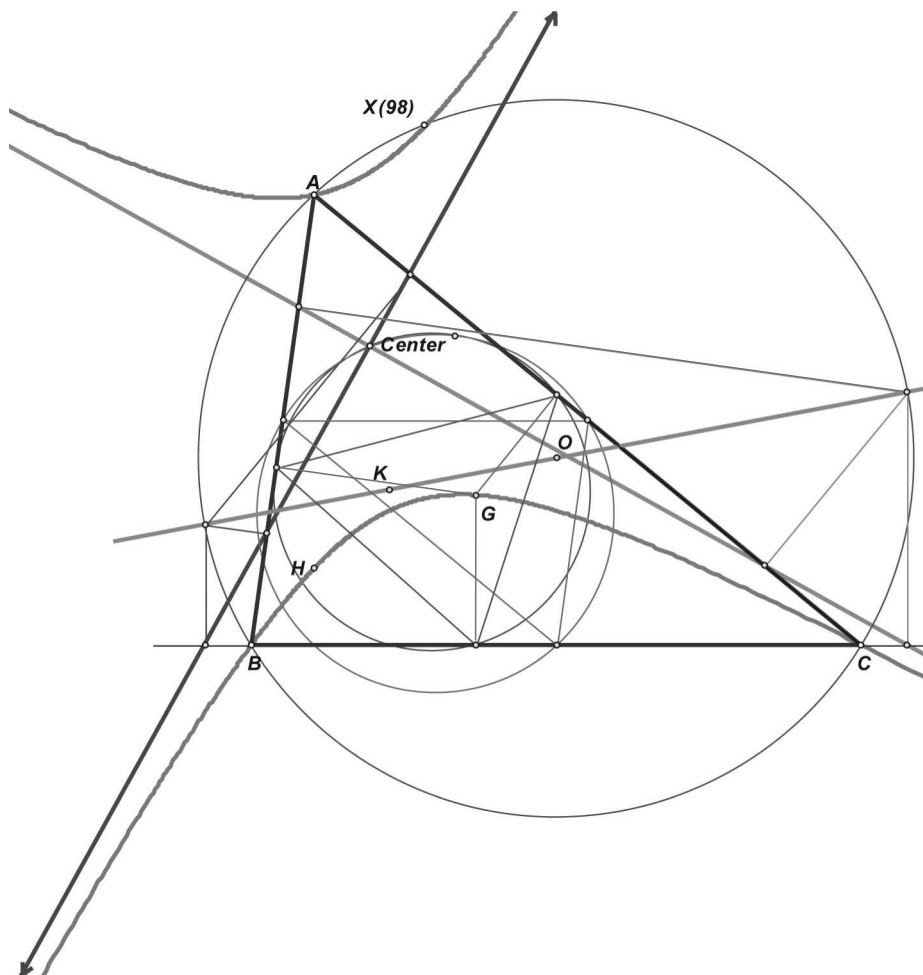


Рис. 22.

И мы теперь, с чистой совестью, переходим к обещанным доказательствам — оба они носят вычислительный характер и используют так называемые *обозначения Конвея*. Поэтому сначала несколько слов о них.

Замечание 6.2 (Обозначения Конвея и некоторые их свойства). В конце прошлого века выдающийся математик Джон Конвей ввел в элементарную геометрию следующий символ: $S_{\theta} = 2S_{ABC} \cdot \cot \theta$, где, как обычно, S_{ABC} — площадь данного треугольника ABC , а θ — некоторый произвольный угол. При этом произведение двух (и т.д.) символов обозначаются так: $S_{\theta} \cdot S_{\varphi} = S_{\theta\varphi}$.

Оказалось, что нотация Конвея буквально «заточена» под конструкции, связанные с построением треугольников на сторонах данного. Перечислим основные свойства символов Конвея.

$$1) S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}; S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}; S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Действительно, $S_A = 2S \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = 2S \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdot \frac{bc}{2S} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ (из теоремы косинусов и формулы площади треугольника «половина произведения сторон на синус угла между ними» — где, как обычно, A, B, C и a, b, c — углы и стороны произвольного треугольника ABC).

- 2) $S_B + S_C = a^2$; $S_C + S_A = b^2$; $S_C + S_A = c^2$ (сразу следует из предыдущего); и тогда еще $S_A + S_B + S_C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.
- 3) $S_{BC} + S_{CA} + S_{AB} = 4S^2$ (основано на легко проверяемом тождестве, справедливом в любом треугольнике: $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$).
- 4) Координаты ортоцентра H ($\tan A : \tan B : \tan C$) и изогонально ему сопряженного центра описанной окружности O ($a^2 \cot A : b^2 \cot B : c^2 \cot C$) в символах Конвея примут вид: $H = \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} = S_{BC} : S_{CA} : S_{AB}$ (и суммарная масса координат, если использовать их правую форму записи, есть $4S^2$, по свойству 3); $O = a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C = (S_B + S_C) S_A : (S_C + S_A) S_B : (S_C + S_A) S_B$ (по свойству 2) — и в такой форме сумма координат равна, понятно, $2(S_{BC} + S_{CA} + S_{AB}) = 8S^2$.
- 5) *Формула Конвея*. Построим на стороне BC треугольника ABC некоторый треугольник BP_aC и пусть $\angle CBP_a = \beta$, $\angle BCP_a = \gamma$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$, причем оба угла *ориентированные*: угол β положителен или отрицателен в зависимости от того, противоположны или совпадают направления обхода вершин треугольников CBP_a и CBA . Аналогично, угол γ положителен или отрицателен в зависимости от того, противоположны или нет направления обхода вершин треугольников BCP_a и BCA).

Тогда координаты новой вершины следующие: $P_a = -a^2 : S_C + S_\gamma : S_B + S_\beta$ (рис. 23).

Доказательство: Как известно, барицентрические координаты произвольной точки P можно рассматривать как *ориентируемые* площади соответствующих треугольников: $P_a = S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP}$ (перед площадью ставится знак «плюс», если соответствующий треугольник ориентирован *так же*, как исходный треугольник ABC , если же ориентации *противоположны*, то ставится «минус» — см. [2], [6], [10]).

Таким образом, для случая, изображенного на рисунке⁵, углы β, γ положительны, а в тройке площадей отрицательной будет первая.

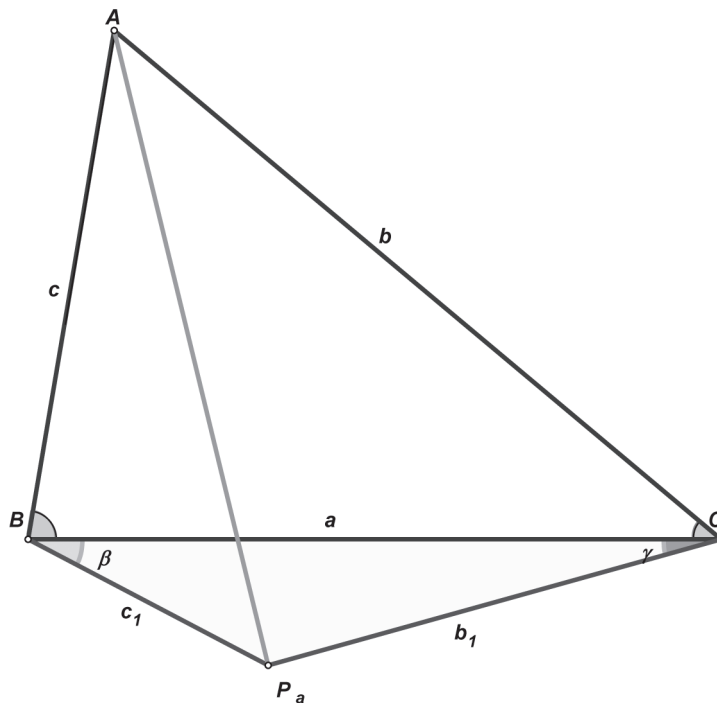


Рис. 23.

⁵Остальные разбираются аналогично — и, разумеется, результат не изменится.

Таким образом, $P_a = -\frac{1}{2}a \cdot c_1 \cdot \sin \beta : \frac{1}{2}b \cdot b_1 \cdot \sin(\gamma + C) : \frac{1}{2}c \cdot c_1 \cdot \sin(\beta + B)$ (применяем далее формулу суммы синусов, а также используем *однородность* координат)

$$= -a \cdot c_1 \cdot \sin \beta : b \cdot b_1 \cdot (\sin \gamma \cos C + \sin C \cos \gamma) : c \cdot c_1 \cdot (\sin \beta \cos B + \sin B \cos \beta).$$

Теперь умножим все координаты на $\frac{a}{c_1 \cdot \sin \beta}$ (по теореме синусов) $= \frac{a}{b_1 \cdot \sin \gamma}$, после чего первая координата сразу примет искомый вид: $-a^2$. А со второй произойдут следующие метаморфозы:

$$\frac{a \cdot b \cdot b_1 \cdot (\sin \gamma \cos C + \sin C \cos \gamma)}{b_1 \cdot \sin \gamma} = (ab \cos C + ab \sin C) \cot \gamma = (ab \sin C) \cot C + (ab \sin C) \cot \gamma =$$

$$2S \cot C + 2S \cot \gamma = S_C + S_\gamma.$$

И, точно так же, третья предстанет как сумма $S_B + S_\beta$ ⁶. □

С помощью формулы Конвея мы теперь быстренько докажем оба наших утверждения, начав со второго.

Доказательство утверждения 6.2. Действительно, воспользовавшись формулой Конвея, сразу найдем координаты вершин равнобедренных треугольников:

$$P_a(\varphi) = -a^2 : S_C + S_\varphi : S_B + S_\varphi;$$

$$P_b(\varphi) = S_C + S_\varphi : -b^2 : S_A + S_\varphi;$$

$$P_c(\varphi) = S_B + S_\varphi : S_A + S_\varphi : -c^2$$

(последние две координаты получаются из первой соответствующими циклическими сдвигами).

Поскольку уравнение прямой, проходящей через две точки, может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } (q_1 r_2 - q_1 r_2) p + (p_2 r_1 - p_1 r_2) q + (p_1 q_2 - p_2 q_1) r = 0 \text{ (см. [2], [6], [10])}, \text{ то}$$

уравнение прямой $AP_a(\varphi)$ запишется, как $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix} = 0$ и прямая будет иметь коэффициенты $0 : -r_1 : q_1$. Коэффициенты прямой $BP_b(\varphi)$ получаются из предыдущих циклическими сдвигами, в результате которых возникает тройка $r_2 : 0 : -p_2$.

Координаты точки пересечения двух прямых с известными уравнениями связаны все с тем же определителем $\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$, только две последние его строки — это уже коэффициенты прямых, а не координаты точек⁷ (см. [2], [6], [10]).

В данном случае, получаем, очевидно, такие координаты:

$$\begin{aligned} P_{a,b}(\varphi) &= \begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & -r_1 & q_1 \\ r_2 & 0 & -p_2 \end{vmatrix} = r_1 p_2 : q_1 r_2 : r_1 r_2 = \\ &= (S_B + S_\varphi)(S_C + S_\varphi) : (S_C + S_\varphi)(S_A + S_\varphi) : (S_B + S_\varphi)(S_A + S_\varphi) = \\ &= \frac{1}{S_A + S_\varphi} : \frac{1}{S_B + S_\varphi} : \frac{1}{S_C + S_\varphi}. \end{aligned}$$

⁶Совершая аналогичные преобразования, знаменатель исходной дроби $b_1 \cdot \sin \gamma$ заменять на $b_1 \cdot \sin \gamma$ уже нет необходимости.

⁷А одинаковость определителей, задающих уравнение прямой, проходящей через пару точек, и координаты точки пересечения двух прямых — есть ни что иное, как очередное проявление великого принципа проективной двойственности — см. [1], [2].

$$2S \cot B \cdot \cot \varphi + 2S \cot \varphi = \frac{S_B \cdot S_\varphi}{2S} + S_\varphi.$$

И, точно так же, $S_\gamma = \frac{S_C \cdot S_\varphi}{2S} + S_\varphi$.

Значит, $P_a(\varphi) = -a^2 \cdot 2S : 2S \cdot S_C + S_\varphi (2S + S_C) : 2S \cdot S_B + S_\varphi (2S + S_B)$.

Другие две получаются циклическими сдвигами:

$$P_b(\varphi) = 2S \cdot S_C + S_\varphi (2S + S_C) : -b^2 \cdot 2S : 2S \cdot S_A + S_\varphi (2S + S_A),$$

$$P_c(\varphi) = 2S \cdot S_B + S_\varphi (2S + S_B) : 2S \cdot S_A + S_\varphi (2S + S_A) : -c^2 \cdot 2S.$$

Совершив затем, след в след и шаг в шаг, действия, подробно описанные при доказательстве предыдущего утверждения, получим, что прямые $AP_a(\varphi)$, $BP_b(\varphi)$, $CP_c(\varphi)$ при всех значениях $\varphi (-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ пересекаются в некоторых точках

$$P_\varphi = \frac{1}{2S \cdot S_A + S_\varphi (2S + S_A)} : \frac{1}{2S \cdot S_B + S_\varphi (2S + S_B)} : \frac{1}{2S \cdot S_C + S_\varphi (2S + S_C)}.$$

Тогда множество точек, *изогонально сопряженных* точкам P_φ , точки P_φ^l — образуют прямую с параметрическим уравнением $p = 2S \cdot S_A \cdot a^2 + a^2 (2S + S_A) t : q = 2S \cdot S_B \cdot b^2 + b^2 (2S + S_B) t : r = 2S \cdot S_C \cdot c^2 + c^2 (2S + S_C) t$.

При $t = 0$ получаем точку $O = a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C$ (сократив на общий множитель $2S$) — центр описанной около исходного треугольника ABC окружности; а при $t = \infty$ — некую точку P с координатами $2S \cdot a^2 + S_A \cdot a^2 : 2S \cdot b^2 + S_B \cdot b^2 : 2S \cdot c^2 + S_C \cdot c^2$, которые естественным образом разбиваются на две подсистемы, задающие точки $O = a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C$ (с суммарной массой $8S^2$, по свойству 4) символов Конвея) и точку Лемуана $K = 2S \cdot a^2 : 2S \cdot b^2 : 2S \cdot c^2$ (с суммарной массой $2S(a^2 + b^2 + c^2)$).

Из правила рычага тогда вытекает, что точка P лежит внутри отрезка OK (т.е. на *оси Брокара*) и делит его в отношении $\frac{OP}{KP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{S}$.

Таким образом, множество «равноквадратичных» перспекторов есть также изогональный образ прямой OK , и, значит (по **утверждению 6.2**) действительно представляет собою *гиперболу Киперта*. \square

§ 7. Коники бывают не всегда

Все вышеприведенные конструкции невольно наводят на мысль о том, что *любая конфигурация*, подчиненная тем или иным законам симметрии и порождающая 6 точек, связанных с треугольником и расположенных попарно на прямых, содержащих его стороны, *всегда задает некоторую конику*, через них проходящую.

Увы, это совершенно не соответствует действительности — жизнь, как и положено, устроена не так просто, как порой хотелось бы.

Приведем один пример, развеивающий описанную иллюзию.

Речь пойдет о трех окружностях, вписанных в углы треугольника и попарно касающихся друг друга — так называемых *окружностях Мальфатти*.

Рассмотрим 6 точек $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$, в которых эти окружности касаются сторон треугольника (рис. 25).

Кажется, куда уж симметричнее! — своею симметрией данная конструкция не может не радовать глаз человека, даже далекого от геометрии. И потому у нас и тени сомнений не возникло относительно принадлежности этих точек некоему эллипсу — тем более изготовленный на скорую руку рисунок в *Живой Геометрии* наше предположение, вроде бы, подтвердил.

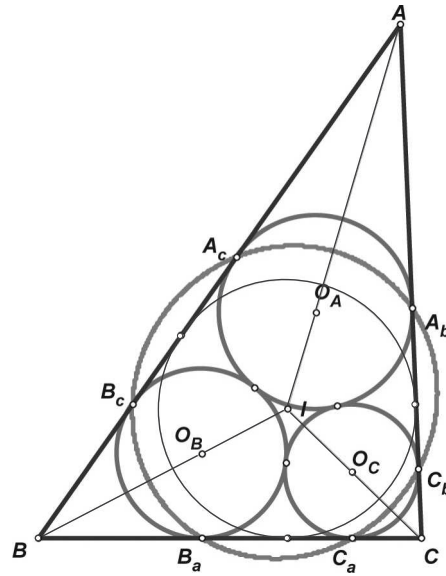


Рис. 25.

$BC_a = 5,52378$ см, $CA_b = 4,04904$ см, $AB_c = 8,19303$ см, $BC_a \cdot CA_b \cdot AB_c = 183,25$ см³, $CB_a = 3,87017$ см, $BA_c = 6,06245$ см, $AC_b = 7,83$ см, $CB_a \cdot BA_c \cdot AC_b = 183,79$ см³

Прозрение наступило лишь после довольно продолжительных и бесплодных усилий, втуне потраченных на проверку условия Карно (**теорема 1.1**).

Поскольку $AA_b = AA_c$, $BB_c = BB_a$ и $CC_a = CC_b$ (как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки), то нужно было проверить справедливость равенства

$BC_a \cdot CA_b \cdot AB_c = CB_a \cdot BA_c \cdot AC_b$ — а оно весьма упорно этому сопротивлялось (рис. 26).

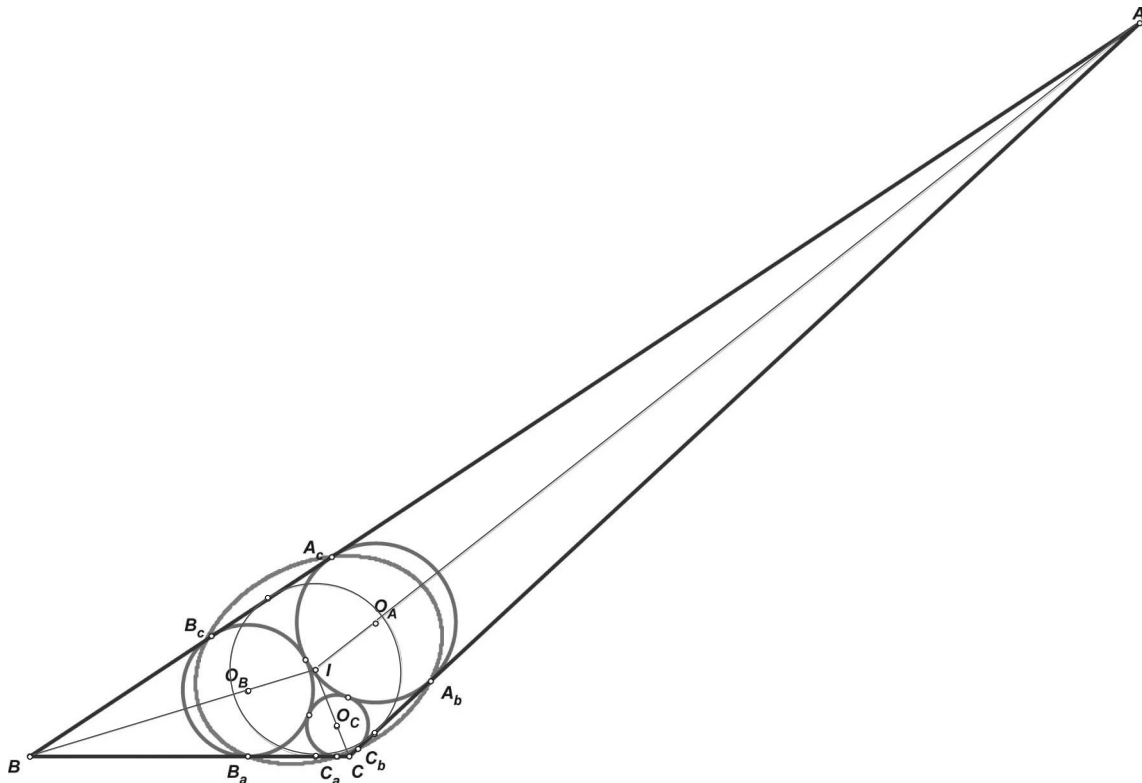


Рис. 26.

$CA_b = 2,33164$ см, $AB_c = 23,48376$ см, $BC_a \cdot CA_b \cdot AB_c = 355,61$ см³, $CB_a = 2,13965$ см, $BA_c = 7,65637$ см, $AC_b = 22,51$ см, $CB_a \cdot BA_c \cdot AC_b = 368,82$ см³

Тогда, наконец, вернулись к рисунку, «вытянули» треугольник — и стало заметно, что точка B_c на картинке не лежит на эллипсе, проходящем через остальные 5 точек.

Померили затем нужные расстояния и вычислили их произведения (программа позволяет это делать) — как видно по рисунку, они оказались различными.

Различными они оказались и на «стартовой» картинке (где совсем нелегко усмотреть, что одна из точек на конике не лежит) — правда, лишь в десятых долях. На столь деликатную разницу глаз, видимо, не реагирует.

§ 8. Методико-лирическое отступление: точка Мальфатти как личная точка отсчета

Остановлюсь на конфигурации Мальфатти более подробно — ведь это именно она в большой степени способствовала моему увлечению *элементарной геометрией*, впоследствии переросшему в нечто большее, чем просто забава — речь, конечно, идет об исключительно субъективном восприятии.

А дело было так.

В конце 90-ых годов прошлого века один из моих учеников (я к тому времени уже лет пять как успел отработать преподавателем математики в школе) пожаловался, что никак не может справиться с геометрической задачей из какой-то заочной олимпиады — по типу нынешних «Покори Воробьевы Горы» (ведущие ВУЗы страны, надо сказать, еще и в застойные даже годы пытались как-то заранее отбирать будущих потенциальных студентов — вот и проводили подобные конкурсы, только, может не под такими броскими лозунгами, за версту отдающими рекламным запахом⁹). Вроде бы, то была олимпиада *физтеховская* — а сама задача формулировалась так:

В углы произвольного треугольника вписали окружности таким образом, что они еще и внешне касаются друг друга попарно. Доказать¹⁰, что прямые, соединяющие вершины треугольника с противоположными точками касания, пересекаются в одной точке.

Решить мне ее сразу, естественно, не удалось — знаний было маловато: я не только что не подозревал о существовании каких-то там окружностей Мальфатти, но даже и о теореме Чевы имел весьма смутное представление — например, о ее формулировке в *форме синусов* и слыхом не слыхивал.

Тем не менее, долго и упорно над нею бился, а параллельно почитывал (не помню при каких обстоятельствах попавшую мне в руки) книжечку [10] — такое хорошо и интересно написанное введение в барицентрическое исчисление и геометрию треугольника. Почитывал так просто, как говорится, для души — и надо же такому случиться, именно *геометрия масс* и послужила ключом к разгадке.

В один прекрасный день казавшиеся разрозненными фрагменты головоломки (со множеством вроде бы лишних кусочков и каких-то явно недостающих деталей) вдруг сложились в единую и прекрасную картину.

Трудно передать словами нахлынувшие тогда на меня эмоции — весь этот прямо-таки *шквал позитива* (вот еще одно модное в наши дни словечко). Думается, его можно только пережить лично, и именно решив самостоятельно какую-нибудь сложную задачу (не обязательно математическую) каким-нибудь неожиданным и красивым способом¹¹ (рис. 27).

⁹Лично для меня отталкивающим. Кстати, по ихнему, по рекламному — никакой не лозунг, а слоган.

¹⁰Тогда еще, если не изменяет память, в ходу бытовало именно такое, тоталитарно-безликое обращение в жестко-требовательной форме, вскорости поменявшееся во всей учебной литературе на более толерантное «докажите». Следующий шаг, вероятно, состоял бы в повсеместном внедрении оборота «докажите, пожалуйста» — а там и вовсе изъятия этого, на глазах устаревающего морально, слова из обращения.

¹¹Скажем, это не совсем те ощущения, когда первый раз прыгаешь с парашютом — хотя и те, и эти сопровождаются выбросом большого количества адреналина в кровь. Кому-то может показаться удивительным или смешным или чем еще похуже — но это ничтожное событие (в сравнении с тогдашними катаклизмами — на всякий случай напомним: то были суровые девяностые годы — поставившие большинство населения России и

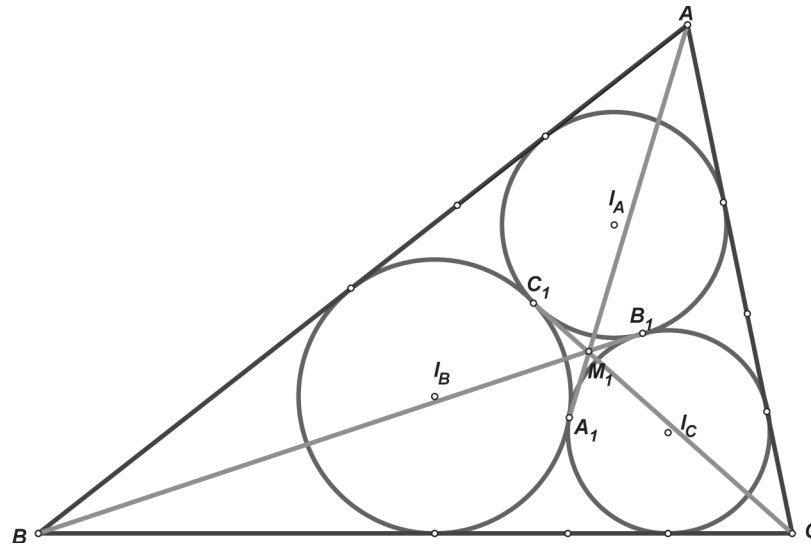


Рис. 27.

Теорема 8.1. Прямые, соединяющие вершины треугольника с противоположными точками касания окружностей Мальфатти друг с другом, пересекаются в некоторой точке M_1 — так называемой первой точке *Аджима–Мальфатти*¹² ($X(179)$ — 1st Ajima-Malfatti point).

*Доказательство*¹³. Рассмотрим систему материальных точек: $-\frac{1}{r}I; \frac{1}{r_A}I_A; \frac{1}{r_B}I_B; \frac{1}{r_C}I_C$ (т.е., нагрузим центр вписанной окружности ее «обратным» радиусом¹⁴, взятым со знаком «минус», а центры окружностей Мальфатти — их «обратными» радиусами) — см.[2], [3], [6], [10].

Пусть M_1 — центр масс этой системы. Однако подсистема $-\frac{1}{r}I; \frac{1}{r_A}I_A$ имеет (по правилу рычага) своим центром масс вершину A , а подсистема $\frac{1}{r_B}I_B; \frac{1}{r_C}I_C$ точку касания A_1 .

Отсюда (из правила группировки и рычага) следует, что центр масс M_1 лежит на прямой AA_1 (рис. 28).

Два аналогичных разбиения ($-\frac{1}{r}I; \frac{1}{r_B}I_B$ и $\frac{1}{r_A}I_A; \frac{1}{r_C}I_C$, а также $-\frac{1}{r}I; \frac{1}{r_C}I_C$ и $\frac{1}{r_A}I_A; \frac{1}{r_B}I_B$) указывают на то, что M_1 принадлежит также прямым BB_1 и CC_1 . \square

Захотелось, конечно, с кем-нибудь из людей сведущих поделиться оригинальным решением. Среди моих тогдашних знакомых таковых было тогда не много — а один из них, довольно близкий приятель еще по мехмату, *Андрей Михайлович Сторожев*¹⁵, как раз незадолго до описываемых событий отбыл на ПМЖ в Австралию.

«братских» республик на грань, а то и за грань выживания) — ну, решил какую-то там себе задачку с кружочками — и связанные с ним переживания до сих пор иногда греют душу ровным, теплым светом; а грязь всякая как-то хотя и вспоминается, но не часто (тем паче, пищу такого рода щедро поставляют дни нынешние. . . но «ходить бывает склизко по камешкам иным — итак, о том, что близко, мы лучше умолчим»). А вообще-то, подобное инфантильное мировосприятие, как оказалось, свойственно многим *ботаникам* (согласно всяческим словарикам молодежного сленга и жаргона, так и кишащим в интернете, — это человек, который слишком много учится, уделяя мало внимания другим сторонам жизни). К примеру, вот какие откровения выдающегося отечественного математика Д. Е. Меньшова можно прочитать в [13]: «... В 1915 году мы занимались функциональными рядами, а в 1916 году — ортогональными рядами. А потом наступил тысяча девятьсот семнадцатый год. Это был очень памятный год в нашей жизни, в тот год произошло важнейшее событие, повлиявшее на всю нашу дальнейшую жизнь: мы стали заниматься тригонометрическими рядами.» Печально и страшно на самом деле то, что подрастает (а то уже и выросло) поколение, отдельным представителям которого приходится пояснять, а в чем же здесь, собственно, прикол.

¹²Что она так называется, и в геометрии известна с довольно давних пор — я узнал значительно позднее.

¹³и я до сих пор убежден — изящнее, чем приведенное ниже, доказательства попросту не существует.

¹⁴Величина, обратная радиусу окружности называется ее кривизной.

¹⁵Сильный алгебраист-профессионал и крупный специалист в области олимпиадной математики. В Австралии долгое время участвовал в подготовке сборных команд для участия в ММО и Турнире Городов, в проведении местных математических соревнований среди школьников и студентов.

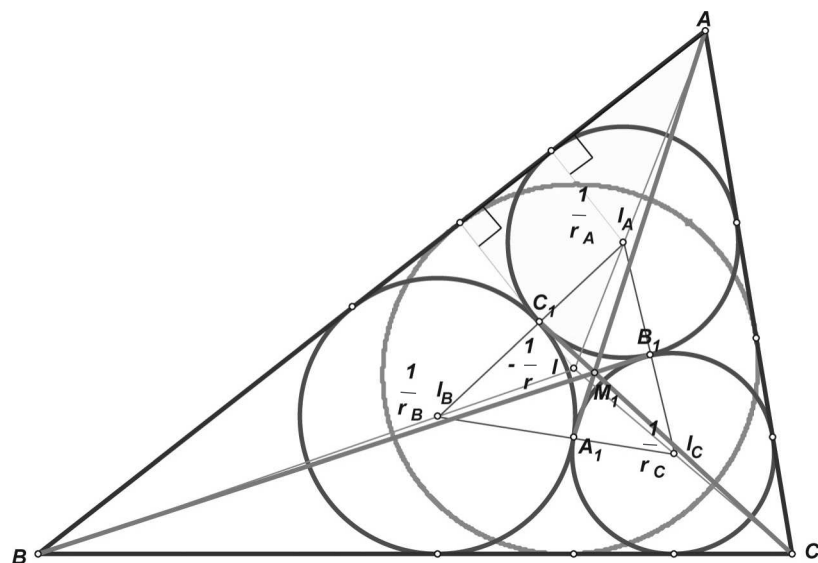


Рис. 28.

Ну, я и отправил соответствующую депешу в далекий город *Канберра* — старым дедовским способом, поскольку интернет в те времена еще только начинал опутывать планету своею паутиной и до России практически не дотянулся.

И где-то через месяц пришел ответ с *оказией* — мне позвонил некий человек, летавший по каким-то там своим делам в Австралию, и при встрече передал небольшую посылку от А.М. — с письмом и книжкой.

Андрей отвечал, что сравнительно недавно читал где-то статью про *конфигурацию Мальфатти* — в которой, в частности, говорилось, что конкурентность прямых сохранится, если рассмотреть тройку *любых* окружностей, вписанных в углы треугольника — а точки касания заменить тогда на *центры внутренних гомотетий* (т.е. с отрицательным коэффициентом), переводящих окружности друг в друга (рис. 29).

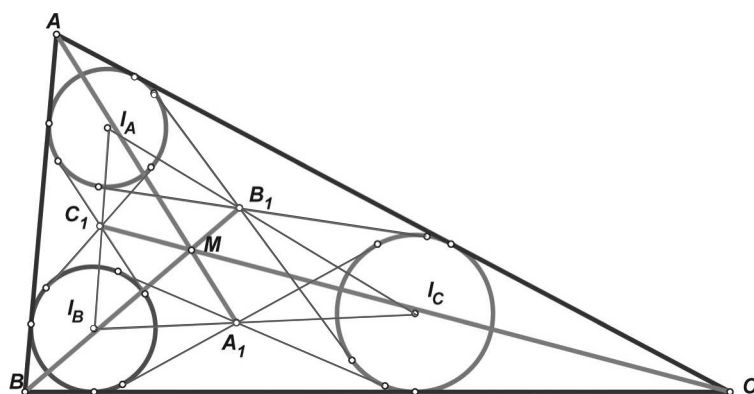


Рис. 29.

И понятно почему — приведенное доказательство с массами, очевидно, «работает» безо всяких изменений и в этой, немного обобщенной, ситуации.

Однако в статье содержался и другой, совершенно новый и неожиданный для меня факт:

оказывается, конкурентность сохранится, если вместо вершин исходного треугольника взять его *эксцентры* ¹⁶.

А именно, справедлива

¹⁶От английского слова *excenter* — центр вневписанной окружности.

Теорема 8.2. Если в условиях предыдущей теоремы заменить вершины исходного треугольника ABC его эксцентрами, то соответствующая тройка прямых также пересечется в одной точке. Прямые, соединяющие вершины треугольника с противолежащими точками касания окружностей Мальфатти друг с другом, пересекаются в некоторой точке M_2 — так называемой второй точке Аджима–Мальфатти. ($X(180)$ — 2nd Ajima-Malfatti point) (рис. 30).

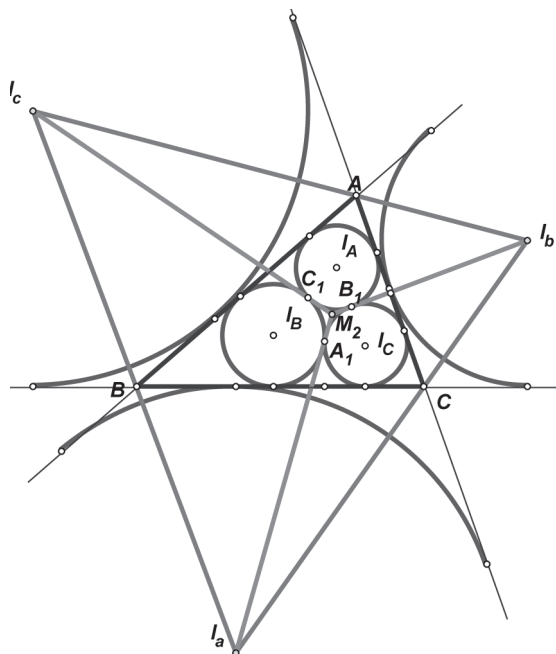


Рис. 30.

«В Штатах (писал далее Сторожев) есть человек, который подобными вещами сильно интересуется и даже сочинил на сей счет целую книгу. Случайно она попалась мне в руки — и, так как, насколько вижу, все эти геометрические заморочки тебя серьезно интересуют (а вот меня — так впечатляют совсем не очень), то пересылаю ее тебе вкупе с *мейлом* автора.»

Автором этим оказался не кто иной, как будущий создатель фундаментальнейшей *ЕТС* [5] Кларк Кимберлинг, а книжка [14] — ее бумажной предтечей, так сказать, *лайт-версией* — содержащей описание лишь 400 точек (текущий электронный вариант насчитывает 5509 таких — по состоянию на июль месяц 2013 года)¹⁷.

И книжка и мейл очень даже пригодились — и получилось так, что где-то года через три именно Кларк Кимберлинг редактировал мою первую англоязычную статью по геометрии [15]¹⁸.

А вот одолеть «вневыписанный» случай мне все никак не удавалось, как я над ним не бился.

И вот, наконец, кто-то надоумил обратиться за помощью к *Игорю Федоровичу Шарыгину* — выдающемуся отечественному геометру и блестящему композитору задач¹⁹.

¹⁷То есть, фундаментальность вроде бы уже и зашкаливает, переходя в явный, с прагматической точки зрения, абсурд. Но, располагая собственной именной парой центров $X(3588)$ и $X(5393)$ — мне бы не хотелось, разумеется, судить столь строго.

Сам Кларк любит, между прочим, уподоблять центральные точки звезд в ночи и ему (как, впрочем, и любому «точечному» фану - фанатику) наверняка пришлось бы по вкусу следующие строки:

*Послушайте! Ведь, если звезды зажигают —
значит — это кому-нибудь нужно?
Значит — кто-то хочет, чтобы они были?
Значит — кто-то называет эти плевочки
жемчужиной?*

¹⁸Словом, как в одном из рассказов Аверченко, «...и всё заверте...» И возможно ли, спрашивается, после всего произошедшего, отрицать столь явное вмешательство Руки Провидения в жизнь и судьбу отдельно взятого человека?

¹⁹И, добавлю — Личности, с большой буквы. Исчезающий вид *Homo Sapiens*'а в эпоху вырождения.

И.Ф. тогда где-то раз в неделю читал лекции учителям в МГИУУ²⁰, что возле метро «Аэропорт». Там-то я его и однажды подстерег в перерыве между парой в коридорчике и рассказал о никак не поддающейся решению задачке — так и познакомились. Поразила, помнится, внешняя открытость и демократичность общения И.Ф.²¹ — он внимательно и довольно доброжелательно выслушал совершенно неизвестного ему «человека с улицы», сказал, что подумает и назначил встречу на следующей лекции.

И действительно, в ту, вторую встречу растолковал мне решение, основанное, по его словам, на некоем методе, им специально разработанным для задач такого рода.

Суть метода будет видна из приведенного далее доказательства, но прежде сформулируем и докажем одно свойство трапеции, которым существенно воспользуемся в процессе последующих рассуждений.

Лемма 8.1 (об отрезке, параллельном основанию трапеции). В трапеции $ABCD$ с основаниями $a = AD, b = BC$ провели отрезок MN , параллельный основанию. Известно отношение, в котором этот отрезок делит боковые стороны: $\lambda = \frac{BM}{AM} = \frac{CN}{DN}$. Тогда длина этого отрезка l однозначно определяется длинами оснований и отношением: $l = \frac{\lambda a + b}{\lambda + 1}$.

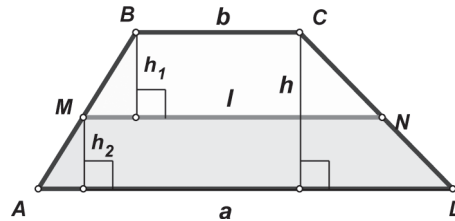


Рис. 31.

Доказательство леммы. Воспользуемся методом площадей. Пусть h_1, h_2, h — соответственно высоты в трапециях $MDCN, AMND$ и $ABCD$. Понятно, что $h = h_1 + h_2$ и $\frac{h_1}{h_2} = \frac{BM}{AM} = \lambda$ (что вытекает из подобия соответствующих прямоугольных треугольников) (рис. 31).

Поскольку $S_{ABCD} = S_{MBCN} + S_{AMND}$, то, с учетом формулы площади трапеции («полусумма оснований на высоту»), имеем:

$$\frac{1}{2} (a + b) h = \frac{1}{2} (b + l) h_1 + \frac{1}{2} (a + l) h_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + b) (h_1 + h_2) = (b + l) h_1 + (a + l) h_2.$$

Разделив обе части последнего равенства на h_2 , получим линейное уравнение относительно неизвестного l : $(a + b) (\lambda + 1) = (b + l) \lambda + (a + l)$. Отсюда, после раскрытия скобок и приведения подобных, приходим к искомому отношению. \square

Доказательство теоремы 8.2 (по И. Ф. Шарыгину). Согласно *обратной теореме Чевы в форме синусов* (см. [1]–[4], [6]), достаточно убедиться в том, что произведение отношений синусов соответствующих углов равно единице:

$$\frac{\sin \angle I_c I_a A_1}{\sin \angle I_b I_a A_1} \cdot \frac{\sin \angle I_a I_b B_1}{\sin \angle I_c I_b B_1} \cdot \frac{\sin \angle I_b I_c C_1}{\sin \angle I_a I_c C_1} = 1.$$

Опустив перпендикуляры из точки A_1 на стороны $I_c I_a$ и $I_a I_b$, получим отрезки $d_{A,b}$ и $d_{A,c}$ соответственно. Понятно, что $\frac{\sin \angle I_c I_a A_1}{\sin \angle I_b I_a A_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{d_{A,b}}{d_{A,c}}$.

Точно так же, опустив перпендикуляры из точек B_1 (на стороны $I_a I_b$ и $I_b I_c$) и C_1 (на стороны $I_b I_c$ и $I_c I_a$) — получим еще две пары отрезков: $d_{B,c}$, $d_{B,a}$ и $d_{C,a}$, $d_{C,b}$ соответственно.

²⁰Московский Государственный Институт Усовершенствования Учителей; затем — МИПКРО (Московский Институт Повышения Квалификации Работников Образования); а ныне — МИОО (Московский Институт Открытого образования). Последняя аббревиатура, будто бы неявно, но предполагает наличие всяких там МИЗО — заведений, не так ли?

²¹Впрочем, позже мне приходилось выдвигать И.Ф. и в других, далеко не столь добродушных, состояниях.

Тогда в условии Чебы отношения синусов можно заменить на отношения этих отрезков — т.е. в терминах их длин, показать нужно, что $\frac{d_{A,b}}{d_{A,c}} \cdot \frac{d_{B,c}}{d_{B,a}} \cdot \frac{d_{C,a}}{d_{C,b}} = 1$ (рис. 32).

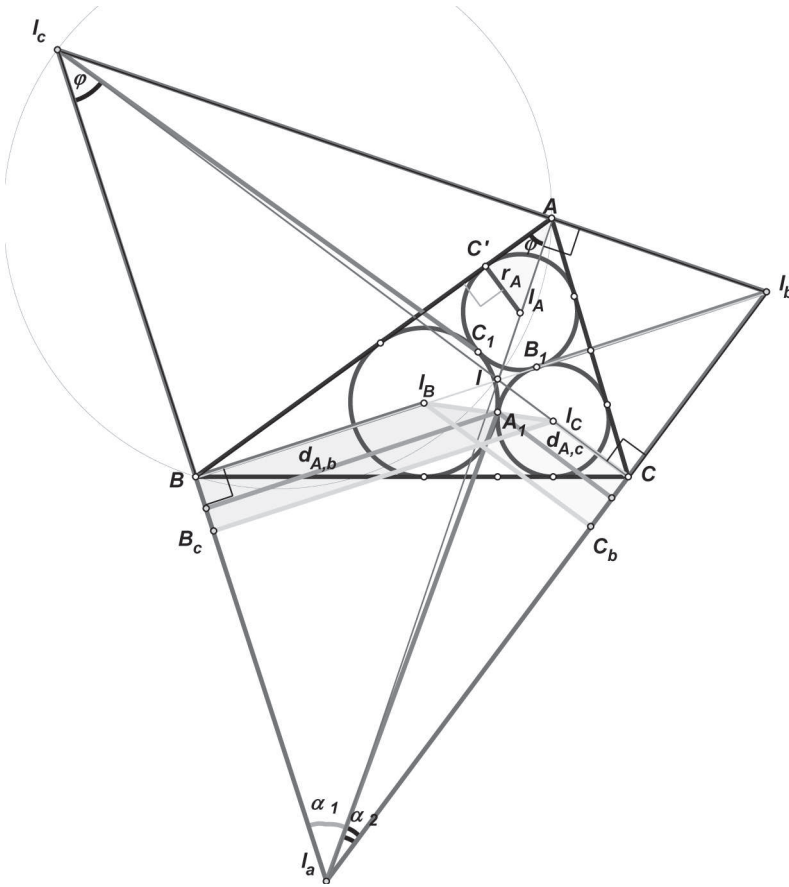


Рис. 32.

Оказывается, вся эти расстояния выражаются через *радиусы окружностей Мальфатти* r_A, r_B, r_C и через *отрезки* d_A, d_B, d_C .

Естественно, речь идет собственно о длинах отрезков (в случаях, когда это не ведет к путанице, мы игнорируем слово «длина»), соединяющих центры окружностей Мальфатти с соответствующими вершинами исходного треугольника (отметим здесь также, что отрезки эти будут перпендикулярны соответствующим сторонам эксцентрического треугольника, например $I_A A_1 \perp I_b I_c$ — поскольку внутренние биссектрисы исходного треугольника в «эксцентрическом» треугольнике «оборачиваются» его высотами — ведь внутренняя и внешняя биссектрисы угла треугольника *перпендикулярны* — и *центры окружностей Мальфатти принадлежат этим «биссектрисам-высотам»*) — а также тройку ρ_A, ρ_B, ρ_C отрезков, соединяющих эксцентры с соответствующими центрами окружностей Мальфатти (отрезки $I_a I_A$ и т.д.).

Обозначим также буквой $\varphi = \angle I_a I_c I = \angle IAB$ (как опирающиеся на одну дугу, поскольку четырехугольник $B I A I_c$ является вписанным в окружность, будучи составлен из двух прямоугольных треугольников с общей гипотенузой).

Перейдем от слов, наконец, к делу — т.е. непосредственно к выводу нужных соотношений.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $I_C I_B B C_c$ и заметим, что отрезок $d_{A,b}$ параллелен ее основанию и делит боковые стороны в отношении $\lambda_{A,b} = \frac{I_B A_1}{I_C A_1} = \frac{r_B}{r_C}$. Из **леммы 8.1** тогда следует, что $d_{A,b} = \frac{\frac{r_B}{r_C} \cdot I_C B_c + I_B B}{1 + \frac{r_B}{r_C}}$. Но, в наших обозначениях, $I_B B = d_B$, а $I_C B_c = I_C I_C \cdot \sin \varphi = I_C I_C \cdot \frac{r_A}{I_A A}$ (из прямоугольного треугольника $I_A A C'$) $= \rho_C \cdot \frac{r_A}{d_A}$.

Итак, после приведения к общему знаменателю,

$$d_{A,b} = \frac{d_A \cdot d_B \cdot r_C + r_A \cdot r_B \cdot \rho_C}{(r_B + r_C) d_A}.$$

Понятно, что $d_{A,c}$ получается из полученной формулы нехитрой перестановкой буквенных индексов по принципу $B \leftrightarrow C$, $A \leftrightarrow A$ ²²:

$$d_{A,c} = \frac{d_A \cdot d_C \cdot r_B + r_A \cdot r_C \cdot \rho_B}{(r_B + r_C)d_A}.$$

Знаменатели у обоих выражений, заметим, *одинаковы*. И одинаковы, в силу «равноправного» их описания с точностью до «циклического» переименования вершин и сторон исходного треугольника, будут также знаменатели и в двух других парах.

Значит, в произведении Чебы знаменатели каждой пары сократятся, и в выражении $\frac{d_{A,b}}{d_{A,c}} \cdot \frac{d_{B,c}}{d_{B,a}} \cdot \frac{d_{C,a}}{d_{C,b}}$ следует учитывать лишь *числители* соответствующих выражений.

А тогда понятно, что *равны числители* следующих пар: $d_{A,b}$, $d_{B,a}$ (получающиеся друг из друга перестановками $B \leftrightarrow A$, $C \leftrightarrow C$ — которые, очевидно, не меняют этих выражений); и, на схожих основаниях, $d_{B,c}$, $d_{C,b}$ и $d_{C,a}$, $d_{A,c}$.

Вот мы и показали, наконец-то, что $\frac{d_{A,b}}{d_{A,c}} \cdot \frac{d_{B,c}}{d_{B,a}} \cdot \frac{d_{C,a}}{d_{C,b}} = 1$. \square

Как видим, метод И.Ф. и вправду обладает большой пробивной силой и в данном случае сработал безукоризненно²³.

А все же, хотелось бы взглянуть на чисто геометрическое доказательство. Что таковое имеется — лично у меня сомнений нет (как нет и сомнений в том, что оно должно быть достаточно изысканным и трудно находимым).

Может, обнаружить его посчастливится кому-нибудь из читателей?

§ 9. «Полувписанный» эллипс

В этом параграфе мы рассмотрим конику, связанную с так называемыми *полувписанными* окружностями.

Напомним, что внутренней (внешней) полувписанной окружностью называют окружность, вписанную в один из углов треугольника и касающуюся описанной около треугольника окружности внутренним (внешним) образом.

Эти окружности порождают довольно-таки богатый набор любопытных геометрических утверждений (о многих из которых можно прочесть в [6], [11], [12]).

Одно из них (вовсе не очевидное! — доказательства имеются в указанном выше списке) сейчас поможет нам выявить очередную конику.

Утверждение 9.1. Если рассмотреть полувписанную внутренним образом в треугольник окружность, то отрезок, соединяющий точки ее касания со сторонами угла, в который она вписана, проходит через инцентр²⁴ I исходного треугольника, причем делится им пополам.

Сформулируем теперь основную теорему этого раздела.

Теорема 9.1. Все шесть точек касания трех невписанных внутренним образом в треугольник окружностей с его сторонами лежат на одной конике с центром в точке I .

Доказательство. Рассмотрим три четырехугольника с вершинами в точках касания (рис. 33):

$$A'_1 A'_2 B'_2 C'_1, B'_1 B'_2 C'_2 A'_1, C'_1 C'_2 A'_2 B'_1$$

²²Усомнившиеся могут применить аналогичные рассуждения в отношении трапеции $I_B I_C C C_b$ — либо просто посмотреть на нее (и соседку) внимательно.

²³Понятно, что и здесь конкурентность сохраняется, если точки касания заменить на внутренние центры гомотетий, переводящих пары вписанных в углы треугольника окружностей друг в друга — приведенное доказательство легко «выдерживает» эти незначительные усиления условия.

²⁴От английского incenter — центр вписанной окружности.

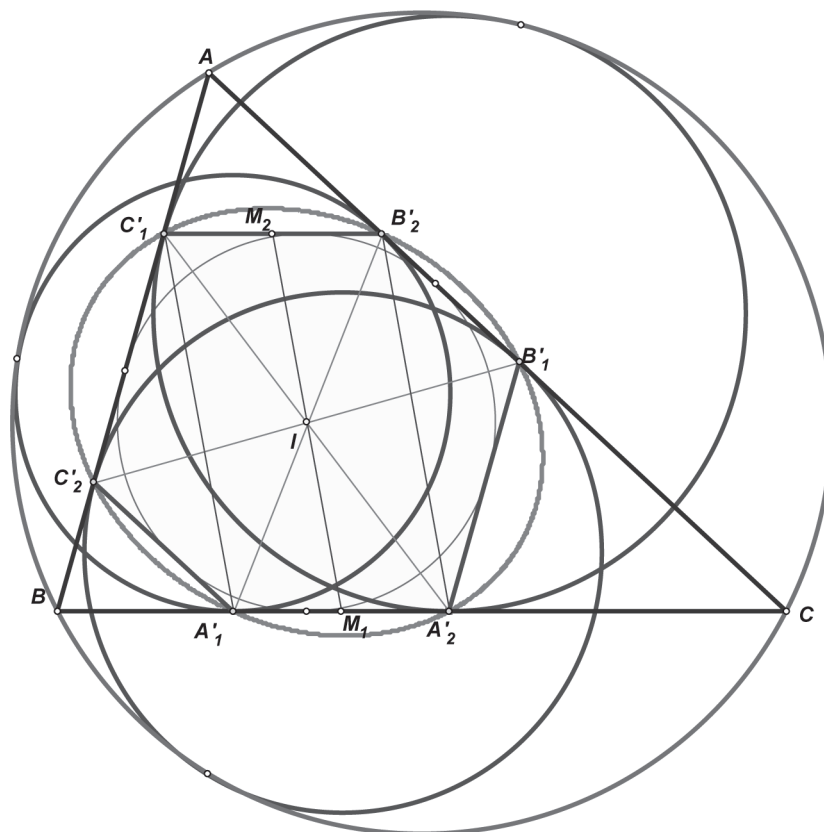


Рис. 33.

Согласно **утверждению 9.1**, диагонали каждого из них делятся инцентром I пополам, поэтому все четырехугольники являются параллелограммами.

Значит, шестиугольник $A'_1 A'_2 B'_1 B'_2 C'_1 C'_2$ представляет собою *шестиугольник-параллелограмм* (и, более того, *выпуклый и центрально-симметричный шестиугольник*).

А около любого шестиугольника-параллелограмма, в силу обратной теоремы Паскаля, всегда можно описать конику (см. **доказательство теоремы 2.1** из § 2). А поскольку *средняя линия* всякого параллелограмма проходит через его центр симметрии (одна из таких линий, $M_1 M_2$ — изображена на рисунке), общий для трех рассматриваемых — то точка I и будет центром этой коники (каждая средняя линия проходит через середины параллельных отрезков с концами на конике — и потому проходит через ее центр — см. [1], [6]). \square

Замечание 9.1. Пользуясь известными (см. [6], [12]) соотношениями, выражающими радиусы внутренних полувыписанных окружностей через углы исходного треугольника и радиус вписанной в него окружности: $r_A = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}$; $r_B = \frac{r}{\cos^2 \frac{B}{2}}$; $r_C = \frac{r}{\cos^2 \frac{C}{2}}$, легко можно вычислить барицентрические координаты вершин коники и выписать ее уравнение.

Рекомендуем читателю все же проделать все необходимые выкладки.

Замечание 9.2. В рассматриваемый шестиугольник можно также и *вписать* конику. Так как его *главные* диагонали пересекаются в одной точке, то это сразу следует из *теоремы Брианшона* — см. [1], [6].

И возникают стандартные вопросы: что представляет собой уравнение коники, каков ее вид, координаты ее центра и т.д.

Но в этих заметках мы исследовали исключительно *описанные около шестиугольников коники*.

Изучение же *коник вписанных* — тема несколько иная, и вполне заслуживает, на наш взгляд, отдельной статьи.

Замечание 9.3. Если положиться на мнение компьютера, то *при замене внутренних полувыписанных окружностей на внешние* (замене либо полной, либо частичной — в любых комбина-

циях), аналогичной коники, вообще говоря, *существовать не будет*.

Теорема 9.2. Рассматриваемая коника представляет собой *эллипс*.

Доказательство. На сей раз обойдемся без выписывания соответствующего алгебраического выражения, знак которого определяет вид коники — а просто докажем, что коника, описанная около произвольного выпуклого шестиугольника-параллелограмма, есть эллипс (рис. 34).

Очевидно, что, в силу выпуклости, такой шестиугольник всегда можно «вписать» в треугольник.

Понятно также, что центр описанной около шестиугольника коники (существующей по обратной теореме Паскаля) лежит на пересечении отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

Следовательно, центр нашей коники находится внутри шестиугольника и является *конечной* (обычной) точкой плоскости. Поэтому коника не может быть параболой (центр которой — бесконечно удален). Не может она быть и параболой вырожденной, т.е. парой параллельных прямых — хотя центром такого «вырожденца» и можно считать любую (конечную и бесконечную!) точку на «серединной» параллели, но, ясное дело, вершины *выпуклого* шестиугольника не могут разместиться на каких-либо *двух* прямых.

Стало быть, описанная коника представляет собой либо эллипс, либо гиперболу.

Будем теперь сдвигать, параллельно соответствующим сторонам треугольника, соответствующие стороны шестиугольника — к вершинам треугольника.

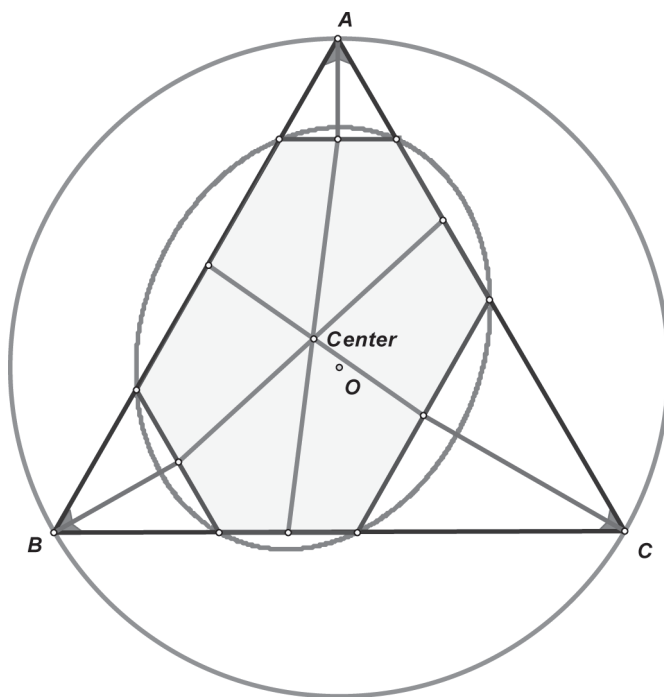


Рис. 34.

Из соображений непрерывности следует, что при таких деформациях коника *не может изменить свой вид* — ведь для этого она должна пережить «параболическую катастрофу», т.е. в какой-то момент обернуться параболой (возможно, вырожденной).

А это-то и невозможно, так как центр по-прежнему конечен (в любой момент деформации) и двух прямых по-прежнему не достаточно, чтобы разместить на них все вершины.

В предельном случае, когда деформируемые отрезки стянутся в точки, совпадающие с вершинами треугольника, мы получаем описанную около треугольника окружность — частный случай эллипса.

Значит, описанная около изначального шестиугольника коника также представляла собою эллипс. \square

§ 10. Коники от Григорьева

В заключение мы бегом ознакомимся еще с тремя кониками, открытыми зимой этого года учащимся Московского Химического Лицея (ГОУ № 1303) *Дмитрием Григорьевым*.

Поскольку все они были включены в Коллекцию Кимберлинга, ограничимся простым отсюда «копипастом»²⁵ (рис. 35)²⁶.

$X(5430)$ = ЦЕНТР ПЕРВОЙ КОНИКИ ГРИГОРЬЕВА

Барицентрические координаты (здесь и далее Кимберлинг приводит лишь первую координату — остальные получаются из нее соответствующими циклическими сдвигами. Он часто так поступает в случаях “громоздких” координат. — *Прим. ред.*):

$$(1 + \csc A/2)(\csc B/2 + \csc C/2) - \cot 2A/2.$$

Пусть L_A — прямая, параллельная прямой BC и касающаяся описанной окружности треугольника ABC с отрицательной стороны от BC (это область, не содержащая точку A); определим L_B и L_C циклически. Положим $A' = L_B \cap L_C$, определим B' и C' циклически. Пусть A_B — образ точки A при симметрии с осью $A'B'$, а A_C — образ точки A при симметрии с осью $A'C'$. Пусть C_1 — точка касания вписанной окружности треугольника $A_B A B$ и прямой AB , а B_2 — точка касания вписанной окружности треугольника $A_C A C$ и прямой AC . Определим A_1, B_1 и C_2, A_2 циклически. Тогда $|AB_2| = |CB_1|, |BA_1| = |CA_2|, |AC_1| = |BC_2|$, так что по теореме Карно, шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на некоторой конике. Уравнение первой коники Григорьева в барицентрических координатах следующее:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 \csc(A/2)yz - 2 \csc(B/2)zx - 2 \csc(C/2)xy = 0$$

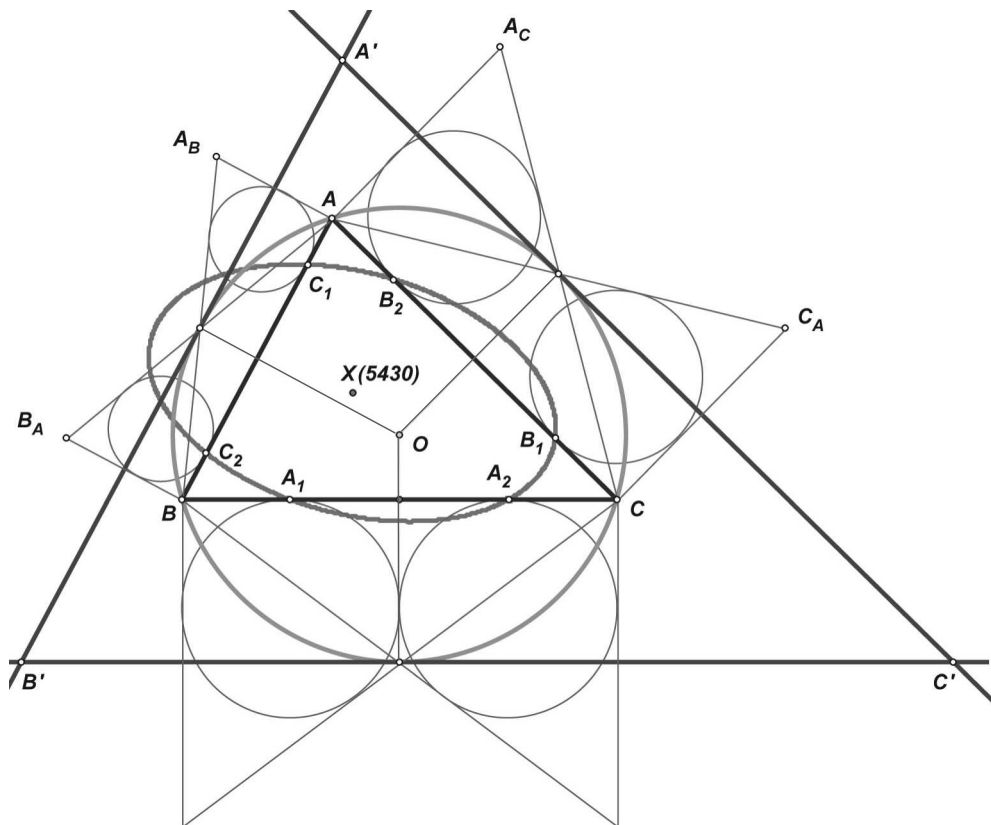


Рис. 35.

²⁵ В русском переводе — *прим. ред.*

²⁶ При желании читатель без труда выведет приведенные ниже уравнения и координаты

(Сообщено Алексеем Мякишевым от имени Дмитрия Григорьева, Москва, 28 марта, 2013 г.)

Перспектором первой коники Григорьева является центр $X(188)$. (Randy Hutson, 30 марта, 2013 г.)

Если у вас есть программа “The Geometer’s Sketchpad”, вы можете увидеть $X(5430)$

$X(5430)$ лежит на прямых, соединяющих такие центры: $\{8, 188\}$, $\{236, 3161\}$

$X(5431)$ = ЦЕНТР ВТОРОЙ КОНИКИ ГРИГОРЬЕВА

Барицентрические координаты:

$$(1 + \sec A/2)(\sec B/2 + \sec C/2) - \tan 2A/2.$$

Пусть L_A — прямая, параллельная BC и касающаяся описанной окружности треугольника ABC в положительной стороне от BC (область, содержащая точку A), определим L_B и L_C циклически. Пусть $A' = L_B \cap L_C$; определим B' и C' циклически. Пусть A_B — образ точки A при симметрии относительно прямой $A'B'$, а A_C — образ A при симметрии относительно $A'C'$. C_1 — точка касания вписанной окружности треугольника $A_B A B$ и прямой AB , B_2 — точка касания вписанной окружности треугольника $A_C A C$ и прямой AC . Определим A_1, B_1 и C_2, A_2 циклически. Тогда $|AB_2| = |CB_1|$, $|BA_1| = |CA_2|$, $|AC_1| = |BC_2|$, так что по теореме Карно шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на некоторой конике. Барицентрическое уравнение второй коники Григорьева следующее:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 \sec(A/2)yz - 2 \sec(B/2)zx - 2 \sec(C/2)xy = 0$$

Перспектором второй коники Григорьева является центр $X(5451)$. (Randy Hutson, 8 апреля 2013 г.) См. также $X(5452)$.

Если у Вас есть программа “The Geometer’s Sketchpad”, можно увидеть $X(5431)$.

$X(5431)$ лежит на прямой, соединяющей центры $\{178, 5451\}$ (рис. 36).

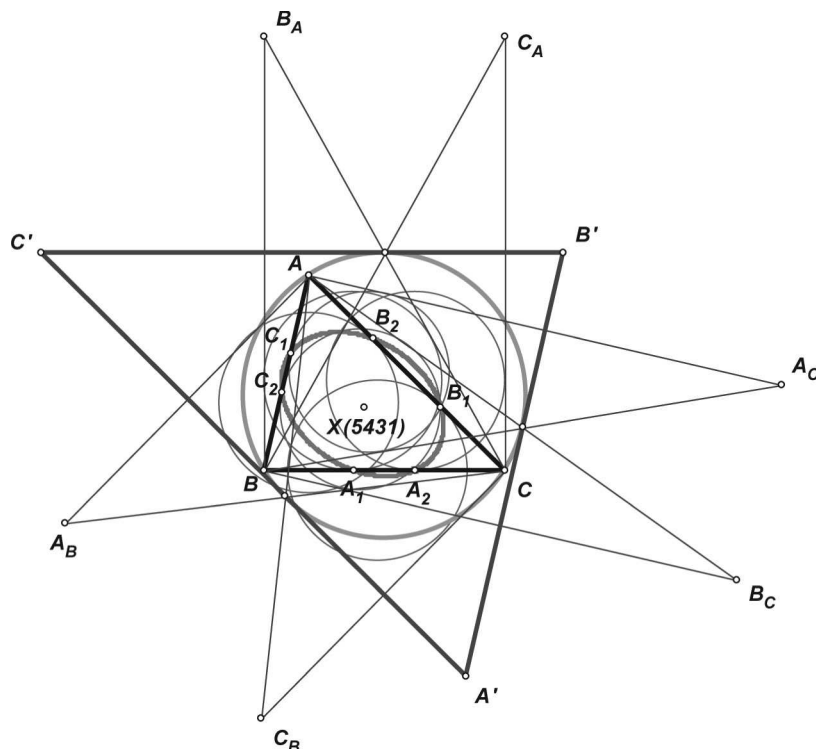


Рис. 36.

$X(5452)$ = ЦЕНТР КОНИКИ ПРИВАЛОВА

Трилинейные координаты: $f(A, B, C) : f(B, C, A) : f(C, A, B)$, где

$$f(A, B, C) = \cos^2(A/2)[- \sin A \cos^2(B/2) + \sin B \cos^2(C/2) + \sin C \cos^2(A/2)]$$

(Randy Hutson, 19 апреля 2013 г.).

Барицентрические координаты:

$$a^2(b+c-a)[a^3-a^2b-a^2c+ab^2+ac^2-(b+c)(b-c)^2].$$

Пусть $A'B'C'$ — антикомплементарный (также антидополнительный или антисерединный) треугольник треугольника ABC (треугольник антикомплементарен данному, если данный треугольник является для него серединным). Пусть A'' — образ точки A' при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC , определим B'' и C'' циклически. Пусть A_1 — точка касания вписанной окружности треугольника $A''BC$ и прямой BC , A_2 — точка касания вписанной окружности треугольника $A'BC$ и BC . Определим точки B_1, B_2, C_1, C_2 циклически. Тогда $|AC_2| = |BC_1|, |BA_1| = |CA_2|, |CB_1| = |AB_2|$, так что по теореме Карно шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на некоторой конике, названной в честь *Александра Привалова*²⁷. Барицентрическое уравнение конки Привалова следующее:

$$x^2 + y^2 + z^2 + f(a, b, c)yz + f(b, c, a)zx + f(c, a, b)xy = 0,$$

где $f(a, b, c) = 2[(b-c)^2 + a^2]/[(b-c)^2 - a^2]$, или, равносильно,

$$x^2 + y^2 + z^2 - g(A, B, C)yz - g(B, C, A)zx - g(C, A, B)xy = 0,$$

где $g(A, B, C) = \tan(B/2)\tan(C/2)[\cot^2(B/2) + \cot^2(C/2)]$.

(Сообщено Дмитрием Григорьевым 15 апреля, 2013 г.).²⁸

Коника Привалова — двучеванная коника центров $X(7)$ и $X(8)$, т.е. коника, проходящая через вершины *intouch*²⁹ и *extouch*³⁰ треугольников³¹. Ее центр $X(5452)$ является также центром коники, проходящей через $A, B, C, X(101), X(294), X(651), X(666)$, которая изогонально сопряжена к прямой Жергонна (так иногда называют прямую Эйлера антикомплиментарного треугольника). Эта описанная коника является геометрическим местом трилинейных полюсов прямых, проходящих через центр $X(55)$. Также, $X(5452) =$ “перекрестная разность” (на английском — *crossdifference* — о смысле этого термина можно прочесть в *Словаре (Glossary)* у Кимберлинга [5]) каждой пары точек на поляре центра $X(6)$ относительно вписанной окружности. (Randy Hutson, 19 апреля 2013 г.).

При помощи программы “The Geometer’s Sketchpad” можно увидеть $X(5452)$.

$X(5452)$ лежит на следующих прямых, соединяющих центры: $\{2, 1814\}, \{6, 354\}, \{9, 1040\}, \{33, 210\}, \{55, 2195\}, \{218, 226\}, \{219, 3686\}, \{294, 497\}, \{650, 1376\}, \{2238, 2911\}$

$X(5452) = X(2)$ — “чевасопряженная” (на английском — *Ceva conjugate* — о смысле этого термина можно прочесть в *Словаре (Glossary)* у Кимберлинга [5]) к $X(55)$ (рис. 37).

²⁷ Александр Андреевич Привалов — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики в Московском Химическом Лицее. Доводится внучатым племянником знаменитому русскому математику Ивану Ивановичу Привалову.

²⁸ Дмитрий Григорьев здесь фактически приводит другое геометрическое описание коники из § 4 — см. теорему 4.2 и замечание 4.4.

²⁹ Так в англоязычной литературе принято называть треугольник с вершинами в точках касания вписанной в данный треугольник окружности с его сторонами. В нашей литературе этот треугольник часто именуют *Треугольником Жергонна*.

³⁰ Так в англоязычной литературе принято называть треугольник с вершинами в точках касания внеписанных в данный треугольник окружностей с его сторонами.

³¹ А вот «вписанно-описанная» суть этой коники, не укрывшаяся от Кимберлинга.

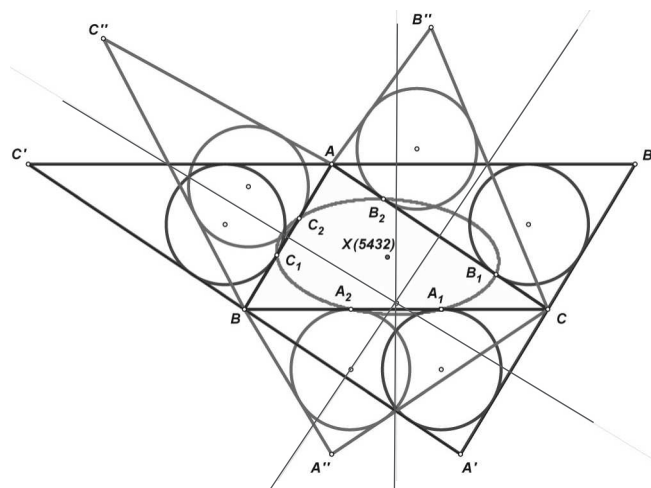


Рис. 37.

Литература

1. Акопян А., Заславский А. Геометрические свойства кривых второго порядка. - М.: МЦНМО, 2011.
2. Мякишев А. Элементы геометрии треугольника. - М.: МЦНМО, 2009.
3. Прасолов В. Задачи по планиметрии. - М.: МЦНМО, 2007.
4. Шарыгин И. Геометрия. Планиметрия. (Задачник 9-11). - М.: Дрофа, 2001.
5. Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. URL: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>
6. Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle. URL: <http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf>
7. Куланин Е, Мякишев А. О некоторых кониках, связанных с треугольником. - М.: Институт логики, 2008.
8. Zaslavsky A. Geometry of Kiepert and Grinberg–Myakishev hyperbolas. URL: <http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp65-71.pdf>
9. Grinberg D., Myakishev A. A Generalization of the Kiepert Hyperbola. URL: <http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200429index.html>
10. Балк М., Болтянский И. Геометрия масс. / Серия Библиотечка «Квант», выпуск 61. - М.: Наука, 1987. URL: http://www.math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant/kvant_61.djvu
11. Кожевников П. «Полувписанная» окружность: Сборник «Математика в задачах» (под редакцией Заславского А. и др.). - М.: МЦНМО, 2009.
12. Кушнир И. Геометрия на баррикадах (глава 17.6 «Этюд о полувписанной окружности»). - Киев: Знання на Україні, 2011.
13. Тихомиров В. О математиках — с улыбкой // Квант. - 1996. - № 4.
14. Kimberling C. Triangle Centers and Central Triangles // Congress Numeration (Winnipeg, Canada). - 1998. - Vol. 129.
15. Myakishev A. Some Properties of the Lemoine Point. URL: <http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200113index.html>

Мякишев Алексей Геннадьевич,
Москва.

E-mail: myakishev62@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16 июля 2013 г.