ISSN 1992-6138

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год семнадцатый

№ 4 (68)

октябрь -декабрь 2013 г.

Москва

О некоторых «треугольных» кониках

Алексей Мякишев

В статье изучаются коники, проходящие через точки, выбранные специальным образом относительно данного треугольника. В последнее время эта тематика стала очень популярной. Новый импульс ее развитию придали гипотезы Штейнгарца об эллипсах, опубликованные в [1], [2]. Некоторые из них опровергнуты, а некоторые доказаны, в частности, в статье [3], опубликованной в предыдущем номере нашего журнала. Изложение специального “механического” метода доказательства, при помощи которого можно доказать одну из гипотез, а также получить ряд других планиметрических результатов, содержится в [4].

Теоремы 4.1 и 4.2 настоящей статьи получены совместно с Д. С. Григорьевым, учащимся 11 класса Московского Химического Лицея № 1303.

Конец доказательства в тексте помечается значком □ Для котангенса используется международное обозначение cot, в отличие от принятого в России ctg.

Статья печатается с продолжением.

§ 1. Вводная часть

Как хорошо известно, *три* различные точки *общего* положения[1] однозначно определяют проходящую через них окружность. Через четыре же произвольные точки окружность, вообще говоря, провести нельзя. Поэтому ситуации, когда существует окружность, проходящая через те или иные *четыре* точки некой геометрической конфигурации, следует отнести к *специальным* (нетипическим).

Подобные замечания, с некоторыми поправками, можно отнести и к *коникам*[2].

А именно, известно, что через любые *пять* различных точек общего положения[3] можно провести конику, и притом только одну (см. [5], [10]). К *специальным* здесь, следовательно, можно отнести ситуации, когда коника проходит через какие-либо *шесть* точек геометрической конфигурации.

В нашей работе мы предъявим несколько такого рода коник — большинство из них, насколько нам известно, ранее в работах по элементарной геометрии не появлялось.

Все они, так или иначе, связаны с треугольником[4].

Помимо доказательств существования, будут найдены *центры* рассматриваемых коник, некоторые из которых ныне пополнили фундаментальную *Энциклопедию Треугольных Центров* профессора Кларка Кимберлинга, (см. [9]).

В последующих вычислениях мы будем активно применять барицентрические координаты (все необходимые сведения о которых содержатся, например, в [6], [10]).

В качестве главного орудия будет неоднократно использована так называемая

---

[1]Т.е., в данном случае, не лежащие на одной прямой или, как еще говорят, *неколлинеарные*.

[2]Под этим термином будем подразумевать *эллипс, параболу* или *гиперболу* — т.н. *невырожденные коники*.

А, скажем, пару параллельных (а то и совпадающих) прямых — можно считать «вырожденной» параболой. Эти прямые симметричны относительно любой точки, лежащей на прямой, им параллельной и содержащей середины всех отрезков с концами на этих прямых.

Пару же пересекающихся прямых можно рассматривать как «вырожденную» гиперболу.

[3]Т.е. никакие *три* из которых не лежат на одной прямой.

[4]Отсюда, понятно, и название *треугольные коники*. См. также некоторые классические вещи о них в [12].

Теорема 1.1 (Карно). Пусть $A_1, A_2 \in (BC); B_1, B_2 \in (CA); C_1, C_2 \in (AB)$. Тогда эти шесть точек лежат на одной конике, если и только если выполнено *условие Карно*:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) = 1 \quad (\text{см. [5], [10]}).$$

Из этой теоремы, в свой черед, сразу вытекают два полезных следствия, которыми также воспользуемся в дальнейшем.

Следствие 1.1. Пусть шесть точек попарно расположены на прямых, содержащих стороны некоторого треугольника ABC: $A_1, A_2 \in (BC); B_1, B_2 \in (CA); C_1, C_2 \in (AB)$, причем пары векторов $(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CA_2}), (\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{AB_2})$ и $(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BC_2})$ равны по величине и противоположны по направлению (т.е. либо одновременно смотрят «внутрь» треугольника, либо — «вовне»).

Тогда эти шесть точек лежат на одной конике (рис. 1).

Доказательство. Рассмотрим, например, «внутренний» случай («внешний» совершенно аналогичен). Пусть $BC = a, CA = b, AB = c$ и $BA_1 = CA_2 = x, CB_1 = AB_2 = y, AC_1 = BC_2 = z$. Тогда

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) =$$
$$= (-\frac{x}{a-x} \cdot -\frac{a-x}{x}) \cdot \left(-\frac{y}{b-y} \cdot -\frac{b-y}{y}\right) \cdot \left(-\frac{z}{c-z} \cdot -\frac{c-z}{z}\right) = 1,$$

и, в силу теоремы 1.1, рассматриваемые точки принадлежат одной конике. □

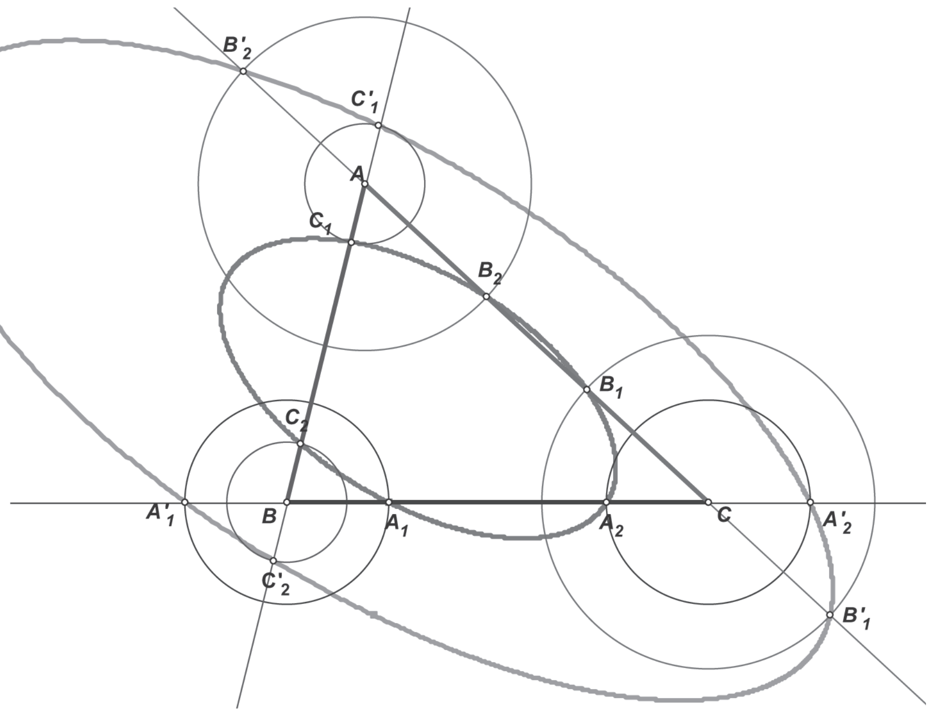

Рис. 1.

Следствие 1.2. Если шесть точек, расположенных на сторонах (или их продолжениях) некоторого треугольника можно разбить на две тройки, каждая из которых является основаниями *конкурентных*[5] *чевиан*[6], то существует коника, содержащая эти шесть точек (рис. 2).

[5]Т.е. пересекающихся в одной точке.

[6]Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками на прямых, содержащих противолежащие стороны.

Доказательство. Следует дважды применить *обратную теорему Чевы* (см. [5]–[8], [10]), а затем воспользоваться теоремой Карно:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right)=1\cdot 1=1.\ \square$$

Наконец, нам понадобятся следующие три «барицентрических» факта.

Теорема 1.2 (Уравнение коники в барицентрических координатах). В барицентрических координатах уравнение коники имеет вид[7] (см. [10]):

$$ux^2+vy^2+\omega z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0.$$

Теорема 1.3 (Определение вида коники и координат центра по ее уравнению). Пусть уравнение коники задано: $ux^2+vy^2+\omega z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$. Введем следующие обозначения: $U=vw-f^2$, $V=wu-g^2$, $W=uv-h^2$, $F=gh-uf$, $G=hf-vg$, $H=fg-wh$. Тогда *вид коники* зависит от знака выражения $\Phi=U+V+W+2(F+G+H)$: Если $\Phi>0$, то коника является эллипсом, если $\Phi=0$ — параболой, а если $\Phi<0$ — гиперболой.

Центр коники имеет координаты $(U+G+H : V+F+H : W+F+G)$ (см. [10]).

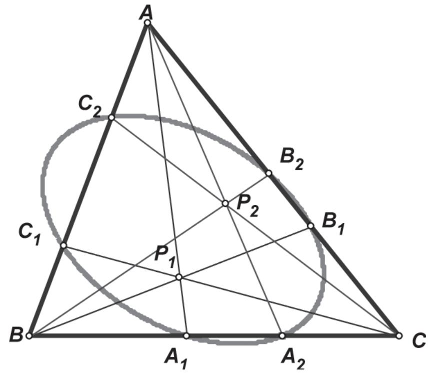

Рис. 2.

§ 2. Изотерический[8] эллипс

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и поделим каждую из его сторон на три равные части. Тогда, оказывается, будет справедлива следующая

Теорема 2.1. Точки *«растроения»* $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на конике с центром в G — точке пересечения медиан[9] треугольника ABC, причем диагонали вписанного в конику шестиугольника, а также отрезки соединяющие середины его противоположных[10] сторон — будут делиться этой точкой пополам (см. рис. 3).

Доказательство. То, что указанные шесть точек лежат на одной конике, немедленно получим, воспользовавшись следствием 1.1, поскольку $BA_1=CA_2=\frac{a}{3}, CB_1=AB_2=\frac{b}{3}, AC_1=BC_2=\frac{c}{3}$.

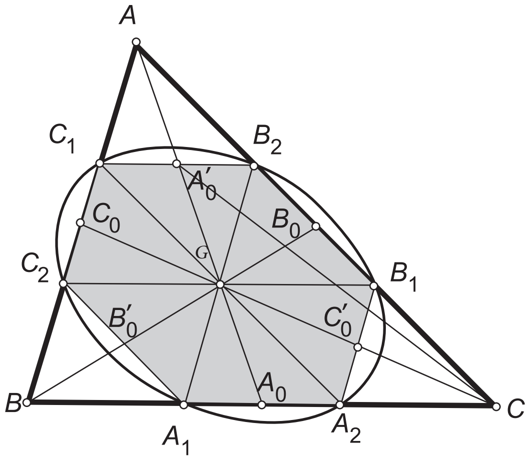

Рис. 3.

А если еще заметить, что противоположные стороны рассматриваемого шестиугольника *параллельны* (как это следует из теоремы *Фалеса*), то существование коники можно доказать и по-другому, посредством *обратной теоремы Паскаля* ([5], [10]), которая гласит:

[7]И является однородным как относительно коэффициентов, так и относительно переменных, т.е. не меняется (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель.

[8]От греческого «*isor*» — *равный* и латинского «*ter*» — *три.*

[9]Ее еще часто называют попросту *центроидом.*

[10]Т.е. идущих через две.

Если точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны некоторого шестивершинника, лежат на одной прямой, то его вершины лежат на одной конике.

А в нашем шестиугольнике противоположные стороны *параллельны* — т.е., с проективной точки зрения, точки их пересечения лежат на *бесконечно удаленной прямой* ([5], [6], [10]).

Для доказательства же того, что центром коники является центроид G, мы применим теорему о том, что *середины пучка параллельных хорд коники лежат на прямой, проходящей через ее центр*[11] (см. [5], [10]).

Действительно, очевидно[12], что диагональ C_1A_2 параллельна AC, середина AC, точка B_0, является также и серединой B_1B_2 и т.д.

Наконец, то, что все фигурирующие в условии диагонали и отрезки делятся центроидом пополам, также следует из теоремы Фалеса — ну, и из того еще, что медианы делятся цетроидом в отношении $2:1$ (см. [7], [8]) — именно поэтому прямая, например, B_1C_2 проходит через G.

Из всего вышесказанного, кстати, еще и то следует, что наш шестиугольник является *центрально симметричным, с центром симметрии в* G. □

Теперь заметим, что наша коника всегда будет представлять собою *эллипс.* (вообще говоря, то обстоятельство, что коника проходит через шесть точек, расположенных *на сторонах треугольника*, вовсе не гарантирует ее «эллипсовости» — см. рис. 4).

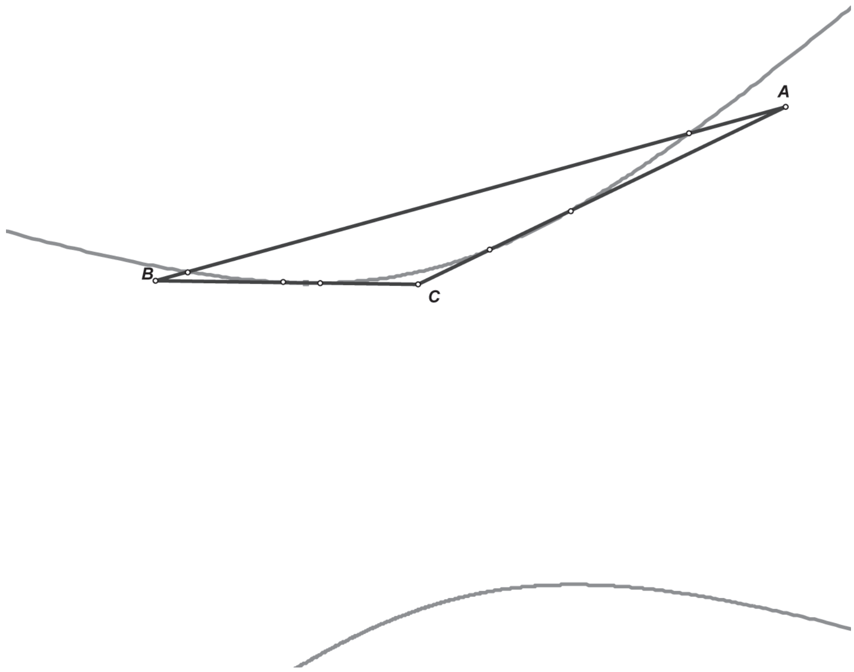

Рис. 4.

Теорема 2.2. Рассматриваемая коника является эллипсом.

Доказательство[13]. Сначала, пользуясь теоремой 1.2, составим уравнение нашей коники. Очевидно, координаты шести точек «деления на три» имеют вид:

[11] И прямая эта (или отрезок) называется *сопряженным диаметром* коники
В случае параболы ее центром следует считать бесконечно удаленную точку ее оси. Тогда хордой параболы, проходящей через ее центр, будет являться луч, параллельный оси.

[12] По теореме, конечно, Фалеса.

[13] Другое, более общее рассуждение на эту тему приведено далее, см. теорему 9.2.

$$A_1 = 0 : CA_1 : BA_1 = 0 : 2a : a = 0 : 2 : 1;\ \ A_2 = 0 : CA_2 : BA_2 = 0 : a : 2a = 0 : 1 : 2;$$
$$B_1 = CB_1 : 0 : AB_1 = b : 0 : 2b = 1 : 0 : 2;\ \ B_2 = CB_2 : 0 : AB_2 = 2b : 0 : b = 2 : 0 : 1;$$
$$C_1 = BC_1 : AC_1 : 0 = 2c : c : 0 = 2 : 1 : 0;\ \ C_2 = BC_2 : AC_2 : 0 = c : 2c : 0 = 1 : 2 : 0.$$

Подставив теперь координаты точек в уравнение коники, придем к системе из 6-ти линейных уравнений[14], которую, однако, легко решить благодаря большому количеству нулевых коэффициентов. В итоге получим, что $u = v = w = 4$; $f = g = h = -5$, т.е. уравнение коники имеет вид:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5yz - 5zx - 5xy = 0.$$

И, поскольку $U = V = W = -9$ и $F = G = H = 45$, то $\Phi = -9 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 45 = 243 > 0$ и, по теореме 1.3, наша коника является эллипсом. □

§ 3. Ортоэллипс

Проведем из вершины A произвольного треугольника ABC два луча, перпендикулярных AB и AC и таких, что они не пересекают прямую BC. Затем рассмотрим отрезок $B_2''C_1''$, вписанный в угол, образованный этими лучами, причем параллельный и равный отрезку BC. Отрезки $B_1''A_2''$ и $A_1''C_2''$ определяется аналогично. Тогда, оказывается, справедлива

Теорема 3.1. Точки $B_2'', C_1'', B_1'', A_2'', A_1'', C_2''$ лежат на эллипсе с центром в точке H — ортоцентре[15] треугольника ABC (рис. 5).

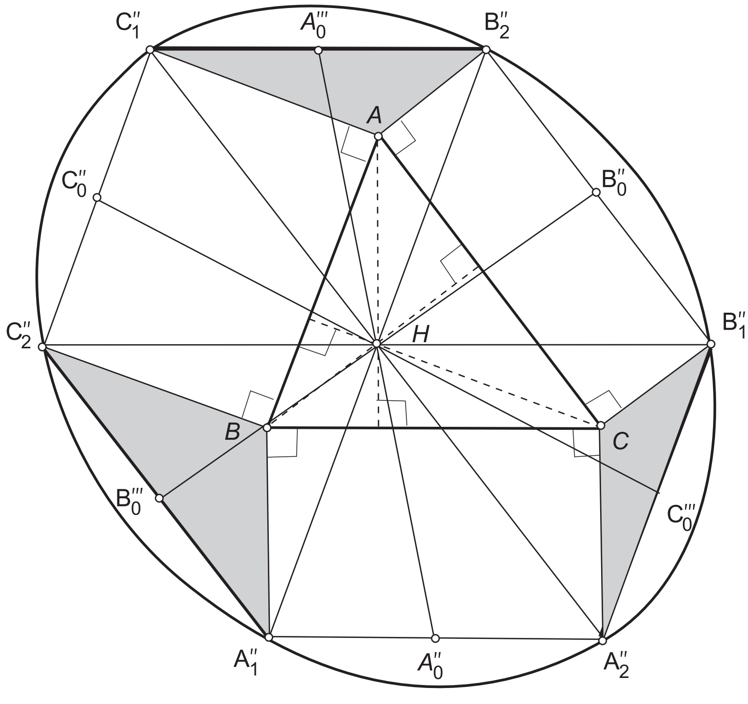

Рис. 5.

Противоположные стороны шестиугольника параллельны; диагонали его и отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, проходят через точку H, которой и делятся пополам.

Доказательство. Данное утверждение получается из двух предыдущих (теорема 2.1, теорема 2.2), если рассмотреть гомотетию с центром в точке O — центре описанной окружности треугольника ABC — и с коэффициентом 2 (рис. 6).

[14]Одно из которых, конечно, является следствием остальных.
[15]Так часто называют точку пересечения высот треугольника.

Действительно, пусть B'', C'' — образы точек B и C при этой гомотетии.

Тогда $B''C''||BC$, поскольку при гомотетии прямые, не проходящие через ее центр, переходят в параллельные. Поэтому, опустив перпендикуляры из точек B и C на прямую $B''C''$, получим *прямоугольник* с вершинами в этих точках и основаниях перпендикуляров, которые обозначим A_1'' и B_1''. Поэтому $BA_1'' = CA_2''$ и $A_1''B_1'' = BC = \frac{1}{3}A''B''$. Кроме того, поскольку $OB = OC$ (как радиусы описанной окружности), то и $OB'' = OC''$, как образы этих отрезков при гомотетии.

Следовательно, $BB'' = CC''$ и прямоугольные треугольники $BB''A_1''$ и $CC''A_2''$ будут равны (по катету и гипотенузе). Значит, $B''A_1'' = CA_2''$. И, так как $A_1''B_1'' = \frac{1}{3}A''B''$, то $B''A_1'' = A_1''B_1'' = CA_2'' = \frac{1}{3}B''C''$, т.е. точки A_1'' и B_1'' являются образами точек A_1 и A_2 при рассматриваемой гомотетии.

Точно так же доказывается, что точки B_1, B_2, C_1, C_2 переходят в точки $B_1'', B_2'', C_1'', C_2''$ соответственно.

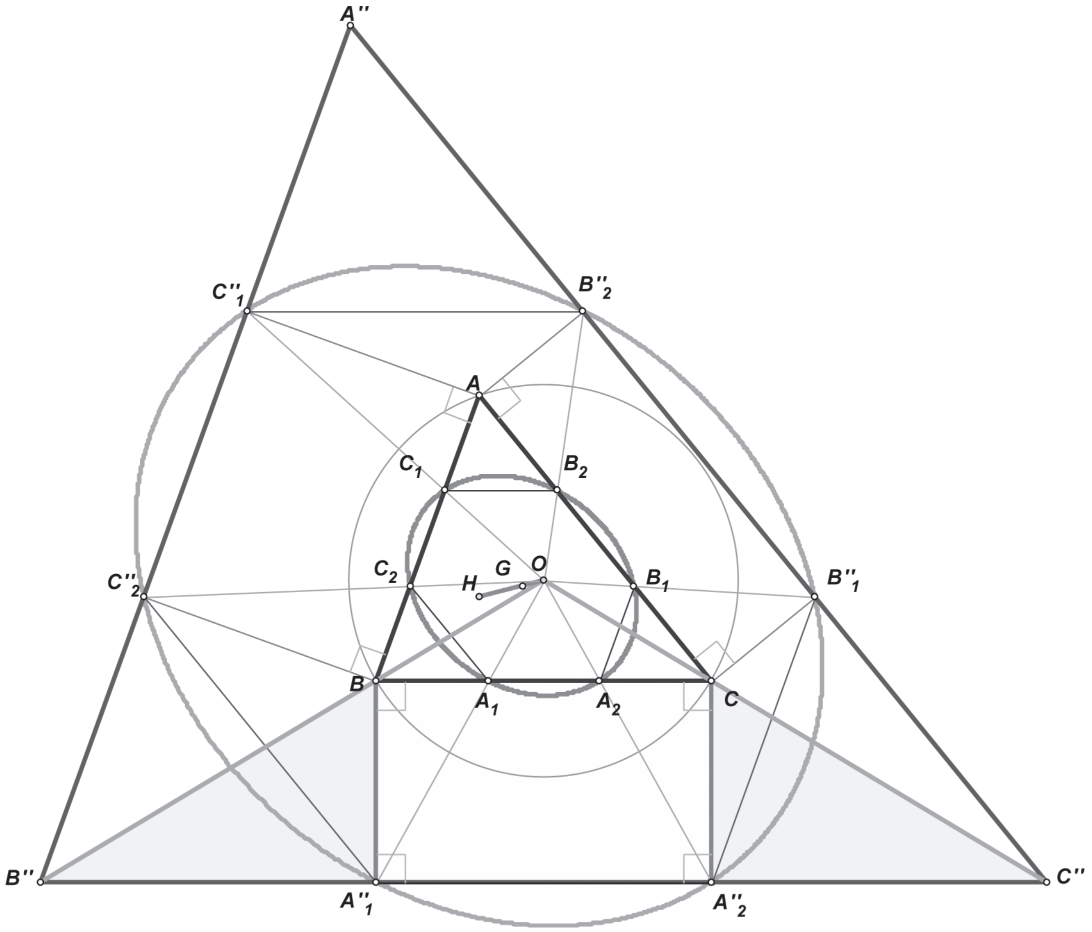

Рис. 6.

Наконец, по самому способу построения, очевидно, что отрезки $B_2''C_1''$, $B_1''A_2''$ и $A_1''C_2''$ таковы именно, какими мы представили их в начале данного параграфа.

То же, что центроид треугольника G указанной гомотетией переводится в ортоцентр H, следует из факта существования классического объекта — так называемой *прямой Эйлера.* На ней, как известно, лежат точки H, G, O — причем G делит отрезок HO внутренним образом в отношении 2:1, см. [5]–[8], [10]. □

§ 4. Пара коник, задаваемых точками касания вписанной и вневписанных окружностей

Теорема 4.1. Пусть $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$ — точки касания вневписанных окружностей с продолжениями сторон BC, CA, AB треугольника ABC.

Тогда эти точки принадлежат одной конике, центр которой P имеет следующие барицентрические координаты (рис. 7):

$$P = \frac{a^2\left(a^4 - 2abc(b+c-a) - \left(b^2-c^2\right)^2\right)}{b+c-a} : \\ : \frac{b^2\left(b^4 - 2abc(c+a-b) - \left(c^2-a^2\right)^2\right)}{c+a-b} : \\ : \frac{c^2\left(c^4 - 2abc(a+b-c) - \left(a^2-b^2\right)^2\right)}{a+b-c}.$$

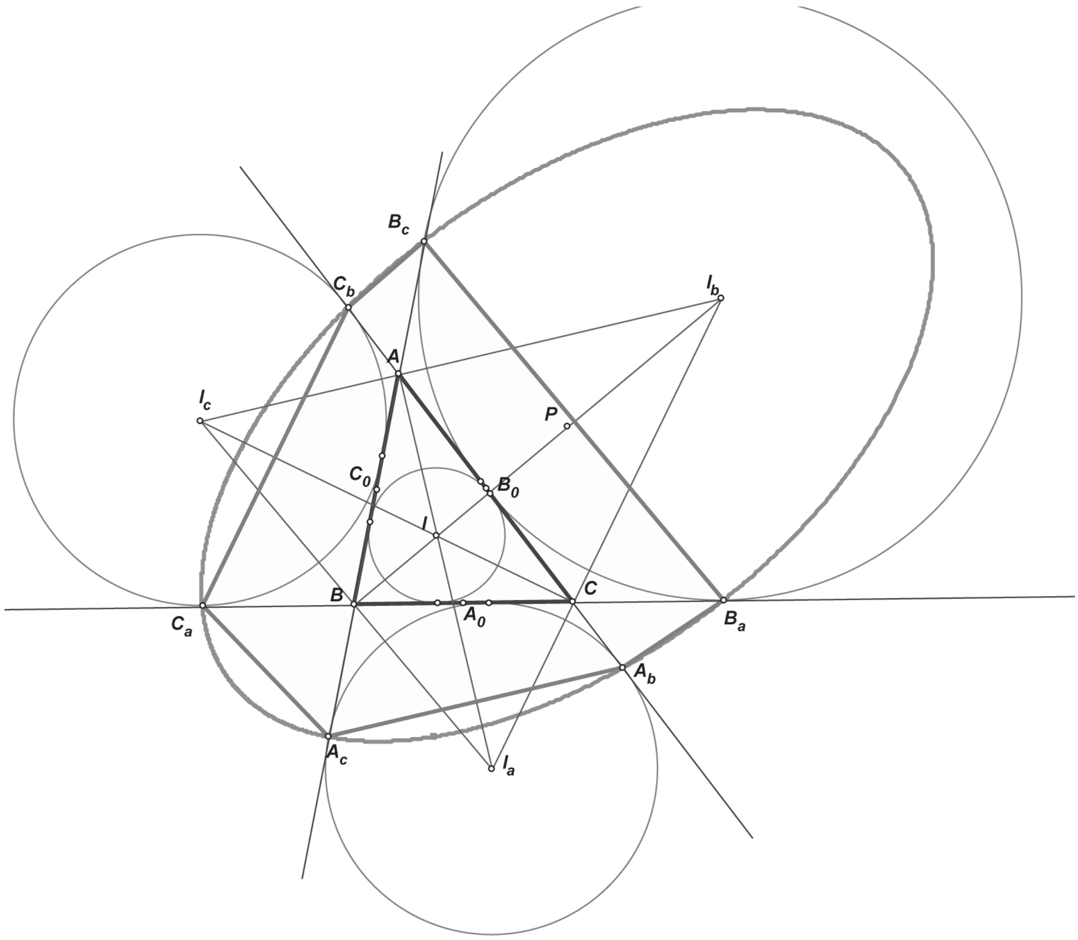

Рис. 7.

Доказательство. Пусть $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника ABC. То, что указанные шесть точек лежат на одной конике, сразу получим, воспользовавшись следствием 1.1, поскольку $BC_a = CB_a = p - a$, $CA_b = AC_b = p - b$, $AB_c = BA_c = p - c$ (см. [5]–[8], [10]). Далее выпишем координаты точек:

$$B_a = 0 : CB_a : -BB_a = 0 : p-a : -p; \;\; C_a = 0 : -CC_a : BC_a = 0 : -p : p-a$$

(так как $BB_a = BC + CB_a = a + (p-a) = p = BC + BC_a = CC_a$);

$$A_b = CA_b : 0 : -AA_b = p-b : 0 : -p; \qquad C_b = CC_b : 0 : AC_b = -p : 0 : p-b;$$
$$B_c = -BB_c : AB_c : 0 = -p : p-c : 0; \qquad A_c = BA_c : -AA_c : 0 = p-c : -p : 0.$$

Подставив теперь координаты точек в уравнение коники, получим, что[16]

$$u = v = w = 1;\;\; f = \frac{(b+c)^2 + a^2}{(b+c)^2 - a^2};\;\; g = \frac{(c+a)^2 + b^2}{(c+a)^2 - b^2};\;\; h = \frac{(a+b)^2 + c^2}{(c+a)^2 - b^2}.$$

В силу неравенства треугольника знаменатели всех дробей положительны:

$$(b+c)^2 - a^2 = (b+c-a)(b+c+a) > 0 \qquad \text{и т.д.}$$

Считаем дальше, используя формулы из теоремы 1.3:

$$U = -\frac{4a^2 (b+c)^2}{(b+c-a)^2 (a+b+c)^2}, \quad V = -\frac{4b^2 (c+a)^2}{(c+a-b)^2 (a+b+c)^2},$$
$$W = -\frac{4c^2 (a+b)^2}{(a+b-c)^2 (a+b+c)^2}.$$
$$F = \frac{\left((a+b)^2 + c^2\right)\left(b^2 + (a+c)^2\right)}{(a+b+c)^2 (a+b-c)(a+c-b)} - \frac{a^2 + (b+c)^2}{(b+c-a)(a+b+c)}.$$

Поскольку пошли уже довольно длинные выражения, мы не будем выписывать формулы для G и H, а только отметим, что G получается из F посредством циклического сдвига $a \to b \to c \to a$. И точно так же из G затем получается H.

Тогда первая координата центра коники имеет вид:

$$\frac{b^2\left(b^4 - 2abc(c+a-b) - \left(c^2 - a^2\right)^2\right)}{c+a-b} \cdot \frac{4}{(a+b+c)^2 (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

а две другие получаются из нее циклическими сдвигами. И после сокращения на общий множитель

$$\frac{4}{(a+b+c)^2 (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

как раз и получаются заявленные в условии выражения для координат центра. □

Замечание 4.1. Как показывает компьютер, данная коника может быть, в зависимости от длин сторон треугольника, как эллипсом, так и параболой или гиперболой.

Когда именно она принимает тот или иной вид, зависит от знака выражения $\Phi = U + V + W + 2(F + G + H)$, согласно теореме 3.1. Подсчеты дают следующее:

$$\Phi = -\frac{4}{(a+b+c)^2 (b+c-a)^2 (c+a-b)^2 (a+b-c)^2} \cdot P(a,b,c),$$

где

$$P(a,b,c) = a^8 + b^8 + c^8 - 2\left(b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4\right) + 4a^2b^2c^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \\ + 4abc\left(a^5 + b^5 + c^5 - b^4c - c^4a - a^4b\right).$$

Поскольку знаменатель дроби положителен, то при $P < 0$ имеем эллипс, при $P = 0$ — параболу, и при $P > 0$ гиперболу.

К сожалению, мы не смогли разложить многочлен P на множители, и потому каких-либо более емких критериев выявить не удалось. Но для каждого треугольника с конкретно заданными длинами сторон вид коники по знаку P определить несложно (рис. 8).

[16]Здесь и далее, в целях экономии бумаги, мы опускаем рутинные, но порою громоздкие тождественные преобразования. По ходу дела мы часто пользовались еще и однородностью коэффициентов и координат, домножая и сокращая некоторые выражения на общие множители. Так, для начала можно положить $f = 1$, например.

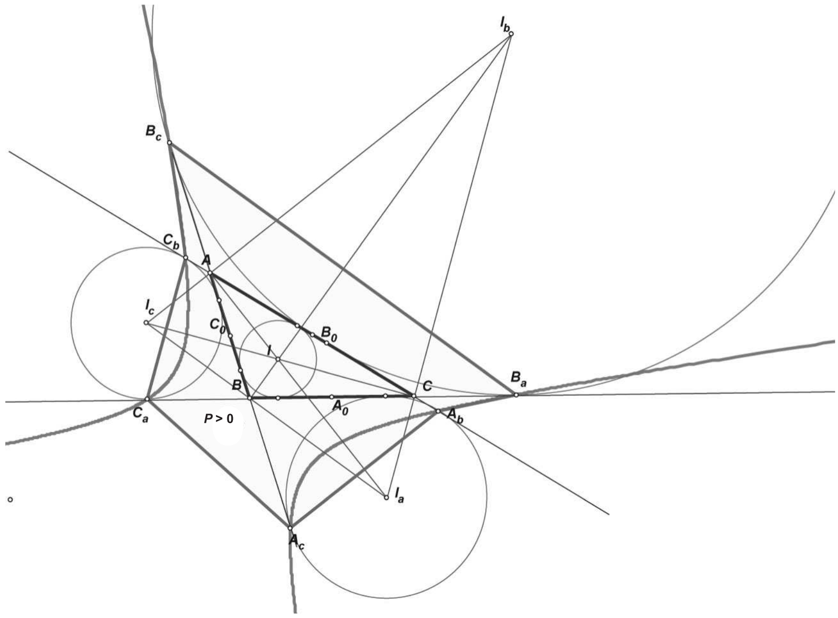

Рис. 8.

Замечание 4.2. Как позже выяснилось, центр рассмотренной коники (равно как и она сама) указан в [9] — это точка $X(478)$ под говорящим названием *Center of Yiu conic*. Таким образом, эта коника была открыта лет 20 назад известным американским геометром *Полем Ю* (*Paul Yiu*), редактором замечательного журнала [11]. Но совпадение не хочется считать досадным — иметь таких предшественников почетно!

Теорема 4.2. Пусть $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ — точки касания вписанной и вневписанных окружностей со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC соответственно (рис. 9).

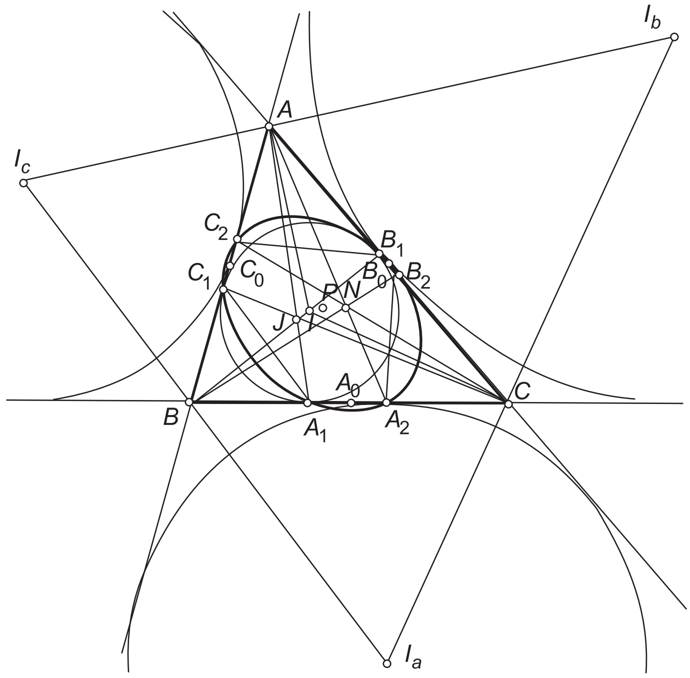

Рис. 9.

Тогда эти точки принадлежат одной конике, центр которой P имеет следующие барицентрические координаты:

$$P = a^2\left(c+b-a\right)\left(a^3 - a^2\left(b+c\right) - \left(b-c\right)^2\left(b+c\right) + a\left(b^2+c^2\right)\right) : \ldots : \ldots$$

(две другие получаются из первой циклическими сдвигами $a \to b \to c \to a$).

Первую координату также можно представить в виде

$$a^2(c+b-a)(a^3-b^3-c^3+cb^2+bc^2+ab^2+ac^2-ba^2-ca^2).$$

Доказательство. Пусть $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника ABC. То, что указанные шесть точек лежат на одной конике, сразу получим, воспользовавшись следствием 1.1, поскольку $BA_1 = CA_2 = p-a,\ CB_1 = AB_2 = p-b,\ AC_1 = BC_2 = p-c$. (см. [5]–[8], [10]).

Можно также было воспользоваться следствием 1.2, поскольку прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке J (так называемой *точке Жергонна* — $X(7)$ в [9]), а прямые AA_2, BB_2, CC_2 — в точке N (так называемой *точке Нагеля* — $X(8)$ в [9]), см. также [5]–[8], [10].

Далее выпишем координаты точек:

$$\begin{aligned}
&A_1 = 0 : CB_1 : BB_1 = 0 : p-c : p-b;\ \ A_2 = 0 : CB_2 : BB_2 = 0 : p-b : p-c;\\
&B_1 = CB_1 : 0 : AB_1 = p-c : 0 : p-a;\ \ B_2 = CB_2 : 0 : AB_2 = p-a : 0 : p-c;\\
&C_1 = BC_1 : AC_1 : 0 = p-b : p-a : 0;\ \ C_2 = BC_2 : AC_2 : 0 = p-a : p-b : 0.
\end{aligned}$$

Подставив теперь координаты точек в уравнение коники, получим, что

$$u = v = w = 1;\ \ f = \frac{(b-c)^2+a^2}{(b-c)^2-a^2};\ \ g = \frac{(c-a)^2+b^2}{(c-a)^2-b^2};\ \ h = \frac{(a-b)^2+c^2}{(c-a)^2-b^2}.$$

(В силу неравенства треугольника знаменатели всех дробей отрицательны: $(b-c)^2 - a^2 = (b-c-a)(b-c+a) < 0$ и т.д). Дальнейшие подсчеты, с использованием формул из теоремы 1.3, приводят к тому, что:

$$\begin{aligned}
&U = -\frac{4a^2(b-c)^2}{(b+c-a)^2(a+b-c)^2}, \quad V = -\frac{4b^2(c-a)^2}{(c+a-b)^2(c+b-a)^2},\\
&W = -\frac{4c^2(a-b)^2}{(c+a-b)^2(b+c-a)^2}.\\
&F = \frac{2\left(a^4+b^4+c^4-2a^3(b+c)+2a^2\left(b^2+bc+c^2\right)-2a\left(b^3+c^3\right)\right)}{(b+c-a)^2(c+a-b)(a+b-c)}.
\end{aligned}$$

G получается из F посредством циклического сдвига $a \to b \to c \to a$, и H — из G. Тогда первая координата центра коники имеет вид:

$$\frac{4a^2\Big(a^3-a^2(b+c)-(b-c)^2(b+c)+a\left(b^2+c^2\right)\Big)}{(c+b-a)^2(a+c-b)^2(b+a-c)^2},$$

а две другие получаются из нее циклическими сдвигами. И после сокращения на общий множитель

$$\frac{4}{(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2}$$

возникают заявленные в условии выражения для координат центра. □

Замечание 4.3. И здесь, согласно компьютеру, данная коника может быть, в зависимости от длин сторон треугольника, как эллипсом, так и параболой или гиперболой.

Когда именно она принимает тот или иной вид, — зависит от знака выражения $\Phi = U+V+W+2(F+G+H)$, согласно теореме 3.1. Подсчеты приводят к выражению:

$$\Phi = \frac{4}{(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2}\cdot P(a,b,c),$$

где

$$P(a,b,c) = -a^6 - b^6 - c^6 + 2\left(a^5b + b^5c + c^5a + ab^5 + bc^5 + ca^5\right) - 2\left(a^4bc + b^4ca + c^4ab\right) + 6a^2b^2c^2 - \\ - 3\left(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4\right) + 4\left(b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3\right).$$

Поскольку знаменатель дроби положителен, то при $P > 0$ имеем эллипс, при $P = 0$ — параболу, и при $P < 0$ гиперболу.

И в этом случае нам также не удалось разложить многочлен P на множители.

Замечание 4.4. Рассмотренная коника теперь занесена в Энциклопедию Треугольных Центров [9], и ее центр получил номер $X(5452)$, см. далее § 10.

$X(5452) =$ *CENTER OF THE PRIVALOV CONIC* (центр коники Привалова).

§ 5. Равноокружностный эллипс

В произвольном треугольнике ABC рассмотрим следующие три пары окружностей (одинаковых в каждой паре):

Первые две равные друг другу окружности вписаны в углы при вершинах B и C соответственно и касаются внешним образом друг друга.

Вторые две касающиеся окружности вписаны в углы C и A.

Третья же пара — в углы A и B[17].

Согласно [9], эту конфигурацию в 1990 г. ввел в геометрический обиход Иван Пааш (*Ivan Paashe*) — точка $X(1123)$, образованная пересечением прямых, соединяющих вершины треугольника с противоположными точками касания, названа в его честь: *Paashe point* (рис. 10).

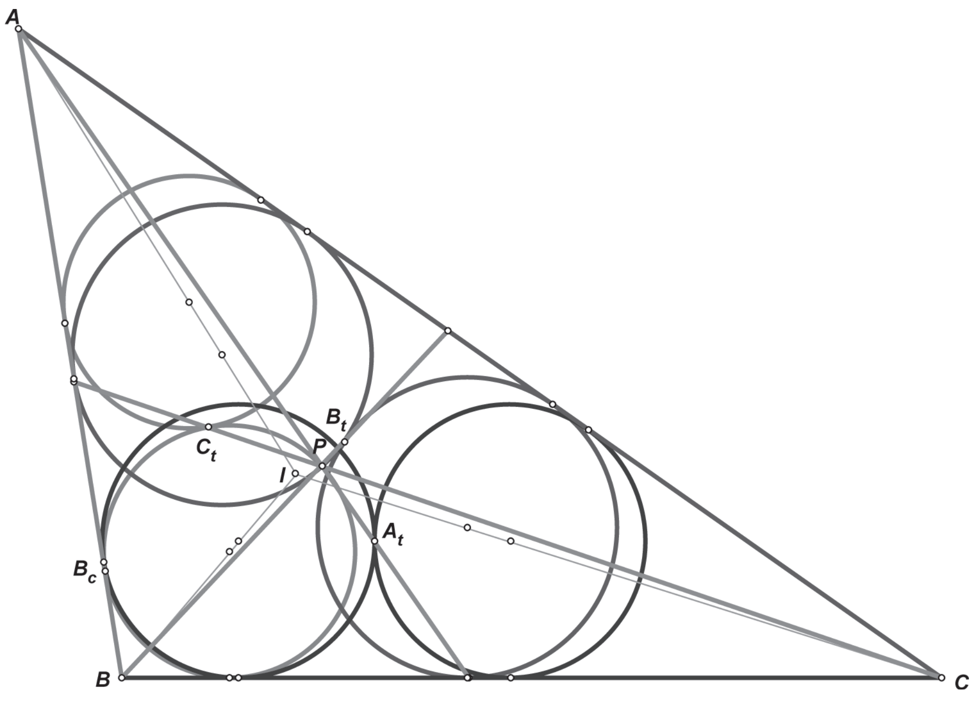

Рис. 10.

Поэтому будем называть описанную выше конструкцию *конфигурацией Пааша.*

Теорема 5.1. В конфигурации Пааша отметим точки $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$ — точки касания соответствующих пар равных окружностей со сторонами BC, CA, AB соответственно.

Тогда эти шесть точек лежат на одной конике, причем ее центр M лежит внутри отрезка GI, соединяющего центроид треугольника с центром его вписанной окружности (а прямая,

[17] При этом все рассматриваемые окружности расположены *внутри* исходного треугольника.

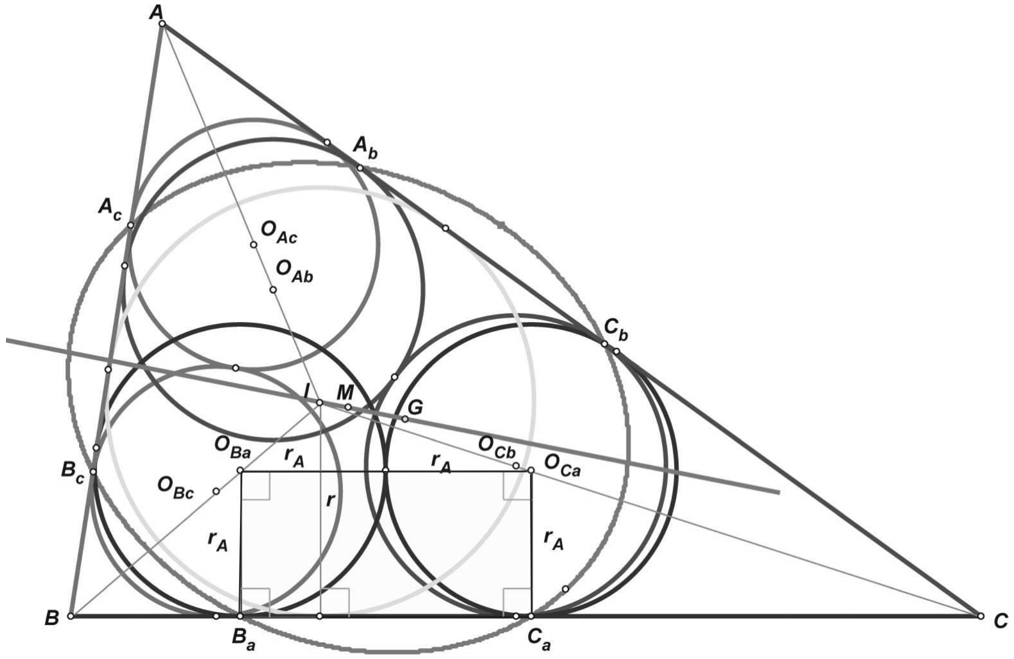

Рис. 11.

содержащая этот отрезок, называется *прямой Нагеля*, поскольку на ней также лежит и точка Нагеля N). Известно также, что центроид G делит отрезок NI в отношении 2:1 внутренним образом, см. [5], [6], [8]). Кроме того,

$$\frac{GM}{IM} = \frac{p}{3r} = \frac{p^2}{3S}$$

(где, как обычно, p — полупериметр исходного треугольника, r — радиус вписанной в него окружности, а S — площадь).

Барицентрические координаты центра имеют следующий вид:

$$M = 2 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} : 2 + \cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2} : 2 + \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} = \\ = 2 + \frac{a}{r} : 2 + \frac{b}{r} : 2 + \frac{c}{r} = \frac{a}{r_A} : \frac{b}{r_B} : \frac{c}{r_C},$$

где a, b, c, A, B, C — длины соответствующих сторон треугольника и величины его соответствующих углов, а r_A, r_B, r_C — радиусы соответствующих окружностей Пааша.

Доказательство. Пусть $O_{B_a}, O_{C_a}, O_{C_b}, O_{A_b}, O_{A_c}, O_{B_c}$ — центры рассматриваемых окружностей (рис. 11).

Очевидно, что четырехугольник $O_{B_a}B_aC_aO_{C_a}$ является *прямоугольником*, причем $O_{B_a}B_a = C_aO_{C_a} = r_A$ и $O_{B_a}O_{C_a} = B_aC_a = 2r_A$. Поэтому $BB_a = r_A \cot\frac{B}{2}$ и

$$CB_a = CC_a + B_aC_a = r_A\left(\cot\frac{C}{2} + 2\right) \Rightarrow \frac{BB_a}{CB_a} = \frac{\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2} + 2}.$$

Совершенно аналогично,

$$\frac{BC_a}{CC_a} = \frac{\cot\frac{B}{2} + 2}{\cot\frac{C}{2}}, \quad \frac{CC_b}{AC_b} = \frac{\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2} + 2}, \quad \frac{CA_b}{AA_b} = \frac{\cot\frac{C}{2} + 2}{\cot\frac{A}{2}}, \quad \frac{AA_c}{BA_c} = \frac{\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2} + 2}$$

$$\text{и} \qquad \frac{AB_c}{BB_c} = \frac{\cot\frac{A}{2} + 2}{\cot\frac{B}{2}}.$$

Поэтому условие Карно (теорема 1.1), конечно же, выполняется:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BB_a}}{\overrightarrow{CB_a}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_a}}{\overrightarrow{CC_a}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CC_b}}{\overrightarrow{AC_b}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_b}}{\overrightarrow{AA_b}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AA_c}}{\overrightarrow{BA_c}} \cdot \frac{\overrightarrow{AB_c}}{\overrightarrow{BB_c}}\right) =$$
$$= -\frac{\cot \frac{B}{2}}{\cot \frac{C}{2} + 2} \cdot -\frac{\cot \frac{B}{2} + 2}{\cot \frac{C}{2}} \cdot -\frac{\cot \frac{C}{2}}{\cot \frac{A}{2} + 2} \cdot -\frac{\cot \frac{C}{2} + 2}{\cot \frac{A}{2}} \cdot -\frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{B}{2} + 2} \cdot -\frac{\cot \frac{A}{2} + 2}{\cot \frac{B}{2}} = 1.$$

Итак, принадлежность точек одной конике доказана.

Далее, поскольку отношения, в которых точки делят стороны, уже найдены, то легко выписать их координаты:

$$B_a = 0 : \cot\frac{C}{2} + 2 : \cot\frac{B}{2}; \qquad C_a = 0 : \cot\frac{C}{2} : \cot\frac{B}{2} + 2;$$
$$C_b = \cot\frac{C}{2} : 0 : \cot\frac{A}{2} + 2; \qquad A_b = \cot\frac{C}{2} + 2 : 0 : \cot\frac{A}{2};$$
$$A_c = \cot\frac{B}{2} + 2 : \cot\frac{A}{2} : 0; \qquad B_c = \cot\frac{B}{2} : \cot\frac{A}{2} + 2 : 0.$$

Подставив затем координаты точек в уравнение коники (теорема 1.2), получим, что

$$u = 2\cot\frac{A}{2}\left(\cot\frac{A}{2} + 2\right); \quad v = 2\cot\frac{B}{2}\left(\cot\frac{B}{2} + 2\right); \quad w = 2\cot\frac{C}{2}\left(\cot\frac{C}{2} + 2\right);$$

$$f = -(\cot\frac{C}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} + \left(\cot\frac{C}{2} + 2\right)\left(\cot\frac{B}{2} + 2\right));$$
$$g = -(\cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{C}{2} + \left(\cot\frac{A}{2} + 2\right)\left(\cot\frac{C}{2} + 2\right));$$
$$h = -(\cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{A}{2} + \left(\cot\frac{B}{2} + 2\right)\left(\cot\frac{A}{2} + 2\right)).$$

Совершив, для удобства дальнейших вычислений, замены $x = \cot\frac{A}{2} > 0$, $y = \cot\frac{B}{2} > 0$ и $z = \cot\frac{C}{2} > 0$, найдем по формулам из теоремы 1.3 значения U, V, W, F, G, H:

$$U = -4\,(2 + y + z)^2; \quad V = -4\,(2 + z + x)^2; \quad W = -4\,(2 + x + y)^2;$$
$$F = 4((2 + y)\,(2 + z) + x^2\,(3 + 2y + 2z + 2yz) + x\,(8 + 5y + 5z + 4yz));$$
$$G = 4((2 + z)\,(2 + x) + y^2\,(3 + 2z + 2x + 2zx) + y\,(8 + 5z + 5x + 4zx));$$
$$H = 4((2 + x)\,(2 + y) + z^2\,(3 + 2x + 2y + 2xy) + y\,(8 + 5x + 5y + 4xy)).$$

Так же аккуратно приведя и сгруппировав подобные, по формулам из все той же теоремы 3.1, для координат центра получим[18]:

$$M = 8(1+x)(1+y)(1+z)(2+y+z) : 8(1+x)(1+y)(1+z)(2+z+x) :$$
$$: 8(1+x)(1+y)(1+z)(2+x+y)$$

Остается только с удовольствием сократить на общий множитель $8\,(1+x)\,(1+y)\,(1+z)$:

$$M = 2 + y + z : 2 + z + x : 2 + x + y =$$
$$= 2 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} : 2 + \cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2} : 2 + \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}.$$

[18]К своей немалой радости!

Две другие формы записи координат

$$M = 2 + \frac{a}{r} : 2 + \frac{b}{r} : 2 + \frac{c}{r} = \frac{a}{r_A} : \frac{b}{r_B} : \frac{c}{r_C}$$

сразу следуют из только что полученной формы и очевидных соотношений

$$a = \left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) r; \quad b = \left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right) r; \quad c = \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right) r$$

и

$$a = \left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} + 2\right) r_A; \quad b = \left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2} + 2\right) r_B; \quad c = \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + 2\right) r_C.$$

В заключение разберемся с коллинеарностью точек G, M, I, используя немного геометрию масс (все необходимое для понимания имеется в [6], [10]).

Итак, $M = 2 + \frac{a}{r} : 2 + \frac{b}{r} : 2 + \frac{c}{r}$, т.е. M является центром масс системы материальных точек $(2 + \frac{a}{r})A : (2 + \frac{b}{r})B : (2 + \frac{c}{r})C$.

Эту систему можно разбить на две подсистемы: $2A, 2B, 2C$ (с центром масс в G и суммарной массой 6) и $\frac{a}{r}A, \frac{b}{r}B, \frac{c}{r}C$ (с центром в I и суммарной массой $\frac{a+b+c}{r} = \frac{2p}{r}$). Из правил группировки и рычага тогда получим, что $M \in [GI]$ (т.к. суммарные массы одного знака — в данном случае «+», то деление отрезка GI точкой M осуществляется *внутренним* образом) и

$$6 \cdot GM = \frac{2p}{r} \cdot IM \Leftrightarrow \frac{GM}{IM} = \frac{p}{3r}.$$

И, если применить известную формулу о площади треугольника через радиус вписанной окружности (см. [7], [8]), то полученное отношение можно переписать несколько по-другому:

$$S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow \frac{GM}{IM} = \frac{p}{3\left(\frac{S}{p}\right)} = \frac{p^2}{3S}. \ \square$$

Теорема 5.2. Рассматриваемая коника является эллипсом.

Доказательство. После приведения подобных и разложения на множители выражение Φ (из теоремы 3.1), знак которого определяет тип коники, примет следующий прекрасный вид:

$$\Phi = 16(1 + x)(1 + y)(1 + z)(3 + x + y + z) > 0 \text{ (так как } x, y, z > 0).$$

Стало быть, по теореме 1.3, наша коника представляет из себя эллипс.

Замечание 5.1. Рассмотренная коника теперь занесена в Энциклопедию Треугольных Центров [9], и ее центр получил номер $X(5393)$:

> $X(5393)$ = CENTER OF THE PAACHE-MYAKISHEV ELLIPSE (центр эллипса Пааша-Мякишева)
> Barycentrics (барицентрическме координаты) $2 + \cot(B/2) + \cot(C/2) : 2 + \cot(C/2) + \cot(A/2) : 2 + \cot(A/2) + \cot B/2)$
> Barycentrics (барицентрическме координаты) $a + 2r : b + 2r : c + 2r$
> $X(5393) = s * X(1) + 3r * X(2)$ (Peter Moses, January 2, 2013)

Let $W(B_A)$ and $W(C_A)$ be the two congruent circles, within triangle ABC, each tangent to the other and to sideline BC of triangle ABC, with $W(B_A)$ also tangent to sideline AB and $W(C_A)$ also tangent to sideline AC; cf. the Paache configuration at $X(1123)$. Let B_A and C_A be the touchpoints of these circles with sideline BC. Define the points C_B, A_C cyclically and define the points A_B, B_C cyclically. The six points lie on an ellipse having center $X(5393)$ and equation

$$d(2+d)x^2 + e(2+e)y^2 + f(2+f)z^2 - 2(2+e+f+ef)yz - 2(2+f+d+fd)zx - 2(2+d+e+de)xy = 0,$$

where $d = \cot(A/2), e = \cot(B/2), f = \cot(C/2)$.

Let $X = X(5393)$. Then $|GX|/|IX| = s/(3r)$, where $G =$ centroid, $I =$ incenter, $r =$ inradius, and $s =$ semiperimeter. (Alexei Myakishev, December 25, 2012).

If you have The Geometer's Sketchpad, you can view $X(5393)$, including the ellipse. You can also view the configuration for pairs of circles used in the constructions of $X(5393)$ and $X(5405)$: *Pairs of Circles*.

$X(5393)$ lies on these lines: $\{1,2\}$, $\{9,3068\}$, $\{37,590\}$, $\{57,482\}$, $\{81,3300\}$, $\{175,5226\}$, $\{226,481\}$, $\{491,4357\}$, $\{492,3879\}$, $\{515,2048\}$, $\{615,1100\}$, $\{642,3666\}$, $\{940,1335\}$, $\{1124,4383\}$, $\{1255,3302\}$, $\{1267,3875\}$, $\{1449,3069\}$, $\{1585,1785\}$, $\{1991,4643\}$[19]

Русский перевод (добавлен редакцией): Пусть $W(B_A)$ и $W(C_A)$ — две конгруэнтные окружности внутри треугольника ABC, каждая из которых касается другой, а также стороны BC треугольника ABC, причем $W(B_A)$ касается также стороны AB, а $W(C_A)$ — стороны AC; сравните с конфигурацией Пааша для центра $X(1123)$. Пусть B_A и C_A — точки касания этих окружностей со стороной BC. Определим точки C_B, A_C циклически, также определим циклически точки A_B, B_C. Эти шесть точек лежат на эллипсе с центром $X(5393)$; уравнение эллипса:

$$d(2+d)x^2+e(2+e)y^2+f(2+f)z^2-2(2+e+f+ef)yz-2(2+f+d+fd)zx-2(2+d+e+de)xy=0,$$

где $d = \cot(A/2), e = \cot(B/2), f = \cot(C/2)$.

Пусть $X = X(5393)$. Тогда $|GX|/|IX| = s/(3r)$, где G — центроид, I — центр вписанной окружности, r ее радиус и s — полупериметр. (Алексей Мякишев, 25 декабря, 2012).

Если у вас есть программа "The Geometer's Sketchpad", вы можете увидеть $X(5393)$, а также этот эллипс. Вы можете также увидеть конфигурацию пар окружностей, используемых при построении центров $X(5393)$ и $X(5405)$: *Pairs of Circles*.

Точка $X(5393)$ лежит на следующих прямых: $\{1,2\}$, $\{9,3068\}$, $\{37,590\}$, $\{57,482\}$, $\{81,3300\}$, $\{175,5226\}$, $\{226,481\}$, $\{491,4357\}$, $\{492,3879\}$, $\{515,2048\}$, $\{615,1100\}$, $\{642,3666\}$, $\{940,1335\}$, $\{1124,4383\}$, $\{1255,3302\}$, $\{1267,3875\}$, $\{1449,3069\}$, $\{1585,1785\}$, $\{1991,4643\}$.

Замечание 5.2. В начале 2013 г. американский математик *Peter Moses* сообщил, что если рассматривать вписанные в углы пары равных окружностей, *не* содержащихся внутри исходного треугольника, то точки касания также будут всегда лежать на некоторой *конике* (но не всегда — на эллипсе).

Просто «*скопипастим*» соответствующий текст из *ETC* (поскольку вывод уравнения коники и координат центра — полностью аналогичен предыдущему), сопроводив его некоторыми комментариями

$X(5405)$ = CENTER OF THE PAACHE-MYAKISHEV-MOSES CONIC (центр коники Пааша-Мякишева-Мозеса)

An associated conic, the Paache-Myakishev-Moses conic, is introduced at $X(5405)$. This conic results from the two congruent circles that do *not* lie within triangle ABC.

Barycentrics $2-\cot(B/2)-\cot(C/2) : 2-\cot(C/2)-\cot(A/2) : 2-\cot(A/2)-\cot B/2)$

[19] И за каждой из таких прямых (содержащих центр рассматриваемой коники и найденных банальным компьютерным перебором) — какая же *притаилась* геометрия? Бог весть. Но отыскивать самобытную геометрическую суть столь многочисленных вдруг появившихся задач — навряд ли найдутся охотники.

Этот пример на самом деле довольно убедительно (хоть и в миниатюре) демонстрирует как плюсы, так и минусы *компьютерных технологий* и *НТР* в целом — мы очень многое узнаем о том, *как* происходит то или иное явление, но совсем немногое (или просто *ничего*) о том — *почему*.

Таким образом, постепенно у многих *пользователей PC* пропадает желание и отбивается охота разбираться в *глубинных сущностях и первопричинах тех или иных вещей (событий)* — и прививается *поверхностно-легкомысленное* отношение вообще к чему бы то ни было.

А интересно, все же, было бы запустить программку, и прояснить еще, какие «энциклопедические» точки лежат на самой конике (этой и других, здесь рассматриваемых). Соблазн велик! Но я такой программой не располагаю, хотя и написать ее было бы, полагаю, делом несложным — тому, кто в этом разбирается.

$$\text{Barycentrics a} - 2r : b - 2r : c - 2r \quad X(5405) = s * X(1) - 3r * X(2)$$

(Peter Moses, January 2, 2013)

For the construction of this conic, see $X(5393)$, where the associated Paache-Myakishev ellipse is introduced.

If you have The Geometer's Sketchpad, you can view $X(5405)$, including the conic.

X(5405) lies on these lines: $\{1, 2\}$, $\{9, 3069\}$, $\{37, 615\}$, $\{57, 481\}$, $\{81, 3299\}$, $\{176, 5226\}$, $\{226, 482\}$, $\{491, 3879\}$, $\{492, 4357\}$, $\{590, 1100\}$, $\{591, 4643\}$, $\{641, 3666\}$, $\{940, 1124\}$, $\{946, 2048\}$, $\{1255, 3300\}$, $\{1335, 4383\}$, $\{1449, 3068\}$, $\{1586, 1785\}$, $\{1659, 5219\}$ (рис. 12)

Русский перевод (добавлен редакцией): Ассоциированная коника, коника Пааша-Мякишева-Мозеса, введена для центра $X(5405)$. Эта коника получается из двух конгруэнтных окружностей, которые *не* лежат внутри треугольника ABC.

Барицентрические координаты $2-\cot(B/2)-\cot(C/2) : 2-\cot(C/2)-\cot(A/2) : 2-\cot(A/2)-\cot B/2)$

$$\text{Барицентрические координаты a} - 2r : b - 2r : c - 2r \quad X(5405) = s * X(1) - 3r * X(2)$$

(Питер Мозес, 2 января, 2013)

За описанием построения этой коники обратитесь к центру $X(5393)$, где введен ассоциированный эллипс Пааша-Мякишева.

Если у вас есть программа "The Geometer's Sketchpad", вы можете увидеть $X(5405)$, а также конику.

Точка X(5405) лежит на следующих прямых: $\{1, 2\}$, $\{9, 3069\}$, $\{37, 615\}$, $\{57, 481\}$, $\{81, 3299\}$, $\{176, 5226\}$, $\{226, 482\}$, $\{491, 3879\}$, $\{492, 4357\}$, $\{590, 1100\}$, $\{591, 4643\}$, $\{641, 3666\}$, $\{940, 1124\}$, $\{946, 2048\}$, $\{1255, 3300\}$, $\{1335, 4383\}$, $\{1449, 3068\}$, $\{1586, 1785\}$, $\{1659, 5219\}$ (рис. 12).

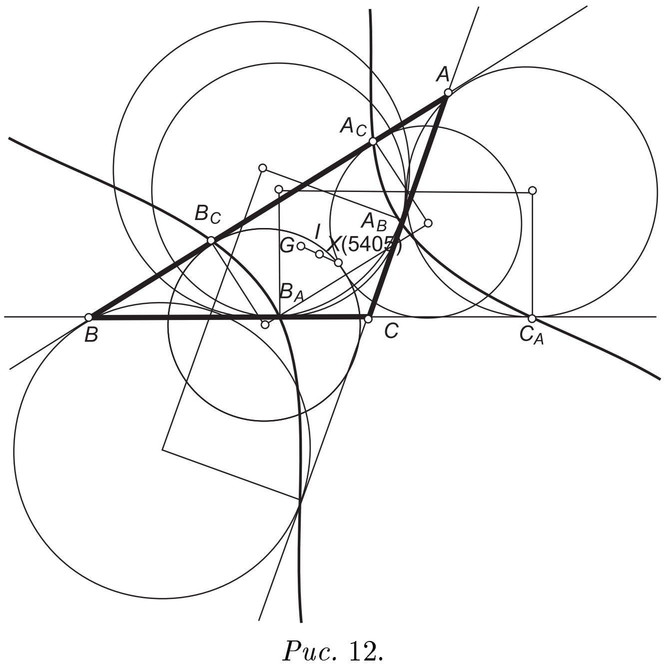

Рис. 12.

К этому можно еще добавить следующее.

Во-первых, уравнение данной коники получается из уравнения рассмотренного выше эллипса простой заменой во всех коэффициентах котангенсов половинных углов на противоположные им по знаку, т.е.: $\cot\frac{A}{2} \to -\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2} \to -\cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2} \to -\cot\frac{C}{2}$.

То же самое относится и к координатам центра в их тригонометрической форме.

Там же, где они выражены через стороны и радиус, надо поменять знаки у соответствующих дробей (или, после приведения к общему знаменателю r и сокращению на него — поставить минус перед $2r$): $\frac{a}{r} \to -\frac{a}{r}, \frac{b}{r} \to -\frac{b}{r}, \frac{c}{r} \to -\frac{c}{r}$.

Во-вторых, скажем несколько слов и о центре коники — им будет всегда *конечная* точка плоскости, поскольку общая сумма координат центра: $6-\frac{a+b+c}{r}=2\left(3-\frac{a+b+c}{2r}\right)$ — *отрицательна*, ведь *любая из сторон треугольника больше диаметра вписанной в него окружности.*

Если же исходить из тригонометрической формы, надо показать, что для углов любого треугольника справедливо неравенство $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}>3$. Но, оказывается, выполняется даже более сильное неравенство: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$! Факт, как говорится, *учителю на заметку* и в копилку, поскольку существует довольно симпатичное тому доказательство: ведь, как известно (!) в любом треугольнике $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$ — хорошее упражнение на тему «преобразование тригонометрических выражений» [20] — достаточно лишь потребовать, чтобы $A+B+C=\pi$.

А дальше, т.к. половинки углов треугольника — углы острые, значит, их *котангенсы* — *положительны* и классическое неравенство Коши дает нам искомую оценку:

Пусть

$$t=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\Rightarrow\frac{t}{3}\geq\sqrt[3]{t}\Leftrightarrow\ (\text{при }\ t>0)\ \ t^3\geq 27t\Leftrightarrow t^2\geq 27\Leftrightarrow t\geq 3\sqrt{3}.$$

Если теперь вернуться к доказательству коллинеарности центра коники и точек G и I, (теорема 5.1) то, с поправкой на *отрицательность* соответствующей суммарной массы, приходим к выводу, что центр коники Мозеса делит отрезок GI в том же отношении, что и прежде, но только *внешним* образом: $\frac{GM}{IM}=\frac{p}{3r}$, и *центр коники лежит на продолжении отрезка GI* за точку I. Иначе говоря, центры эллипса и коники вместе с центроидом и инцентром образуют так называемую *гармоническую четверку точек* (см.[5], [10]).

В третьих, условия, определяющие вид этой коники, поддаются простому геометрическому описанию, а именно:

- если исходный треугольник остроугольный, то коника представляет собой *эллипс* (рис. 13);
- если исходный треугольник тупоугольный, то — *гиперболу* (рисунок см. выше);
- если же треугольник *прямоугольный* (граничный случай) — то *пару параллельных прямых* (! — не параболу, как можно было ожидать априори, но — *вырожденную параболу*) (рис. 14).

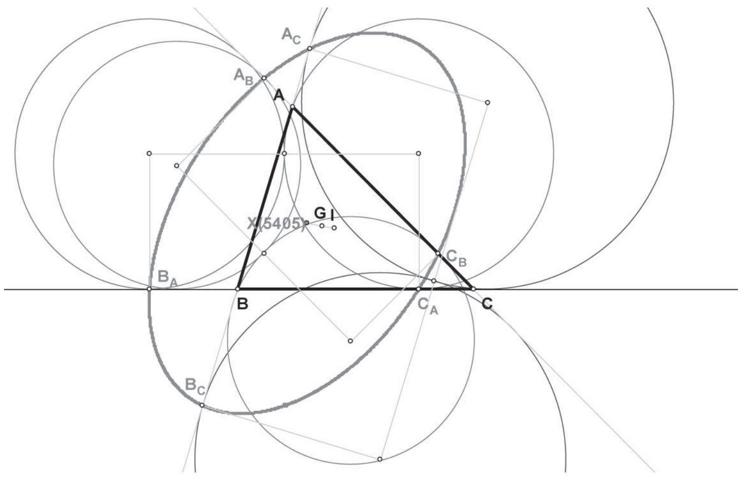

Рис. 13.

[20] Опять же, педагогу-профи на карандаш: из этого равенства, между прочим, сразу можно вывести формулу Герона (и наоборот!), записав его через стороны треугольника: $(p-a)/r+(p-b)/r+(p-c)/r=(p-a)(p-b)(p-c)/r^3\Leftrightarrow(3p-2p)/r=(p-a)(p-b)(p-c)/r^3\Longleftrightarrow p/r=(p-a)(p-b)(p-c)/r^3\Longleftrightarrow pr^2=(p-a)(p-b)(p-c)\Longleftrightarrow(pr)^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\Longleftrightarrow S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

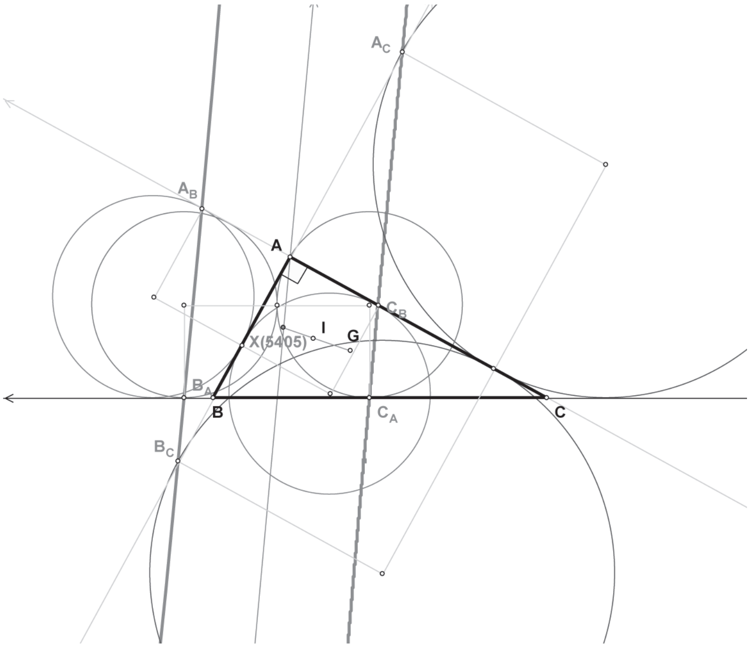

Рис. 14.

Разберемся, почему получается именно так (будем придерживаться обозначений из ETC).

Напомним, что $d = \cot\frac{A}{2} > 0$, $e = \cot\frac{B}{2} > 0$ и $f = \cot\frac{C}{2} > 0$, а выражение, знак которого определяет тип коники, имеет вид, аналогичный полученному при изучении эллипса Пааша (но с поправкой на смену знаков котангенсов): $\Phi = 16(1-d)(1-e)(1-f)(3-(d+e+f))$.

Последняя скобка, как было установлено в *«во-вторых»*, всегда меньше нуля. Котангенс убывает на интервале $(0,\pi)$, поэтому, если все углы треугольника *острые*, то их половинки меньше $\frac{\pi}{4}$, а соответствующие *котангенсы — больше единицы*. Значит, и три другие скобки *отрицательны*, а *произведение всех четырех — положительно*, $\Phi > 0$ — и коника есть *эллипс*. Если же треугольник *тупоугольный* (например, тупым является угол при вершине A — и тогда углы при двух других вершинах острые), то первая скобка — *положительна*, а вторая и третья — по-прежнему отрицательны. В результате $\Phi < 0$ — получаем гиперболу. Наконец, если треугольник прямоугольный, то $\Phi = 0$ и теория предсказывает явление *параболы*, а поскольку ее *центр — точка конечная*, то параболе этой не остается ничего кроме, как *«выродиться»* в *пару параллельных прямых.*

Ради, так сказать, научного интереса, приведем все же и чисто *формальное*, (т.е. алгебраическое) доказательства последнего утверждения.

Уравнение коники (коэффициенты которой мы обсудили *«во-первых»*) имеет вид:

$$-d(2-d)x^2 - e(2-e)y^2 - f(2-f)z^2 - \\ -2(2-e-f+ef)zy - 2(2-f-d+fd)xz - 2(2-d-e+de)yx = 0.$$

С учетом того, что $d = 1$, оно перепишется (после домножения на *«минус один»*) как $x^2 - e(e-2)y^2 - f(f-2)z^2 + 2(2-e-f+ef)zy + 2xz + 2yz = 0$. (Как мы уже знаем, сумма котангенсов половинных углов треугольника равна их произведению, т.е. $d+e+f = def$ и, если $d = 1$, то $1+e+f = ef$ — и потому коэффициент при zy вообще-то, в случае прямого угла при вершине A, запишется просто как 6. Но мы даже не воспользуемся этим счастливым обстоятельством, поскольку в том вовсе нет необходимости).

Выделив квадрат суммы по x, y, z, перейдем к равносильному уравнению

$$(x+y+z)^2 - (e(2-e)y^2 - y^2) - (f(2-f)z^2 - z^2) + 2(2-e-f+ef)zy - 2zy = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (x+y+z)^2 - ((e-1)^2y^2 + (f-1)^2z^2 - 2(1-e-f+ef)zy) = 0.$$

Однако, простым раскрытием скобок, легко убедиться в том, что $((e-1)y-(f-1)z)^2$ в точности и есть $((e-1)^2y^2+(f-1)^2z^2-2(1-e-f+ef)zy)$. И вот возникает, наконец, долгожданная разность квадратов:

$$(x+y+z)^2-((e-1)y-(f-1)z)^2=0 \Leftrightarrow (x+(2-e)y+fz)(x+ey+(2-f)z)=0.$$

Как и было предсказано, коника распалась на две прямые: $x+(2-e)y+fz=0$ и $x+ey+$ $+(2-f)z=0$.

Координаты точки их пересечения P находятся из определителя $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 2-e & f \\ 1 & e & 2-f \end{vmatrix}$, т.е. $P=$ $(2-e)\,(2-f)-ef\,:\,1\cdot f-1\cdot(2-f)\,:\,1\cdot e-(2-f)\cdot 1$ И *сумма их равна*, очевидно, *нулю* — т.е. P является *бесконечно удаленной точкой*, что и означает *параллельность наших прямых в обычном евклидовом смысле* (подробности см. в [6], [7], [10]). $\square$

Литература

[1] Штейнгарц Л.А. Гипотезы о медианах, высотах, биссектрисах и... эллипсах // Математическое образование. - 2012. - № 2(62). - С. 41-48.

[2] Штейнгарц Л.А. Орбиты Жукова и теорема Морлея // Математика в школе. - 2012. - № 6. - С. 53-61.

[3] Григорьев Д.С., Мякишев А.Г. И снова о гипотезах Штейнгарца // Математическое образование. - 2013. - № 3(67). - С. 40-56.

[4] Осипов Н.Н. О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. - 2013. - № 2. - С. 1-10.

[5] Акопян А., Заславский А. Геометрические свойства кривых второго порядка. - М.: МЦНМО. - 2011.

[6] Мякишев А. Элементы геометрии треугольника. - М.: МЦНМО. - 2009.

[7] Прасолов В. Задачи по планиметрии. - М.: МЦНМО. - 2007.

[8] Шарыгин И. Геометрия. Планиметрия. (Задачник 9-11). - М.: Дрофа. - 2001.

[9] Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

[10] Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle. URL: http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

[11] ForumGeometricorum — электронный журнал, посвященный элементарной геометрии. URL: http://forumgeom.fau.edu

[12] Куланин Е., Мякишев А. О некоторых кониках, связанных с треугольником. - М.: Институт логики. - 2008.

Мякишев Алексей Геннадьевич

E-mail: myakishev62@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16 июля 2013 г.