У. РУДИН

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

У. РУДИН ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS

Second Edition

WALTER RUDIN
Department of Mathematics
University of Wisconsin

McGRAW-HILL BOOK COMPANY
NEW YORK · SAN FRANCISCO · TORONTO · LONDON
1964

У. РУДИН

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

В. П. ХАВИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1966

УДК 517.1

Книга представляет собой современный курс математического анализа, написанный известным американским ученым. По стилю и содержанию она отличается от имеющихся традиционных курсов. Помимо обычно включаемого материала, книга содержит основы теории метрических пространств, теорию интегрирования дифференциальных форм на поверхностях, теорию интеграла и т. д.

В конце каждой главы приводятся удачно подобранные упражнения (общим числом около 200). Среди них есть как простые примеры, иллюстрирующие теорию, так и трудные задачи, существенно дополняющие основной текст книги.

Книга У. Рудина может служить учебным пособием для студентов математических и физических факультетов университетов, педагогических институтов и некоторых втузов. Она будет полезна аспирантам и преподавателям этих учебных заведений, а также инженерам, желающим расширить свои знания по математическому анализу.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Книга известного американского математика У. Рудина обладает рядом достоинств, выделяющих ее среди руководств по математическому анализу. Ее отличает прежде всего систематическое использование общих точек зрения и абстрактных идей уже при изложении основ дифференциального и интегрального исчисления. Так, например, простейшим понятиям теории пределов автор предпосылает определение метрического пространства. И хотя запас конкретных используемых в книге метрических пространств невелик — он состоит лишь из подпространств евклидовых пространств R^k, из упоминаемого вскользь пространства функций, непрерывных на компакте, и из пространства $\mathscr{L}^2$, появляющегося в самом конце книги,— такая общность представляется очень уместной и лишний раз доказывает, что достоинство аксиоматической теории заключается не только в количестве и разнообразии тех конкретных моделей, к которым она применима, но и в той ясности, с которой выступает в каждом конкретном ее применении существо дела, не затемненное случайными деталями.

Особенно интересной и удачной нам представляется глава 9, посвященная интегральному и дифференциальному исчислению функций многих переменных. Здесь автору удалось решить ряд методических проблем, с которыми приходится сталкиваться каждому, кто преподает анализ на математических факультетах университетов.

Часто в курсах анализа с большой тщательностью доказываются теоремы, относящиеся к началам теории пределов и к свойствам непрерывных функций, а когда дело доходит до более высоких и более сложных по существу разделов, таких, скажем, как теория кратных интегралов и в особенности теория дифференциальных форм, то уровень изложения, как правило, резко снижается. Так, теорема Коши об обращении непрерывной функции в нуль, имеющая совсем простой наглядный смысл, всегда доказывается с максимальной скрупулезностью, а, скажем, теорема о замене переменных в кратных интегралах редко доказывается вполне аккуратно. И беда здесь вовсе не в потере пресловутой «строгости», а в том, что принятая манера изложения этих вопросов смазывает реальные трудности. Так, например, студент, изучивший в таком изложении три формулы — Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского (мы применяем здесь терминологию известного курса Г. М. Фихтенгольца), вряд ли сумеет даже чисто формально составить соответствующее соотношение между интегралом формы по многообразию и интегралом по краю этого многообразия для иных размерностей.

В главе 9 книги Рудина приводится очень короткое и изящное доказательство теоремы о локальной обратимости гладких отображений евклидовых пространств, доказательство теоремы о неявной функции, которая сопровождается интересными геометрическими приложениями. Затем приводится остроумное доказательство теоремы о замене переменных в кратном интеграле. Оно основано на локальном представлении гладкого отображения с ненулевым якобианом в виде суперпозиции нескольких отображений, оставляющих неизменными все координаты, кроме одной. В этой же главе изложено исчисление дифференциальных форм и формула Стокса (в ее современном виде).

Стиль книги вполне соответствует ее названию: главное внимание уделяется именно основам, а не деталям. Некоторые важные сведения (такие, скажем, как теорема Фубини, теория несобственных интегралов и интегралов, зависящих от параметра) либо вовсе не сообщаются, либо составляют содержание упражнений.

Книга написана очень сжато. Утверждения, именуемые в традиционных курсах теоремами и снабжаемые не очень короткими доказательствами, упоминаются здесь порой вскользь, как нечто само собой разумеющееся, или даже не упоминаются вовсе (но неявно используются). В доказательствах, всегда аккуратных и безупречных по существу, порой встречаются вольности речи.

Все это должно служить известным предостережением для студента, впервые приступающего к изучению анализа. В то же время специалист, искушенный в анализе, будет справедливо рассматривать особенности книги, перечисленные в предыдущем абзаце, как ее достоинства: сжатость изложения избавит его от повторения стандартных рассуждений, которыми он давно овладел, а некоторые вольности речи приятно разнообразят стиль.

Книга У. Рудина будет служить полезным пособием для всех, кто изучает математический анализ или преподает эту науку.

В. Хавин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга задумана как руководство по курсу анализа, который обычно проходят студенты в конце первого этапа обучения или в первый год второго этапа [1]).

Основное различие между настоящим и первым (вышедшим 10 лет назад) изданием состоит в том, что теперь гораздо более подробно изложена теория функций многих переменных.

Это изменение сделано в ответ на многочисленные пожелания читателей. Глава 9 теперь начинается с рассмотрения некоторых основных понятий, относящихся к векторным пространствам; затем определяются производные отображений как линейные отображения; далее формулируются и доказываются (без использования определителей) теорема об обратной функции и некоторые ее важнейшие следствия; устанавливаются свойства дифференциальных форм (в связи с отображениями пространства); глава заканчивается довольно общим вариантом теоремы Стокса — n-мерным аналогом основной теоремы интегрального исчисления.

В связи с этим мы включили теперь в главы 2 и 4 больше сведений об евклидовых пространствах и о метрических пространствах, чем раньше. Однако эта дополнительная общность не вызывает дополнительных трудностей. Теоремы, изложенные здесь в этой новой постановке, не труднее, чем соответствующие теоремы на прямой или на плоскости.

Остальные главы оставлены без значительных изменений, но многое переписано заново и некоторые детали (как надеется автор) улучшены.

Первая часть главы 1, в которой с помощью сечений в множестве рациональных чисел построены вещественные числа, может быть при первом чтении опущена; если поступить так, то для логического обоснования остальной части книги можно принять за посту-

---

[1]) Различие между студентами первого этапа обучения (undergraduate students) и студентами второго этапа (graduate students) в университетах США соответствует примерно различию между нашими студентами младших курсов и студентами старших курсов, уже избравшими кафедру и имеющими научного руководителя.— *Прим. ред.*

лат теорему Дедекинда. Главы с первой по седьмую следует изучать в том порядке, в каком они написаны, тогда как три последние главы почти не зависят друг от друга.

Число задач возросло, теперь их около 200. Некоторые из них не требуют почти ничего, кроме непосредственного применения результатов, полученных в тексте; другие рассчитаны на изобретательность лучших студентов. Большинство трудных задач снабжено указаниями.

Уолтер Рудин

ГЛАВА 1

СИСТЕМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Введение

Изучение основных понятий анализа (таких, как сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование) должно основываться на точно определенном понятии числа. Мы, однако, не будем вступать в обсуждение аксиом, которым подчиняется арифметика целых чисел, а будем исходить из системы рациональных чисел.

Мы предполагаем, что читатель знаком с арифметикой рациональных чисел (т. е. чисел вида n/m, где n и m — целые, $m \neq 0$), и только напомним основные свойства этих чисел. Сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел — рациональное число (деление на нуль исключается); выполняются законы коммутативности

$$p+q=q+p, \qquad pq=qp,$$

законы ассоциативности

$$(p+q)+r=p+(q+r), \qquad (pq)r=p(qr)$$

и закон дистрибутивности

$$(p+q)r=pr+qr;$$

определено отношение $<$, задающее порядок в множестве рациональных чисел. Отношение $<$ обладает тем свойством, что для любых рациональных чисел p и q либо $p=q$, либо $p<q$, либо $q<p$; оно транзитивно, т. е. если $p<q$ и $q<r$, то $p<r$. Кроме того, $p+q>0$ и $pq>0$, если $p>0$ и $q>0$.

Хорошо известно, что система рациональных чисел обладает многими недостатками. Например, не существует рационального числа p, такого, что $p^2=2$ (мы это вскоре докажем). Это делает необходимым введение так называемых «иррациональных чисел», которые часто записываются в виде бесконечных десятичных разложений, причем соответствующие конечные десятичные дроби считаются их приближениями. Так, последовательность

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

«стремится к $\sqrt{2}$». Но до тех пор, пока мы не определили иррациональное число $\sqrt{2}$, остается открытым вопрос: к чему же все-таки стремится эта последовательность?

Главная цель этой главы и состоит в том, чтобы дать необходимое определение.

1.1. Пример. Сначала покажем, что никакое рациональное число p не удовлетворяет уравнению

$$p^2 = 2. \tag{1}$$

Действительно, предположим, что это не так. Тогда существует удовлетворяющее уравнению (1) число $p = m/n$, где m, n — целые, причем хотя бы одно из них нечетно.

Подставляя в уравнение (1), получаем

$$m^2 = 2n^2. \tag{2}$$

Это показывает, что m^2 — четное число. Значит, m четно (если бы m было нечетным, то и m^2 было бы нечетным) и, следовательно, m^2 делится на 4. Поэтому правая часть равенства (2) делится на 4, так что n^2 четно, откуда следует, что и n четно.

Таким образом, предположение о том, что выполнено равенство (1), заставляет нас заключить, что оба числа m, n — четные, вопреки нашему выбору m и n. Значит, равенство (1) невозможно при рациональном p.

Исследуем теперь подробнее эту ситуацию. Пусть A — множество всех положительных рациональных p, таких, что $p^2 < 2$, и пусть множество B состоит из всех положительных рациональных p, таких, что $p^2 > 2$. Мы покажем, что A не содержит наибольшего числа, а B не содержит наименьшего.

Точнее, мы докажем, что для любого p из A можно найти рациональное число q из A, такое, что $p < q$, и для любого p из B мы можем найти рациональное число q из B, такое, что $q < p$.

Пусть p принадлежит A. Тогда $p^2 < 2$. Выберем рациональное h, такое, что

$$0 < h < 1 \quad \text{и} \quad h < \frac{2-p^2}{2p+1}.$$

Положим $q = p + h$. Тогда $q > p$ и

$$q^2 = p^2 + (2p + h)\,h < p^2 + (2p + 1)\,h < p^2 + (2 - p^2) = 2,$$

так что q находится в A. Этим доказана первая часть нашего утверждения.

Предположим теперь, что p принадлежит B. Тогда $p^2 > 2$. Положим

$$q = p - \frac{p^2-2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}.$$

Тогда $0 < q < p$ и

$$q^2 = p^2 - (p^2 - 2) + \left(\frac{p^2-2}{2p}\right)^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2,$$

так что q принадлежит B.

1.2. Замечание. Цель приведенного выше рассуждения — показать, что в системе рациональных чисел имеются некоторые пробелы, несмотря на то что между любыми двумя рациональными числами находится третье [ибо $p < (p+q)/2 < q$, если $p < q$]. Сейчас мы опишем предложенный Дедекиндом процесс, который позволяет заполнить эти пробелы и приводит нас к вещественным числам. Чтобы не увеличивать объема книги, мы не везде будем проводить рассуждения во всех деталях. Полное изложение, начинающееся с целых чисел, можно найти в книге Ландау «Основы анализа», где речь идет только об этой числовой системе.

1.3. Обозначения. Если A — множество (элементами которого могут быть числа или любые другие объекты), то запись $x \in A$ означает, что x принадлежит (или является элементом) A. Если x не является элементом A, мы будем писать $x \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, мы будем называть пустым множеством. Если множество содержит хотя бы один элемент, то оно называется непустым.

Дедекиндовы сечения

1.4. Определение. Множество α рациональных чисел называется *сечением*, если

(I) α содержит хотя бы одно рациональное число, но не всякое рациональное число;

(II) для $p \in \alpha$ и $q < p$ (q — рациональное число) имеем $q \in \alpha$;

(III) в α нет наибольшего числа.

В этом разделе мы будем употреблять буквы p, q, r, ... только для обозначения рациональных чисел; сечения будут обозначаться буквами α, β, γ, ... (за исключением случая, о котором говорится в определении 1.7).

1.5. Теорема. *Если $p \in \alpha$ и $q \notin \alpha$, то $p < q$.*

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leqslant p$, то из (II) следует, что $q \in \alpha$.

Принимая во внимание эту теорему, элементы множества α иногда называют нижними числами сечения α, а рациональные числа, не принадлежащие α, называют верхними числами сечения α. Пример 1.1 показывает, что не всегда существует наименьшее верхнее число. Однако для некоторых сечений наименьшее верхнее число действительно существует.

1.6. Теорема. *Пусть r — рациональное число. Пусть множество α состоит из всех рациональных чисел p, таких, что $p<r$. Тогда α — сечение, а r — наименьшее верхнее число сечения α.*

Доказательство. Ясно, что α удовлетворяет условиям (I) и (II) определения 1.4. Что касается (III), то нужно лишь заметить, что для любого $p \in \alpha$ мы имеем

$$p<\frac{p+r}{2}<r,$$

поэтому $(p+r)/2 \in \alpha$.

Далее, $r \notin \alpha$. Поскольку неравенство $p<r$ влечет за собой включение $p \in \alpha$, то r — наименьшее верхнее число сечения α.

1.7. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.6, называется *рациональным сечением*. Если мы захотим подчеркнуть, что α есть рациональное сечение, связанное с числом r указанным образом, то будем писать $\alpha = r^*$.

1.8. Определение. Пусть α, β — сечения. Мы будем писать $\alpha=\beta$, если из соотношения $p \in \alpha$ следует соотношение $p \in \beta$, а из $q \in \beta$ следует $q \in \alpha$, т. е. если эти два множества тождественно совпадают. В противном случае мы будем писать $\alpha \neq \beta$.

Замечание. Это определение на первый взгляд кажется излишним. Но равенство не всегда определяется как тождество. Например, если $p=a/b$ и $q=c/d$ — рациональные числа (a, b, c, d — целые), то $p=q$ по определению означает, что $ad=bc$, но не обязательно $a=c$ и $b=d$.

Введем теперь отношение порядка в множестве сечений.

1.9. Определение. Пусть α и β — сечения. Мы пишем $\alpha<\beta$ (или $\beta>\alpha$), если имеется рациональное число p, такое, что $p \in \beta$ и $p \notin \alpha$.

$$\alpha \leqslant \beta \text{ означает, что } \alpha=\beta \text{ или } \alpha<\beta.$$

$$\alpha \geqslant \beta \text{ означает, что } \beta \leqslant \alpha.$$

Если $\alpha > 0^*$, то мы будем говорить, что сечение α положительно, если $\alpha \geqslant 0^*$ — мы будем говорить, что оно неотрицательно. Аналогичным образом, если $\alpha < 0^*$, то α отрицательно; оно неположительно, если $\alpha \leqslant 0^*$.

Мы, конечно, будем продолжать пользоваться символом $<$ для рациональных чисел, так что этот символ (временно) будет нести двойную нагрузку. Однако из контекста всегда будет ясно, какой смысл следует ему приписать.

1.10. Теорема. *Пусть α, β — сечения. Тогда либо $\alpha=\beta$, либо $\alpha<\beta$, либо $\beta<\alpha$.*

Доказательство. Определения 1.8 и 1.9 ясно показывают, что если $\alpha = \beta$, то ни одно из двух других отношений не выполнено. Чтобы показать, что отношения $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$ исключают друг друга, предположим, что оба эти отношения имеют место. Поскольку $\alpha < \beta$, имеется рациональное число p, такое, что

$$p \in \beta, \quad p \notin \alpha.$$

Поскольку $\beta < \alpha$, имеется рациональное число q, такое, что

$$q \in \alpha, \quad q \notin \beta.$$

По теореме 1.5 из того, что $p \in \beta$ и $q \notin \beta$, следует, что $q < p$. Так как неравенства $p < q$ и $q < p$ не могут одновременно выполняться для рациональных чисел, мы пришли к противоречию.

До сих пор мы доказали, что из трех отношений может выполняться самое большее одно. Предположим теперь, что $\alpha \neq \beta$. Тогда два эти множества не совпадают тождественно; это значит, что либо α содержит рациональное p, не содержащееся в β, и в этом случае $\beta < \alpha$, либо β содержит рациональное q, не содержащееся в α, и в этом случае $\alpha < \beta$.

1.11. Теорема. *Пусть* α, β, γ — *сечения. Если* $\alpha < \beta$ *и* $\beta < \gamma$, *то* $\alpha < \gamma$.

Доказательство. Поскольку $\alpha < \beta$, существует рациональное p, такое, что

$$p \in \beta, \quad p \notin \alpha.$$

Поскольку $\beta < \gamma$, существует рациональное q, такое, что

$$q \in \gamma, \quad q \notin \beta.$$

Теперь заметим, что из соотношений $p \in \beta$ и $q \notin \beta$ следует, что $p < q$; последнее вместе с соотношением $p \notin \alpha$ влечет за собой $q \notin \alpha$. Таким образом,

$$q \in \gamma, \quad q \notin \alpha.$$

Это значит, что $\alpha < \gamma$.

Последние две теоремы показывают, что отношение $<$ между сечениями (определение 1.9) действительно обладает теми свойствами, которые обычно связывают с понятием неравенства.

Теперь мы переходим к построению арифметики в множестве сечений.

1.12. Теорема. *Пусть* α, β — *сечения. Пусть* γ — *множество всех рациональных чисел* r, *таких, что* $r = p + q$, *где* $p \in \alpha$, $q \in \beta$. *Тогда* γ — *сечение.*

Доказательство. Мы покажем, что γ удовлетворяет трем условиям определения 1.4.

(I) Ясно, что γ непусто. Пусть $s \notin \alpha$, $t \notin \beta$, s и t — рациональные числа. Тогда $s+t > p+q$ при всех $p \in \alpha$, $q \in \beta$, так что $s+t \notin \gamma$. Значит, γ содержит не все рациональные числа.

(II) Пусть $r \in \gamma$, $s < r$, s — рациональное число. Тогда $r = p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Выберем рациональное t так, что $s = t+q$. Тогда $t < p$, значит, $t \in \alpha$, поэтому $s \in \gamma$.

(III) Предположим, что $r \in \gamma$. Тогда $r = p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Существует рациональное $s > p$, такое, что $s \in \alpha$. Значит, $s+q \in \gamma$ и $s+q > r$, так что r не является наибольшим рациональным числом в γ.

1.13. Определение. Сечение γ, построенное в теореме 1.12, обозначается через $\alpha+\beta$ и называется суммой α и β.

(Замечание, сделанное после определения 1.9, относится также и к символу $+$.)

1.14. Теорема. *Пусть α, β, γ — сечения. Тогда*

(*a*) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$;

(*b*) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, *так что скобки можно опускать, не опасаясь двусмысленности*;

(*c*) $\alpha+0^* = \alpha$.

Доказательство. Для построения $\alpha+\beta$ нужно взять множество всех рациональных чисел вида $p+q$ ($p \in \alpha$, $q \in \beta$). Для построения $\beta+\alpha$ вместо $p+q$ нужно брать $q+p$. В силу закона коммутативности для сложения рациональных чисел, $\alpha+\beta$ и $\beta+\alpha$ — тождественные сечения, и свойство (*a*) доказано.

Аналогичным образом закон ассоциативности для сложения рациональных чисел влечет за собой равенство (*b*).

Чтобы доказать (*c*), выберем $r \in \alpha+0^*$. Тогда $r = p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in 0^*$ (т. е. $q < 0$). Значит, $p+q < p$, так что $p+q \in \alpha$ и $r \in \alpha$.

Теперь пусть $r \in \alpha$. Выберем рациональное число $s > r$, такое, что $s \in \alpha$. Положим $q = r-s$. Тогда $q < 0$, $q \in 0^*$ и $r = s+q$, так что $r \in \alpha+0^*$.

Таким образом, сечения $\alpha+0^*$ и α совпадают.

1.15. Теорема. *Пусть α — сечение, и пусть задано рациональное число $r > 0$. Тогда существуют рациональные p, q, такие, что $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q не является наименьшим из верхних чисел сечения α и $q-p = r$.*

Доказательство. Выберем рациональное число $s \in \alpha$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ положим $s_n = s+nr$. Тогда имеется единственное целое m, такое, что $s_m \in \alpha$ и $s_{m+1} \notin \alpha$.

Если s_{m+1} не есть наименьшее из верхних чисел сечения α, то выберем $p=s_m$, $q=s_{m+1}$.

Если s_{m+1} — наименьшее из верхних чисел сечения α, то возьмем

$$p=s_m+\frac{r}{2},\quad q=s_{m+1}+\frac{r}{2}.$$

1.16. Теорема. *Пусть α — сечение. Тогда существует одно и только одно сечение β, такое, что $\alpha+\beta=0^*$.*

Доказательство. Сначала мы докажем единственность. Если $\alpha+\beta_1=\alpha+\beta_2=0^*$, то теорема 1.14 показывает, что

$$\beta_2=0^*+\beta_2=(\alpha+\beta_1)+\beta_2=(\alpha+\beta_2)+\beta_1=0^*+\beta_1=\beta_1.$$

Для доказательства существования обозначим через β множество всех рациональных p, таких, что $-p$ является верхним числом сечения α, но не наименьшим из верхних чисел. Мы должны проверить, что это множество β удовлетворяет трем условиям определения 1.4. Выполнение условия (I) очевидно.

(II) Если $p\in\beta$ и $q<p$ (q — рациональное), то $-p\notin\alpha$ и $-q>-p$, так что $-q$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее. Значит, $q\in\beta$.

(III) Если $p\in\beta$, то $-p$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее, так что имеется рациональное число q, такое, что $-q<-p$ и $-q\notin\alpha$. Положим

$$r=\frac{p+q}{2}.$$

Тогда $-q<-r<-p$, так что $-r$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее. Значит, мы нашли рациональное $r>p$, такое, что $r\in\beta$.

Показав, что β — сечение, мы должны теперь проверить, что $\alpha+\beta=0^*$.

Предположим, что $p\in\alpha+\beta$. Тогда $p=q+r$ при некоторых $q\in\alpha$, $r\in\beta$. Значит, $-r\notin\alpha$, $-r>q$, $q+r<0$, и $p\in0^*$.

Предположим, что $p\in0^*$. Тогда $p<0$. По теореме 1.15 имеются рациональные числа $q\in\alpha$, $r\notin\alpha$ (причем r не является наименьшим из верхних чисел сечения α), такие, что $r-q=-p$. Поскольку $-r\in\beta$, мы имеем

$$p=q-r=q+(-r)\in\alpha+\beta.$$

Доказательство закончено.

1.17. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.16, обозначается $-\alpha$.

1.18. Теорема. *Для любых сечений α, β, γ, таких, что $\beta<\gamma$, имеем $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$. В частности (полагая $\beta=0^*$), мы имеем $\alpha+\gamma>0^*$, если $\alpha>0^*$, $\gamma>0^*$.*

Доказательство. Согласно определениям 1.9 и 1.13, $\alpha+\beta\leqslant\alpha+\gamma$. Если
$$\alpha+\beta=\alpha+\gamma,$$
то
$$\beta=0^*+\beta=(-\alpha)+(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(\alpha+\gamma)=0^*+\gamma=\gamma$$
по теореме 1.14.

1.19. Теорема. *Пусть α, β — сечения. Тогда существует одно и только одно сечение γ, такое, что $\alpha+\gamma=\beta$.*

Доказательство. Единственность следует из того, что неравенство $\gamma_1\neq\gamma_2$ влечет за собой неравенство $\alpha+\gamma_1\neq\alpha+\gamma_2$ (теорема 1.18).

Положим $\gamma=\beta+(-\alpha)$. По теореме 1.14 мы имеем тогда
$$\alpha+\gamma=\alpha+[\beta+(-\alpha)]=\alpha+[(-\alpha)+\beta]=$$
$$=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=0^*+\beta=\beta.$$

1.20. Определение. Сечение γ, построенное в теореме 1.19, обозначается через $\beta-\alpha$, т. е. мы пишем $\beta-\alpha$ вместо $\beta+(-\alpha)$.

1.21. Замечание. Нам совсем не потребуется в этой книге теория групп. Однако читатели, знакомые с понятием группы, могли заметить, что теоремы 1.12, 1.14 и 1.16 означают, что множество сечений есть коммутативная группа относительно сложения, введенного определением 1.13. Сейчас мы определим умножение и покажем, что множество сечений образует поле.

Остановившись подробно на сложении и вычитании, мы совсем кратко и без доказательства рассмотрим умножение и деление. Доказательства теорем, которые мы далее сформулируем, совершенно аналогичны доказательствам теорем о сложении и вычитании, за исключением того, что иногда необходимо рассмотреть несколько случаев в зависимости от знака сомножителей.

1.22. Теорема. *Пусть α, β — такие сечения, что $\alpha\geqslant 0^*$, $\beta\geqslant 0^*$. Пусть γ состоит из всех отрицательных рациональных чисел и всех рациональных r, таких, что $r=pq$, где $p\in\alpha$, $q\in\beta$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$. Тогда γ — сечение.*

1.23. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.22, обозначается через $\alpha\beta$ и называется *произведением* сечений α и β.

1.24. Определение. Каждому сечению α сопоставим сечение $|\alpha|$, называемое *абсолютной величиной* α и определяемое следующим образом:
$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{если } \alpha\geqslant 0^*,\\ -\alpha, & \text{если } \alpha<0^*.\end{cases}$$

Ясно, что $|\alpha| \geqslant 0^*$ при всех α и $|\alpha| = 0^*$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0^*$.

Теперь мы можем дополнить определение умножения.

1.25. Определение. Пусть α, β — сечения. Положим, по определению,

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(|\alpha|\,|\beta|), & \text{если } \alpha < 0^*,\ \beta \geqslant 0^*, \\ -(|\alpha|\,|\beta|), & \text{если } \alpha \geqslant 0^*,\ \beta < 0^*, \\ |\alpha|\,|\beta|, & \text{если } \alpha < 0^*,\ \beta < 0^*. \end{cases}$$

Заметим, что произведение $|\alpha|\,|\beta|$ уже было определено в 1.23, так как $|\alpha| \geqslant 0^*$, $|\beta| \geqslant 0^*$.

1.26. Теорема. *Для любых сечений α, β, γ имеем*

(*a*) $\alpha\beta = \beta\alpha$,

(*b*) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,

(*c*) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,

(*d*) $\alpha 0^* = 0^*$,

(*e*) $\alpha\beta = 0^*$ *только тогда, когда* $\alpha = 0^*$ *или* $\beta = 0^*$,

(*f*) $\alpha 1^* = \alpha$,

(*g*) *если* $\alpha < \beta$ *и* $\gamma > 0^*$, *то* $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

1.27. Теорема. *Если $\alpha \neq 0^*$, то для любого сечения β существует одно и только одно сечение γ (которое мы будем обозначать через β/α), такое, что $\alpha\gamma = \beta$.*

В заключение этого раздела приведем три теоремы, касающиеся рациональных сечений.

1.28. Теорема. *Для любых рациональных чисел p и q имеем*

(*a*) $p^* + q^* = (p + q)^*$,

(*b*) $p^*q^* = (pq)^*$,

(*c*) $p^* < q^*$ *тогда и только тогда, когда* $p < q$.

Доказательство. Если $r \in p^* + q^*$, то $r = s + t$, где $s < p$, $t < q$, так что $r < p + q$. Значит, $r \in (p + q)^*$.

Если $r \in (p + q)^*$, то $r < p + q$. Положим

$$h = p + q - r,\quad s = p - \frac{h}{2},\quad t = q - \frac{h}{2}.$$

Тогда $s \in p^*$, $t \in q^*$ и $r = s + t$, так что $r \in p^* + q^*$. Этим доказано свойство (*a*). Доказательство свойства (*b*) аналогично.

Если $p < q$, то $p \in q^*$, но $p \notin p^*$, так что $p^* < q^*$.

Если $p^* < q^*$, то имеется рациональное число r, такое, что $r \in q^*$, $r \notin p^*$. Значит,

$$p \leqslant r < q,$$

так что $p < q$.

1.29. Теорема. *Если α, β — сечения и $\alpha < \beta$, то существует рациональное сечение r^*, такое, что $\alpha < r^* < \beta$.*

Доказательство. Если $\alpha < \beta$, то существует рациональное число p, такое, что $p \in \beta$, $p \notin \alpha$. Выберем $r > p$ так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta$ и $r \notin r^*$, мы видим, что $r^* < \beta$.

Поскольку $p \in r^*$ и $p \notin \alpha$, мы видим, что $\alpha < r^*$.

1.30. Теорема. *Для любого сечения α имеем $p \in \alpha$ тогда и только тогда, когда $p^* < \alpha$.*

Доказательство. Для любого рационального p имеем $p \notin p^*$. Значит, $p^* < \alpha$, если $p \in \alpha$. Обратно, если $p^* < \alpha$, то существует рациональное q, такое, что $q \in \alpha$ и $q \notin p^*$. Таким образом, $q \geqslant p$; последнее неравенство вместе с $q \in \alpha$ влечет за собой включение $p \in \alpha$.

Вещественные числа

Подведем итоги сказанному в предыдущем разделе. Мы рассмотрели некоторые множества рациональных чисел, которые мы назвали сечениями. Были определены отношение порядка и две операции, названные сложением и умножением, и мы доказали, что получившаяся арифметика сечений подчиняется тем же законам, что и арифметика рациональных чисел. Иными словами, множество всех сечений было превращено в упорядоченное поле.

Особое внимание было уделено специальному классу сечений, так называемым «рациональным сечениям», и мы обнаружили, что при замене рациональных чисел r соответствующими сечениями r^* суммы, произведения и порядок сохраняются (теорема 1.28). Этот же факт можно выразить, сказав, что упорядоченное поле всех рациональных чисел *изоморфно* упорядоченному полю всех рациональных сечений; это позволяет нам отождествить рациональное сечение r^* с рациональным числом r. Разумеется, r^* — это не то же самое, что r, но свойства, с которыми мы имеем дело (арифметика и порядок), одинаковы в этих двух полях.

Теперь определим, что мы будем понимать под вещественным числом.

1.31. Определение. В дальнейшем сечения будут называться *вещественными числами*. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами (и будут называться рациональными числами). Все другие сечения будут называться *иррациональными числами*.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел. Теорема 1.29 показывает, что между любыми двумя вещественными числами имеется рациональное число, а теорема 1.30 показывает, что каждое вещественное число α есть множество всех рациональных чисел p, таких, что $p<\alpha$.

В следующей теореме высказано чрезвычайно важное свойство системы вещественных чисел.

1.32. Теорема (Дедекинд). *Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что*

(*a*) *каждое вещественное число принадлежит или A, или B;*
(*b*) *никакое вещественное число не принадлежит и A, и B;*
(*c*) *ни A, ни B не пусты;*
(*d*) *если $\alpha \in A$ и $\beta \in B$, то $\alpha<\beta$.*

Тогда существует одно (и только одно) вещественное число γ, такое, что $\alpha \leqslant \gamma$ при всех $\alpha \in A$ и $\gamma \leqslant \beta$ при всех $\beta \in B$.

Прежде чем переходить к доказательству, сформулируем такое следствие.

Следствие. *В предположениях теоремы* 1.32 *либо A содержит наибольшее число, либо B содержит наименьшее число.*

Действительно, если $\gamma \in A$, то γ — *наибольшее число в A*; если $\gamma \in B$, то γ — наименьшее в B; в силу (*a*), одна из этих возможностей должна осуществиться, тогда как, в силу (*b*), они не могут осуществиться обе.

Именно существование γ (единственность тривиальна) составляет содержание этой важной теоремы. Оно показывает, что пробелы, которые мы обнаружили в системе рациональных чисел (ср. с примером 1.1), теперь заполнены. Более того, если бы мы попытались повторить тот процесс, который привел нас от рациональных чисел к вещественным, и начали строить сечения (как в определении 1.4), элементами которых были бы вещественные числа, то каждое сечение имело бы наименьшее верхнее число, и мы смогли бы сразу же отождествить каждое сечение с наименьшим из его верхних чисел, не получив ничего нового.

По этой причине теорему 1.32 иногда называют теоремой полноты для вещественных чисел.

Доказательство теоремы 1.32. Допустим, что имеются два числа γ_1 и γ_2, для которых выполнено заключение теоремы; пусть $\gamma_1<\gamma_2$. Выберем γ_3 так, что $\gamma_1<\gamma_3<\gamma_2$ (это возможно по теореме 1.29). Тогда из неравенства $\gamma_3<\gamma_2$ следует, что

$\gamma_3 \in A$, в то время как неравенство $\gamma_1 < \gamma_3$ дает $\gamma_3 \in B$. Это противоречит условию (*b*). Таким образом, существует не более чем одно число γ с требуемыми свойствами.

Пусть γ — множество всех рациональных чисел p, таких, что $p \in \alpha$ при некотором $\alpha \in A$. Мы должны проверить, что γ удовлетворяет условиям определения 1.4.

(I) Поскольку A непусто, γ также непусто. Если $\beta \in B$ и $q \notin \beta$, то $q \notin \alpha$ при любом $\alpha \in A$ (ибо $\alpha < \beta$); значит, $q \notin \gamma$.

(II) Если $p \in \gamma$ и $q < p$, то $p \in \alpha$ при некотором $\alpha \in A$; значит, $q \in \alpha$, поэтому $q \in \gamma$.

(III) Если $p \in \gamma$, то $p \in \alpha$ при некотором $\alpha \in A$; значит, существует $q > p$, такое, что $q \in \alpha$; следовательно, $q \in \gamma$.

Таким образом, γ — вещественное число.

Ясно, что $\alpha \leqslant \gamma$ при всех $\alpha \in A$. Если бы при некотором $\beta \in B$ оказалось, что $\beta < \gamma$, то нашлось бы рациональное число p, такое, что $p \in \gamma$ и $p \notin \beta$; но если $p \in \gamma$, то $p \in \alpha$ при некотором $\alpha \in A$, а отсюда следует, что $\beta < \alpha$, вопреки условию (*d*). Таким образом, $\gamma \leqslant \beta$ при всех $\beta \in B$, и доказательство закончено.

Теперь мы откажемся от некоторых соглашений об обозначениях, действовавших до сих пор. Буквы $p, q, r, \ldots$ больше не будут предназначаться только для рациональных чисел, и буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ тоже можно будет пользоваться для разных целей.

1.33. Определение. Пусть E — некоторое множество вещественных чисел. Если существует число y, такое, что $x \leqslant y$ при всех $x \in E$, то мы будем говорить, что множество E *ограничено сверху*, а число y будем называть *верхней границей* множества E.

Нижние границы определяются аналогичным образом. Если множество E ограничено сверху и снизу, то оно называется ограниченным.

1.34. Определение. Пусть E ограничено сверху. Предположим, что y обладает следующими свойствами:

(*a*) y является верхней границей множества E;

(*b*) если $x < y$, то x не является верхней границей множества E.

Тогда y называется *верхней гранью* (точной верхней границей) множества E (как следует из (*b*), существует не более чем одно такое число y). Мы будем употреблять сокращенное обозначение sup для верхней грани.

Нижняя грань (inf) любого множества E, ограниченного снизу, определяется таким же образом.

1.35. Примеры. (*a*) Пусть множество E состоит из всех чисел $1/n$, где $n = 1, 2, 3 \ldots$. Тогда множество E ограничено, его верхняя грань равна 1, а его нижняя грань равна 0. Заметим, что в этом случае верхняя грань принадлежит множеству, а нижняя грань — не принадлежит.

В общем случае верхняя грань (или нижняя грань) может принадлежать, а может и не принадлежать множеству.

(*b*) Пусть E состоит из всех неотрицательных чисел. Тогда E ограничено снизу, но не ограничено сверху, и его нижняя грань равна 0.

1.36. Теорема. *Пусть E — непустое множество вещественных чисел, ограниченное сверху. Тогда* $\sup E$ *существует.*

Доказательство. Пусть A — множество вещественных чисел, определенное следующим образом: $\alpha \in A$ в том и только в том случае, когда существует число $x \in E$, такое, что $\alpha < x$. Пусть B состоит из всех вещественных чисел, не принадлежащих A.

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней границей множества E, а каждый элемент множества B является верхней границей множества E. Чтобы доказать существование верхней грани, достаточно поэтому доказать, что B содержит наименьшее число.

Проверим теперь, что A и B удовлетворяют предположениям теоремы 1.32.

Очевидно, что свойства (*a*) и (*b*) выполнены. Поскольку E непусто, существует некоторый элемент $x \in E$ и каждое число $\alpha < x$ принадлежит A. Так как E ограничено сверху, существует число y, такое, что $x \leqslant y$ при всех $x \in E$, значит, $y \in B$ и выполнено свойство (*c*). Если $\alpha \in A$, то существует элемент $x \in E$, такой, что $\alpha < x$. Если $\beta \in B$, то $x \leqslant \beta$. Таким образом, $\alpha < \beta$ при всех $\alpha \in A$, $\beta \in B$, и выполнено (*d*).

Итак, в силу следствия из теоремы 1.32, либо A содержит наибольшее число, либо B содержит наименьшее. Мы докажем, что первая возможность не может осуществиться.

Пусть $\alpha \in A$. Тогда существует число $x \in E$, такое, что $\alpha < x$. Выберем α' так, что $\alpha < \alpha' < x$. Поскольку $\alpha' < x$, то $\alpha' \in A$, так что α не есть наибольшее число в A.

Это завершает доказательство.

В качестве приложения вышеизложенного мы приведем доказательство существования корней n-й степени из положительных вещественных чисел. Тем самым будет показано, как можно преодолеть трудности, отмеченные во введении (иррациональность $\sqrt{2}$).

1.37. Теорема. *Для всякого вещественного $x > 0$ и всякого целого $n > 0$ существует одно и только одно вещественное $y > 0$, такое, что $y^n = x$.*

Это число записывают так: $\sqrt[n]{x}$ или $x^{1/n}$.

Доказательство. Единственность следует из того, что неравенство $0<y_1<y_2$ влечет за собой неравенство $y_1^n<y_2^n$.

Пусть E — множество, состоящее из всех положительных вещественных t, таких, что $t^n<x$.

Если $t=x/(1+x)$, то $0<t<1$; значит, $t^n\leqslant t<x$, так что E непусто.

Положим $t_0=1+x$. Тогда из неравенства $t>t_0$ следует, что $t^n\geqslant t>x$, поэтому $t\notin E$ и t_0 является верхней границей множества E.

Пусть y — верхняя грань множества E (которая существует по теореме 1.36).

Допустим, что $y^n<x$. Выберем h таким, что $0<h<1$ и

$$h<\frac{x-y^n}{(1+y)^n-y^n}.$$

Тогда, обозначая через $\binom{n}{m}$ коэффициент при z^m в разложении бинома $(1+z)^n$, получим

$$\begin{aligned}(y+h)^n&=y^n+\binom{n}{1}y^{n-1}h+\binom{n}{2}y^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n}h^n\leqslant\\&\leqslant y^n+h\left[\binom{n}{1}y^{n-1}+\binom{n}{2}y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=\\&=y^n+h\left[(1+y)^n-y^n\right]<y^n+(x-y^n)=x.\end{aligned}$$

Таким образом, $y+h\in E$. Это противоречит тому, что y — верхняя граница множества E.

Допустим, что $y^n>x$. Выберем k таким, что $0<k<1$, $k<y$ и

$$k<\frac{y^n-x}{(1+y)^n-y^n}.$$

Тогда при $t\geqslant y-k$ получим

$$\begin{aligned}t^n&\geqslant(y-k)^n=y^n-\binom{n}{1}y^{n-1}k+\binom{n}{2}y^{n-2}k^2-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}k^n=\\&=y^n-k\left[\binom{n}{1}y^{n-1}-\binom{n}{2}y^{n-2}k+\ldots-(-1)^n\binom{n}{n}k^{n-1}\right]\geqslant\\&\geqslant y^n-k\left[\binom{n}{1}y^{n-1}+\binom{n}{2}y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=\\&=y^n-k\left[(1+y)^n-y^n\right]>y^n-(y^n-x)=x.\end{aligned}$$

Таким образом, $y-k$ является верхней границей множества E, а это противоречит тому, что y — наименьшая из верхних границ множества E.

Следовательно, $y^n = x$.

1.38. Десятичные дроби. В заключение этого раздела укажем на соотношение между вещественными числами и десятичными дробями.

Пусть $x > 0$ — вещественное число. Пусть n_0 — наибольшее целое число, такое, что $n_0 \leqslant x$. Если n_0, n_1, ..., n_{k-1} уже выбраны, то пусть n_k — наибольшее целое число, такое, что

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \leqslant x.$$

Пусть E — множество чисел

(3) $\quad n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$

Тогда x — верхняя грань множества E. Десятичное разложение числа x имеет вид

(4) $\quad n_0{,}n_1n_2n_3 \ldots .$

Обратно, для любой бесконечной десятичной дроби (4) множество E чисел вида (3) ограничено сверху[1]), и (4) является десятичным разложением верхней грани этого множества [2]).

Мы не обсуждаем подробно десятичные дроби, так как никогда не будем ими пользоваться.

Расширенная система вещественных чисел

1.39. Определение. Расширенная система вещественных чисел состоит из системы вещественных чисел, к которой присоединены два символа $-\infty$ и $+\infty$, причем выполняются следующие свойства:

(*а*) если x — вещественное число, то $-\infty < x < +\infty$,

$$x + \infty = +\infty,\ x - \infty = -\infty,\ \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0;$$

(*б*) если $x > 0$, то

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \qquad x \cdot (-\infty) = -\infty;$$

[1]) Необходимо отметить, что $n_k \leqslant 9$ ($k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$).—*Прим. перев.*

[2]) Это утверждение автора следует уточнить. Десятичным разложением числа x названа последовательность чисел (3), полученная с помощью «приближений *по недостатку*», причем каждая конечная дробь, соответствующая последовательности $n_0{,}n_1 \ldots n_k$, дает наилучшее приближение к x слева с точностью до 10^{-k}. Но в таком случае неверно, что дробь $n_0{,}n_1n_2 \ldots n_k \ldots$. где $n_0 = 0$, $n_k = 9$ ($k = 1, 2, \ldots$) является десятичным разложением для $\sup E$; таким десятичным разложением служит дробь 1,000... .—*Прим. перев.*

(*c*) если $x<0$, то

$$x\cdot(+\infty)=-\infty, \qquad x\cdot(-\infty)=+\infty.$$

Если необходимо подчеркнуть различие между символами $-\infty$, $+\infty$, с одной стороны, и вещественными числами, с другой, то последние называют конечными[1]).

1.40. Определение. Пусть E — множество, элементы которого принадлежат расширенной системе вещественных чисел. Если E не ограничено сверху (т. е. если для любого вещественного y существует элемент $x\in E$, такой, что $y<x$), то верхняя грань множества E по определению равна $+\infty$.

Аналогичным образом нижняя грань множества E, не ограниченного снизу, по определению равна $-\infty$.

Итак, в расширенной системе вещественных чисел каждое множество имеет inf и sup. Это и есть главная причина введения символов $-\infty$ и $+\infty$.

Комплексные числа

1.41. Определение. *Комплексным числом* называется пара вещественных чисел a, b (в таком порядке). Обозначим это комплексное число через (a, b).

В этом разделе буквами x, y, z будут обозначаться комплексные числа, буквами a, b, c, ... — вещественные числа; мы будем (временно) писать

$$u=(1, 0); \qquad n=(0, 0).$$

1.42. Определение. Пусть $x=(a, b)$, $y=(c, d)$. Тогда $x=y$ тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$. Паре x, y сопоставим два комплексных числа, обозначаемых через $x+y$, xy и определенных следующим образом:

$$x+y=(a+c,\ b+d),$$
$$xy=(ac-bd,\ ad+bc).$$

[1]) Такой способ расширения множества всех вещественных чисел не согласуется с теорией сечений, при помощи которой только что пополнялось множество всех рациональных чисел. Действительно, центральное место в теории Дедекинда занимает доказательство *существования* множества (иррациональных чисел), элементы которого связаны друг с другом и с рациональными числами многочисленными соотношениями (а не просто введение новых символов, удовлетворяющих определенным аксиомам). С этой точки зрения расширение множества всех вещественных чисел можно было бы «построить», рассмотрев еще два сечения: для первого из них (обозначаемого $-\infty$) нижним классом служит пустое множество, а для второго (обозначаемого $+\infty$) — множество всех рациональных чисел. Разумно определив смысл символов $x\pm\infty$, $x\cdot(\pm\infty)$, отношений $<$, $>$ и т. д., можно было бы *доказать* свойства (*a*), (*b*), (*c*). — *Прим. перев.*

1.43. Теорема. *Для операций сложения и умножения, введенных в определении* 1.42, *выполняются законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.*

Доказательство. Пусть $x=(a,\ b)$, $y=(c,\ d)$, $z=(e,\ f)$.

(*a*) $x+y=(a+c,\ b+d)=(c+a,\ d+b)=y+x$;

(*b*) $$(x+y)+z=(a+c,\ b+d)+(e,\ f)=(a+c+e,\ b+d+f)= \\ =(a,\ b)+(c+e,\ d+f)=x+(y+z);$$

(*c*) $xy=(ac-bd,\ ad+bc)=(ca-db,\ da+cb)=(c,\ d)(a,\ b)=yx$;

(*d*) $$(xy)z=(ac-bd,\ ad+bc)(e,\ f)= \\ =(ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce)= \\ =(a,\ b)(ce-df,\ cf+de)=x(yz);$$

(*e*) $$(x+y)z=(a+c,\ b+d)(e,\ f)= \\ =(ae+ce-bf-df,\ af+cf+be+de)= \\ =(ae-bf,\ af+be)+(ce-df,\ cf+de)=xz+yz.$$

1.44. Теорема. *Для любого комплексного* x *имеем* $x+n=x$, $xn=n$, $xu=x$.

Доказательство. Это следует непосредственно из определения 1.42.

1.45. Теорема. *Если* $x+y=x+z$, *то* $y=z$.

Доказательство. Если $y\neq z$, то, как показывают определение 1.42 и теорема 1.18, $x+y\neq x+z$.

1.46. Теорема. *Для любого комплексного числа* x *существует одно и только одно комплексное число* y, такое, что $x+y=n$.

Мы обозначим это число y через $-x$.

Доказательство. Единственность следует из теоремы 1.45. Чтобы доказать существование, допустим, что $x=(a,\ b)$, и положим $-x=(-a,\ -b)$.

1.47. Теорема. *Если писать* $x-y$ *вместо* $x+(-y)$, *то*

(*a*) $x-x=n$,

(*b*) $(-x)y=x(-y)=-(xy)=(-u)(xy)$,

так что не возникнет никакой неясности, если мы будем все эти выражения записывать в виде $-xy$.

Доказательства тривиальны.

1.48. Определение. Пусть $x=(a,\ b)$. Мы будем называть *абсолютной величиной* числа x число $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$ (мы рассматриваем только неотрицательное значение квадратного корня, которое определяется единственным образом по теореме 1.37).

Заметим, что абсолютная величина комплексного числа — неотрицательное вещественное число.

1.49. Теорема. *Для любых комплексных чисел x, y имеем*

(*a*) $|x|>0$, *если* $x \neq n$, *и* $|n|=0$;

(*b*) $|xy|=|x|\,|y|$.

Доказательство. Свойство (*a*) тривиально. Что касается (*b*), то пусть $x=(a, b)$, $y=(c, d)$. Тогда $|xy|^2=|(ac-bd,\ ad+ bc)|^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)(c^2+d^2)=|x|^2|y|^2$. Значит,

$$|xy|=\sqrt{|x|^2|y|^2}=|x|\,|y|.$$

Доказать последнее равенство мы предоставляем читателю (упражнение 4).

1.50. Теорема. *Если $xy=n$, то либо $x=n$, либо $y=n$.*

Доказательство. Если $xy=n$, то по теореме 1.49

$$|x|\,|y|=|xy|=|n|=0.$$

Поскольку $|x|$ и $|y|$ вещественны, отсюда следует, что либо $|x|=0$, либо $|y|=0$, т. е. либо $x=n$, либо $y=n$.

1.51. Теорема. *Если $x \neq n$ и $xy=xz$, то $y=z$.*

Доказательство. Имеем

$$x(y-z)=xy-xz=n.$$

По теореме 1.50 $y-z=n$, т. е. $y=z$.

1.52. Теорема. *Для любого комплексного $x \neq n$ существует одно и только одно комплексное число y (которое мы будем записывать в виде u/x), такое, что $xy=u$.*

Доказательство. Единственность следует из теоремы 1.51. Пусть $x=(a, b)$. Положим

$$y=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Тогда

$$xy=(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,\ 0)=u.$$

1.53. Теорема. *Если $x \neq n$, то для любого комплексного y существует одно и только одно комплексное z (которое мы будем записывать в виде y/x), такое, что $xz=y$.*

Доказательство. Положим $z=(u/x)\cdot y$. Тогда

$$xz = x\cdot\frac{u}{x}\cdot y = u\cdot y = y.$$

Итак, мы показали, что комплексные числа со сложением и умножением, введенными в определении 1.42, подчиняются всем обычным законам арифметики.

1.54. Теорема. *Для любых вещественных чисел a и b имеем*

(*a*) $(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0)$,

(*b*) $(a, 0)(b, 0)=(ab, 0)$,

(*c*) $\left(\frac{a, 0}{b, 0}\right)=\left(\frac{a}{b}, 0\right)$, *если* $b\neq 0$,

(*d*) $|(a, 0)|=|a|$.

В (*d*) символ $|a|$ нужно понимать в смысле определения 1.24.

Доказательство тривиально.

Теорема 1.54 показывает, что комплексные числа вида $(a, 0)$ обладают теми же арифметическими свойствами, что и вещественные числа a.

Мы можем поэтому отождествить $(a, 0)$ с a; это отождествление превращает множество всех вещественных чисел в подмножество системы комплексных чисел.

В частности, мы будем теперь писать 0 вместо n и 1 вместо u.

Читатель, вероятно, заметил, что мы построили арифметику комплексных чисел, не вводя таинственного символа «$\sqrt{-1}$». Теперь мы хотим показать, что обозначение (a, b) равносильно более привычному $a+bi$.

1.55. Определение. $i=(0, 1)$.

1.56. Теорема. $i^2=-1$.

Доказательство. $i^2=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)=-1$.

1.57. Теорема. *Если a и b — вещественные числа, то* $(a, b)=a+bi$.

Доказательство. $a+bi=(a, 0)+(b, 0)(0, 1)=(a, 0)+(0, b)=(a, b)$.

1.58. Теорема. *Если x и y — комплексные числа, то*

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

Доказательство. Если $x+y=0$, то доказывать нечего. Допустим, что $x+y\neq 0$, и положим

$$\lambda=\frac{|x+y|}{x+y}.$$

Умножая на $x+y$, мы заключаем по теореме 1.49(*b*), что $|\lambda|=1$. Кроме того, $\lambda x+\lambda y$ — вещественное число. Если $\lambda x=(a, b)$ и $\lambda y=(c, d)$, то, как показывает определение 1.48,

$$|a|\leqslant|\lambda x|=|x|, \qquad |c|\leqslant|\lambda y|=|y|,$$

значит,

$$|x+y|=\lambda x+\lambda y=a+c\leqslant|a|+|c|\leqslant|x|+|y|.$$

1.59. Определение. Если a и b — вещественные числа и $z=a+bi$, то комплексное число $\bar{z}=a-bi$ называется *сопряженным* с z.

1.60. Теорема. *Если x, y — комплексные числа, то*

(*a*) $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$,

(*b*) $\overline{xy}=\bar{x}\cdot\bar{y}$,

(*c*) $x\bar{x}=|x|^2$ *(значит, число $x\bar{x}$ вещественно и неотрицательно),*

(*d*) $x+\bar{x}$ *— вещественное число,*

(*e*) *если x вещественно, то $\bar{x}=x$.*

Доказательства этих утверждений тривиальны.

1.61. Обозначение. Если $x_1, \ldots, x_n$ — комплексные числа, то мы будем писать

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Мы закончим этот раздел важным неравенством, известным под названием неравенства Шварца.

1.62. Теорема. *Если $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — комплексные числа, то*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\bar{b}_j\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2.$$

Доказательство. Положим $A=\sum|a_j|^2$, $B=\sum|b_j|^2$, $C=\sum a_j\bar{b}_j$ (во всех суммах в доказательстве j пробегает множество чисел $1, \ldots, n$). Если $B=0$, то $b_1=\ldots=b_n=0$, и заключение тривиально. Допустим поэтому, что $B>0$. По теореме 1.60 имеем

$$\begin{aligned}\sum|Ba_j-Cb_j|^2&=\sum(Ba_j-Cb_j)(B\bar{a}_j-\overline{Cb_j})=\\&=B^2\sum|a_j|^2-B\bar{C}\sum a_j\bar{b}_j-BC\sum\bar{a}_jb_j+\\&+|C|^2\sum|b_j|^2=B^2A-B|C|^2=B(AB-|C|^2).\end{aligned}$$

Мы видим, что

$$B(AB-|C|^2)\geqslant 0,$$

так как все слагаемые в первой сумме неотрицательны. Отсюда следует, что $AB-|C|^2\geqslant 0$, поскольку $B>0$. Но это и есть требуемое неравенство.

Евклидовы пространства

1.63. Определения. Для каждого положительного целого k обозначим через R^k множество всех упорядоченных последовательностей из k вещественных чисел

$$\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_k);$$

числа $x_1,\ldots,x_k$ называются координатами элемента $\mathbf{x}$. Элементы множества R^k называются точками, или векторами, особенно при $k>1$. Мы будем обозначать векторы буквами, набранными жирным шрифтом. Если $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_k)$ и α — вещественное число, то положим

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ \ldots,x_k+y_k),$$
$$\alpha\mathbf{x}=(\alpha x_1,\ \ldots,\ \alpha x_k),$$

так что $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in R^k$ и $\alpha\mathbf{x}\in R^k$. Тем самым определено сложение векторов, а также умножение вектора на вещественное число (скаляр). Эти две операции подчиняются законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (доказательство тривиально, так как аналогичным законам подчиняются вещественные числа) и превращают R^k *в векторное пространство над полем вещественных чисел*. Нулевой элемент пространства R^k (иногда называемый *началом*, или *нулевым вектором*) — это точка $\mathbf{0}$, все координаты которой равны 0.

Мы определим еще так называемое *скалярное* (*или внутреннее*) *произведение* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k}x_iy_i,$$

а также *норму* вектора $\mathbf{x}$:

$$|\mathbf{x}|=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}=\left(\sum_{1}^{k}x_i^2\right)^{1/2}.$$

Определенная таким образом структура (векторное пространство R^k со скалярным произведением и нормой) называется евклидовым k-мерным пространством.

1.64. Теорема. *Пусть* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in R^k$ *и* α — *вещественное число. Тогда*

(*a*) $|\mathbf{x}| \geqslant 0$;
(*b*) $|\mathbf{x}| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
(*c*) $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$;
(*d*) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$;
(*e*) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$;
(*f*) $|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \leqslant |\mathbf{x}-\mathbf{y}| + |\mathbf{y}-\mathbf{z}|$.

Доказательство. Утверждения (*a*), (*b*) и (*c*) очевидны, а (*d*) следует непосредственно из неравенства Шварца. В силу (*d*), имеем

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \leqslant$$
$$\leqslant |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2,$$

что доказывает (*e*). Наконец, (*f*) следует из (*e*), если заменить $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y}-\mathbf{z}$.

1.65. Замечания. Теорема 1.64 (*a*), (*b*) и (*f*) позволит нам (см. гл. 2) рассматривать R^k как метрическое пространство.

Пространство R^1 (множество всех вещественных чисел) обычно называют прямой, или вещественной прямой. Аналогичным образом, R^2 называют плоскостью (ср. определения 1.41 и 1.63). В этих двух случаях норма — это абсолютная величина соответствующего вещественного или комплексного числа.

Упражнения

1. Пусть r — рациональное число ($r \neq 0$), а x — иррациональное. Доказать, что числа $r+x$ и rx иррациональны.

2. Доказать, что между любыми двумя вещественными числами содержится иррациональное число.

3. Доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 12.

4. Пусть $x > 0$, $y > 0$ и n — положительное целое число. Доказать, что

$$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

(ср. с теоремой 1.37).

5. Если $x > 0$, а r — рациональное число ($r = n/m$), то положим

$$x^r = \sqrt[m]{x^n}.$$

Доказать, что $x^r = (\sqrt[m]{x})^n$.

6. Доказать, что если $x > 1$, то $x^p < x^q$ при любых рациональных p, q, таких, что $p < q$.

7. Определить x^y для $x>1$ и вещественного y, используя упражнение 6 и метод теоремы 1.37, и доказать, что

(*a*) $x^y<x^z$, если $1<x$, $y<z$;

(*b*) $x^y<z^y$, если $1<x<z$, $y>0$;

(*c*) $x^{y+z}=x^y x^z$.

8. Как нужно изменить упражнения 6 и 7, если $0\leqslant x\leqslant 1$?

9. Пусть $b>1$, $x>0$. Доказать, что существует одно и только одно вещественное число y, такое, что $x=b^y$. Это число y называется логарифмом x при основании b.

10. В каких пунктах нашего изложения теории вещественных чисел возникли бы трудности, если бы было опущено условие III определения 1.4?

11. Если $z_1, \ldots, z_n$ — комплексные числа, то

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|.$$

12. Если x и y — комплексные числа, то

$$||x|-|y||\leqslant|x-y|.$$

13. Теорема 1.36 была выведена из теоремы 1.32. На самом деле эти теоремы равносильны. Чтобы убедиться в этом, докажите теорему 1.32, не пользуясь сечениями в множестве рациональных чисел, а используя как постулат теорему 1.36 и обычные арифметические свойства вещественных чисел.

14. Пусть z — такое комплексное число, что $|z|=1$, т. е. $z\bar{z}=1$. Вычислить $|1+z|^2+|1-z|^2$.

15. При каких условиях в неравенстве Шварца имеет место равенство?

16. Предположим, что $k\geqslant 3$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in R^k$, $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=d>0$ и $r>0$. Доказать, что

(*a*) если $2r>d$, то существует бесконечное множество точек $\mathbf{z}\in R^k$, таких, что

$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=|\mathbf{z}-\mathbf{y}|=r;$$

(*b*) если $2r=d$, то существует в точности одна такая точка $\mathbf{z}$;

(*c*) если $2r<d$, то не существует таких $\mathbf{z}$.

Как нужно изменить эти утверждения, если $k=2$, $k=1$?

17. Доказать, что

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2,$$

если $\mathbf{x}\in R^k$, $\mathbf{y}\in R^k$. Истолковать это геометрически, как некоторое утверждение о параллелограммах.

18. Доказать, что если $k\geqslant 2$ и $\mathbf{x}\in R^k$, то существует вектор $\mathbf{y}\in R^k$, такой, что $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, но $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$. Верно ли это при $k=1$?

19. Пусть $\mathbf{a}\in R^k$, $\mathbf{b}\in R^k$. Найти $\mathbf{c}\in R^k$ и $r>0$, такие, что $|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=2|\mathbf{x}-\mathbf{b}|$ тогда и только тогда, когда $|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r$.

(Решение: $3\mathbf{c}=4\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $3r=2|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$.)

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Конечные, счетные и несчетные множества

Мы начнем этот раздел с определения понятия функции.

2.1. Определение. Рассмотрим два множества A и B, элементами которых могут быть любые объекты, и предположим, что каждому элементу x множества A некоторым способом поставлен в соответствие элемент множества B, который мы обозначим через $f(x)$. Тогда f называется *функцией* из A в B (или *отображением* множества A в B).

Множество A называется *областью определения* функции f (мы будем говорить также, что f определена на A), а элементы $f(x)$ называются *значениями* f. Множество всех значений функции f называется ее *областью значений*.

2.2. Определение. Мы будем говорить, что множество A есть *подмножество* множества B, и писать $A \subset B$ (или $B \supset A$), если каждый элемент множества A является элементом множества B. Если, кроме того, в B имеется элемент, не принадлежащий A, то A называется *собственным* подмножеством множества B.

В частности, пустое множество $\varnothing$ служит подмножеством любого множества, и $A \subset A$, каково бы ни было множество A.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то мы будем писать $A = B$.

2.3. Замечание. То обстоятельство, что пустое множество является подмножеством любого множества, связано с одной логической тонкостью, часто вызывающей трудности у начинающих.

Из определения 2.2 ясно, что если множество A *не* есть подмножество множества B, то должно быть верным следующее утверждение: «существует элемент x, такой, что $x \in A$ и $x \notin B$». Но если A пусто, то не существует такого x, что $x \in A$, и высказанное только что утверждение ложно.

Подобные рассуждения применимы всегда, когда мы хотим проверить, что пустое множество удовлетворяет некоторым условиям.

2.4. Определение. Пусть A и B—два множества, и пусть f—отображение A в B. Если $E \subset A$, то $f(E)$ определяется как множество всех элементов $f(x)$ для $x \in E$. Мы будем называть $f(E)$ *образом* множества E при отображении f. В этих обозначениях $f(A)$ — это множество значений f. Ясно, что $f(A) \subset B$. Если $f(A) = B$, то мы будем говорить, что f отображает A *на* B. (Заметим, что в соответствии с этим словоупотреблением *на* означает большее, чем *в*.)

Если $E \subset B$, то $f^{-1}(E)$ обозначает множество всех $x \in A$, таких, что $f(x) \in E$. Мы будем называть $f^{-1}(E)$ *прообразом* множества E при отображении f. Если $y \in B$, то $f^{-1}(y)$ — это множество всех $x \in A$, таких, что $f(x) = y$. Если при каждом $y \in B$ множество $f^{-1}(y)$ состоит не более чем из одного элемента A, то f называется *взаимно однозначным* отображением A в B. Это можно выразить следующим образом: отображение f множества A в B взаимно однозначно, если $f(x_1) \neq f(x_2)$ каждый раз, когда $x_1 \neq x_2$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$.

(Запись $x_1 \neq x_2$ означает, что x_1 и x_2 — различные элементы; в противном случае мы пишем $x_1 = x_2$.)

2.5. Определение. Если существует взаимно однозначное отображение множества A *на* множество B, то мы будем говорить, что между A и B может быть установлено взаимно однозначное *соответствие*, или что A и B имеют одно и то же *кардинальное число*, или, короче, что A и B эквивалентны, и будем писать $A \sim B$. Это отношение, очевидно, обладает следующими свойствами:

рефлексивность: $A \sim A$;
симметричность: если $A \sim B$, то $B \sim A$;
транзитивность: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Всякое отношение, обладающее этими тремя свойствами, называется *отношением эквивалентности*.

2.6. Определение. Пусть n — любое положительное целое число; J_n — множество, элементами которого служат целые числа $1, \ldots, n$; J — множество, состоящее из всех положительных целых чисел; A — любое множество. Мы будем говорить, что

(*a*) A *конечно*, если $A \sim J_n$ при некотором n (пустое множество также считается конечным);

(*b*) A *бесконечно*, если A не является конечным;

(*c*) A *счетно*, если $A \sim J$;

(*d*) A *несчетно*, если A не конечно и не счетно;

(*e*) A *не более чем счетно*, если A или конечно, или счетно.

Если A и B — конечные множества, то очевидно, что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда A и B содержат одно и то же число элементов. Однако для бесконечных множеств смысл слов «содержат одно и то же число элементов» становится очень туманным.

Он проясняется с помощью понятия взаимно однозначного соответствия.

2.7. Пример. Пусть A — множество всех целых чисел. Тогда A — счетное множество. Действительно, рассмотрим следующее расположение множеств A и J

$$\begin{array}{l} A: 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3, -3,\ \ldots, \\ J: 1,\ 2,\quad 3,\ 4,\quad 5,\ 6,\quad 7,\ \ldots . \end{array}$$

В этом примере мы можем даже указать в явном виде формулу для отображения f множества J в A, устанавливающего взаимно однозначное соответствие между этими множествами:

$$f(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n \text{ четно}), \\ -\dfrac{n-1}{2} & (n \text{ нечетно}). \end{cases}$$

2.8. Замечание. Конечное множество не может быть эквивалентно своему собственному подмножеству. Однако для бесконечных множеств это возможно, как показывает пример 2.7, в котором J — собственное подмножество множества A.

В действительности мы могли бы заменить определение 2.6 (b) следующей формулировкой: A бесконечно, если A эквивалентно одному из своих собственных подмножеств.

2.9. Определение. *Последовательностью* мы будем называть функцию f, определенную на множестве J всех положительных целых чисел. Если $f(n)=x_n$ при $n \in J$, то принято обозначать последовательность f символом $\{x_n\}$ или писать $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$. Значения функции f, т. е. элементы x_n, называются *членами* последовательности. Если A — некоторое множество и если $x_n \in A$ при всех $n \in J$, то $\{x_n\}$ называется *последовательностью* в A, или *последовательностью элементов множества* A.

Заметим, что члены $x_1, x_2, x_3, \ldots$ последовательности не обязаны быть различными.

Ввиду того что всякое счетное множество служит множеством значений некоторой взаимно однозначной функции, определенной на J, мы можем рассматривать всякое счетное множество как множество значений некоторой последовательности с различными членами. Допуская некоторую вольность речи, говорят, что элементы любого счетного множества можно «расположить в последовательность».

Иногда удобно заменить в этом определении J множеством всех неотрицательных целых чисел, т. е. начинать с 0, а не с 1.

2.10. Теорема. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества A счетно.*

Доказательство. Предположим, что $E \subset A$ и E бесконечно. Расположим элементы x множества A в последовательность $\{x_n\}$ с различными членами. Построим последовательность $\{n_k\}$ следующим образом.

Пусть n_1 — наименьшее целое положительное число, такое, что $x_{n_1} \in E$. Если $n_1, \ldots, n_{k-1}$ ($k = 2, 3, 4, \ldots$) уже выбраны, то пусть n_k — наименьшее целое число, большее n_{k-1} и такое, что $x_{n_k} \in E$.

Полагая $f(k) = x_{n_k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), мы получим взаимно однозначное соответствие между E и J.

Эта теорема показывает, что, грубо говоря, счетные множества представляют «наименьшую» бесконечность: никакое несчетное множество не может быть подмножеством счетного.

2.11. Определение. Пусть A и Ω — множества; предположим, что каждому элементу α множества A сопоставлено некоторое подмножество множества Ω, которое мы обозначим через E_α.

Множество, элементами которого служат множества E_α, будет обозначаться через $\{E_\alpha\}$. Вместо того чтобы говорить о множестве множеств, мы иногда будем говорить о наборе множеств или о семействе множеств[1]).

Объединение семейства множеств $\{E_\alpha\}$ определяется как множество S, такое, что $x \in S$ тогда и только тогда, когда $x \in E_\alpha$ хотя бы при одном $\alpha \in A$. Мы будем пользоваться обозначением

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{1}$$

Если A состоит из целых чисел $1, \ldots, n$, то обычно пишут

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \tag{2}$$

или

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n. \tag{3}$$

Если A — множество всех положительных целых чисел, то обычное обозначение таково:

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m. \tag{4}$$

---

[1]) На самом деле «множество множеств» — это понятие, по существу отличное от понятия «семейств множеств», которое здесь определено. Семейство множеств есть *отображение* множества A в множество всех подмножеств множества Ω. Может оказаться, что $E_{\alpha'} = E_{\alpha''}$ при $\alpha' \neq \alpha''$, $\alpha', \alpha'' \in \Omega$. — *Прим. перев.*

Символ ∞ в (4) указывает только, что берется объединение *счетного* семейства множеств. Его не следует смешивать с символами $+\infty$, $-\infty$, введенными в определении 1.39.

Пересечение семейства множеств $\{E_\alpha\}$ определяется как множество P, такое, что $x \in P$ тогда и только тогда, когда $x \in E_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Мы будем пользоваться обозначением

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha, \tag{5}$$

или

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n, \tag{6}$$

или

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m, \tag{7}$$

как для объединений. Если множество $A \cap B$ не пусто, то мы будем говорить, что A и B *пересекаются*, в противном случае — что они *не пересекаются*.

2.12. Примеры. (a) Допустим, что E_1 состоит из чисел 1, 2, 3, а E_2 — из чисел 2, 3, 4. Тогда $E_1 \cup E_2$ состоит из чисел 1, 2, 3, 4, в то время как $E_1 \cap E_2$ — из чисел 2, 3.

(b) Пусть A — множество всех вещественных чисел x, таких, что $0 < x < 1$. Для любого $x \in A$ пусть E_x — множество всех вещественных чисел y, таких, что $0 < y < x$. Тогда

(i) $E_x \subset E_z$ тогда и только тогда, когда $0 < x \leqslant z < 1$;

(ii) $\bigcup_{x \in A} E_x = E_1$;

(iii) $\bigcap_{x \in A} E_x$ пусто.

Утверждения (i) и (ii) очевидны. Чтобы доказать (iii), заметим, что при любом $y > 0$ имеем $y \notin E_x$, если $x < y$. Значит, $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$.

2.13. Замечания. Многие свойства объединений и пересечений совершенно аналогичны свойствам сумм и произведений. В действительности слова «сумма» и «произведение» иногда употребляют в этом смысле и вместо $\cup$ и $\cap$ пишут $\sum$ и $\prod$.

Законы коммутативности и ассоциативности тривиально выполняются

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A; \tag{8}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \tag{9}$$

Этим оправдано отсутствие скобок в (3) и (6). Закон дистрибутивности также выполняется:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{10}$$

Чтобы доказать это, обозначим левую и правую части равенства (10) соответственно через E и F.

Допустим, что $x \in E$. Тогда $x \in A$ и $x \in B \cup C$, т. е. $x \in B$ или $x \in C$ (или и то и другое). Значит, $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$, так что $x \in F$. Таким образом, $E \subset F$.

Предположим теперь, что $x \in F$. Тогда $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$. Таким образом, $x \in A$ и $x \in B \cup C$. Значит, $x \in A \cap (B \cup C)$, так что $F \subset E$. Следовательно, $E = F$.

Перечислим еще несколько легко проверяемых соотношений:

(11) $$A \subset A \cup B,$$

(12) $$A \cap B \subset A.$$

Если $\varnothing$ обозначает пустое множество, то

(13) $$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Если $A \subset B$, то

(14) $$A \cup B = B, \quad A \cap B = A.$$

2.14. Теорема. *Пусть $\{E_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — последовательность счетных множеств; положим*

(15) $$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Тогда множество S счетно.

Доказательство. Расположим каждое множество E_n в последовательность $\{x_{nk}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, и рассмотрим бесконечную таблицу

(16) $$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

в которой элементы множества E_n образуют n-ю строку. Эта таблица содержит все элементы множества S. Эти элементы можно расположить в последовательность так, как указывают стрелки:

(17) $$x_{11};\ x_{21},\ x_{12};\ x_{31},\ x_{22},\ x_{13};\ x_{41},\ x_{32},\ x_{23},\ x_{14};\ \ldots .$$

Если какие-нибудь два множества E_n имеют общие элементы, то они появятся в (17) более чем один раз. Значит, существует подмножество T множества всех положительных целых чисел, такое, что $S \sim T$, откуда следует, что множество S не более чем счетно (теорема 2.10). Поскольку $E_1 \subset S$ и E_1 бесконечно, то и S бесконечно, и поэтому счетно.

Следствие. *Допустим, что A не более чем счетно и что при каждом $\alpha \in A$ множество B_α не более чем счетно. Положим*

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Тогда множество T не более чем счетно.

Действительно, T эквивалентно некоторому подмножеству множества (15).

2.15. Теорема. *Пусть A — счетное множество, и пусть B_n — множество всех наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ из n членов, где $a_k \in A$ $(k = 1, \ldots, n)$ и элементы $a_1, \ldots, a_n$ не обязательно различны. Тогда множество B_n счетно.*

Доказательство. То, что множество B_1 счетно, — очевидно.

Допустим, что множество B_{n-1} счетно $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Элементы B_n имеют вид

$$(b, a) \quad (b \in B_{n-1},\ a \in A). \tag{18}$$

При каждом фиксированном b множество всех пар (b, a) эквивалентно множеству A и, значит, счетно. Таким образом, B_n — объединение счетного множества счетных множеств. По теореме 2.14 B_n счетно.

Утверждение теоремы доказано по индукции.

Следствие. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Применим теорему 2.15, взяв $n = 2$ и заметив, что каждое рациональное число r имеет вид b/a, где a и b — целые числа. Множество пар (a, b), а поэтому и множество дробей b/a, счетно.

На самом деле даже множество всех алгебраических чисел счетно (см. упражнение 5).

Следующая теорема показывает, однако, что не все бесконечные множества счетны.

2.16. Теорема. *Пусть A — множество всех последовательностей, элементы которых — цифры 0 и 1. Множество A несчетно.*

Элементами A служат последовательности вида 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, ...

Доказательство. Пусть E — счетное подмножество множества A, и пусть E состоит из последовательностей $s_1, s_2, s_3, \ldots$.

Построим последовательность s следующим образом. Если n-я цифра в s_n равна 1 (соответственно 0), то пусть n-я цифра в s равна 0 (соответственно 1). Тогда последовательность s отличается от каждого элемента множества E хотя бы одним членом, значит, $s \notin E$. Но очевидно, что $s \in A$, так что E — собственное подмножество множества A.

Мы показали, что каждое счетное подмножество множества A является собственным подмножеством. Следовательно, A несчетно (потому что в противном случае A было бы своим собственным подмножеством, что невозможно).

Идею приведенного доказательства впервые высказал Кантор. Такой метод доказательства называют канторовским диагональным процессом, потому что если последовательности $s_1, s_2, \ldots$ расположить в виде таблицы типа (16), то при построении новой последовательности будут учитываться элементы диагонали.

Читатели, знакомые с двоичным представлением вещественных чисел, когда за основание вместо числа 10 берется число 2, заметят, что из теоремы 2.16 следует, что множество всех вещественных чисел несчетно. Второе доказательство этого факта мы дадим в теореме 2.43.

Метрические пространства

2.17. Определение. Говорят, что множество X, элементы которого мы будем называть *точками*, есть *метрическое пространство*, если любым двум точкам p и q множества X соответствует вещественное число $d(p, q)$, называемое *расстоянием* от p до q, такое, что

(a) $d(p, q) > 0$, если $p \neq q$; $d(p, p) = 0$;

(b) $d(p, q) = d(q, p)$;

(c) $d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q)$ при любом $r \in X$.

2.18. Примеры. Самыми важными примерами метрических пространств с нашей точки зрения служат евклидовы пространства R^k, особенно R^1 (вещественная прямая) и R^2 (комплексная плоскость); расстояние в R^k определяется так:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k). \tag{19}$$

По теореме 1.64 метрика (19) удовлетворяет условиям определения 2.17.

Важно заметить, что каждое подмножество Y метрического пространства X в свою очередь является метрическим пространством с той же самой функцией расстояния. В самом деле, ясно, что если условия (a) — (c) определения 2.17 выполнены для $p, q, r \in X$, то они выполнены и для p, q, r, лежащих в Y.

Таким образом, каждое подмножество евклидова пространства — метрическое пространство. Другими примерами служат пространства $\mathscr{C}(K)$ и $\mathscr{L}^2(\mu)$, рассматриваемые соответственно в гл. 7 и 10.

2.19. Определение. Под *интервалом* (a, b) мы будем понимать множество всех вещественных чисел x, таких, что $a < x < b$.

Под *сегментом* $[a, b]$ мы будем понимать множество всех вещественных чисел x, таких, что $a \leqslant x \leqslant b$.

Иногда мы будем встречаться с полуинтервалами $[a, b)$ и $(a, b]$; первый состоит из всех x, таких, что $a \leqslant x < b$, второй — из всех x, таких, что $a < x \leqslant b$.

Если $a_i < b_i$ при $i = 1, \ldots, k$, то множество всех точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ в R^k, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, называется *$k$-мерной клеткой*. Таким образом, одномерная клетка — это сегмент, двумерная клетка — прямоугольник и т. д.

Если $\mathbf{x} \in R^k$ и $r > 0$, то *открытый* (или *замкнутый*) *шар* B с центром в $\mathbf{x}$ радиусом r есть по определению множество всех $\mathbf{y} \in R^k$, таких, что $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$ (или $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leqslant r$).

Назовем множество $E \subset R^k$ *выпуклым*, если при любых $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in E$ и $0 < \lambda < 1$

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in E.$$

Например, *шары выпуклы*, ибо если $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$, $|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < r$ и $0 < \lambda < 1$, то

$$|\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} - \mathbf{x}| = |\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (1 - \lambda)(\mathbf{z} - \mathbf{x})| \leqslant \lambda|\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \\ + (1 - \lambda)|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < \lambda r + (1 - \lambda)r = r.$$

То же доказательство применимо и к замкнутым шарам. Легко видеть также, что k-мерные клетки выпуклы.

2.20. Определение. Пусть X — метрическое пространство. Все упоминаемые ниже точки и множества следует считать элементами и подмножествами пространства X.

(a) *Окрестностью* точки p называется множество $N_r(p)$, состоящее из всех точек q, таких, что $d(p, q) < r$. Число r называется *радиусом* окрестности $N_r(p)$.

(b) Точка p называется *предельной точкой* множества E, если *каждая* окрестность точки p содержит точку $q \neq p$, такую, что $q \in E$.

(c) Если $p \in E$ и p не является предельной точкой множества E, то p называется *изолированной точкой* множества E.

(*d*) Множество E *замкнуто*, если каждая предельная точка множества E является точкой множества E.

(*e*) Точка p называется *внутренней* точкой множества E, если она имеет окрестность N, такую, что $N \subset E$.

(*f*) Множество E *открыто*, если каждая точка множества E является его внутренней точкой.

(*g*) *Дополнением* множества E (обозначается символом E^c) называется множество всех точек $p \in X$, таких, что $p \notin E$.

(*h*) Множество E *совершенно*, если оно замкнуто и если каждая точка множества E является его предельной точкой.

(*i*) Множество E *ограничено*, если существуют вещественное число M и точка $q \in X$, такие, что $d(p, q) < M$ при всех $p \in E$.

(*j*) Множество E *всюду плотно* в X, если каждая точка множества X является либо предельной точкой множества E, либо принадлежит множеству E (либо и то, и другое).

Отметим, что окрестностями в R^1 служат интервалы, в то время как окрестности в R^2 — это внутренности окружностей.

2.21. Теорема. *Всякая окрестность является открытым множеством.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность $E = N_r(p)$; пусть q — какая-нибудь точка множества E. Тогда существует положительное вещественное число h, такое, что

$$d(p, q) = r - h.$$

Для всех точек s, таких, что $d(q, s) < h$, мы имеем

$$d(p, s) \leqslant d(p, q) + d(q, s) < r - h + h < r,$$

так что $s \in E$. Таким образом, q — внутренняя точка множества E.

2.22. Теорема. *Если p — предельная точка множества E, то любая окрестность точки p содержит бесконечно много точек множества E.*

Доказательство. Предположим, что существует окрестность N точки p, содержащая только конечное число точек множества E. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — те точки множества $N \cap E$, которые не совпадают с p. Положим

$$r = \min_{1 \leqslant m \leqslant n} d(p, q_m)$$

(так мы обозначаем наименьшее из чисел $d(p, q_1), \ldots, d(p, q_n)$). Ясно, что минимум конечного множества положительных чисел — положительное число, так что $r > 0$.

Окрестность $N_r(p)$ не содержит ни одной точки q множества E, такой, что $q \neq p$, поэтому p не является предельной точкой множества E. Это противоречие и доказывает теорему.

Следствие. *Конечное множество точек не имеет предельных точек.*

2.23. Примеры. Рассмотрим следующие подмножества пространства R^2:

(a) множество всех комплексных z, таких, что $|z|<1$;
(b) множество всех комплексных z, таких, что $|z|\leqslant 1$;
(c) некоторое конечное множество;
(d) множество всех целых чисел;
(e) множество, состоящее из чисел $1/n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$).

Отметим, что последнее множество E имеет предельную точку (а именно $z=0$), но никакая точка множества E не является его предельной точкой. Мы хотим подчеркнуть разницу между свойствами множества иметь предельную точку и содержать предельную точку.

(f) Множество всех комплексных чисел (т. е. R^2);
(g) интервал (a, b).

Отметим, что множества (d), (e), (g) можно рассматривать и как подмножества пространства R^1.

Некоторые свойства этих множеств перечислены в следующей таблице:

	Замкнуто	Открыто	Совершенно	Ограничено
(a)	Нет	Да	Нет	Да
(b)	Да	Нет	Да	Да
(c)	Да	Нет	Нет	Да
(d)	Да	Нет	Нет	Нет
(e)	Нет	Нет	Нет	Да
(f)	Да	Да	Да	Нет
(g)	Нет		Нет	Да

В строке (g) мы не заполнили второй клетки. Причина этого в том, что интервал (a, b) не есть открытое множество, если рассматривать его как подмножество пространства R^2, но он является открытым подмножеством пространства R^1.

2.24. Теорема. *Пусть $\{E_\alpha\}$ — (конечное или бесконечное) семейство множеств E_α. Тогда*

$$(20)\qquad \left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha E_\alpha^c.$$

Доказательство. Пусть A и B — множества, стоящие соответственно слева и справа в равенстве (20). Если $x \in A$, то

$x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$, значит, $x \notin E_\alpha$ при всех α, поэтому $x \in E_\alpha^c$ при всех α, так что $x \in \bigcap E_\alpha^c$. Таким образом, $A \subset B$.

Обратно, если $x \in B$, то $x \in E_\alpha^c$ при всех α, значит, $x \notin E_\alpha$ при всех α, поэтому $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$, так что $x \in (\bigcup_\alpha E_\alpha)^c$. Таким образом, $B \subset A$.

Следовательно, $A = B$.

2.25. Теорема. *Множество E открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.*

Доказательство. Сначала предположим, что E^c замкнуто. Выберем $x \in E$. Тогда $x \notin E^c$ и x не является предельной точкой множества E^c. Значит, существует окрестность N точки x, такая, что множество $E^c \cap N$ пусто, т. е. $N \subset E$. Таким образом, x — внутренняя точка множества E, и E открыто.

Теперь предположим, что E открыто. Пусть x — предельная точка множества E^c. Тогда каждая окрестность точки x содержит некоторую точку множества E^c, так что x не является внутренней точкой множества E. Поскольку E открыто, это значит, что $x \in E^c$. Следовательно, E^c замкнуто.

Следствие. *Множество F замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.*

2.26. Теорема. (*a*) *Для любого семейства $\{G_\alpha\}$ открытых множеств множество $\bigcup_\alpha G_\alpha$ открыто.*

(*b*) *Для любого семейства $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств множество $\bigcap_\alpha F_\alpha$ замкнуто.*

(*c*) *Для любого конечного семейства $G_1, \ldots, G_n$ открытых множеств множество $\bigcap_{i=1}^n G_i$ открыто.*

(*d*) *Для любого конечного семейства $F_1, \ldots, F_n$ замкнутых множеств множество $\bigcup_{i=1}^n F_i$ замкнуто.*

Доказательство. Положим $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Если $x \in G$, то $x \in G_\alpha$ при некотором α. Так как x — внутренняя точка множества G_α, то x — внутренняя точка множества G, и G открыто. Утверждение (*a*) доказано.

По теореме 2.24 имеем

$$(\bigcap_\alpha F_\alpha)^c = \bigcup_\alpha (F_\alpha^c), \tag{21}$$

а по теореме 2.25 множества F_α^c открыты. Значит, из (*a*) следует, что множество (21) открыто, так что множество $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ замкнуто.

Теперь положим $H=\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$. Для любого $x\in H$ существует окрестность N_i точки x радиуса r_i, такая, что $N_i\subset G_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Положим

$$r=\min(r_1, \ldots, r_n),$$

и пусть N — окрестность точки x радиуса r. Тогда $N\subset G_i$ при $i=1, \ldots, n$, так что $N\subset H$, и множество H открыто.

Переходя к дополнениям, мы выведем (*d*) из (*c*):

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n} (F_i^c).$$

2.27. Пример. В утверждениях (*c*) и (*d*) предыдущей теоремы конечность семейств существенна. Действительно, пусть G_n — интервал $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Тогда G_n — открытое подмножество прямой R^1. Положим $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Тогда G состоит из единственной точки (а именно, $x=0$) и поэтому не является открытым подмножеством из R^1.

Таким образом, пересечение бесконечного семейства открытых множеств не обязано быть открытым. Подобным образом, объединение бесконечного семейства замкнутых множеств не обязано быть замкнутым.

2.28. Теорема. *Пусть E — замкнутое множество вещественных чисел, ограниченное сверху. Пусть $y=\sup E$. Тогда $y\in E$.*

Сравните это утверждение с примерами 1.35.

Доказательство. Допустим, что $y\notin E$. Для каждого $h>0$ существует точка $x\in E$, такая, что $y-h\leqslant x\leqslant y$, так как иначе $y-h$ было бы верхней границей множества E. Таким образом, каждая окрестность точки y содержит некоторую точку x множества E, причем $x\neq y$, так как $y\notin E$. Следовательно, y — предельная точка множества E, не принадлежащая E, так что множество E не замкнуто. Но это противоречит условию теоремы.

2.29. Замечание. Допустим, что $E\subset Y\subset X$, где X — метрическое пространство. То, что E — открытое подмножество пространства X, означает, что с каждой точкой $p\in E$ связано положительное число r, для которого из условий $d(p, q)<r$, $q\in X$ следует включение $q\in E$. Но мы уже заметили (п. 2.18), что Y — тоже метрическое пространство, так что наше определение с таким

же успехом можно отнести к Y. Для полной точности мы будем говорить, что множество E *открыто относительно* Y, если каждой точке $p \in E$ отвечает число $r > 0$, такое, что $q \in E$, если $d(p, q) < r$ и $q \in Y$. Пример 2.23 (g) показывает, что множество может быть открытым относительно Y, не будучи открытым подмножеством пространства X. Однако между этими понятиями имеется простое соотношение, которое мы сейчас установим.

2.30. Теорема. *Пусть $Y \subset X$. Подмножество E множества Y открыто относительно Y тогда и только тогда, когда $E = Y \cap G$ для некоторого открытого подмножества G пространства X.*

Доказательство. Допустим, что E открыто относительно Y. Для каждого $p \in E$ найдется положительное число r_p, такое, что из условий $d(p, q) < r_p$, $q \in Y$ следует, что $q \in E$. Пусть V_p — множество всех $q \in X$, таких, что $d(p, q) < r_p$; положим

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p.$$

Тогда по теоремам 2.21 и 2.26 G — открытое подмножество пространства X.

Поскольку $p \in V_p$ при всех $p \in E$, ясно, что $E \subset G \cap Y$. Согласно нашему выбору окрестности V_p, имеем $V_p \cap Y \subset E$ при каждом $p \in E$, так что $G \cap Y \subset E$. Таким образом, $E = G \cap Y$, и половина теоремы доказана.

Обратно, если множество G открыто в X и $E = G \cap Y$, то каждая точка $p \in E$ имеет окрестность $V_p \subset G$. Тогда $V_p \cap Y \subset E$, так что множество E открыто относительно Y.

Компактные множества

2.31. Определение. *Открытым покрытием* множества E в метрическом пространстве X мы будем называть семейство $\{G_\alpha\}$ открытых подмножеств пространства X, такое, что $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

2.32. Определение. Подмножество K метрического пространства X называется *компактным*, если каждое открытое покрытие множества K содержит *конечное* подпокрытие.

Говоря точнее, требование состоит в том, что если $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие множества K, то имеется конечное число индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, таких, что

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}.$$

Понятие компактности имеет большое значение в анализе, особенно в связи с непрерывностью (гл. 4).

Ясно, что каждое конечное множество компактно. Существование широкого класса бесконечных компактных множеств в R^k будет следовать из теоремы 2.41.

Мы заметили ранее (в п. 2.29), что если $E \subset Y \subset X$, то множество E может быть открытым относительно Y, не будучи открытым относительно X. Свойство множества E быть открытым зависит, таким образом, от пространства, в которое оно погружено. То же верно и в отношении свойства множества быть замкнутым.

Однако, как мы увидим, компактность — более удобное понятие. Чтобы сформулировать следующую теорему, мы будем говорить временно, что множество K компактно относительно X, если выполнены требования определения 2.32.

2.33. Теорема. *Допустим, что $K \subset Y \subset X$. Множество K компактно относительно X в том и только в том случае, когда оно компактно относительно Y.*

В силу этой теоремы мы сможем во многих ситуациях рассматривать компактные множества как метрические пространства сами по себе, не обращая никакого внимания на объемлющее пространство. В частности, хотя почти бессмысленно говорить об *открытых* пространствах или о *замкнутых* пространствах (каждое метрическое пространство X служит открытым подмножеством самого себя и замкнутым подмножеством самого себя), имеет смысл говорить о *компактных* метрических пространствах.

Доказательство. Предположим, что множество K компактно относительно X; пусть $\{V_\alpha\}$ — семейство множеств, открытых относительно Y, такое, что $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. По теореме 2.30 при каждом α существует множество G_α, открытое относительно X, такое, что $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$; поскольку K компактно относительно X, мы имеем

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n} \tag{22}$$

при некотором выборе конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Так как $K \subset Y$, то из (22) следует, что

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}. \tag{23}$$

Тем самым доказано, что множество K компактно относительно Y.

Обратно, допустим, что K компактно относительно Y. Пусть $\{G_\alpha\}$ — семейство открытых подмножеств пространства X, покрывающее K. Положим $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$. Тогда включение (23) будет выполнено при некотором выборе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; так как $V_\alpha \subset G_\alpha$, то (22) следует из (23).

Доказательство закончено.

2.34. Теорема. *Компактные подмножества метрических пространств замкнуты.*

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество метрического пространства X. Мы докажем, что дополнение множества K есть открытое подмножество пространства X.

Предположим, что $p \in X$, $p \notin K$. Если $q \in K$, то пусть V_q и W_q — окрестности соответственно точек p и q радиуса, меньшего $\frac{1}{2}d(p, q)$ [см. определение 2.20 (a)].

Ввиду того что K — компактно, найдется конечный набор точек $q_1, \ldots, q_n$, принадлежащих множеству K, таких, что

$$K \subset W_{q_1} \cup \ldots \cup W_{q_n} = W.$$

Если $V = V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_n}$, то V — окрестность точки p, не пересекающаяся с W. Значит, $V \subset K^c$, так что p — внутренняя точка множества K^c. Теорема доказана.

2.35. Теорема. *Замкнутые подмножества компактных множеств компактны.*

Доказательство. Допустим, что $F \subset K \subset X$, множество F замкнуто (относительно X), а K — компактно. Пусть $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие множества F. Если присоединить множество F^c к $\{V_\alpha\}$, то мы получим открытое покрытие Ω множества K. Поскольку K компактно, существует конечное подсемейство Φ семейства Ω, покрывающее множество K, а следовательно, и F. Если множество F^c входит в Φ, то мы можем удалить его из Φ и получить открытое покрытие множества F. Таким образом, мы показали, что конечное подпокрытие покрытия $\{V_\alpha\}$ покрывает F.

Следствие. *Если F замкнуто, а K компактно, то $F \cap K$ компактно.*

Доказательство. Теоремы 2.26 (b) и 2.34 показывают, что множество $F \cap K$ замкнуто, а так как $F \cap K \subset K$, то по теореме 2.35 множество $F \cap K$ компактно.

2.36. *Если $\{K_\alpha\}$ — семейство компактных подмножеств метрического пространства X, такое, что пересечение любого конечного подсемейства семейства $\{K_\alpha\}$ непусто, то и $\bigcap\limits_\alpha K_\alpha$ непусто.*

Доказательство. Зафиксируем множество K_1 из семейства $\{K_\alpha\}$ и положим $G_\alpha = K_\alpha^c$. Предположим, что в K_1 нет такой точки, которая принадлежала бы всем множествам K_α. Тогда множества G_α образуют открытое покрытие множества K_1; так как K_1 компактно, найдется конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такой, что $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$. Но это означает, что множество

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_n}$$

пусто. Мы получили противоречие с условиями теоремы.

Следствие. *Если $\{K_n\}$ — последовательность непустых компактных множеств, такая, что $K_n \supset K_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3 \ldots$), то и множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ непусто.*

2.37. Теорема. *Если E — бесконечное подмножество компактного множества K, то E имеет предельную точку, принадлежащую K.*

Доказательство. Если бы никакая точка множества K не была предельной точкой множества E, то каждая точка $q \in K$ имела бы окрестность V_q, содержащую не более одной точки множества E (а именно точку q, если $q \in E$). Ясно, что никакое конечное подсемейство семейства $\{V_q\}$ не может покрыть множество E; то же верно и для K, так как $E \subset K$. Но это противоречит компактности множества K.

2.38. Теорема. *Если $\{I_n\}$ — последовательность сегментов в R^1, такая, что $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), то множество* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ непусто.

Доказательство. Если $I_n = [a_n, b_n]$, то пусть E есть множество всех a_n. Тогда множество E непусто и ограничено сверху (числом b_1). Пусть $x = \sup E$. Если m и n — положительные целые числа, то

$$a_n \leqslant a_{m+n} \leqslant b_{m+n} \leqslant b_m,$$

так что $x \leqslant b_m$ при каждом m. Поскольку очевидно, что $a_m \leqslant x$, то мы видим, что $x \in I_m$ при $m = 1, 2, 3, \ldots$.

2.39. Теорема. *Пусть k — положительное целое число. Если $\{I_n\}$ — последовательность k-мерных клеток, такая, что $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ непусто.*

Доказательство. Пусть I_n состоит из всех точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, таких, что

$$a_{n,j} \leqslant x_j \leqslant b_{n,j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

и пусть $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$. При каждом j последовательность $\{I_{n,j}\}$ удовлетворяет предположениям теоремы 2.38. Значит, существуют вещественные числа x_j^* $(1 \leqslant j \leqslant k)$, такие, что

$$a_{n,j} \leqslant x_j^* \leqslant b_{n,j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k;\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Полагая $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$, мы видим, что $\mathbf{x}^* \in I_n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Теорема доказана.

2.40. Теорема. *Любая k-мерная клетка компактна.*

Доказательство. Пусть I есть k-мерная клетка, состоящая из всех точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, таких, что $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Положим

$$\delta = \left\{ \sum_1^k (b_j - a_j)^2 \right\}^{1/2}.$$

Тогда $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant \delta$, если $\mathbf{x} \in I$, $\mathbf{y} \in I$.

Допустим, что вопреки утверждению теоремы существует открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ множества I, не содержащее конечного подпокрытия множества I. Положим $c_j = (a_j + b_j)/2$. Сегменты $[a_j, c_j]$ и $[c_j, b_j]$ определяют тогда 2^k k-мерных клеток Q_i, объединение которых есть I. Хотя бы одно из этих множеств Q_i (обозначим его I_1) не может быть покрыто никаким конечным подсемейством семейства $\{G_\alpha\}$ (в противном случае так была бы покрыта вся клетка I). Теперь мы разобъем I_1 и продолжим этот процесс. Мы получим последовательность $\{I_n\}$, обладающую следующими свойствами:

(a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$;

(b) I_n не покрывается никаким конечным подсемейством семейства $\{G_\alpha\}$;

(c) если $\mathbf{x} \in I_n$ и $\mathbf{y} \in I_n$, то $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant 2^{-n}\delta$.

Из (a) и теоремы 2.39 следует, что существует точка $\mathbf{x}^*$, принадлежащая всем множествам I_n. При некотором α имеем $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$. Поскольку G_α открыто, существует $r > 0$, такое, что из неравенства $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| < r$ следует включение $\mathbf{y} \in G_\alpha$. Если n столь велико, что $2^{-n}\delta < r$ (такое n существует, ибо иначе $2^n \leqslant \delta/r$ для всех положительных целых n, что невозможно), то из (c) следует, что $I_n \subset G_\alpha$, а это противоречит утверждению (b).

Доказательство закончено.

Утверждение об эквивалентности свойств (a) и (b) в следующей теореме известно под названием теоремы Гейне — Бореля.

2.41. Теорема. *Если множество E из R^k обладает одним из трех следующих свойств, то оно обладает и двумя другими:*

(a) *E ограничено и замкнуто;*

(b) *E компактно;*

(*c*) *каждое бесконечное подмножество множества E имеет предельную точку, принадлежащую E.*

Доказательство. Если (*a*) выполнено, то $E \subset I$, где I — некоторая k-мерная клетка, и (*b*) следует из теорем 2.40 и 2.35. Теорема 2.37 показывает, что (*b*) влечет за собой (*c*). Остается доказать, что из (*c*) следует (*a*).

Если множество E не ограничено, то оно содержит точки $\mathbf{x}_n$, такие, что

$$|\mathbf{x}_n| > n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Множество S, состоящее из этих точек $\mathbf{x}_n$, бесконечно и, очевидно, не имеет предельных точек в R^k и тем более в E.

Таким образом, из (*c*) следует, что множество E ограничено.

Если E не замкнуто, то имеется точка $x_0 \in R^k$, являющаяся предельной точкой множества E, но не принадлежащая E. При $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеются точки $\mathbf{x}_n \in E$, такие, что $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| < 1/n$. Пусть S — множество этих точек $\mathbf{x}_n$. Тогда S — бесконечное множество (в противном случае $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$ имело бы постоянное положительное значение для бесконечного множества номеров n), $\mathbf{x}_0$ — предельная точка множества S и в R^k нет других предельных точек множества S. Действительно, если $\mathbf{y} \in R^k$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$, то

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| \geqslant |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| \geqslant |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|$$

для всех n, за исключением некоторого конечного множества; это показывает, что $\mathbf{y}$ не является предельной точкой множества S (теорема 2.22).

Таким образом, S не имеет предельных точек в E; значит, множество E замкнуто, если выполнено (*c*).

Следует отметить в связи с этой теоремой, что (*b*) и (*c*) эквивалентны в любом метрическом пространстве (упражнение 13), но что из (*a*) в общем случае не следуют (*b*) и (*c*). Например, это так в пространстве $\mathscr{L}^2$, которое обсуждается в гл. 10. Один пример дается также в упражнении 9.

2.42. Теорема (Вейерштрасс). *Всякое ограниченное бесконечное подмножество пространства R^k имеет предельную точку в R^k.*

Доказательство. Будучи ограниченным, множество, о котором идет речь, содержится в некоторой k-мерной клетке $I \subset R^k$. По теореме 2.40 множество I компактно, поэтому, согласно теореме 2.37, множество E имеет в I предельную точку.

Совершенные множества

2.43. Теорема. *Пусть P — непустое совершенное множество в R^k. Тогда P несчетно.*

Доказательство. Поскольку множество P имеет предельные точки, оно должно быть бесконечным. Допустим, что P счетно, и обозначим точки множества P через $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$. Мы построим последовательность окрестностей $\{V_n\}$ следующим образом.

Пусть V_1 — какая-нибудь окрестность точки $\mathbf{x}_1$. Если V_1 состоит из всех $\mathbf{y} \in R^k$, таких, что $|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1| < r$, то соответствующая *замкнутая окрестность* $\overline{V}_1$ есть по определению множество всех $\mathbf{y} \in R^k$, таких, что $|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1| \leqslant r$. (Как и в теореме 2.21, легко доказать, что дополнение множества $\overline{V}_1$ открыто. Значит, замкнутые окрестности замкнуты.)

Допустим, что окрестность V_n построена так, что множество $V_n \cap P$ непусто. Поскольку каждая точка множества P есть предельная точка этого множества, существует окрестность V_{n+1}, такая, что (i) $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$, (ii) $\mathbf{x}_n \notin \overline{V}_{n+1}$, (iii) множество $V_{n+1} \cap P$ непусто. В силу (iii), V_{n+1} удовлетворяет предположению индукции, и построение может быть продолжено.

Положим $K_n = \overline{V}_n \cap P$. Будучи ограниченным и замкнутым, множество $\overline{V}_n$ компактно. Ни одна точка множества P не лежит в $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, так как $\mathbf{x}_n \notin K_{n+1}$. Отсюда следует, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ пусто, так как $K_n \subset P$. Но ведь каждое множество K_n непусто в силу (iii) и $K_n \supset K_{n+1}$ в силу (i). Это противоречит следствию из теоремы 2.36.

Следствие. *Каждый сегмент $[a, b]$ $(a < b)$ несчетен. Множество всех вещественных чисел несчетно.*

2.44. Канторово множество. Пример, к построению которого мы переходим, показывает, что в R^1 существуют совершенные множества, не содержащие никакого интервала.

Пусть E_0 есть сегмент $[0, 1]$. Удалим из него интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, и пусть E_1 — объединение сегментов

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Удалим средние трети этих сегментов, и пусть E_2 — объединение сегментов

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \quad \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \quad \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \quad \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Продолжая таким образом, мы получим последовательность компактных множеств E_n, таких, что

(*a*) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$;

(*b*) E_n есть объединение 2^n сегментов, длина каждого из которых равна 3^{-n}.

Множество $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ называется множеством Кантора. Множество P, очевидно, компактно, и теорема 2.36 показывает, что P непусто.

Никакой интервал вида

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right), \tag{24}$$

где k и m — положительные целые числа, не имеет общих точек с P. Значит, P не содержит никакого интервала, ибо каждый интервал (α, β) содержит интервал вида (24), если

$$3^{-m} < \frac{\beta-\alpha}{6}.$$

Чтобы показать, что P совершенно, достаточно показать, что P не содержит изолированных точек. Пусть $x \in P$ и пусть S — какой-нибудь интервал, содержащий x. Пусть I_n — сегмент множества E_n, содержащий x. Выберем достаточно большое n, такое, что $I_n \subset S$. Пусть x_n — тот конец сегмента I_n, для которого $x_n \neq x$.

Из построения множества P следует, что $x_n \in P$. Значит, x есть предельная точка множества P, и множество P совершенно.

Одно из самых интересных свойств множества Кантора состоит в том, что оно доставляет нам пример несчетного множества меры нуль (понятие меры будет обсуждаться в гл. 10).

Связные множества

2.45. Определение. Множество E в метрическом пространстве X называется *связным*, если *не* существует двух открытых множеств A и B пространства X, таких, что пересечение $A \cap B$ пусто, пересечения $A \cap E$ и $B \cap E$ не пусты и $E \subset A \cup B$.

Это определение похоже на определение компактности, поскольку на самом деле оно не зависит от объемлющего пространства X, т. е. при замене слова «связное» словами «связное относительно X» в предыдущем абзаце выполняется следующее утверждение: *E связно относительно X в том и только в том случае, когда E связно относительно E.*

Таким образом, имеет смысл говорить о связных пространствах (ср. с замечаниями, следующими за формулировкой теоремы 2.33): пространство связно, если оно не является объединением двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Первая часть утверждения, набранного выше курсивом, почти тривиальна: если E не является связным относительно X, то существуют множества A и B, обладающие свойствами, указанными в определении, и рассмотрение множеств $A \cap E$ и $B \cap E$ показывает, что E не связно относительно E (ср. с теоремой 2.30). Обратное вытекает из следующего результата.

2.46. Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, $E \subset X$ и $E = G \cup H$, где G и H — непересекающиеся непустые множества, открытые относительно E. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества A и B в X, такие, что $G = A \cap E$, $H = B \cap E$.*

Доказательство. Каждой точке $p \in G$ соответствует число $\delta_p > 0$, такое, что из соотношений $q \in E$, $d(p, q) < \delta_p$ следует включение $q \in G$, так как множество G открыто относительно E. Аналогичным образом, каждой точке $q \in H$ соответствует число $\delta_q > 0$, такое, что из соотношений $p \in E$, $d(p, q) < \delta_q$ следует включение $p \in H$. Значит, если $p \in G$, $q \in H$, то оба эти неравенства не выполняются, так что

$$d(p, q) \geqslant \frac{1}{2}(\delta_p + \delta_q). \tag{25}$$

При $p \in G$, $q \in H$ пусть V_p обозначает множество всех $x \in X$, таких, что $2d(p, x) < \delta_p$, и пусть W_q — множество всех $x \in X$, таких, что $2d(q, x) < \delta_q$. Если некоторое множество V_p имеет общую точку x с некоторым W_q, то

$$d(p, q) \leqslant d(p, x) + d(q, x) < \frac{1}{2}(\delta_p + \delta_q),$$

что противоречит неравенству (25).

Таким образом, каждое V_p не пересекается ни с одним W_q, и если мы положим

$$A = \bigcup_{p \in G} V_p, \qquad B = \bigcup_{q \in H} W_q,$$

то мы получим множества с требуемыми свойствами.

2.47. Теорема. *Подмножество E вещественной прямой R^1 связно тогда и только тогда, когда E обладает следующим свойством: если $x \in E$, $y \in E$ и $x < z < y$, то и $z \in E$.*

Доказательство. Допустим, что это условие не выполняется для некоторых чисел x, y, z, т. е. $x \in E$, $y \in E$, $x < z < y$, но $z \notin E$. Если A есть множество всех $\alpha < z$, а B — множество всех $\beta > z$, то определение 2.45 показывает, что E не связно.

Чтобы доказать обратное, допустим, что E не связно. Тогда существуют точки $x \in E$, $y \in E$, $x < y$, и открытые непересекающиеся множества A и B в R^1, такие, что $x \in A$, $y \in B$ и $E \subset A \cup B$. Пусть

$$S = A \cap [x, y]$$

и $z = \sup S$.

Ввиду того что $y \in B$ и B открыто, имеем $z < y$. Таким образом, если $z \in A$, то из того, что A открыто, следует, что z не является верхней границей множества S. Значит, $z \notin A$.

Ввиду того что $x \in A$ и A открыто, имеем $x < z$. Таким образом, если $z \in B$, то из того, что B открыто, следует, что z не является верхней гранью множества S. Значит, $z \notin B$.

Но так как $E \subset A \cup B$, то $z \notin E$, и доказательство закончено.

Следствие. *Множество E в R^1 связно тогда и только тогда, когда E — одно из следующих множеств* (*где a и b — вещественные числа*, $a \leqslant b$):

$$(-\infty, b), (-\infty, b], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, \infty), (a, b), [a, b), (a, b], [a, b].$$

К какому из этих типов принадлежит множество E, зависит от того, конечны или нет $\inf E$ и $\sup E$ и принадлежат ли они множеству E.

Столь же простой характеристики связных множеств на плоскости, например, не существует.

Упражнения

1. Построить ограниченное множество вещественных чисел, имеющее ровно три предельные точки.

2. Построить компактное множество вещественных чисел, множество предельных точек которого счетно.

3. Пусть E' — множество всех предельных точек некоторого множества E. Доказать, что E' замкнуто.

4. Пусть $\overline{E} = E \cup E'$, где E' определено выше. Чтобы получить $\overline{E}$, мы добавляем к E все предельные точки E; $\overline{E}$ называется *замыканием* множества E. Доказать, что $\overline{E}$ всегда замкнуто и что $\overline{E} \subset F$, если $E \subset F$ и F замкнуто.

5. Корни любого уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа, называются алгебраическими числами. Доказать, что множество всех алгебраических чисел счетно.

Указание. При каждом положительном целом N существует только конечное число таких уравнений, что

$$n+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|=N.$$

6. Дать пример открытого покрытия интервала $(0,1)$, которое не содержит конечного подпокрытия.

7. Показать, что теорема 2.36 и ее следствие становятся неверными (в R^1, например), если слово «компактное» заменить словом «замкнутое» или «ограниченное».

8. Бывают ли бесконечные метрические пространства, не имеющие бесконечных компактных подмножеств?

9. Пусть X — пространство всех рациональных чисел, $d(p, q)=|p-q|$ и E — множество всех рациональных p, таких, что $2<p^2<3$. Показать, что E замкнуто и ограничено, но не компактно.

10. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное подмножество. Показать, что R^k сепарабельно.

Указание. Рассмотреть множество точек, все координаты которых рациональны.

11. Семейство $\{V_\alpha\}$ открытых подмножеств пространства X называется *базой* пространства X, если верно следующее: для каждого $x\in X$ и каждого открытого множества G, такого, что $x\in G$, имеем $x\in V_\alpha\subset G$ при некотором α. Иными словами, каждое открытое множество в X есть объединение некоторого подсемейства семейства $\{V_\alpha\}$.

Доказать, что каждое сепарабельное метрическое пространство имеет *счетную* базу.

Указание. Возьмите все окрестности с рациональным радиусом и с центрами в некотором счетном всюду плотном подмножестве пространства X.

12. Пусть X — метрическое пространство, в котором каждое бесконечное подмножество имеет предельную точку. Доказать, что X сепарабельно.

Указание. Зафиксируйте $\delta>0$ и выберите $x_1\in X$. Выбрав $x_1, \ldots, x_j\in X$, найдите, если это возможно, $x_{j+1}\in X$, такое, что $d(x_i, x_{j+1})\geqslant\delta$ для $i=1, \ldots, j$. Покажите, что этот процесс должен закончиться после конечного числа шагов и что поэтому X можно покрыть конечным числом окрестностей радиуса δ. Возьмите $\delta=1/n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ и рассмотрите центры соответствующих окрестностей.

13. Пусть X — метрическое пространство, в котором каждое бесконечное подмножество имеет предельную точку. Доказать, что X компактно.

Указание. Согласно упражнениям 11 и 12, X имеет счетную базу. Следовательно, каждое открытое покрытие пространства X содержит *счетное* подпокрытие $\{G_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Если никакое конечное подсемейство семейства $\{G_n\}$ не покрывает X, то дополнение F_n множества $G_1 \cup \ldots \cup G_n$ непусто при каждом n, но пересечение $\bigcap F_n$ — пусто. Пусть E — множество, содержащее по точке из каждого F_n. Рассмотрите предельную точку множества E и получите противоречие.

14. Доказать, что каждое замкнутое множество в сепарабельном метрическом пространстве есть объединение совершенного множества (может быть, пустого) и некоторого не более чем счетного множества. (*Следствие*: каждое счетное замкнутое множество в R^k имеет изолированные точки.)

15. Доказать, что каждое открытое множество в R^1 есть объединение не более чем счетного семейства попарно непересекающихся интервалов.

Указание. Воспользуйтесь упражнением 10.

16. Следуя доказательству теоремы 2.43, получить такой результат:

Если $R^k = \bigcup\limits_{1}^{\infty} F_n$, где каждое F_n — замкнутое подмножество пространства R^k, то хотя бы одно F_n имеет непустую внутренность.

Эквивалентное утверждение. Если G_n — плотное открытое подмножество пространства R^k при $n = 1, 2, 3, \ldots$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ непусто (на самом деле оно всюду плотно в R^k). (Это частный случай теоремы Бэра; см. общий случай в упражнении 17, гл. 3.)

ГЛАВА 3

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Как указывает название, в этой главе мы будем иметь дело главным образом с последовательностями и рядами комплексных чисел. Однако основные факты, связанные со сходимостью, столь же легко объяснить и в более общей ситуации. Первые три раздела будут поэтому посвящены последовательностям в евклидовых пространствах или даже в метрических пространствах.

Сходящиеся последовательности

3.1. Определение. Последовательность $\{p_n\}$ в метрическом пространстве X называется *сходящейся*, если существует точка $p \in X$, обладающая следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что при $n \geqslant N$ имеем $d(p_n, p) < \varepsilon$ (здесь d обозначает расстояние в X).

В этом случае мы будем говорить также, что последовательность $\{p_n\}$ сходится к p или что p — предел последовательности $\{p_n\}$ [см. теорему 3.2 (b)], и будем писать $p_n \to p$ или

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Если последовательность $\{p_n\}$ не сходится, то говорят, что она *расходится*.

Полезно отметить, что наше определение «сходящейся последовательности» зависит не только от $\{p_n\}$, но и от X; например, последовательность $\{1/n\}$ сходится в R^1 (к 0), но не сходится в множестве всех положительных вещественных чисел [когда $d(x, y) = |x - y|$]. В тех случаях, когда возможна путаница, мы будем более точными и будем говорить отчетливо «сходится в X» вместо «сходится».

Напомним, что множество всех точек p_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) есть *множество значений* последовательности $\{p_n\}$. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным. Последовательность называется *ограниченной*, если множество ее значений ограничено.

Для примера рассмотрим следующие последовательности комплексных чисел (при этом $X = R^2$).

(a) Если $s_n = 1/n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$; множество значений бесконечно, и последовательность ограничена.

(b) Если $s_n = n^2$, то последовательность $\{s_n\}$ не ограничена, расходится, а множество ее значений бесконечно.

(c) Если $s_n = 1 + [(-1)^n/n]$, то последовательность $\{s_n\}$ сходится к 1, ограничена, а множество ее значений бесконечно.

(d) Если $s_n = i^n$, то последовательность $\{s_n\}$ расходится, ограничена, а множество ее значений конечно.

(e) Если $s_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), то $\{s_n\}$ сходится к 1, ограничена, а множество ее значений конечно.

Сформулируем теперь некоторые важные свойства сходящихся последовательностей в метрических пространствах.

3.2. Теорема. *Пусть $\{p_n\}$ — последовательность в метрическом пространстве X.*

(a) *$\{p_n\}$ сходится к $p \in X$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки p содержит все члены последовательности $\{p_n\}$, за исключением конечного их числа.*

(b) *Если $p \in X$, $p' \in X$ и $\{p_n\}$ сходится к p и к p', то $p = p'$.*

(c) *Если $\{p_n\}$ сходится, то $\{p_n\}$ ограничена.*

(d) *Если $E \subset X$ и если p — предельная точка множества E, то существует последовательность $\{p_n\}$ элементов множества E, такая, что $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$.*

Доказательство. (a) Допустим, что $p_n \to p$, и пусть V — окрестность точки p. Для некоторого $\varepsilon > 0$ из условий $d(p, q) < \varepsilon$, $q \in X$, следует, что $q \in V$. Этому ε соответствует N, такое, что из неравенства $n \geqslant N$ следует, что $d(p_n, p) < \varepsilon$. Таким образом, неравенство $n \geqslant N$ влечет за собой включение $p_n \in V$.

Обратно, допустим, что каждая окрестность точки p содержит все точки p_n, кроме конечного их числа. Зификсируем $\varepsilon > 0$, и пусть V — множество всех $q \in X$, таких, что $d(p, q) < \varepsilon$. По предположению, существует N (соответствующее этой окрестности V), такое, что $p_n \in V$, если $n \geqslant N$. Таким образом, $d(p_n, p) < \varepsilon$, если $n \geqslant N$; значит, $p_n \to p$.

(b) Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Существуют целые числа N, N', такие, что

$$n \geqslant N \text{ влечет за собой } d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$n \geqslant N' \text{ влечет за собой } d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, если $n \geqslant \max(N, N')$, то

$$d(p, p') \leqslant d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon.$$

Поскольку число ε было произвольным, мы заключаем отсюда, что $d(p, p') = 0$.

(c) Допустим, что $p_n \to p$. Тогда существует целое N, такое, что при $n > N$ имеем $d(p_n, p) < 1$. Положим

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \ldots, d(p_N, p)\}.$$

Тогда $d(p_n, p) \leqslant r$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(d) Для каждого положительного целого n существует точка $p_n \in E$, такая, что $d(p_n, p) < 1/n$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем N так, что $N\varepsilon > 1$. Если $n > N$, то $d(p_n, p) < \varepsilon$. Значит, $p_n \to p$.

Доказательство закончено.

Для последовательностей в R^k мы можем изучать соотношения между сходимостью, с одной стороны, и алгебраическими операциями, с другой. Сначала мы рассмотрим последовательности комплексных чисел.

3.3. Теорема. *Допустим, что* $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ — *комплексные последовательности и* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. *Тогда*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} cs_n = cs$, $\lim\limits_{n\to\infty} (c + s_n) = c + s$ *для любого числа* c;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = st$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{s_n} = \dfrac{1}{s}$, *если только* $s_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *и* $s \neq 0$.

Доказательство. (a) Для данного $\varepsilon > 0$ существуют целые N_1, N_2, такие, что

$$\text{при } n \geqslant N_1 \text{ имеем } |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{при } n \geqslant N_2 \text{ имеем } |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $N = \max(N_1, N_2)$, то при $n \geqslant N$ получим

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leqslant |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon.$$

Тем самым (a) доказано. Доказательство утверждения (b) тривиально.

(c) Воспользуемся тождеством

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s). \tag{1}$$

Для данного $\varepsilon > 0$ существуют целые N_1, N_2, такие, что

$$\text{при } n \geqslant N_1 \text{ имеем } |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon},$$

$$\text{при } n \geqslant N_2 \text{ имеем } |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Если мы возьмем $N = \max(N_1, N_2)$, то при $n \geqslant N$ получим

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0.$$

Применив теперь (a) и (b) к тождеству (1), мы заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n t_n - st) = 0$.

(d) Выбрав m так, что $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$ при $n \geqslant m$, мы видим, что

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \qquad (n \geqslant m).$$

Для данного $\varepsilon > 0$ существует целое $N > m$, такое, что при $n \geqslant N$ имеем

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2\varepsilon.$$

Отсюда при $n \geqslant N$ получаем

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2}|s_n - s| < \varepsilon.$$

3.4. Теорема. (a) *Допустим, что* $\mathbf{x}_n \in R^k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *и*

$$\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n}).$$

Последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ *сходится к* $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{2}$$

(b) *Допустим, что* $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$ — *последовательности в* R^k, $\{\beta_n\}$ — *последовательность вещественных чисел и* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\beta_n \to \beta$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n \mathbf{x}_n = \beta\mathbf{x}.$$

Доказательство. Если $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, то равенство (2) выполняется в силу неравенств

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leqslant |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|,$$

вытекающих непосредственно из определения нормы в R^k.

Обратно, если (2) выполнено, то каждому $\varepsilon > 0$ соответствует целое N, такое, что при $n \geqslant N$ имеем

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

Значит, при $n \geqslant N$ получаем

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon,$$

откуда $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. Тем самым ($a$) доказано.

Утверждение (b) следует из (a) и теоремы 3.3.

Подпоследовательности

3.5. Определение. Пусть задана последовательность $\{p_n\}$. Рассмотрим последовательность $\{n_k\}$ положительных целых чисел, такую, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Тогда последовательность $\{p_{n_i}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{p_n\}$. Если последовательность $\{p_{n_i}\}$ сходится, то ее предел называется *частичным пределом* последовательности $\{p_n\}$.

Ясно, что последовательность $\{p_n\}$ сходится к p тогда и только тогда, когда всякая ее подпоследовательность сходится к p. Мы предоставляем читателю провести детальное доказательство.

3.6. Теорема. *Всякая ограниченная последовательность в R^k содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть E — множество значений ограниченной последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ в R^k. Если E конечно, то существуют по крайней мере одна точка $\mathbf{x}$ множества E и последовательность $\{n_i\}$ $(n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$, такие, что

$$\mathbf{x}_{n_1} = \mathbf{x}_{n_2} = \ldots = \mathbf{x}.$$

Полученная таким образом подпоследовательность, очевидно, сходится.

Если множество E бесконечно, то оно имеет предельную точку $\mathbf{x} \in R^k$ (теорема 2.42). Выберем n_1 так, что $|\mathbf{x}_{n_1} - \mathbf{x}| < 1$. Выбрав $n_1, \ldots, n_{i-1}$, мы получим, по теореме 2.22, что существует целое $n_i > n_{i-1}$, такое, что $|\mathbf{x}_{n_i} - \mathbf{x}| < 1/i$. Построенная таким образом подпоследовательность сходится к x.

3.7. Теорема. *Частичные пределы последовательности $\{p_n\}$ в метрическом пространстве X образуют замкнутое множество в X.*

Доказательство. Пусть E — множество значений последовательности $\{p_n\}$, а E^* — множество всех частичных пределов этой последовательности. Допустим, что q — предельная точка множества E^*. Чтобы показать, что $q \in E^*$, достаточно, по теореме 3.2 (d), показать, что q — предельная точка множества E.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Поскольку q — предельная точка множества E^*, имеется точка $p \in E^*$, такая, что

$$0 < d(p, q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $p \in E^*$, то при некотором p_n имеем

$$d(p, p_n) < d(p, q).$$

Значит, $p_n \neq q$ и

$$0 < d(p_n, q) \leqslant d(p_n, p) + d(p, q) < \varepsilon.$$

Поскольку $p_n \in E$, отсюда следует, что q — предельная точка множества E, и доказательство закончено.

Последовательности Коши

3.8. Определение. Последовательность $\{p_n\}$ в метрическом пространстве X называется *последовательностью Коши* (*фундаментальной последовательностью*, *последовательностью, сходящейся в себе*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое N, такое, что $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ при $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$.

При рассмотрении последовательностей Коши, а также в других ситуациях, которые возникнут позднее, окажется полезным следующее геометрическое понятие.

3.9. Определение. Пусть E — подмножество метрического пространства X, и пусть S — множество всех вещественных чисел вида $d(p, q)$, где $p \in E$ и $q \in E$. *Диаметром* множества E называется число $\sup S$. Это число обозначается $\operatorname{diam} E$.

Если $\{p_n\}$ — последовательность в X, а E_N состоит из точек $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$, то из двух последних определений ясно, что *$\{p_n\}$ — последовательность Коши тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{diam} E_N = 0.$$

3.10. Теорема. (a) *Если $\overline{E}$ есть замыкание множества E в метрическом пространстве X, то*

$$\operatorname{diam} \overline{E} = \operatorname{diam} E.$$

(*b*) *Если* $\{K_n\}$ — *последовательность компактных множеств в* X, *такая, что* $K_n \supset K_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, *и если*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0,$$

то $\bigcap\limits_{1}^{\infty} K_n$ *состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. (*a*) Ясно, что

$$\operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} \overline{E},$$

так как $E \subset \overline{E}$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и выберем $p \in \overline{E}$, $q \in \overline{E}$. По определению множества $\overline{E}$, в E содержатся точки p', q', такие, что $d(p, p') < \varepsilon$, $d(q, q') < \varepsilon$. Значит,

$$d(p, q) \leqslant d(p, p') + d(p', q') + d(q', q) < \\ < 2\varepsilon + d(p', q') \leqslant 2\varepsilon + \operatorname{diam} E.$$

Следовательно,

$$\operatorname{diam} \overline{E} \leqslant 2\varepsilon + \operatorname{diam} E,$$

и так как ε произвольно, утверждение (*a*) доказано.

(*b*) Положим $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. По теореме 2.36, K непусто. Если K содержит более одной точки, то $\operatorname{diam} K > 0$. Но при каждом n мы имеем $K_n \supset K$, так что $\operatorname{diam} K_n \geqslant \operatorname{diam} K$. Это противоречит предположению, что $\operatorname{diam} K_n \to 0$.

3.11. Теорема. (*a*) *Всякая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве* X *является последовательностью Коши.*

(*b*) *Всякая последовательность Коши в* R^k *сходится.*

Замечание. Разница между определением сходящейся последовательности и определением последовательности Коши состоит в том, что в первое определение в явном виде входит предел, в то время как во второе определение он не входит. Таким образом, теорема 3.11 (*b*) позволяет нам решить, сходится или нет данная последовательность, даже если мы не знаем предела, к которому она может сходиться.

То (содержащееся в теореме 3.11) утверждение, что последовательность в R^k сходится тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши, обычно называют *критерием сходимости Коши.*

Доказательство. (a) Если $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ и $\varepsilon > 0$, то существует целое N, такое, что $d(p_n, p) < \varepsilon/2$ при $n \geqslant N$. Значит, если $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$, то

$$d(p_n, p_m) \leqslant d(p_n, p) + d(p, p_m) < \varepsilon,$$

так что $\{p_n\}$ — последовательность Коши.

(b) Допустим, что $\{\mathbf{x}_n\}$ — последовательность Коши в R^k. Пусть E_N — множество, состоящее из точек $\mathbf{x}_N$, $\mathbf{x}_{N+1}$, $\mathbf{x}_{N+2}, \ldots$, и пусть $\overline{E}_N$ — замыкание множества E_N. По определению 3.9 и по теореме 3.10 (a) мы имеем

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam} \overline{E}_N = 0. \tag{3}$$

В частности, множества $\overline{E}_N$ ограничены. Кроме того, они замкнуты. (Это следует из упражнения 4, гл. 2. Вот короткое доказательство: если $\mathbf{x} \notin \overline{E}_N$, то $\mathbf{x} \notin E_N$, и $\mathbf{x}$ не является предельной точкой множества E_N; поэтому некоторая окрестность V точки $\mathbf{x}$ не пересекается с E_N. Никакая точка окрестности V не принадлежит $\overline{E}_N$, так как множество V открыто; следовательно, дополнение множества $\overline{E}_N$ открыто.) Значит, каждое множество $\overline{E}_N$ компактно (теорема 2.41). Кроме того, $E_N \supset E_{N+1}$, так что $\overline{E}_N \supset \overline{E}_{N+1}$. По теореме 3.10 ($b$) существует единственная точка $\mathbf{x} \in R^k$, принадлежащая каждому множеству $\overline{E}_N$.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. В силу (3) имеется целое N_0, такое, что $\operatorname{diam} \overline{E}_N < \varepsilon$, если $N \geqslant N_0$. Поскольку $\mathbf{x} \in \overline{E}_N$, это значит, что $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon$ при всех $\mathbf{y} \in \overline{E}_N$, а поэтому и при всех $\mathbf{y} \in E_N$. Иными словами, если $n \geqslant N_0$, то $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| < \varepsilon$. Но это означает в точности, что $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, и доказательство закончено.

3.12. Определение. Метрическое пространство X, в котором каждая последовательность Коши сходится, называется *полным*. Поэтому теорему 3.11 (b) можно сформулировать так: *R^k — полное метрическое пространство.* Примером неполного метрического пространства служит пространство всех рациональных чисел с расстоянием $d(x, y) = |x - y|$.

Теорема 3.2 (c) и пример (d) из п. 3.1 показывают, что сходящиеся последовательности ограничены, но ограниченные последовательности в R^k не обязательно сходятся. Однако имеется один важный случай, когда сходимость равносильна ограниченности. Так обстоит дело с монотонными последовательностями в R^1.

3.13. Определение. Последовательность $\{s_n\}$ вещественных чисел называется

(*a*) *монотонно возрастающей*, если $s_n \leqslant s_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$;

(*b*) *монотонно убывающей*, если $s_n \geqslant s_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Класс монотонных последовательностей состоит из возрастающих и убывающих последовательностей.

3.14. Теорема. *Монотонная последовательность $\{s_n\}$ сходится в том и только в том случае, когда она ограничена.*

Доказательство. Допустим, что $s_n \leqslant s_{n+1}$ (в другом случае доказательство аналогично). Пусть E — множество значений последовательности $\{s_n\}$. Если последовательность $\{s_n\}$ ограничена, то пусть s — верхняя грань множества E. Тогда

$$s_n \leqslant s \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует целое N, такое, что $s-\varepsilon < s_N \leqslant s$, так как иначе $s-\varepsilon$ было бы верхней границей множества E. Поскольку последовательность $\{s_n\}$ возрастает, то при $n \geqslant N$ имеем

$$s-\varepsilon < s_n \leqslant s,$$

откуда следует, что $\{s_n\}$ сходится (к s).

Обратное следует из теоремы 3.2 (*c*).

Верхний и нижний пределы

3.15. Определение. Пусть $\{s_n\}$ — последовательность вещественных чисел, обладающая следующим свойством: для любого вещественного M существует целое N, такое, что при $n \geqslant N$ мы имеем $s_n \geqslant M$. Тогда мы пишем

$$s_n \to +\infty.$$

Аналогичным образом, если для любого вещественного числа M существует целое N, такое, что при $n \geqslant N$ мы имеем $s_n \leqslant M$, то мы пишем

$$s_n \to -\infty.$$

Следует отметить, что мы теперь используем символ $\to$ (введенный в определении 3.1) для некоторых типов расходящихся последовательностей, так же как и для сходящихся последовательностей, но что определения сходимости и предела, данные в п. 3.1, никоим образом не меняются.

3.16. Определение. Пусть $\{s_n\}$ — последовательность вещественных чисел. Пусть E — множество чисел x (в расширенной системе вещественных чисел), таких, что $s_{n_k} \to x$ для некоторой подпоследовательности $\{s_{n_k}\}$. Это множество E содержит все частичные пределы, определенные в п. 3.5, и, возможно, числа $+\infty$, $-\infty$.

Вспомним теперь определения 1.34 и 1.40 и положим

$$s^* = \sup E,$$
$$s_* = \inf E.$$

Числа s^*, s_* называются *верхним* и *нижним* пределами последовательности $\{s_n\}$; мы используем обозначения

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = s^*, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = s_*.$$

3.17. Теорема. *Пусть $\{s_n\}$ — последовательность вещественных чисел. Пусть E и s^* имеют тот же смысл, что и в определении* 3.16. *Тогда s^* обладает следующими свойствами*:

(*a*) $s^* \in E$;

(*b*) *если $x > s^*$, то существует целое N, такое, что при $n \geqslant N$ имеем $s_n < x$. Более того, s^* — единственное число, обладающее свойствами* (*a*) *и* (*b*).

Конечно, аналогичный результат верен для s_*.

Доказательство. Если $s^* = +\infty$, то множество E не ограничено сверху; значит, последовательность $\{s_n\}$ не ограничена сверху и существует подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$, такая, что $s_{n_k} \to +\infty$.

Если s^* — вещественное число, то множество E ограничено сверху и существует по крайней мере один частичный предел, поэтому (*a*) следует из теорем 3.7 и 2.28.

Если $s^* = -\infty$, то E содержит только один элемент, а именно $-\infty$, и не существует ни одного частичного предела. Значит, для любого вещественного M неравенство $s_n > M$ может выполняться лишь для конечного множества значений n, так что $s_n \to -\infty$.

Тем самым (*a*) установлено во всех случаях.

Чтобы доказать (*b*), допустим, что существует число $x > s^*$, такое, что $s_n \geqslant x$ для бесконечного множества значений n. В этом случае существует число $y \in E$, такое, что $y \geqslant x > s^*$, а это противоречит определению s^*.

Таким образом, s^* удовлетворяет условиям (*a*) и (*b*).

Для доказательства единственности допустим, что существуют два числа p и q, удовлетворяющие условиям (*a*) и (*b*), и допустим, что $p < q$. Выберем x таким, что $p < x < q$. При $n \geqslant N$ имеем $s_n < x$, так как p удовлетворяет условию (*b*). Но тогда q не может удовлетворять условию (*a*).

3.18. Примеры. (*a*) Пусть $\{s_n\}$ — последовательность, содержащая все рациональные числа. Тогда каждое вещественное число является частичным пределом и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = +\infty, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = -\infty.$$

(*b*) Пусть $s_n = (-1)^n [1 + (1/n)]$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = -1.$$

(*c*) Для последовательности $\{s_n\}$ вещественных чисел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = s.$$

Мы закончим этот раздел одной полезной теоремой, доказательство которой совсем тривиально.

3.19. Теорема. *Если $s_n \leqslant t_n$ при $n \geqslant N$, где N фиксировано, то*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n.$$

Некоторые специальные последовательности

Теперь мы вычислим пределы некоторых часто встречающихся последовательностей. Все доказательства будут основаны на следующем замечании: если $0 \leqslant x_n \leqslant s_n$ при $n \geqslant N$, где N — некоторое фиксированное число, и если $s_n \to 0$, то $x_n \to 0$.

3.20. Теорема. (*a*) *Если $p > 0$, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ [1].

(*b*) *Если* $p > 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(*d*) *Если $p > 0$ и α — вещественное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0.$$

(*e*) *Если* $|x| < 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

[1]) Смысл символа n^p не был до сих пор определен, то же относится и к n^α в пункте (*d*); указания на способ определения степени с любым вещественным показателем содержатся в упражнении 7 к гл. 1. — *Прим. перев.*

Доказательство. (a) Возьмем $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$.

(b) Если $p > 1$, то положим $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Тогда $x_n > 0$ и, согласно теореме о биноме,

$$1 + nx_n \leqslant (1 + x_n)^n = p,$$

так что

$$0 < x_n \leqslant \frac{p-1}{n}.$$

Значит, $x_n \to 0$. Если $p = 1$, то (b) тривиально; если $0 < p < 1$, то результат получается переходом к обратным числам.

(c) Положим $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тогда $x_n \geqslant 0$ и, согласно теореме о биноме,

$$n = (1 + x_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Значит,

$$0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad (n \geqslant 2).$$

(d) Пусть k — такое целое число, что $k > \alpha$, $k > 0$. Для $n > 2k$ имеем

$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}.$$

Значит,

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k} \qquad (n > 2k).$$

Поскольку $\alpha - k < 0$, имеем $n^{\alpha-k} \to 0$ в силу (a).

(e) Возьмем $\alpha = 0$ в (d).

Ряды

В остальной части этой главы все рассматриваемые последовательности и ряды будут комплекснозначными, если явно не оговорено противное. В упражнении 15 предлагается распространить некоторые из следующих ниже теорем на ряды с членами из R^k.

3.21. Определение. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$. Мы будем обозначать сумму $a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$ ($p \leqslant q$) через $\sum_{n=p}^{q} a_n$. Последовательности $\{a_n\}$ мы сопоставим последовательность $\{s_n\}$, где

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

или, короче,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{4}$$

мы будем называть *бесконечным рядом* или просто *рядом.* Числа s_n называются *частными суммами* этого ряда. Если последовательность $\{s_n\}$ сходится к s, то мы будем говорить, что ряд *сходится*, и будем писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Число s называется суммой этого ряда, но необходимо ясно понимать, что s является *пределом последовательности сумм*, а не получается простым сложением.

Если последовательность $\{s_n\}$ расходится, то говорят, что ряд расходится.

Иногда для удобства обозначений мы будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

Часто мы будем вместо (4) или (5) писать просто $\sum a_n$.

Ясно, что каждую теорему о последовательностях можно сформулировать на языке рядов (полагая $a_1 = s_1$ и $a_n = s_n - s_{n-1}$ при $n > 1$), и обратно. Но тем не менее полезно различать эти понятия.

Критерий Коши (теорему 3.11) можно сформулировать в следующем виде.

3.22. Теорема. *Ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует целое N, такое, что*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

если $m \geqslant n \geqslant N$.

В частности, при $m = n$ неравенство (6) превращается в неравенство

$$|a_n| \leqslant \varepsilon \qquad (n \geqslant N).$$

Иными словами, справедлива следующая теорема.

3.23. Теорема. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Однако условие $a_n \to 0$ не достаточно для того, чтобы обеспечить сходимость ряда $\sum a_n$. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится; за доказательством мы отсылаем к теореме 3.28.

Теорема 3.14 о монотонных последовательностях также имеет очевидный аналог для рядов.

3.24. Теорема. *Ряд неотрицательных*[1]) *членов сходится тогда и только тогда, когда его частные суммы образуют ограниченную последовательность.*

Теперь мы обратимся к признаку сходимости другой природы — к так называемому «признаку сравнения».

3.25. Теорема. (*a*) *Если* $|a_n| \leqslant c_n$ *при* $n \geqslant N_0$, *где* N_0 — *некоторое фиксированное целое, и если ряд* $\sum c_n$ *сходится, то и ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

(*b*) *Если* $a_n \geqslant d_n \geqslant 0$ *при* $n \geqslant N_0$ *и если ряд* $\sum d_n$ *расходится, то и ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Заметим, что признак (*b*) применим только к рядам с неотрицательными членами a_n.

Доказательство. Согласно критерию Коши, для данного $\varepsilon > 0$ существует $N \geqslant N_0$, такое, что при $m \geqslant n \geqslant N$ имеем

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \leqslant \varepsilon.$$

Значит,

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m} c_k \leqslant \varepsilon,$$

и (*a*) доказано.

Далее, (*b*) следует из (*a*), так как если ряд $\sum a_n$ сходится, то и ряд $\sum d_n$ должен сходиться (заметим, что (*b*) следует также из теоремы 3.24).

Этот признак сравнения очень полезен; чтобы успешно применять его, мы должны освоиться с некоторым набором рядов с неотрицательными членами, заведомо сходящихся или расходящихся.

---

[1]) Выражение «неотрицательный» всегда относится к *вещественным* числам.

Ряды с неотрицательными членами

Простейшим из всех таких рядов, по-видимому, является геометрическая прогрессия.

3.26. Теорема. *Если* $0 \leqslant x < 1$, *то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Если $x \geqslant 1$, *то этот ряд расходится.*

Доказательство. Если $x \neq 1$, то

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Устремляя n к ∞, мы получим требуемый результат. При $x=1$ получается ряд

$$1+1+1+\ldots,$$

который, очевидно, расходится.

Во многих случаях, встречающихся в приложениях, члены ряда монотонно убывают. Поэтому следующая теорема Коши представляет особый интерес. Поразительная особенность утверждения теоремы состоит в том, что довольно «редкая» подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$ определяет сходимость или расходимость ряда $\sum a_n$.

3.27. Теорема. *Допустим, что* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится в том и только в том случае, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots. \tag{7}$$

Доказательство. По теореме 3.24 достаточно установить ограниченность частных сумм. Пусть

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k}.$$

При $n < 2^k$ имеем

$$s_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = t_k,$$

так что

$$s_n \leqslant t_k. \tag{8}$$

С другой стороны, при $n > 2^k$

$$s_n \geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k,$$

так что

$$2s_n \geqslant t_k. \tag{9}$$

В силу (8) и (9), последовательности $\{s_n\}$ и $\{t_k\}$ или обе ограничены, или обе не ограничены. Доказательство закончено.

3.28. Теорема. *Ряд $\sum \frac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$.*

Доказательство. Если $p \leqslant 0$, то расходимость следует из теоремы 3.23. Если $p > 0$, то применима теорема 3.27, и мы приходим к ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)}.$$

Но $2^{(1-p)} < 1$ тогда и только тогда, когда $1 - p < 0$, и теорема вытекает из сопоставления с геометрической прогрессией (следует положить $x = 2^{1-p}$ в теореме 3.26).

В качестве еще одного приложения теоремы 3.27 будет доказана следующая теорема.

3.29. Теорема. *Если $p > 1$, то ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^p} \tag{10}$$

сходится; если $p \leqslant 1$, то этот ряд расходится.

Замечание. Символ $\log n$ обозначает логарифм числа n по основанию e (ср. упражнение 9, гл. 1); число e будет вскоре определено (см. определение 3.30). Мы начинаем ряд с $n = 2$, так как $\log 1 = 0$.

Доказательство. Из монотонности логарифмической функции (которая более подробно будет рассматриваться в гл. 8) следует, что $\{\log n\}$ — возрастающая последовательность. Значит, последовательность $\left\{\frac{1}{n \log n}\right\}$ убывает, и мы можем применить теорему 3.27 к ряду (10); это приводит к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \tag{11}$$

и теорема 3.29 следует из теоремы 3.28.

Эту процедуру, очевидно, можно продолжить. Например, ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n} \tag{12}$$

расходится, тогда как ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2} \tag{13}$$

сходится.

Можно заметить, что члены ряда (12) очень мало отличаются от членов ряда (13). Однако один ряд сходится, а другой расходится. Продолжая процесс, который привел нас от теоремы 3.28 к теореме 3.29, а затем к (12) и (13), мы получим пары сходящихся и расходящихся рядов, члены которых отличаются даже меньше, чем члены рядов (12) и (13). Можно было бы предположить, что имеется некое предельное положение, «граница», по одну сторону которой лежат все сходящиеся, а по другую — все расходящиеся ряды, по крайней мере пока речь идет о рядах с монотонно убывающими членами. Конечно, это понятие «границы» совсем неясное. Однако мы хотим отметить следующее: как бы мы ни уточнили это понятие, такое предположение окажется неверным. Упражнения 11 (*b*) и 12 (*b*) могут служить иллюстрациями.

Мы не хотим вдаваться глубже в подобные вопросы теории сходимости и отсылаем читателя к главе IX, в особенности § 41, книги Кноппа[1]) (см. литературу).

Число e

3.30. Определение. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, если $n \geqslant 1$, и $0! = 1$.

---

[1]) См. также Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М.—Л., 1948, п. 365. —*Прим. перев.*

Этот ряд сходится, так как

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2 \ldots n} <$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

поэтому определение имеет смысл. На самом деле указанный ряд сходится очень быстро, и это позволяет нам вычислить e с большой точностью.

Интересно отметить, что e можно определить также при помощи другого предельного перехода; доказательство служит хорошей иллюстрацией того, как следует оперировать с пределами.

3.31. Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Доказательство. Пусть

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

По теореме о биноме

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Значит, $t_n \leqslant s_n$, так что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n \leqslant e \tag{14}$$

по теореме 3.19. Далее, если $n \geqslant m$, то

$$t_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Устремим n к ∞, оставляя m фиксированным. Получим

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{m!},$$

так что

$$s_m \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n.$$

Устремляя m к ∞, мы окончательно получаем

$$e \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n. \tag{15}$$

Теорема следует из (14) и (15).

Скорость, с которой сходится ряд $\sum \frac{1}{n!}$, можно оценить так: если s_n обозначает то же, что и выше, то

$$e-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\ldots<$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right\}=\frac{1}{n!\,n},$$

так что

(16) $$0<e-s_n<\frac{1}{n!\,n}.$$

Таким образом, сумма s_{10} приближает число e с ошибкой, меньшей 10^{-7}. Неравенство (16) представляет и теоретический интерес, так как оно позволяет очень легко доказать иррациональность числа e.

3.32. Теорема. *Число e иррационально.*

Доказательство. Допустим, что e рационально. Тогда $e=p/q$, где p, q — положительные целые числа. В силу (16),

(17) $$0<q!\,(e-s_q)<\frac{1}{q}.$$

Согласно предположению, $q!\,e$ — целое число. Число $q!\,(e-s_q)$ также целое, поскольку

$$q!\,s_q=q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right).$$

Так как $q\geqslant 1$, из (17) следует существование целого числа, заключенного между 0 и 1. Таким образом, мы добились противоречия.

Другие признаки сходимости

3.33. Теорема (признак Коши). *Пусть задан ряд $\sum a_n$. Положим $\alpha=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда*

(*a*) *если $\alpha<1$, то ряд $\sum a_n$ сходится;*

(*b*) *если $\alpha>1$, то ряд $\sum a_n$ расходится;*

(*c*) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $\alpha=1$.*

Доказательство. Если $\alpha<1$, то можно выбрать β так, что $\alpha<\beta<1$, а целое число N — так, что $\sqrt[n]{|a_n|}<\beta$ при $n\geqslant N$ [по теореме 3.17 (*b*)]. Иначе говоря, при $n\geqslant N$ имеем

$$|a_n|<\beta^n.$$

Ряд $\sum \beta^n$ сходится, так как $0 < \beta < 1$. Сходимость ряда $\sum a_n$ следует теперь из признака сравнения.

Если $\alpha > 1$, то, снова по теореме 3.17, существует последовательность $\{n_k\}$, такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha.$$

Значит, $|a_n| > 1$ для бесконечного множества значений n, так что условие $a_n \to 0$, необходимое для сходимости ряда $\sum a_n$, не выполнено (теорема 3.23).

Чтобы доказать (*c*), рассмотрим ряды

$$\sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n^2}.$$

Для каждого из этих рядов $\alpha = 1$ [по теореме 3.20 (*c*)], но первый расходится, а второй сходится.

3.34. Теорема (признак Даламбера). *Ряд* $\sum a_n$

(*a*) *сходится, если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$;

(*b*) *расходится, если* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$ *при* $n \geqslant n_0$, *где* n_0 — *некоторое фиксированное число*;

(*c*) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Доказательство. Если условие (*a*) выполнено, то можно найти $\beta < 1$ и целое число N, такие, что

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$$

при $n \geqslant N$. В частности,

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| < \beta |a_N|, \\
&|a_{N+2}| < \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&|a_{N+p}| < \beta^p |a_N|.
\end{aligned}$$

Это значит, что

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \cdot \beta^n$$

при $n \geqslant N$; таким образом (*a*) следует из признака сравнения, так как ряд $\sum \beta^n$ сходится.

Если $|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$ при $n \geqslant n_0$, то легко видеть, что условие $a_n \to 0$ не выполнено, откуда и следует (b).

Чтобы доказать (c), мы снова рассмотрим ряды

$$\sum \frac{1}{n}, \ \sum \frac{1}{n^2}.$$

Для каждого из них мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

но первый расходится, а второй сходится.

3.35. Примеры. (a) Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots,$$

для которого

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Признак Коши указывает на сходимость; признак Даламбера не позволяет сделать никаких заключений.

(b) То же самое верно в отношении ряда

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \ldots,$$

где

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,$$

но

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

3.36. Замечания. Признак Даламбера, как правило, легче применять, чем признак Коши, так как обычно легче вычислять частные, чем корни n-й степени. Однако признак Коши сильнее в следующем смысле: когда признак Даламбера указывает на сходимость, то и признак Коши тоже указывает на сходимость; если же признак Коши не позволяет сделать никаких заключений, то и признак Даламбера тоже не позволяет сделать никаких заключений. Это следует из теоремы 3.37 и иллюстрируется приведенными выше примерами.

Ни один из этих двух признаков не является ссобенно тонким в отношении расходимости. В обоих расходимость выводится из того, что a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

3.37. Теорема. *Для любой последовательности* $\{c_n\}$ *положительных чисел имеем*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Доказательство. Мы докажем второе неравенство; доказательство первого совершенно аналогично. Положим

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Если $\alpha = +\infty$, то доказывать нечего. Если α конечно, то выберем $\beta > \alpha$. Существует целое N, такое, что

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant \beta$$

при $n \geqslant N$. В частности, для любого $p > 0$

$$c_{N+k+1} \leqslant \beta c_{N+k} \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Перемножая эти неравенства, мы получаем

$$c_{N+p} \leqslant \beta^p c_N,$$

или

$$c_n \leqslant c_N \beta^{-N} \cdot \beta^n \quad (n \geqslant N).$$

Значит,

$$\sqrt[n]{c_n} \leqslant \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}} \cdot \beta,$$

так что

(18) $$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \beta$$

по теореме 3.20 (b). Поскольку неравенство (18) верно при любом $\beta > \alpha$, имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \alpha.$$

Степенные ряды

3.38. Определение. Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{c_n\}$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{19}$$

называется *степенным рядом*. Числа c_n называются *коэффициентами* этого ряда; здесь z — комплексное число.

Вообще говоря, этот ряд сходится или расходится в зависимости от выбора числа z. Точнее, с каждым степенным рядом связан круг, так называемый круг сходимости, такой, что ряд (19) сходится, если z лежит внутри этого круга, и расходится, если z находится вне круга (чтобы охватить все случаи, мы должны рассматривать плоскость как внутренность окружности бесконечного радиуса, а точку — как окружность нулевого радиуса). Поведение ряда на окружности круга сходимости может быть гораздо более разнообразным, и его нельзя так просто описать.

3.39. Теорема. *Пусть задан степенной ряд* $\sum c_n z^n$. *Положим*

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad R = \frac{1}{\alpha}$$

(*если* $\alpha = 0$, *то* $R = +\infty$; *если* $\alpha = +\infty$, *то* $R = 0$). *Тогда ряд* $\sum c_n z^n$ *сходится, если* $|z| < R$, *и расходится, если* $|z| > R$.

Доказательство. Положим $a_n = c_n z^n$ и применим признак Коши. Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

Замечание. Число R называется радиусом сходимости ряда $\sum c_n z^n$.

3.40. Примеры. (*a*) Для ряда $\sum n^n z^n$ имеем $R = 0$.

(*b*) Для ряда $\sum \frac{z^n}{n!}$ имеем $R = +\infty$ (в этом случае проще применить признак Даламбера, чем признак Коши).

(*c*) Для ряда $\sum z^n$ имеем $R = 1$. Если $|z| = 1$, то ряд расходится, так как z^n не стремится к 0 при $n \to \infty$.

(*d*) Для ряда $\sum \frac{z^n}{n}$ имеем $R = 1$. Этот ряд сходится во всех точках окружности круга сходимости, кроме $z = 1$. Это будет доказано в теореме 3.44.

(e) Для ряда $\sum \frac{z^n}{n^2}$ имеем $R=1$. Этот ряд сходится во всех точках окружности круга сходимости согласно признаку сравнения, так как $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, если $|z|=1$.

Суммирование по частям

3.41. Теорема. *Пусть даны две последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. *Положим*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ при } n \geqslant 0; \quad A_{-1}=0.$$

Тогда, если $0 \leqslant p \leqslant q$, *то*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \tag{20}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1},$$

и последнее выражение справа, очевидно, равно правой части равенства (20).

Формула (20), так называемая формула суммирования по частям, полезна при исследовании рядов вида $\sum a_n b_n$, в особенности, если последовательность $\{b_n\}$ монотонна. Сейчас мы дадим ее приложения.

3.42. Теорема. *Допустим, что*

(a) *частные суммы* A_n *ряда* $\sum a_n$ *образуют ограниченную последовательность*;

(b) $b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Выберем M так, что $|A_n| \leqslant M$ при всех n. Для данного $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что $b_N \leqslant (\varepsilon/2M)$. При $N \leqslant p \leqslant q$ имеем

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \leqslant$$

$$\leqslant M \left|\sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right| = 2Mb_p \leqslant 2Mb_N \leqslant \varepsilon.$$

Сходимость следует теперь из критерия Коши. Заметим, что первое неравенство в написанной выше цепочке основано, конечно, на том, что $b_n - b_{n+1} \geqslant 0$.

3.43. Теорема. *Допустим, что*

(a) $|c_1| \geqslant |c_2| \geqslant |c_3| \geqslant \ldots$;

(b) $c_{2m-1} \geqslant 0$, $c_{2m} \leqslant 0$ $(m = 1, 2, 3 \ldots)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Тогда ряд $\sum c_n$ сходится.

Ряд, для которого выполнено условие (b), называется «знакопеременным рядом»; сформулированная теорема была известна Лейбницу.

Доказательство. Применим теорему 3.42, положив $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = |c_n|$.

3.44. Теорема. *Допустим, что радиус сходимости ряда* $\sum c_n z^n$ *равен* 1 *и* $c_0 > c_1 > c_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. *Тогда ряд* $\sum c_n z^n$ *сходится в каждой точке окружности* $|z| = 1$, *за исключением, возможно, точки* $z = 1$.

Доказательство. Положим $a_n = z^n$, $b_n = c_n$. Тогда выполнены условия теоремы 3.42, так как

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|},$$

если $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Абсолютная сходимость

Говорят, что ряд $\sum a_n$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

3.45. Теорема. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенства

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

и из критерия Коши.

3.46. Замечания. Для рядов с положительными членами абсолютная сходимость — это то же самое, что сходимость.

Если ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum |a_n|$ расходится, то говорят, что ряд $\sum a_n$ сходится неабсолютно. Например, ряд

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

сходится неабсолютно (теорема 3.43).

Признак сравнения, так же как и признаки Даламбера и Коши, на самом деле есть признак абсолютной сходимости, и поэтому не может дать никакой информации о неабсолютно сходящихся рядах. Для работы с последними иногда можно пользоваться суммированием по частям. В частности, степенной ряд сходится абсолютно внутри круга сходимости.

Мы увидим, что с абсолютно сходящимися рядами можно обращаться совершенно так же, как с конечными суммами. Мы можем перемножать их почленно и переставлять слагаемые, не меняя суммы. Но для неабсолютно сходящихся рядов это уже неверно, и при действиях с ними нужна бóльшая осторожность.

Сложение и умножение рядов

3.47. Теорема. *Если $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$, то*

$$\sum (a_n + b_n) = A + B \text{ и } \sum ca_n = cA \text{ при любом } c.$$

Доказательство. Пусть

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Тогда

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k).$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B.$$

Доказательство второго утверждения даже проще.

Таким образом, два сходящихся ряда можно сложить почленно, и полученный ряд будет сходиться к сумме сумм этих двух рядов. Положение усложняется при рассмотрении произведения двух рядов. Сначала мы должны определить произведение. Это можно сделать разными способами; мы будем рассматривать так называемое произведение Коши.

3.48. Определение. Пусть заданы ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Положим

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и назовем ряд $\sum c_n$ произведением двух данных рядов.

Это определение можно объяснить следующим образом. Если, взяв два степенных ряда $\sum a_n z^n$ и $\sum b_n z^n$, мы перемножим их подобно тому, как это делается в случае многочленов, и приведем подобные члены, то мы получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) =$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \ldots =$$
$$= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots .$$

Полагая $z = 1$, мы приходим к данному выше определению.

3.49. Пример. Если

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

и $A_n \to A$, $B_n \to B$, то совсем не ясно, будет ли последовательность $\{C_n\}$ сходиться к AB, так как неверно, что $C_n = A_n B_n$. Зависимость $\{C_n\}$ от $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ очень сложна (см. доказательство теоремы 3.50). Сейчас мы покажем, что произведение двух сходящихся рядов может на самом деле расходиться.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

сходится (теорема 3.43). Составив произведение этого ряда с самим собой, мы получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots,$$

так что

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Так как

$$(n-k+1)(k+1)=\left(\frac{n}{2}+1\right)^2-\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\leqslant\left(\frac{n}{2}+1\right)^2,$$

то мы имеем

$$|c_n|\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2},$$

так что условие $c_n\to 0$, необходимое для сходимости ряда $\sum c_n$, не выполнено.

В связи со следующей теоремой, принадлежащей Мертенсу, заметим, что мы рассматривали в этом примере произведение двух неабсолютно сходящихся рядов.

3.50. Теорема. *Допустим, что*

(*a*) *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно,*

(*b*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n=A,$

(*c*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n=B,$

(*d*) $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\quad (n=0, 1, 2, \ldots).$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n=AB.$$

Это значит, что произведение двух сходящихся рядов сходится и сумма равна произведению сумм, если хотя бы один из этих двух рядов сходится абсолютно.

Доказательство. Положим

$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k,\quad C_n=\sum_{k=0}^{n} c_k,\quad \beta_n=B_n-B.$$

Тогда

$$\begin{aligned}C_n&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\ldots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)=\\&=a_0B_n+a_1B_{n-1}+\ldots+a_nB_0=\\&=a_0(B+\beta_n)+a_1(B+\beta_{n-1})+\ldots+a_n(B+\beta_0)=\\&=A_nB+a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\ldots+a_n\beta_0.\end{aligned}$$

Положим

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0.$$

Мы хотим показать, что $C_n \to AB$. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \tag{21}$$

так как $A_nB \to AB$. Положим

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

[Именно здесь мы используем условие (*a*).] Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу (*c*), $\beta_n \to 0$. Значит, можно выбрать N так, что $|\beta_n| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$, и в этом случае

$$|\gamma_n| \leqslant |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0| \leqslant$$
$$\leqslant |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha.$$

Оставляя N фиксированным и устремляя n к ∞, мы получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon\alpha,$$

так как $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и следует (21), так как ε произвольно.

Можно задать другой вопрос: обязательно ли сумма ряда $\sum c_n$, в том случае, когда он сходится, равна AB? Абель показал, что ответ на этот вопрос — утвердительный.

3.51. Теорема. *Если ряды* $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ *сходятся соответственно к* A, B, C *и* $c_n = a_0b_n + \ldots + a_nb_0$, *то* $C = AB$.

Здесь не делается никаких предположений об абсолютной сходимости. Мы дадим простое доказательство (основанное на непрерывности степенных рядов) после теоремы 8.2.

Перестановки рядов

3.52. Определение. Пусть $\{k_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — последовательность, в которой каждое положительное целое число встречается один и только один раз (т. е. $\{k_n\}$ — взаимно однозначное отображение множества J на J, см. определение 2.4). Положим

$$a'_n = a_{k_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

мы будем говорить, что ряд $\sum a'_n$ является перестановкой ряда $\sum a_n$.

Если $\{s_n\}$, $\{s'_n\}$ — последовательности частных сумм рядов $\sum a_n$, $\sum a'_n$, то легко видеть, что, вообще говоря, эти две последовательности составлены из совершенно разных чисел. Мы, таким образом, приходим к задаче: выяснить, при каких условиях все перестановки сходящегося ряда сходятся и совпадают ли их суммы между собой.

3.53. Определение. Говорят, что ряд $\sum a_n$ сходится *безусловно*, если каждая его перестановка сходится (к той же сумме). (Ср. с теоремой 3.57.)

3.54. Пример. Рассмотрим сходящийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots \tag{22}$$

и одну из его перестановок

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots, \tag{23}$$

в которой за двумя положительными членами всегда следует отрицательный. Если s — сумма ряда (22), то

$$s<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Так как

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0$$

при $k\geqslant 1$, то мы видим, что $s'_3<s'_6<s'_9<\ldots$, где s'_n есть n-я частная сумма ряда (23). Значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s'_n>s'_3=\frac{5}{6},$$

так что ряд (23) наверняка не сходится к s [мы предоставляем читателю проверку того, что ряд (23) тем не менее сходится].

Этот пример иллюстрирует следующую теорему, принадлежащую Риману.

3.55. Теорема. *Пусть $\sum a_n$ — неабсолютно сходящийся ряд вещественных чисел, и пусть $\alpha\leqslant\beta$ — два данных числа (в расширенной системе вещественных чисел). Тогда существует перестановка $\sum a'_n$ с частными суммами s'_n, такая, что*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s'_n=\alpha,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s'_n=\beta. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2},\quad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Тогда $p_n - q_n = a_n$, $p_n + q_n = |a_n|$, $p_n \geqslant 0$, $q_n \geqslant 0$. Ряды $\sum p_n$, $\sum q_n$ оба должны расходиться.

Действительно, если бы оба эти ряда сходились, то и ряд

$$\sum (p_n + q_n) = \sum |a_n|$$

сходился бы, вопреки предположению. Сходимость ряда $\sum q_n$ и расходимость ряда $\sum p_n$ (или наоборот) влечет за собой расходимость ряда $\sum a_n$, что снова противоречит предположению, так как

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n.$$

Обозначим теперь через P_1, P_2, P_3, ... неотрицательные члены ряда $\sum a_n$ в том порядке, в каком они встречаются, и пусть Q_1, Q_2, Q_3, ... — абсолютные величины отрицательных членов ряда $\sum a_n$ также в их естественном порядке.

Ряды $\sum P_n$, $\sum Q_n$ отличаются от рядов $\sum p_n$, $\sum q_n$ только нулевыми членами и поэтому расходятся.

Мы построим такие последовательности $\{m_n\}$, $\{k_n\}$, что ряд

$$(25) \qquad \begin{gathered} P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots \\ \ldots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \ldots - Q_{k_2} + \ldots, \end{gathered}$$

очевидно, являющийся перестановкой ряда $\sum a_n$, удовлетворяет условию (24).

Выберем последовательности вещественных чисел $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ так, что $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $\alpha_n < \beta_n$.

Пусть m_1, k_1 — наименьшие из таких целых чисел, что

$$\begin{gathered} P_1 + \ldots + P_{m_1} > \beta_1, \\ P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} < \alpha_1; \end{gathered}$$

пусть m_2, k_2 — наименьшие из таких целых чисел, что

$$\begin{aligned} &P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} > \beta_2, \\ &P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} - \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - Q_{k_1+1} - \ldots - Q_{k_2} < \alpha_2, \end{aligned}$$

и т. д. Мы можем продолжить этот выбор, так как ряды $\sum P_n$ и $\sum Q_n$ расходятся.

Если через x_n, y_n обозначить частные суммы ряда (25), последние члены которых P_{m_n}, $-Q_{k_n}$, то

$$|x_n - \beta_n| \leqslant P_{m_n}, \quad |y_n - \alpha_n| \leqslant Q_{k_n}.$$

Мы видим, что $x_n \to \beta$, $y_n \to \alpha$, так как $P_n \to 0$ и $Q_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Наконец, ясно, что никакое число, меньшее чем α или большее чем β, не может быть частичным пределом последовательности частных сумм ряда (25).

3.56. Теорема. *Ряд $\sum a_n$ сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.*

Доказательство. Допустим, что ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно. Пусть $\sum a'_n$ — его перестановка, обладающая частными суммами s'_n. Для данного $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что при $m \geqslant n \geqslant N$ имеем

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \leqslant \varepsilon. \tag{26}$$

Выберем теперь p так, чтобы все целые числа $1, 2, \ldots, N$ содержались в множестве $k_1, k_2, \ldots, k_p$ (мы используем обозначения из определения 3.52). Тогда при $n > p$ числа $a_1, \ldots, a_N$ в разности $s_n - s'_n$ уничтожаются, так что $|s_n - s'_n| \leqslant \varepsilon$ в силу (26). Значит, последовательность $\{s'_n\}$ сходится к тому же пределу, что и $\{s_n\}$.

Теперь допустим, что ряд $\sum a_n$ сходится неабсолютно. Если $a_n = x_n + iy_n$, где x_n и y_n вещественны, то $|a_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$. Поскольку ряд $\sum |a_n|$ расходится, то расходится один из рядов $\sum |x_n|$, $\sum |y_n|$. Таким образом, один из рядов $\sum x_n$ или $\sum y_n$ сходится неабсолютно. Согласно теореме 3.55, имеется такая перестановка, что либо ряд $\sum x'_n$, либо ряд $\sum y'_n$ расходится, так что и ряд $\sum a'_n$ расходится.

Значит, ряд $\sum a_n$ не является безусловно сходящимся.

Следующая теорема показывает, что в определении 3.53, не меняя его содержания, можно опустить фразу, заключенную в скобки.

3.57. Теорема. *Если все перестановки ряда $\sum a_n$ сходятся, то они сходятся к одной и той же сумме.*

Доказательство. Либо ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, и в этом случае $\sum a_n$ сходится безусловно по теореме 3.56, либо $\sum a_n$ не сходится абсолютно, и в этом случае по теореме 3.55 существует расходящаяся перестановка.

Упражнения

1. Доказать, что из сходимости последовательности $\{s_n\}$ следует сходимость последовательности $\{|s_n|\}$. Верно ли обратное?

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

3. Пусть $s_1=\sqrt{2}$ и

$$s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_n}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Доказать, что последовательность $\{s_n\}$ сходится и что $s_n<2$ при $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

4. Найти верхний и нижний пределы последовательности $\{s_n\}$, определенной следующим образом:

$$s_1=0; \quad s_{2m}=\frac{s_{2m-1}}{2}; \quad s_{2m+1}=\frac{1}{2}+s_{2m}.$$

5. Для любых двух вещественных последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}a_n+\varlimsup_{n\to\infty}b_n.$$

6. Исследовать поведение (сходимость или расходимость ряда) $\sum a_n$, если

(a) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

(b) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

(c) $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^n$;

(d) $a_n=\dfrac{1}{1+z^n}$ для комплексных значений z.

7. Доказать, что из сходимости ряда $\sum a_n$ следует сходимость ряда

$$\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n},$$

если $a_n\geqslant 0$.

8. Если ряд $\sum a_n$ сходится и если $\{b_n\}$ — монотонная и ограниченная последовательность, то и ряд $\sum a_nb_n$ сходится.

9. Найти радиус сходимости каждого из следующих степенных рядов:

(a) $\sum n^3z^n$; (b) $\sum\dfrac{2^n}{n!}z^n$;

(c) $\sum\dfrac{2^n}{n^2}z^n$; (d) $\sum\dfrac{n^3}{3^n}z^n$.

10. Допустим, что коэффициенты степенного ряда $\sum a_nz^n$ — целые числа, среди которых бесконечно много отличных от нуля Доказать, что радиус сходимости не превышает единицы.

11. Допустим, что ряд $\sum a_n$ расходится, $a_n > 0$, и пусть $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Доказать, что

(*a*) ряд $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ расходится;

(*b*) ряд $\sum \frac{a_n}{s_n}$ расходится;

(*c*) ряд $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ сходится.

Что можно сказать о рядах $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$, $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$?

12. Допустим, что ряд $\sum a_n$ сходится, $a_n > 0$, и положим

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m.$$

Доказать, что

(*a*) ряд $\sum \frac{a_n}{r_n}$ расходится;

(*b*) ряд $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ сходится.

13. Доказать, что произведение Коши двух абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно.

14. Пусть $\{s_n\}$ — какая-нибудь последовательность. Рассмотрим средние арифметические

$$t_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}.$$

Доказать, что из сходимости $s_n \to s$ следует сходимость $t_n \to s$. Доказать, что существуют расходящиеся последовательности $\{s_n\}$, которым соответствуют сходящиеся последовательности $\{t_n\}$.

15. Определение 3.21 можно распространить на тот случай, когда a_n принадлежат некоторому фиксированному пространству R^k. Абсолютная сходимость определяется как сходимость ряда $\sum |\mathbf{a}_n|$. Показать, что теоремы 3.22, 3.23, 3.25, 3.33, 3.34, 3.42, 3.45, 3.47, 3.56 и 3.57 остаются верными в этом более общем случае (доказательства требуют лишь незначительных изменений).

16. Доказать следующий аналог теоремы 3.10 (*b*): если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность замкнутых множеств в *полном* метрическом пространстве X и если

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0,$$

то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ состоит ровно из одной точки.

17. Пусть X — полное метрическое пространство, а $\{G_n\}$ — последовательность всюду плотных открытых подмножеств про-

странства X. Доказать теорему Бэра, состоящую в том, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ непусто. (В действительности оно плотно в X.)

Указание. Найти стягивающуюся последовательность замкнутых окрестностей E_n, таких, что $E_n \subset G_n$, и применить упражнение 16.

18. Пусть $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — последовательность Коши в метрическом пространстве X. Показать, что последовательность $\{d(p_n, q_n)\}$ сходится.

Указание. Для любых m, n имеем $d(p_n, q_n) \leqslant d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n)$, следовательно, разность

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$

мала, если m, n велики.

19. Пусть X — метрическое пространство.

(a) Назовем две последовательности Коши $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ в X *эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$

Доказать, что этим определено отношение эквивалентности[1].

(b) Пусть X^* — множество всех полученных таким образом классов эквивалентности[2]. Если $P \in X^*$, $Q \in X^*$, $\{p_n\} \in P$, $\{q_n\} \in Q$, то положим, по определению,

$$\Delta(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n).$$

В силу упражнения 18, этот предел существует. Показать, что число $\Delta(P, Q)$ не изменится, если $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ заменить эквивалентными последовательностями, и что тем самым Δ — расстояние на X^*.

(c) Доказать, что полученное метрическое пространство X^* полно.

(d) Каждому $p \in X$ сопоставим последовательность Коши, все члены которой равны p; пусть P_p — тот элемент множества X^*, который содержит эту последовательность. Доказать, что

$$\Delta(P_p, P_q) = d(p, q)$$

---

[1] Это означает, что 1) всякая последовательность Коши эквивалентна самой себе; 2) из эквивалентности пары последовательностей $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ следует эквивалентность пары $\{q_n\}$, $\{p_n\}$; 3) из эквивалентности пар $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ и $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ следует эквивалентность пары последовательностей $\{p_n\}$, $\{r_n\}$. — *Прим. перев.*

[2] Классом эквивалентности называется множество всех последовательностей Коши, эквивалентных какой-нибудь одной последовательности. — *Прим. перев.*

при всех p, $q \in X$. Иными словами, отображение φ, заданное равенством $\varphi(p) = P_p$, есть изометрия (т. е. отображение, сохраняющее расстояния) пространства X в X^*.

(e) Доказать, что $\varphi(X)$ всюду плотно в X^* и что $\varphi(X) = X^*$, если X полно.

В силу (d) можно отождествить X с $\varphi(X)$ и, таким образом, считать, что X погружено в полное метрическое пространство X^*. Мы будем называть X^* *пополнением* пространства X.

20. Пусть X — пространство рациональных чисел с метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Что служит пополнением этого пространства? (Ср. с упражнением 19.)

ГЛАВА 4

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Понятие функции и связанная с ним терминология были введены в определениях 2.1 и 2.4. Хотя в последующих главах мы будем в основном интересоваться вещественными и комплексными функциями (т. е. функциями, значения которых — вещественные или комплексные числа), мы будем рассматривать также векторнозначные функции (т. е. функции со значениями в R^k) и функции со значениями в любом метрическом пространстве. Теоремы, которые мы будем доказывать в этой общей обстановке, ничуть не стали бы более легкими, если бы мы ограничились, например, вещественными функциями; наоборот, на самом деле картина упростится и прояснится, если мы отбросим излишние предположения и будем формулировать и доказывать теоремы в разумной общности.

Наши функции будут определены в метрических пространствах, выбор которых будет надлежащим образом уточняться в различных примерах.

Предел функции

4.1. Определение. Пусть X и Y — метрические пространства. Пусть $E \subset X$, f отображает E в Y, а p — предельная точка множества E. Мы будем писать «$f(x) \to q$ при $x \to p$», или

(1)
$$\lim_{x\to p} f(x) = q,$$

если существует точка $q \in Y$, обладающая следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

(2)
$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon$$

для любых точек $x \in E$, для которых

(3)
$$0 < d_X(x, p) < \delta.$$

Символы d_X и d_Y относятся к расстояниям соответственно в пространствах X и Y.

Если X и (или) Y заменяются вещественной прямой, комплексной плоскостью или каким-нибудь евклидовым пространством R^k, то расстояния d_X, d_Y, конечно, заменяются абсолютными величинами или соответствующими нормами (см. п. 2.18).

Следует отметить, что $p \in X$, но точка p не обязана принадлежать множеству E в предыдущем определении. Более того, даже если $p \in E$, то вполне возможно, что $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$.

Этому определению можно придать другую форму, высказав его в терминах последовательностей.

4.2. Теорема. *Пусть X, Y, E, f и p — те же, что и в определении* 4.1. *Тогда*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4}$$

в том и только в том случае, когда

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \tag{5}$$

для любой последовательности $\{p_n\}$, такой, что

$$p_n \neq p, \quad \lim_{n \to \infty} p_n = p, \quad p_n \in E \text{ при всех } n. \tag{6}$$

Доказательство. Допустим, что выполнено равенство (4). Выберем какую-нибудь последовательность $\{p_n\}$, удовлетворяющую условию (6). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$, если $x \in E$ и $0 < d_X(p, x) < \delta$. Кроме того, существует N, такое, что при $n > N$ имеем $0 < d_X(p_n, p) < \delta$. Таким образом, при $n > N$ имеем $d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon$, откуда следует, что выполнено равенство (5).

Обратно, допустим, что (4) неверно. Тогда существует число $\varepsilon > 0$, такое, что для каждого $\delta > 0$ найдется точка $x \in E$ (зависящая от δ), для которой $d_Y(f(x), q) \geqslant \varepsilon$, но $0 < d_X(x, p) < \delta$. Выбирая $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), мы найдем последовательность, удовлетворяющую условию (6), для которой равенство (5) не выполняется.

Следствие. *Если f имеет предел в точке p, то этот предел единственный.*

Это следует из теорем 3.2 (b) и 4.2.

4.3. Определение. Пусть на E определены две комплексные функции f и g. Символом $f + g$ обозначается функция, сопоставляющая каждой точке x множества E число $f(x) + g(x)$. Подобным образом мы определим разность $f - g$, произведение fg и отношение f/g двух функций, имея в виду, что отношение определено лишь в тех точках $x \in E$, в которых $g(x) \neq 0$. Если f сопоставляет каждой точке x множества E одно и то же число c, то f называется постоянной функцией, или просто постоянной, и мы будем писать в этом случае $f=c$. Если f и g — вещественные функции и если $f(x) \geqslant g(x)$ при каждом $x \in E$, то мы иногда для краткости будем писать $f \geqslant g$.

Аналогично, если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ отображают E в R^k, то мы определим $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ равенствами $(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x)$, $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)$, и если λ — вещественное число, то $(\lambda\mathbf{f})(x)=\lambda\mathbf{f}(x)$.

4.4. Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, $E \subset X$, p — предельная точка множества E, f и g — комплексные функции на E и*

$$\lim_{x\to p} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to p} g(x)=B.$$

Тогда

(*a*) $\lim\limits_{x\to p}(f+g)(x)=A+B$;

(*b*) $\lim\limits_{x\to p}(fg)(x)=AB$;

(*c*) $\lim\limits_{x\to p}(f/g)(x)=A/B$, *если* $B\neq 0$.

Доказательство. Эти утверждения, в силу теоремы 4.3, немедленно следуют из аналогичных свойств последовательностей (теорема 3.3).

Замечание. Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ отображают E в R^k, то (*a*) остается верным, а (*b*) принимает вид

(*b*') $\lim\limits_{x\to p}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(ср. с теоремой 3.4).

Непрерывные функции

4.5. Определение. Пусть X и Y — метрические пространства, $E \subset X$, $p \in E$ и f отображает E в Y. Тогда функция f называется *непрерывной в точке* p, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что

$$d_Y(f(x),\ f(p))<\varepsilon$$

для всех точек $x \in E$, для которых $d_X(x, p)<\delta$.

Если f непрерывна в каждой точке множества E, то f называется *непрерывной на* E.

Для того чтобы быть непрерывным в точке p, отображение должно быть определено в этой точке. (Ср. это с замечанием, следующим за определением 4.1.)

Если p — изолированная точка множества E, то из нашего определения следует, что каждая функция f, определенная на E, непрерывна в точке p. Действительно, каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать $\delta > 0$, такое, что единственной точкой $x \in E$, для которой $d_X(x, p) < \delta$, окажется $x = p$; тогда

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon.$$

4.6. Теорема. *В ситуации, описанной в определении 4.5, предположим, что p — предельная точка множества E. Функция f непрерывна в точке p тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

Доказательство. Это становится ясным, если сравнить определения 4.1 и 4.5.

Теперь перейдем к сложным функциям. Краткая формулировка следующей теоремы такова: непрерывная функция от непрерывной функции непрерывна.

4.7. Теорема. *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, $E \subset X$, f отображает множество E в Y, g отображает множество значений f, а именно $f(E)$, в Z и h — отображение множества E в Z, определенное равенством*

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in E).$$

Если f непрерывно в точке $p \in E$, а g непрерывно в точке $f(p)$, то h непрерывно в точке p.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку g непрерывно в точке $f(p)$, существует $\eta > 0$, такое, что

$$d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon, \text{ если } d_Y(y, f(p)) < \eta \text{ и } y \in f(E).$$

Поскольку f непрерывно в точке p, существует $\delta > 0$, такое, что

$$d_Y(f(x), f(p)) < \eta, \text{ если } d_X(x, p) < \delta \text{ и } x \in E.$$

Следовательно,

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon,$$

если $d_X(x, p) < \delta$ и $x \in E$. Таким образом, h непрерывно в точке p.

4.8. Теорема. *Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно на X тогда и только тогда, когда множество $f^{-1}(V)$ открыто в X для каждого открытого множества V из Y.*

(Прообразы были определены в п. 2.4.) Это очень полезное свойство, характеризующее непрерывность.

Доказательство. Допустим, что f непрерывно на X; пусть V — открытое множество в Y. Мы должны показать, что каждая точка множества $f^{-1}(V)$ является его внутренней точкой. Итак, пусть $p \in X$ и $f(p) \in V$. Поскольку V открыто, существует $\varepsilon > 0$, такое, что $y \in V$, если $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$, а так как f непрерывно в точке p, то существует $\delta>0$, такое, что $d_Y(f(x), f(p))<\varepsilon$, если $d_X(x, p)<\delta$. Таким образом, $x\in f^{-1}(V)$, как только $d_X(x, p)<\delta$.

Обратно, допустим, что множество $f^{-1}(V)$ открыто в X, каково бы ни было открытое множество V в Y. Зафиксируем $p\in X$ и $\varepsilon>0$, и пусть V — множество всех $y\in Y$, таких, что $d_Y(y, f(p))<\varepsilon$. Тогда V открыто, а поэтому и $f^{-1}(V)$ открыто; значит, существует $\delta>0$, такое, что $x\in f^{-1}(V)$, как только $d_X(p, x)<\delta$. Но если $x\in f^{-1}(V)$, то $f(x)\in V$, так что $d_Y(f(x), f(p))<\varepsilon$.

Доказательство закончено.

Обратимся теперь к комплекснозначным и векторнозначным функциям и к функциям, определенным на подмножествах пространства R^k.

4.9. Теорема. *Пусть f и g — комплексные непрерывные функции на метрическом пространстве X. Тогда $f+g$, fg и f/g непрерывны на X.*

В последнем случае мы должны, конечно, предполагать, что $g(x)\neq 0$ при всех $x\in X$.

Доказательство. В случае изолированной точки доказывать нечего. В случае предельной точки утверждение следует из теорем 4.4 и 4.6.

4.10. Теорема. (*a*) *Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — вещественные функции на метрическом пространстве X, и пусть $\mathbf{f}$ — отображение пространства X в R^k, определенное равенством*

$$\mathbf{f}(x)=(f_1(x), \ldots, f_k(x)) \qquad (x\in X). \tag{7}$$

Отображение $\mathbf{f}$ непрерывно тогда и только тогда, когда каждая из функций $f_1, \ldots, f_k$ непрерывна.

(*b*) *Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — непрерывные отображения пространства X в R^k, то $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ непрерывны на X.*

Функции $f_1, \ldots, f_k$ называются *компонентами* отображения $\mathbf{f}$. Отметим, что $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ — отображение в R^k, тогда как $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ — *вещественная функция* на X.

Доказательство. Утверждение части (*a*) следует из неравенств

$$|f_j(x)-f_j(y)|\leqslant|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(y)|=\left\{\sum_{i=1}^{k}|f_i(x)-f_i(y)|^2\right\}^{1/2}$$

при $j=1, \ldots, k$. Часть (*b*) следует из (*a*) и теоремы 4.9.

4.11. Примеры. Если $x_1, \ldots, x_k$ — координаты точки $\mathbf{x}\in R^k$, то функции φ_i, определенные равенствами

$$\varphi_i(\mathbf{x})=x_i \qquad (\mathbf{x}\in R^k), \tag{8}$$

непрерывны на R^k, так как неравенство

$$|\varphi_i(\mathbf{x})-\varphi_i(\mathbf{y})|\leqslant|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

показывает, что в определении 4.3 можно положить $\delta=\varepsilon$. Функции φ_i иногда называются *координатными функциями.*

Повторное применение теоремы 4.9 показывает, что каждый одночлен

$$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}, \tag{9}$$

где n_1 ..., n_k — неотрицательные целые числа, непрерывен в R^k.

То же верно в отношении функций, отличающихся от (9) постоянным множителем, так как постоянные, очевидно, непрерывны. Следовательно, каждый многочлен P, заданный равенством

$$P(\mathbf{x})=\sum c_{n_1}\ \ldotp_{n_k}x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}\qquad(\mathbf{x}\in R^k), \tag{10}$$

непрерывен на R^k. Здесь коэффициенты $c_{n_1\ldots n_k}$ — комплексные числа, $n_1, \ldots, n_k$ — неотрицательные целые числа, а сумма содержит конечное число слагаемых.

Далее, всякая рациональная функция от $x_1, \ldots, x_k$, т. е. каждое отношение двух многочленов вида (10), непрерывна на R^k всюду, где знаменатель отличен от нуля.

Из неравенства треугольника легко получаем, что

$$||\mathbf{x}|-|\mathbf{y}||\leqslant|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\qquad(\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^k). \tag{11}$$

Значит, отображение, ставящее в соответствие каждому $\mathbf{x}$ величину $|\mathbf{x}|$, является непрерывной вещественной функцией на R^k.

Если $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение метрического пространства X в пространство R^k и если φ определено на X равенством $\varphi(p)=|\mathbf{f}(p)|$, то из теоремы 4.7 следует, что φ — непрерывная вещественная функция на X.

4.12. Замечание. Мы определили понятие непрерывности для функций, заданных на *подмножестве* E метрического пространства X. Однако дополнение множества E в X не играет никакой роли в этом определении, в отличие от определения пределов функций. Тем самым мы можем говорить о непрерывных отображениях одного метрического пространства в другое (а не об отображениях подмножеств). Это упрощает формулировки и доказательства некоторых теорем. Мы уже воспользовались этим в теоремах 4.8 — 4.10 и будем поступать так же в разделах, посвященных компактности и связности.

Непрерывность и компактность

4.13. Определение. Отображение $\mathbf{f}$ множества E в пространство R^k называется *ограниченным*, если существует вещественное число M, такое, что $|\mathbf{f}(x)| \leqslant M$ для всех $x \in E$.

4.14. Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда множество $f(X)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие множества $f(X)$. Поскольку f непрерывно, теорема 4.8 показывает, что все множества $f^{-1}(V_\alpha)$ открыты. Так как X компактно, имеется конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такой, что

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}). \tag{12}$$

Поскольку $f(f^{-1}(E)) = E$ при каждом $E \subset Y$, из (12) следует, что

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}. \tag{13}$$

Доказательство закончено.

Замечание. Мы воспользовались соотношением $f(f^{-1}(E)) = E$, которое верно при $E \subset Y$. Если $E \subset X$, то можно утверждать лишь, что $f^{-1}(f(E)) \supset E$; равенства может и не быть.

Выведем теперь некоторые следствия из теоремы 4.14.

4.15. Теорема. *Если $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в пространство R^k, то множество $\mathbf{f}(X)$ замкнуто и ограничено. Таким образом, отображение $\mathbf{f}$ ограничено.*

Это следует из теоремы 2.41. Этот результат особенно важен тогда, когда f — вещественная функция.

4.16. Теорема. *Пусть f — непрерывная вещественная функция на компактном метрическом пространстве X и*

$$M = \sup_{p \in X} f(p), \qquad m = \inf_{p \in X} f(p). \tag{14}$$

Тогда существуют точки $p, q \in X$, такие, что $f(p) = M$ и $f(q) = m$.

Обозначения в (14) имеют следующий смысл: M — верхняя грань множества всех чисел $f(p)$, когда p пробегает X, а m — нижняя грань этого числового множества.

Утверждение теоремы можно сформулировать и так: *существуют точки p и q в X, такие, что $f(q) \leqslant f(x) \leqslant f(p)$ для всех* $x \in X$, т. е. функция f достигает своего максимума (в точке p) и минимума (в точке q).

Доказательство. По теореме 4.15 $f(X)$ — ограниченное и замкнутое множество вещественных чисел; значит, $f(X)$ содержит свою верхнюю и нижнюю грани (теорема 2.28).

4.17. Теорема. *Пусть f — непрерывное взаимно однозначное отображение компактного метрического пространства X на метрическое пространство Y. Тогда обратное отображение f^{-1}, определенное на Y равенством*

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad (x \in X),$$

есть непрерывное отображение множества Y на X.

Доказательство. Применяя теорему 4.8 к f^{-1} вместо f, мы видим, что достаточно доказать, что $f(V)$ — открытое множество в Y для каждого открытого в X множества V. Зафиксируем такое множество V.

Дополнение V^c множества V замкнуто в X и, следовательно, компактно (теорема 2.35); значит, $f(V^c)$ — компактное подмножество множества Y (теорема 4.14); поэтому оно замкнуто в Y (теорема 2.34). Поскольку f взаимно однозначно отображает X на Y, множество $f(V)$ совпадает с дополнением множества $f(V^c)$. Значит, $f(V)$ открыто.

4.18. Определение. Пусть f — отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y. Мы будем говорить, что отображение f *равномерно непрерывно* на X, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon \tag{15}$$

для всех p и q из X, для которых $d_X(p, q) < \delta$.

Посмотрим, чем отличаются понятия непрерывности и равномерной непрерывности. Во-первых, равномерная непрерывность есть свойство функции на множестве, тогда как непрерывность может быть определена в одной точке. Бессмысленно спрашивать, является ли данная функция равномерно непрерывной в некоторой точке. Во-вторых, если f непрерывна на X, то для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки p множества X можно найти число $\delta > 0$, обладающее свойством, указанным в определении 4.5. Это δ зависит от ε *и от* p. Если же f равномерно непрерывна на X, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти *одно* число $\delta > 0$, которое годится для *всех* точек p множества X.

Очевидно, каждая равномерно непрерывная функция непрерывна. В случае компактных множеств эти два понятия, как показывает следующая теорема, равносильны.

4.19. Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда f равномерно непрерывно на X.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывно, каждой точке $p \in X$ можно сопоставить положительное число $\varphi(p)$, такое, что

(16) если $q \in X$, $d_X(p, q) < \varphi(p)$, то $d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $J(p)$ — множество всех $q \in X$, для которых

$$d_X(p, q) < \frac{1}{2}\varphi(p). \tag{17}$$

Поскольку $p \in J(p)$, семейство всех множеств $J(p)$ образует открытое покрытие пространства X, а поскольку пространство X компактно, в нем найдется конечное множество точек $p_1, \ldots, p_n$, такое, что

$$X \subset J(p_1) \cup \ldots \cup J(p_n). \tag{18}$$

Положим

$$\delta = \frac{1}{2}\min[\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)]. \tag{19}$$

Тогда $\delta > 0$. (Именно здесь существенна конечность покрытия, упоминаемого в определении компактности. Минимум конечного числа положительных чисел положителен, тогда как нижняя грань бесконечного множества положительных чисел вполне может оказаться равной нулю.)

Пусть теперь q и p — точки множества X, такие, что $d_X(p, q) < \delta$. Согласно (18), существует целое m, $1 \leqslant m \leqslant n$, такое, что $p \in J(p_m)$. Значит,

$$d_X(p, p_m) < \frac{1}{2}\varphi(p_m) \tag{20}$$

и, кроме того,

$$d_X(q, p_m) \leqslant d_X(p, q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{1}{2}\varphi(p_m) \leqslant \varphi(p_m).$$

Наконец, из (16) следует, что тогда

$$d_Y(f(p), f(q)) \leqslant d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon.$$

Доказательство закончено.

Другое доказательство намечено в упражнении 19.

Теперь мы перейдем к доказательству того, что компактность существенна в предположениях теорем 4.14, 4.15, 4.16 и 4.19.

4.20. Теорема. *Пусть E — некомпактное множество в R^1. Тогда*

(*a*) *существует неограниченная функция, непрерывная на E;*

(*b*) *существует ограниченная функция, непрерывная на E, не имеющая максимума.*

(*c*) *Если, кроме того, множество E ограничено, то существует непрерывная на E функция, не являющаяся равномерно непрерывной.*

Доказательство. Допустим сначала, что E ограничено, так что существует предельная точка x_0 множества E, не содержащаяся в E.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{x-x_0} \qquad (x\in E). \tag{21}$$

Эта функция непрерывна на E (теорема 4.9), но, очевидно, не ограничена. Убедимся в том, что функция (21) не является равномерно непрерывной. Пусть $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ произвольны. Выберем точку $x\in E$, такую, что $|x-x_0|<\delta$. Взяв t достаточно близким к x_0, мы можем сделать разность $|f(t)-f(x)|$ больше ε, хотя $|t-x|<\delta$. Поскольку это верно при любом $\delta>0$, функция f не является равномерно непрерывной на E.

Функция g, заданная равенством

$$g(x)=\frac{1}{1+(x-x_0)^2} \qquad (x\in E), \tag{22}$$

непрерывна на E и ограничена, так как $0<g(x)<1$. Ясно, что

$$\sup_{x\in E} g(x)=1,$$

тогда как $g(x)<1$ при всех $x\in E$. Таким образом, g не имеет максимума на E.

Доказав теорему для ограниченных множеств E, предположим, что E не ограничено. Тогда свойство (*a*) выполняется для функции $f(x)=x$, а свойство (*b*) — для функции

$$h(x)=\frac{x^2}{1+x^2} \qquad (x\in E), \tag{23}$$

так как

$$\sup_{x\in E} h(x)=1$$

и $h(x)<1$ при всех $x\in E$.

Утверждение (*c*) неверно, если не предполагать, что множество E ограничено. Действительно, пусть E — множество всех целых чисел. Тогда любая функция, заданная на E, равномерно непрерывна на E. Чтобы убедиться в этом, нужно всего лишь взять $\delta<1$ в определении 4.18.

В заключение этого раздела мы покажем, что компактность существенна также и в теореме 4.17.

4.21. Пример. Пусть X — полуинтервал $[0, 2\pi)$ вещественной оси и пусть $\mathbf{f}$ — отображение множества X на окружность Y, состоящую из всех точек, удаленных от начала на расстояние 1, заданное равенством

(24) $$\mathbf{f}(t)=(\cos t,\ \sin t) \quad (0\leqslant t<2\pi).$$

Непрерывность тригонометрических функций (косинуса и синуса), так же как и их периодичность, будут установлены в главе 8. Принимая эти факты без доказательства, легко видеть, что $\mathbf{f}$ — непрерывное взаимно однозначное отображение множества X на Y.

Однако обратное отображение (которое существует, так как $\mathbf{f}$ взаимно однозначно отображает X *на* Y) не непрерывно в точке $(1,0)=\mathbf{f}(0)$. Конечно, в этом примере X не компактно. (Любопытно, что $\mathbf{f}^{-1}$ не непрерывно, несмотря на то, что Y компактно!)

Непрерывность и связность

4.22. Теорема. *Если f — непрерывное отображение связного метрического пространства X в метрическое пространство Y, то множество $f(X)$ связно.*

Доказательство. Если $f(X)$ несвязно, то существуют открытые непересекающиеся множества V и W в Y, оба пересекающиеся с $f(X)$ и такие, что $f(X)\subset W\cup V$. Поскольку f непрерывно, множества $f^{-1}(V)$ и $f^{-1}(W)$ открыты в X; они, очевидно, непусты и не пересекаются, а их объединение равно X. Но это значит, что X несвязно, вопреки предположению.

4.23. Теорема. *Пусть f — непрерывная вещественная функция на сегменте $[a, b]$. Если $f(a)<f(b)$ и если c — такое число, что $f(a)<c<f(b)$, то существует точка $x\in(a, b)$, такая, что $f(x)=c$.*

Аналогичное утверждение справедливо, разумеется, и тогда, когда $f(a)>f(b)$. Грубо говоря, эта теорема означает, что непрерывная вещественная функция принимает на сегменте все промежуточные значения.

Доказательство. По теореме 2.47 сегмент $[a, b]$ связен. Значит, по теореме 4.22, $f([a, b])$ — связное подмножество пространства R^1, и остается еще раз сослаться на теорему 2.47, чтобы наше утверждение было доказано.

4.24. Замечание. На первый взгляд может показаться, что верна теорема, обратная к теореме 4.23. Иначе говоря, можно подумать, что если для любых двух точек $x_1<x_2$ и для любого числа c, лежащего между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, найдется точка $x\in(x_1, x_2)$, такая, что $f(x)=c$, то функция f должна быть непрерывной. Однако пример 4.27 (d) показывает, что это не так.

Разрывы функций

Если x — точка из области определения функции f, в которой эта функция не является непрерывной, то мы будем говорить, что f *разрывна* в x или что f *имеет разрыв* в x. Если функция f определена на интервале или на сегменте, то удобно выделить разрывы двух типов. Прежде чем произвести эту классификацию, мы должны определить *правосторонний* и *левосторонний* пределы функции f в точке x, которые мы обозначим соответственно через $f(x+)$ и $f(x-)$.

4.25. Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b). Рассмотрим любую точку x, такую, что $a \leqslant x < b$. Мы будем писать

$$f(x+) = q,$$

если $f(t_n) \to q$ при $n \to \infty$ для всех последовательностей $\{t_n\}$, содержащихся в интервале (x, b), таких, что $t_n \to x$. Чтобы получить определение предела $f(x-)$ (в случае $a < x \leqslant b$), мы ограничимся последовательностями $\{t_n\}$, содержащимися в (a, x).

Ясно, что в любой точке интервала (a, b) предел $\lim\limits_{t \to x} f(t)$ существует тогда и только тогда, когда

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t \to x} f(t).$$

4.26. Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b). Если f разрывна в точке x и если $f(x+)$ и $f(x-)$ существуют, то говорят, что f имеет в точке x разрыв *первого рода*, или *простой разрыв*. В противном случае разрыв называется разрывом *второго рода*.

Возможны две разновидности простых разрывов: либо $f(x+) \neq f(x-)$ (в этом случае значение $f(x)$ несущественно), либо $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

4.27. Примеры. (a) Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ рационально}), \\ 0 & (x \text{ иррационально}). \end{cases}$$

Тогда f имеет разрывы второго рода во всех точках x, так как ни $f(x+)$, ни $f(x-)$ не существуют.

(b) Положим

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ рационально}), \\ 0 & (x \text{ иррационально}). \end{cases}$$

Тогда f непрерывна в точке $x=0$ и имеет разрывы второго рода во всех остальных точках.

(c) Положим

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-3<x<-2), \\ -x-2 & (-2\leqslant x<0), \\ x+2 & (0\leqslant x<1). \end{cases}$$

Тогда f имеет простой разрыв в точке $x=0$ и непрерывна во всех остальных точках интервала $(-3,1)$.

(d) Положим

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0). \end{cases}$$

Поскольку ни $f(0+)$, ни $f(0-)$ не существуют, функция f имеет разрыв второго рода в точке $x=0$. Мы еще не доказали, что $\sin x$ — непрерывная функция. Если считать это утверждение верным, то из теоремы 4.7 следует, что f непрерывна в каждой точке $x\neq 0$.

Монотонные функции

Теперь мы изучим функции, которые нигде не убывают (или нигде не возрастают) на данном интервале.

4.28. Определение. Пусть f — вещественная функция на интервале (a, b). Говорят, что f *монотонно возрастает* на (a, b), если при $a<x<y<b$ имеем $f(x)\leqslant f(y)$. Обращая последнее неравенство, мы получим определение *монотонно убывающей* функции. Класс монотонных функций состоит из убывающих и из возрастающих функций.

4.29. Теорема. *Пусть f монотонно возрастает на интервале (a, b). Тогда $f(x+)$ и $f(x-)$ существуют в каждой точке $x\in(a, b)$. Точнее,*

$$\sup_{a<t<x} f(t)=f(x-)\leqslant f(x)\leqslant f(x+)=\inf_{x<t<b} f(t). \tag{25}$$

Кроме того, если $a<x<y<b$, то

$$f(x+)\leqslant f(y-). \tag{26}$$

Аналогичные результаты, очевидно, верны и для монотонно убывающих функций.

Доказательство. По предположению, множество чисел $f(t)$, где $a<t<x$, ограничено сверху числом $f(x)$ и потому

имеет верхнюю грань, которую мы обозначим через A. Очевидно, что $A \leqslant f(x)$. Мы должны показать, что $A = f(x-)$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из определения числа A следует, что существует число $\delta > 0$, такое, что $a < x - \delta < x$ и

$$A - \varepsilon < f(x-\delta) \leqslant A. \tag{27}$$

Поскольку f монотонна, имеем

$$f(x-\delta) \leqslant f(t) \leqslant A \qquad (x-\delta < t < x). \tag{28}$$

Комбинируя неравенства (27) и (28), мы получаем

$$|f(t) - A| < \varepsilon \qquad (x-\delta < t < x).$$

Значит, $f(x-) = A$.

Вторая часть неравенства (25) доказывается точно таким же способом.

Далее, если $a < x < y < b$, то из (25) следует, что

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t). \tag{29}$$

Последнее равенство получится, если применить (25) к (a, y) вместо (a, b).

Подобным же образом

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t). \tag{30}$$

Сравнение равенств (29) и (30) дает неравенство (26).

Следствие. *Монотонная функция не имеет разрывов второго рода.*

Из этого следствия вытекает, что монотонная функция может иметь разрывы только в конечном или счетном множестве точек. Вместо того чтобы сослаться на общую теорему, доказательство которой намечено в упражнении 4, мы дадим здесь простое доказательство, применимое к монотонным функциям.

4.30. Теорема. *Пусть функция f монотонна на интервале (a, b). Тогда множество точек интервала (a, b), в которых f разрывна, не более чем счетно.*

Доказательство. Допустим для определенности, что f возрастает, и пусть E — множество точек, в которых f разрывна.

Каждой точке $x \in E$ сопоставим рациональное число $r(x)$, такое, что

$$f(x-) < r(x) < f(x+).$$

Ясно, что $r(x_1) \neq r(x_2)$, если $x_1 \neq x_2$, так как при $x_1 < x_2$ мы имеем $f(x_1+) \leqslant f(x_2-)$.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством E и подмножеством множества всех рациональных чисел. Это последнее множество, как мы знаем, счетно.

4.31. Замечание. Нужно отметить, что точки разрыва монотонной функции не обязаны быть изолированными. В самом деле, для любого счетного подмножества E интервала (a, b), которое может быть даже всюду плотным, можно построить функцию f, монотонную на (a, b), имеющую разрыв в каждой точке множества E и непрерывную во всех остальных точках интервала (a, b).

Чтобы доказать это, расположим точки множества E в последовательность $\{x_n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Пусть $\{c_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая, что ряд $\sum c_n$ сходится. Положим

$$f(x)=\sum_{x_n<x} c_n \qquad (a<x<b). \tag{31}$$

Для вычисления этой суммы нужно сложить все c_n, индексы которых таковы, что $x_n<x$. Если слева от x нет точек x_n, то сумма пуста и, следуя обычному соглашению, мы считаем ее равной нулю. Поскольку ряд (31) сходится абсолютно, порядок, в котором выписываются его члены, не существен.

Мы предоставляем читателю проверку следующих свойств функции f:

(*a*) f монотонно возрастает на (a, b);

(*b*) f разрывна в каждой точке множества E; действительно,

$$f(x_n+)-f(x_n-)=c_n;$$

(*c*) f непрерывна во всех остальных точках интервала (a, b).

Более того, нетрудно видеть, что $f(x-)=f(x)$ во всех точках интервала (a, b). Если функция f удовлетворяет этому условию, то мы будем говорить, что она непрерывна слева. Если бы в (31) суммирование производилось по всем индексам n, для которых $x_n\leqslant x$, то мы имели бы $f(x+)=f(x)$ во всех точках интервала (a, b), т. е. f была бы непрерывной справа.

Функции такого типа можно строить и другим методом; пример читатель найдет в упражнении 5 гл. 6.

Бесконечные пределы и пределы в бесконечности

Чтобы иметь возможность действовать в расширенной системе вещественных чисел, мы расширим рамки определения 4.1, сформулировав его в терминах окрестностей.

Для любого вещественного числа x мы уже определили окрестность x как любой интервал вида $(x-\delta, x+\delta)$.

4.32. Определение. При любом вещественном c множество всех вещественных чисел x, таких, что $x > c$, называется окрестностью точки $+\infty$ и обозначается $(c, +\infty)$. Аналогично, множество $(-\infty, c)$ называется окрестностью точки $-\infty$.

4.33. Определение. Пусть вещественная функция f определена на множестве E. Мы будем говорить, что

$$f(t) \to A \quad \text{при} \quad t \to x,$$

где A и x принадлежат расширенной системе вещественных чисел, если для любой окрестности U точки A существует окрестность V точки x, такая, что множество $V \cap E$ непусто и $f(t) \in U$ при всех $t \in V \cap E$, $t \neq x$.

Несложное рассуждение показывает, что это определение совпадает с определением 4.1, когда A и x вещественны.

Аналог теоремы 4.4 справедлив и в этом случае, и в его доказательстве не появляется ничего нового. Мы сформулируем его ради полноты.

4.34. Теорема. *Пусть f и g определены на E. Допустим, что*

$$f(t) \to A, \qquad g(t) \to B \text{ при } t \to x.$$

Тогда

(a) *если $f(t) \to A'$, то $A' = A$,*
(b) $(f+g)(t) \to A+B$,
(c) $(fg)(t) \to AB$,
(d) $(f/g)(t) \to A/B$,

если правые части в (b), (c) и (d) имеют смысл.

Напомним, что $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $A/0$ не определялись (см. определение 1.39).

Упражнения

1. Доказать, что функция f, заданная равенством

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$. Нарисовать график этой функции.

2. Пусть $[x]$ обозначает наибольшее из целых чисел, не превосходящих числа x, т. е. $[x]$ — такое целое число, что $x - 1 < [x] \leqslant x$; пусть $(x) = x - [x]$ обозначает дробную часть числа x. Какие разрывы имеют функции $[x]$ и (x)?

3. Пусть f — вещественная равномерно непрерывная функция на ограниченном множестве E в R^1. Доказать, что f ограничена на E.

4. Пусть f — вещественная функция, заданная на (a, b). Доказать, что множество точек, в которых f имеет простой разрыв, не более чем счетно.

Указание. Пусть E — множество, на котором $f(x-)<f(x+)$. Каждой точке x множества E сопоставим тройку (p, q, r) рациональных чисел, таких, что

(a) $f(x-)<p<f(x+)$,

(b) при $a<q<t<x$ имеем $f(t)<p$,

(c) при $x<t<r<b$ имеем $f(t)>p$.

Множество всех таких троек не более чем счетно. Показать, что каждой такой тройке отвечает не более одной точки множества E. Подобным образом следует действовать и в случае других типов простого разрыва.

5. Каждое рациональное число x можно записать в виде $x=m/n$, где $n>0$, m и n — взаимно простые целые числа. Если $x=0$, то мы полагаем $n=1$. Рассмотрим функцию f, заданную на R^1 равенством

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \text{ иррационально}), \\ \dfrac{1}{n} & \left(x=\dfrac{m}{n}\right). \end{cases}$$

Доказать, что f непрерывна в каждой иррациональной точке и имеет простой разрыв в каждой рациональной точке.

6. Пусть f — вещественная непрерывная функция, заданная на замкнутом множестве $E\subset R^1$. Доказать, что существует непрерывная вещественная функция g на R^1, такая, что $f(x)=g(x)$ при всех $x\in E$ (такая функция называется *непрерывным продолжением* функции f с множества E на R^1). Показать, что результат перестает быть верным, если опустить предположение замкнутости. Распространить результат на векторнозначные функции.

Указание. График функции g — прямолинейный отрезок над каждым из интервалов, составляющих дополнение множества E (ср. с упражнением 15, гл. 2). Результат остается верным, если R^1 заменить любым метрическим пространством, но доказательство уже не так просто.

7. Если функция f определена на E, то графиком f называется множество пар $(x, f(x))$, где $x\in E$. В частности, если E — множество вещественных чисел, а функция f вещественна, то графиком f служит некоторое подмножество плоскости.

Допустим, что E компактно. Доказать, что f непрерывна на E в том и только в том случае, когда ее график компактен.

8. Если $E \subset X$, а f — функция, заданная на X, то *сужением f на E* называется функция g, определенная на множестве E и такая, что $g(p) = f(p)$ при $p \in E$. Зададим в R^2 функции f и g равенствами: $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$,

$$f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4), \qquad g(x, y) = xy^2/(x^2 + y^6)$$

при $(x, y) \neq (0, 0)$. Доказать, что f ограничена на R^2, что g не ограничена в любой окрестности точки $(0, 0)$ и что f разрывна в точке $(0, 0)$; тем не менее сужения каждой из функций f и g на любую прямую в R^2 непрерывны!

9. Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y. Пусть E — замкнутое подмножество пространства Y. Доказать, что множество $f^{-1}(E)$ замкнуто в X.

10. Пусть f — непрерывная вещественная функция на метрическом пространстве X. Пусть $Z(f)$ (*нуль-множество* функции f) есть множество всех $p \in X$, в которых $f(p) = 0$. Доказать, что множество $Z(f)$ замкнуто.

11. Если E — непустое подмножество метрического пространства X, то определим расстояние от точки $x \in X$ до множества E равенством

$$\varrho_E(x) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

(*a*) Доказать, что $\varrho_E(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x принадлежит замыканию множества E.

(*b*) Доказать, что ϱ_E — равномерно непрерывная функция на X.

Указание. Мы имеем $\varrho_E(x_2) \leqslant d(x_2, y) \leqslant d(x_2, x_1) + d(x_1, y)$, так что

$$\varrho_E(x_2) \leqslant d(x_2, x_1) + \varrho_E(x_1).$$

12. Пусть K и F — непересекающиеся подмножества метрического пространства X, причем K компактно, F замкнуто. Доказать, что существует число $\delta > 0$, такое, что $d(p, q) > \delta$, если $p \in K$, $q \in F$.

Указание. Функция ϱ_F — положительная непрерывная функция на K.

Показать, что это утверждение может оказаться неверным, если ни одно из двух непересекающихся замкнутых множеств не компактно.

13. Пусть A и B — непустые непересекающиеся замкнутые множества в метрическом пространстве X. Положим

$$f(p) = \frac{\varrho_A(p)}{\varrho_A(p) + \varrho_B(p)} \qquad (p \in X).$$

Показать, что f — непрерывная функция на X, множество значений которой содержится в сегменте $[0, 1]$; что $f(p) = 0$ в точках множества A и только в них; что $f(p)=1$ в точках множества B и только в них. Тем самым установлено утверждение, обратное к теореме упражнения 10: каждое замкнутое множество $A\subset X$ является нуль-множеством для некоторой вещественной непрерывной функции f на X. Полагая

$$V=f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad W=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right),$$

показать, что V и W открыты, не пересекаются и $A\subset V$, $B\subset W$. (Таким образом, каждое из двух непересекающихся замкнутых множеств в метрическом пространстве может быть накрыто открытым множеством так, что и эти открытые множества не пересекаются. Это свойство метрических пространств называют *нормальностью*.)

14. Назовем отображение пространства X в пространство Y *открытым*, если $f(V)$ открыто в Y, каково бы ни было открытое множество V в X.

Доказать, что каждое непрерывное открытое отображение R^1 в R^1 монотонно.

15. Пусть f и g — непрерывные отображения метрического пространства X в метрическое пространство Y, и пусть E — всюду плотное подмножество из X. Доказать, что $f(E)$ плотно в $f(X)$. Доказать, что если $f(p)=g(p)$ при всех $p\in E$, то $f(p)=g(p)$ при всех $p\in X$. (Иными словами, непрерывное отображение определяется своими значениями на всюду плотном подмножестве своей области определения.)

16. Показать, что определение равномерной непрерывности можно следующим образом сформулировать, используя понятие диаметра множества: для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что $\operatorname{diam} f(E)<\varepsilon$ для любого $E\subset X$, для которого $\operatorname{diam} E<\delta$.

17. Пусть E — плотное подмножество метрического пространства X, и пусть f — равномерно непрерывная *вещественная* функция, заданная на E. Доказать, что f имеет непрерывное продолжение с E на X (по поводу терминологии см. упражнение 6). (Единственность следует из упражнения 15.)

Указание. Для каждой точки $p\in X$ и каждого положительного целого n пусть $V_n(p)$ — множество всех $q\in E$, таких, что $d(p, q)<1/n$. Воспользоваться упражнением 16 для доказательства того, что пересечение замыканий множеств $f(V_1(p))$, $f(V_2(p))$, ... состоит из единственной точки пространства R^1, которую мы обозначим через $g(p)$. Доказать, что функция g, определенная таким образом на X, и есть требуемое продолжение функции f.

Можно ли пространство значений R^1 заменить здесь пространством R^k? Любым компактным метрическим пространством? Любым полным метрическим пространством? Любым метрическим пространством?

18. Вещественная функция f, заданная на (a, b), называется *выпуклой*, если

$$f(\lambda x+(1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda) f(y)$$

при любых $a<x<b$, $a<y<b$, $0<\lambda<1$. Доказать, что каждая выпуклая функция непрерывна. Доказать, что каждая возрастающая выпуклая функция от выпуклой функции выпукла (например, если f выпукла, то e^f тоже выпукла).

19. Провести подробно следующий вариант доказательства теоремы 4.19: если f не равномерно непрерывна, то для некоторого $\varepsilon>0$ существуют две последовательности $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ в X, такие, что $d_X(p_n, q_n) \rightarrow 0$, но $d_Y(f(p_n), f(q_n))>\varepsilon$. Воспользоваться теоремой 2.37, чтобы получить противоречие.

ГЛАВА 5

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В этой главе (за исключением последнего раздела) мы будем заниматься только *вещественными* функциями, определенными на сегментах или интервалах. Это вызвано не просто соображениями удобства — при переходе от вещественных к векторнозначным функциям возникают значительные трудности. Дифференцирование функций, определенных в R^k, будет рассматриваться в главе 9.

Производная вещественной функции

5.1. Определение. Пусть f — вещественная функция, определенная на $[a, b]$. Взяв произвольное число $x \in [a, b]$, составим отношение

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (a < t < b,\ t \neq x) \tag{1}$$

и положим

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \varphi(t), \tag{2}$$

если этот предел существует, в соответствии с определением 4.1.

Таким образом, с функцией f связана функция f', область определения которой — множество всех точек x, в которых существует предел (2); функция f' называется *производной* функции f.

Если производная f' определена в точке x, то мы будем говорить, что функция f *дифференцируема* в точке x. Если f' определена в каждой точке некоторого множества $E \subset [a, b]$, то мы будем говорить, что f дифференцируема на E.

В формуле (2) можно брать правосторонний или левосторонний предел; это приводит к определению правосторонней и левосторонней производной. В частности, в концах сегмента a и b производная (если она существует) всегда является соответственно правосторонней и левосторонней. Мы, однако, не будем подробно рассматривать такие производные.

Если f определена на интервале (a, b) и если $a < x < b$, то $f'(x)$ определяется равенствами (1) и (2), как выше. Но $f'(a)$ и $f'(b)$ в этом случае не определены.

5.2. Теорема. *Пусть функция f определена на сегменте $[a, b]$. Если f дифференцируема в точке $x \in [a, b]$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. По теореме 4.4 при $t \to x$ мы имеем

$$f(t)-f(x)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot(t-x) \to f'(x)\cdot 0=0.$$

Теорема, обратная к только что доказанной, неверна. Легко построить непрерывные функции, не дифференцируемые в изолированных точках. В гл. 7 мы познакомимся даже с такой функцией, которая, будучи непрерывной на всей прямой, не дифференцируема ни в одной точке!

5.3. Теорема. *Пусть f и g определены на $[a, b]$ и дифференцируемы в точке $x \in [a, b]$. Тогда $f+g$, fg и f/g дифференцируемы в точке x и*

(a) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$;

(b) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$.

В утверждении (c) мы, разумеется, предполагаем, что $g(x) \neq 0$.

Доказательство. Утверждение (a) следует из теоремы 4.4. Пусть $h=fg$. Тогда

$$h(t)-h(x)=f(t)[g(t)-g(x)]+g(x)[f(t)-f(x)].$$

Если мы разделим это равенство на $t-x$ и заметим, что $f(t) \to f(x)$ при $t \to x$ (теорема 5.2), то получим (b). Наконец, пусть $h=f/g$. Тогда

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=\frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right].$$

Устремляя t к x и применяя теоремы 4.4 и 5.2, мы получаем (c).

5.4. Примеры. Производная каждой постоянной функции равна, очевидно, нулю. Если f определена равенством $f(x)=x$, то $f'(x)=1$. Повторное применение утверждений (b) и (c) последней теоремы показывает, что функция x^n дифференцируема и что ее производная равна nx^{n-1}, каково бы ни было целое n (если $n<0$, то мы должны ограничиться точками $x \neq 0$). Таким образом, любой многочлен дифференцируем. То же верно в отношении любой рациональной функции, если исключить точки, в которых обращается в нуль ее знаменатель.

Следующая теорема дает правило дифференцирования сложной функции. Более общий ее вариант встретится нам в гл. 9.

5.5. Теорема. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$, $f'(x)$ существует в некоторой точке $x \in [a, b]$, g определена на сегменте I, содержащем множество значений функции f, и g дифференцируема в точке $f(x)$. Если*

$$h(t) = g(f(t)) \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

то h дифференцируема в точке x и

(3) $$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$. По определению производной имеем

(4) $$f(t) - f(x) = (t - x)\,[f'(x) + u(t)],$$

(5) $$g(s) - g(y) = (s - y)\,[g'(y) + v(s)],$$

где $t \in [a, b]$, $s \in I$ и $u(t) \to 0$ при $t \to x$, $v(s) \to 0$ при $s \to y$. Пусть $s = f(t)$. Используя сначала (5), а затем (4), получим

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) = \\ &= [f(t) - f(x)] \cdot [g'(y) + v(s)] = \\ &= (t - x) \cdot [f'(x) + u(t)] \cdot [g'(y) + v(s)], \end{aligned}$$

или, если $t \neq x$,

(6) $$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = [g'(y) + v(s)] \cdot [f'(x) + u(t)].$$

Устремляя t к x, мы видим, что, в силу непрерывности функции f, $s \to y$, поэтому правая часть равенства (6) стремится к $g'(y)\, f'(x)$, откуда и следует (3).

5.6. Примеры. (*a*) Пусть функция f определена равенством

(7) $$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Будем считать доказанным, что производная функции $\sin x$ равна $\cos x$ (мы будем рассматривать тригонометрические функции в гл. 8). Тогда мы можем применить теоремы 5.3 и 5.5, если $x \neq 0$, и получить

(8) $$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$

В точке $x = 0$ эти теоремы уже не применимы, так как дробь $1/x$ там не определена, и мы сошлемся непосредственно на определение: при $t \neq 0$

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \sin\frac{1}{t}.$$

При $t \to 0$ это отношение не стремится ни к какому пределу, так что $f'(0)$ не существует.

(b) Пусть функция f определена равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases} \tag{9}$$

Как и выше, мы получаем

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{10}$$

При $x = 0$ мы вспомним определение и получим

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right| = \left|t\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant |t| \qquad (t \neq 0);$$

полагая $t \to 0$, мы видим, что

$$f'(0) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, функция f дифференцируема во всех точках x, но f' не является непрерывной функцией, так как $\cos(1/x)$ в (10) не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$.

Теоремы о среднем значении

5.7. Определение. Пусть f — вещественная функция, определенная на метрическом пространстве X. Будем говорить, что f имеет *локальный максимум* в точке $p \in X$, если существует $\delta > 0$, такое, что $f(q) \leqslant f(p)$ при всех $q \in X$, таких, что $d(p, q) < \delta$.

Локальные минимумы определяются сходным образом.

Наша следующая теорема лежит в основе многих применений дифференцирования.

5.8. Теорема. *Пусть функция f определена на сегменте $[a, b]$; если f имеет локальный максимум в точке $x \in (a, b)$ и если существует $f'(x)$, то $f'(x) = 0$.*

Аналогичное утверждение, относящееся к локальному минимуму, конечно, тоже верно.

Доказательство. Выберем δ в соответствии с определением 5.7, так что

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b.$$

Если $x-\delta<t<x$, то

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\geqslant 0.$$

Устремляя t к x, мы видим, что $f'(x)\geqslant 0$.

Если $x<t<x+\delta$, то

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leqslant 0,$$

откуда следует, что $f'(x)\leqslant 0$. Значит, $f'(x)=0$.

5.9. Теорема. *Если f и g — непрерывные вещественные функции на сегменте $[a, b]$, дифференцируемые на интервале (a, b), то существует точка $x\in(a, b)$, в которой*

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x)=[g(b)-g(a)]\,f'(x).$$

Заметим, что здесь не требуется дифференцируемость в точках a и b.

Доказательство. Положим

$$h(t)=[f(b)-f(a)]\,g(t)-[g(b)-g(a)]\,f(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b).$$

Функция h непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и

$$h(a)=f(b)\,g(a)-f(a)\,g(b)=h(b). \tag{12}$$

Для доказательства теоремы мы должны проверить, что $h'(x)=0$ при некотором $x\in(a, b)$.

Если h постоянна, то $h'(x)=0$ при любом $x\in(a, b)$. Если $h(t)>h(a)$ при некотором $t\in(a, b)$, то пусть x — та точка сегмента $[a, b]$, в которой h достигает своего максимума (теорема 4.16). В силу (12), $x\in(a, b)$, и теорема 5.8 показывает, что $h'(x)=0$. Если $h(t)<h(a)$ при некотором $t\in(a, b)$, то можно применить такое же рассуждение, выбрав в качестве x ту точку сегмента $[a, b]$, в которой h достигает своего минимума.

Эту теорему часто называют обобщенной теоремой о среднем значении; следующий ее частный случай называют теоремой о среднем значении.

5.10. Теорема. *Если f — вещественная непрерывная функция на $[a, b]$, дифференцируемая на (a, b), то существует точка $x\in(a, b)$, в которой*

$$f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(x).$$

Доказательство. Положим $g(x)=x$ в теореме 5.9.

5.11. Теорема. *Пусть функция f дифференцируема в интервале (a, b).*

(*a*) *Если* $f'(x) \geqslant 0$ *при всех* $x \in (a, b)$, *то* f *монотонно возрастает.*

(*b*) *Если* $f'(x) = 0$ *при всех* $x \in (a, b)$, *то* f *постоянна.*

(*c*) *Если* $f'(x) \leqslant 0$ *при всех* $x \in (a, b)$, *то* f *монотонно убывает.*

Доказательство. То, что все эти заключения справедливы, можно усмотреть из равенства

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x),$$

верного для любой пары чисел x_1, x_2, лежащих в (a, b) при *некотором* x, расположенном между x_1 и x_2.

Непрерывность производных

Мы уже видели [пример 5.6 (*b*)], что функция f может иметь производную f', которая существует во всех точках, но разрывна в некоторых точках. Однако не каждая функция может быть производной. В частности, производные, которые существуют в каждой точке некоторого сегмента, так же как и функции, непрерывные на сегменте, обладают следующим важным свойством: они принимают промежуточные значения (ср. с теоремой 4.23). Точная формулировка такова.

5.12. Теорема. *Пусть* f — *вещественная функция, дифференцируемая на* $[a, b]$, *и пусть* $f'(a) < \lambda < f'(b)$. *Тогда существует точка* $x \in (a, b)$, *такая, что* $f'(x) = \lambda$.

Подобный результат верен, конечно, и тогда, когда $f'(a) > f'(b)$.

Доказательство. Положим $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Если $a \leqslant t \leqslant c$, то пусть $\alpha(t) = a$, $\beta(t) = 2t - a$. Если $c \leqslant t \leqslant b$, то пусть $\alpha(t) = 2t - b$, $\beta(t) = b$. Тогда $a \leqslant \alpha(t) < \beta(t) \leqslant b$ в интервале (a, b). Положим

$$g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)} \qquad (a < t < b).$$

Тогда g непрерывна на (a, b), $g(t) \to f'(a)$ при $t \to a$, $g(t) \to f'(b)$ при $t \to b$ и поэтому из теоремы 4.23 [1]) следует, что $g(t_0) = \lambda$ при некотором $t_0 \in (a, b)$. Зафиксируем t_0. По теореме 5.10 существует точка x, такая, что $\alpha(t_0) < x < \beta(t_0)$ и $f'(x) = g(t_0)$. Значит, $f'(x) = \lambda$.

Следствие. *Если* f *дифференцируема на* $[a, b]$, *то* f' *не имеет простых разрывов на* $[a, b]$.

Однако f' вполне может иметь разрывы второго рода.

---

[1]) В теореме 4.23 речь идет о функции, непрерывной на *сегменте* $[a, b]$. Здесь имеется в виду, что функцию g можно доопределить в точках a и b, полагая $g(a) = f'(a)$, $g(b) = f'(b)$, так что g станет непрерывной и в точках a, b по теореме 4.6.—*Прим. перев.*

Правило Лопиталя

Следующая теорема часто бывает полезной при вычислении пределов.

5.13. Теорема. *Пусть f и g вещественны и непрерывны в интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Пусть*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad \text{при} \quad x \to a. \tag{13}$$

Если

$$f(x) \to 0 \quad \text{и} \quad g(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to a, \tag{14}$$

или если

$$g(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to a, \tag{15}$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \quad \text{при} \quad x \to a. \tag{16}$$

Аналогичное утверждение, конечно, верно и тогда, когда $x \to b$ или когда в (15) $g(x) \to -\infty$. Заметим, что сейчас мы используем понятие предела в расширенном смысле в соответствии с определением 4.33.

Доказательство. Сначала предположим, что $-\infty \leqslant A < +\infty$. Выберем вещественное число q, такое, что $A < q$, а затем выберем r так, чтобы выполнялось неравенство $A < r < q$. Согласно (13), существует точка $c \in (a, b)$, такая, что при $a < x < c$ имеем

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \tag{17}$$

Если $a < x < y < c$, то, как показывает теорема 5.9, существует точка $t \in (x, y)$, такая, что

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{18}$$

Допустим, что выполнено условие (14). Устремляя в (18) x к a, мы видим, что

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leqslant r < q \qquad (a < y < c). \tag{19}$$

Теперь допустим, что выполнено условие (15). Считая y в формуле (18) фиксированным, мы можем выбрать такую точку $c_1 \in (a, y)$, что $g(x) > g(y)$ и $g(x) > 0$, если $a < x < c_1$. Умножая (18) на $[g(x) - g(y)]/g(x)$, мы получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\,\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < c_1). \tag{20}$$

Если в (20) устремить x к a, то, как показывает (15), можно найти точку $c_2 \in (a, c_1)$, такую, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \qquad (a < x < c_2). \tag{21}$$

Итак, неравенства (19) и (21) показывают, что для любого q, подчиненного единственному условию $A < q$, найдется точка $c_2 \in (a, b)$, такая, что $f(x)/g(x) < q$, если $a < x < c_2$.

Точно таким же способом в том случае, когда $-\infty < A \leqslant \leqslant +\infty$, а p выбрано так, что $p < A$, мы найдем точку $c_3 \in (a, b)$, такую, что

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a < x < c_3). \tag{22}$$

Из этих двух утверждений следует соотношение (16).

Производные высших порядков

5.14. Определение. Если f имеет производную f' на некотором сегменте и если функция f' в свою очередь дифференцируема, то производную функции f' мы будем обозначать через f'' и называть второй производной функции f. Продолжая таким образом, мы получим функции

$$f,\ f',\ f'',\ f^{(3)},\ \ldots,\ f^{(n)},$$

каждая из которых служит производной для предшествующей. Функция $f^{(n)}$ называется n-й производной, или производной порядка n функции f.

Для того чтобы $f^{(n)}(x)$ существовала в точке x, производная $f^{(n-1)}(t)$ должна существовать в окрестности точки x (или в односторонней окрестности, если x является концом сегмента, на котором определена функция f) и должна быть дифференцируемой в точке x. При этом $f^{(n-2)}$ должна быть дифференцируемой в той окрестности точки x, в которой существует $f^{(n-1)}$.

Теорема Тейлора

5.15. Теорема. *Допустим, что f — вещественная функция на $[a, b]$, n — положительное целое число, $f^{(n-1)}$ непрерывна на $[a, b]$, $f^{(n)}(t)$ существует в любой точке $t \in (a, b)$. Пусть α, β — различные точки сегмента $[a, b]$. Положим*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t-\alpha)^k. \tag{23}$$

Тогда существует точка x, лежащая между α и β, такая, что

$$f(\beta)=P(\beta)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \tag{24}$$

При $n=1$ это утверждение превращается в теорему о среднем значении. В общем случае теорема показывает, что функцию f можно приблизить многочленом степени $n-1$; равенство (24) позволяет оценить погрешность, если известна верхняя граница величины $|f^n(x)|$.

Доказательство. Пусть M — число, определяемое равенством

$$f(\beta)=P(\beta)+M(\beta-\alpha)^n, \tag{25}$$

и пусть

$$g(t)=f(t)-P(t)-M(t-\alpha)^n \quad (a\leqslant t\leqslant b). \tag{26}$$

Мы должны показать, что $n!M=f^{(n)}(x)$ при некотором x, лежащем между α и β. Согласно (23) и (26),

$$g^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)-n!\,M \quad (a<t<b). \tag{27}$$

Значит, доказательство будет закончено, если мы проверим, что $g^{(n)}(x)=0$ при некотором x, лежащем между α и β.

Поскольку $P^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha)$ при $k=0, \ldots, n-1$, мы имеем

$$g(\alpha)=g'(\alpha)=\ldots=g^{(n-1)}(\alpha)=0. \tag{28}$$

Число M было выбрано так, что $g(\beta)=0$; поэтому, согласно теореме о среднем, $g'(x_1)=0$ при некотором x_1, лежащем между α и β. Так как $g'(\alpha)=0$, то подобным же образом мы заключаем, что $g''(x_2)=0$ при некотором x_2, лежащем между α и x_1. После n шагов мы придем к выводу, что $g^{(n)}(x_n)=0$ при некотором x_n, лежащем между α и x_{n-1}, т. е. между α и β.

Дифференцирование векторнозначных функций

5.16. Замечания. Определение 5.1 без всяких изменений применимо к комплексным функциям f, определенным на $[a, b]$. При этом теоремы 5.2 и 5.3 остаются верными, так же как и их доказательства. Если f_1 и f_2 — вещественная и мнимая части функции f, т. е. если $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ при $a\leqslant t\leqslant b$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ вещественны, то, очевидно,

$$f'(x)=f_1'(x)+if_2'(x), \tag{29}$$

причем f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда обе функции f_1 и f_2 дифференцируемы в этой точке.

Переходя к общим векторнозначным функциям, т. е. к функциям $\mathbf{f}$, отображающим $[a, b]$ в некоторое пространство R^k, мы все еще можем применить определение 5 1 для построения $\mathbf{f}'(x)$. Теперь $\varphi(t)$ в формуле (1) при каждом t является точкой пространства R^k, а предел в (2) вычисляется в смысле сходимости по норме этого пространства. Иными словами, $\mathbf{f}'(x)$ — это та точка пространства R^k (если она существует), для которой

$$\lim_{t\to x}\left|\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(x)}{t-x}-\mathbf{f}'(x)\right|=0, \tag{30}$$

и $\mathbf{f}'$ — снова функция со значениями в R^k.

Если $f_1, \ldots, f_k$ — компоненты функции $\mathbf{f}$, определенные в теореме 4.10, то

$$\mathbf{f}'=(f_1', \ldots, f_k'), \tag{31}$$

и функция $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда каждая из функций $f_1, \ldots, f_k$ дифференцируема в точке x.

Теорема 5.2 остается верной и в этом случае; то же относится и к теореме 5.3 (a) и (b), если fg заменить скалярным произведением $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ (см. определение 4.3).

Однако, когда мы обращаемся к теореме о среднем значении и к правилу Лопиталя, положение меняется. Следующие два примера показывают, что оба эти результата неверны уже для комплекснозначных функций.

5.17. Пример. Положим для вещественного x

$$f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x. \tag{32}$$

(Последнее выражение можно рассматривать как определение комплексной показательной функции e^{ix}. Эти функции будут подробно рассмотрены в гл. 8.) Тогда

$$f(2\pi)-f(0)=1-1=0, \tag{33}$$

но

$$f'(x)=ie^{ix}, \tag{34}$$

так что $|f'(x)|=1$ при всех вещественных x.

Таким образом, в этом случае теорема 5.10 уже неверна.

5.18. Пример. На интервале (0,1) зададим функции f, g, полагая $f(x)=x$ и

$$g(x)=x+x^2e^{i/x^2}. \tag{35}$$

Поскольку $|e^{it}|=1$ при всех вещественных t, мы видим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{36}$$

Далее,

$$(37)\qquad g'(x)=1+\left\{2x-\frac{2i}{x}\right\}e^{i/x^2}\qquad(0<x<1),$$

так что

$$(38)\qquad |g'(x)|\geqslant\left|2x-\frac{2i}{x}\right|-1\geqslant\frac{2}{x}-1.$$

Значит,

$$(39)\qquad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|=\frac{1}{|g'(x)|}\leqslant\frac{x}{2-x}$$

и поэтому

$$(40)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0.$$

Сопоставляя (40) с (36), мы видим, что правило Лопиталя в этом случае не действует. Отметим еще, что $g'(x)\neq 0$ на интервале $(0,1)$, в силу (38).

Однако имеется все-таки одно следствие теоремы о среднем значении, которое в приложениях почти так же полезно, как теорема 5.10, и которое остается верным для векторнозначных функций: из теоремы 5.10 следует, что

$$(41)\qquad |f(b)-f(a)|\leqslant(b-a)\sup_{a<x<b}|f'(x)|.$$

Прежде чем установить векторный аналог неравенства (41), мы приведем теорему, показывающую, что при вычислении производной можно пользоваться отношениями, отличными от тех, которые фигурировали в определении 5.1. Не ограничиваясь случаем $k=1$, рассмотрим общий случай.

5.19. Теорема. *Пусть $a<x<b$, функция $\mathbf{f}$ отображает $[a, b]$ в пространство R^k, и пусть $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке x. Пусть $a<\alpha_n<x<\beta_n<b$ при $n=1, 2, 3, \ldots$, и пусть $\alpha_n\to x$, $\beta_n\to x$. Тогда*

$$(42)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{f}(\beta_n)-\mathbf{f}(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\mathbf{f}'(x).$$

Доказательство. Положим $\lambda_n=(\beta_n-x)/(\beta_n-\alpha_n)$. Тогда $0<\lambda_n<1$, и вектор

$$(43)\qquad \frac{\mathbf{f}(\beta_n)-\mathbf{f}(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}-\mathbf{f}'(x)$$

при каждом n равен вектору

$$(44)\qquad \lambda_n\left\{\frac{\mathbf{f}(\beta_n)-\mathbf{f}(x)}{\beta_n-x}-\mathbf{f}'(x)\right\}+(1-\lambda_n)\left\{\frac{\mathbf{f}(\alpha_n)-\mathbf{f}(x)}{\alpha_n-x}-\mathbf{f}'(x)\right\}.$$

По определению 5.1, оба выражения в скобках стремятся к $\mathbf{0}$, и так как последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{1-\lambda_n\}$ ограничены, то вектор (44), а с ним и (43) стремится к нулю при $n \to \infty$. Равенство (42) доказано.

5.20. Теорема. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *непрерывное отображение сегмента* $[a, b]$ *в пространство* R^k, *дифференцируемое в интервале* (a, b). *Тогда существует точка* $x \in (a, b)$, *такая, что*

$$|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)| \leqslant (b-a)\,|\mathbf{f}'(x)|. \tag{45}$$

Доказательство. Положим $3L=b-a$, $M=|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|$ и

$$\mathbf{g}(s)=\mathbf{f}(s+L)-\mathbf{f}(s) \quad (a \leqslant s \leqslant a+2L). \tag{46}$$

Поскольку

$$\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)=\mathbf{g}(a)+\mathbf{g}(a+L)+\mathbf{g}(a+2L),$$

мы видим, что

$$M \leqslant |\mathbf{g}(a)|+|\mathbf{g}(a+L)|+|\mathbf{g}(a+2L)|. \tag{47}$$

Если бы оказалось, что $|\mathbf{g}(s)|<M/3$ при всех $s \in (a, a+2L)$, то из непрерывности отображения $\mathbf{g}$ следовало бы, что $|\mathbf{g}(a)| \leqslant M/3$, $|\mathbf{g}(a+2L)| \leqslant M/3$, и, значит, правая часть неравенства (47) была бы меньше M.

Следовательно, $|\mathbf{g}(s_1)| \geqslant M/3$ при некотором $s_1 \in (a, a+2L)$. Полагая $t_1=s_1+L$, мы находим, что $a<s_1<t_1<b$, $t_1-s_1=(b-a)/3$ и

$$|\mathbf{f}(t_1)-\mathbf{f}(s_1)| \geqslant \frac{M}{3}. \tag{48}$$

Повторим это построение, взяв $[s_1, t_1]$ вместо $[a, b]$. Продолжая таким образом, мы найдем две последовательности $\{s_n\}$, $\{t_n\}$, такие, что

$$t_n-s_n=3^{-n}(b-a), \tag{49}$$

каждый сегмент $I_n=[s_n, t_n]$ содержится внутри сегмента I_{n-1} и

$$|\mathbf{f}(t_n)-\mathbf{f}(s_n)| \geqslant 3^{-n}M. \tag{50}$$

Разделив (50) на (49), мы получим

$$\frac{|\mathbf{f}(t_n)-\mathbf{f}(s_n)|}{t_n-s_n} \geqslant \frac{|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|}{b-a} \quad (n=1, 2, 3, \ldots); \tag{51}$$

из теоремы 5.19 мы заключаем, что (45) выполнено для точки x, принадлежащей всем сегментам I_n [1]).

---

[1]) Вот другое, значительно более короткое доказательство теоремы 5.20. Рассмотрим числовую функцию φ, заданную на $[a, b]$ равенством: $\varphi(t)=(\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a))\cdot\mathbf{f}(t)$. К этой функции можно применить теорему о среднем значении: $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(x)\cdot(b-a)$, где x — некоторая точка интервала (a, b).

Упражнения

1. Пусть $f(x)=|x|^3$. Вычислить $f'(x)$, $f''(x)$ при всех вещественных x и показать, что $f^{(3)}(0)$ не существует.

2. Пусть f определена при всех вещественных x, и пусть

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$$

при всех вещественных x и y. Доказать, что f постоянна.

3. Пусть f определена в окрестности точки x, и пусть существует $f''(x)$. Показать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

Показать на примере, что этот предел может существовать и тогда, когда $f''(x)$ не существует.

4. Пусть

$$C_0+\frac{C_1}{2}+\ldots+\frac{C_{n-1}}{n}+\frac{C_n}{n+1}=0,$$

где $C_0, \ldots, C_n$ — вещественные постоянные. Доказать, что уравнение

$$C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n=0$$

имеет хотя бы один вещественный корень между 0 и 1.

5. Пусть f определена и дифференцируема при каждом $x>0$ и $f'(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Положим $g(x)=f(x+1)-f(x)$. Доказать, что $g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$.

6. Пусть

(a) f непрерывна при $x\geqslant 0$,

(b) $f'(x)$ существует при всех $x>0$,

(c) $f(0)=0$,

(d) f' монотонно возрастает.

Положим

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}\qquad(x>0).$$

Доказать, что g монотонно возрастает.

Теперь остается заметить, что $\varphi(b)-\varphi(a)=|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|^2$, а $\varphi'(x)=(\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a))\cdot\mathbf{f}'(x)$ (см. по этому поводу предпоследний абзац п. 5.16), и поэтому $|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|^2=(\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a))\cdot\mathbf{f}'(x)\cdot(b-a)$. Применяя к правой части этого равенства неравенство Шварца, получим

$$|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|^2\leqslant|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|\cdot|\mathbf{f}'(x)|(b-a).$$

Теорема доказана. — *Прим. перев.*

7. Пусть $f'(x)$, $g'(x)$ существуют, $g'(x) \neq 0$ и $f(x)=g(x)=0$. Доказать, что

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Это верно и для комплексных функций.)

8. Пусть $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Доказать, что f строго возрастает в интервале (a, b). Пусть g — функция, обратная к f. Доказать, что g дифференцируема и что

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (a < x < b).$$

9. Пусть f дифференцируема в интервале (a, b), $a < x < b$, $x < \alpha_n < \beta_n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $\alpha_n \to x$, $\beta_n \to x$. Показать, что отношения

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

не обязательно сходятся к $f'(x)$ при $n \to \infty$, но что они действительно сходятся к $f'(x)$, если мы дополнительно потребуем, чтобы последовательность $\{(\beta_n - x)/(\beta_n - \alpha_n)\}$ была ограниченной.

10. Пусть f и g — комплексные дифференцируемые функции на $(0, 1)$, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $f'(x) \to A$, $g'(x) \to B$ при $x \to 0$, где A и B — комплексные числа, $B \neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

(Ср. с примером 5.18.)

Указание:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{x} - A \right\} \cdot \frac{x}{g(x)} + A \cdot \frac{x}{g(x)}.$$

Применить теорему 5.13 к вещественной и мнимой частям дробей $f(x)/x$ и $g(x)/x$.

11. Сформулировать и доказать неравенство, которое следует из теоремы Тейлора и остается верным для векторнозначных функций.

12. Пусть E — замкнутое подмножество прямой R^1. В упражнении 13 гл. 4 было показано, что существует вещественная непрерывная функция в R^1, нуль-множество которой совпадает с E. Можно ли для каждого замкнутого множества E найти такую дифференцируемую на R^1 функцию f, для которой E служит нуль-множеством? Существует ли n раз дифференцируемая функция с таким свойством? Функция, которая имеет производные всех порядков на R^1?

13. Пусть g — вещественная функция на R^1, имеющая ограниченную производную (скажем, $|g'| \leqslant M$). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $f(x) = x + \varepsilon g(x)$. Доказать, что f взаимно однозначна, если число ε достаточно мало. (Можно определить множество допустимых ε, зависящее лишь от M.)

14. Пусть f — дважды дифференцируемая вещественная функция на $(0, \infty)$, и пусть M_0, M_1, M_2 — верхние границы соответственно функций $|f|$, $|f'|$, $|f''|$ на $(0, \infty)$. Доказать, что $M_1^2 \leqslant 4M_0M_2$.

Указание. Из теоремы Тейлора следует, что

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+2h) - f(x)] + hf''(\xi),$$

так что $|f'| \leqslant hM_2 + M_0/h$ при любом $h > 0$.

Можно ли этот результат распространить на векторнозначные функции?

15. Пусть f дважды дифференцируема на $(0, \infty)$, f'' ограничена на $(0, \infty)$ и $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Доказать, что $f'(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Указание. Применить упражнение 14 на (a, ∞).

Показать, что это утверждение становится неверным, если опустить предположение о f''.

16. Пусть f дифференцируема на $[a, b]$, $f(a) = 0$ и существует вещественное число A, такое, что $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$ на $[a, b]$. Доказать, что $f(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$.

Указание. Зафиксируем $x_0 \in [a, b]$, и пусть $M_0 = \sup|f(x)|$,

$$M_1 = \sup|f'(x)|$$

на сегменте $[a, x_0]$. Для любого $x \in [a, x_0]$

$$|f(x)| \leqslant M_1(x_0 - a) \leqslant A(x_0 - a)M_0.$$

Значит, $M_0 = 0$, если $A(x_0 - a) < 1$, т. е. $f = 0$ на $[a, x_0]$. Продолжить это рассуждение.

17. Пусть φ — вещественная функция, определенная в прямоугольнике R на плоскости, заданном неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. *Решением* задачи с начальными условиями

$$y' = \varphi(x, y), \qquad y(a) = c \qquad (\alpha \leqslant c \leqslant \beta)$$

называется дифференцируемая на $[a, b]$ функция f, такая, что $f(a) = c$ и

$$f'(x) = \varphi(x, f(x)) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доказать, что эта задача имеет не более одного решения, если существует число A, такое, что

$$|\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)| \leqslant A|y_2 - y_1|$$

для любых $(x, y_1) \in R$, $(x, y_2) \in R$.

Указание. Применить упражнение 16 к разности двух решений. Заметим, что эта теорема единственности неприменима к задаче с начальными условиями

$$y' = y^{1/2}, \qquad y(0) = 0,$$

которая имеет два решения: $f(x) = 0$ и $f(x) = x^2/4$. Имеются ли другие решения?

18. Сформулировать и доказать аналогичную теорему единственности для системы дифференциальных уравнений вида

$$y_j' = \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_k), \; y_j(a) = c_j \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Заметим, что эту систему можно записать в виде

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(a) = \mathbf{c},$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ пробегает k-мерную клетку, $\boldsymbol{\varphi}$ — отображение некоторой $(k+1)$-мерной клетки в евклидово пространство R^k, причем компонентами $\boldsymbol{\varphi}$ служат функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, а $\mathbf{c}$ — вектор $(c_1, \ldots, c_k)$. Воспользоваться упражнением 16 для векторнозначных функций.

19. Рассмотреть частный случай упражнения 18, перейдя к системе

$$y_j' = y_{j+1} \qquad (j = 1, \ldots, k-1),$$
$$y_k' = f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x) y_j,$$

где $f, g_1, \ldots, g_k$ — непрерывные вещественные функции на $[a, b]$, и получить теорему единственности для решений уравнения

$$y^k + g_k(x) y^{(k-1)} + \ldots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x),$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$y(a) = c_1, \quad y'(a) = c_2, \ldots, \quad y^{(k-1)}(a) = c_k.$$

20. Пусть f' непрерывна на $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует число $\delta > 0$, такое, что

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

если $0 < |t - x| < \delta$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$. (Это значит, иными словами, что f *равномерно дифференцируема* на $[a, b]$, если f' непрерывна на $[a, b]$.) Верно ли это для векторнозначных функций?

ГЛАВА 6

ИНТЕГРАЛ РИМАНА — СТИЛЬТЬЕСА

Основным в этой главе является определение интеграла Римана, явным образом использующее упорядоченность числовой прямой. В соответствии с этим мы начинаем с изучения интегрирования вещественнозначных функций на сегментах. В последующих разделах будет изложено обобщение на случай комплекснозначных и векторнозначных функций, заданных на сегменте. Интегрирование по множествам, отличным от сегментов, рассматривается в гл. 9 и 10.

Определение и существование интеграла

6.1. Определение. Пусть $[a, b]$ — заданный сегмент. Разбиением P сегмента $[a, b]$ мы называем конечное множество точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b.$$

Мы будем писать

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть теперь f — ограниченная вещественная функция, определенная на $[a, b]$. Каждому разбиению P сегмента $[a, b]$ соответствуют числа

$$M_i = \sup f(x) \qquad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i),$$

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i),$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

и, наконец,

$$\overline{\int} f\,dx = \inf U(P, f), \tag{1}$$

$$\underline{\int} f\,dx = \sup L(P, f), \tag{2}$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем разбиениям P сегмента $[a, b]$. Левые части равенств (1) и (2) называются соответственно верхним и нижним интегралами Римана функции f по сегменту $[a, b]$.

Если верхний интеграл равен нижнему, то мы будем говорить, что функция f интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$ и писать $f \in \mathscr{R}$ (иными словами, $\mathscr{R}$ обозначает множество всех функций, интегрируемых по Риману), а общее значение величин (1) и (2) будем обозначать

$$\int_a^b f\,dx, \tag{3}$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Это — интеграл Римана от функции f по сегменту $[a, b]$. Поскольку f ограничена, существуют два числа m и M, такие, что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Значит, при любом разбиении P

$$m(b-a) \leqslant L(P, f) \leqslant U(P, f) \leqslant M(b-a),$$

так что числа $L(P, f)$ и $U(P, f)$ образуют ограниченное множество. Это показывает, что *верхний и нижний интегралы определены для любой ограниченной функции* f. Вопрос об их совпадении и, значит, вопрос об интегрируемости функции f оказывается более тонким. Вместо того чтобы исследовать его отдельно для интеграла Римана, мы сейчас рассмотрим более общую ситуацию.

6.2. Определение. Пусть α — монотонно возрастающая функция на $[a, b]$ (поскольку $\alpha(a)$ и $\alpha(b)$ конечны, функция α ограничена на $[a, b]$). Если P — какое-нибудь разбиение сегмента $[a, b]$, то положим

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

Ясно, что $\Delta\alpha_i \geqslant 0$. Для любой вещественной функции f, ограниченной на $[a, b]$, положим

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i,$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

где M_i и m_i имеют тот же смысл, что и в определении 6.1. Положим, по определению,

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \tag{5}$$

$$\underline{\int} f\,d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \tag{6}$$

где верхняя и нижняя грани берутся снова по всем разбиениям.

Если левые части равенств (5) и (6) равны между собой, то их общее значение обозначается через

$$\int_a^b f\,d\alpha \tag{7}$$

или иногда через

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x). \tag{8}$$

Это — интеграл Римана — Стильтьеса (или просто интеграл Стильтьеса) от функции f относительно функции α по сегменту $[a, b]$.

Если интеграл (7) существует, т. е. если (5) и (6) равны между собой, то мы будем говорить, что f интегрируема относительно α в смысле Римана, и писать $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Полагая $\alpha(x) = x$, мы приходим к выводу, что интеграл Римана — это частный случай интеграла Римана — Стильтьеса. Подчеркнем, однако, что в общем случае функция α не обязана быть даже непрерывной.

Несколько слов по поводу обозначений. Мы предпочитаем обозначение (7) обозначению (8), так как фигурирующая в (8) буква x ничего не добавляет к содержанию записи (7). Совершенно несущественно, какую букву мы употребляем для обозначения так называемой «переменной интегрирования». Так, например, (8) — это то же самое, что

$$\int_a^b f(y)\,d\alpha(y).$$

Интеграл зависит от f, α, a и b, но не от переменной интегрирования, которую вполне можно опустить.

Роль переменной интегрирования совершенно аналогична роли индекса суммирования: два символа

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

означают одно и то же, а именно сумму $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$.

Разумеется, не произойдет ничего страшного, если переменная интегрирования будет написана, а в некоторых случаях даже удобно ее писать.

Теперь мы исследуем вопрос о существовании интеграла (7).

Не повторяя этого каждый раз, мы будем считать функцию f вещественной и ограниченной, а функцию α — монотонно возрастающей на $[a, b]$, и если исключена возможность недоразумений, мы будем писать $\int$ вместо $\int\limits_a^b$.

6.3. Определение. Мы будем говорить, что разбиение P^* является *измельчением* разбиения P, если $P^* \supset P$ (т. е. если каждая точка разбиения P служит также точкой разбиения P^*). В случае, когда заданы два разбиения P_1 и P_2, мы будем говорить, что P^* есть их общее измельчение, если $P^* = P_1 \cup P_2$.

6.4. Теорема. *Если P^* — измельчение разбиения P, то*

$$L(P, f, \alpha) \leqslant L(P^*, f, \alpha) \tag{9}$$

и

$$U(P^*, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha). \tag{10}$$

Доказательство. Чтобы доказать неравенство (9), допустим сначала, что P^* содержит ровно на одну точку больше, чем P. Обозначим эту новую точку через x^* и допустим, что $x_{i-1} < x^* < x_i$, где x_{i-1} и x_i — две последовательные точки разбиения P. Положим

$$w_1 = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x^*),$$
$$w_2 = \inf f(x) \qquad (x^* \leqslant x \leqslant x_i).$$

Ясно, что $w_1 \geqslant m_i$ и $w_2 \geqslant m_i$, где, как и прежде,

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i).$$

Значит,

$$\begin{aligned} L(P^*, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + \\ &+ w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \\ &= (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Если P^* содержит на k точек больше, чем P, то мы повторим только что проведенное рассуждение k раз и получим (9). Доказательство неравенства (10) аналогично.

6.5. Теорема. $\underline{\int} f\,d\alpha \leqslant \overline{\int} f\,d\alpha.$

Доказательство. Пусть P^* — общее измельчение двух разбиений P_1 и P_2. По теореме 6.4

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant L(P^*, f, \alpha) \leqslant U(P^*, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

Значит,

(11) $$L(P_1, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

Считая P_2 фиксированным и вычисляя верхнюю грань по всем P_1, получаем из (11)

(12) $$\underline{\int} f\,d\alpha \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

Вычисляя нижнюю грань по всем P_2 в (12), получаем утверждение теоремы.

6.6. Теорема. *$f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение P, такое, что*

(13) $$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

Доказательство. При любом P имеем

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \underline{\int} f\,d\alpha \leqslant \overline{\int} f\,d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha).$$

Поэтому из (13) следует, что

$$0 \leqslant \overline{\int} f\,d\alpha - \underline{\int} f\,d\alpha < \varepsilon.$$

Значит, если при любом $\varepsilon > 0$ неравенству (13) удовлетворяет некоторое разбиение P, то

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha,$$

т. е. $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Допустим теперь, что $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ и задано число $\varepsilon > 0$. Тогда существуют разбиения P_1 и P_2, такие, что

(14) $$U(P_2, f, \alpha) - \int f\,d\alpha < \frac{\varepsilon}{2},$$

(15) $$\int f\,d\alpha - L(P_1, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем в качестве P общее измельчение разбиений P_1 и P_2. Тогда, как показывает теорема 6.4 вместе с неравенствами (14) и (15),

$$U(P, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha) + \varepsilon \leqslant L(P, f, \alpha) + \varepsilon;$$

для такого разбиения P выполняется неравенство (13).

Теорема 6.6 позволит нам доказать интегрируемость двух важных классов функций. Но сначала введем еще одно определение.

6.7. Определение. Для любого разбиения P положим

$$\mu(P) = \max \Delta x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

и назовем $\mu(P)$ *диаметром* разбиения P.

6.8. Теорема. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$. Более того, каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \varepsilon \tag{16}$$

для любого разбиения $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\mu(P) < \delta$, и при любом выборе точек t_i в сегменте $[x_{i-1}, x_i]$.

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$, и пусть $\eta > 0$ таково, что

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\, \eta < \varepsilon.$$

Поскольку f равномерно непрерывна на $[a, b]$ (теорема 4.19), существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - f(t)| < \eta, \tag{17}$$

если $|x - t| < \delta$ и $x \in [a, b]$, $t \in [a, b]$.

Выберем P так, что $\mu(P) < \delta$. Тогда из неравенства (17) следует, что

$$M_i - m_i \leqslant \eta \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Значит,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta\alpha_i \leqslant$$

$$\leqslant \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta\, [\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon.$$

Итак, по теореме 6.6, $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Неравенство (16) также доказано, так как оба числа $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i$ и $\int f\, d\alpha$ лежат между $U(P, f, \alpha)$ и $L(P, f, \alpha)$.

6.9. Теорема. *Если f монотонна на $[a, b]$, а α непрерывна на $[a, b]$, то $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ (мы по-прежнему предполагаем, разумеется, что α монотонна).*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для любого положительного n выберем разбиение P так, что

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Это возможно, так как функция α непрерывна (теорема 4.23). Предположим теперь, что f монотонно возрастает (в другом случае доказательство аналогично). Тогда

$$M_i = f(x_i), \qquad m_i = f(x_{i-1}) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

так что

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] =$$

$$= \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n} [f(b) - f(a)] < \varepsilon,$$

если n достаточно велико. По теореме 6.6 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Теперь мы докажем некоторые элементарные свойства интеграла Стильтьеса.

6.10. Теорема. (*a*) *Если $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ и $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$, то $f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$, $cf \in \mathscr{R}(\alpha)$, какова бы ни была константа c, и*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1\, d\alpha + \int_a^b f_2\, d\alpha,$$

$$\int_a^b cf\, d\alpha = c \int_a^b f\, d\alpha.$$

(*b*) *Если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f_1\, d\alpha \leqslant \int_a^b f_2\, d\alpha.$$

(*c*) *Если $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ и если $a < c < b$, то $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, c]$ и на $[c, b]$ и*

$$\int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha.$$

(*d*) *Если $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ и если $|f(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$, то*

$$\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(*e*) *Если $f \in \mathscr{R}(\alpha_1)$ и $f \in \mathscr{R}(\alpha_2)$, то $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ и*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2;$$

если $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и* c — *положительное число, то* $f \in \mathscr{R}(c\alpha)$ *и*

$$\int_a^b f\,d(c\alpha) = c\int_a^b f\,d\alpha.$$

Доказательство. Если $f = f_1 + f_2$, а P — какое-нибудь разбиение сегмента $[a, b]$, то

$$L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \leqslant L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \leqslant \leqslant U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha). \tag{18}$$

Если $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ и $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$, то любому числу $\varepsilon > 0$ отвечают такие разбиения P_j $(j = 1, 2)$, что

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon.$$

Это неравенство сохранится, если P_1 и P_2 заменить их общим измельчением P. Тогда из (18) следует, что

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < 2\varepsilon,$$

а это значит, что $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Для этого же разбиения P имеем

$$U(P, f_j, \alpha) < \int f_j\,d\alpha + \varepsilon \qquad (j = 1, 2);$$

таким образом, из (18) следует, что

$$\int f\,d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha) < \int f_1\,d\alpha + \int f_2\,d\alpha + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε мы приходим к неравенству

$$\int f\,d\alpha \leqslant \int f_1\,d\alpha + \int f_2\,d\alpha. \tag{19}$$

Если заменить f_1 и f_2 в (19) функциями $-f_1$ и $-f_2$, то неравенство изменится на обратное (ибо, как легко проверить, $\int (-f)\,d\alpha = -\int f\,d\alpha$); тем самым доказано требуемое равенство.

Доказательства остальных утверждений теоремы 6.10 совершенно аналогичны. В части (c) все дело в том, что, переходя к измельчениям при приближении интеграла $\int f\,d\alpha$, мы можем ограничиться лишь разбиениями, содержащими точку c.

6.11. Теорема. *Пусть* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, b]$, $m \leqslant f \leqslant M$, φ *непрерывна на* $[m, M]$ *и* $h(x) = \varphi(f(x))$ *на* $[a, b]$. *Тогда* $h \in \mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, b]$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$. Ввиду того что φ равномерно непрерывна на $[m, M]$, существует $\delta > 0$, такое, что $\delta < \varepsilon$ и $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon$, если $|s - t| \leqslant \delta$ и $s, t \in [m, M]$.

Поскольку $f \in \mathscr{R}(\alpha)$, существует разбиение $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$, такое, что

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^2. \tag{20}$$

Пусть M_i и m_i имеют тот же смысл, что и в определении 6.1, и пусть M_i^*, m_i^* — аналогичные величины для функции h. Разобьем числа $1, \ldots, n$ на два класса: $i \in A$, если $M_i - m_i < \delta$; $i \in B$, если $M_i - m_i \geqslant \delta$.

Для $i \in A$, в силу выбора δ, оказывается, что $M_i^* - m_i^* \leqslant \varepsilon$.

Для $i \in B$ имеем $M_i^* - m_i^* \leqslant 2K$, где $K = \sup |\varphi(t)|$, $m \leqslant t \leqslant M$. Согласно (20), имеем

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i < \delta^2, \tag{21}$$

так что $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. Следовательно,

$$U(P, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*) \Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) \Delta\alpha_i \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon [\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon [\alpha(b) - \alpha(a) + 2K].$$

Теперь из теоремы 6.6 следует, что $h \in \mathscr{R}(\alpha)$, так как число ε произвольно.

Замечание. Эта теорема подсказывает такой вопрос: какие же функции интегрируемы по Риману? Ответ дается в теореме 10.33(b).

6.12. Теорема. *Если $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ и $g \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$, то*

(a) $fg \in R(\alpha)$;

(b) $|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и* $\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \leqslant \int_a^b |f| \, d\alpha$.

Доказательство. Полагая $\varphi(t) = t^2$ и применяя к φ теорему 6.11, мы видим, что $f^2 \in \mathscr{R}(\alpha)$, если $f \in \mathscr{R}(\alpha)$. Тождество

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$$

завершает доказательство утверждения (a).

Полагая $\varphi(t) = |t|$ и применяя теорему 6.11, мы точно так же убеждаемся в том, что $|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$. Выберем $c = \pm 1$ так, что

$$c \int f \, d\alpha \geqslant 0.$$

Тогда $\left| \int f \, d\alpha \right| = c \int f \, d\alpha = \int cf \, d\alpha \leqslant \int |f| \, d\alpha$, так как $cf \leqslant |f|$.

Интеграл как предел сумм

До сих пор мы определяли интеграл при помощи сумм $U(P, f, \alpha)$, $L(P, f, \alpha)$. Однако числа M_i, m_i, появляющиеся в этих суммах, не обязательно служат значениями функции f (они действительно оказываются значениями функции f, если f непрерывна). Сейчас мы покажем, что интеграл $\int f\,d\alpha$ можно рассматривать как предел последовательности сумм, в которых M_i и m_i заменены значениями функции f. Как и выше, α монотонно возрастает, а f ограничена и вещественна на $[a, b]$.

6.13. Определение. Пусть P — какое-нибудь разбиение сегмента $[a, b]$. Выберем точки $t_1, \ldots, t_n$ так, что $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, и рассмотрим сумму

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i. \tag{22}$$

Положим, по определению,

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha) = A, \tag{23}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при $\mu(P) < \delta$ имеем

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon. \tag{24}$$

Отметим, что обозначение $S(P, f, \alpha)$ на самом деле неполно, так как сумма (22) зависит еще и от выбора точек t_i, удовлетворяющих условию $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$. Но это не может привести ни к какому недоразумению, если мы будем помнить, что соотношение (23) означает справедливость неравенства (24) при всяком P и всяком допустимом выборе точек t_i, если только $\mu(P) < \delta$.

6.14. Теорема. (*a*) *Если* $\lim S(P, f, \alpha)$ *при* $\mu(P) \to 0$ *существует, то* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и*

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha) = \int_a^b f\,d\alpha. \tag{25}$$

(*b*) *Если* (i) f *непрерывна или если* (ii) $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и* α *непрерывна на* $[a, b]$, *то выполняется соотношение* (25).

Упражнение 4 покажет, что требование непрерывности в утверждении (*b*) не может быть опущено.

Доказательство. Допустим сначала, что предел в левой части равенства (25) существует и равен A. Пусть задано число $\varepsilon > 0$.

Существует $\delta > 0$, такое, что при $\mu(P) < \delta$ имеем

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < S(P, f, \alpha) < A + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

Выберем такое P. Если мы заставим точки t_i пробегать сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ и возьмем верхнюю и нижнюю грани чисел $S(P, f, \alpha)$, полученных таким образом, то, принимая во внимание (26), мы придем к неравенству

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \leqslant A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

По теореме 6.6 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$; это завершает доказательство утверждения (*a*), так как

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \int f\,d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha).$$

Часть (i) утверждения (*b*) содержится в теореме 6.8.

Чтобы доказать часть (ii), допустим, что $f \in \mathscr{R}(\alpha)$, функция α непрерывна и $\varepsilon > 0$. Существует разбиение P^*, такое, что

$$U(P^*, f, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{27}$$

Положим

$$M = \sup |f(x)| \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Поскольку функция α равномерно непрерывна на $[a, b]$, существует $\delta_1 > 0$, обладающее следующим свойством: если P — любое разбиение сегмента $[a, b]$, такое, что $\mu(P) < \delta_1$, то $\Delta\alpha_i < \varepsilon/4Mn$ при всех i, где n — число сегментов разбиения P^*. Пусть P — любое разбиение, такое, что $\mu(P) < \delta_1$. Рассмотрим сумму $U(P, f, \alpha)$. Вклад в эту сумму тех сегментов разбиения P, внутри которых содержится точка разбиения P^*, не превышает величины

$$(n-1)\max_i \Delta\alpha_i M < \frac{(n-1)\,\varepsilon M}{4Mn} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В соединении с (27) это дает

$$U(P, f, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \tag{28}$$

при всех P, для которых $\mu(P) < \delta_1$.

Точно таким же способом мы можем показать, что существует число $\delta_2 > 0$, такое, что

$$L(P, f, \alpha) > \int f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \tag{29}$$

при всех P, для которых $\mu(P) < \delta_2$.

Выбирая $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$, мы видим, что неравенства (28) и (29) выполняются при каждом P, таком, что $\mu(P)<\delta$.

Поскольку, очевидно,

$$L(P, f, \alpha)\leqslant S(P, f, \alpha)\leqslant U(P, f, \alpha),$$

из (28) и (29) следует, что

$$S(P, f, \alpha)<\int f\,d\alpha+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(P, f, \alpha)>\int f\,d\alpha-\frac{\varepsilon}{2},$$

а из этих двух последних неравенств видно, что

$$\left|S(P, f, \alpha)-\int f\,d\alpha\right|<\varepsilon$$

при всех P, таких, что $\mu(P)<\delta$.

Доказательство закончено.

Интегрирование и дифференцирование

В этом разделе мы все еще будем заниматься вещественными функциями. Мы покажем, что интегрирование и дифференцирование являются в некотором смысле взаимно обратными операциями.

6.15. Теорема. *Пусть $f\in\mathscr{R}$ на $[a, b]$. Для $a\leqslant x\leqslant b$ положим*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Тогда функция F непрерывна на $[a, b]$[1]*; более того, если функция f непрерывна в точке $x_0\in[a, b]$, то функция F дифференцируема в точке x_0 и*

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Доказательство. Функция f ограничена, так как $f\in\mathscr{R}$. Допустим, что $|f(t)|\leqslant M$, если $a\leqslant t\leqslant b$. При $a\leqslant x<y\leqslant b$ имеем

$$|F(y)-F(x)|=\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\leqslant M(y-x)$$

---

[1]) Функция F не определена в точке a, ибо символу $\int_a^a f(t)\,dt$ не приписывалось никакого смысла (в п. 2.19 при определении сегмента как одномерной клетки сегменты вида $[a, a]$ были исключены из рассмотрения). Для того чтобы все утверждения теоремы были верными, следует считать, что $F(a)=0$.— *Прим. перев.*

по теореме 6.10 (c) и (d). Мы видим, что для данного $\varepsilon > 0$

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon,$$

если только $|y - x| < \varepsilon/M$. Этим доказана непрерывность (и более того, равномерная непрерывность) функции F.

Допустим теперь, что функция f непрерывна в точке x_0. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

если $|t - x_0| < \delta$ и $a \leqslant t \leqslant b$. Тогда при

$$x_0 - \delta < s \leqslant x_0 \leqslant t < x_0 + \delta \quad \text{и} \quad a \leqslant s < t \leqslant b$$

мы по теореме 6.10 (d) имеем

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, $F'(x_0) = f(x_0)$.

6.16. Теорема. *Если $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$ и существует дифференцируемая функция F на $[a, b]$, такая, что $F' = f$, то*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Эту теорему обычно называют *основной теоремой интегрального исчисления.* Ее постоянно применяют при вычислении интегралов.

Доказательство. Для данного разбиения P сегмента $[a, b]$ выберем t_i $(i = 1, \ldots, n)$ так, что $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ и

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})\, f(t_i).$$

Это возможно по теореме 5.10. Тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta x_i,$$

а последняя сумма стремится к $\int_a^b f(x)\, dx$, когда $\mu(P) \to 0$, по теореме 6.14 (где $\alpha(x) = x$).

6.17. Теорема. *Если $f \in \mathscr{R}$ и $\alpha' \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$, то $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ и*

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx.$$

Эта теорема описывает одну из ситуаций, когда интеграл Стильтьеса сводится к интегралу Римана.

Доказательство. Заметим сначала, что по теореме 6.12 $f\alpha' \in \mathscr{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем M так, что $|f| \leqslant M$. Поскольку $f\alpha' \in \mathscr{R}$ и $\alpha' \in \mathscr{R}$, из теоремы 6.14 (b) следует, что существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, такие, что

$$\left| \sum f(t_i)\,\alpha'(t_i)\,\Delta x_i - \int f\alpha' \right| < \varepsilon, \tag{30}$$

если $\mu(P) < \delta_1$ и $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$, и

$$\left| \sum \alpha'(t_i)\,\Delta x_i - \int \alpha' \right| < \varepsilon,$$

если $\mu(P) < \delta_2$ и $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$.

Если s_i — другая точка, такая, что $x_{i-1} \leqslant s_i \leqslant x_i$, то мы имеем

$$\sum |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\,\Delta x_i < 2\varepsilon, \tag{31}$$

когда $\mu(P) < \delta_2$ и $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$, $x_{i-1} \leqslant s_i \leqslant x_i$.

Выберем теперь P так, что $\mu(P) < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, и пусть $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. По теореме 5.10 существуют точки $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, такие, что $\Delta\alpha_i = \alpha'(s_i)\,\Delta x_i$. Тогда

$$\sum f(t_i)\,\Delta\alpha_i = \sum f(t_i)\,\alpha'(t_i)\,\Delta x_i + \sum f(t_i)\,[\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)]\,\Delta x_i. \tag{32}$$

Согласно (30) и (31), левая часть равенства (32) отличается от $\int f\alpha'$ меньше, чем на $(2M+1)\varepsilon$. Это означает, что

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha) = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx;$$

принимая во внимание теорему 6.14 (a), мы приходим к требуемому заключению.

Интегрирование векторнозначных функций

6.18. Определение. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — вещественные функции на $[a, b]$, и пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ — соответствующее отображение сегмента $[a, b]$ в пространство R^k. Пусть функция α монотонно возрастает на $[a, b]$. Мы будем говорить, что $\mathbf{f} \in \mathscr{R}(\alpha)$, если $f_j \in \mathscr{R}(\alpha)$ при $j = 1, \ldots, k$. В этом случае мы, по определению, полагаем

$$\int_a^b \mathbf{f}\,d\alpha = \left(\int_a^b f_1\,d\alpha, \ldots, \int_a^b f_k\,d\alpha \right).$$

Иными словами, $\int \mathbf{f}\, d\alpha$ — это точка пространства R^k, j-я координата которой равна $\int f_j\, d\alpha$.

Ясно, что утверждения (*a*), (*c*), (*e*) теоремы 6.10 верны и для этих векторнозначных интегралов; нужно просто применить прежние результаты к каждой координате. То же верно в отношении теорем 6.15—6.17. Для иллюстрации сформулируем аналог теоремы 6.16.

6.19. Теорема. *Если* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{F}$ *отображают сегмент* $[a, b]$ *в пространство* R^k, $\mathbf{f} \in \mathscr{R}$ *на* $[a, b]$ и $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$, *то*

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

Однако аналог теоремы 6.12 (*b*) связан с некоторыми новыми моментами, по крайней мере в доказательстве.

6.20. Теорема. *Пусть* $\mathbf{f}$ *отображает* $[a, b]$ *в пространстве* R^k. *Если* $\mathbf{f} \in \mathscr{R}(\alpha)$ *для какой-нибудь монотонно возрастающей на* $[a, b]$ *функции* α, *то* $|\mathbf{f}| \in \mathscr{R}(\alpha)$ *и*

$$\left|\int_a^b \mathbf{f}\, d\alpha\right| \leqslant \int_a^b |\mathbf{f}|\, d\alpha. \tag{33}$$

Доказательство. Если $f_1, \ldots, f_k$ — компоненты отображения $\mathbf{f}$, то

$$|\mathbf{f}| = (f_1^2 + \ldots + f_k^2)^{1/2}. \tag{34}$$

По теореме 6.11 каждая из функций f_j^2 принадлежит множеству $\mathscr{R}(\alpha)$, следовательно, этому множеству принадлежит и их сумма. Поскольку x^2 — непрерывная функция от x, теорема 4.17 показывает, что квадратный корень — функция, непрерывная на сегменте $[0, M]$ при каждом вещественном M. Если мы еще раз применим теорему 6.11, то увидим, что $|\mathbf{f}| \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Чтобы доказать (33), положим $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, где $y_j = \int f_j\, d\alpha$. Тогда $\mathbf{y} = \int \mathbf{f}\, d\alpha$ и

$$|\mathbf{y}|^2 = \sum y_j^2 = \sum y_j \int f_j\, d\alpha = \int \left(\sum y_j f_j\right) d\alpha.$$

В силу неравенства Шварца,

$$\sum y_j f_j(t) \leqslant |\mathbf{y}|\, |\mathbf{f}(t)| \quad (a \leqslant t \leqslant b); \tag{35}$$

значит, из теоремы 6.10 (*b*) следует, что

$$|\mathbf{y}|^2 \leqslant |\mathbf{y}| \int |\mathbf{f}|\,d\alpha. \tag{36}$$

Если $\mathbf{y}=\mathbf{0}$, то неравенство (33) тривиально. Если $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то, разделив (36) на $|\mathbf{y}|$, мы получим (33).

Функции ограниченной вариации

До сих пор мы занимались интегрированием относительно монотонных функций α. В самом деле, неравенство $\Delta\alpha_i \geqslant 0$ играло основную роль во всех доказательствах, связанных с $L(P, f, \alpha)$ и $U(P, f, \alpha)$. Рамки теории интегрирования, развитой в предыдущих разделах, можно расширить без значительных трудностей, если заменить класс монотонных функций классом функций ограниченной вариации. Чтобы избежать повторений, мы сразу же определим этот класс для векторнозначных функций.

6.21. Определение. Пусть $\mathbf{f}$ — отображение сегмента $[a, b]$ в пространство R^k. Если $P=\{x_0, \ldots, x_n\}$ — разбиение сегмента $[a, b]$, то положим

$$\Delta\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(x_i) - \mathbf{f}(x_{i-1})$$

и

$$V(\mathbf{f};\ a,\ b) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\Delta\mathbf{f}_i|, \tag{37}$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям сегмента $[a, b]$.

Назовем число $V(\mathbf{f};\ a,\ b)$ *полной вариацией* отображения $\mathbf{f}$ на сегменте $[a, b]$. Если из контекста ясно, о каком сегменте идет речь, то мы будем сокращенно писать $V(\mathbf{f})$.

Если $V(\mathbf{f};\ a,\ b) < +\infty$, то говорят, что $\mathbf{f}$ — *функция ограниченной вариации* на $[a, b]$.

Многие свойства векторнозначных функций ограниченной вариации можно получить сведéнием к случаю вещественных функций.

6.22. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}=(f_1, \ldots, f_k)$ отображает сегмент $[a, b]$ в пространство R^k. Тогда $\mathbf{f}$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$ в том и только в том случае, когда каждая из функций f_j имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. Для $1 \leqslant j \leqslant k$ имеем*

$$V(f_j) \leqslant V(f) \leqslant \sum_{r=1}^{k} V(f_r).$$

Доказательство. Для любого разбиения $\{x_0, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$ имеем

$$|f_j(x_i) - f_j(x_{i-1})| \leqslant |\mathbf{f}(x_i) - \mathbf{f}(x_{i-1})| \leqslant \sum_{r=1}^{k} |f_r(x_i) - f_r(x_{i-1})|.$$

Если мы просуммируем эти неравенства по $i = 1, \ldots, n$, а затем перейдем к верхним граням, то мы получим утверждение теоремы.

6.23. Примеры. (a) Если f — монотонная функция на $[a, b]$, то f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, и $V(f) = |f(b) - f(a)|$.

(b) Если $\mathbf{f}'$ существует и ограничена на $[a, b]$, то $\mathbf{f}$ — функция ограниченной вариации. Действительно, если $|f'(x)| \leqslant M$, то по теореме 5.20

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}(x_i) - \mathbf{f}(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) = M(b-a)$$

для любого разбиения сегмента $[a, b]$.

(c) Функция f может быть непрерывной, не будучи функцией ограниченной вариации. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x} & (0 < x \leqslant 2), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Выберем разбиение, состоящее из точек

$$0, \frac{2}{2n-1}, \frac{2}{2n-3}, \ldots, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 2.$$

Соответствующая сумма, фигурирующая в (37), равна в этом случае

$$\left(2 + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1}\right) + \\ + \frac{2}{2n-1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

а это число может быть сделано сколь угодно большим за счет выбора достаточно большого n, ибо ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится.

(d) Ясно, что каждая функция ограниченной вариации ограничена, так как $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(a)| \leqslant V(\mathbf{f})$ при всех $x \in [a, b]$.

Мы увидим (теорема 6.27), что существует тесная связь между функциями ограниченной вариации и монотонными функциями. Сумма или произведение двух монотонных функций не обязательно монотонны. Например, x и x^2 монотонны на $[0, 1]$, а функция $x-x^2$ не монотонна; функция x монотонна на $[-1, 1]$, а функция x^2 — нет. Однако класс функций ограниченной вариации замкнут относительно операций сложения и умножения.

6.24. Теорема. *Если f и g — комплексные функции ограниченной вариации на $[a, b]$, то $f+g$ и fg — функции ограниченной вариации на $[a, b]$.*

(Утверждение, касающееся суммы $f+g$, верно и для векторнозначных функций; доказательство не меняется.)

Доказательство. Для любого разбиения сегмента $[a, b]$ имеем

$$\sum |\Delta f_i+\Delta g_i| \leqslant \sum |\Delta f_i| + \sum |\Delta g_i| \leqslant V(f)+V(g).$$

Значит, $V(f+g) \leqslant V(f)+V(g)$, и первая часть теоремы доказана.

Теперь выберем A и B так, что $|f(x)| \leqslant A$, $|g(x)| \leqslant B$ на $[a, b]$. Если $h=fg$, то

$$\Delta h_i = f(x_i)\,\Delta g_i + g(x_{i-1})\,\Delta f_i,$$

поэтому

$$\sum |\Delta h_i| \leqslant A \sum |\Delta g_i| + B \sum |\Delta f_i| \leqslant A\,V(g)+B\,V(f).$$

Значит, $V(fg) \leqslant A\,V(g)+B\,V(f)$. Тем самым доказана вторая часть.

Следствие. *Если f и g монотонно возрастают на $[a, b]$, то $f-g$ есть функция ограниченной вариации на $[a, b]$.*

Обратное утверждение тоже верно (см. теорему 6.27).

6.25. Определение. Пусть $\mathbf{f}$ отображает сегмент $[a, b]$ в пространство R^k, и пусть $\mathbf{f}$ — функция ограниченной вариации. Положим

$$v_{\mathbf{f}}(x) = V(\mathbf{f};\ a,\ x) \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{38}$$

Назовем $v_{\mathbf{f}}$ *функцией полной вариации* функции $\mathbf{f}$; $v_{\mathbf{f}}$, очевидно, монотонно возрастает на $[a, b]$ и $v_{\mathbf{f}}(a)=0$.

6.26. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}$ — функция ограниченной вариации, отображающая сегмент $[a, b]$ в пространство R^k.*

(*a*) *Если $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, то*

$$V(\mathbf{f};\ a,\ y) = V(\mathbf{f};\ a,\ x) + V(\mathbf{f};\ x,\ y). \tag{39}$$

(*b*) *Если функция $\mathbf{f}$ непрерывна на $[a, b]$, то и функция $v_{\mathbf{f}}$ тоже непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Если $x=a$ или $y=x$, то равенство (39) тривиально, так как $V(\mathbf{f};\ x,\ x)=0$. Допустим, что $a<x<y$ и задано число $\varepsilon>0$. Существует разбиение $\{x_i\}$ сегмента $[a, y]$, такое, что

$$v_{\mathbf{f}}(y)-\varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}(x_i)-\mathbf{f}(x_{i-1})| \leqslant v_{\mathbf{f}}(y). \tag{40}$$

Если точка x не находится среди точек x_i, то мы добавим ее к набору $\{x_i\}$ и получим таким образом новое разбиение P, для которого неравенство (40) все еще выполняется.

Правая часть неравенства (39) оказывается верхней гранью множества всех сумм, фигурирующих в (40). Значит,

$$v_{\mathbf{f}}(y)-\varepsilon \leqslant v_{\mathbf{f}}(x)+V(\mathbf{f};\ x,\ y) \leqslant v_{\mathbf{f}}(y);$$

поскольку ε произвольно, равенство (39) доказано.

Теперь допустим, что функция $\mathbf{f}$ непрерывна, $a<y\leqslant b$ и

$$V(\mathbf{f};\ x,\ y)>\delta \tag{41}$$

при некотором фиксированном $\delta>0$ и при каждом $x\in[a,\ y)$. (Это приведет к противоречию.) Взяв в (41) $x=a$, мы увидим, что существует разбиение $\{x_i\}$ сегмента $[a,\ y]$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}(x_i)-\mathbf{f}(x_{i-1})|>\delta. \tag{42}$$

Заметим, что $x_n=y$, $x_{n-1}<y$. Ввиду того что $\mathbf{f}$ непрерывна, существует точка a_1, такая, что $x_{n-1}\leqslant a_1<y$ и величины $|\mathbf{f}(y)-\mathbf{f}(x_{n-1})|$ и $|\mathbf{f}(a_1)-\mathbf{f}(x_{n-1})|$ отличаются сколь угодно мало; в частности, (42) выполняется, если заменить y таким числом a_1.

Иными словами, мы доказали, что существует $a_1<y$, такое, что $V(\mathbf{f};\ a,\ a_1)>\delta$.

Продолжим этот процесс, взяв a_1 вместо a, и т. д.; мы получим для каждого N числа

$$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_N<y,$$

такие, что $V(\mathbf{f};\ a_{i-1},\ a_i)>\delta$ $(1\leqslant i\leqslant N)$.

Но отсюда в силу (39) следует, что $v_{\mathbf{f}}(y)\geqslant N\delta$ при любом N, что невозможно.

Это противоречие показывает, что

$$\lim_{x\to y} V(\mathbf{f};\ x,\ y)=0;$$

в силу (39) отсюда вытекает, что функция $v_{\mathbf{f}}$ непрерывна слева на $(a,\ b]$. Тем же способом доказывается непрерывность справа на $[a,\ b)$.

З а м е ч а н и е. Справедлива обратная теорема; формулировку можно найти в упражнении 6.

6.27. Теорема. *Если f — вещественная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то существуют монотонно возрастающие на $[a, b]$ функции p и q, такие, что $p(a)=q(a)=0$ и*

$$f(x)-f(a)=p(x)-q(x), \tag{43}$$

$$(a \leqslant x \leqslant b)$$

$$v_f(x)=p(x)+q(x). \tag{44}$$

Мы будем называть p и q соответственно функциями *положительной* и *отрицательной* вариации функции f; равенство (43) показывает, что функция f представима в виде разности двух монотонных функций.

Доказательство. Определим p и q равенствами

$$2p=v_f+f-f(a), \quad 2q=v_f-f+f(a). \tag{45}$$

Ясно, что $p(a)=q(a)=0$ и выполняются равенства (43) и (44). Если

$$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b,$$

то (39) показывает, что

$$\begin{aligned} 2p(y)-2p(x)&=V(f;\ x, y)+[f(y)-f(x)], \\ 2q(y)-2q(x)&=V(f;\ x, y)-[f(y)-f(x)]. \end{aligned} \tag{46}$$

Ввиду того что $|f(y)-f(x)| \leqslant V(f;\ x, y)$, из (46) следует, что обе функции p и q — возрастающие.

Следствие 1. *Если f, кроме того, непрерывна на $[a, b]$, то тем же свойством обладают p и q.*

Это вытекает из теоремы 6.26 (b) и равенств (45).

Следствие 2. *Если f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то $f(x+)$ существует при $a \leqslant x < b$, $f(x-)$ существует при всех $a < x \leqslant b$ и множество точек разрыва функции f не более чем счетно.*

Это следует непосредственно из теоремы 6.22, разложения (43) и аналогичных фактов, относящихся к монотонным функциям (теоремы 4.29 и 4.30).

Представление вещественной функции ограниченной вариации в виде разности двух монотонных функций, конечно, не единственно; в самом деле, прибавляя одну и ту же возрастающую функцию к p и q, мы получим две возрастающие функции p_1 и q_1, такие, что $f(x)-f(a)=p_1(x)-q_1(x)$. Однако разложение (43) обладает некоторым свойством минимальности, выделяющим его среди всех прочих разложений такого рода (см. упражнение 10).

Дальнейшие теоремы об интегрировании

6.28. Определение. Теперь мы обратимся к интегрированию относительно любой функции ограниченной вариации, а не только относительно монотонной функции. Если α — вещественная функция ограниченной вариации на $[a, b]$ и если $\alpha=\beta-\gamma$, где β и γ — возрастающие функции, то естественное определение таково:

$$\int f\,d\alpha=\int f\,d\beta-\int f\,d\gamma, \tag{47}$$

если только оба интеграла справа существуют в том смысле, в каком они были определены ранее.

Если $\alpha=\beta_1-\gamma_1$ — другое разложение функции α в разность возрастающих функций, то $\beta+\gamma_1=\beta_1+\gamma$, и поэтому [см. теорему 6.10 (*e*)]

$$\int f\,d\beta+\int f\,d\gamma_1=\int f\,d\beta_1+\int f\,d\gamma. \tag{48}$$

Отсюда следует, что интеграл $\int f\,d\alpha$, определенный в (47), не зависит от выбора разложения функции α, *если только* f принадлежит множествам $\mathscr{R}(\beta)$, $\mathscr{R}(\beta_1)$, $\mathscr{R}(\gamma)$ и $\mathscr{R}(\gamma_1)$.

Поэтому в дальнейшем в этой главе мы будем рассматривать лишь два случая, когда все интересующие нас интегралы автоматически существуют:

(*a*) функция f непрерывна, функция α — ограниченной вариации;
(*b*) функции f и α — ограниченной вариации и α непрерывна.

В случае (*a*) мы сошлемся на теорему 6.8. В случае (*b*) условимся представлять α в виде разности только *непрерывных* монотонных функций [это можно сделать, согласно следствию 1 из теоремы 6.27]; разлагая f в разность монотонных функций, мы сошлемся на теорему 6.9.

Заметим, кроме того, что в обоих случаях теорема 6.14 *применима в полном объеме.*

Теперь мы могли бы, конечно, распространить это определение на векторнозначные функции $\mathbf{f}$. Однако более интересным представляется другое обобщение, которое применяется в теории аналитических функций. Это обобщение получится, если обе функции f и α считать комплекснозначными.

Если $f=f_1+if_2$, $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, где f_1, f_2, α_1, α_2 — вещественные функции на $[a, b]$, и если выполняется условие (*a*) или (*b*), то мы положим

$$\int f\,d\alpha=\int f_1\,d\alpha_1-\int f_2\,d\alpha_2+i\int f_1\,d\alpha_2+i\int f_2\,d\alpha_1. \tag{49}$$

Четыре интеграла, стоящие в правой части этого равенства, были определены в (47).

Обычные свойства аддитивности [теоремы 6.10 (*a*), (*c*), (*e*)] в этой ситуации легко проверяются. Рассмотрим теперь аналог теоремы 6.12 (*b*) [см. также теорему 6.20] для комплексных α.

6.29. Теорема. *Пусть f и α — комплексные функции на $[a, b]$, удовлетворяющие условиям (a) или (b) определения 6.28. Пусть v — функция полной вариации функции α на $[a, b]$. Тогда*

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dv. \tag{50}$$

Следствие.

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leqslant V(\alpha) \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$

Доказательство. Если выполнено (*a*), то функция $|f|$ непрерывна. Если выполнено (*b*), то непрерывна функция v (теорема 6.26), а так как f — функция ограниченной вариации, то такова и функция $|f|$. Значит, второй интеграл в (50) существует в обоих случаях.

Для любого разбиения $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$ имеем

$$\left|\sum f(t_i)\,\Delta\alpha_i\right| \leqslant \sum |f(t_i)|\,|\Delta\alpha_i| \leqslant \sum |f(t_i)|\,\Delta v_i, \tag{51}$$

если $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. При $\mu(P) \to 0$ первая сумма в (51) стремится к $\int f\,d\alpha$, а последняя — к $\int |f|\,dv$ по теореме 6.14. Тем самым неравенство (50) доказано.

6.30. Теорема. *Пусть f и α — комплексные функции ограниченной вариации на $[a, b]$, а функция f, кроме того, непрерывна. Тогда*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \int_a^b \alpha\,df. \tag{52}$$

Замечание. По аналогии с приемом суммирования по частям равенство (52) называют *формулой интегрирования по частям*. Часто оказывается удобным рассматривать $\int \alpha\,df$ вместо $\int f\,d\alpha$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь разбиение $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$. Выберем $t_1, \ldots, t_n$ так, что $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$, положим $t_0 = a$, $t_{n+1} = b$, и пусть Q — разбиение

$\{t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}\}$ сегмента $[a, b]$. Тогда, суммируя по частям, получим

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] =$$

$$= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(x_{i-1})[f(t_i) - f(t_{i-1})] =$$

$$= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - S(Q, \alpha, f),$$

так как $t_{i-1} \leqslant x_{i-1} \leqslant t_i$. Если $\mu(P) \to 0$, то и $\mu(Q) \to 0$, и теорема 6.14 показывает, что $S(P, f, \alpha) \to \int f\,d\alpha$, $S(Q, \alpha, f) \to \int \alpha\,df$. Отсюда следует равенство (52).

Замечание. Если функция f непрерывна, а α — функция ограниченной вариации, то (52) можно использовать для *определения* интеграла $\int \alpha\,df$ даже в том случае, когда f не есть функция ограниченной вариации. Это приводит еще к одному обоб ению стильтьесовского процесса интегрирования, которое мы, однако, не будем в дальнейшем рассматривать.

В следующих двух теоремах мы должны будем ограничиться *вещественными* функциями — так же, как и в случае теорем о среднем в теории дифференцирования.

6.31. Теорема. (Первая теорема о среднем значении.) *Если f непрерывна и вещественна, а α монотонно возрастает на $[a, b]$, то существует точка x, такая, что $a \leqslant x \leqslant b$ и*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(x)[\alpha(b) - \alpha(a)]. \tag{53}$$

Доказательство. Положим

$$M = \sup f(t), \quad m = \inf f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Тогда

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant \int_a^b f\,d\alpha \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Значит, существует число λ, такое, что $m \leqslant \lambda \leqslant M$ и

$$\int_a^b f\,d\alpha = \lambda[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

В силу теорем 4.16 и 4.23 существует точка x, принадлежащая сегменту $[a, b]$, для которой $f(x) = \lambda$, откуда и следует (53).

Замечание. Может случиться, что точку x нельзя выбрать так, что $a < x < b$. Например, если

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & (x = a), \\ 1 & (a < x \leqslant b), \end{cases}$$

а f непрерывна, то

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(a) = f(a)\,[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

6.32. Теорема. (Вторая теорема о среднем значении.) *Пусть функция f монотонна, а α — функция ограниченной вариации, вещественная и непрерывная на $[a, b]$. Тогда существует такая точка $x \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(a)\,[\alpha(x) - \alpha(a)] + f(b)\,[\alpha(b) - \alpha(x)].$$

Доказательство. Согласно теоремам 6.30 и 6.31,

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \int_a^b \alpha\,df =$$

$$= f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \alpha(x)\,[f(b) - f(a)]$$

при некотором $x \in [a, b]$.

6.33. Теорема. (Замена переменной.) *Пусть f и φ непрерывны на $[a, b]$, φ строго возрастает на $[a, b]$, а ψ — функция, обратная к φ. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(y))\,d\psi(y). \tag{54}$$

[Формально (54) получается, если положить $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$.]

Доказательство. Для любого разбиения P

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$$

положим $y_i = \varphi(x_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$ и рассмотрим разбиение Q:

$$\varphi(a) = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_{n-1} \leqslant y_n = \varphi(b).$$

Полагая $g(y) = f(\psi(y))$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i)\,[\psi(y_i) - \psi(y_{i-1})]. \tag{55}$$

В силу равномерной непрерывности функции φ на $[a, b]$ (теорема 4.19), если $\mu(P) \to 0$, то $\mu(Q) \to 0$. Таким образом, если $\mu(P) \to 0$, то обе части равенства (55) стремятся к соответствующим частям равенства (54), поскольку функция g непрерывна. Доказательство закончено.

Спрямляемые кривые

В заключение этой главы мы рассмотрим одно интересное геометрическое приложение некоторой части предшествующей теории. Случай $k = 2$ (т. е. случай плоских кривых) особенно важен при изучении аналитических функций комплексной переменной.

6.34. Определение. Непрерывное отображение γ сегмента $[a, b]$ в пространство R^k называется *кривой* в R^k. Если отображение γ взаимно однозначно, то γ называется *дугой*. Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, но $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для любой другой пары различных точек t_1, t_2, принадлежащих сегменту $[a, b]$, то γ называется *простой замкнутой кривой*.

Следует заметить, что кривая определяется как *отображение*, а не как множество точек. Конечно, с каждой кривой в R^k связано некоторое множество точек в R^k, а именно множество значений отображения γ, однако для разных кривых это множество может оказаться одним и тем же.

Мы будем называть кривую γ *спрямляемой*, если γ — функция ограниченной вариации; *длиной* кривой γ мы будем называть число $V(\gamma; a, b)$.

Чтобы обосновать это определение, напомним, что $V(\gamma; a, b)$ — это верхняя грань множества всех сумм вида

$$(56) \qquad \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b).$$

В этой сумме i-е слагаемое равно расстоянию (в R^k) между точками $\gamma(x_{i-1})$ и $\gamma(x_i)$, а сама сумма равна длине ломаной с вершинами в точках $\gamma(x_0)$, $\gamma(x_1)$, ..., $\gamma(x_n)$, расположенных в указанном порядке. Когда диаметр разбиения стремится к нулю, эти ломаные приближаются к множеству значений отображения γ. Разумеется, мы здесь ничего не *доказываем*, а лишь пытаемся объяснить разумность такого определения длины.

В некоторых случаях длина кривой выражается интегралом Римана. Мы докажем это для *непрерывно дифференцируемых* кривых, т. е. для кривых γ, производная γ' которых непрерывна.

6.35. Теорема. *Если функция γ' непрерывна на $[a, b]$, то γ спрямляема, а ее длина равна*

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Доказательство. Мы должны доказать, что $\int |\gamma'| = V(\gamma)$. Если $\{x_0, \ldots, x_n\}$ — разбиение сегмента $[a, b]$, то, как показывают теоремы 6.19 и 6.20,

$$\sum |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| = \sum \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\, dt \right| \leqslant \sum \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)|\, dt =$$

$$= \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

так что

$$V(\gamma) \leqslant \int |\gamma'|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Ввиду того что функция γ' равномерно непрерывна на $[a, b]$, существует $\delta > 0$, такое, что $|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$, если $|s - t| < \delta$. Пусть $\{x_0, \ldots, x_n\}$ — разбиение сегмента $[a, b]$, диаметр которого меньше δ. Если $x_{i-1} \leqslant t \leqslant x_i$, то

$$|\gamma'(t)| \leqslant |\gamma'(x_i)| + \varepsilon,$$

так что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)|\, dt - \varepsilon \Delta x_i \leqslant |\gamma'(x_i)|\, \Delta x_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\, dt \right| + \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\, dt \right| \leqslant |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + \varepsilon \Delta x_i.$$

Суммируя эти неравенства по $i = 1, \ldots, n$, мы получим

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \leqslant \sum_{i=1}^n |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + 2\varepsilon(b - a) \leqslant$$

$$\leqslant V(\gamma;\, a, b) + 2\varepsilon(b - a).$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\int |\gamma'| \leqslant V(\gamma)$, и доказательство закончено.

Упражнения

1. Пусть функция α возрастает на $[a, b]$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, α непрерывна в точке x_0, $f(x_0)=1$ и $f(x)=0$, если $x \neq x_0$. Доказать, что $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ и $\int f\,d\alpha = 0$.

2. Пусть $f \geqslant 0$, непрерывна на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Доказать, что $f(x)=0$ при всех $x \in [a, b]$ (ср. с упражнением 1).

3. Определим три функции β_1, β_2, β_3 следующим образом: $\beta_j(x)=0$, если $x<0$, $\beta_j(x)=1$, если $x>0$ при $j=1, 2, 3$; $\beta_1(0)=0$, $\beta_2(0)=1$, $\beta_3(0)=\frac{1}{2}$. Пусть f — ограниченная функция на $[-1, 1]$.

(*a*) Доказать, что $f \in \mathscr{R}(\beta_1)$ тогда и только тогда, когда $f(0+)=f(0)$, и что в этом случае

$$\int f\,d\beta_1 = f(0).$$

(*b*) Сформулировать и доказать аналогичный результат для β_2.

(*c*) Доказать, что $f \in \mathscr{R}(\beta_3)$ тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке 0.

(*d*) Пусть f непрерывна в точке 0. Доказать, что

$$\int f\,d\beta_1 = \int f\,d\beta_2 = \int f\,d\beta_3 = f(0).$$

4. Используя обозначения упражнения 3, доказать, что $\beta_2 \in \mathscr{R}(\beta_1)$, несмотря на то что $\lim S(P, \beta_2, \beta_1)$ при $\mu(P) \to 0$ не существует.

5. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность различных точек интервала $(0, 1)$, и пусть $c_n > 0$, $\sum c_n < +\infty$. Положим

$$\alpha(x) = \sum_1^\infty c_n \beta_1(x - x_n),$$

где функция β_1 определена так же, как в упражнении 3. Пусть f непрерывна на $(0, 1)$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f\,d\alpha = \sum_1^\infty c_n f(x_n).$$

Указание. Положим $\alpha_1(x)=\sum_1^N c_n\beta_1(x-x_n)$, $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$. Согласно упражнению 3, $\int f\,d\alpha_1=\sum_1^N c_n f(x_n)$. Кроме того, $\left|\int f d\alpha_2\right|\leqslant MV(\alpha_2)$, где $M=\sup|f(t)|$.

6. Пусть f отображает сегмент $[a, b]$ в пространство R^k, причем f — функция ограниченной вариации. Доказать, что функция v_f непрерывна в точке $x\in[a, b]$ тогда и только тогда, когда функция f непрерывна в этой точке.

7. Пусть $f(x)=0$ при всех иррациональных x, $f(x)=1$ при всех рациональных x. Доказать, что $f\notin\mathscr{R}$ на $[a, b]$ при любых a, b, таких, что $a<b$.

8. Показать, что

$$\int_0^3 x d([x]-x)=\frac{3}{2},$$

где $[x]$ — наибольшее из целых чисел, не превосходящих x (см. определение в упражнении 2 гл. 4).

9. Вычислить функции положительной, отрицательной и полной вариации функций

(*a*) $f(x)=3x^2-2x^3 \qquad (-2\leqslant x\leqslant 2)$,

(*b*) $f(x)=[x]-x \qquad (0\leqslant x\leqslant 2)$.

10. Пусть f — вещественная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, p и q — функции положительной и отрицательной вариации функции f, p_1 и q_1 — возрастающие функции на $[a, b]$ и $f=p_1-q_1$. Тогда $V(p)\leqslant V(p_1)$ и $V(q)\leqslant V(q_1)$, где V обозначает полную вариацию на $[a, b]$.

11. Пусть $g\in\mathscr{R}$ на $[a, b]$. Положим

$$f(x)=\int_a^x g(t)\,dt$$

и $g^+(t)=\max(g(t), 0)$, $g^-(t)=-\min(g(t), 0)$. Доказать, что f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$ и что ее функции вариации задаются равенствами

$$v(x)=\int_a^x |g(t)|\,dt, \qquad p(x)=\int_a^x g^+(t)\,dt, \qquad q(x)=\int_a^x g^-(t)\,dt.$$

12. Пусть f — функция ограниченной вариации на сегменте $[0, 2\pi]$ и $f(2\pi) = f(0)$. Доказать, что каждый из интегралов

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

не превосходит $V(f)/n$ по абсолютной величине.

Указание. Проверить, что

$$n \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, d(\sin nx) = \int_0^{2\pi} \sin nx\, df(x).$$

13. Пусть γ_1, γ_2, γ_3 — кривые в комплексной плоскости, определенные на $[0, 2\pi)$ равенствами

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \qquad \gamma_2(t) = e^{2it}, \qquad \gamma_3(t) = e^{2\pi i t \sin(1/t)}.$$

Показать, что эти три кривые имеют одно и то же множество значений, что γ_1 и γ_2 спрямляемы, что длина кривой γ_1 равна 2π, длина кривой γ_2 равна 4π, а кривая γ_3 не спрямляема.

14. Пусть γ_1 — кривая в R^k, заданная на $[a, b]$; пусть φ — непрерывное взаимно однозначное отображение сегмента $[c, d]$ на сегмент $[a, b]$, такое, что $\varphi(c) = a$. Положим, по определению, $\gamma_2(s) = \gamma_1(\varphi(s))$. Доказать, что дуга γ_2 — простая замкнутая спрямляемая кривая тогда и только тогда, когда то же самое верно в отношении γ_1. Доказать, что γ_2 и γ_1 имеют одну и ту же длину.

15. Пусть α возрастает на $[a, b]$, f и g — комплексные функции, причем $f \in \mathscr{R}(\alpha)$, $g \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$. Доказать неравенство Шварца

$$\left| \int fg\, d\alpha \right|^2 \leqslant \int |f|^2\, d\alpha \cdot \int |g|^2\, d\alpha.$$

Указание. Следовать доказательству теоремы 1.62. Вывести аналогичный результат, предполагая только, что α — функция ограниченной вариации.

16. Если $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$ для любого $b > a$ и фиксированного a, то положим

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

если этот предел существует; в этом случае мы будем говорить, что интеграл сходится.

Доказать так называемый «интегральный признак» сходимости рядов: если $f(x) \geqslant 0$ и f монотонно убывает при $x \geqslant 1$, то

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

сходится в том и только в том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^\infty f(n).$$

17. Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$ и α — функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Положим

$$\beta(x) = \int_a^x f\,d\alpha \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доказать, что

$$\int_a^b g\,d\beta = \int_a^b gf\,d\alpha.$$

18. Если γ — спрямляемая кривая в комплексной плоскости, заданная на $[0, 1]$, и если f — комплексная непрерывная функция, заданная на множестве значений кривой γ, то положим, по определению,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,d\gamma(t).$$

Пусть $\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$. Доказать, что

$$(n+1)\int_\gamma z^n\,dz = B^{n+1} - A^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Указание. Рассмотреть случай $A = 0$. При $n = 0$ результат тривиален. Допустим, что он верен при некотором n. Положим $f = \gamma^n$, $g = \gamma$, $\alpha = \gamma$ и определим β, как в упражнении 17. По предположению индукции,

$$(n+1)\beta(x) = [\gamma(x)]^{n+1}.$$

Применить упражнение 17 и проинтегрировать по частям.
19. Положим

$$f(x)=\int_{x}^{x+1}\sin(t^2)\,dt.$$

(*a*) Доказать, что $|f(x)|<2/x$ при $x>0$.

Указание. Положить $t^2=u$ и воспользоваться второй теоремой о среднем значении.

(*b*) Найти верхний и нижний пределы функции $xf(x)$ при $x\to\infty$.

ГЛАВА 7

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы уделим основное внимание комплекснозначным (и тем самым вещественнозначным) функциям, хотя многие теоремы и доказательства без труда переносятся на случай векторнозначных функций и даже отображений в общие метрические пространства. Мы предпочитаем ограничиться более простым классом функций для того, чтобы сконцентрировать внимание на наиболее важных вопросах, возникающих при изменении порядка предельных переходов.

Вводные замечания

7.1. Определение. Пусть $\{f_n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, — последовательность функций, определенных на множестве E, и пусть последовательность чисел $\{f_n(x)\}$ сходится при каждом $x \in E$. Тогда мы можем определить функцию f, полагая

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E). \tag{1}$$

В подобных случаях мы будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве E и что f — *предел*, или *предельная функция*, последовательности $\{f_n\}$. Иногда мы будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f *поточечно* на множестве E, если выполнено условие (1). Аналогично, если ряд $\sum f_n(x)$ сходится при любом $x \in E$, то мы полагаем, по определению,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E), \tag{2}$$

причем функция f называется *суммой* ряда $\sum f_n$.

Главная из возникающих в связи с этими определениями проблем такова: выяснить, сохраняются ли важнейшие свойства функций при выполнении предельных операций (1) и (2). Например, если функции f_n непрерывны, или дифференцируемы, или интегрируемы, то верно ли то же самое в отношении предельной функции? Каковы соотношения между, скажем, f'_n и f' или между интегралами от f_n и от f?

Непрерывность функции f в точке x означает, что

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x).$$

Значит, спросить, будет ли предел последовательности непрерывных функций непрерывной функцией, это все равно, что спросить, верно ли равенство

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t), \tag{3}$$

т. е. важен ли порядок, в котором осуществляются предельные переходы. В левой части равенства (3) мы сначала устремляем n к ∞, затем t к x; в правой части — сначала $t \to x$, а затем $n \to \infty$.

Мы покажем сейчас на примерах, что, вообще говоря, два предельных перехода нельзя переставить без того, чтобы это не повлияло на результат. Затем мы докажем, что при некоторых условиях порядок, в котором выполняются операции предельного перехода, не имеет значения.

Наш первый и простейший пример связан с «двойной последовательностью».

7.2. Пример. Для $m = 1, 2, 3, \ldots$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}.$$

Тогда при каждом фиксированном n

$$\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1,$$

так что

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1. \tag{4}$$

С другой стороны, при каждом фиксированном m

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0,$$

так что

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0. \tag{5}$$

7.3. Пример. Пусть

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \text{ вещественно, } n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}. \tag{6}$$

Так как $f_n(0)=0$, то и $f(0)=0$. Ряд (6) представляет сумму геометрической прогрессии, и при $x\neq 0$ эта сумма равна $1+x^2$. Значит,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x=0), \\ 1+x^2 & (x\neq 0), \end{cases} \tag{7}$$

так что сходящийся ряд, составленный из непрерывных функций, может иметь разрывную сумму.

7.4. Пример. При $m=1, 2, 3, \ldots$ положим

$$f_m(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}.$$

Если $m!\,x$ — целое число, то $f_m(x)=1$. Для всех остальных значений x имеем $f_m(x)=0$. Теперь положим

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Если x — иррациональное число, то $f_m(x)=0$ при всех m, значит, $f(x)=0$. Если x — рациональное число, скажем, $x=p/q$, то при $m\geqslant q$ произведение $m!\,x$ — целое число, так что $f(x)=1$. Значит,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}=\begin{cases} 0 & (x \text{ иррационально}), \\ 1 & (x \text{ рационально}). \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, мы получили всюду разрывную предельную функцию, которая не интегрируема по Риману (упражнение 7, гл. 6).

7.5. Пример. Пусть

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad (x \text{ вещественно}, n=1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

и

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

Тогда $f'(x)=0$, но

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx,$$

так что $\{f_n'\}$ не сходится к f'. Например,

$$f_n'(0)=\sqrt{n}\to+\infty$$

при $n\to\infty$, тогда как $f'(0)=0$.

7.6. Пример. Пусть

(10) $$f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $0 < x \leqslant 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

по теореме 3.20 (d). Ввиду того что $f_n(0) = 0$ при всяком n,

(11) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Простое вычисление показывает, что

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2n+2}.$$

Таким образом, несмотря на (11),

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n^2}{2n+2} \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Если в (10) заменить коэффициент n^2 на n, то (11) все еще выполняется, но теперь

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

тогда как

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx = 0.$$

Таким образом, предел интеграла не обязан совпадать с интегралом от предела даже тогда, когда оба эти предела конечны.

После этих примеров, показывающих, что беззаботная перестановка порядка предельных переходов может привести к ошибке, мы определим новый вид сходимости, более сильный, чем поточечная сходимость, описанная в определении 7.1. Этот новый вид сходимости позволит нам прийти к положительным результатам.

Равномерная сходимость

7.7. Определение. Мы будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, сходится *равномерно* на множестве E к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что при $n \geqslant N$ имеем

(12) $$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

для всех $x\in E$.

Ясно, что каждая равномерно сходящаяся последовательность сходится и поточечно. Разница между этими двумя понятиями заключается в следующем. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится поточечно на E, то существует функция f, такая, что для любого $\varepsilon>0$ и для любого $x\in E$ существует целое число N, зависящее от ε *и от* x, такое, что (12) выполняется при $n\geqslant N$; если же $\{f_n\}$ сходится равномерно на E, то можно при каждом $\varepsilon>0$ найти *одно* целое число N, которое будет годиться при *всех* $x\in E$.

Мы будем говорить, что ряд $\sum f_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, если последовательность $\{s_n\}$ частных сумм, определенных равенством

$$s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x),$$

равномерно сходится на множестве E.

Следующая теорема представляет собой критерий Коши равномерной сходимости.

7.8. Теорема. *Последовательность функций* $\{f_n\}$, *определенных на* E, *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon>0$ *существует целое* N, *такое, что при* $m\geqslant N$, $n\geqslant N$, $x\in E$ *имеем*

(13) $$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Доказательство. Допустим, что $\{f_n\}$ сходится равномерно на E, и пусть f — предельная функция. Тогда существует целое число N, такое, что из $n\geqslant N$, $x\in E$ следует неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

так что

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon,$$

если $n\geqslant N$, $m\geqslant N$, $x\in E$.

Обратно, пусть выполняется условие Коши. По теореме 3.11 последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится при каждом x к пределу, который мы обозначим через $f(x)$. Мы должны доказать, что сходимость равномерна.

Пусть задано число $\varepsilon>0$. Выберем N так, чтобы выполнялось (13). Зафиксируем n и устремим m к ∞ в (13). Ввиду того что $f_m(x)\to f(x)$ при $m\to\infty$, получаем

(14) $$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

при любом $n\geqslant N$ и любом $x\in E$. Доказательство закончено.

Иногда полезен следующий критерий.

7.9. Теорема. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in E).$$

Положим

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Тогда $f_n \to f$ равномерно на E в том и только в том случае, когда $M_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы не приводим подробного доказательства, так как это утверждение непосредственно следует из определения 7.7.

Вейерштрассу принадлежит очень удобный признак равномерной сходимости рядов.

7.10. Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, определенных на множестве E, и пусть*

$$|f_n(x)| \leqslant M_n \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда ряд $\sum f_n$ сходится равномерно на E, если ряд $\sum M_n$ сходится.

Заметим, что обратное не утверждается (и в действительности неверно).

Доказательство. Если ряд $\sum M_n$ сходится, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{i=n}^{m} f_i(x) \right| \leqslant \sum_{i=n}^{m} M_i \leqslant \varepsilon \qquad (x \in E),$$

если только m и n достаточно велики. Равномерная сходимость вытекает теперь из теоремы 7.8.

Равномерная сходимость и непрерывность

7.11. Теорема. *Пусть $f_n \to f$ равномерно на подмножестве E некоторого метрического пространства. Пусть x — предельная точка множества E, и пусть*

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Тогда последовательность $\{A_n\}$ сходится и

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{16}$$

Иными словами, в данном случае

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$, существует такое N, что из $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $t \in E$ следует неравенство

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Полагая в (18) $t \to x$, получаем

$$|A_n - A_m| \leqslant \varepsilon$$

при $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, так что $\{A_n\}$ — последовательность Коши, и потому сходится. Обозначим ее предел через A.

Далее,

$$|f(t) - A| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|. \tag{19}$$

Выберем сначала n так, что

$$|f(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{20}$$

при всех $t \in E$ (это возможно в силу равномерной сходимости) и что

$$|A_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{21}$$

Затем для этого n мы подберем такую окрестность V точки x, что из $t \in V$, $t \neq x$ следует

$$|f_n(t) - A_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{22}$$

Подставляя неравенства (20), (21) и (22) в (19), мы получим

$$|f(t) - A| \leqslant \varepsilon$$

для всех $t \in V$, $t \neq x$. Но это равносильно равенству (16).

7.12. Теорема. *Если $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на множестве E, и если $f_n \to f$ равномерно на E, то и функция f непрерывна на множестве E.*

Этот очень важный результат сразу следует из теоремы 7.11.

Обратное неверно, т. е. последовательность непрерывных функций может неравномерно сходиться к непрерывной функции. Соответствующий пример дает последовательность (10) из п. 7.6 (для того чтобы убедиться в том, что эта последовательность сходится неравномерно, достаточно применить теорему 7.9). Тем не менее в некоторых случаях можно утверждать обратное. В частности, имеет место следующая теорема.

7.13. Теорема. *Пусть множество E компактно. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на E, сходящаяся к непрерывной функции f на E. Если $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ и при любом $x \in E$, то $f_n \to f$ равномерно на E.*

Доказательство. Положим $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Тогда g_n — непрерывная функция, $g_n \to 0$ и $g_n \geqslant g_{n+1}$. Мы должны доказать, что $g_n \to 0$ равномерно на E.

Пусть $\varepsilon > 0$. При любом $x \in E$ существует целое число n_x, такое, что

$$0 \leqslant g_{n_x}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу непрерывности функций g_n и монотонности последовательности $\{g_n\}$ существует открытое множество $J(x)$, содержащее точку x и такое, что

$$0 \leqslant g_n(t) \leqslant \varepsilon, \tag{23}$$

если $t \in J(x)$ и $n \geqslant n_x$.

Поскольку E — компактное множество, существует конечное множество точек $x_1, \ldots, x_m$, таких, что

$$E \subset J(x_1) \cup \ldots \cup J(x_m). \tag{24}$$

Полагая

$$N = \max(n_{x_1}, n_{x_2}, \ldots, n_{x_m}),$$

на основании (23) и (24) мы заключаем, что

$$0 \leqslant g_n(t) \leqslant \varepsilon$$

при всех $t \in E$, если $n \geqslant N$. Тем самым доказано, что сходимость равномерна.

Отметим, что компактность здесь существенна. Например, если

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad (0 < x < 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{25}$$

то $f_n(x) \to 0$ монотонно на $(0, 1)$, но сходимость неравномерна.

Равномерная сходимость и интегрирование

7.14. Теорема. *Пусть α — монотонно возрастающая на $[a, b]$ функция. Пусть $f_n \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть $f_n \to f$ равномерно на $[a, b]$. Тогда $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ и*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,d\alpha. \tag{26}$$

(Существование предела в (26) заранее не предполагается.)

Доказательство. Достаточно доказать теорему для вещественных f_n. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\eta > 0$ так, что

$$\eta\,[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{27}$$

Существует такое целое n, что

(28) $$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\eta \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

так как сходимость равномерна.

Зафиксируем n и выберем разбиение P сегмента $[a, b]$ так, чтобы иметь

(29) $$U(P, f_n, \alpha)-L(P, f_n, \alpha)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

Это возможно по теореме 6.6.

Поскольку $f(x)\leqslant f_n(x)+\eta$, из (27) далее вытекает, что

(30) $$U(P, f, \alpha)\leqslant U(P, f_n, \alpha)+\frac{\varepsilon}{3},$$

а так как $f(x)\geqslant f_n(x)-\eta$, то

(31) $$L(P, f, \alpha)\geqslant L(P, f_n, \alpha)-\frac{\varepsilon}{3}.$$

Комбинируя (29), (30) и (31), получаем

(32) $$U(P, f, \alpha)-L(P, f, \alpha)\leqslant\varepsilon,$$

откуда следует, что $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$ (по теореме 6.6).

Для доказательства равенства (26) выберем такое N, что из $n\geqslant N$ следует

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Тогда при $n\geqslant N$

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha-\int_a^b f_n\,d\alpha\right|=\left|\int_a^b (f-f_n)\,d\alpha\right|\leqslant\int_a^b |f-f_n|\,d\alpha\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\,[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, отсюда вытекает (26).

Следствие. *Если* $f_n\in\mathscr{R}(\alpha)$ *на* $[a, b]$ *и если*

$$f(x)=\sum_1^\infty f_n(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

причем ряд сходится равномерно на $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f\,d\alpha=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f_n\,d\alpha.$$

Иными словами, ряд можно интегрировать почленно.

При изучении последовательностей интегралов вида

$$\int_a^b f\,dg_n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

где функция f непрерывна, а функции g_n — ограниченной вариации на $[a, b]$, обнаруживается, что равномерная сходимость последовательности $\{g_n\}$ к g — условие, еще недостаточно сильное, чтобы обеспечить равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,dg_n = \int_a^b f\,dg.$$

7.15. Пример. Пусть

$$g_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ n=1, 2, 3, \ldots) \tag{33}$$

и

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\cos m^6 x \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi). \tag{34}$$

По теореме 7.10 ряд в (34) сходится равномерно, так что функция f непрерывна на $[0, 2\pi]$. Кроме того, $g_n \to 0$ равномерно на $[0, 2\pi]$. Теперь заметим, что

$$\int_0^{2\pi} f\,dg_n = \int_0^{2\pi} f g_n'\,dx = \sqrt{n}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Положим $n=p^6$, где p — положительное целое. Ряд (34), почленно умноженный на $\cos nx$, также сходится равномерно, и мы можем проинтегрировать его почленно. Поскольку

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\cdot\cos mx\,dx = 0,$$

каковы бы ни были различные положительные числа m, n, имеем

$$\sqrt{n}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = p^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{p^2}\cos^2 p^6x\,dx = p\pi,$$

так что при $n=p^6$

$$\int_0^{2\pi} f\,dg_n = \pi\sqrt[6]{n}.$$

Таким образом, числа $\int\limits_0^{2\pi} f\,dg_n$ образуют неограниченную последовательность, хотя $g_n \to 0$ равномерно.

Теперь мы сформулируем имеющийся здесь положительный результат.

7.16. Теорема. *Пусть $\{g_n\}$ — последовательность функций ограниченной вариации на $[a, b]$, причем $g_n(a)=0$, и пусть g — такая функция, что*

$$\lim_{n\to\infty} V(g-g_n)=0 \tag{35}$$

и $g(a)=0$. Тогда для любой функции f, непрерывной на $[a, b]$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f\,dg_n = \int\limits_a^b f\,dg. \tag{36}$$

Кроме того, $g_n \to g$ равномерно на $[a, b]$.

Здесь V, как обычно, обозначает полную вариацию на $[a, b]$.

Доказательство. Вследствие неравенства

$$V(g) \leqslant V(g_n)+V(g-g_n)$$

(теорема 6.24) g — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, так что все интегралы в (36) существуют. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f\,dg - \int\limits_a^b f\,dg_n\right| = \left|\int\limits_a^b f d(g-g_n)\right| \leqslant MV(g-g_n),$$

и (36) следует из (35).

Кроме того, $g_n \to g$ равномерно, так как

$$|g(x)-g_n(x)| \leqslant V(g-g_n) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Заметим, что предположение $g_n(a)=g(a)=0$ сделано только ради удобства. Прибавив постоянные c_n к функциям g_n, мы не изменим интегралов, а сходимость последовательности $\{g_n(x)\}$ для одного значения $x \in [a, b]$, как легко показать, влечет за собой равномерную сходимость.

За другими относящимися сюда результатами мы отсылаем к упражнениям 9 и 10.

Равномерная сходимость и дифференцирование

Мы уже видели в примере 7.5, что из равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ не следует даже поточечной сходимости последовательности $\{f'_n\}$. Таким образом, нужны более сильные предположения, чтобы заключить, что $f'_n \to f'$ при $f_n \to f$.

7.17. Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность дифференцируемых функций на $[a, b]$, такая, что последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится при некотором $x_0 \in [a, b]$. Если последовательность $\{f'_n\}$ сходится равномерно на $[a, b]$, то и последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции f, причем*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{37}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такое N, что из $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ следует

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{38}$$

и

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{39}$$

Если мы применим теорему 5.20 о среднем значении к функции $f_n - f_m$, то, как показывает (39), мы получим

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leqslant \frac{|x-t|\,\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{40}$$

при любых x и t из $[a, b]$ для $n \geqslant N$, $m \geqslant N$. Из неравенства

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

следует, в силу (38) и (40), что

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b,\ n \geqslant N,\ m \geqslant N),$$

а потому $\{f_n\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Пусть

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Зафиксируем точку x сегмента $[a, b]$ и положим

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{41}$$

при $a \leqslant t \leqslant b$, $t \neq x$. Тогда

$$\lim_{t\to x} \varphi_n(t) = f'_n(x) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3. \ldots). \tag{42}$$

Первое неравенство в (40) показывает, что

$$|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\qquad(n\geqslant N,\ m\geqslant N),$$

поэтому $\{\varphi_n\}$ сходится равномерно при $t\neq x$. Поскольку $\{f_n\}$ сходится к f, то, в силу (41),

(43) $$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$$

равномерно на множестве всех t, таких, что $a\leqslant t\leqslant b$, $t\neq x$.

Применяя к последовательности $\{\varphi_n\}$ теорему 7.11, заключаем на основании (42) и (43), что

$$\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x),$$

а это, в силу определения функции $\varphi(t)$, и есть (37).

Замечание. Если дополнительно предположить, что функции f_n' непрерывны, то можно получить гораздо более короткое доказательство равенства (37), опирающееся на теорему 7.14 и на основную теорему интегрального исчисления.

7.18. Теорема. *Существует вещественная непрерывная на вещественной прямой функция, которая нигде не дифференцируема.*

Доказательство. Положим

(44) $$\varphi(x)=\begin{cases}x & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ 2-x & (0\leqslant x\leqslant 2)\end{cases}$$

и доопределим $\varphi(x)$ для всех остальных вещественных x, полагая

$$\varphi(x+2)=\varphi(x).$$

Тогда функция φ непрерывна на R^1. Пусть

(45) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^nx).$$

Поскольку $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, то, как показывает теорема 7.10, ряд (45) сходится равномерно на R^1, так что функция f непрерывна на R^1 по теореме 7.12.

Зафиксируем теперь вещественное число x и положительное целое m. Существует целое k, такое, что

(46) $$k\leqslant 4^mx\leqslant k+1.$$

Положим

(47) $$\alpha_m=4^{-m}k,\qquad\beta_m=4^{-m}(k+1)$$

и рассмотрим числа $4^n\beta_m$ и $4^n\alpha_m$. Если $n>m$, то их разность — четное целое; если $n=m$, то они целые, а их разность равна 1; если $n<m$, то между ними не лежит ни одно целое число. Значит,

$$(48)\qquad |\varphi(4^n\beta_m)-\varphi(4^n\alpha_m)|=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ 4^{n-m}, & \text{если } n\leqslant m.\end{cases}$$

Согласно (45) и (48),

$$f(\beta_m)-f(\alpha_m)=\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n[\varphi(4^n\beta_m)-\varphi(4^n\alpha_m)];$$

следовательно,

$$|f(\beta_m)-f(\alpha_m)|\geqslant\left(\frac{3}{4}\right)^m-\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-m}>\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m,$$

или

$$(49)\qquad \left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right|>\frac{1}{2}\cdot 3^m.$$

Теорема 5.19 и неравенство (49) показывают, что функция f не дифференцируема в точке x, так как $\alpha_m\leqslant x\leqslant\beta_m$ и $\beta_m-\alpha_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Равностепенно непрерывные семейства функций

В теореме 3.6 мы видели, что каждая ограниченная последовательность комплексных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность. Возникает вопрос: верно ли что-либо подобное для последовательностей функций? Чтобы уточнить этот вопрос, мы определим два вида ограниченности.

7.19. Определение. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, определенных на множестве E.

Мы будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ *поточечно ограничена* на E, если последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена при каждом $x\in E$, т. е. если существует конечнозначная функция φ, определенная на E и такая, что

$$|f_n(x)|<\varphi(x)\qquad (x\in E,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Мы говорим, что последовательность $\{f_n\}$ *равномерно ограничена* на множестве E, если существует число M, такое, что

$$|f_n(x)|<M\qquad (x\in E,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Если последовательность $\{f_n\}$ поточечно ограничена на множестве E, а E_1 — счетное подмножество множества E, то всегда можно найти подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, такую, что последовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ будет сходиться при каждом $x \in E_1$. Это можно сделать с помощью диагонального процесса, который используется ниже при доказательстве теоремы 7.23.

Однако даже в том случае, когда $\{f_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность непрерывных функций на компактном множестве E, не обязательно существует подпоследовательность, сходящаяся поточечно на E. В приводимом ниже примере было бы затруднительно доказать это с помощью средств, которыми мы располагаем в настоящий момент, но доказательство оказывается совсем простым, если сослаться на теорему из гл. 10.

7.20. Пример. Пусть

$$f_n(x) = \sin nx \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Допустим, что существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}$, такая, что последовательность $\{\sin n_k x\}$ сходится при каждом $x \in [0, 2\pi)$. В этом случае мы получим

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi);$$

значит,

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi). \tag{50}$$

По теореме Лебега об интегрировании ограниченно сходящихся последовательностей (теорема 10.32), из (50) следовало бы, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2\, dx = 0. \tag{51}$$

Однако простое вычисление дает

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2\, dx = 2\pi,$$

что противоречит равенству (51).

Другой вопрос таков: всякая ли сходящаяся последовательность содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность? Следующий наш пример показывает, что это не обязательно имеет место даже в том случае, когда последовательность (непрерывных функций) определена на компактном множестве и равномерно ограничена на нем. (Пример 7.6 показывает, что последовательность ограниченных функций может быть сходящейся, не будучи равномерно ограниченной; но совершенно очевидно, что равномерная сходимость последовательности ограниченных функций влечет за собой их равномерную ограниченность.)

7.21. Пример. Пусть

$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Тогда $|f_n(x)|\leqslant 1$, так что последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена на $[0,\ 1]$. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

но

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

так что никакая подпоследовательность не сходится равномерно на $[0,\ 1]$.

В этой связи нам понадобится понятие равностепенной непрерывности. Оно дано в следующем определении.

7.22. Определение. Семейство $\mathscr{F}$ функций f, определенных на подмножестве E метрического пространства X, называется *равностепенно непрерывным* на E, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, когда $d(x,\ y)<\delta$, $x\in E$, $y\in E$, а $f\in\mathscr{F}$. Здесь d обозначает расстояние в X.

Ясно, что каждая функция, входящая в состав равностепенно непрерывного семейства, равномерно непрерывна.

Последовательность $\{f_n\}$ в примере 7.21 не является равностепенно непрерывной.

Равностепенная непрерывность и равномерная сходимость непрерывных функций тесно связаны друг с другом.

7.23. Теорема. *Пусть K — компактное множество.*

(*a*) *Если $\{f_n\}$ — равномерно сходящаяся последовательность функций, непрерывных на K, то $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна на K.*

(*b*) *Если $\{f_n\}$ поточечно ограничена и равностепенно непрерывна на K, то $\{f_n\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность и равномерно ограничена на K.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$, и пусть выполнены предположения (*a*). Тогда существуют целое N и $\delta>0$, такие, что

$$|f_n(x)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (x\in K,\ n>N) \tag{52}$$

и

$$|f_i(x)-f_i(y)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (1\leqslant i\leqslant N;\ d(x,\ y)<\delta). \tag{53}$$

В (53) мы воспользовались тем фактом, что непрерывные функции равномерно непрерывны на компактных множествах. Если $x \in K$, $y \in K$, $d(x, y) < \delta$ и $n > N$, то

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство и неравенство (53) показывают, что утверждение (a) выполняется.

Докажем теперь утверждение (b). Не ограничивая общности, мы можем предположить, что компакт K содержит бесконечное число точек.

Сначала выберем в K счетное подмножество E, такое, что E плотно в K (т. е. такое, что K совпадает с замыканием множества E).

Чтобы убедиться в существовании такого множества E, можно рассуждать следующим образом. Пусть $J(x, r)$ — множество всех точек $y \in K$, для которых $d(x, y) < r$. Из компактности множества K следует, что при каждом $r > 0$ уже конечное число из них, скажем, $J(x_1, r), \ldots, J(x_m, r)$ покрывают K. Полагая $r = 1$, $1/2$, $1/3$, ..., мы получаем счетную базу пространства K. (Определение базы см. в упражнении 11 к гл. 2.) Если выбрать по точке из каждого множества этой счетной базы, то полученное таким образом счетное множество окажется плотным в K.

Пусть $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ — точки множества E, расположенные в последовательность.

Ввиду того что последовательность $\{f_n(x_1)\}$ ограничена, существует подпоследовательность, которую мы обозначим через $\{f_{1,k}\}$, такая, что последовательность $\{f_{1,k}(x_1)\}$ сходится при $k \to \infty$.

Рассмотрим теперь последовательности $S_1, S_2, S_3, \ldots$, которые можно расположить в таблицу

$$\begin{array}{l}
S_1: f_{1,1},\ f_{1,2},\ f_{1,3},\ f_{1,4},\ \ldots \\
S_2: f_{2,1},\ f_{2,2},\ f_{2,3},\ f_{2,4},\ \ldots \\
S_3: f_{3,1},\ f_{3,2},\ f_{3,3},\ f_{3,4},\ \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

Пусть они обладают следующими свойствами:

(α) S_n — (бесконечная) подпоследовательность последовательности S_{n-1} при $n = 2, 3, 4, \ldots$.

(β) $\{f_{n,k}(x_n)\}$ сходится при $k \to \infty$ (ограниченность последовательности $\{f_n\}$ позволяет выбрать S_n с таким свойством);

(γ) порядок, в котором выписываются функции, один и тот же во всех последовательностях, т. е. если одна из функций предшествует другой в S_1, то они так же расположены во всех S_n

до тех пор, пока одна из этих функций не вычеркивается. Таким образом, передвигаясь из какой-нибудь строки таблицы в следующую строку вниз, функции могут переместиться влево, но никогда не перемещаются вправо.

Теперь мы спустимся по диагонали нашей таблицы, т. е. рассмотрим последовательность

(54) $$S: f_{1,1},\ f_{2,2},\ f_{3,3},\ f_{4,4} \dots .$$

Согласно (γ) последовательность S (за исключением, возможно, первых $n-1$ членов) — подпоследовательность последовательности S_n при $n=1, 2, 3, \dots$. Значит, из (β) следует, что последовательность $\{f_{n,n}(x_i)\}$ сходится при $n \to \infty$ при каждом $x_i \in E$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Ввиду того что последовательность $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна, существует число $\delta > 0$, такое, что из $d(x, y) < \delta$ следует, что

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Пусть $J(x, \delta)$ имеет тот же смысл, что в начале доказательства.

Существует конечный набор точек $x_1, \dots, x_p$ множества E, такой, что

$$K \subset J(x_1, \delta) \cup \dots \cup J(x_p, \delta),$$

так как E плотно в K, а K компактно. Выберем N так, чтобы иметь

$$|f_{n,n}(x_i) - f_{m,m}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (i = 1, \dots, p),$$

если $n \geqslant N$, $m \geqslant N$.

Тогда при любом $x \in K$ существует точка x_i, такая, что $1 \leqslant i \leqslant p$ и $x \in J(x_i, \delta)$; поэтому из $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ следует, что

$$|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leqslant |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_i)| + |f_{n,n}(x_i) - f_{m,m}(x_i)| + \\ + |f_{m,m}(x_i) - f_{m,m}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{f_{n,n}\}$ сходится равномерно на K.

Чтобы доказать равномерную ограниченность последовательности $\{f_n\}$ на множестве K, положим

(55) $$\varphi(x) = \sup |f_n(x)| \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Задав $\varepsilon > 0$, выберем $\delta > 0$ таким, чтобы из неравенства $d(x, y) < \delta$ следовало

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Зафиксируем две точки x и y. Из неравенства

$$|f_n(y)| < |f_n(x)| + \varepsilon$$

следует, что

(56) $$\varphi(y) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon,$$

а из неравенства

$$|f_n(x)| < |f_n(y)| + \varepsilon,$$

что

(57) $$\varphi(x) \leqslant \varphi(y) + \varepsilon.$$

В силу (56) и (57),

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon,$$

если только $d(x, y) < \delta$, так что φ — функция, непрерывная на K. Функция φ ограничена, так как K — компактное множество. Теорема доказана.

Теорема Стона — Вейерштрасса

7.24. Теорема. *Если f — непрерывная комплексная функция на $[a, b]$, то существует такая последовательность многочленов P_n, что*

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x)$$

равномерно на $[a, b]$. Если функция f вещественна, то и многочлены P_n можно выбрать вещественными.

Именно в такой форме эта теорема была первоначально открыта Вейерштрассом.

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $[a, b] = [0, 1]$. Будем считать также, что $f(0) = f(1) = 0$. Действительно, если теорема доказана для этого случая, то рассмотрим

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Здесь $g(0) = g(1) = 0$, и если g представима в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов, то такова и f, так как $f - g$ — многочлен. Будем считать, что $f(x) = 0$ вне сегмента $[0, 1]$. Тогда функция f равномерно непрерывна на всей вещественной прямой.

Положим

(58) $$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где c_n выбраны так, что

(59) $$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Нам нужны некоторые сведения о порядке величины c_n. Ввиду того что

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx\geqslant 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx\geqslant$$

$$\geqslant 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)\,dx=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}},$$

из (59) следует, что

(60) $$c_n<\sqrt{n}.$$

Неравенство $(1-x^2)^n\geqslant 1-nx^2$, которым мы воспользовались выше, легко проверяется. Для этого нужно рассмотреть функцию

$$(1-x^2)^n-1+nx^2,$$

которая равна нулю при $x=0$ и имеет положительную производную в $(0,1)$.

При любом $\delta>0$ из (60) следует, что

(61) $$Q_n(x)\leqslant\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n\qquad(\delta\leqslant|x|\leqslant 1),$$

так что $Q_n\to 0$ равномерно в сегменте $\delta\leqslant|x|\leqslant 1$.

Положим теперь

(62) $$P_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)\,Q_n(t)\,dt\qquad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

Наши предположения о функции f показывают (с помощью простой замены переменной), что

$$P_n(x)=\int_{-x}^{1-x}f(x+t)\,Q_n(t)\,dt=\int_{0}^{1}f(t)\,Q_n(t-x)\,dt,$$

а последний интеграл, очевидно, есть многочлен по x. Таким образом, $\{P_n\}$ — последовательность многочленов, причем вещественная, если вещественна функция f. Задав $\varepsilon>0$, выберем $\delta>0$ так, чтобы из $|y-x|<\delta$ следовало

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $M = \sup |f(x)|$. Используя (59), (61) и тот факт, что $Q_n(x) \geqslant 0$, мы видим, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]\, Q_n(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 4M \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при всех достаточно больших n. Теорема доказана.

Поучительно набросать графики функций Q_n для нескольких значений n. Отметим еще, что равномерная непрерывность функции f была нам нужна для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{P_n\}$.

При доказательстве теоремы 7.30 нам не потребуется теорема 7.24 в полном объеме, а потребуется только один ее частный случай, который мы сформулируем в виде следствия.

7.25. Следствие. *Для любого сегмента* $[-a, a]$ *существует последовательность вещественных многочленов* P_n, *такая, что* $P_n(0) = 0$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$$

равномерно на $[-a, a]$.

Доказательство. По теореме 7.24 существует последовательность $\{P_n^*\}$ вещественных многочленов, сходящаяся к $|x|$ равномерно на $[-a, a]$. В частности, $P_n^*(0) \to 0$ при $n \to \infty$. Многочлены

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

обладают нужными свойствами.

Теперь мы выделим те свойства многочленов, на которых основана теорема Вейерштрасса.

7.26. Определение. Совокупность $\mathscr{A}$ комплексных функций, определенных на множестве E, называется *алгеброй*, если (i) $f + g \in \mathscr{A}$, (ii) $fg \in \mathscr{A}$, и (iii) $cf \in \mathscr{A}$ при всех $f \in \mathscr{A}$, $g \in \mathscr{A}$ и всех комплексных постоянных c. Иными словами, множество $\mathscr{A}$ замкнуто относительно сложения, умножения и умножения на скаляры.

Мы будем рассматривать также алгебры вещественных функций; в этом случае в (iii) речь идет, конечно, об умножении лишь на вещественные c.

Множество $\mathscr{A}$ функций, обладающее тем свойством, что $f \in \mathscr{A}$, если $f_n \in \mathscr{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и $f_n \to f$ равномерно на E, называется *равномерно замкнутым*.

Пусть $\mathscr{B}$ — множество всех функций, которые служат пределами равномерно сходящихся на множестве E последовательностей элементов множества $\mathscr{A}$. Тогда $\mathscr{B}$ называется *равномерным замыканием* множества $\mathscr{A}$.

Например, множество всех многочленов — алгебра, и теорему Вейерштрасса можно сформулировать так: множество всех функций, непрерывных на $[a, b]$, есть равномерное замыкание множества всех многочленов на $[a, b]$.

7.27. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — равномерное замыкание алгебры $\mathscr{A}$, состоящей из ограниченных функций. Тогда $\mathscr{B}$ — равномерно замкнутая алгебра.*

Доказательство. Если $f \in \mathscr{B}$ и $g \in \mathscr{B}$, то существуют равномерно сходящиеся последовательности $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, такие, что $f_n \to f$, $g_n \to g$ и $f_n \in \mathscr{A}$, $g_n \in \mathscr{A}$. Пользуясь тем, что мы имеем дело с ограниченными функциями, легко показать, что

$$f_n + g_n \to f + g, \quad f_n g_n \to fg, \quad cf_n \to cf,$$

где c — любая постоянная, причем сходимость равномерна во всех трех случаях.

Значит, $f + g \in \mathscr{B}$, $fg \in \mathscr{B}$ и $cf \in \mathscr{B}$, так что $\mathscr{B}$ — алгебра. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно сходящаяся последовательность элементов алгебры $\mathscr{B}$. Существуют функции $g_n \in \mathscr{A}$, такие, что

$$|f_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Если $f_n \to f$ равномерно, то ясно, что и $g_n \to f$ равномерно, так что $f \in \mathscr{B}$ и $\mathscr{B}$ равномерно замкнуто.

7.28. Определение. Пусть $\mathscr{A}$ — множество функций, определенных на множестве E. Тогда говорят, что $\mathscr{A}$ *разделяет точки* множества E, если для каждой пары различных точек $x_1, x_2 \in E$ найдется функция $f \in \mathscr{A}$, такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Если для каждой точки $x \in E$ найдется функция $g \in \mathscr{A}$, такая, что $g(x) \neq 0$, то мы будем говорить, что алгебра $\mathscr{A}$ *не исчезает ни в одной точке множества* E.

Алгебра всех многочленов от одной переменной, очевидно, обладает этими свойствами на R^1. Примером алгебры, не разделяющей точек, служит множество всех четных многочленов, рассматриваемых, скажем, на $[-1, 1]$, так как $f(-x)=f(x)$ для каждой четной функции f.

Следующая теорема иллюстрирует эти понятия.

7.29. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра функций на множестве E, $\mathscr{A}$ разделяет точки и не исчезает ни в одной точке множества E. Пусть x_1, x_2 — различные точки множества E и c_1, c_2 — постоянные (вещественные, если $\mathscr{A}$ — вещественная алгебра). Тогда $\mathscr{A}$ содержит функцию f, такую, что*

$$f(x_1)=c_1, \quad f(x_2)=c_2.$$

Доказательство. Наши предположения показывают, что $\mathscr{A}$ содержит функции g и h, такие, что $g(x_1)\neq g(x_2)$ и $h(x_1)\neq 0$. Положим

$$u=g+\lambda h,$$

где λ — постоянная, выбранная следующим образом: если $g(x_1)\neq 0$, то $\lambda=0$; если $g(x_1)=0$, то $g(x_2)\neq 0$, и существует число $\lambda\neq 0$, такое, что

$$\lambda[h(x_1)-h(x_2)]\neq g(x_2).$$

Тогда $u\in\mathscr{A}$ и наш выбор λ показывает, что $u(x_1)\neq u(x_2)$ и $u(x_1)\neq 0$. Если

$$\alpha=u^2(x_1)-u(x_1)u(x_2),$$

то $\alpha\neq 0$; если

$$f_1=\alpha^{-1}[u^2-u(x_2)u],$$

то $f_1\in\mathscr{A}$, $f_1(x_1)=1$, $f_1(x_2)=0$.

Подобным же образом мы проверим, что существует функция $f_2\in\mathscr{A}$, такая, что $f_2(x_1)=0$, $f_2(x_2)=1$. Тогда функция $f=c_1f_1+$ $+c_2f_2$ обладает нужными свойствами.

Теперь мы докажем теорему Стона, обобщающую теорему Вейерштрасса.

7.30. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра вещественных непрерывных функций на компактном множестве K. Если $\mathscr{A}$ разделяет точки множества K и не исчезает ни в одной точке множества K, то равномерное замыкание $\mathscr{B}$ алгебры $\mathscr{A}$ содержит все функции, непрерывные на K.*

Мы разобьем доказательство на четыре шага.

Первый шаг. *Если $f\in\mathscr{B}$, то $|f|\in\mathscr{B}$.*

Доказательство. Пусть

$$a=\sup|f(x)| \qquad (x\in K), \tag{63}$$

и пусть задано число $\varepsilon > 0$. Согласно следствию 7.25, существуют вещественные числа $c_1, \ldots, c_n$, такие, что

$$(64) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon \qquad (-a \leqslant y \leqslant a).$$

Функция $g = \sum_{1}^{n} c_i f^i$ входит в состав множества $\mathscr{B}$, так как $\mathscr{B}$ — алгебра. Согласно (63) и (64), мы имеем

$$|g(x) - |f(x)|| < \varepsilon \qquad (x \in K).$$

Поскольку алгебра $\mathscr{B}$ равномерно замкнута, то отсюда следует, что $|f| \in \mathscr{B}$.

Второй шаг. *Если* $f \in \mathscr{B}$ *и* $g \in \mathscr{B}$, *то* $\max(f, g) \in \mathscr{B}$ *и* $\min(f, g) \in \mathscr{B}$.

При этом $h = \max(f, g)$ означает, что

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geqslant g(x), \\ g(x), & \text{если} \quad f(x) < g(x); \end{cases}$$

$\min(f, g)$ определяется аналогично.

Доказательство. Наше утверждение следует из доказанного на первом шаге и из тождеств

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Разумеется, этот результат можно по индукции распространить на любое конечное множество функций: если $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{B}$, то $\max(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{B}$ и $\min(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{B}$.

Третий шаг. *Пусть заданы вещественная функция* f, *непрерывная на* K, *точка* $x \in K$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда найдется функция* $g_x \in \mathscr{B}$, *такая, что* $g_x(x) = f(x)$ *и*

$$(65) \qquad g_x(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K).$$

Доказательство. Поскольку $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ и $\mathscr{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 7.29, то и $\mathscr{B}$ удовлетворяет этим условиям. Значит, для любого $y \in K$ можно найти функцию $h_y \in \mathscr{B}$, такую, что

$$(66) \qquad h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y).$$

В силу непрерывности функции h_y, существует открытое множество J_y, содержащее точку y и такое, что

$$(67) \qquad h_y(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in J_y).$$

Ввиду того что K — компакт, имеется конечное множество точек $y_1, \ldots, y_n$, таких, что

(68) $$K \subset J_{y_1} \cup \ldots \cup J_{y_n}.$$

Положим

$$g_x = \max(h_{y_1}, \ldots, h_{y_n}).$$

Согласно установленному на втором шаге, $g_x \in \mathscr{B}$, а из соотношений (66) — (68) следует, что g_x обладает и остальными нужными свойствами.

Четвертый шаг. *Пусть заданы вещественная функция f, непрерывная на K, и $\varepsilon > 0$. Существует функция $h \in \mathscr{B}$, такая, что*

(69) $$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in K).$$

Это утверждение равносильно утверждению теоремы, так как $\mathscr{B}$ равномерно замкнута.

Доказательство. Рассмотрим функции g_x, построенные на третьем шаге для каждого $x \in K$. В силу непрерывности функции g_x, существует открытое множество V_x, содержащее x и такое, что

(70) $$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in V_x).$$

Ввиду того что K компактно, существует конечное множество точек $x_1, \ldots, x_m$, таких, что

(71) $$K \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m}.$$

Положим $h = \min(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m})$. Как было установлено на втором шаге, $h \in \mathscr{B}$, и из (65) следует, что

(72) $$h(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K).$$

С другой стороны, из (70) и (71) следует, что

(73) $$h(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in K).$$

Из (72) и (73) вытекает (69).

Теорема 7.30 не верна для произвольных комплексных алгебр. Контрпример дан в упражнении 21. Однако утверждение теоремы остается верным даже и для комплексных алгебр, если на $\mathscr{A}$ наложить еще одно условие, а именно если потребовать, чтобы $\mathscr{A}$ была *самосопряженной*. Это означает, что для любой функции $f \in \mathscr{A}$ комплексно-сопряженная с ней функция $\bar{f}$ тоже принадлежит $\mathscr{A}$; функция $\bar{f}$ определяется равенством $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

7.31. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — самосопряженная алгебра комплексных непрерывных функций на компактном множестве K. Пусть $\mathscr{A}$ разделяет точки множества K и не исчезает ни в одной точке множества K. Тогда равномерное замыкание $\mathscr{B}$ алгебры $\mathscr{A}$ содержит все комплексные непрерывные на K функции.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}_R$ — множество всех вещественных функций на K, принадлежащих алгебре $\mathscr{A}$. Если $f \in \mathscr{A}$ и $f = u + iv$, где u, v — вещественны, то $2u = f + \bar{f}$, а так как $\mathscr{A}$ — самосопряженная алгебра, то $u \in \mathscr{A}_R$. Если $x_1 \neq x_2$, то существует $f \in \mathscr{A}$, такая, что $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 0$; значит, $0 = u(x_2) \neq u(x_1) = 1$, откуда следует, что $\mathscr{A}_R$ разделяет точки множества K. Если $x \in K$, то $g(x) \neq 0$ при некотором $g \in \mathscr{A}$ и имеется комплексное число λ, такое, что $\lambda g(x) > 0$; если $f = \lambda g$, $f = u + iv$, то отсюда следует, что $u(x) > 0$; значит, $\mathscr{A}_R$ не исчезает ни в одной точке множества K.

Таким образом, $\mathscr{A}_R$ удовлетворяет условиям теоремы 7.30. Следовательно, каждая вещественная непрерывная на K функция принадлежит равномерному замыканию алгебры $\mathscr{A}_R$, т. е. принадлежит $\mathscr{B}$. Если f — комплексная непрерывная на K функция, $f = u + iv$, то $u \in \mathscr{B}$, $v \in \mathscr{B}$, значит, и $f \in \mathscr{B}$. Доказательство закончено.

7.32. Замечания. Пусть $\mathscr{C}(K)$ обозначает множество всех вещественных непрерывных функций на компактном пространстве K. Определим норму функций $f \in \mathscr{C}(K)$ равенством

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|. \tag{74}$$

По теореме 4.15 $\|f\| < \infty$ при каждом $f \in \mathscr{C}(K)$. Очевидно, что $\|f\| = 0$ только тогда, когда $f(x) = 0$ при всех $x \in K$, т. е. $f = 0$, и нетрудно проверить, что

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \qquad (f, g \in \mathscr{C}(K)).$$

Значит, если определить расстояние между f и g как $\|f - g\|$, то аксиома 2.17 для расстояния выполняется.

Используя эту метрику, мы можем определить теперь открытые множества, замкнутые множества, предельные точки, сходящиеся последовательности и т. д. в $\mathscr{C}(K)$. Расстояние в $\mathscr{C}(K)$ определено так, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f тогда и только тогда, когда $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на K; $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{C}(K)$ тогда и только тогда, когда $\{f_n\}$ сходится равномерно на K. Значит, из теоремы 7.12 следует, что $\mathscr{C}(K)$ — *полное* метрическое пространство.

Замкнутые подмножества пространства $\mathscr{C}(K)$ — это в точности те самые множества, которые в определении 7.26 были названы *равномерно замкнутыми.*

Всякое компактное подмножество в $\mathscr{C}(K)$ — это равномерно ограниченное равностепенно непрерывное множество функций. Обратно, замыкание каждого равномерно ограниченного равностепенно непрерывного множества функций из $\mathscr{C}(K)$ есть компактное подмножество пространства $\mathscr{C}(K)$. Это утверждение, по существу, — переформулировка теоремы 7.23.

Теорема 7.30 (теорема Стона — Вейерштрасса) может быть переформулирована так: *если $\mathscr{A}$ — подалгебра в $\mathscr{C}(K)$, разделяющая точки множества K и не исчезающая ни в одной точке множества K, то алгебра $\mathscr{A}$ плотна в пространстве $\mathscr{C}(K)$.*

Все эти замечания применимы также и к пространству всех *комплексных* функций, непрерывных на K; но только к условиям теоремы Стона — Вейерштрасса нужно добавить самосопряженность.

Упражнения

1. Доказать, что всякая равномерно сходящаяся последовательность ограниченных функций равномерно ограничена.

2. Пусть последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ сходятся равномерно на E. Доказать, что последовательность $\{f_n+g_n\}$ сходится равномерно на E. Пусть, кроме того, $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — последовательности ограниченных функций. Доказать, что последовательность $\{f_n g_n\}$ сходится равномерно на E.

3. Построить последовательности $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, которые сходятся равномерно на E, но $\{f_n g_n\}$ не сходится равномерно на E (разумеется, $\{f_n g_n\}$ сходится на E).

4. Рассмотрим ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x}.$$

При каких значениях x этот ряд сходится абсолютно? На каких сегментах он сходится равномерно? На каких сегментах он перестает быть равномерно сходящимся? Непрерывна ли функция f в тех точках, в которых ряд сходится? Ограничена ли f?

5. Пусть

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \left(x<\dfrac{1}{n+1}\right), \\ \sin^2\dfrac{\pi}{x} & \left(\dfrac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(\dfrac{1}{n}<x\right). \end{cases}$$

Показать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к непрерывной функции, но неравномерно. Воспользоваться рядом $\sum f_n$ для доказательства того, что абсолютная сходимость (даже если она имеет место при всех x) не влечет за собой равномерной сходимости.

6. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

сходится равномерно на каждом ограниченном сегменте, но не сходится абсолютно ни при одном значении x.

7. Положим

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2},$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$, x — вещественное число. Показать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f и что равенство

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

верно, если $x \neq 0$, и неверно, если $x=0$.

8. Пусть

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность попарно различных точек интервала (a, b), и пусть ряд $\sum |c_n|$ сходится. Доказать, что ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

сходится равномерно, что функция f непрерывна при любом $x \neq x_n$ и что f — функция ограниченной вариации.

9. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность функций ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$, обладающая следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что из неравенств $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ следует неравенство $V(g_n - g_m) < \varepsilon$. Доказать, что существует функция g, имеющая ограниченную вариацию на $[a, b]$ и такая, что $V(g_n - g) \to 0$ при $n \to \infty$.

10. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, и пусть $\{g_n\}$ — последовательность, для которой

(a) $V(g_n) \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,dg_n=\int_a^b f\,dg.$$

Заметим, что предположение здесь слабее предположений теоремы 7.16.

Указание. Сначала показать, что $V(g)\leqslant M$. Далее, для любого разбиения $P: a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b$ имеем

$$\left|\int_a^b f\,dg-\int_a^b f\,dg_n\right|\leqslant\sum_{i=1}^m\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_i)]\,dg(x)\right|+$$
$$+\sum_{i=1}^m|f(x_i)|\,|g(x_i)-g(x_{i-1})-g_n(x_i)+g_n(x_{i-1})|+$$
$$+\sum_{i=1}^m\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,dg_n(x)\right|.$$

Первая и третья суммы могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора $\mu(P)$ и непрерывности функции f. Фиксируя P, получаем, что вторая сумма стремится к нулю при $n\to\infty$.

11. Если функция f непрерывна на $[0, 1]$ и если

$$\int_0^1 f(x)\,x^n\,dx=0\qquad(n=0, 1, 2, \ldots),$$

то $f(x)=0$ на $[0, 1]$.

Указание. Интеграл от произведения функции f на любой многочлен равен нулю. Воспользоваться теоремой Вейерштрасса и показать, что $\int_0^1 f^2(x)\,dx=0$.

12. Если, например, $f(x)=x-\frac{1}{2}$ и $g(x)=x-x^2$, то

$$\int_0^1 f(x)\,[g(x)]^n\,dx=0\qquad(n=0, 1, 2, \ldots). \tag{75}$$

Для каких функций g из условия (75) следует, что $f(x)=0$ при всех $x\in[0, 1]$, если заранее задано, что f — непрерывна?

13. Пусть $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ — последовательности функций, определенных на E, и

(a) частные суммы ряда $\sum f_n$ равномерно ограничены;

(*b*) $g_n \to 0$ равномерно на E;

(*c*) $g_1(x) \geqslant g_2(x) \geqslant g_3(x) \geqslant \ldots$ при любом $x \in E$.

Тогда ряд $\sum f_n g_n$ сходится равномерно на E.

Указание. Сравнить с теоремой 3.42.

14. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$. Положим

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доказать, что существует подпоследовательность F_{n_k}, равномерно сходящаяся на $[a, b]$.

15. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся равномерно на множестве E к функции f. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x)$$

для каждой последовательности точек $x_n \in E$, такой, что $x_n \to x$, где $x \in E$. Верно ли обратное?

16. Пусть (x) обозначает дробную часть вещественного числа x (см. определение в упражнении 2 к гл. 4). Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2} \quad (x \text{ — вещественное число}).$$

Найти все точки разрыва функции f и показать, что множество таких точек счетно и всюду плотно. Показать, что (тем не менее) функция f интегрируема по Риману на каждом ограниченном сегменте.

17. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, монотонных на $[a, b]$, и пусть $\{f_n\}$ поточечно сходится к функции f, непрерывной на $[a, b]$. Доказать, что сходимость равномерна на $[a, b[$.

18. Пусть $\{f_n\}$ — равностепенно непрерывная последовательность функций на компактном множестве K, и пусть $\{f_n\}$ сходится поточечно на K. Доказать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на K.

19. Доказать утверждения о $\mathscr{C}(K)$, сформулированные в п. 7.32.

20. Определить понятия равномерной сходимости и равностепенной непрерывности для отображений в любое метрическое пространство. Показать, что теоремы 7.9 и 7.12 верны для отображений в любое метрическое пространство, что теоремы 7.8 и 7.11 верны для отображений в любое полное метрическое

пространство и что теоремы 7.10, 7.14, 7.17 и 7.23 верны для векторнозначных функций, т. е. для отображений в любое R^k.

21. Пусть K — единичная окружность на комплексной плоскости (т. е. множество всех z, таких, что $|z|=1$), и пусть $\mathscr{A}$ — алгебра всех функций вида

$$f(e^{i\theta})=\sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta} \quad (\theta \text{ вещественно}).$$

Тогда $\mathscr{A}$ разделяет точки множества K и не исчезает ни в одной точке множества K, но тем не менее существуют непрерывные на K функции, не содержащиеся в равномерном замыкании алгебры $\mathscr{A}$.

Указание. Для любой функции $f \in \mathscr{A}$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, e^{in\theta}\, d\theta = 0, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

и это остается верным для каждой f, принадлежащей замыканию алгебры $\mathscr{A}$.

22. Пусть φ — непрерывная ограниченная вещественная функция, определенная в полосе, выделяемой неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\infty < y < \infty$. Доказать, что задача с начальными данными

$$y'=\varphi(x, y), \qquad y(0)=c$$

имеет решение. [Заметим, что условия этой теоремы существования менее ограничительны, чем условия соответствующей теоремы единственности (см. упражнение 17 гл. 5).]

Указание. Зафиксируем n. Положим $x_i=i/n$, $i=0, \ldots, n$. Пусть f_n — непрерывная функция на $[0, 1]$, такая, что $f_n(0)=c$,

$$f_n'(t)=\varphi(x_i, f_n(x_i)), \quad \text{если } x_i < t < x_{i+1},$$

и положим

$$\Delta_n(t)=f_n'(t)-\varphi(t, f_n(t)),$$

за исключением точек x_i, где $\Delta_n(t)=0$. Тогда

$$f_n(x)=c+\int_0^x [\varphi(t, f_n(t))+\Delta_n(t)]\, dt.$$

Воспользоваться теоремой 7.23 для доказательства равномерной на $[0, 1]$ сходимости некоторой подпоследовательности последовательности $\{f_n\}$ к функции f, удовлетворяющей интегральному уравнению

$$f(x)=c+\int\limits_0^x \varphi(t, f(t))\,dt \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Эта функция f и есть решение данной задачи.

23. Доказать аналогичную теорему существования для задачи с начальными данными

$$\mathbf{y}'=\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0)=\mathbf{c},$$

где теперь $\mathbf{c}\in R^k$, $\mathbf{y}\in R^k$, а $\boldsymbol{\varphi}$ — непрерывное ограниченное отображение части пространства R^{k+1}, выделяемой условиями $0\leqslant x\leqslant 1$, $\mathbf{y}\in R^k$, в пространство R^k. (Сравнить с упражнением 18 гл. 5.)

Указание. Воспользоваться «векторнозначным» вариантом теоремы 7.23.

ГЛАВА 8

ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РЯДОВ

Степенные ряды

В этом разделе мы изучим некоторые свойства функций, представимых в виде суммы степенного ряда, т. е. функций вида

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

или, более общо,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \tag{2}$$

Такие функции называются аналитическими.

Мы ограничимся вещественными значениями x. Поэтому вместо кругов сходимости (см. теорему 3.39) мы будем иметь дело с промежутками сходимости.

Если ряд (1) сходится при всех x из интервала $(-R, R)$ для некоторого $R>0$ (R может равняться $+\infty$), то мы будем говорить, что функция f разлагается в степенной ряд в окрестности точки $x=0$. Аналогично, если ряд (2) сходится при $|x-a|<R$, то говорят, что f разлагается в степенной ряд в окрестности точки $x=a$. Для удобства мы часто будем полагать $a=0$, не ограничивая общности.

8.1. Теорема. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3}$$

сходится при $|x|<R<\infty$, *и пусть*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (|x|<R). \tag{4}$$

Тогда ряд (3) *сходится равномерно на отрезке* $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$, *каково бы ни было положительное число* $\varepsilon<R$. *Функция* f *непрерывна на* $(-R, R)$ *и*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \quad (|x|<R). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $0<\varepsilon<R$. Если $|x|\leqslant R-\varepsilon$, то

$$|c_n x^n|\leqslant|c_n(R-\varepsilon)^n|,$$

а так как ряд

$$\sum c_n(R-\varepsilon)^n$$

сходится абсолютно (каждый степенной ряд по признаку Коши сходится абсолютно внутри своего промежутка сходимости), то из теоремы 7.10 следует равномерная сходимость ряда (3) на отрезке $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$.

Ввиду того что $\sqrt[n]{n}\to 1$ при $n\to\infty$, имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|},$$

так что ряды (4) и (5) имеют общий интервал сходимости.

Поскольку (5) — степенной ряд, то он сходится равномерно в $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ при каждом положительном $\varepsilon<R$ и, следовательно, применима теорема 7.17 (в формулировке теоремы последовательности можно заменить рядами). Таким образом, (5) выполняется, если $|x|\leqslant R-\varepsilon$.

Но для любого x, такого, что $|x|<R$, можно найти такое число $\varepsilon>0$, что $|x|<R-\varepsilon$. Значит, (5) выполняется, если $|x|<R$.

Непрерывность функции f следует из существования f' (теорема 5.2).

Следствие. *Если выполнены условия теоремы* 8.1, *то f имеет производные всех порядков в $(-R, R)$, причем*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n x^{n-k}. \tag{6}$$

В частности,

$$f^{(k)}(0)=k!c_k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

(Здесь $f^{(0)}$ обозначает f, а $f^{(k)}$ k-ю производную функции f при $k=1, 2, 3, \ldots$.)

Доказательство. Равенство (6) получится, если мы последовательно применим теорему 8.1 к f, затем к f', к f'' и т. д. Полагая в (6) $x=0$, мы получим (7).

Формула (7) очень интересна. Она показывает, с одной стороны, что коэффициенты степенного разложения функции f определяются значениями f и ее производных в одной-единственной точке. С другой стороны, если даны коэффициенты, то значения производных функции f в центре интервала сходимости усматриваются непосредственно из степенного ряда.

Заметим, однако, что если даже функция f имеет производные всех порядков, то ряд $\sum c_n x^n$, коэффициенты которого вычислены по формуле (7), не обязан сходиться к $f(x)$ ни при каком $x \neq 0$. В последнем случае f не может быть разложена в степенной ряд в окрестности точки $x=0$. Действительно, если бы выполнялось равенство $f(x)=\sum a_n x^n$, то мы имели бы

$$n! a_n = f^{(n)}(0);$$

значит, $a_n = c_n$. Пример такой ситуации будет дан в упражнении 1.

Если ряд (3) сходится в конце промежутка сходимости, скажем, в точке $x=R$ (и, разумеется, $R<\infty$), то функция f непрерывна не только в интервале $(-R, R)$, но и в точке $x=R$. Это вытекает из следующей теоремы Абеля (для простоты мы полагаем $R=1$).

8.2. Теорема. *Пусть ряд* $\sum c_n$ *сходится. Положим*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (-1<x<1).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $s_n = c_0 + \ldots + c_n$, $s_{-1}=0$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{m} c_n x^n = \sum_{n=0}^{m} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

Пусть $|x|<1$ и $m\to\infty$. Так как s_m ограничены в совокупности, то мы получаем

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \tag{9}$$

Предположим, что $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Пусть $\varepsilon>0$. Выберем N, такое, что из $n>N$ следует

$$|s-s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, ввиду того что

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \quad (|x|<1),$$

мы получаем из (9)

$$|f(x)-s| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)x^n\right| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N}|s_n-s||x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

если $x>1-\delta$, где δ — любое достаточно малое положительное число. Отсюда следует (8).

В качестве приложения докажем теорему 3.51, которая состоит в следующем. *Если ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ сходятся соответственно к A, B, C и если $c_n=a_0b_n+\ldots+a_nb_0$, то $C=AB$.* Положим

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, \quad h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

при $0\leqslant x\leqslant 1$. Если $x<1$, то эти ряды сходятся абсолютно, и поэтому их можно перемножить в соответствии с определением 3.48; выполнив умножение, мы увидим, что

$$f(x)\cdot g(x)=h(x) \qquad (0\leqslant x<1). \tag{10}$$

По теореме 8.2

$$f(x)\to A, \quad g(x)\to B, \quad h(x)\to C \tag{11}$$

при $x\to 1$. Из равенств (10) и (11) следует, что $AB=C$.

Далее нам понадобится следующая теорема об изменении порядка суммирования двойной последовательности.

8.3. Теорема. *Пусть дана двойная последовательность $\{a_{ij}\}$, $i=1, 2, 3, \ldots$, $j=1, 2, 3, \ldots$, пусть*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|=b_i \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{12}$$

и ряд $\sum b_i$ сходится. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \tag{13}$$

Доказательство. Мы могли бы установить равенство (13) непосредственно, подобно тому как это было сделано в теореме 3.56 (хотя в данном случае это несколько более сложно). Однако следующий метод представляется более интересным.

Пусть E — счетное множество, состоящее из попарно различных точек $x_0, x_1, x_2, \ldots$, и пусть $x_n\to x_0$ при $n\to\infty$. Положим

$$f_i(x_0)=\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

$$f_i(x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (i, n=1, 2, 3, \ldots), \tag{15}$$

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad (x\in E). \tag{16}$$

Теперь, сопоставляя (14) и (15) с условием (12), мы видим, что каждая из функций f_i непрерывна в точке x_0. Поскольку $|f_i(x)| \leqslant b_i$ при $x \in E$, ряд (16) сходится равномерно на E, так что функция g непрерывна в точке x_0 (теорема 7.11). Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.\end{aligned}$$

8.4. Теорема. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

сходится при $|x| < R$ и $f(x)$ — сумма этого ряда в интервале $(-R, R)$. Если $-R < a < R$, то функцию f можно разложить в степенной ряд в окрестности точки $x = a$, сходящийся при $|x-a| < R - |a|$, и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (|x-a| < R - |a|). \tag{17}$$

Эта теорема является обобщением теоремы 5.17; она известна также как теорема Тейлора.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(x-a)+a]^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-n}(x-a)^m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m} c_n a^{n-n}\right](x-a)^m.\end{aligned}$$

Это и есть нужное нам разложение в окрестности точки $x = a$. Чтобы убедиться в его справедливости, мы должны обосновать изменение порядка суммирования. Теорема 8.3 показывает, что оно возможно, если ряд

(18) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|c_n\binom{n}{m}a^{n-m}(x-a)^m\right|$$

сходится. Но (18), очевидно, приводится к виду

(19) $$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(|x-a|+|a|)^n,$$

а ряд (19) сходится, если $|x-a|+|a|<R$.

Наконец, формула (17) для коэффициентов следует из (7). Нужно заметить, что ряд (17) в действительности может сходиться в интервале, более широком, чем интервал, определяемый неравенством $|x-a|<R-|a|$.

Если два степенных ряда сходятся в интервале $(-R, R)$ к одной и той же функции, то они тождественны, т. е. их коэффициенты с одинаковыми номерами равны. Интересно, что то же верно и в более слабых предположениях.

8.5. Теорема. *Пусть ряды $\sum a_nx^n$ и $\sum b_nx^n$ сходятся в интервале $S=(-R, R)$. Пусть E — множество всех точек $x\in S$, в которых*

(20) $$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

Если E имеет предельную точку в S, то $a_n=b_n$ при $n=0, 1, 2, \ldots$. Значит, (20) выполняется и при всех $x\in S$.

Доказательство. Пусть $c_n=a_n-b_n$ и

(21) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \qquad (x\in S).$$

Тогда $f(x)=0$ на E.

Пусть A — множество всех предельных точек множества E, содержащихся в S, а B — множество всех прочих точек из S. Из определения предельной точки ясно, что множество B открыто. Допустим, что нам удалось доказать, что и A открыто. По условию A непусто. Кроме того, $S=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$ и S связно (теорема 2.47). Из определения 2.45 следует, что в таком случае B должно быть пустым и, значит, $A=S$. Из того, что функция f непрерывна на S, следует $A\subset E$. Таким образом, $E=S$, а (7) показывает, что $c_n=0$ при $n=0, 1, 2, \ldots$, что и составляет требуемое заключение.

Таким образом, нам нужно доказать, что A открыто. Если $x_0 \in A$, то теорема 8.4 показывает, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n \qquad (|x-x_0| < R - |x_0|). \tag{22}$$

Мы утверждаем, что $d_n = 0$ при всех n. Предполагая противное, обозначим через k наименьшее из неотрицательных целых чисел m, таких, что $d_m \neq 0$. Тогда

$$f(x) = (x-x_0)^k g(x) \qquad (|x-x_0| < R - |x_0|), \tag{23}$$

где

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m} (x-x_0)^m. \tag{24}$$

Поскольку функция g непрерывна в точке x_0 и

$$g(x_0) = d_k \neq 0,$$

то существует $\delta > 0$, такое, что $g(x) \neq 0$, если $|x-x_0| < \delta$. Из (23) следует, что $f(x) \neq 0$, если $0 < |x-x_0| < \delta$. Но это противоречит тому, что x_0 — предельная точка множества E.

Таким образом, $d_n = 0$ при всех n, так что $f(x) = 0$ при всех x, для которых выполняется (22), т. е. в окрестности точки x_0. Это показывает, что A открыто, и доказательство закончено.

Показательная и логарифмическая функции

Положим, по определению,

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{25}$$

Признак Даламбера показывает, что этот ряд сходится при каждом комплексном z. Применяя теорему 3.50 об умножении абсолютно сходящихся рядов, получаем

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!},$$

откуда вытекает важная теорема сложения

$$E(z+w) = E(z)E(w) \qquad (z,\ w \text{ комплексные}). \tag{26}$$

Одно из ее следствий таково:

(27) $E(z)\,E(-z)=E(z-z)=E(0)=1$ (z комплексное).

Это показывает, что $E(z)\neq 0$ при всех z. Согласно (25), $E(x)>0$, если $x>0$; (27) показывает, что $E(x)>0$ при всех вещественных x. В силу (25), $E(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, а (27) показывает, что $E(x)\to 0$ при $x\to-\infty$ вдоль вещественной оси. В силу (25), из $0<x<y$ следует, что $E(x)<E(y)$; из (27) следует $E(-y)<E(-x)$; значит, функция E строго возрастает на всей вещественной оси.

Теорема сложения показывает также, что

(28) $$\lim_{h\to 0}\frac{E(z+h)-E(z)}{h}=E(z)\lim_{h\to 0}\frac{E(h)-1}{h}=E(z);$$

последнее равенство следует прямо из (25).

Повторяя (26), получаем

(29) $$E(z_1+\ldots+z_n)=E(z_1)\ldots E(z_n).$$

Положим здесь $z_1=\ldots=z_n=1$. Поскольку $E(1)=e$, где e — число, введенное в определении 3.30, то мы получаем

(30) $$E(n)=e^n \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

Если $p=n/m$, где n, m — положительные целые числа, то

(31) $$[E(p)]^m=E(mp)=E(n)=e^n,$$

так что

(32) $$E(p)=e^p \qquad (p>0,\ p \text{ рационально}).$$

Из (27) следует, что $E(-p)=e^{-p}$, где p — положительное и рациональное. Таким образом, (32) выполняется при всех рациональных p.

В упражнении 7 к гл. 1 мы предложили такое определение:

(33) $$x^y=\sup x^p,$$

где верхняя грань берется по всем рациональным p, таким что $p<y$ для любого вещественного y и $x>1$. Если мы таким образом определим при любом вещественном x

(34) $$e^x=\sup e^p \qquad (p<x,\ p \text{ рационально}),$$

то из непрерывности и монотонности функции E, а также из равенства (32) получится

(35) $$E(x)=e^x$$

при всех вещественных x. Равенство (35) объясняет, почему функцию E называют показательной.

На самом деле вместо (34) вполне можно воспользоваться равенством (35) для определения e^x; равенство (35) — гораздо более удобная отправная точка для исследования свойств функции e^x. Сейчас мы увидим, что и (33) можно заменить более удобным определением (см. (43)).

Вернемся к обычному обозначению e^x вместо $E(x)$ и подытожим то, что было доказано до сих пор.

8.6. Теорема. *Пусть e^x определяется на R^1 равенствами* (35) *и* (25). *Тогда*

(*a*) *функция e^x непрерывна и дифференцируема в любой вещественной точке*;

(*b*) $(e^x)' = e^x$;

(*c*) e^x — *строго возрастающая функция и* $e^x > 0$;

(*d*) $e^{x+y} = e^x e^y$;

(*e*) $e^x \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$, $e^x \to 0$ *при* $x \to -\infty$;

(*f*) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ *при любом* n.

Мы уже доказали все утверждения от (*a*) до (*e*); (25) показывает, что

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

при $x > 0$, так что

$$x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x},$$

откуда и следует (*f*). Утверждение (*f*) означает, что e^x стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$ «быстрее», чем любая степень x.

Функция E, будучи строго возрастающей и дифференцируемой на R^1, имеет обратную функцию L, которая тоже строго возрастает и дифференцируема и область определения которой совпадает с $E(R^1)$, т. е. с множеством всех положительных чисел. Функция L определяется из равенства

$$E(L(y)) = y \qquad (y > 0) \tag{36}$$

или из равенства

$$L(E(x)) = x \qquad (x \text{ — вещественно}). \tag{37}$$

Дифференцируя (37), получаем (ср. с теоремой 5.5)

$$L'(E(x)) \cdot E(x) = 1.$$

Записывая $y = E(x)$, имеем

$$L'(y) = \frac{1}{y} \qquad (y > 0). \tag{38}$$

Полагая в (37) $x=0$, мы видим, что $L(1)=0$. Значит, из (38) следует

$$L(y)=\int_1^y \frac{dx}{x}. \tag{39}$$

Очень часто равенство (39) принимают за отправную точку в теории логарифма и показательной функции. Полагая $u=E(x)$, $v=E(y)$, получаем из (26)

$$L(uv)=L(E(x)\cdot E(y))=L(E(x+y))=x+y,$$

так что

$$L(uv)=L(u)+L(v) \qquad (u>0,\ v>0). \tag{40}$$

Это показывает, что L обладает известным свойством, которое делает логарифмы средством, полезным для вычислений. Обычное обозначение для $L(x)$, конечно, $\log x$.

Что касается поведения функции $\log x$ при $x\to+\infty$ и при $x\to 0$, то теорема 8.6 (e) показывает, что

$$\log x\to+\infty \text{ при } x\to+\infty,$$
$$\log x\to-\infty \text{ при } x\to 0.$$

Легко видеть, что

$$x^n=E(nL(x)), \tag{41}$$

если $x>0$, а n — целое. Подобным же образом, если m — положительное целое, то

$$x^{1/m}=E\left(\frac{1}{m}L(x)\right), \tag{42}$$

так как каждая из частей равенства (42) после возведения в m-ю степень превращается в соответствующую часть равенства (37). Объединяя (41) и (42), получаем

$$x^\alpha=E(\alpha L(x))=e^{\alpha\log x} \tag{43}$$

при любом рациональном α.

Определим теперь x^α при любом вещественном α и любом $x>0$ равенством (43). Непрерывность и монотонность функций E и L показывают, что это определение приводит к тому же результату, что предложенное ранее. Утверждения, сформулированные в упражнениях с 4-го по 7-е гл. 1 — тривиальные следствия равенства (43).

Продифференцировав (43), получаем, по теореме 5.5,

$$(x^\alpha)'=E(\alpha L(x))\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{44}$$

Заметим, что раньше мы использовали (44) только для целых значений α, а в этом случае (44) легко следует из теоремы 5.3 (b).

Доказать равенство (44), исходя непосредственно из определения производной, если x^α определено, как в (33), весьма затруднительно.

Хорошо известная формула интегрирования для x^α следует из (44), если $\alpha \neq -1$, и из (38), если $\alpha = -1$. Мы хотим доказать еще одно свойство функции $\log x$, а именно

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \log x = 0 \tag{45}$$

при каждом $\alpha > 0$. Иначе говоря, $\log x \to +\infty$ при $x \to +\infty$ «медленнее», чем любая положительная степень x.

Действительно, если $0 < \varepsilon < \alpha$, а $x > 1$, то

$$x^{-\alpha} \log x = x^{-\alpha} \int_1^x t^{-1}\, dt < x^{-\alpha} \int_1^x t^{\varepsilon - 1}\, dt = $$
$$= x^{-\alpha} \cdot \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} < \frac{x^{\varepsilon - \alpha}}{\varepsilon},$$

откуда и следует (45). Мы могли бы также воспользоваться теоремой 8.6 (f) для вывода равенства (45).

Тригонометрические функции

Положим, по определению,

$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)], \quad S(x) = \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)]. \tag{46}$$

Мы покажем, что $C(x)$ и $S(x)$ совпадают с функциями $\cos x$ и $\sin x$, определение которых обычно основывается на геометрических рассмотрениях. Согласно (25), $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$. Значит, как показывает (46), $C(x)$ и $S(x)$ вещественны при вещественных x. Кроме того,

$$E(ix) = C(x) + iS(x). \tag{47}$$

Таким образом, $C(x)$ и $S(x)$ равны соответственно мнимой и вещественной части числа $E(ix)$, если x вещественно. Согласно (27),

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(-ix) = 1,$$

так что

$$|E(ix)| = 1 \qquad (x \text{ вещественно}). \tag{48}$$

Из (46) можно усмотреть, что $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, а (28) показывает, что

$$C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x). \tag{49}$$

Мы утверждаем, что существуют положительные числа x, такие, что $C(x)=0$. Действительно, пусть это не так. Из того, что $C(0)=1$, следует тогда, что $C(x)>0$ при всех $x>0$; значит, $S'(x)>0$, согласно (49), и, значит, функция S строго возрастает, а так как $S(0)=0$, то $S(x)>0$ при $x>0$. Значит, если $0<x<y$, то

$$S(x)(y-x)<\int_x^y S(t)\,dt=C(x)-C(y)\leqslant 2. \tag{50}$$

Последнее неравенство следует из (48) и (47). Но (50) не может выполняться при больших y, так как $S(x)>0$, и мы получили противоречие.

Пусть x_0 — наименьшее из положительных чисел x, таких, что $C(x)=0$. Оно существует, так как множество нулей непрерывной функции замкнуто, а $C(0)\neq 0$. Определим число π равенством

$$\pi=2x_0. \tag{51}$$

Тогда $C(\pi/2)=0$ и, как показывает (48), $S(\pi/2)=\pm 1$. Но так как $C(x)>0$ в $(0, \pi/2)$, то S возрастает в $(0, \pi/2)$; значит, $S(\pi/2)=1$. Таким образом,

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right)=i,$$

и теорема сложения показывает, что

$$E(\pi i)=-1, \quad E(2\pi i)=1; \tag{52}$$

значит,

$$E(z+2\pi i)=E(z) \qquad (z \text{ — комплексное}). \tag{53}$$

8.7. Теорема. (*a*) *Функция E периодична с периодом $2\pi i$.*

(*b*) *функции C и S периодичны с периодом 2π.*

(*c*) *Если $0<t<2\pi$, то $E(it)\neq 1$.*

(*d*) *Если z — комплексное число, а $|z|=1$, то существует единственное число $t\in[0, 2\pi)$, такое, что $E(it)=z$.*

Доказательство. Утверждение (*a*) следует из (53), а утверждение (*b*) следует из (*a*) и (46).

Пусть $0<t<\pi/2$, а $E(it)=x+iy$, где x и y вещественны. Сделанное нами ранее показывает, что $0<x<1$, $0<y<1$. Заметим, что

$$E(4it)=(x+iy)^4=x^4-6x^2y^2+y^4+4ixy(x^2-y^2).$$

Если $E(4it)$ вещественно, то $x^2-y^2=0$, а так как, согласно (48), $x^2+y^2=1$, то $x^2=y^2=\frac{1}{2}$, значит, $E(4it)=-1$. Тем самым (c) доказано.

Если $0\leqslant t_1<t_2<2\pi$, то

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1}=E(it_2-it_1)\neq 1,$$

согласно (c). Тем самым доказано утверждение о единственности, содержащееся в (d).

Пусть $z_1=x_1+iy_1$, $x_1^2+y_1^2=1$, $x_1\geqslant 0$, $y_1\geqslant 0$. На $[0, \pi/2]$ функция C убывает от 1 до 0; значит, $C(t_1)=x_1$ при некотором t_1 на $[0, \pi/2]$. Из того, что $C^2+S^2=1$, а $S\geqslant 0$ на $[0, \pi/2]$, следует, что $z_1=E(it_1)$.

Наконец, допустим, что $z=x+iy$, $|z|=1$. Положим $z_1=-iz$, если $x<0$, $y\geqslant 0$. Положим $z_1=-z$, если $x<0$, $y<0$. Положим $z_1=iz$, если $x\geqslant 0$, $y<0$. Тогда z_1 удовлетворяет предположениям предыдущего абзаца, а так как $i=E(\pi i/2)$, то мы видим, что $z=E(i(t_1+\pi/2))$ или $E(i(t_1+\pi))$ или $E(i(t_1+3\pi/2))$, в зависимости от того, какой из трех случаев рассматривается. Тем самым доказано утверждение (d), а с ним вся теорема.

Из (d) и (48) следует, что кривая γ, определенная равенством

$$\gamma(t)=E(it)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi), \tag{54}$$

— простая замкнутая кривая, множество значений которой — единичная окружность на плоскости. Длина кривой по теореме 6.35 равна

$$\int_0^{2\pi}|\gamma'(t)|\,dt=2\pi,$$

так как $\gamma'(t)=iE(it)$. Такого результата, конечно, и следовало ожидать для окружности радиуса 1; он показывает, что π, определенное в (51), имеет обычный геометрический смысл.

Таким же точно образом мы увидим что при возрастании t от 0 до t_0 точка $\gamma(t)$ описывает дугу, лежащую на окружности и имеющую длину t_0. Рассмотрение треугольника с вершинами

$$z_1=0,\quad z_2=\gamma(t_0),\quad z_3=C(t_0)$$

показывает, что $C(t)$ и $S(t)$ на самом деле совпадают с $\cos t$ и $\sin t$, если эти последние определены обычным способом как отношения сторон прямоугольного треугольника.

Следует подчеркнуть, что мы вывели основные свойства тригонометрических функций из (46) и (25), не привлекая геометрического понятия угла.

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

Теперь мы в состоянии дать простое доказательство того факта, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, т. е. что каждый отличный от постоянной многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

8.8. Теорема. *Пусть* $a_0, \ldots, a_n$ — *комплексные числа,* $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, $P(z) = \sum_0^n a_k z^k$. *Тогда существует такое комплексное число* z, *что* $P(z) = 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, допустим, что $a_n = 1$. Положим

$$\mu = \inf |P(z)| \qquad (z \text{ — комплексное}). \tag{55}$$

Если $|z| = R$, то

$$|P(z)| \geqslant R^n [1 - |a_{n-1}| R^{-1} - \ldots - |a_0| R^{-n}]. \tag{56}$$

Правая часть неравенства (56) стремится к ∞, когда $R \to \infty$. Значит, существует такое R_0, что $|P(z)| > \mu$, если $|z| > R_0$. Ввиду того что функция $|P|$ непрерывна на замкнутом круге с центром в нуле радиуса R_0, мы заключаем на основании теоремы 4.16, что $|P(z_0)| = \mu$ при некотором z_0.

Мы утверждаем, что $\mu = 0$.

Если это не так, то положим $Q(z) = \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)}$. Тогда Q — многочлен, отличный от постоянной, $Q(0) = 1$ и $|Q(z)| \geqslant 1$ при всех z. Существует наименьшее целое из всех чисел k, $1 \leqslant k \leqslant n$, таких, что

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \ldots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0. \tag{57}$$

Обозначим это число через k_0.

По теореме 8.7 (d) существует вещественное θ, такое, что

$$e^{ik_0\theta} b_{k_0} = -|b_{k_0}|. \tag{58}$$

Тогда $|Q(re^{i\theta})| \leqslant 1 - r^{k_0} \{|b_{k_0}| - r|b_{k_0+1}| - \ldots - r^{n-k_0}|b_n|\}$, если $r > 0$. При достаточно малом r выражение в скобках положительно, значит, $|Q(re^{i\theta})| < 1$, и мы пришли к противоречию.

Таким образом, $\mu = 0$, т. е. $P(z_0) = 0$.

Ряды Фурье

8.9. Определение. *Тригонометрическим многочленом* называется конечная сумма вида

(59) $$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x \text{ вещественно}),$$

где $a_0, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ — комплексные числа. Учитывая тождества (46), функцию (59) можно записать в виде

(60) $$f(x)=\sum_{-N}^{N}c_ne^{inx}\qquad (x \text{ вещественно}),$$

который для многих целей более удобен. Ясно, что каждый тригонометрический многочлен — периодическая функция с периодом 2π.

Если n — отличное от нуля целое число, то e^{inx} — производная функции e^{inx}/in, которая тоже имеет период 2π. Поэтому

(61) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } n=0,\\ 0, & \text{если } n=\pm 1, \pm 2, \ldots .\end{cases}$$

Умножим (60) на e^{-imx}, где m — целое число; интегрируя это произведение, получим на основании (61)

(62) $$c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-imx}\,dx$$

при $|m|\leqslant N$. Если $|m|>N$, то интеграл в (62) равен нулю.

Из равенств (60) и (62) видно, что тригонометрический многочлен f, заданный равенством (60), оказывается вещественным в том и только в том случае, когда $c_{-n}=\bar{c}_n$ при $n=0, \ldots, N$.

В соответствии с (60) мы определяем *тригонометрический ряд* как ряд вида

(63) $$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\qquad (x \text{ вещественно});$$

N-я частная сумма ряда (63) по определению равна правой части равенства (60).

Если f — функция, интегрируемая на $[-\pi, \pi]$, то числа c_m, заданные равенством (62) для всех целых чисел m, называются *коэффициентами Фурье* функции f, а ряд (63), составленный при помощи этих коэффициентов, — *рядом Фурье* функции f. Теперь возникает естественный вопрос: сходится ли ряд Фурье функции f к f, или, более общо, определяется ли функция f своим рядом Фурье. Иначе говоря, если мы знаем коэффициенты Фурье функции, то можем ли мы найти эту функцию, и если можем, то как?

Изучение таких рядов и, в частности, проблема представления заданной функции тригонометрическим рядом, имеет своим источником такие разделы физики, как теория колебаний и теория распространения тепла (книга Фурье «Аналитическая теория теплоты» была опубликована в 1822 г.). Многочисленные трудные и тонкие проблемы, возникшие при этом изучении, вызвали основательный пересмотр и перестройку всей теории функций вещественной переменной. Многие выдающиеся имена, и среди них имена Римана, Кантора и Лебега, тесно связаны с этой областью, о которой вполне можно сказать, что в наши дни она вместе со всеми ее обобщениями и ответвлениями занимает центральное положение в анализе.

Мы ограничимся некоторыми основными теоремами, для доказательства которых достаточны методы, развитые в предшествующих главах. Для более основательного исследования естественным и необходимым средством служит интеграл Лебега.

Сначала мы изучим более общие системы функций, обладающие свойством, аналогичным (61).

8.10. Определение. Пусть $\{\varphi_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ — последовательность комплексных функций на $[a,\ b]$, такая, что

$$(64)\qquad \int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(x)}\,dx=0 \qquad (n\neq m).$$

Тогда $\{\varphi_n\}$ называется *ортогональной системой функций* на $[a,\ b]$. Если, кроме того,

$$(65)\qquad \int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx=1$$

при всех n, то система $\{\varphi_n\}$ называется *ортонормальной*.

Например, функции $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{inx}$ образуют ортонормальную систему на $[-\pi,\ \pi]$. Таковы же и вещественные функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots .$$

Если $\{\varphi_n\}$ — ортонормальная система на $[a,\ b]$ и если

$$(66)\qquad c_n=\int_a^b f(t)\,\overline{\varphi_n(t)}\,dt \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то мы будем называть число c_n n-м коэффициентом Фурье функции f относительно системы $\{\varphi_n\}$. Мы будем писать

$$f(x) \sim \sum_1^\infty c_n \varphi_n(x) \tag{67}$$

и будем называть этот ряд рядом Фурье функции f (относительно системы $\{\varphi_n\}$).

Заметим, что, употребляя в (67) символ $\sim$, мы ничего не предполагаем о сходимости ряда; этот символ означает только, что коэффициенты задаются равенствами (66).

Следующие теоремы показывают, что частные суммы ряда Фурье функции f обладают некоторым свойством минимальности. Мы будем предполагать здесь, как и на протяжении всей остальной части главы, что $f \in \mathscr{R}$, хотя это условие может быть ослаблено.

8.11. Теорема. *Пусть система $\{\varphi_n\}$ ортонормальна на $[a, b]$. Пусть*

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^n c_m \varphi_m(x) \tag{68}$$

есть n-я частная сумма ряда Фурье функции f, и пусть

$$t_n(x) = \sum_{m=1}^n \gamma_m \varphi_m(x). \tag{69}$$

Тогда

$$\int_a^b |f - s_n|^2\, dx \leqslant \int_a^b |f - t_n|^2\, dx, \tag{70}$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\gamma_m = c_m \quad (m = 1, \ldots, n). \tag{71}$$

Иначе говоря, среди всех функций t_n функция s_n дает наилучшее среднеквадратичное приближение к функции f.

Доказательство. Пусть $\int$ обозначает интеграл по сегменту $[a, b]$, $\sum$ — сумму от 1 до n. Тогда

$$\int f\bar{t}_n = \int f \sum \bar{\gamma}_m \bar{\varphi}_m = \sum c_m \bar{\gamma}_m$$

по определению $\{c_m\}$,

$$\int |t_n|^2 = \int t_n \bar{t}_n = \int \sum \gamma_m \varphi_m \sum \bar{\gamma}_k \bar{\varphi}_k = \sum |\gamma_m|^2,$$

так как система $\{\varphi_m\}$ ортонормальна, и поэтому

$$\int |f-t_n|^2 = \int |f|^2 - \int f\bar{t}_n - \int \bar{f} t_n + \int |t_n|^2 =$$
$$= \int |f|^2 - \sum c_m \bar{\gamma}_m - \sum \bar{c}_m \gamma_m + \sum \gamma_m \bar{\gamma}_m =$$
$$= \int |f|^2 - \sum |c_m|^2 + \sum |\gamma_m - c_m|^2;$$

последнее выражение достигает минимума тогда и только тогда, когда $\gamma_m = c_m$.

Если в этой выкладке считать $\gamma_m = c_m$, то мы получим

$$\sum_1^n |c_m|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx, \tag{72}$$

так как $\int |f-t_n|^2 \geqslant 0$.

8.12. Теорема. *Если* $\{\varphi_n\}$ — *ортонормальная система на* $[a, b]$ *и если*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx. \tag{73}$$

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{74}$$

Доказательство. Полагая в (72) $n \to \infty$, мы получаем неравенство (73) — так называемое «неравенство Бесселя».

Для тригонометрического ряда Фурье, т. е. для ряда (63), коэффициенты которого определяются из (62), неравенство (73) принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx. \tag{75}$$

Впоследствии мы увидим, что на самом деле в (75) имеет место равенство.

При изучении тригонометрических рядов Фурье мы встретимся с двумя тригонометрическими многочленами:

$$D_n(x) = \sum_{-n}^{n} e^{ikx}, \quad K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{0}^{n} D_m(x). \tag{76}$$

Первый из них называют ядром Дирихле, а второй — ядром Фейера.

8.13. Теорема. *При* $n=0, 1, 2, \ldots$ *имеем*

$$D_n(x)=\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}, \tag{77}$$

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}, \tag{78}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx=1. \tag{79}$$

Кроме того, $K_n(x)\geqslant 0$ *и*

$$K_n(x)\leqslant\frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)} \qquad (0<\delta\leqslant|x|\leqslant\pi). \tag{80}$$

Доказательство. Согласно (76),

$$(e^{ix}-1)\,D_n(x)=e^{i(n+1)x}-e^{-inx}. \tag{81}$$

Чтобы получить (77), умножим обе части равенства (81) на $e^{-ix/2}$. Подставляя (81) в определение ядра K_n, получаем

$$(n+1)\,K_n(x)\,(e^{ix}-1)\,(e^{-ix}-1)=(e^{-ix}-1)\sum_{m=0}^{n}(e^{i(m+1)x}-e^{-imx})=$$
$$=2-e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x},$$

откуда следует (78). Значит, $K_n\geqslant 0$ и выполняется (80); (79) следует непосредственно из (76).

Начиная с этого места мы будем иметь дело только с тригонометрической системой. Предположим, что функция f, первоначально определенная на $[-\pi, \pi]$, продолжена на R^1 как 2π-периодическая функция[1]).

Коэффициенты Фурье функции f задаются равенством (62); значит, n-я частная сумма s_n ее ряда Фурье равна

$$s_n(x)=s_n(f;\ x)=\sum_{-n}^{n} c_m e^{imx}=\sum_{-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-imt}\,dt\,e^{imx}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-n}^{n} e^{im(x-t)}\,dt.$$

---

[1]) Такое продолжение невозможно, если $f(-\pi)\neq f(\pi)$, однако функция $\tilde f$, такая, что $\tilde f(x)=f(x)$ $(x\in(-\pi, \pi))$ и $\tilde f(-\pi)=\tilde f(\pi)=0$, уже может быть продолжена с периодом 2π на всю ось, а ее коэффициенты Фурье, как легко видеть, равны соответствующим коэффициентам функции f. — *Прим. перев.*

Иными словами,

$$(82)\qquad s_n(f;\ x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt.$$

Вследствие периодичности всех участвующих в этом равенстве функций безразлично, по какому интервалу мы будем интегрировать, лишь бы его длина была равна 2π. Именно поэтому и равны интегралы в (82).

8.14. Теорема. *Если* $f\in\mathscr{R}$ *на* $[-\pi,\ \pi]$ *и* $0<\delta<\pi$, *то*

$$(83)\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)\,D_n(t)\,dt=0.$$

Обычно это равенство называют теоремой о локализации. Оно показывает, что поведение последовательности $\{s_n(x)\}$, поскольку речь идет о сходимости, зависит только от значений функции f, принимаемых в некоторой (произвольно малой) окрестности точки x. Таким образом, два ряда Фурье могут вести себя одинаково в одном интервале, а в некотором другом интервале вести себя совершенно по-разному. Мы сталкиваемся здесь с замечательным контрастом между рядами Фурье и степенными рядами (теорема 8.5).

Доказательство. Зафиксируем x, и пусть $g(t)=0$ при $|t|<\delta$,

$$(84)\qquad g(t)=\frac{f(x-t)}{\sin(t/2)}\qquad (\delta\leqslant|t|\leqslant\pi).$$

Согласно (77),

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)\,D_n(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt\,dt+\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt.$$

Оба последних интеграла стремятся к нулю при $n\to\infty$ согласно (74), так как функции $g(t)\cos(t/2)$ и $g(t)\sin(t/2)$ интегрируемы. Отсюда и следует (83).

Таким образом, изучение сходимости последовательности $\{s_n(f;\ x)\}$ сводится к изучению интеграла

$$(85)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,D_n(t)\,dt$$

при сколь угодно малом $\delta > 0$. Известны несколько достаточных условий сходимости ряда Фурье; доказательства двух из них намечены в упражнениях 9 и 17. Нельзя, очевидно, ожидать, что ряд Фурье любой функции будет сходиться к значению этой функции в любой точке. Действительно, если значения двух функций отличаются только в конечном множестве точек, то интегралы, определяющие их коэффициенты Фурье, будут одинаковыми, и, значит, такие функции имеют один и тот же ряд Фурье.

Здесь имеются трудные проблемы. Не известно даже, верно или нет следующее невинно звучащее утверждение: «для любой непрерывной функции f существует точка x, в которой ряд Фурье функции f сходится». Известно, что существуют непрерывные функции, ряд Фурье которых расходится на несчетном множестве точек. Однако положение весьма улучшается при рассмотрении вместо частных сумм $s_n(x)$ их средних арифметических

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1}. \tag{86}$$

Следующая теорема принадлежит Фейеру.

8.15. Теорема. *Если f непрерывна (и, конечно, периодична с периодом 2π) и если $\{\sigma_n\}$ — последовательность средних арифметических частных сумм ряда Фурье функции f, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

равномерно на R^1.

Заметим по этому поводу, что из теоремы Стона — Вейерштрасса следует существование *некоторой* последовательности тригонометрических многочленов, равномерно сходящейся к f. Действительно, отождествляя точки x и $x + 2\pi$, мы можем считать, что периодические функции определены на единичной окружности K. Тригонометрические многочлены, т. е. функции вида (60), образуют алгебру функций на K, удовлетворяющую предположениям теоремы 7.31.

Доказательство. Согласно (86), (82) и (76), имеем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\, dt, \tag{87}$$

и потому из (79) следует, что

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t)\, dt. \tag{88}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем M так, что $|f(x)| \leqslant M$ при всех x. Ввиду того что функция f равномерно непрерывна, мы можем выбрать $\delta > 0$ так, что из $|x-y| < \delta$ следует

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{89}$$

Согласно (80), мы можем затем выбрать N так, чтобы из $n \geqslant N$ и $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ следовало

$$K_n(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{90}$$

Из (89) следует, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t)-f(x)|\,|K_n(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \pi\varepsilon \tag{91}$$

при всех n, так как $K_n(t) \geqslant 0$, а из (90) получаем

$$\left\{ \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right\} |f(x-t)-f(x)|\,|K_n(t)|\,dt \leqslant \tag{92}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M} \int_{-\pi}^{\pi} 2M\,dt = \pi\varepsilon,$$

как только $n \geqslant N$. Наконец, комбинируя (88), (91) и (92), получаем

$$|\sigma_n(x)-f(x)| < \varepsilon \tag{93}$$

при всех x и всех $n \geqslant N$. Доказательство закончено.

Заметим, что если бы мы попытались доказать то же самое для $s_n(x)$ вместо $\sigma_n(x)$, т. е. если бы мы заменили $K_n(t)$ ядром $D_n(t)$, то мы столкнулись бы с интегралом

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt, \tag{94}$$

который стремится к ∞ при $n \to \infty$. (Упражнение 12.)

Именно этим свойством ядер D_n вызваны трудности, встречающиеся в теории сходимости рядов Фурье.

Следствие 1. *Если две непрерывные 2π-периодические функции f и g имеют один и тот же ряд Фурье, то $f(x) = g(x)$ при всех x.*

Действительно, если $\sigma_n(x)$ — среднее арифметическое для этого ряда Фурье, то $\sigma_n(x) \to f(x)$, $\sigma_n(x) \to g(x)$ при каждом x.

Следствие 2. *Если функция f непрерывна и если*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = 0$$

при любом целом n, то $f(x)=0$ при всех x.

Это вытекает из следствия 1, если положить там $g=0$.

8.16. Теорема. *Пусть функции f и g непрерывны (и периодичны с периодом 2π) и*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}. \tag{95}$$

Если s_n есть n-я частная сумма ряда Фурье функции f, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f-s_n|^2\, dx = 0, \tag{96}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \bar{\gamma}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx, \tag{97}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx. \tag{98}$$

Это утверждение известно как теорема Парсеваля.

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Теорема Фейера показывает, что существует N, такое, что $|f(x)-\sigma_n(x)| < \varepsilon$ при всех x и при всех $n > N$. По теореме 8.11

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f-s_n|^2\, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f-\sigma_n|^2\, dx < 2\pi\varepsilon^2,$$

если $n > N$, и тем самым доказано (96). Далее,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \sum_{-n}^{n} c_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{g(x)}\, dx = \sum_{-n}^{n} c_k \bar{\gamma}_k, \tag{99}$$

и неравенство Шварца показывает, что

$$\left| \int f\bar{g} - \int s_n \bar{g} \right| \leqslant \int |f-s_n|\,|g| \leqslant \left\{ \int |f-s_n|^2 \int |g|^2 \right\}^{1/2}. \tag{100}$$

Произведение в фигурных скобках стремится к нулю при $n \to \infty$, согласно (96). Сравнивая (99) и (100), получаем (97). Наконец, (98) — это частный случай ($f = g$) равенства (97).

Условие непрерывности в этой теореме может быть значительно ослаблено. Окончательный вариант теоремы 8.16 будет дан в гл. 10.

Упражнения

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Доказать, что f имеет производные всех порядков в точке $x = 0$ и что $f^{(n)}(0) = 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Доказать следующие предельные соотношения:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \log b \qquad (b > 0)$;

(*b*) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$;

(*c*) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$;

(*d*) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

3. Пусть $f(x) f(y) = f(x+y)$ при всех вещественных x и y

(*a*) Предполагая, что f дифференцируема и отлична от тождественного нуля, доказать, что

$$f(x) = e^{cx},$$

где c — некоторое число.

(*b*) Доказать то же самое, предполагая, что f только непрерывна.

4. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

5. Доказать, что при вещественном x и $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$|\sin nx| \leqslant n |\sin x|.$$

Заметим, что это неравенство может быть неверным для других значений n. Например,

$$\left|\sin \frac{1}{2}\pi\right| > \frac{1}{2}|\sin \pi|.$$

6. Пусть a_{ij} — число, стоящее в i-й строке и j-м столбце таблицы

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0\ldots \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0\ldots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0\ldots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

так что

$$a_{ij}=\begin{cases} 0 & (i<j), \\ -1 & (i=j), \\ 2^{i-j} & (i>i). \end{cases}$$

Доказать, что

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = -2, \qquad \sum_j \sum_i a_{ij} = 0.$$

7. Доказать, что

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij},$$

если $a_{ij} \geqslant 0$ при всех i и j. (Случай $+\infty = +\infty$ не исключается.)

8. Вывести теорему Вейерштрасса о равномерном приближении многочленами из теоремы Фейера (рассмотреть разложение тригонометрического многочлена в степенной ряд).

9. Будем говорить, что f удовлетворяет условию Липшица в точке x, если существуют числа M и $\delta>0$, такие, что

$$|f(y)-f(x)| < M\,|y-x|$$

при $|y-x|<\delta$.

Доказать, что ряд Фурье функции f сходится к $f(x)$ в точке x, если f удовлетворяет условию Липшица в этой точке.

Указание. Функции $[f(x-t)-f(x)]\,D_n(t)$ равномерно ограничены в интервале $(-\delta, \delta)$.

10. Если функция f дифференцируема в точке x, то она удовлетворяет условию Липшица в этой точке. Значит, дифференцируемость влечет за собой сходимость ряда Фурье.

11. Пусть $r_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$. Доказать, что последовательность $\{r_n\}$ сходится. (Ее предел, часто обозначаемый буквой γ, называется эйлеровой постоянной, $\gamma=0{,}5772\ldots$.)

12. Пусть

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Доказать, что существует число $C > 0$, такое, что

$$L_n > C \log n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

или, точнее, что последовательность

$$\left\{ L_n - \frac{4}{\pi^2} \log n \right\}$$

ограничена.

13. Если $|f(x)| \leqslant M$ при всех x, то и $|\sigma_n(x)| \leqslant M$ при всех x и n.

14. Пусть $|nc_n| \leqslant M$ при $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

$$s_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n,$$

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}.$$

Доказать, что

$$|s_n - \sigma_n| \leqslant M.$$

Указание: $s_n - \sigma_n = \dfrac{c_1 + 2c_2 + \ldots + nc_n}{n+1}$.

15. Пусть f — функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$. Доказать, что если s_n есть n-я частная сумма Фурье функции f, то последовательность $\{s_n(x)\}$ равномерно ограничена.

Указание. Воспользоваться двумя предыдущими результатами и упражнением 12 к гл. 6.

16. Доказать, что существует постоянная M, такая, что

$$\left| \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin mt}{m} \right| < M.$$

Указание. Применить результат упражнения 15 к ряду Фурье функции

$$f(t) = \begin{cases} \pi - t & \text{при} \quad t \in (0, \pi), \\ -\pi - t & \text{при} \quad t \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

17. Пусть f — функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$. Доказать, что если при некотором x

$$s = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)],$$

то ряд Фурье функции f сходится в точке x к s. (Эта теорема принадлежит Дирихле.)

Указание. Допустим, не ограничивая общности, что $s=0$, $x=0$ и f — четная (для нечетной f положим $s_n(f;\ 0)=0$ и $f(0)=0$). Тогда f непрерывна в нуле. Выберем $\delta>0$ так, чтобы полная вариация функции f на $[0,\ \delta]$ была мала, проинтегрируем по частям и применим упражнение 16, чтобы убедиться в малости интеграла

$$\int_0^\delta f(t)\,D_n(t)\,dt$$

при всех n, а затем воспользуемся теоремой о локализации.

18. Доказать локальный вариант теоремы Фейера: если $f\in\mathscr{R}$ и если функция f непрерывна в точке x_0, то $\sigma_n(f;\ x_0)\to f(x_0)$ при $n\to\infty$.

19. Пусть $a_n=n^{1/n}-1$, а $b_n=\log n/n$. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$

20. Пусть f — функция, непрерывная на R^1, $f(x+2\pi)=f(x)$ и α/π — иррациональное число. Доказать, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x+n\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt$$

при всех x.

Указание. Сначала доказать это для $f(x)=e^{ikx}$.

21. Сформулировать и доказать теорему о равномерном приближении непрерывной функции интегралами вида

$$\int f(x-t)\,\varphi_n(t)\,dt,$$

которая содержала бы теоремы Вейерштрасса (7.24) и Фейера (8.15) как частные случаи.

ГЛАВА 9

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Линейные преобразования

Эту главу мы начнем с рассмотрения множеств векторов в евклидовом пространстве R^n. Излагаемые здесь алгебраические факты без изменений переносятся на конечномерные векторные пространства над любым полем скаляров. Однако для наших целей мы вполне можем оставаться в привычных рамках евклидовых пространств

9.1. Определения. (a) Множество $X \subset R^n$ называется *векторным пространством*, если $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in X$ и $c\mathbf{x} \in X$, каковы бы ни были $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и число c.

(b) Если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in R^n$, а $c_1, \ldots, c_k$ — числа, то вектор $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$. Если $S \subset R^n$ и если E — множество всех линейных комбинаций элементов S, то мы будем говорить, что E *натянуто* на S или что E — *оболочка* S.

Заметим, что каждая оболочка есть векторное пространство.

(c) Множество, состоящее из векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ (для такого множества мы будем использовать обозначение $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$), называется *независимым*, если из соотношения $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k = 0$ следует, что $c_1 = \ldots = c_k = 0$. В противном случае это множество называется *зависимым*.

Отметим, что независимое множество не может содержать нулевого вектора.

(d) Если векторное пространство X содержит независимое множество, состоящее из r векторов, но не содержит никакого независимого множества из $r+1$ векторов, то говорят, что X имеет *размерность* r и пишут $\dim X = r$.

Множество, состоящее из одного элемента $\mathbf{0}$,— векторное пространство; размерность его равна нулю.

(e) Независимое подмножество пространства X, оболочка которого равна X, называется *базисом* пространства X.

Заметим, что если $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ — базис пространства X, то каждый элемент $\mathbf{x} \in X$ допускает единственное представление вида $\mathbf{x} = \sum c_j\mathbf{x}_j$. Такое представление существует, так как X натянуто на B, и единственно, так как множество B независимо. Числа

$c_1, \ldots, c_r$ называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ по отношению к базису B.

Наиболее известным примером базиса служит множество $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, где $\mathbf{e}_j$ — вектор пространства R^n, j-я координата которого равна 1, а прочие координаты равны нулю. Если $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то $\mathbf{x} = \sum x_j \mathbf{e}_j$. Мы будем называть множество $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *стандартным базисом пространства* R^n.

9.2. Теорема. *Пусть r — положительное целое число. Если векторное пространство X натянуто на множество, состоящее из r векторов, то* $\dim X \leqslant r$.

Доказательство. Если это неверно, то существует векторное пространство X, содержащее независимое множество $Q = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{r+1}\}$ и натянутое на множество S_0, состоящее из r векторов.

Пусть $0 \leqslant i < r$, и допустим, что построено множество S_i, оболочкой которого служит пространство X и которое состоит из векторов $\mathbf{y}_j$ с $1 \leqslant j \leqslant i$ и из некоторого набора $r-i$ векторов множества S_0, скажем $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r-i}$. (Иными словами, S_i получается из множества S_0 заменой i из его элементов элементами множества Q без изменения оболочки.) Поскольку X натянуто на S_i, то $\mathbf{y}_{i+1}$ принадлежит оболочке множества S_i, значит, существуют числа $a_1, \ldots, a_{i+1}, b_1, \ldots, b_{r-i}$, где $a_{i+1} = 1$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k \mathbf{x}_k = 0.$$

Если бы все b_k были равны нулю, то, в силу независимости множества Q, и все a_j были бы нулями. Но $a_{i+1} = 1$. Следовательно, некоторый вектор $\mathbf{x}_k \in S_i$ есть линейная комбинация других элементов множества $T_i = S_i \cup \{\mathbf{y}_{i+1}\}$. Удалим этот вектор $\mathbf{x}_k$ из T_i и обозначим оставшееся множество через S_{i+1}. Тогда оболочка множеств S_{i+1} и T_i равна X, так что S_{i+1} обладает теми же свойствами, что и S_i (только i нужно заменить на $i+1$).

Начиная с S_0, мы построим таким образом множества $S_1, \ldots, S_r$. Последнее из них состоит из $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$, и наше построение показывает, что его оболочка равна X. Но множество Q независимо, значит, $\mathbf{y}_{r+1}$ не принадлежит оболочке множества S_r. Это противоречие доказывает теорему.

Следствие. $\dim R^n = n$.

Доказательство. Пространство R^n натянуто на множество $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Поэтому, как показывает теорема,

$$\dim R^n \leqslant n.$$

Но множество $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — независимое, и потому $\dim R^n \geqslant n$.

9.3. Теорема. *Пусть X — векторное пространство и $\dim X = n$.*

(*a*) *Пространство X натянуто на множество E, состоящее из n векторов, в том и только в том случае, когда множество E независимо.*

(*b*) *X имеет базис, и каждый базис состоит из n векторов.*

(*c*) *Если $1 \leqslant r \leqslant n$ и $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ — независимое множество в X, то X имеет базис, в состав которого входят все векторы $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$.*

Доказательство. Пусть $E = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Множество $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\}$ зависимо при любом $\mathbf{y} \in X$, так как $\dim X = n$. Если E независимо, то $\mathbf{y}$ принадлежит оболочке множества E; значит, X натянуто на E. Обратно, если множество E зависимо, то один из его элементов можно удалить, не меняя оболочки. Значит, X не может быть оболочкой множества E по теореме 9.2. Тем самым (*a*) доказано.

Пространство X содержит независимое множество, состоящее из n векторов, так как $\dim X = n$, а согласно (*a*), каждое такое множество образует базис пространства X; теперь (*b*) вытекает из 9.1 (*d*) и 9.2.

Чтобы доказать (*c*), допустим, что $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — базис пространства X. Пространство X натянуто на множество

$$S = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\},$$

причем множество S зависимо, так как оно содержит больше, чем n векторов. Рассуждение, использованное при доказательстве теоремы 9.2, показывает, что один из векторов $\mathbf{x}_i$ равен линейной комбинации остальных элементов множества S. Удалив этот вектор $\mathbf{x}_i$ из S, мы получим множество, оболочка которого все еще совпадает с X. Повторяя этот процесс r раз, мы получим базис пространства X, содержащий векторы $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ согласно (*a*).

9.4. Определение. Отображение A векторного пространства X в векторное пространство Y называется *линейным преобразованием*, если

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2, \quad A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x},$$

каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и число c. Заметим, что часто пишут $A\mathbf{x}$ вместо $A(\mathbf{x})$, если A — линейное преобразование.

Заметим еще, что если A — линейное преобразование, то $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Линейные преобразования пространства X в X часто называют *линейными операторами* на X [1]). Если A — линейный оператор на X, который (i) взаимно однозначен; (ii) отображает пространство X *на* X, называют *обратимым*. В этом случае на X можно определить оператор A^{-1}, положив $A^{-1}(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ при всех $\mathbf{x} \in X$. Очевидно, что в этом случае $A(A^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ при всех $\mathbf{x} \in X$ и A^{-1} — линейный оператор.

Важное свойство линейных операторов на конечномерных векторных пространствах состоит в том, что каждое из условий (i) и (ii) влечет за собой другое.

9.5. Теорема. *Линейный оператор A на конечномерном векторном пространстве X взаимно однозначен в том и только в том случае, когда множество его значений совпадает со всем X.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — базис пространства X. Из свойств линейности оператора A следует, что его множество значений $R(A)$ натянуто на множество $Q = \{A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n\}$. Из теоремы 9.3 ($a$) мы заключаем, что $R(A) = X$ тогда и только тогда, когда Q — независимое множество. Мы должны показать, что это происходит тогда и только тогда, когда оператор A взаимно однозначен.

Допустим, что оператор A взаимно однозначен и что $\sum c_i A_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Тогда $A\left(\sum c_i \mathbf{x}_i\right) = \mathbf{0}$, значит, $\sum c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, значит, $c_1 = \ldots = c_n = 0$, и мы заключаем, что множество Q независимо.

Пусть, обратно, Q независимо и $A\left(\sum c_i \mathbf{x}_i\right) = \mathbf{0}$. Тогда $\sum c_i A\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, значит, $c_1 = \ldots = c_n = 0$, и мы заключаем: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Если теперь $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$, то $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, так что $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, и потому A взаимно однозначен.

9.6. Определение. (a). Пусть $L(X, Y)$ — множество всех линейных отображений векторного пространства X в векторное пространство Y. Вместо $L(X, X)$ мы будем писать просто $L(X)$. Если $A_1, A_2 \in L(X, Y)$ и если c_1, c_2 — числа, то определим отображение $c_1A_1 + c_2A_2$ равенством

$$(c_1A_1 + c_2A_2)\,\mathbf{x} = c_1A_1\mathbf{x} + c_2A_2\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in X).$$

Ясно, что тогда $c_1A_1 + c_2A_2 \in L(X, Y)$.

(b) Если X, Y, Z — векторные пространства, $A \in L(X, Y)$ и $B \in L(Y, Z)$, то мы определим *произведение* BA равенством

$$(BA)\,\mathbf{x} = B(A\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in X).$$

Тогда $BA \in L(X, Z)$.

---

[1]) Столь же часто этот термин употребляют применительно к линейным преобразованиям пространства X в отличное от него пространство Y. — *Прим. перев.*

Заметим, что, вообще говоря, $BA \neq AB$ даже в том случае, когда $X = Y = Z$.

(*c*) *Нормой* $\|A\|$ оператора $A \in L(R^n, R^m)$ называется верхняя грань множества всех чисел $|A\mathbf{x}|$, где $\mathbf{x}$ пробегает множество всех векторов пространства R^n, таких, что $|\mathbf{x}| \leqslant 1$.

Отметим, что неравенство

$$|A\mathbf{x}| \leqslant \|A\| \, |\mathbf{x}|$$

выполняется при всех $\mathbf{x} \in R^n$. Кроме того, если λ таково, что $A\mathbf{x}| \leqslant \lambda |\mathbf{x}|$ при всех $\mathbf{x} \in R^n$, то $\|A\| \leqslant \lambda$.

9.7. Теорема. (*a*) *Если $A \in L(R^n, R^m)$, то $\|A\| < \infty$ и A — равномерно непрерывное отображение пространства R^n в пространство R^m.*

(*b*) *Если A, $B \in L(R^n, R^m)$, а c — число, то*

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|cA\| = |c| \, \|A\|.$$

Если расстояние между A и B определить как $\|A - B\|$, то $L(R^n, R^m)$ становится метрическим пространством.

(*c*) *Если $A \in L(R^n, R^m)$ и $B \in L(R^m, R^k)$ то*

$$\|BA\| \leqslant \|B\| \, \|A\|.$$

Доказательство. (*a*) Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — стандартный базис в R^n, и пусть $\mathbf{x} = \sum c_i \mathbf{e}_i$, $|\mathbf{x}| \leqslant 1$, так что $|c_i| \leqslant 1$ при $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$|A\mathbf{x}| = \left|\sum c_i A\mathbf{e}_i\right| \leqslant \sum |c_i| \, |A\mathbf{e}_i| \leqslant \sum |A\mathbf{e}_i|,$$

так что

$$\|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |A\mathbf{e}_i| < \infty.$$

Мы видим, что отображение A равномерно непрерывно, так как $|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}| \leqslant \|A\| \, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in R^n$.

Неравенство в (*b*) следует из того, что

$$|(A + B)\mathbf{x}| = |A\mathbf{x} + B\mathbf{x}| \leqslant |A\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| \leqslant (\|A\| + \|B\|) \, |\mathbf{x}|;$$

вторая часть утверждения (*b*) проверяется тем же способом. Если

$$A, \; B, \; C \in L(R^n, R^m),$$

то выполняется неравенство треугольника

$$\|A - C\| = \|(A - B) + (B - C)\| \leqslant \|A - B\| + \|B - C\|,$$

и легко проверить, что $\|A - B\|$ обладает остальными свойствами расстояния (определение 2.17).

Наконец, (c) следует из неравенства

$$|(BA)\mathbf{x}| = |B(A\mathbf{x})| \leqslant \|B\|\,|A\mathbf{x}| \leqslant \|B\|\,\|A\|\,|\mathbf{x}|.$$

Имея в пространстве $L(R^n, R^m)$ метрику, мы можем перенести на это пространство такие понятия, как непрерывность, открытое множество и т. д. Наша следующая теорема использует эти понятия.

9.8. Теорема. *Пусть Ω — множество всех обратимых линейных операторов на R^n.*

(a) *Если $A \in \Omega$, $\|A^{-1}\| < 1/\alpha$, $B \in L(R^n)$ и $\|B - A\| = \beta < \alpha$, то $B \in \Omega$.*

(b) *Ω — открытое подмножество пространства $L(R^n)$, и отображение $A \to A^{-1}$ непрерывно на Ω.* (Оно, очевидно, взаимно однозначно отображает множество Ω на себя и является обратным к самому себе.)

Доказательство. Из того что $|\mathbf{x}| = |A^{-1}A\mathbf{x}| \leqslant \alpha^{-1}|A\mathbf{x}|$ при всех $\mathbf{x} \in R^n$, следует, что

$$(\alpha - \beta)\,|\mathbf{x}| \leqslant |A\mathbf{x}| - \beta\,|\mathbf{x}| \leqslant |A\mathbf{x}| - |(B - A)\,\mathbf{x}| \leqslant |B\mathbf{x}|$$

при всех $\mathbf{x} \in R^n$. Это показывает, что оператор B взаимно однозначен, значит, $B \in \Omega$ по теореме 9.5. Но это верно при любом B, для которого $\|B - A\| < \alpha$; поэтому множество Ω открыто.

Заменяя в приведенном выше неравенстве $\mathbf{x}$ вектором $B^{-1}\mathbf{y}$, получим

$$(\alpha - \beta)\,|B^{-1}\mathbf{y}| \leqslant |BB^{-1}\mathbf{y}| = |\mathbf{y}|,$$

так что $\|B^{-1}\| \leqslant (\alpha - \beta)^{-1}$. Тождество

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)\,A^{-1}$$

и теорема 9.7 (c) показывают теперь, что

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\|\,\|A - B\|\,\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)},$$

и тем самым доказано утверждение о непрерывности, так как $\beta \to 0$ при $B \to A$.

9.9. Матрицы. Пусть $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ и $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ — базисы векторных пространств X и Y соответственно. Тогда любому преобразованию $A \in L(X, Y)$ соответствуют числа a_{ij}, такие, что

$$(1) \qquad A\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Удобно представлять себе эти числа расположенными в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов, называемую матрицей:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что координаты a_{ij} вектора $A\mathbf{x}_j$ (по отношению к базису $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$) находятся в j-м столбце матрицы $[A]$. Используя эту терминологию, можно сказать, что множество значений преобразования A натянуто на *векторы-столбцы* матрицы $[A]$.

Если $\mathbf{x}=\sum c_j\mathbf{x}_j$, то, в силу линейности преобразования A и равенства (1), получаем

$$A\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\Big)\mathbf{y}_i. \tag{2}$$

Таким образом, i-я координата вектора $A\mathbf{x}$ равна $\sum_j a_{ij}c_j$. Заметим, что в (1) суммирование производится по первому индексу элемента a_{ij}, тогда как, вычисляя координаты, мы суммируем по второму индексу.

Пусть теперь дана матрица из m строк и n столбцов с вещественными элементами a_{ij}. Если отображение A определить равенством (2), то ясно, что $A\in L(X, Y)$ и что $[A]$ — исходная матрица. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством $L(X, Y)$ и множеством всех вещественных матриц из m строк и n столбцов. Подчеркнем, однако, что $[A]$ зависит не только от A, но и от выбора базисов в X и в Y. Одно и то же преобразование A порождает различные матрицы, если менять базисы, и обратно. Мы не станем развивать эту мысль, так как мы обычно будем иметь дело с фиксированными базисами. (Некоторые замечания по этому поводу можно найти в п. 9.26.)

Если Z — третье векторное пространство с базисом $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_p\}$, если A задано равенством (1) и если

$$B\mathbf{y}_i=\sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k, \qquad (BA)\,\mathbf{x}_j=\sum_k c_{kj}\mathbf{z}_k,$$

то

$$A\in L(X, Y), \quad B\in L(Y, Z), \quad BA\in L(X, Z),$$

и так как

$$B(A\mathbf{x}_j)=B\Big(\sum_i a_{ij}\mathbf{y}_i\Big)=\sum_i a_{ij}B\mathbf{y}_i=$$

$$=\sum_i a_{ij}\sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k=\sum_k\Big(\sum_i b_{ki}a_{ij}\Big)\mathbf{z}_k,$$

то из независимости множества $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p\}$ следует, что

(3) $$c_{kj} = \sum_i b_{ki} a_{ij} \qquad (1 \leqslant k \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n).$$

Это показывает, как найти матрицу $[BA]$ из p строк и n столбцов, зная матрицы $[B]$ и $[A]$. Если мы определим произведение $[B][A]$ как $[BA]$, то равенство (3) описывает обычное правило перемножения матриц.

Наконец, допустим, что $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ и $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ — стандартные базисы пространств R^n и R^m и что A задано равенством (2). Неравенство Шварца показывает, что

$$|A\mathbf{x}|^2 = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} c_j\Big)^2 \leqslant \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}^2 \sum_j c_j^2\Big) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 |\mathbf{x}|^2.$$

Таким образом,

(4) $$\|A\| \leqslant \Big\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big\}^{1/2}.$$

Применяя (4) к $B - A$ вместо A, где $A, B \in L(R^n, R^m)$, мы видим, что если элементы матрицы a_{ij} — непрерывные функции некоторого параметра, то то же верно в отношении A. Точнее, если S — метрическое пространство, $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ — вещественные функции, непрерывные на S, и если при любом $p \in S$ A_p — линейное преобразование пространства R^n в пространство R^m, матрица которого составлена из элементов $a_{ij}(p)$, то отображение $p \to A_p$ — непрерывное отображение пространства S в пространство $L(R^n, R^m)$.

Дифференцирование

9.10. Определение. Пусть E — открытое множество в R^n, $\mathbf{f}$ — отображение множества E в пространство R^m и $\mathbf{x} \in E$.

Если существует линейное преобразование A пространства R^n в пространство R^m, такое, что

(5) $$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0,$$

то говорят, что $\mathbf{f}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, и пишут

(6) $$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A.$$

Если отображение $\mathbf{f}$ дифференцируемо в каждой точке $\mathbf{x} \in E$, то говорят, что $\mathbf{f}$ *дифференцируемо на множестве* E.

Следующие комментарии приводятся для разъяснения и мотивировки этого определения.

(*a*) В (5), конечно, имеется в виду, что $\mathbf{h} \in R^n$, а потому если норма $|\mathbf{h}|$ достаточно мала, то $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in E$, так как E — открытое множество. Таким образом, $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ имеет смысл, $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \in R^m$, и так как $A \in L(R^n, R^m)$, то $A\mathbf{h} \in R^m$. Таким образом,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h} \in R^m.$$

Норма, фигурирующая в числителе дроби (5), — это норма пространства R^m, а в знаменателе — R^n-норма вектора $\mathbf{h}$.

(b) В случае $n=1$ новое определение производной сводится к прежнему (см. определение 5.1 и п. 5.16). Производная $\mathbf{f}'(x)$ определялась как вектор $\mathbf{y} \in R^m$ (если только он существует), для которого

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x)}{h} - \mathbf{y} \right\} = 0. \tag{7}$$

Но всякому вектору $\mathbf{y} \in R^m$ можно (взаимно однозначно) сопоставить линейное преобразование $T_\mathbf{y}$ пространства R^1 в R^m по формуле $T_\mathbf{y} h = h\mathbf{y}$. Заметим, что *каждое* $T \in L(R^1, R^m)$ имеет вид $T = T_\mathbf{y}$ при некотором $\mathbf{y}$ (нужно просто взять $\mathbf{y} = T1$). При этом $|\mathbf{y}| = |T_\mathbf{y}|$.

(c) Пусть $\mathbf{f}$ и E — те же, что в определении 9.10, и пусть $\mathbf{f}$ дифференцируемо на E. При каждом фиксированном $\mathbf{x} \in E$ $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A$ есть линейное преобразование пространства R^n в R^m, т. е. функция, сопоставляющая каждому вектору $\mathbf{h} \in R^n$ вектор $\mathbf{f}'(x)\mathbf{h} = A\mathbf{h} \in R^m$. С другой стороны, поскольку отображение $\mathbf{f}$ дифференцируемо в каждой точке множества E, то каждой точке этого множества соответствует оператор $\mathbf{f}'(x) = A$. Тем самым дифференцируемое отображение $\mathbf{f}$ индуцирует отображение (функцию) $\mathbf{f}'$ на E со значениями в $L(R^n, R^m)$.

(d) Соотношение (5) можно переписать в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}), \tag{8}$$

где остаток $\mathbf{r}(\mathbf{h})$ мал в том смысле, что

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0. \tag{9}$$

Можно истолковать (8) так: при фиксированном $\mathbf{x}$ и малом $\mathbf{h}$ разность

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

приближенно равна $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$, т. е. равна значению линейной функции в точке $\mathbf{h}$.

Достаточно взглянуть на равенство (8), чтобы убедиться в непрерывности отображения $\mathbf{f}$ в любой точке, в которой оно дифференцируемо.

(e) Производную, определенную в (5) или в (8), часто называют *полной производной* отображения $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$, или *дифференциалом* отображения $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$.

Теперь мы решим вопрос о единственности, который, возможно, уже возник у читателя.

9.11. Теорема. *Пусть E и $\mathbf{f}$ — те же, что в определении 9.10, $\mathbf{x} \in E$ и (5) выполняется с $A = A_1$ и с $A = A_2$, где $A_i \in L(R^n, R^m)$ $(i = 1, 2)$. Тогда $A_1 = A_2$.*

Доказательство. Если $B = A_1 - A_2$, то неравенство

$$|B\mathbf{h}| \leqslant |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_1\mathbf{h}| + |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_2\mathbf{h}|$$

показывает, что $|B\mathbf{h}|/|\mathbf{h}| \to 0$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Отсюда следует, что при фиксированном $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$

$$\frac{|B(t\mathbf{h})|}{|t\mathbf{h}|} \to 0 \quad \text{при } t \to 0. \tag{10}$$

Ввиду того что B линейно, левая часть в (10) не зависит от t. Поэтому $B\mathbf{h} = \mathbf{0}$ при всех $\mathbf{h} \in R^n$. Теорема доказана.

Правило дифференцирования сложной функции (см. теорему 5.5) легко распространяется на данную ситуацию. И формулировка, и доказательство совершенно такие же, как в одномерном случае.

9.12. Теорема. *Пусть E — открытое множество в пространстве R^n, $\mathbf{f}$ — отображение множества E в пространство R^m, дифференцируемое в точке $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{g}$ — отображение некоторого открытого множества, содержащего $\mathbf{f}(E)$, в пространство R^k, причем $\mathbf{g}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Тогда отображение $\mathbf{F}$ множества E в пространство R^k, определенное равенством*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})),$$

дифференцируемо в точке $\mathbf{x}_0$, и

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0). \tag{11}$$

В правой части равенства (11) стоит произведение двух линейных преобразований, определенное в разделе 9.6.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$, $B = \mathbf{g}'(\mathbf{y}_0)$, и пусть

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - B(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0),$$
$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - BA(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Мы должны доказать, что $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = BA$, т. е. что

$$\frac{|\mathbf{r}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \to 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0. \tag{12}$$

Из определений отображения $\mathbf{F}$ и остатка $\mathbf{r}$ имеем

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - B(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0) + B(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)),$$

так что

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + B\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{13}$$

Если $\varepsilon > 0$, то из определения преобразований A и B следует, что существуют $\eta > 0$ и $\delta > 0$, такие, что

$$|\mathbf{v}(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|,$$

если $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \eta$, и

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| < \eta, \qquad |\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$$

при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$. Значит,

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))| &\leqslant \varepsilon |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| = \varepsilon |\mathbf{u}(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + \varepsilon \|A\| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$|B\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leqslant \|B\| |\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon \|B\| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \tag{15}$$

если $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$.

Теперь (12) следует из (13), (14) и (15).

9.13. Частные производные. Пусть $\mathbf{f}$ отображает открытое множество $E \subset R^n$ в пространство R^m и имеет компоненты $f_1, \ldots, f_m$, определенные в теореме 4.10. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — стандартный базис пространства R^n. Определим на множестве E функции $D_j f_i$ равенствами

$$D_j f_i(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x})}{t}, \tag{16}$$

если, конечно, этот предел существует. Записывая $f_i(\mathbf{x})$ в виде $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, мы видим, что $D_j f_i$ есть производная функции f_i по x_j при фиксированном значении остальных переменных. Поэтому часто используется обозначение

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{17}$$

вместо $D_j f_i$.

Если отображение $\mathbf{f}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, то определение производной $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ показывает, что

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}. \tag{18}$$

Переходя к координатам векторов, стоящих в (18), с $\mathbf{h} = \mathbf{e}_j$, мы видим, что *если $\mathbf{f}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, то все частные производные $(D_j f_i)(\mathbf{x})$ существуют.*

Обратное, вообще говоря, неверно даже в том случае, когда частные производные существуют во всех точках множества E (упражнение 9); если, однако, частные производные к тому же непрерывны, то обратное верно (см. теорему 9.16).

Отметим, что $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ — это j-й столбец матрицы $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$. Таким образом, $(D_jf_i)(\mathbf{x})$ находится в i-й строке и j-м столбце матрицы $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$.

9.14. Пример. Пусть $\mathbf{f}$ — дифференцируемое отображение интервала $(a, b) \subset R^1$ в открытое множество $E \subset R^n$, пусть g — дифференцируемая вещественная функция, определенная в E (т. е. g — дифференцируемое отображение множества E в пространство R^1). Положим $h(t) = g(\mathbf{f}(t))$ при $a < t < b$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$h'(t) = g'(\mathbf{f}(t))\,\mathbf{f}'(t) \qquad (a < t < b).$$

Ясно, что $h'(t)$ — линейный оператор на R^1, так как $\mathbf{f}'(t) \in L(R^1, R^n)$ и $g'(\mathbf{f}(t)) \in L(R^n, R^1)$. Если рассматривать $h'(t)$ как вещественное число, то оператор, о котором идет речь, — это оператор умножения на $h'(t)$; ср. с 9.10 (b).

По отношению к стандартному базису пространства R^n $[\mathbf{f}'(t)]$ — это матрица из n строк и 1 столбца («одностолбцовая матрица»), в i-й строке которой стоит $f_i'(t)$, где $f_1, \ldots, f_n$ — компоненты отображения $\mathbf{f}$, и при каждом $\mathbf{x} \in E$ $[g'(\mathbf{x})]$ — матрица из 1 строки и n столбцов («однострочная матрица»), в j-м столбце которой стоит $(D_jg)(\mathbf{x})$. Значит, $[h'(t)]$ — матрица из одной строки и одного столбца, единственным элементом которой служит вещественное число

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_ig)(\mathbf{f}(t))\, f_i'(t).$$

Написанное равенство — часто встречающийся случай правила дифференцирования сложной функции.

9.15. Определение. Дифференцируемое отображение $\mathbf{f}$ открытого множества $E \subset R^n$ в пространство R^m называется *непрерывно дифференцируемым* на E, если $\mathbf{f}'$ — непрерывное отображение множества E в пространство $L(R^n, R^m)$.

Говоря более отчетливо, в этом определении требуется, чтобы для любого $\mathbf{x} \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существовало число $\delta > 0$, такое, что $\|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| < \varepsilon$, если $\mathbf{y} \in E$ и $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \delta$.

Если это выполняется, то мы будем говорить, что $\mathbf{f}$ является $\mathscr{C}'$-отображением на E или что $f \in \mathscr{C}'(E)$.

9.16. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}$ отображает открытое множество $E \subset R^n$ в пространство R^m. Тогда $\mathbf{f} \in \mathscr{C}'(E)$ в том и только в том случае, когда частные производные D_jf_i существуют и непрерывны на E при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Доказательство. Если $\mathbf{f} \in \mathscr{C}'(E)$, то неравенство

$$|\mathbf{f}'(\mathbf{y})\mathbf{e}_j - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j| \leqslant \|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\|$$

в сочетании с (16) и (18) показывает, что каждая частная производная $D_j f_i$ — непрерывная функция на E.

Для доказательства обратного достаточно рассмотреть случай $m=1$ (почему?). Зафиксируем $\mathbf{x} \in E$ и $\varepsilon > 0$. Ввиду того что множество E открыто, существует открытый шар S с центром в точке $\mathbf{x}$ и радиусом r, целиком принадлежащий E. Из непрерывности функций $D_j f$ следует, что r можно выбрать столь малым, чтобы иметь

$$|(D_j f)(\mathbf{y}) - (D_j f)(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{n} \quad (\mathbf{y} \in S,\ 1 \leqslant j \leqslant n). \tag{19}$$

Пусть $\mathbf{h} = \sum h_j \mathbf{e}_j$, $|\mathbf{h}| < r$, пусть $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v}_k = h_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + h_k \mathbf{e}_k$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} [f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_j) - f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1})]. \tag{20}$$

Ввиду того что $|\mathbf{v}_k| < r$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, а множество S выпукло, отрезки с концами $\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1}$ и $\mathbf{x}+\mathbf{v}_j$ лежат в S. Поскольку $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j-1} + h_j \mathbf{e}_j$, то по теореме 5.10 о среднем значении j-е слагаемое в (20) равно

$$h_j (D_j f)(\mathbf{x} + \mathbf{v}_{j-1} + \theta_j h_j \mathbf{e}_j) \tag{21}$$

при некотором $\theta_j \in (0,1)$, и потому оно в силу (19) отличается от $h_j (D_j f)(\mathbf{x})$ менее, чем на $|h_j| \varepsilon / n$. Согласно (20), отсюда следует, что

$$\left| f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(\mathbf{x}) \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |h_j| \varepsilon \leqslant |\mathbf{h}| \varepsilon$$

при всех $\mathbf{h}$, таких, что $|\mathbf{h}| < r$.

Это означает, что функция f дифференцируема в точке $\mathbf{x}$ и что $f'(\mathbf{x})$ — линейная функция, которая ставит в соответствие число $\sum h_j (D_j f)(\mathbf{x})$ вектору $\mathbf{h} = \sum h_j \mathbf{e}_j$. Матрица $[f'(\mathbf{x})]$ состоит из строки $(D_1 f)(\mathbf{x}), \ldots, (D_n f)(\mathbf{x})$, а так как функции $D_1 f, \ldots, D_n f$ непрерывны на E, то, как показывает заключительное замечание п. 9.9, $f \in \mathscr{C}'(E)$.

Теорема об обратной функции

Эта теорема утверждает, грубо говоря, что непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{f}$ обратимо в окрестности любой точки $\mathbf{x}$, в которой обратимо линейное преобразование $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$.

9.17. Теорема. *Пусть* $\mathbf{f}$ *есть* $\mathscr{C}'$*-отображение открытого множества* $E \subset R^n$ *в пространство* R^n*, пусть отображение* $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ *обратимо при некотором* $\mathbf{a} \in E$*, и пусть* $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$*. Тогда* (*a*) *существуют открытые множества* U *и* V *в пространстве* R^n, *такие, что* $\mathbf{a}\in U$, $\mathbf{b}\in V$, $\mathbf{f}$ *взаимно однозначно на* U *и* $\mathbf{f}(U)=V$;

(*b*) *если* $\mathbf{g}$ — *отображение, обратное к* $\mathbf{f}$ [*оно существует согласно* (*a*)], *заданное в* V *равенством*

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x}\in V),$$

то $\mathbf{g}\in\mathscr{C}'(V)$.

Записывая равенство $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ с помощью компонент, мы приходим к следующей интерпретации заключения теоремы: равенства

$$y_i=f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

определяют взаимно однозначное соответствие между достаточно малыми окрестностями точек $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; при этом $x_1, \ldots, x_n$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями от $y_1, \ldots, y_n$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}'(\mathbf{a})=A$. Выберем λ так, чтобы $4\lambda\|A^{-1}\|=1$. Ввиду того что $\mathbf{f}\in\mathscr{C}'(E)$, существует такой открытый шар U с центром в точке $\mathbf{a}$, что

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x})-A\|<2\lambda \qquad (\mathbf{x}\in U). \tag{22}$$

Допустим, что $\mathbf{x}\in U$ и $\mathbf{x}+\mathbf{h}\in U$. Положим

$$\mathbf{F}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{h})-tA\mathbf{h} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Вследствие выпуклости множества U, $\mathbf{x}+t\mathbf{h}\in U$ при $0\leqslant t\leqslant 1$, и из (22) следует, что

$$|\mathbf{F}'(t)|=|\mathbf{f}'(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\mathbf{h}-A\mathbf{h}|\leqslant 2\lambda|\mathbf{h}|\leqslant \frac{1}{2}|A\mathbf{h}|.$$

Последнее неравенство выполняется потому, что

$$2\lambda|\mathbf{h}|=2\lambda|A^{-1}A\mathbf{h}|\leqslant 2\lambda\|A^{-1}\|\,|A\mathbf{h}|=\frac{1}{2}|A\mathbf{h}|,$$

в силу выбора числа λ. Из теоремы 5.20 следует теперь, что

$$|\mathbf{F}(1)-\mathbf{F}(0)|\leqslant\frac{1}{2}|A\mathbf{h}|,$$

или

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A\mathbf{h}|\leqslant\frac{1}{2}|A\mathbf{h}|. \tag{23}$$

Отсюда следует, что

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})|>\frac{1}{2}|A\mathbf{h}|\geqslant 2\lambda|\mathbf{h}|. \tag{24}$$

Подчеркнем, что неравенства (23) и (24) выполняются, если только $\mathbf{x}\in U$ и $\mathbf{x}+\mathbf{h}\in U$. В частности, из (24) следует, что *отображение* $\mathbf{f}$ *взаимно однозначно на* U.

Зафиксируем $\mathbf{x}_0 \in U$ и рассмотрим открытый шар S с центром в точке $\mathbf{x}_0$ радиуса $r > 0$, замыкание которого $\overline{S}$ лежит в U. Мы докажем, что $\mathbf{f}(S)$ содержит открытый шар с центром в точке $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ радиуса λr.

Чтобы сделать это, зафиксируем такой вектор $\mathbf{y}$, что $|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| < \lambda r$, и положим

$$\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})| \qquad (\mathbf{x} \in \overline{S}).$$

Если $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r$, то, как показывает (24),

$$2\lambda r \leqslant |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| \leqslant \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}_0) < \varphi(\mathbf{x}) + \lambda r.$$

Таким образом,

$$\varphi(\mathbf{x}_0) < \lambda r < \varphi(\mathbf{x}) \qquad (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r) \tag{25}$$

Ввиду того что φ — непрерывная функция, а $\overline{S}$ — компактное множество, существует $\mathbf{x}^* \in \overline{S}$, такой, что $\varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \varphi(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in \overline{S}$. Согласно (25), $\mathbf{x}^* \in S$.

Положим $\mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. Поскольку A обратим, существует вектор $\mathbf{h} \in R^n$, такой, что $A\mathbf{h} = \mathbf{w}$. Выберем число $t \in (0, 1)$, столь малое, что $\mathbf{x}^* + t\mathbf{h} \in S$. Тогда

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y} + At\mathbf{h}| = (1 - t)|\mathbf{w}|, \tag{26}$$

и, как показывает (23),

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) - At\mathbf{h}| \leqslant \frac{1}{2}|t\mathbf{w}|. \tag{27}$$

Поскольку $\varphi(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h})$ — норма суммы векторов, фигурирующих в левых частях равенства (26) и неравенства (27), и так как $|\mathbf{w}| = \varphi(\mathbf{x}^*)$, то

$$\varphi(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}) \leqslant \left(1 - \frac{t}{2}\right)\varphi(\mathbf{x}^*). \tag{28}$$

Таким образом, $\varphi(\mathbf{x}^*) = 0$, т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}$ [1]).

Тем самым доказано, что каждая точка множества $\mathbf{f}(U)$ имеет окрестность, содержащуюся в $\mathbf{f}(U)$. Поэтому $\mathbf{f}(U)$ — открытое подмножество пространства R^n. Полагая $V = \mathbf{f}(U)$, мы видим, что утверждение (a) теоремы доказано.

Чтобы доказать (b), выберем $\mathbf{y} \in V$, $\mathbf{y} + \mathbf{k} \in V$ и положим $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$,

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

---

[1]) Эту часть доказательства можно еще немного сократить. Действительно, функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = |\mathbf{y} - f(\mathbf{x})|^2$ достигает минимума в точке $\mathbf{x}^*$, принадлежащей S. Поэтому частные производные функции $\tilde{\varphi}(\mathbf{x})$ в этой точке существуют и обращаются в нуль. Отсюда следует, что $f'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)) = 0$. Но оператор $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$, как легко видеть, обратим, так что $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. — *Прим. перев.*

Согласно теореме 9.8 (a), неравенству (22) и нашему выбору числа λ, оператор $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ имеет обратный, который мы обозначим через B. Применяя B к равенству

$$\mathbf{k}=\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h}+\mathbf{r}(\mathbf{h}),$$

где $|\mathbf{r}(\mathbf{h})|/|\mathbf{h}|\to 0$ при $\mathbf{h}\to 0$, мы получим $B\mathbf{k}=\mathbf{h}+B\mathbf{r}(h)$, или

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y})=B\mathbf{k}-B(\mathbf{r}(\mathbf{h})). \tag{29}$$

Согласно (24), $2\lambda|\mathbf{h}|\leqslant|\mathbf{k}|$. Таким образом, $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ при $\mathbf{k}\to\mathbf{0}$ (что одновременно доказывает непрерывность отображения $\mathbf{g}$ в точке $\mathbf{y}$) и

$$\frac{|B(\mathbf{r}(\mathbf{h}))|}{|\mathbf{k}|}\leqslant\frac{\|B\|}{2\lambda}\,\frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|}\to 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{k}\to\mathbf{0}. \tag{30}$$

Сравнение (30) и (29) показывает, что $\mathbf{g}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{y}$ и что $\mathbf{g}'(\mathbf{y})=B$. Иными словами,

$$\mathbf{g}'(\mathbf{y})=\{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))\}^{-1} \qquad (\mathbf{y}\in V). \tag{31}$$

Кроме того, $\mathbf{g}$ — непрерывное отображение множества V на U, $\mathbf{f}'$ — непрерывное отображение множества U в множество Ω всех обратимых элементов множества $L(R^n)$, а переход к обратному — непрерывное отображение множества Ω на множество Ω [по теоме 9.8 (b)]. Используя эти факты и равенство (31), мы получаем, что $\mathbf{g}\in\mathscr{C}'(V)$.

Теорема доказана.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы [часть (a)]:

Следствие. *Если* $\mathbf{f}$ *есть* $\mathscr{C}'$*-отображение открытого множества* $E\subset R^n$ *в пространство* R^n *и если оператор* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *обратим при любом* $\mathbf{x}\in E$, *то* $\mathbf{f}(W)$ — *открытое подмножество пространства* R^n, *каково бы ни было открытое множество* $W\subset E$.

Иными словами, $\mathbf{f}$ — *открытое отображение* множества E в пространство R^n.

Предположения, сделанные в этом следствии, обеспечивают для каждой точки $\mathbf{x}\in E$ существование такой окрестности, на которой отображение $\mathbf{f}$ взаимно однозначно. Можно сказать, что $\mathbf{f}$ *локально* взаимно однозначно. Однако $\mathbf{f}$ не обязано при этом быть взаимно однозначным на всем множестве E. Пример приведен в упражнении 12.

Теорема о неявной функции

Если $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$ и $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_m)\in R^m$, то через $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ мы будем обозначать точку (или вектор)

$$(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\in R^{n+m}.$$

В этом разделе первый элемент в $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или в подобном символе всегда будет обозначать вектор пространства R^n, а второй — вектор пространства R^m.

Пусть $A \in L(R^{n+m}, R^n)$, и пусть

$$A(\mathbf{h}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ эквивалентно } \mathbf{h} = \mathbf{0}. \tag{32}$$

Заметим, что по теореме 9.5 отображение $\mathbf{h} \to A(\mathbf{h}, \mathbf{0})$ есть линейное взаимно однозначное отображение R^n *на* себя. Далее, при всяком $\mathbf{k} \in R^m$ и $\mathbf{b} \in R^n$ уравнение $A(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \mathbf{b}$ имеет единственное решение. Действительно, существует такое $\mathbf{x}$, что $A(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{b} - A(\mathbf{0}, \mathbf{k})$, т. е. $A(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \mathbf{b}$, а если $A(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}) = A(\mathbf{x}_2, \mathbf{k})$, то $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и, в силу (32), $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

В частности, *если A удовлетворяет условию* (32), *то уравнение*

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \tag{33}$$

имеет при каждом $\mathbf{y} \in R^m$ одно и только одно решение $\mathbf{x} \in R^n$.

Теорема о неявной функции утверждает, что подобное заключение справедливо и в отношении некоторых (не обязательно линейных) непрерывно дифференцируемых отображений. Прежде чем сформулировать ее, заметим, что если $[A]$ — матрица (из n строк и $n+m$ столбцов) отображения A по отношению к стандартным базисам, то (32) означает в точности, что *векторы, стоящие в первых n столбцах матрицы* $[A]$, линейно независимы. Пользуясь этим критерием, можно проверять, выполняется ли (32).

9.18. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}$ есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^{n+m}$ в пространство R^n. Допустим, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и A удовлетворяет условию* (32). *Тогда существуют окрестность W точки $\mathbf{b}$ ($W \subset R^m$) и единственная функция $\mathbf{g} \in \mathscr{C}'(W)$ со значениями в R^n, такие, что $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ и*

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{y} \in W). \tag{34}$$

Функция $\mathbf{g}$ определена неявно равенством (34), отсюда и название теоремы. Ее можно сформулировать в терминах, относящихся к системе n уравнений с $n+m$ неизвестными:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ &\vdots \\ &f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Наше предположение об A теперь означает, что квадратная матрица из n строк и n столбцов, такая, что на пересечении ее i-й строки и j-го столбца стоит $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, имеет независимые столбцы. Если это выполняется и если $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ удовлетворяют уравнению (35), то (35) можно разрешить относительно $x_1, \ldots, x_n$ при каждом $\mathbf{y}$, достаточно близком к $\mathbf{b}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}$ — отображение, ставящее в соответствие точке $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E$ точку $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in R^{n+m}$, определенную равенством

(36) $$\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{w} = \mathbf{y}.$$

Тогда $\mathbf{F} \in \mathscr{C}'(E)$. Поскольку $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, то

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}, \mathbf{b}+\mathbf{k}) = A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) + \mathbf{r}(\mathbf{h}, \mathbf{k}),$$

где $\mathbf{r}$ — остаток, участвующий в определении $\mathbf{f}'$. Из того что

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{h}, \mathbf{b}+\mathbf{k}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{f}((\mathbf{a}+\mathbf{h}), \mathbf{b}+\mathbf{k}), \mathbf{k}),$$

следует, что $\mathbf{F}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — линейный оператор на R^{n+m}, который вектору $(\mathbf{h}, \mathbf{k})$ ставит в соответствие вектор $(A(\mathbf{h}, \mathbf{k}), \mathbf{k})$. Если при таком отображении образ какого-нибудь вектора равен нулю, то $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, а потому $A(\mathbf{h}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и из (32) следует, что $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Это значит, что оператор $\mathbf{F}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ взаимно однозначен и, следовательно, обратим (теорема 9.5).

Поэтому к $\mathbf{F}$ применима теорема об обратной функции: существуют открытые множества U и V в R^{n+m}, содержащие $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ и такие, что $\mathbf{F}$ взаимно однозначно отображает U на V; согласно (36), отображение, обратное к $\mathbf{F}$, имеет вид

(37) $$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{w} \qquad ((\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V),$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}'(V)$. Иными словами,

(38) $$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \mathbf{w}) = \mathbf{z} \qquad ((\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V).$$

Если мы теперь обозначим через W такую окрестность точки $\mathbf{b}$, что $(\mathbf{0}, \mathbf{w}) \in V$ при $\mathbf{w} \in W$, и положим $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}, \mathbf{y})$ при $\mathbf{y} \in W$, то при $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ в (38) мы получим (34).

Ясно, что $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$, так как $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}$. Единственность функции $\mathbf{g}$ следует из того, что отображение $\mathbf{F}$ взаимно однозначно: если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \in U$, а $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$, то $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$, а потому $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$.

Теорема о ранге

Назовем *рангом* линейного преобразования размерность его множества значений. Следующая теорема служит подготовительной к теореме 9.20.

9.19. Теорема. *Пусть p, q, r — неотрицательные целые числа, X и Y — векторные пространства,* $\dim X = r + p$, $\dim Y = r + q$, *A — линейное преобразование пространства X в пространство Y ранга r. Тогда существуют векторные пространства X_1,*

X_2, содержащиеся в X, и пространства Y_1, Y_2, содержащиеся в Y, такие, что

(a) каждый $\mathbf{x} \in X$ единственным образом представим в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in X_1$, $\mathbf{x}_2 \in X_2$;

(b) каждый $\mathbf{y} \in Y$ единственным образом представим в виде $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{y}_1 \in Y_1$, $\mathbf{y}_2 \in Y_2$;

(c) $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ при каждом $\mathbf{x}_2 \in X_2$;

(d) сужение преобразования A на X_1 — взаимно однозначное отображение пространства X_1 на пространство Y_1;

(e) $\dim X_1 = \dim Y_1 = r$.

Доказательство. По теореме 9.3 (c) пространство Y имеет базис $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r+q}\}$, такой, что $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ — базис множества значений Y_1 преобразования A. Пусть Y_2 — оболочка множества $\{\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_{r+q}\}$. (Заметим, что если $q = 0$, то Y_2 состоит из одного лишь нулевого вектора. Некоторые утверждения, высказанные в ходе этого доказательства и в теореме 9.20, должны быть истолкованы аналогично, если одно или более из чисел p, q, r равны нулю. Мы предоставляем читателю подправить эти утверждения и истолковать их.)

Выберем векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in X$, такие, что $A\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Тогда $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ — независимое множество; натянем на него пространство X_1. Пусть X_2 — множество всех $\mathbf{x} \in X$, таких, что $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ясно, что утверждения от (b) до (e) выполняются. Если $\mathbf{x} \in X$, то $A\mathbf{x} = \sum_1^r c_j \mathbf{v}_j$, где $c_1, \ldots, c_r$ — некоторые числа. Положим $\mathbf{x}_1 = \sum_1^r c_j \mathbf{u}_j$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$. Тогда $\mathbf{x}_1 \in X_1$, $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}$; значит, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, или $\mathbf{x}_2 \in X_2$. Согласно (c) и (d), X_1 и X_2 имеют только один общий вектор — нулевой. Поэтому представление $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ единственно, и (a) доказано.

Следующая теорема еще раз иллюстрирует общий принцип, состоящий в том, что непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{F}$ вблизи точки $\mathbf{x}$ ведет себя примерно так же, как линейное преобразование $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$.

9.20. Теорема. *Пусть $X = R^{r+p}$, $Y = R^{r+q}$, $\mathbf{F}$ есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset X$ в пространство Y и $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ — линейное преобразование ранга r при любом $\mathbf{x} \in E$.*

Зафиксируем точку $\mathbf{a} \in E$, положим $A = \mathbf{F}'(\mathbf{a})$, выберем X_1, X_2, Y_1, Y_2, как в теореме 9.19, и определим $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ равенством

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in E), \tag{39}$$

где $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \in Y_1$, $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \in Y_2$.

Тогда существует открытое множество U в пространстве X, такое, что $\mathbf{a} \in U$, $U \subset E$ *и*

(*a*) $\mathbf{F}_1(U)$ — *открытое множество в* Y_1;

(*b*) *для любого* $\mathbf{y} \in \mathbf{F}_1(U)$ *существует ровно один* $\mathbf{y}_2 \in Y_2$, *такой, что*

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in \mathbf{F}(U).$$

Геометрический смысл утверждения (*b*) таков: $\mathbf{F}(U)$ — это «r-мерная поверхность» в Y, причем «над» каждой точкой множества $\mathbf{F}_1(U)$ лежит ровно одна точка этой поверхности. Мы советуем читателю набросать чертеж для случаев, когда числа p, q, r принимают одно из значений 0, 1, 2.

Доказательство. Пусть T — сужение отображения A на X_1. Согласно 9.19 (*d*), T — линейное взаимно однозначное преобразование пространства X_1 на Y_1, а обратное преобразование T^{-1} отображает Y_1 на X_1. Пусть P — линейный оператор на X, определенный так: $P\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 \in X_1$, $\mathbf{x}_2 \in X_2$ (такого рода оператор называют *проектором*), и пусть

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = T^{-1}\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + P\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{40}$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = T^{-1}\mathbf{F}_1'(\mathbf{a}) + P. \tag{41}$$

При $i = 1, 2$ множество значений отображения $\mathbf{F}_i$ содержится в Y_i. Поскольку Y_i — замкнутое подпространство пространства Y, то из (18) ясно что $\mathbf{F}_i'(\mathbf{a})\mathbf{h} \in Y_i$ при всех $\mathbf{h} \in X$. Согласно (39), $A = \mathbf{F}_1'(\mathbf{a}) + \mathbf{F}_2'(\mathbf{a})$; а так как множество значений отображения A совпадает с Y_1, то, по теореме 9.19 (*b*), $A = \mathbf{F}_1'(\mathbf{a})$, и 9.19 (*c*) показывает, что $A\mathbf{h} = A\mathbf{h}_1$, если $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_1 \in X_1$, $\mathbf{h}_2 \in X_2$. Таким образом,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{h} = T^{-1}A\mathbf{h} + P\mathbf{h} = T^{-1}A\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}.$$

Это значит, что $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ — тождественное отображение на X. Поэтому из теоремы об обратной функции следует, что существуют открытые множества U и V в X, такие, что $\mathbf{a} \in U$, $U \subset E$ и $\mathbf{f}$ — взаимно однозначное отображение множества U на V. Более того (заменяя, если потребуется, U и V надлежащими множествами), можно добиться, чтобы V было выпуклым. Пусть $\mathbf{g}$ — отображение множества V на U, обратное к $\mathbf{f}$. Положим

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{z})) \qquad (\mathbf{z} \in V). \tag{42}$$

Из того, что $AP = 0$, следует, что $A\mathbf{f} = AT^{-1}\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1$, так что

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{g}(\mathbf{z})) = A\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z})) = A\mathbf{z} = A\mathbf{z}_1.$$

Таким образом,

(43) $$\mathbf{\Phi}(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}_1 + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) \qquad (\mathbf{z} \in V),$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) \in Y_2$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_1 \in X_1$, $\mathbf{z}_2 \in X_2$.

Согласно (42) и (43), $\mathbf{F}_1(U)$ — это множество всех точек $A\mathbf{z}_1$, где $\mathbf{z} \in V$. Поскольку V открыто, а Y_1 — множество значений отображения A, то утверждение (*a*) теоремы доказано.

Чтобы доказать (*b*), достаточно проверить, что $\mathbf{\Phi}(\mathbf{z})$ зависит только от $\mathbf{z}_1$.

Зафиксируем $\mathbf{z} \in V$. Согласно (42) и (43),

(44) $$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{z}) = \mathbf{F}'(\mathbf{g}(\mathbf{z}))\,\mathbf{g}'(\mathbf{z}) = A + \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z}).$$

Ввиду того что $\mathbf{g}'(\mathbf{z})$ — обратимый линейный оператор на X, а $\mathbf{F}'(\mathbf{g}(\mathbf{z}))$ — отображение ранга r, множество значений R отображения $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{z})$ — векторное пространство размерности r. Пусть Q — проектор пространства Y на пространство Y_1. Поскольку множество значений отображения $\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z})$ содержится в Y_2, то (44) показывает, что $A = Q\mathbf{\Phi}'(\mathbf{z})$. Таким образом, Q отображает пространство R на Y_1, а так как размерность обоих этих пространств равна r, то Q взаимно однозначно на R. Таким образом,

(45) $$\text{из } A\mathbf{h} = \mathbf{0} \text{ следует, что } \mathbf{\Phi}'(\mathbf{z})\,\mathbf{h} = \mathbf{0}.$$

Если теперь $\mathbf{z} \in V$, $\mathbf{z} + \mathbf{h}_2 \in V$, $\mathbf{h}_2 \in X_2$, то положим

(46) $$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{z} + t\mathbf{h}_2) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Поскольку V выпукло, это определение имеет смысл, а так как $A\mathbf{h}_2 = 0$, то из (45) и (46) следует, что

(47) $$\mathbf{\Lambda}'(t) = \mathbf{\Phi}'(\mathbf{z} + t\mathbf{h}_2)\,\mathbf{h}_2 = \mathbf{0} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Таким образом, $\mathbf{\Lambda}(1) = \mathbf{\Lambda}(0)$, так что $\mathbf{\Phi}(\mathbf{z} + \mathbf{h}_2) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})$ и (*b*) установлено.

Теорема о разложении

Пусть $\mathbf{f}$ — отображение открытого множества $E \subset R^n$ в пространство R^n, и пусть существует такое целое j, что $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}$ при всех $i \neq j$, $\mathbf{x} \in E$. Таким образом, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ имеют равные i-е координаты при $i \neq j$, т. е. отображение $\mathbf{f}$ может изменять только j-ю координату. Мы будем называть такие отображения *простыми*.

9.21. Теорема. *Пусть $\mathbf{f}$ есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^n$ в пространство R^n, $\mathbf{0} \in E$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, а $\mathbf{f}'(\mathbf{0})$ — обратимое преобразование. Тогда существует такая окрестность нуля в R^n, в которой имеет место представление*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_n(B_n(\mathbf{g}_{n-1}(\ldots(\mathbf{g}_1(B_1\mathbf{x}))).$$

Здесь каждое $\mathbf{g}_k$ — простое $\mathscr{C}'$-отображение некоторой окрестности точки $\mathbf{0}$, $\mathbf{g}_k(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, а каждое B_k — линейное отображение на R^n, причем либо тождественное, либо меняющее местами какую-нибудь одну пару координат.

Доказательство. Положим $\mathbf{f}=\mathbf{f}_1$, и пусть $1\leqslant m\leqslant n$. Примем следующее индуктивное предположение (очевидно, справедливое при $m=1$): $\mathbf{f}_m$ отображает окрестность точки $\mathbf{0}$ пространства R^n в пространство R^n, $\mathbf{f}_m$ — отображение класса $\mathscr{C}'$, преобразование $A_m=\mathbf{f}'_m(\mathbf{0})$ обратимо и

$$(48)\qquad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{f}_m(\mathbf{x})=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{x}\qquad (1\leqslant i<m).$$

Положим $\alpha_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot A_m\mathbf{e}_j$. Из (48) следует, что $\alpha_{ij}=0$, если $i<m$ и $j\geqslant m$. Если бы, кроме того, при всех $j\geqslant m$ выполнялось равенство $\alpha_{mj}=0$, то из представления $A_m\mathbf{e}_j=\sum\limits_i\alpha_{ij}\mathbf{e}_i$ следовало бы, что $n+m-1$ независимых векторов $A_m\mathbf{e}_m,\ \ldots,\ A_m\mathbf{e}_n$ принадлежат оболочке $n-m$ векторов $\mathbf{e}_{m+1},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$, вопреки теореме 9.2.

Таким образом, существует такое j, что $m\leqslant j\leqslant n$ и $\alpha_{mj}\neq 0$.

Определим операторы P_m, $B_m\in L(R^n)$ равенствами: $P_m\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_i$, если $i\neq m$, $P_m\mathbf{e}_m=0$; $B_m\mathbf{e}_m=\mathbf{e}_j$, $B_m\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_m$, $B_m\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_i$ для всех прочих i. Положим

$$(49)\qquad \mathbf{g}_m(\mathbf{x})=P_m\mathbf{x}+\{\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{f}_m(B_m\mathbf{x})\}\,\mathbf{e}_m.$$

Тогда $\mathbf{g}_m$, очевидно, простое отображение. Поскольку $(\mathbf{f}_mB_m)'(\mathbf{0})=A_mB_m$, то

$$(50)\qquad \mathbf{g}'_m(\mathbf{0})\,\mathbf{h}=P_m\mathbf{h}+\{\mathbf{e}_m\cdot A_mB_m\mathbf{h}\}\,\mathbf{e}_m\qquad (\mathbf{h}\in R^n).$$

Если $\mathbf{g}'_m(\mathbf{0})\,\mathbf{h}=\mathbf{0}$, то, как показывает (50), $P_m\mathbf{h}=\mathbf{0}$, так что $\mathbf{h}=\lambda\mathbf{e}_m$. Но, кроме того, $\mathbf{e}_m\cdot A_mB_m\mathbf{h}=0$, т. е. $\lambda\alpha_{mj}=0$ по определению B_m. Поскольку $\alpha_{mj}\neq 0$, мы видим, что $\lambda=0$, значит, $\mathbf{h}=\mathbf{0}$.

Тем самым доказано, что $\mathbf{g}'_m(\mathbf{0})$ — взаимно однозначное отображение. Стало быть, оно обратимо, и из теоремы об обратном отображении следует, что $\mathbf{g}_m$ взаимно однозначно в некоторой окрестности U_m точки $\mathbf{0}$ и что $\mathbf{g}_m(U_m)=V_m$ — открытое множество в R^n. Положим

$$(51)\qquad \mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{y})=\mathbf{f}_m(B_m\mathbf{g}_m^{-1}(\mathbf{y}))\qquad (\mathbf{y}\in V_m).$$

Если $\mathbf{y}\in V_m$, $\mathbf{y}=\mathbf{g}_m(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in U_m$, то, как показывает (49),

$$(52)\qquad \mathbf{e}_m\cdot\mathbf{y}=\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{f}_m(B_m\mathbf{x}),\qquad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{y}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{x}\qquad (i<m).$$

Теперь из (48) и определения B_m следует, что

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{y})=\mathbf{e}_i\cdot B_m\mathbf{x}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{x}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{y},$$

если $i < m$; из (52), кроме того, следует, что

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{f}_m(B_m\mathbf{x}) = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{y}.$$

Следовательно, $\mathbf{f}_{m+1}$ удовлетворяет предположению индукции с $m+1$ вместо m, и построение можно продолжить. Переписывая (51) в виде

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{m+1}(\mathbf{g}_m(B_m\mathbf{x})) \tag{53}$$

при $m = 1, \ldots, n$ и замечая, что $\mathbf{f}_{n+1}$ — тождественное отображение, мы получаем

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{g}_1(B_1\mathbf{x})) = \mathbf{f}_3(\mathbf{g}_2(B_2\mathbf{g}_1(B_1\mathbf{x})) - \ldots,$$

что и составляет нужное заключение.

Определители

9.22. Определение. Если $(j_1, \ldots, j_n)$ — упорядоченный набор целых чисел, то положим

$$s(j_1, \ldots, j_n) = \prod_{p>q} \operatorname{sgn}(j_q - j_p), \tag{54}$$

где $\operatorname{sgn} x = 1$, если $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$, если $x < 0$, $\operatorname{sgn} x = 0$, если $x = 0$. Тогда $s(j_1, \ldots, j_n) = 1$, -1 или 0 и меняет знак, если какие-нибудь два из чисел j меняются местами.

Пусть $[A]$ — матрица линейного оператора A на R^n по отношению к стандартному базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$; на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $[A]$ стоит число $a(i, j)$. *Определителем* матрицы $[A]$ называется число

$$\det[A] = \sum s(j_1, \ldots, j_n)\, a(1, j_1)\, a(2, j_2) \ldots a(n, j_n). \tag{55}$$

Суммирование в (55) производится по всем упорядоченным наборам целых чисел $(j_1, \ldots, j_n)$, таким, что $1 \leqslant j_r \leqslant n$.

Векторы, которые служат столбцами матрицы $[A]$, таковы:

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a(i, j)\,\mathbf{e}_i \qquad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{56}$$

Удобно представлять себе $\det[A]$ как функцию столбцов матрицы $[A]$. Если мы запишем

$$\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det[A],$$

то теперь $\det$ — вещественная функция, определенная на множестве всех упорядоченных наборов, состоящих из n векторов пространства R^n.

9.23. Теорема. (*a*) *Если I — тождественный оператор на R^n, то*

$$\det[I] = \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

(*b*) $\det$ — *линейная функция по каждому из столбцов $\mathbf{x}_j$, если остальные фиксированы.*

(*c*) *Если $[A]_1$ получается из $[A]$ перестановкой двух столбцов, то* $\det[A]_1 = -\det[A]$.

(*d*) *Если матрица $[A]$ имеет два равных столбца, то* $\det[A] = 0$.

Доказательство. Если $A = I$, то $a(i, i) = 1$, $a(i, j) = 0$ при $i \neq j$. Значит,

$$\det[I] = s(1, 2, \ldots, n) = 1,$$

и (*a*) доказано. Согласно (54), $s(j_1, \ldots, j_n) = 0$, если какие-нибудь два из чисел j равны. Каждое из $n!$ остальных произведений, участвующих в (55), содержит ровно по одному множителю из каждого столбца. Тем самым доказано (*b*). Утверждение (*c*) немедленно следует из того, что $s(j_1, \ldots, j_n)$ меняет знак, если какие-нибудь два из чисел j равны, а (*d*) следует из (*c*).

9.24. Теорема. *Пусть $[A]$ и $[B]$ — матрицы операторов, действующих в R^n. Тогда* $\det([B][A]) = \det[B] \cdot \det[A]$.

Доказательство. Если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ — столбцы матрицы $[A]$, то положим

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \Delta_B[A] = \det([B][A]). \tag{57}$$

Столбцы матрицы $[B][A]$ — это векторы $B\mathbf{x}_1, \ldots, B\mathbf{x}_n$.

Таким образом,

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det(B\mathbf{x}_1, \ldots, B\mathbf{x}_n). \tag{58}$$

Согласно (58) и теореме 9.23, функция Δ_B также обладает свойствами (9.23) (*b*), (*c*), (*d*). Согласно (*b*) и (56),

$$\Delta_B[A] = \Delta_B\Big(\sum_i a(i, 1)\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\Big) = \sum_i a(i, 1)\Delta_B(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Повторяя эту процедуру с $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, мы получаем

$$\Delta_B[A] = \sum a(i_1, 1)\, a(i_2, 2) \ldots a(i_n, n)\, \Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}), \tag{59}$$

где суммирование распространяется на все упорядоченные наборы $(i_1, \ldots, i_n)$ с $1 \leqslant i_r \leqslant n$. Согласно (*c*) и (*d*),

$$\Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) = t(i_1, \ldots, i_n)\, \Delta_B(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{60}$$

где $t = 1$, 0 или -1, а так как $[B][I] = [B]$, то из (57) следует, что

$$\Delta_B(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \det[B]. \tag{61}$$

Подставляя (61) и (60) в (59), мы получаем

$$\det([B][A]) = \{\sum a(i_1, 1) \ldots a(i_n, n) t(i_1, \ldots, i_n)\} \det[B],$$

каковы бы ни были матрицы $[A]$ и $[B]$. Полагая $B = I$, мы видим, что сумма в фигурных скобках равна $\det[A]$. Теорема доказана.

9.25. Теорема. *Линейный оператор A на R^n обратим тогда и только тогда, когда* $\det[A] \neq 0$.

Доказательство. Если A обратим, то, как показывает теорема 9.24,

$$\det[A]\det[A^{-1}] = \det[AA^{-1}] = \det[I] = 1,$$

так что $\det[A] \neq 0$.

Если A не обратим, то столбцы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ матрицы $[A]$ зависимы (теорема 9.5) и, следовательно, имеется столбец, скажем, $\mathbf{x}_k$, такой, что

$$\mathbf{x}_k + \sum_{j \neq k} c_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}, \tag{62}$$

где c_j — некоторые числа. Согласно 9.23 (b) и (d), столбец $\mathbf{x}_k$ можно заменить столбцом $\mathbf{x}_k + c_j\mathbf{x}_j$, не меняя определителя, если $j \neq k$. Отсюда следует, что столбец $\mathbf{x}_k$, сохраняя значение определителя, можно заменить столбцом, стоящим слева в (62), т. е. столбцом нулей. Но матрица, имеющая $\mathbf{0}$ одним из своих столбцов, имеет нулевой определитель. Поэтому $\det[A] = 0$.

9.26. Замечание. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ — базисы в R^n. Каждому линейному оператору в R^n отвечают матрицы $[A]$ и $[A]_U$ с элементами a_{ij} и α_{ij} в соответствии с равенствами

$$A\mathbf{e}_j = \sum_i a_{ij}\mathbf{e}_i, \quad A\mathbf{u}_j = \sum_i \alpha_{ij}\mathbf{u}_i.$$

Если $\mathbf{u}_j = B\mathbf{e}_j = \sum b_{ij}\mathbf{e}_i$, то вектор $A\mathbf{u}_j$ равен вектору

$$\sum_k \alpha_{kj} B\mathbf{e}_k = \sum_k \alpha_{kj} \sum_i b_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_i \left(\sum_k b_{ik}\alpha_{kj}\right)\mathbf{e}_i,$$

а также вектору

$$AB\mathbf{e}_j = A\sum_k b_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_i \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)\mathbf{e}_i.$$

Таким образом, $\sum b_{ik}\alpha_{kj} = \sum a_{ik}b_{kj}$, или

$$[B][A]_U = [A][B]. \tag{63}$$

Поскольку оператор B обратим, то $\det[B] \neq 0$. Комбинируя (63) с теоремой 9.24, получаем

$$\det[A]_U = \det[A]. \tag{64}$$

Поэтому определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса, который был использован для построения матрицы. *Таким образом, имеет смысл говорить об определителе линейного оператора, не имея при этом в виду никакого базиса.*

9.27. Якобианы. Пусть $\mathbf{f}$ отображает открытое множество $E \subset R^n$ в пространство R^n. Если $\mathbf{f}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x} \in E$, то определитель линейного оператора $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ называется *якобианом* отображения $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$. Якобиан отображения $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$ обозначается символом $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, так что

(65) $$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

Мы будем использовать для $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ также обозначение

(66) $$\frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)},$$

если $(y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n)$.

Используя понятие якобиана, основное условие теоремы об обратной функции можно записать так: $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ (ср. с теоремой 9.25). Если теорему о неявной функции сформулировать в терминах функций (35), то условие этой теоремы сводится к неравенству

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Интегрирование

9.28. Определение. Назовем k-клеткой (или k-мерной клеткой) множество $I^k \subset R^k$, состоящее из точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, для которых

(67) $$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Пусть f — непрерывная вещественная функция на I^k. Положим $f_k = f$, и пусть

$$f_{k-1} = f_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)\, dx_k.$$

Из равномерной непрерывности функции f_k на I^k следует, что f_{k-1} — непрерывная функция на множестве I^{k-1}, т. е. $(k-1)$-клетке в пространстве R^{k-1}, определяемой первыми $k-1$ неравенствами из (67). Поэтому мы можем продолжить процесс. В результате для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k$, мы получим непрерывную функцию f_j на клетке $I^j \subset R^j$, причем f_{j-1} есть интеграл от f_j относительно x_j по сегменту $[a_j, b_j]$. Наконец, проинтегрировав f_1, мы получим *число* f_0, которое называется *интегралом функции* f *по* k*-клетке* I^k и записывается в виде

$$\int_{I^k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \int_{I^k} f. \tag{68}$$

На первый взгляд это определение интеграла зависит от порядка, в котором производятся k однократных интегрирований. Однако это только кажущаяся зависимость. Чтобы доказать это, введем временно обозначение $L(f)$ для интеграла (68) и $L'(f)$ — для интеграла, возникающего в результате k интегрирований, произведенных в каком-либо ином порядке.

9.29. Теорема. *Какова бы ни была функция* $f \in \mathscr{C}(I^k)$, *имеем* $L(f) = L'(f)$.

Доказательство. Если $h(\mathbf{x}) = h_1(x_1) \ldots h_k(x_k)$, где $h_j \in \mathscr{C}([a_j, b_j])$, то

$$L(h) = \prod_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i)\, dx_i = L'(h).$$

Если $\mathscr{A}$ — множество всех конечных сумм таких функций h, то $L(g) = L'(g)$ при всех $g \in \mathscr{A}$. Кроме того, $\mathscr{A}$ — алгебра функций на множестве I^k, к которой применима теорема Стона — Вейерштрасса.

Положим $V = \prod_1^k (b_i - a_i)$. Если $f \in \mathscr{C}(I^k)$, а $\varepsilon > 0$, то существует функция $g \in \mathscr{A}$, такая, что $\|f - g\| < \varepsilon/V$, где $\|f\| = \max|f(x)|\,(\mathbf{x} \in I^k)$. Тогда $|L(f-g)| < \varepsilon$, $|L'(f-g)| < \varepsilon$, и так как

$$L(f) - L'(f) = L(f-g) + L'(g-f),$$

то $|L(f) - L'(f)| < 2\varepsilon$. Тем самым теорема доказана.

С этим пунктом связано упражнение 19.

9.30. Определение. *Носителем* (вещественной или комплексной) функции f, определенной на R^k, называется замыкание множества всех точек $\mathbf{x} \in R^k$, в которых $f(x) \neq 0$. Если f — непрерывная функция с компактным носителем, а I^k — какая-нибудь k-клетка, содержащая носитель функции f, то положим

$$\int_{R^k} f = \int_{I^k} f.$$

Так определенный интеграл, очевидно, не зависит от выбора I^k, лишь бы клетка I^k содержала носитель функции f.

Может показаться заманчивым распространить это определение интеграла по пространству R^k на функции, которые служат пределами (в некотором смысле) непрерывных функций с компактными носителями. Мы не хотим обсуждать условия, при которых это можно сделать; этот вопрос уместно решать с помощью интеграла Лебега. Мы лишь опишем один очень простой пример, который будет использован при доказательстве теоремы Стокса.

9.31. Пример. Пусть Q^k есть k-симплекс, состоящий из всех точек $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_k)$ пространства R^k, таких, что $x_1+\ldots+x_k\leqslant 1$ и $x_i\geqslant 0$ при $i=1, \ldots, k$. Если $k=3$, например, то Q^k — это тетраэдр с вершинами $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Если $f\in\mathscr{C}(Q^k)$, то продолжим функцию f до функции, определенной на единичном кубе I^k, полагая $f(\mathbf{x})=0$ вне Q^k.

Если полученная в результате продолжения функция окажется непрерывной, то естественно положить

$$\int_{Q^k} f=\int_{I^k} f, \tag{69}$$

причем интеграл справа в этой формуле определяется в соответствии с п. 9.28.

Однако в общем случае продолженная функция будет разрывной на I^k, и нам следует *определить* правую часть в (69). Мы сейчас покажем, как это можно сделать. Конечно, мы можем действовать так же, как в п. 9.28, и в этом случае необходимо установить, что интеграл не зависит от порядка, в котором выполняются k однократных интегрирований. Приводимое ниже рассуждение заодно содержит доказательство и этого факта.

Положим $\mathbf{y}=(x_1, \ldots, x_{k-1})$, $\mathbf{x}=(\mathbf{y}, x_k)$. Определим функцию $g: g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in Q^k$, $g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}/t)$, если $x_1+\ldots+x_k=t>1$, и положим

$$\lambda(\mathbf{y})=\max(0, 1-x_1-\ldots-x_{k-1}) \quad (\mathbf{y}\in I^{k-1}).$$

Действуя в соответствии с определением 9.28, получим

$$f_{k-1}(\mathbf{y})=\int_0^1 f(\mathbf{y}, x_k)\,dx_k=\int_0^{\lambda(\mathbf{y})} g(\mathbf{y}, x_k)\,dx_k. \tag{70}$$

Поскольку $g\in\mathscr{C}(I^k)$, а $\lambda\in\mathscr{C}(I^{k-1})$, то из (70) следует, что $f_{k-1}\in\mathscr{C}(I^{k-1})$. Значит, последующие интегрирования не составляют проблемы.

Если $0<\varepsilon<1$, то положим $\varphi(t)=1$ при $t<1-\varepsilon$, $\varphi(t)=(1-t)/\varepsilon$ на сегменте $[1-\varepsilon, 1]$, $\varphi(t)=0$ при $t>1$, и пусть

$$F(\mathbf{x})=\varphi(x_1+\ldots+x_k)f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}\in I^k).$$

Тогда $|F_{k-1}(\mathbf{y})-f_{k-1}(\mathbf{y})|\leqslant\varepsilon\|f\|$ при всех $\mathbf{y}\in I^{k-1}$, так что

$$\left|\int_{I^k}(F-f)\right|\leqslant\varepsilon\|f\|. \tag{71}$$

Отметим, что неравенство (71) справедливо вне зависимости от порядка, в котором производятся k однократных интегрирований; ввиду того что $F\in\mathscr{C}(I^k)$, на интеграле $\int F$ не сказывается никакое изменение этого порядка; (71) показывает, что то же верно и в отношении $\int f$.

Наша следующая теорема показывает, как действует на интеграл замена переменных. Для простоты мы ограничимся непрерывными функциями с компактным носителем.

9.32. Теорема. *Пусть T — взаимно однозначное $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E\subset R^k$ в пространство R^k, такое, что $J_T(\mathbf{x})\neq 0$ при всех $\mathbf{x}\in E$. Если f — непрерывная функция на R^k с компактным носителем, содержащимся в $T(E)$, то*

$$\int_{R^k} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=\int_{R^k} f(T(\mathbf{x}))\,|J_T(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}. \tag{72}$$

Напомним, что J_T — якобиан отображения T. Так как $J_T(\mathbf{x})\neq 0$, то по теореме об обратной функции отображение T^{-1} непрерывно на множестве $T(E)$, и тем самым подинтегральная функция в правой части равенства (72) имеет компактный носитель, содержащийся в E (теорема 4.14).

Поясним появление *абсолютной величины* якобиана $J_T(\mathbf{x})$ в (72). Пусть $k=1$. Предположим, что T—взаимно однозначное $\mathscr{C}'$-отображение пространства R^1 на R^1. Тогда $J_T(x)=T'(x)$. Если T *возрастает*, то, согласно теоремам 6.33 и 6.17, какова бы ни была непрерывная функция f с компактным носителем,

$$\int_{R^1} f(y)\,dy=\int_{R^1} f(T(x))\,T'(x)\,dx. \tag{73}$$

(Здесь можно обойтись и теоремой 6.16, так как функция T' непрерывна.) Но если T убывает, то $T'(x)<0$, и если функция f положительна на внутренности своего носителя, то правая часть равенства (73) отрицательна, а левая положительна. Верное равенство получится, если T' заменить в (73) на $|T'|$.

Заметим, что интегралы, которые мы сейчас рассматриваем, — это интегралы от функций по подмножествам пространства R^k, и с этими подмножествами мы не связываем никакой ориентации или направления. Мы встанем на другую точку зрения, когда будем заниматься интегрированием дифференциальных форм по поверхностям.

Доказательство. Из только что сделанных замечаний следует, что (72) справедливо, если T — простое $\mathscr{C}'$-отображение (см. теорему 9.21), а теорема 9.29 показывает, что (72) верно и в том случае, когда T — линейное преобразование, меняющее местами две координаты.

Если теорема верна для отображений P, Q и если $S(\mathbf{x}) = P(Q(\mathbf{x}))$, то

$$\int f(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = \int f(P(\mathbf{y}))\,|J_P(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} =$$
$$= \int f(P(Q(\mathbf{x})))\,|J_P(Q(\mathbf{x}))|\,|J_Q(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} =$$
$$= \int f(S(\mathbf{x}))\,|J_S(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x},$$

так как

$$J_P(Q(\mathbf{x}))\,J_Q(\mathbf{x}) = \det P'(Q(\mathbf{x}))\det Q'(\mathbf{x}) =$$
$$= \det P'(Q(\mathbf{x}))\,Q'(\mathbf{x}) = \det S'(\mathbf{x}) = J_S(\mathbf{x}),$$

согласно теореме об умножении определителей и правилу дифференцирования сложной функции. Таким образом, теорема верна и для S.

Каждая точка $\mathbf{a} \in E$ имеет окрестность U, в которой

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{a}) + \mathbf{g}_k(B_k\mathbf{g}_{k-1}(\ldots\mathbf{g}_1(B_1(\mathbf{x}-\mathbf{a})))),$$

где $\mathbf{g}_i$, B_i те же, что в теореме 9.21. Полагая $V = T(U)$, получаем, что (72) справедливо, если носитель функции $\mathbf{f}$ содержится в V. Итак:

Каждая точка множества $T(E)$ имеет окрестность V, такую, что (72) справедливо для любой непрерывной функции f с носителем, содержащимся в V.

Теперь пусть f — непрерывная функция с компактным носителем K, содержащимся в $T(E)$. Каждая точка $y \in K$ служит центром некоторого открытого шара $V(\mathbf{y})$ радиуса $r(\mathbf{y})$, такого, что (72) выполняется для каждой непрерывной функции с носителем, лежащим в $V(\mathbf{y})$. Поскольку множество K компактно, существуют точки $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$, принадлежащие K и такие, что объединение открытых шаров W_i с центром в $\mathbf{y}_i$ и радиуса $\frac{1}{2}r(\mathbf{y}_i)$ покрывает K.

Пусть β_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — функция, непрерывная на R^k, с носителем в $V(\mathbf{y}_i)$, такая, что $\beta_i(\mathbf{y}) = 1$ на W_i. Положим $\alpha_1 = \beta_1$ и

$$\alpha_j = (1-\beta_1)(1-\beta_2)\ldots(1-\beta_{j-1})\beta_j,$$

если $2 \leqslant j \leqslant p$. Легко проверить, что

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 1 - (1-\beta_1)(1-\beta_2) \ldots (1-\beta_p).$$

В каждой точке множества K обращается в нуль хотя бы один из сомножителей последнего произведения, так что $\sum \alpha_i(\mathbf{y}) = 1$, если $\mathbf{y} \in K$. Носитель непрерывной функции $\alpha_j f$ лежит в $V(\mathbf{y}_j)$, так что (72) выполняется при каждом $\alpha_j f$. Из равенства $f = \sum \alpha_j f$ следует, что (72) справедливо и для f.

9.33. Определение. Пусть f — вещественная функция, определенная на открытом множестве $E \subset R^n$, с частными производными $D_1 f, \ldots, D_n f$ (см. п. 9.13). Если функции $D_j f$ сами дифференцируемы, то *частные производные второго порядка функции* f определяются равенством

$$D_{ij} f = D_i D_j f \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Если все эти функции $D_{ij} f$ непрерывны на E, то говорят, что f — функция класса $\mathscr{C}''$ на E или что $f \in \mathscr{C}''(E)$.

Говорят, что отображение $\mathbf{f}$ множества E в пространство R^k принадлежит классу $\mathscr{C}''$ на E, если каждая его компонента принадлежит классу $\mathscr{C}''$.

Для простоты (и не умаляя общности) мы сформулируем нашу следующую теорему для функций двух переменных.

9.34. Теорема. *Если $D_{12} f$ и $D_{21} f$ непрерывны на открытом множестве $E \subset R^2$, то $D_{12} f = D_{21} f$ в E.*

Доказательство. Допустим, что $D_{12} f(\mathbf{x}) > D_{21} f(\mathbf{x})$ в какой-нибудь точке $\mathbf{x}$ множества E. Из предположенной непрерывности следует, что тогда существует прямоугольник R, содержащийся в E, определяемый неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ и такой, что $(D_{12} f)(x, y) > (D_{21} f)(x, y)$ при всех $(x, y) \in R$. Значит,

$$\int_R D_{12} f > \int_R D_{21} f. \tag{74}$$

Но

$$\int_R D_{12} f = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b D_1(D_2 f)(x, y)\, dx =$$
$$= \int_\alpha^\beta [(D_2 f)(b, y) - (D_2 f)(a, y)]\, dy =$$
$$= f(b, \beta) - f(a, \beta) - f(b, \alpha) + f(a, \alpha)$$

по основной теореме интегрального исчисления, а по теореме 9.29 тот же результат получится и для $\int\limits_R D_{21}f$, что противоречит неравенству (74).

Дифференциальные формы

В этом разделе будет частично разработан аппарат, необходимый для теоремы Стокса.

До сих пор мы рассматривали производные функций нескольких переменных только для функций, определенных на открытых множествах. Это было вызвано соображениями удобства и позволило нам избежать трудностей, которые могут встретиться при рассмотрении граничных точек. Однако теперь нам будет удобно рассматривать дифференцируемые функции на *компактных* множествах. Поэтому мы примем следующее соглашение. Говоря, что $\mathbf{f}$ есть $\mathscr{C}'$-отображение (или $\mathscr{C}''$-отображение) компактного множества $D \subset R^k$ в пространство R^n, мы будем иметь в виду, что существует $\mathscr{C}'$-отображение (или $\mathscr{C}''$-отображение) $\mathbf{g}$ некоторого открытого множества $W \subset R^k$ в пространство R^n, такое, что $D \subset W$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in D$.

9.35. Определение. Пусть E — открытое множество в R^n; $\mathscr{C}'$-отображение Φ некоторого компактного множества $D \subset R^k$ в множество E мы будем называть *k-поверхностью в множестве E*.

Множество D называется *множеством параметров* поверхности Φ. Точки множества D мы будем обозначать через $\mathbf{u}$, так что $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$.

Мы будем иметь дело только с простейшей ситуацией, когда D — или k-клетка, или k-симплекс Q^k, описанный в примере 9.31. Причина этого в том, что нам предстоит интегрировать по D, а мы еще не развили теории интегрирования по более сложным подмножествам пространства R^k. Мы увидим, что это ограничение, наложенное на D (мы будем его в дальнейшем, не оговаривая, предполагать выполненным) не влечет существенной потери общности в теории дифференциальных форм.

Сравнение с определением 6.34 показывает, что 1-поверхность — это не что иное, как непрерывно дифференцируемая кривая.

9.36. Определение. Пусть E — открытое множество в пространстве R^n. *Дифференциальной формой порядка $k \geqslant 1$, определенной в E* (или, кратко, *k-формой в E*) называется функция ω на множестве k-поверхностей, символически записываемая в виде

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \tag{75}$$

(индексы $i_1, \ldots, i_k$ независимо пробегают множество $1, \ldots, n$) и сопоставляющая каждой k-поверхности Φ в множестве E число $\omega(\Phi) = \int\limits_{\Phi} \omega$ в соответствии с правилом

$$\int\limits_{\Phi} \omega = \int\limits_{D} \sum a_{i_1 \ldots i_k}(\Phi(\mathbf{u})) \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)} d\mathbf{u}, \tag{76}$$

где D — множество параметров поверхности Φ.

Функции $a_{i_1 \ldots i_k}$ предполагаются вещественными и непрерывными в E. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — компоненты отображения Φ, то якобиан в (76) — это якобиан отображения

$$(u_1, \ldots, u_k) \to (\varphi_{i_1}(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_{i_k}(\mathbf{u})).$$

Заметим, что правая часть равенства (76) — интеграл по множеству D, описанный в п. 9.28 (или 9.31), и что (76) — *определение* символа $\int\limits_{\Phi} \omega$.

Говорят, что k-форма ω принадлежит классу $\mathscr{C}'$ или $\mathscr{C}''$, если функции $a_{i_1 \ldots i_k}$ в (75) принадлежит классу $\mathscr{C}'$ или $\mathscr{C}''$.

0-формой называют функцию, непрерывную на множестве E.

Формы

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \tag{77}$$

называют *базисными* k-формами. Чтобы упростить обозначения, мы часто будем употреблять символ β^k только для базисных k-форм. Каждая k-форма оказывается тогда суммой k-форм $f\beta^k$, где f есть 0-форма.

В качестве простого примера рассмотрим 1-поверхность γ в R^2 (т. е. кривую класса $\mathscr{C}'$) с множеством параметров $[0, 1]$. Если $\omega = x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2$, то

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_0^1 [\gamma_2(t)\gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)]\,dt = \gamma_1(1)\gamma_2(1) - \gamma_1(0)\gamma_2(0).$$

Если γ — замкнутая кривая, то $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$.

9.37. Элементарные свойства k-форм. Пусть $\omega, \omega_1, \omega_2$ суть k-формы в E. Мы будем писать $\omega_1 = \omega_2$ тогда и только тогда, когда $\omega_1(\Phi) = \omega_2(\Phi)$, какова бы ни была k-поверхность Φ в множестве E; в частности, $\omega = 0$ означает, что $\omega(\Phi) = 0$ для всех k-поверхностей Φ в множестве E. Если c — вещественное число, то $c\omega$ есть k-форма, определенная равенством

$$\int\limits_{\Phi} c\omega = c \int\limits_{\Phi} \omega.$$

В частности, $-\omega$ определяется так, что

$$\int_{\Phi}(-\omega)=-\int_{\Phi}\omega, \tag{78}$$

и $\omega=\omega_1+\omega_2$ означает, что

$$\int_{\Phi}\omega=\int_{\Phi}\omega_1+\int_{\Phi}\omega_2$$

для всех k-поверхностей Φ в множестве E.

Согласно (78) и (76), из того, что определитель меняет знак при перестановке двух его столбцов, следует, что выполняется *антикоммутативный закон*

$$dx_i\wedge dx_j=-(dx_j\wedge dx_i)\quad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n). \tag{79}$$

Полагая в (79) $i=j$, получаем

$$dx_i\wedge dx_i=0\quad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{80}$$

Следовательно, каждая k-форма от n переменных — нулевая, если $k>n$.

9.38. Умножение. Пусть ω есть k-форма (75), а λ есть m-форма

$$\lambda=\sum b_{j_1\ldots j_m}(\mathbf{x})\,dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m} \tag{81}$$

в E, где $j_1,\ \ldots,\ j_m$ независимо пробегают множество целых чисел от 1 до n. *Произведение* этих форм, обозначаемое символом $\omega\wedge\lambda$, есть, по определению, $(k+m)$-форма

$$\omega\wedge\lambda=\sum a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\,b_{j_1\ldots j_m}(\mathbf{x})\,dx_{i_1}\wedge\ldots \\ \ldots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m}. \tag{82}$$

В сумме (82) индексы $i_1,\ \ldots,\ i_k,\ j_1,\ \ldots,\ j_m$ изменяются независимо от 1 до n.

Определенное так умножение, очевидно, ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению, определенному в разделе 9.37. Заметим, что ранее введенное обозначение

$$dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$$

согласуется с нашим теперешним определением умножения.

9.39. Дифференцирование. Мы определим теперь оператор дифференцирования d, который каждой k-форме класса $\mathscr{C}'$ в множестве E ставит в соответствие $(k+1)$-форму в E.

0-форма класса $\mathscr{C}'$ в E — это просто вещественная функция $f \in \mathscr{C}'(E)$, и мы полагаем, по определению,

$$df = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\mathbf{x})\, dx_i. \tag{83}$$

Если $\omega = f\beta^k$, где β^k — базисная k-форма, то ее *производной* $d\omega$ называется $(k+1)$-форма

$$d\omega = (df) \wedge \beta^k, \tag{84}$$

где df — то же, что в (83), а произведение понимается в смысле п. 9.38. Оператор d распространяется на суммы членов $f\beta^k$ (т. е. на все k-формы ω) по аддитивности.

Часто форму $d\omega$ называют *внешней производной* формы ω, а $\omega \wedge \lambda$ называют *внешним произведением* форм ω и λ. В соответствии с этим формальное исчисление, построением которого мы сейчас занимаемся, называют *внешним дифференциальным исчислением*.

9.40. Теорема. (*a*) *Если ω и λ суть k- и m-формы* (*соответственно*) *класса $\mathscr{C}'$ в E, то*

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda. \tag{85}$$

(*b*) *Если ω — форма класса $\mathscr{C}''$ в E, то $d^2\omega = 0$ в E.* Здесь $d^2\omega$ обозначает, разумеется, форму $d(d\omega)$.

Доказательство. Для доказательства равенства (85) достаточно рассмотреть частный случай $\omega = f\beta^k$, $\lambda = g\beta^m$, где f, $g \in \mathscr{C}'(E)$, а β^k, β^m — базисные формы. Тогда

$$\omega \wedge \lambda = fg\beta^k \wedge \beta^m,$$

так что

$$d(\omega \wedge \lambda) = d(fg) \wedge \beta^k \wedge \beta^m. \tag{86}$$

Согласно (83),

$$d(fg) = g\, df + f\, dg. \tag{87}$$

Соотношение антикоммутативности (79) показывает, что

$$(dg) \wedge \beta^k = (-1)^k \beta^k \wedge dg. \tag{88}$$

Согласно (88), подставляя (87) в (86), получаем (85). Если f есть 0-форма класса $\mathscr{C}''$, то

$$d^2 f = d\Big(\sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\mathbf{x})\, dx_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} d(D_j f) \wedge dx_j =$$
$$= \sum (D_{ij} f)(\mathbf{x})\, dx_i \wedge dx_j.$$

Ввиду того что $D_{ij}f = D_{ji}f$ и $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, мы видим, что $d^2f = 0$. Если $\omega = f\beta^k$, то $d\omega = (df) \wedge \beta^k$, а так как $d(\beta^k) = 0$, то из (85) следует, что $d^2\omega = (d^2f) \wedge \beta^k = 0$.

9.41. Определение. Пусть E — открытое множество в пространстве R^n, T есть $\mathscr{C}'$-отображение множества E на открытое множество $V \subset R^m$, а ω есть k-форма в V:

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{y})\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}.$$

Тогда T преобразует форму ω в k-форму ω_T в E, заданную следующим образом:

$$\omega_T = \sum a_{i_1 \dots i_k}(T(\mathbf{x}))\, dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k},$$

где $t_1, \dots, t_m$ — компоненты отображения T; другими словами, если $(y_1, \dots, y_m) = T(\mathbf{x})$, то $y_i = t_i(\mathbf{x})$ и в соответствии с (83)

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} (D_j t_i)(\mathbf{x})\, dx_j.$$

Наша следующая теорема показывает, что операции сложения, умножения и дифференцирования форм определены так, что они инвариантны относительно замены переменных.

9.42. Теорема. *Пусть E и T — те же, что в определении* 9.41. *Пусть ω и λ суть k- и m-формы (соответственно) в V. Тогда*

(a) $(\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$, *если* $k = m$;
(b) $(\omega \wedge \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T$;
(c) $d(\omega_T) = (d\omega)_T$,

если ω — класса $\mathscr{C}'$, а T — класса $\mathscr{C}''$.

Доказательство. *(a)* и *(b)* вытекают непосредственно из определений. Если f есть 0-форма класса $\mathscr{C}'$ в V, то

$$f_T(\mathbf{x}) = f(T(\mathbf{x})), \qquad df = \sum (D_i f)(\mathbf{y})\, dy_i.$$

Из правила дифференцирования следует, что

$$d(f_T) = \sum_j (D_j f_T)(\mathbf{x})\, dx_j = \sum_j \sum_i (D_i f)(T(\mathbf{x}))(D_j t_i)(\mathbf{x})\, dx_j =$$
$$= \sum_i (D_i f)(T(\mathbf{x}))\, dt_i.$$

Таким образом,

$$d(f_T) = (df)_T.$$

Допустим теперь, что $\omega = f\beta^k$, где $\beta^k = dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$. Тогда $(\beta^k)_T = dt_i \wedge \dots \wedge dt_{i_k}$ и из теоремы 9.40 следует, что $d((\beta^k)_T) = 0$ (это единственное место, где мы используем предположение о том, что $T \in \mathscr{C}''$). Поскольку

$$\omega_T = f_T (\beta^k)_T,$$

то (85) и (b) показывают теперь, что

$$d(\omega_T) = d(f_T) \wedge (\beta^k)_T = (df)_T \wedge (\beta^k)_T = ((df) \wedge \beta^k)_T = \\ = (d\omega)_T.$$

Тем самым доказано и (c).

Теперь мы переходим к другому важному свойству преобразований дифференциальных форм.

9.43. Теорема. *Пусть T есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^n$ в открытое множество $V \subset R^n$, S есть $\mathscr{C}'$-отображение множества V в открытое множество $W \subset R^p$, а ω является k-формой в W, так что ω_S есть k-форма в V, и обе формы $(\omega_S)_T$ и ω_{ST} суть k-формы в E, где ST определяется равенством $(ST)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x}))$.*

Тогда

$$(\omega_S)_T = \omega_{ST}. \tag{89}$$

Доказательство. Если ω и λ — формы в W, то, как показывает теорема 9.42,

$$((\omega \wedge \lambda)_S)_T = (\omega_S \wedge \lambda_S)_T = (\omega_S)_T \wedge (\lambda_S)_T$$

и

$$(\omega \wedge \lambda)_{ST} = \omega_{ST} \wedge \lambda_{ST}.$$

Таким образом, если (89) выполняется для ω и для λ, то (89) выполняется и для $\omega \wedge \lambda$. Поскольку каждую форму можно построить из 0-форм и 1-форм с помощью операций сложения и умножения и поскольку (89) выполняется тривиальным образом для 0-форм, то достаточно доказать (89) в том случае, когда $\omega = dz_q$, $q = 1, \ldots, p$. (Мы обозначаем точки множеств E, V, W через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ соответственно.)

Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — компоненты отображения T, $s_1, \ldots, s_p$ — компоненты отображения S, а $r_1, \ldots, r_p$ — компоненты отображения ST. Если $\omega = dz_q$, то

$$\omega_S = ds_q = \sum_j (D_j s_q)\, dy_j,$$

так что по правилу дифференцирования (см. пример 9.14)

$$(\omega_S)_T = \sum_j (D_j s_q)(T(\mathbf{x}))\, dt_j = \\ = \sum_j (D_j s_q)(T(\mathbf{x})) \sum_i (D_j t_j)(\mathbf{x})\, dx_i = \\ = \sum_i (D_i r_q)(\mathbf{x})\, dx_i = dr_q = \omega_{ST}.$$

9.44. Теорема. *Пусть* ω *есть* k*-форма в открытом множестве* $E \subset R^n$, Φ *есть* k*-поверхность в* E *с множеством параметров* $D \subset R^k$, *а* Δ *есть* k*-поверхность в* R^k *с множеством параметров* D, *определенная так*: $\Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ $(\mathbf{u} \in D)$. *Тогда*

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{\Phi}.$$

Доказательство. Нам достаточно рассмотреть только случай

$$\omega = a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — компоненты отображения Φ, то

$$\omega_{\Phi} = a(\Phi(\mathbf{u}))\, d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что

(90) $$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = J(\mathbf{u})\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k,$$

где

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)},$$

поскольку из (90) следует, что

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{D} a(\Phi(\mathbf{u}))\, J(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} =$$

$$= \int_{\Delta} a(\Phi(\mathbf{u}))\, J(u)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k = \int_{\Delta} \omega_{\Phi}.$$

Пусть $[A]$ — матрица из k строк и k столбцов с элементами

$$\alpha(p, q) = (D_q \varphi_{i_p})(\mathbf{u}) \quad (p, q = 1, \ldots, k).$$

Тогда

$$d\varphi_{i_p} = \sum_q \alpha(p, q)\, du_q,$$

так что

$$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = \sum \alpha(1, q_1) \ldots \alpha(k, q_k)\, du_{q_1} \wedge \ldots \wedge du_{q_k}.$$

В последней сумме $q_1, \ldots, q_k$ изменяются независимо от 1 до k. Из закона антикоммутативности (79) следует, что

$$du_{q_1} \wedge \ldots \wedge du_{q_k} = s(q_1, \ldots, q_k)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k,$$

где s — то же, что в определении 9.22. Применяя это определение, мы видим, что

$$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = \det[A]\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k,$$

а так как $J(\mathbf{u}) = \det[A]$, то (90) доказано.

Комбинируя две последние теоремы, получаем заключительный результат этого раздела.

9.45. Теорема. *Пусть T есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^n$ в открытое множество $V \subset R^m$, Φ есть k-поверхность в E, а ω есть k-форма в V. Тогда*

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_T.$$

Доказательство. Пусть D — множество параметров поверхности Φ (и тем самым поверхности $T\Phi$). Определим Δ, как в теореме 9.44. Применяя эту теорему к ω_T и Φ, получаем

$$\int_{\Phi} \omega_T = \int_{\Delta} (\omega_T)_\Phi.$$

Применяя этот результат к ω и к $T\Phi$, получаем

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{T\Phi}.$$

Но $(\omega_T)_\Phi = \omega_{T\Phi}$ по теореме 9.43. Теорема доказана.

Симплексы и цепи

9.46. Определения. При $k = 1, 2, 3, \ldots$ мы определяем *стандартный симплекс* Q^k как множество всех $\mathbf{u} \in R^k$ вида

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i \quad \left(\alpha_i \geqslant 0 \text{ при } i = 1, \ldots, k \text{ и } \sum_{1}^{k} \alpha_i \leqslant 1\right),$$

где $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — стандартный базис пространства R^k.

Если $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ — точки пространства R^n и A — линейное отображение пространства R^k в пространство R^n, определяемое равенствами $A\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ $(i = 1, \ldots, k)$, то *ориентированным прямолинейным k-симплексом*

$$\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k] \tag{91}$$

называется k-поверхность в R^n с множеством параметров Q^k, заданная равенством

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + A\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in Q^k). \tag{92}$$

Заметим, что $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{p}_0$, $\sigma(\mathbf{e}_i) = \mathbf{p}_i$ при $i = 1, \ldots, k$.

Мы называем симплекс σ *ориентированным*, чтобы подчеркнуть, что порядок вершин $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k$ следует учитывать. Если

$$\bar{\sigma} = [\mathbf{p}_{i_0}, \ldots, \mathbf{p}_{i_k}],$$

где $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ — перестановка множества $\{0, 1, \ldots, k\}$, то мы будем писать

$$\bar{\sigma} = s(i_0, i_1, \ldots, i_k)\,\sigma,$$

где s — функция, определенная в п. 9.22. Таким образом, $\bar{\sigma} = \pm\sigma$ в зависимости от того, какое из двух равенств $s=1$ или $s=-1$ выполняется. Строго говоря, считая (91) и (92) определением симплекса σ, мы имеем право писать $\bar{\sigma}=\sigma$ только в том случае, когда $i_0=0, \ldots, i_k=k$, хотя бы $s(i_0, \ldots, i_k)$ и равнялось 1, так что, строго говоря, здесь мы имеем дело не с равенством, а с отношением эквивалентности. Однако для наших целей такое обозначение оправдано, как показывает теорема 9.47.

Если $\bar{\sigma} = \varepsilon\sigma$ (мы следуем только что принятому соглашению) и если $\varepsilon=1$, то говорят, что $\bar{\sigma}$ и σ имеют *одинаковую ориентацию*; если $\varepsilon=-1$, то говорят, что $\bar{\sigma}$ и σ имеют *противоположные ориентации*. Заметим, что мы не определяем, что такое «ориентация симплекса». То, что мы определили — это отношение между парами симплексов, имеющих одно и то же множество вершин, т. е. свойство двух таких симплексов иметь одинаковую ориентацию.

До сих пор мы предполагали, что $k \geqslant 1$. *Ориентированным* 0-*симплексом* называется точка, которой приписан некоторый знак. Мы пишем $\sigma = +\mathbf{p}_0$ или $\sigma = -\mathbf{p}_0$. Если $\sigma = \varepsilon\mathbf{p}_0$ $(\varepsilon = \pm 1)$ и если f есть 0-форма (т. е. вещественная функция), то мы полагаем, по определению,

$$\int_{\sigma} f = \varepsilon f(\mathbf{p}_0).$$

9.47. Теорема. *Если σ — ориентированный прямолинейный k-симплекс в открытом множестве $E \subset R^n$ и если $\bar{\sigma} = \varepsilon\sigma$, то*

$$\int_{\bar{\sigma}} \omega = \varepsilon \int_{\sigma} \omega \tag{93}$$

для любой k-формы ω в E.

Доказательство. Если $k=0$, то (93) следует из предыдущего определения. Итак, будем считать, что $k \geqslant 1$ и что σ — симплекс (91).

Пусть $1 < j \leqslant k$, и пусть $\bar{\sigma}$ получается из σ перестановкой вершин $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_j$. Тогда $\varepsilon = -1$ и

$$\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_j + B\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in Q^k),$$

где B — линейное отображение пространства R^k в пространство R^n, определенное равенствами $B\mathbf{e}_j = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_j$, $B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$, если $i \neq j$. Обозначая $A\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, где A задано равенствами (92), мы видим, что столбцы матрицы $[B]$ (т. е. векторы $B\mathbf{e}_i$) таковы

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_j, \ \ldots, \ \mathbf{x}_{j-1} - \mathbf{x}_j, \ \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j, \ \ldots, \ \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j.$$

Если вычесть из каждого столбца j-й столбец, то ни один из определителей в (76) не изменится, и мы получим столбцы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_k$. Они отличаются от соответствующих столбцов матрицы $[A]$ только знаком j-го столбца. Значит, в этом случае (93) доказано.

Пусть теперь $0 < i < j \leqslant k$, и пусть $\bar{\sigma}$ получается из σ перестановкой вершин $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_j$. Тогда $\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + C\mathbf{u}$, где $[C]$ имеет те же столбцы, что и $[A]$, за исключением i-го и j-го, которые переставлены. Отсюда снова следует, что выполняется (93), так как $\varepsilon = -1$.

Поэтому (93) выполняется и в общем случае, так как каждая перестановка множества $\{0, 1, \ldots, k\}$ равна суперпозиции перестановок, с которыми мы уже имели дело.

9.48. Определение. *Прямолинейной k-цепью* Γ в открытом множестве $E \subset R^n$ называется семейство, состоящее из конечного числа ориентированных k-симплексов $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ в E (не обязательно различных).

Если Γ — такая цепь и если ω есть k-форма в E, то, по определению, полагаем

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\sigma_i} \omega. \tag{94}$$

Мы можем рассматривать k-поверхность Φ в E как функцию, определенную на множестве всех k-форм ω в E, сопоставляющую каждой форме ω число $\int_\Phi \omega$. Вещественные функции можно складывать (см. определение 4.3), поэтому (94) подсказывает следующее обозначение:

$$\Gamma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_r. \tag{95}$$

Например, если $\sigma_2 = -\sigma_1$ и $\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2$, то $\int_\Gamma \omega = 0$ при всех ω. В этом случае можно записать $\Gamma = 0$.

При $k=1, 2, 3, \ldots$ *границей* ориентированного прямолинейного k-симплекса $\sigma=[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k]$ называется прямолинейная $(k-1)$-цепь

(96) $$\partial\sigma=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_k].$$

Например, если $\sigma=[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$, то

$$\partial\sigma=[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]-[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2]+[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]=[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]+[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]+[\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0].$$

Это совпадает с обычным определением ориентированной границы треугольника.

Заметим, что если $1\leqslant j\leqslant k$, то симплекс $\sigma_j=[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_k]$, фигурирующий в (96), имеет Q^{k-1} своим множеством параметров, и что он определяется так:

(97) $$\sigma_j(\mathbf{u})=\mathbf{p}_0+B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u}\in Q^{k-1}),$$

где B — линейное отображение из R^{k-1} в R^n, определяемое равенствами

$$B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0,$$

если $1\leqslant i\leqslant j-1$, $B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_{i+1}-\mathbf{p}_0$, если $j\leqslant i\leqslant k-1$. Симплекс

$$\sigma_0=[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k],$$

который тоже участвует в (96), задается как отображение

$$\sigma_0(\mathbf{u})=\mathbf{p}_1+B\mathbf{u},$$

где $B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_{i+1}-\mathbf{p}_1$ при $1\leqslant i\leqslant k-1$.

9.49. Определение. Пусть T есть $\mathscr{C}''$-отображение открытого множества $E\subset R^n$ в открытое множество $V\subset R^m$, не обязательно взаимно однозначное. Если σ — ориентированный прямолинейный k-симплекс в E, то сложное отображение $\Phi=T(\sigma)$ есть k-поверхность в V с множеством параметров Q^k. Мы будем называть Φ *ориентированным k-симплексом класса $\mathscr{C}''$*.

Конечное семейство Ψ ориентированных k-симплексов $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ класса $\mathscr{C}''$ в V называется *k-цепью класса $\mathscr{C}''$ в V*; если ω есть k-форма в V, то, по определению, полагаем

(98) $$\int_{\Psi}\omega=\sum_{i=1}^{r}\int_{\Phi_i}\omega$$

и используем соответствующее обозначение $\Psi=\sum\Phi_i$. Если $\Gamma=\sum\sigma_i$ — прямолинейная цепь и $\Phi_i=T(\sigma_i)$, то мы будем писать $\Psi=T(\Gamma)$, или

$$T\left(\sum\sigma_i\right)=\sum T(\sigma_i).$$

Граница $\partial\Phi$ ориентированного k-симплекса $\Phi = T(\sigma)$ — это, по определению, $(k-1)$-цепь

$$\partial\Phi = T(\partial\sigma).$$

Очевидно, что $\partial\Phi$ принадлежит классу $\mathscr{C}''$, если Φ принадлежит этому классу.

Наконец, мы определяем границу $\partial\Psi$ некоторой k-цепи $\Psi = \sum \Phi_i$ как $(k-1)$-цепь

$$\partial\Psi = \sum \partial\Phi_i. \tag{99}$$

Теорема Стокса

Формулируя эту теорему, мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из п. 9.49.

9.50. Теорема. *Если Ψ есть k-цепь класса $\mathscr{C}''$ в открытом множестве $V \subset R^m$ и если ω есть $(k-1)$-форма класса $\mathscr{C}'$ в V, то*

$$\int_{\Psi} d\omega = \int_{\partial\Psi} \omega. \tag{100}$$

(В случае $k = m = 2$ эту теорему называют теоремой Грина. В случае $k = m = 1$ эта теорема — не что иное, как основная теорема интегрального исчисления.)

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega \tag{101}$$

для каждого ориентированного k-симплекса Φ класса $\mathscr{C}''$ в V, так как если доказано (101), а $\Psi = \sum \Phi_i$, то из (99) следует, что (100) тоже выполняется.

Зафиксируем такое Φ, и пусть σ — ориентированный прямолинейный k-симплекс в R^k:

$$\sigma = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]. \tag{102}$$

Этот симплекс σ — просто тождественное отображение на Q^k; в обозначениях (92) здесь $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$, $A = I$.

Ввиду того что Φ — класса $\mathscr{C}''$ в V, существует открытое множество $E \subset R^k$, содержащее Q^k, и $\mathscr{C}''$-отображение T множества E в V, такое, что $\Phi = T(\sigma)$. Левая часть равенства (101) равна

$$\int_{T(\sigma)} d\omega = \int_{\sigma} (d\omega)_T = \int_{\sigma} d(\omega_T),$$

согласно теоремам 9.45 и 9.42 (*c*). Еще раз применяя 9.45, мы видим, что правую часть равенства (101) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_{\partial(T(\sigma))} \omega = \int\limits_{T(\partial\sigma)} \omega = \int\limits_{\partial\sigma} \omega_T.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\int\limits_{\sigma} d\lambda = \int\limits_{\partial\sigma} \lambda \tag{103}$$

для специального симплекса (102) и произвольной $(k-1)$-формы класса $\mathscr{C}'$ в E.

Граница симплекса (102) равна

$$[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_k),$$

согласно (96). Передвинем элемент $\mathbf{0}$ в j-м слагаемом этой суммы так, чтобы он оказался между $\mathbf{e}_{j-1}$ и $\mathbf{e}_{j+1}$. Это можно сделать с помощью $j-1$ транспозиций. Значит,

$$\partial\sigma = \tau_0 - \sum_{j=1}^{k} \tau_j, \tag{104}$$

где $\tau_0 = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]$ и τ_j получается из τ_0 заменой $\mathbf{e}_j$ на $\mathbf{0}$, $j = 1, \ldots, k$.

Если $k = 1$, то из определения ориентированного $\mathbf{0}$-симплекса вытекает, что в (103) утверждается всего лишь следующее:

$$\int\limits_0^1 f'(u)\,du = f(1) - f(0)$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции f на $[0, 1]$; это утверждение справедливо, согласно основной теореме интегрального исчисления.

Если $k > 1$, то достаточно доказать (103) для

$$\lambda = a(\mathbf{x})\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k, \tag{105}$$

где $a \in \mathscr{C}'(E)$, так как (104) показывает, что то же самое будет тогда справедливо и для любой формы $\alpha\beta^{k-1}$, а любая $(k-1)$-форма равна сумме форм вида $\alpha\beta^{k-1}$.

Множеством параметров для симплексов $\tau_0, \ldots, \tau_k$ служит симплекс Q^{k-1}. Если $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{k-1}) \in Q^{k-1}$, а $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) = \tau_0(\mathbf{u})$, то

$$x_1 = 1 - u_1 - \ldots - u_{k-1}, \quad x_i = u_{i-1} \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant k. \tag{106}$$

Если $\mathbf{x}=\tau_1(\mathbf{u})$, то

$$x_1=0, \quad x_i=u_{i-1} \quad \text{для} \quad 2\leqslant i\leqslant k. \tag{107}$$

Если $\mathbf{x}=\tau_j(\mathbf{u})$ и $2\leqslant j\leqslant k$, то $x_j=0$. Следовательно, якобиан

$$\frac{\partial(x_2, \ldots, x_k)}{\partial(u_1, \ldots, u_{k-1})}$$

равен 1 для τ_0 и τ_1 и равен нулю для $\tau_2, \ldots, \tau_k$. Таким образом,

$$\int\limits_{\tau_j} \lambda=0 \qquad (j=2, \ldots, k).$$

Отсюда будет следовать (103) после того, как мы покажем, что

$$\int\limits_{\sigma} d\lambda=\int\limits_{\tau_0} \lambda-\int\limits_{\tau_1} \lambda. \tag{108}$$

Левая часть равенства (108) равна

$$\int\limits_{Q^k} (D_1 a)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{109}$$

так как $d\lambda=(D_1 a)(\mathbf{x})\, dx_1\wedge dx_2\wedge \ldots \wedge dx_k$, а σ — тождественное отображение на Q^k.

Вычисляя k-кратный интеграл (109) интегрированием по x_1, получаем

$$\int\limits_{Q^{k-1}} [a(\tau_0(\mathbf{u}))-a(\tau_1(\mathbf{u}))]\, d\mathbf{u},$$

согласно (106) и (107), что в свою очередь равно правой части равенства (108). Теперь доказательство закончено.

Упражнения

1. Доказать, что каждому $A\in L(R^n, R^1)$ соответствует единственная точка $\mathbf{y}\in R^n$, такая, что $A\mathbf{x}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Доказать, что $\|A\|=|\mathbf{y}|$.

Указание. При некоторых условиях неравенство Шварца превращается в равенство.

2. Доказать, что функция f непрерывна в точке $\mathbf{x}$, если $D_1 f, \ldots, D_n f$ ограничены в некоторой окрестности этой точки.

Указание. Действовать так же, как при доказательстве теоремы 9.16.

3. Пусть f — вещественная дифференцируемая функция на открытом множестве $E\subset R^n$, и пусть f имеет локальный максимум в точке $\mathbf{x}\in E$. Доказать, что $f'(\mathbf{x})=0$.

4. Пусть $(D_1 f)(\mathbf{x}) = 0$ при всех $\mathbf{x}$ из выпуклого открытого множества $E \subset R^n$. Доказать, что $f(\mathbf{x})$ зависит только от $x_2, \ldots, x_n$. Показать, что выпуклость множества E можно заменить более слабым условием, но что какое-то условие все-таки требуется. Например, если $n = 2$, а множество E имеет форму подковы, то утверждение может и не быть верным.

5. Пусть f — вещественная дифференцируемая функция на связном открытом множестве $E \subset R^n$, и пусть $f'(\mathbf{x}) = 0$ при всех $\mathbf{x} \in E$. Доказать, что f постоянна на E.

6. Вычислить $f'(\mathbf{x})$, если $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ при $\mathbf{x} \in R^n$.

7. Пусть $f(0, 0) = 0$ и

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{если } (x, y) \neq (0, 0).$$

Доказать, что

(*a*) f, $D_1 f$, $D_2 f$ непрерывны на R^2;

(*b*) $D_{12} f$, $D_{21} f$ существуют в каждой точке пространства R^2 и непрерывны всюду, кроме точки $(0, 0)$;

(*c*) $(D_{12} f)(0, 0) = 1$, $(D_{21} f)(0, 0) = -1$.

8. Из существования (и даже из непрерывности) производной $D_{12} f$ не следует существование производной $D_1 f$. Например, пусть $f(x, y) = g(x)$, где g — нигде не дифференцируемая функция. Тогда $D_1 f$ не существует, но $D_2 f = 0$, так что $D_{12} f = 0$.

9. Положим $f(0, 0) = 0$ и

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad \text{если } (x, y) \neq (0, 0).$$

Тогда функция f непрерывна в R^2, а ее сужение на любую прямую дифференцируемо. Более того, покажите что если γ — любая дифференцируемая кривая в R^2, то функция $f(\gamma)$ дифференцируема. Это значит, что если γ — дифференцируемое отображение сегмента $[0, 1]$ в пространство R^2 и если $g(t) = f(\gamma(t))$, то функция g дифференцируема на $[0, 1]$. Покажите, что если $\gamma \in \mathscr{C}'$, то и $f(\gamma) \in \mathscr{C}'$.

Доказать, что, несмотря на это, функция f не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

10. Показать, что непрерывность производной f' существенна в теореме об обратной функции, даже в том случае, когда $n = 1$. Если $f(t) = t + 2t^2 \sin(1/t)$ при $t \neq 0$, $f(0) = 0$, то $f'(0) \neq 0$, f' ограничена на $(-1, 1)$, но f не взаимно однозначна ни в какой окрестности точки 0.

11. Пусть f — вещественная дифференцируемая функция на открытом множестве $E \subset R^n$. Назовем *градиентом* функции f в точке $\mathbf{x} \in E$ вектор $(\nabla f)(\mathbf{x}) \in R^n$, такой, что

$$\mathbf{h} \cdot (\nabla f)(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\, \mathbf{h}$$

при всех $\mathbf{h} \in R^n$ (ср. с упражнением 1). Если $\mathbf{u} \in R^n$ — единичный вектор (т. е. если $|\mathbf{u}| = 1$), то предел

$$(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})]$$

назовем *производной функции* f *в направлении вектора* $\mathbf{u}$ *в точке* $\mathbf{x}$.

Доказать, что

$$(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla f)(\mathbf{x})$$

и что, стало быть, для любого $\mathbf{x} \in E$ существует вектор $\mathbf{u}$, такой, что

$$|(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x})| = |(\nabla f)(\mathbf{x})| = \| f'(\mathbf{x}) \|.$$

Если $(\nabla f)(\mathbf{x}) \neq 0$, то такой вектор $\mathbf{u}$ — единственный.

12. Пусть $\mathbf{f}$ — отображение, которое точке $(x, y) \in R^2$ ставит в соответствие точку $(u, v) \in R^2$, где

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Каково множество значений отображения $\mathbf{f}$? Показать, что якобиан этого отображения отличен от нуля во всех точках пространства R^2. Таким образом, каждая точка пространства R^2 обладает окрестностью, на которой отображение $\mathbf{f}$ взаимно однозначно. Тем не менее $\mathbf{f}$ не является взаимно однозначным на R^2.

Каковы образы прямых, параллельных координатным осям, при отображении $\mathbf{f}$?

13. Исследовать аналогичным образом отображение

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

14. Из системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0, \\ x - y + 2z + u &= 0, \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

можно x, y, u выразить через z; x, z, u через y; y, z, u через x; но нельзя выразить x, y, z через u.

15. В теореме о неявной функции положить $n = m = 1$ и истолковать эту теорему графически.

16. Положим $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, где

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad ((x, y) \neq (0, 0)).$$

Вычислить ранг преобразования $\mathbf{f}'(x, y)$ и найти множество значений отображения $\mathbf{f}$.

17. Переставляющие преобразования B_i действительно нужны в теореме 9.21. Чтобы убедиться в этом, покажите, что отобра-

жение $(x, y) \to (y, x)$ пространства R^2 на R^2 *нельзя* разложить в произведение двух простых преобразований ни в какой окрестности начала. Найти другие примеры этого явления.

18. Пусть $\mathbf{f}$ — то же, что в теореме 9.21. Положим $A = \mathbf{f}'(\mathbf{0})$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Тогда $\mathbf{f}_1'(\mathbf{0}) = I$. Показать, что

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_n(\mathbf{g}_{n-1}(\ldots(\mathbf{g}_1(\mathbf{x}))))$$

в некоторой окрестности нуля, где $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ — простые отображения. Таким образом, мы получаем другую теорему о разложении:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{g}_n(\mathbf{g}_{n-1}(\ldots(\mathbf{g}_1(\mathbf{x})))).$$

19. Пусть φ_i — функция, непрерывная на R^1 $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ с носителем в интервале $(2^{-i}\ 2^{1-i})$, такая, что $\int \varphi_i = 1$. Положим

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} [\varphi_i(x) - \varphi_{i+1}(x)]\, \varphi_i(y).$$

Тогда f имеет компактный носитель, непрерывна всюду, кроме точки $(0, 0)$, и

$$\int dy \int f(x, y)\, dx = 0, \quad \text{но} \quad \int dx \int f(x, y)\, dy = 1.$$

Заметьте, что f не ограничена в каждой окрестности точки $0, 0)$.

20. Пусть $F(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x, y)\, dy$. Рассматривая разностные отношения и переходя к пределу, найти условия, при которых

$$F'(x) = \int\limits_{-1}^{1} (D_1 f)(x, y)\, dy,$$

т. е. условия, которые позволяют «дифференцировать под знаком интеграла».

Вот контрпример: при $x \geqslant 0$ положим

$$f(x, y) = \begin{cases} y, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}, \\ 2\sqrt{x} - y, & \text{если } \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}, \\ 0, & \text{в прочих случаях} \end{cases}$$

и положим $f(-x, -y) = -f(x, y)$. Тогда функция f непрерывна на R^2,

$$(D_1 f)(0, y) = 0$$

при всех y, но $F(x) = x$, если $|x| < \frac{1}{4}$.

21. Пусть ω и λ суть k- и m-формы соответственно. Какова связь между $\omega\wedge\lambda$ и $\lambda\wedge\omega$?

22. Доказать, что каждая k-форма ω в открытом множестве $E\subset R^n$ может быть приведена к *стандартному виду*

$$\omega=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

Показать, что если $\omega=0$, т. е. если $\int\limits_{\Phi}\omega=0$ для всех k-поверхностей Φ в E, то все коэффициенты в этой стандартной записи равны нулю. Показать, что поэтому каждая форма ω *единственным образом* приводится к стандартному виду.

23. Показать, что (72) можно записать в виде

$$\int f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=\int f(T(\mathbf{x}))\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_k,$$

если $T(\mathbf{x})=(y_1,\ldots,y_k)$ и если $J_T(\mathbf{x})>0$.

24. Найти условия, при которых верна формула

$$\int\limits_{\partial\Phi} f\omega=\int\limits_{\Phi}(df)\wedge\omega+\int\limits_{\Phi} f\wedge d\omega,$$

и показать, что ее частным случаем является формула интегрирования по частям.

25. Пусть σ есть k-симплекс ($k\geqslant 2$). Показать, что $\partial^2\sigma=0$, исходя непосредственно из определения граничного оператора ∂. Иными словами, «граница границы» равна нулю. Отметим, что это утверждение согласуется с теоремой Стокса:

$$\int\limits_{\partial^2\Phi}\omega=\int\limits_{\partial\Phi} d\omega=\int\limits_{\Phi} d^2\omega=0.$$

26. Пусть Φ есть k-поверхность с множеством параметров Q^k, пусть $\Phi^*=\Phi(Q_k)$ — множество значений отображения Φ; если $\psi=\sum\Phi_i$ есть k-цепь, то положим, по определению, $\psi^*=\bigcup\Phi_i^*$.

Пусть

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}(x_1+\ldots+x_k)^4\qquad(\mathbf{x}\in Q_k).$$

Показать, что Φ — ориентированный симплекс класса $\mathscr{C}''$ в R^k и что Φ^* заполняет часть замкнутого единичного шара B^k пространства R^k. (Показатель 4 обеспечивает дифференцируемость в начале координат.)

Показать, что существует k-цепь ψ класса $\mathscr{C}''$ в R^k, такая, что $\psi^*=B^k$, и такая, что $(\partial\psi)^*$ — единичная сфера S^{k-1}, т. е. множество всех $x\in R^k$, таких, что $|x|=1$.

Этот пример показывает, что $\mathscr{C}''$-образ прямолинейной цепи вполне может быть «круглым», так что теорема 9.50 применима к разнообразным множествам.

27. Положить $k=3$ в упражнении 26 и воспользоваться теоремой Стокса для вычисления интеграла

$$\int_{\partial\Psi} (x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy).$$

Вычислить при $k=2$ интегралы $\int_{\partial\Psi} x\,dy - y\,dx$ и $\int_{\partial\Psi} x\,dy + y\,dx$.

28. Пусть $\omega = \sum a_j(\mathbf{x})\,dx_j$ есть 1-форма класса $\mathscr{C}'$ на открытом множестве $E \subset R^n$. Назовем форму ω *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Назовем форму ω *точной* в E, если существует 0-форма f в E, такая, что $\omega = df$.

(a) Доказать, что ω замкнута тогда и только тогда, когда $D_i a_j = D_j a_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

(b) Доказать, что если ω точна, то ω замкнута.

(c) Пусть множество E выпукло, а форма ω замкнута. Доказать, что ω точна в E.

Указание. Зафиксируем $\mathbf{p}_0 \in E$, положим $f(\mathbf{p}) = \int \omega$ при $\mathbf{p} \in E$, где интеграл берется по ориентированному прямолинейному симплексу $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}]$. Применить теорему Стокса к прямолинейным 2-симплексам в E. Показать, что

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum (y_j - x_j) \int_0^1 a_j((1-t)\,\mathbf{x} + t\mathbf{y})\,dt,$$

если $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in E$, и что $df = \omega$.

Таким образом, утверждение, обратное к (b), верно, если множество E выпукло.

(d) Пусть T — взаимно однозначное $\mathscr{C}''$-отображение выпуклого открытого множества E на открытое множество V. Доказать, что каждая замкнутая 1-форма ω в V точна в V.

Указание. Воспользоваться определением 9.41. Согласно (c), $\omega_T = df$ в E и существует 0-форма g в V, такая, что $f = g_T$. Тогда $\omega_T = d(g_T) = (dg)_T$, так что $\omega = dg$.

(e) Доказать, что если V — то же, что в (d), если γ — замкнутая $\mathscr{C}'$-кривая в V, а ω — замкнутая 1-форма в V, то

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

(*f*) Показать, что утверждения (*d*) и (*e*) становятся неверными, если V — пространство R^2, из которого удалено начало координат, и если

$$\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}.$$

29. Пусть Φ есть 2-поверхность в R^3 с множеством параметров D, пусть $\Phi(u, v) = (x, y, z)$. Назовем *нормалью* к поверхности Φ в точке (u, v) вектор

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_3.$$

Чем объясняется эта терминология? Если f — функция, непрерывная на Φ^* (см. упражнение 26), то положим

$$\int_{\Phi^*} f = \int_D f(\Phi(u, v))\,|\mathbf{N}(u, v)|\,du\,dv.$$

Если $f = 1$, то этот интеграл называют *площадью* поверхности Φ. Показать, что определение площади дает естественные результаты в том случае, когда Φ — линейное отображение, когда Φ определяется равенствами

$$x = \cos u \sin v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos v \quad (0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi)$$

30. Пусть $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ есть $\mathscr{C}'$-отображение открытого множества $E \subset R^3$ в пространство R^3 (в физике такое отображение называют векторным полем). *Дивергенция* и *вихрь* (*ротор*) поля $\mathbf{F}$ определяются равенствами

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D_1F_1 + D_2F_2 + D_3F_3,$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_2F_3 - D_3F_2)\,\mathbf{e}_1 + (D_3F_1 - D_1F_3)\,\mathbf{e}_2 + (D_1F_2 - D_2F_1)\,\mathbf{e}_3.$$

С полем $\mathbf{F}$ связаны две дифференциальные формы:

$$\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz,$$

$$\lambda = F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy.$$

(*a*) Доказать, что $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$, если $\mathbf{F} \in \mathscr{C}''$.

(*b*) Доказать, что $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, если $\mathbf{F} = \nabla f$ при некоторой $f \in \mathscr{C}''$.

(*c*) Доказать утверждение, обратное к (*b*): если V — то же, что в упражнении 28 (*d*), и если $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ в V, то $\mathbf{F} = \nabla f$ при некоторой f класса $\mathscr{C}''$ в V.

Указание: $\mathbf{F} = \nabla f$ означает, что $\omega = df$; связать $d\omega$ с $\nabla \times \mathbf{F}$.

(*d*) Пусть Ψ есть 3-цепь класса $\mathscr{C}''$ в множестве E, пусть $\Phi = \partial\Psi$. Применяя к λ теорему Стокса, получить «теорему о дивергенции» Гаусса:

$$\int_{\Psi^*} \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{\Phi^*} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ в обозначениях упражнения 29.

(e) Пусть Φ есть 2-цепь класса $\mathscr{C}''$ в множестве E, и пусть $\Gamma = \partial\Phi$. Применяя к ω теорему Стокса, получить формулу

$$\int_{\Phi^*} \nabla \times \mathbf{F} = \int_{\Gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t},$$

где $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ — «касательная составляющая поля $\mathbf{F}$ вдоль Γ». (Мы предоставляем читателю выяснить точный смысл этой последней фразы.)

31. Пусть $\mathbf{F} = f\nabla g$, где f и g класса $\mathscr{C}''$ в открытом множестве $E \subset R^3$. Применяя результат упражнения 30 (d), получить тождество

$$\int_{\Psi^*} (\nabla f) \cdot (\nabla g) + \int_{\Psi^*} f\nabla^2 g = \int_{\Phi^*} f \frac{\partial g}{\partial n},$$

где $\nabla^2 g = \nabla \cdot (\nabla g)$, $\partial g/\partial n = (\nabla g) \cdot \mathbf{n}$, а $\mathbf{\Phi} = \partial \mathbf{\Psi}$.

(a) Что дает это тождество в том случае, когда $f = 1$, а g — гармоническая функция (т. е. $\nabla^2 g = 0$)?

(b) Пусть g гармонична в E и $g = 0$ на Φ^*. Полагая в последнем тождестве $f = g$, доказать, что $g = 0$ на Ψ^*.

ГЛАВА 10

ТЕОРИЯ ЛЕБЕГА

Цель этой главы — изложить основные понятия лебеговой теории меры и интеграла и в довольно общем виде доказать некоторые важнейшие теоремы, не затемняя основных идей множеством сравнительно тривиальных деталей. Поэтому в некоторых случаях доказательства лишь намечаются, а некоторые более легкие предложения формулируются без доказательства. Однако читателю, овладевшему техникой, применявшейся в предыдущих главах, нетрудно будет восстановить пропущенные этапы рассуждений.

Теорию интеграла Лебега можно излагать несколькими различными способами. Из них здесь будет обсуждаться лишь один. Что касается других возможных способов, то за ними мы отсылаем читателя к специальным курсам по теории интеграла, перечисленным в библиографии.

Функции множества

Пусть A и B — какие-нибудь множества. Символом $A-B$ мы будем обозначать множество всех элементов x, таких, что $x \in A$, $x \notin B$. Обозначение $A-B$ применяется не только тогда, когда $B \subset A$. Пустое множество будет обозначаться символом $\varnothing$, и мы будем говорить, что множества A и B не пересекаются, если $A \cap B = \varnothing$.

10.1. Определение. Множество $\mathscr{R}$, состоящее из множеств, называется *кольцом*, если из того, что $A \in \mathscr{R}$ и $B \in \mathscr{R}$, следует, что

(1) $$A \cup B \in \mathscr{R}, \qquad A-B \in \mathscr{R}.$$

Ввиду того что $A \cap B = A-(A-B)$, верно также, что $A \cap B \in \mathscr{R}$, если $\mathscr{R}$ — кольцо.

Кольцо $\mathscr{R}$ называется *σ-кольцом*, если

(2) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R},$$

каковы бы ни были множества $A_n \in \mathscr{R}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Поскольку

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n),$$

то мы имеем также

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R},$$

если $\mathscr{R}$ есть σ-кольцо.

10.2. Определение. Мы будем говорить, что φ — функция множества, определенная на $\mathscr{R}$, если φ каждому множеству $A \in \mathscr{R}$ сопоставляет число $\varphi(A)$, принадлежащее расширенной системе вещественных чисел. Функция φ называется *аддитивной*, если из того, что $A \cap B = \varnothing$, $A \in \mathscr{R}$, $B \in \mathscr{R}$, следует

(3) $$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

и φ называется счетно-аддитивной, если из того, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $A_n \in \mathscr{R}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, следует

(4) $$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Мы всегда будем предполагать, что не более чем одно из чисел $+\infty$ и $-\infty$ принадлежит множеству значений функции φ; если бы это было не так, то правая часть равенства (3) могла бы не иметь смысла. Кроме того, мы исключим из рассмотрения функции множества, единственным значением которых служит $+\infty$ или $-\infty$.

Интересно отметить, что левая часть равенства (4) не зависит от порядка, в котором расположены множества A_n. Значит, из теоремы о перестановках ряда следует, что ряд в правой части равенства (4) сходится абсолютно, если вообще сходится; если же он расходится, то его частные суммы стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Если функция φ аддитивна, то, как легко видеть, она обладает следующими свойствами:

(5) $$\varphi(\varnothing) = 0,$$

(6) $$\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n),$$

если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

(7) $$\varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2).$$

Если $\varphi(A) \geqslant 0$ при всех A и $A_1 \subset A_2$, то

(8) $$\varphi(A_1) \leqslant \varphi(A_2).$$

Имея в виду это неравенство, неотрицательные функции множества часто называют монотонными. Наконец,

$$\varphi(A-B)=\varphi(A)-\varphi(B), \tag{9}$$

если $B\subset A$ и $|\varphi(B)|<\infty$.

10.3. Теорема. *Пусть φ — счетно-аддитивная функция множества, определенная на кольце $\mathscr{R}$. Пусть $A_n\in\mathscr{R}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $A_1\subset A_2\subset A_3\subset \ldots$, $A\in\mathscr{R}$ и*

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда при $n\to\infty$

$$\varphi(A_n)\to\varphi(A).$$

Доказательство. Пусть $A_1=B_1$ и

$$B_n=A_n-A_{n-1} \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Тогда $B_i\cap B_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $A_n=B_1\cup\ldots\cup B_n$ и $A=\bigcup B_n$. Значит,

$$\varphi(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(B_i)$$

и

$$\varphi(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(B_i).$$

Построение меры Лебега

10.4. Определение. Пусть R^p обозначает p-мерное евклидово пространство. *Прямоугольником* в R^p мы называем множество всех точек $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_p)$, таких, что

$$a_i\leqslant x_i\leqslant b_i \qquad (i=1, \ldots, p), \tag{10}$$

или же множество точек, определяемое неравенствами (10), в которых некоторые (или все) знаки $\leqslant$ заменены на $<$. Возможность равенства $a_i=b_i$ при каком-нибудь значении i не исключается; в частности, пустое множество — тоже прямоугольник[1]).

Если A — объединение конечного числа прямоугольников, то говорят, что A — *элементарное множество*.

Пусть I — прямоугольник; положим, по определению,

$$m(I)=\prod_{i=1}^{p}(b_i-a_i),$$

[1]) Однако возможность неравенства $a_i>b_i$ следует исключить заранее, так как в противном случае число $m(\varnothing)$ (см. ниже) не будет определено однозначно.— *Прим. перев.*

вне зависимости от того, включается или нет знак равенства в неравенства (10).

Если $A = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ и эти прямоугольники попарно не пересекаются, то мы полагаем

$$m(A) = m(I_1) + \ldots + m(I_n). \tag{11}$$

Обозначим буквой $\mathscr{E}$ множество всех элементарных подмножеств пространства R^p.

Теперь следует убедиться в том, что

(12) $\mathscr{E}$ — кольцо, но не σ-кольцо.

(13) Если $A \in \mathscr{E}$, то A представимо в виде объединения *непересекающихся* прямоугольников.

(14) Если $A \in \mathscr{E}$, то $m(A)$ действительно определено равенством (11). Это значит, что, исходя из двух различных представлений множества A в виде объединения непересекающихся прямоугольников, мы получим одно и то же значение $m(A)$.

(15) Функция m аддитивна на $\mathscr{E}$.

Заметим, что если $p = 1, 2, 3$, то m — это соответственно длина, площадь и объем.

10.5. Определение. Неотрицательная аддитивная функция множества φ, определенная на $\mathscr{E}$, называется *регулярной*, если верно следующее: для любого $A \in \mathscr{E}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют множества $F \in \mathscr{E}$, $G \in \mathscr{E}$, такие, что F замкнуто, G открыто, $F \subset A \subset G$ и

$$\varphi(G) - \varepsilon \leqslant \varphi(A) \leqslant \varphi(F) + \varepsilon. \tag{16}$$

10.6. Примеры. (*a*) *Функция множества m регулярна.* Если A — прямоугольник, то требование определения 10.5 выполняется тривиальным образом. Общий случай следует из (13).

(*b*) Положим $R^p = R^1$, и пусть α — монотонно возрастающая функция, определенная на R^1. Положим

$$\mu([a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-),$$
$$\mu([a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-),$$
$$\mu((a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+),$$
$$\mu((a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+).$$

Здесь $[a, b)$ — множество всех чисел x, таких, что $a \leqslant x < b$, и т. д. Эти множества следует различать из-за возможных разрывов функции α. Если μ определить на элементарных множествах, как в (11), то функция μ оказывается регулярной на $\mathscr{E}$. Доказательство точно такое же, как в (*a*).

Наша следующая цель состоит в доказательстве того, что каждая функция множества, регулярная на $\mathscr{E}$, может быть продолжена до счетно-аддитивной функции множества, определенной на σ-кольце, содержащем $\mathscr{E}$.

10.7. Определение. Пусть функция μ аддитивна, регулярна, неотрицательна и конечна на $\mathscr{E}$. Рассмотрим счетные покрытия какого-нибудь множества $E \subset R^p$ открытыми элементарными множествами A_n:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Положим, по определению,

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \tag{17}$$

где нижняя грань берется по всем счетным покрытиям множества E открытыми элементарными множествами. Число $\mu^*(E)$ называется *внешней мерой* множества E, соответствующей функции μ.

Ясно, что $\mu^*(E) \geqslant 0$ при всех E и что

$$\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2), \tag{18}$$

если $E_1 \subset E_2$.

10.8. Теорема. (*a*) *Для любого* $A \in \mathscr{E}$ *имеем* $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(*b*) *Если* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *то*

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n). \tag{19}$$

Отметим, что (*a*) означает, что функция μ^* — продолжение функции μ с кольца $\mathscr{E}$ на множество *всех* подмножеств пространства R^p. Свойство (19) называется *полуаддитивностью*.

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{E}$ и $\varepsilon > 0$.

Из регулярности меры μ следует, что множество A содержится в некотором открытом элементарном множестве G, таком, что $\mu(G) \leqslant \mu(A) + \varepsilon$. Поскольку $\mu^*(A) \leqslant \mu(G)$ и поскольку число ε произвольно, то

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A). \tag{20}$$

По определению μ^* существует такая последовательность $\{A_n\}$ открытых элементарных множеств, объединение которых содержит множество A, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Регулярность функции μ показывает, что множество A содержит элементарное замкнутое множество F, такое, что $\mu(F) \geqslant \mu(A) - \varepsilon$, а так как множество F компактно, то

$$F \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$$

при некотором N. Значит,

$$\mu(A) \leqslant \mu(F) + \varepsilon \leqslant \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_N) + \varepsilon \leqslant \sum_{1}^{N} \mu(A_n) + \varepsilon \leqslant \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (20), получаем утверждение (*a*).

Пусть теперь $E = \bigcup E_n$, и пусть $\mu^*(E_n) < +\infty$ при всех n. Данному числу $\varepsilon > 0$ отвечают покрытия $\{A_{nk}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, множеств E_n открытыми элементарными множествами, такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leqslant \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon. \tag{21}$$

Тогда

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

откуда следует (19). Если же $\mu^*(E_n) = +\infty$ при некотором n, то неравенство (19), разумеется, тривиально.

10.9. Определение. Для любых множеств $A \subset R^p$, $B \subset R^p$ положим

$$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A), \tag{22}$$

$$d(A, B) = \mu^*(S(A, B)). \tag{23}$$

Будем писать $A_n \to A$, если

$$\lim_{n \to \infty} d(A, A_n) = 0.$$

Если существует такая последовательность $\{A_n\}$ элементарных множеств, что $A_n \to A$, то мы будем говорить, что множество A *конечно* μ*-измеримо*, и будем писать $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Если множество A равно объединению счетного семейства конечно μ-измеримых множеств, то мы будем говорить, что A μ*-измеримо*, и будем писать $A \in \mathfrak{M}(\mu)$.

Множество $S(A, B)$ — это так называемая «симметрическая разность» множеств A и B. Мы увидим, что $d(A, B)$ обладает основными свойствами расстояния.

Следующая теорема позволит нам получить нужное распространение функции μ.

10.10. Теорема. *Множество* $\mathfrak{M}(\mu)$ *является* σ*-кольцом, а функция* μ^* *счетно-аддитивна на* $\mathfrak{M}(\mu)$.

Прежде чем обратиться к доказательству этой теоремы, мы изучим некоторые свойства множества $S(A, B)$ и числа $d(A, B)$. Имеем:

$$S(A, B) = S(B, A), \quad S(A, A) = \varnothing, \tag{24}$$

$$S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B), \tag{25}$$

$$\left.\begin{array}{l} S(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2,\ B_1 - B_2) \end{array}\right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2). \tag{26}$$

Утверждение (24) очевидно, а (25) следует из того, что

$$(A - B) \subset (A - C) \cup (C - B), \quad (B - A) \subset (C - A) \cup (B - C).$$

Первая из формул (26) следует из того, что

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2).$$

Наконец, обозначая через E^c дополнение множества E, получаем

$$S(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2) = S(A_1^c \cup A_2^c,\ B_1^c \cup B_2^c) \subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) = \\ = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2),$$

и последняя из формул (26) получится, если заметить, что

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c.$$

Согласно (23), (19) и (18), из этих свойств множества $S(A, B)$ следует, что

$$d(A, B) = d(B, A), \quad d(A, A) = 0, \tag{27}$$

$$d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B), \tag{28}$$

$$\left.\begin{array}{l} d(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2,\ B_1 - B_2) \end{array}\right\} \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2). \tag{29}$$

Соотношения (27) и (28) показывают, что $d(A, B)$ удовлетворяет требованиям определения 2.17, за исключением того, что из $d(A, B) = 0$ не следует $A = B$. Например, если $\mu = m$, множество A счетно, а B пусто, то

$$d(A, B) = m^*(A) = 0.$$

Чтобы убедиться в этом, покроем n-ю точку множества A прямоугольником I_n, таким, что

$$m(I_n) < 2^{-n}\varepsilon.$$

Но если мы будем считать два множества A и B эквивалентными при условии

$$d(A, B) = 0,$$

то все подмножества пространства R^p разобьются на классы эквивалентности, и $d(A, B)$ превращает множество всех этих классов эквивалентности в метрическое пространство. Тогда $\mathfrak{M}_F(\mu)$ оказывается замыканием множества $\mathscr{E}$ [1]).

Эта интерпретация несущественна для доказательства, но она объясняет идею, лежащую в его основе.

Нам потребуется еще одно свойство числа $d(A, B)$, а именно

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant d(A, B), \tag{30}$$

если по крайней мере одно из чисел $\mu^*(A)$, $\mu^*(B)$ конечно. Действительно, пусть $0 \leqslant \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A)$. Тогда, как показывает неравенство (28),

$$d(A, \varnothing) \leqslant d(A, B) + d(B, \varnothing),$$

т. е.

$$\mu^*(A) \leqslant d(A, B) + \mu^*(B).$$

Но так как $\mu^*(B)$ конечно, то

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant d(A, B).$$

Доказательство теоремы 10.10. Пусть $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, $B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Выберем последовательности $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ так, чтобы $A_n \in \mathscr{E}$, $B_n \in \mathscr{E}$, $A_n \to A$, $B_n \to B$. Тогда (29) и (30) показывают, что

$$A_n \cup B_n \to A \cup B, \tag{31}$$

$$A_n \cap B_n \to A \cap B, \tag{32}$$

$$A_n - B_n \to A - B, \tag{33}$$

$$\mu^*(A_n) \to \mu^*(A), \tag{34}$$

и $\mu^*(A) < +\infty$, так как $d(A_n, A) \to 0$. Согласно (31) и (33), $\mathfrak{M}_F(\mu)$ — кольцо. Согласно (7),

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n).$$

Полагая $n \to \infty$, получаем из (34) и теоремы 10.8 (a)

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

---

[1]) Точнее было бы здесь говорить не о $\mathfrak{M}_F(\mu)$ и $\mathscr{E}$, а о множествах всех классов эквивалентности, содержащих элементы множеств $\mathfrak{M}_F(\mu)$ и $\mathscr{E}$. — *Прим. перев.*

Если $A \cap B = \varnothing$, то $\mu^*(A \cap B) = 0$. Следовательно, функция μ^* аддитивна на $\mathfrak{M}_F(\mu)$.

Пусть теперь $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. Тогда A можно представить в виде объединения счетного множества *непересекающихся* множеств из $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Действительно, если $A = \bigcup A'_n$, где $A'_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то положим $A_1 = A'_1$ и

$$A_n = (A'_1 \cup \ldots \cup A'_n) - (A'_1 \cup \ldots \cup A'_{n-1}) \qquad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{35}$$

—требуемое представление. Согласно (19),

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{36}$$

С другой стороны, $A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n$, и, в силу аддитивности функции μ^* на $\mathfrak{M}_F(\mu)$, получаем

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \ldots + \mu^*(A_n). \tag{37}$$

Из (36) и (37) следует, что

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{38}$$

Допустим, что число $\mu^*(A)$ конечно. Положим $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Тогда, как показывает (38),

$$d(A, B_n) = \mu^*\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \to 0$$

при $n \to \infty$. Значит $B_n \to A$, а так как $B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, то легко видеть, что $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

Таким образом, мы показали, что $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, если $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\mu^*(A) < +\infty$.

Теперь уже ясно, что функция μ^* счетно-аддитивна на $\mathfrak{M}(\mu)$. Действительно, если

$$A = \bigcup A_n,$$

где $\{A_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств, принадлежащих $\mathfrak{M}(\mu)$, то, как мы показали, (38) выполняется, если $\mu^*(A_n) < +\infty$ при всех n, а в противном случае равенство (38) тривиально.

Наконец, мы должны показать, что $\mathfrak{M}(\mu)$ — это σ-кольцо. Если $A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то ясно, что $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$ (теорема 2.14).

Пусть $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, $B \in \mathfrak{M}(\mu)$ и

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

где A_n, $B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Тогда тождество

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

показывает, что $A_n \cap B \in \mathfrak{M}(\mu)$, а так как

$$\mu^*(A_n \cap B) \leqslant \mu^*(A_n) < +\infty,$$

то $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Значит, $A_n - B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, и $A - B \in \mathfrak{M}(\mu)$, так как $A - B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n - B)$.

Теперь мы заменим $\mu^*(A)$ на $\mu(A)$, если $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. Таким образом, функция μ, определенная первоначально только на $\mathscr{E}$, продолжена до счетно-аддитивной функции множества на σ-кольце $\mathfrak{M}(\mu)$. Эта продолженная функция множества называется *мерой*. В том частном случае, когда $\mu = m$ (на $\mathscr{E}$), она называется лебеговой мерой в пространстве R^p.

10.11. Замечания. (*a*) Если множество A открыто, то $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. Действительно, каждое открытое множество в R^p равно объединению счетного семейства открытых прямоугольников. Чтобы в этом убедиться, достаточно построить счетную базу, элементами которой служат открытые прямоугольники.

(*b*) Если $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ и $\varepsilon > 0$, то существуют множества F и G, такие, что

$$F \subset A \subset G,$$

F замкнуто, G открыто и

$$\mu(G - A) < \varepsilon, \qquad \mu(A - F) < \varepsilon. \tag{39}$$

Первое неравенство выполняется потому, что внешняя мера была определена с помощью покрытий *открытыми* элементарными множествами. Второе неравенство получится, если перейти к дополнениям.

(*c*) Мы говорим, что E — *борелевское множество*, если E может быть получено с помощью счетного множества операций, исходя из открытых множеств, причем каждая операция — это либо взятие объединения, либо взятие пересечения, либо переход к дополнению. Множество $\mathscr{B}$ всех борелевских подмножеств пространства R^p образует σ-кольцо; в действительности это наименьшее из σ-колец, содержащих все открытые множества. Согласно замечанию (*a*), $E \in \mathfrak{M}(\mu)$, если $E \in \mathscr{B}$.

(*d*) Если $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, то существуют борелевские множества F и G, такие, что $F \subset A \subset G$ и

$$\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0. \tag{40}$$

Это следует из (*b*), если взять $\varepsilon = 1/n$ и положить $n \to \infty$.

Поскольку $A = F \cup (A - F)$, мы видим, что каждое $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ представляет собой объединение борелевского множества и множества нулевой меры.

Борелевские множества μ-измеримы при каждом μ. Но множества меры нуль (т. е. множества E, для которых $\mu^*(E) = 0$) могут быть различными для различных μ.

(*e*) Какова бы ни была функция μ, множества меры нуль образуют σ-кольцо.

(*f*) В случае меры Лебега всякое счетное множество имеет меру нуль. Но существуют и несчетные (и даже совершенные) множества меры нуль. Примером может служить множество Кантора: используя обозначения из п. 2.44, легко показать, что

$$m(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

а так как $P = \bigcap E_n$, то $P \subset E_n$ при любом n, так что $m(P) = 0$.

10.12. Определение. Пусть X — множество, не обязательно являющееся подмножеством евклидова пространства или вообще какого-нибудь метрического пространства; X называется *пространством с мерой*, если существует σ-кольцо $\mathfrak{M}$ подмножеств множества X (элементы множества $\mathfrak{M}$ называются измеримыми множествами) и неотрицательная счетно-аддитивная функция множества μ (называемая *мерой*), определенная на $\mathfrak{M}$.

Если, кроме того, $X \in \mathfrak{M}$, то X называется *измеримым пространством*.

Например, мы можем взять в качестве X пространство R^p, в качестве $\mathfrak{M}$ — множество всех измеримых подмножеств пространства R^p, а в качестве μ — меру Лебега.

Или в качестве X можно взять множество всех положительных целых чисел, в качестве $\mathfrak{M}$ — множество всех подмножеств множества X, а в качестве $\mu(E)$ — число элементов множества E.

Другой пример дает теория вероятностей, в которой события можно рассматривать как множества, а вероятность наступления события — это аддитивная (или счетно-аддитивная) функция множества.

В следующих разделах мы всегда будем иметь дело с измеримыми пространствами. Следует подчеркнуть, что теория интеграла, к которой мы вскоре перейдем, ни в каком отношении не стала бы проще, если бы мы пожертвовали той степенью общности, которой мы сейчас достигли, и ограничились, скажем, мерой Лебега на промежутке вещественной прямой. На самом деле основные черты теории с гораздо большей ясностью проявляются именно в общей ситуации, когда хорошо видно, что все зависит только от счетной аддитивности меры μ, определенной на некотором σ-кольце.

Нам будет удобно ввести обозначение

$$\{x \mid P\} \tag{41}$$

для множества всех элементов x, обладающих свойством P.

Измеримые функции

10.13. Определение. Пусть f — функция, определенная на измеримом пространстве X со значениями в расширенной системе вещественных чисел. Функция f называется *измеримой*, если множество

$$\{x \mid f(x) > a\} \tag{42}$$

измеримо при каждом вещественном a.

10.14. Пример. Если $X = R^p$, а $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mu)$ — в соответствии с определением 10.9, — то каждая непрерывная функция f измерима, так как в этом случае множество (42) открыто.

10.15. Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

(43) $\{x \mid f(x) > a\}$ *измеримо при каждом вещественном* a.

(44) $\{x \mid f(x) \geqslant a\}$ *измеримо при каждом вещественном* a.

(45) $\{x \mid f(x) < a\}$ *измеримо при каждом вещественном* a.

(46) $\{x \mid f(x) \leqslant a\}$ *измеримо при каждом вещественном* a.

Доказательство. Отношения

$$\{x \mid f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid f(x) > a - \frac{1}{n}\right\},$$
$$\{x \mid f(x) < a\} = X - \{x \mid f(x) \geqslant a\},$$
$$\{x \mid f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\right\},$$
$$\{x \mid f(x) > a\} = X - \{x \mid f(x) \leqslant a\}$$

последовательно показывают, что из (43) следует (44), из (44) следует (45), из (45) следует (46), а из (46) следует (43).

Значит, каждое из этих условий можно использовать вместо (42) для определения измеримости.

10.16. Теорема. *Если f измерима, то измерима и $|f|$.*

Доказательство:

$$\{x \mid |f(x)| < a\} = \{x \mid f(x) < a\} \cap \{x \mid f(x) > -a\}.$$

10.17. Теорема. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций. При $x \in X$ положим*

$$g(x) = \sup f_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$h(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

Тогда функции g и h измеримы.

Конечно, то же верно и в отношении нижней грани и нижнего предела.

Доказательство.

$$\{x \mid g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a\},$$
$$h(x) = \inf g_m(x), \text{ где } g_m(x) = \sup f_n(x) \quad (n \geqslant m).$$

Следствия. (*a*) *Если f и g измеримы, то $\max(f, g)$ и $\min(f, g)$ измеримы. Если*

(47) $$f^+ = \max(f, 0), \qquad f^- = -\min(f, 0),$$

то, в частности, f^+ и f^- измеримы.

(*b*) *Предел сходящейся последовательности измеримых функций — измеримая функция.*

10.18. Теорема. *Пусть f и g — измеримые конечные вещественные функции, определенные на множестве X, пусть функция F вещественна и непрерывна на R^2, и пусть*

$$h(x) = F(f(x), g(x)) \qquad (x \in X).$$

Тогда функция h измерима.

В частности, функции $f + g$ и fg измеримы.

Доказательство. Пусть $G_a = \{(u, v) \mid F(u, v) > a\}$. Тогда G_a — открытое подмножество пространства R^2 и

$$G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

где $\{I_n\}$ — последовательность открытых прямоугольников:

$$I_n = \{(u, v) \mid a_n < u < b_n, \ c_n < v < d_n\}.$$

Поскольку множество

$$\{x \mid a_n < f(x) < b_n\} = \{x \mid f(x) > a_n\} \cap \{x \mid f(x) < b_n\}$$

измеримо, то множество

$$\{x \mid (f(x),\ g(x)) \in I_n\} = \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \mid c_n < g(x) < d_n\}$$

измеримо. Значит, то же верно и в отношении множества

$$\{x \mid h(x) > a\} = \{x \mid (f(x),\ g(x)) \in G_a\} = \\ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x),\ g(x)) \in I_n\}.$$

Подводя итоги, мы можем сказать, что все обычные операции анализа, включая операции, связанные с предельным переходом, будучи примененными к измеримым функциям, приводят снова к измеримым функциям; иными словами, все функции, с которыми обычно встречаются, измеримы.

То, что эта формулировка тем не менее довольно груба, видно, однако, из следующего замечания: если $h(x) = f(g(x))$, где функция f измерима, а g непрерывна, то функция h не обязательно измерима.

Читатель, возможно, заметил, что в нашем обсуждении измеримых функций нигде не упоминалась мера. В самом деле, класс функций, измеримых на X, зависит только от σ-кольца $\mathfrak{M}$ (обозначения те же, что в п. 10.12). Например, можно говорить о функциях, измеримых по Борелю на R^p, т. е. о функциях f, для которых множество

$$\{x \mid f(x) > a\}$$

всегда борелевское, не упоминая при этом никакой конкретной меры.

Простые функции

10.19. Определение. Пусть s — вещественная функция, определенная на множестве X. Если множество значений функции s конечно, то мы будем говорить, что s — *простая функция*.

Пусть $E \subset X$, и пусть

$$K_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E). \end{cases} \tag{48}$$

K_E называется *характеристической функцией* множества E.

Пусть множество значений функции s состоит из различных чисел $c_1, \ldots, c_n$. Пусть

$$E_i = \{x \mid s(x) = c_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$s=\sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}, \tag{49}$$

т. е. каждая простая функция представляет собой конечную линейную комбинацию характеристических функций. Ясно, что s измерима тогда и только тогда, когда множества $E_1, \ldots, E_n$ измеримы.

Оказывается, любую функцию можно приблизить простыми функциями,

10.20. Теорема. *Пусть f — вещественная функция, определенная на множестве X. Тогда существует последовательность $\{s_n\}$ простых функций, такая, что $s_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всякого $x \in X$. Если функция f измерима, то можно выбрать последовательность $\{s_n\}$ так, чтобы все функции s_n тоже были измеримы. Если $f \geqslant 0$, то последовательность $\{s_n\}$ можно считать монотонно возрастающей.*

Доказательство. Если $f \geqslant 0$, то положим

$$E_{ni}=\left\{x \,\middle|\, \frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \quad F_n=\{x \mid f(x) \geqslant n\}$$

при $n=1, 2, 3, \ldots, i=1, 2, \ldots n2^n$, Пусть

$$s_n=\sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}}+nK_{F_n}. \tag{50}$$

В общем случае запишем $f=f^+ - f^-$ и применим предыдущую конструкцию к f^+ и f^-.

Заметим, что последовательность $\{s_n\}$, заданная равенством (50), сходится к f равномерно, если f ограничена.

Интегрирование

Мы определим интегрирование на измеримом пространстве X с σ-кольцом $\mathfrak{M}$ измеримых множеств и с мерой μ. Читатель, желающий иметь перед глазами более конкретную ситуацию, может представлять себе X как прямоугольник или как вещественную прямую, а μ — как меру Лебега.

10.21. Определение. Допустим, что функция

$$s(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x) \qquad (x \in X,\ c_i > 0) \tag{51}$$

измерима, и пусть $E \in \mathfrak{M}$. Положим

(52)
$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i).$$

Если функция f измерима и неотрицательна, то мы определим

(53)
$$\int_E f\,d\mu = \sup I_E(s),$$

где верхняя грань берется по всем простым функциям, таким, что $0 \leqslant s \leqslant f$.

Левая часть равенства (53) называется *интегралом Лебега функции f относительно меры μ по множеству E*. Заметим, что интеграл может быть равным $+\infty$.

Легко проверить, что

(54)
$$\int_E s\,d\mu = I_E(s)$$

для любой неотрицательной простой измеримой функции s.

10.22. Определение. Пусть функция f измерима. Рассмотрим два интеграла

(55)
$$\int_E f^+\,d\mu, \qquad \int_E f^-\,d\mu,$$

где f^+ и f^- определены, как в (47).

Если хотя бы один из интегралов (55) конечен, то мы полагаем, по определению,

(56)
$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu.$$

Если оба интеграла (55) конечны, то и разность (56) конечна, и мы говорим, что функция f *интегрируема* (или *суммируема*) на множестве E в смысле Лебега по отношению к мере μ; мы пишем $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на множестве E. Если $\mu = m$, то обычное обозначение таково: $f \in \mathscr{L}$ на множестве E.

Эта терминология может вызвать небольшую путаницу: если (56) равно $+\infty$ или $-\infty$, то интеграл функции f по множеству E определен, хотя функция f и не интегрируема в только что разъясненном смысле слова; f интегрируема по множеству E только тогда, когда ее интеграл по этому множеству конечен.

10.23. Замечания. Следующие свойства очевидны:

(a) Если f измерима и ограничена на множестве E и $\mu(E) < +\infty$, то $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E.

(b) Если f измерима, причем $a \leqslant f(x) \leqslant b$ при $x \in E$, а $\mu(E) < < +\infty$, то

$$a\mu(E) \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant b\mu(E).$$

(c) Если f и $g \in \mathscr{L}(\mu)$ на E и если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E$, то

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu.$$

(d) Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то $cf \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, каково бы ни было конечное число c, и

$$\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu.$$

(e) Если $\mu(E) = 0$, а f — измерима, то

$$\int_E f\,d\mu = 0.$$

(f) Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, $A \in \mathfrak{M}$ и $A \subset E$, то $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на A.

10.24. Теорема. (a) *Пусть f измерима и неотрицательна на множестве X. Для $A \in \mathfrak{M}$ положим*

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu. \tag{57}$$

Тогда функция φ счетно-аддитивна на $\mathfrak{M}$.

(b) *То же верно, если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на X.*

Доказательство. Ясно, что (b) следует из (a), если мы запишем $f = f^+ - f^-$ и применим (a) к f^+ и f^-.

Чтобы доказать (a), мы должны показать, что

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n), \tag{58}$$

если $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A = \bigcup_1^{\infty} A_n$.

Если f — характеристическая функция, то счетная аддитивность функции φ — то же самое, что счетная аддитивность функции μ, так как

$$\int_A K_E\,d\mu = \mu(A \cap E).$$

Если f — простая функция, то f имеет вид (51) и утверждение теоремы также выполняется.

В общем случае для каждой простой измеримой функции s, такой, что $0 \leqslant s \leqslant f$, имеем

$$\int_A s\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Поэтому, согласно (53),

$$\varphi(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n). \tag{59}$$

Заметим теперь, что если $\varphi(A_n) = +\infty$ при каком-нибудь n, то (58) тривиально, так как $\varphi(A) \geqslant \varphi(A_n)$. Поэтому пусть $\varphi(A_n) < +\infty$ при всех n.

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем измеримую функцию s так, что $0 \leqslant s \leqslant f$ и

$$\int_{A_1} s\,d\mu \geqslant \int_{A_1} f\,d\mu - \varepsilon, \qquad \int_{A_2} s\,d\mu \geqslant \int_{A_2} f\,d\mu - \varepsilon. \tag{60}$$

Ясно, что

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geqslant \int_{A_1 \cup A_2} s\,d\mu = \int_{A_1} s\,d\mu + \int_{A_2} s\,d\mu \geqslant \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - 2\varepsilon,$$

так что

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geqslant \varphi(A_1) + \varphi(A_2).$$

Следовательно, при каждом n

$$\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geqslant \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n). \tag{61}$$

Поскольку $A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n$, то из (61) следует, что

$$\varphi(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n), \tag{62}$$

и (58) вытекает из (59) и (62).

Следствие. *Если $A \in \mathfrak{M}$, $B \subset A$, $\mu(A - B) = 0$ и функция f измерима, то*

$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu.$$

Поскольку $A = B \cup (A - B)$, это следует из замечания 10.23 (e).

10.25. Замечания. Приведенное выше следствие показывает, что множествами меры нуль при интегрировании можно пренебречь.

Если множество

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

имеет меру нуль, то мы будем писать $f \sim g$ на E. Тогда $f \sim f$; из $f \sim g$ следует, что $g \sim f$, и из $f \sim g$, $g \sim h$ следует, что $f \sim h$. Это значит, что отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности.

Если $f \sim g$ на E, то мы, очевидно, имеем для любого измеримого подмножества A множества E

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$$

при условии, что эти интегралы существуют[1]).

Если свойство P выполняется для каждого $x \in E - A$ и если $\mu(A) = 0$, то обычно говорят, что P выполняется для почти всех $x \in E$ или что P выполняется почти всюду на E. (Смысл этого «почти всюду» зависит, разумеется, от той конкретной меры, которую мы рассматриваем. В литературе, если не оговорено противное, обычно имеют в виду меру Лебега.)

Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то ясно, что значение $f(x)$ конечно почти всюду на E. Поэтому в большинстве случаев мы можем, не умаляя общности, с самого начала предполагать, что функции, с которыми мы имеем дело, принимают только конечные значения.

10.26. Теорема. *Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то и $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$ на E и*

$$\left| \int_E f\,d\mu \right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu. \tag{63}$$

Доказательство. Запишем $E = A \cup B$, где $f(x) \geqslant 0$ на A и $f(x) < 0$ на B. По теореме 10.24

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty,$$

так что $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$. Поскольку $f \leqslant |f|$ и $-f \leqslant |f|$, мы видим, что

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,d\mu, \qquad -\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,d\mu,$$

откуда и следует (63).

Поскольку из интегрируемости функции f следует интегрируемость функции $|f|$, то интеграл Лебега часто называют абсолютно сходящимся. Конечно, можно определить и неабсолютно

[1]) Более того, если существует один из этих интегралов, то существует и другой.—*Прим. перев.*

сходящиеся интегралы, и при изучении некоторых проблем это даже существенно. Но у этих интегралов отсутствуют наиболее полезные свойства интеграла Лебега, и они играют в анализе несколько менее важную роль.

10.27. Теорема. *Пусть функция f измерима на E, $|f| \leqslant g$, и $g \in \mathscr{L}(\mu)$ на E. Тогда $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E.*

Доказательство. Имеем $f^+ \leqslant g$ и $f^- \leqslant g$.

10.28. Теорема Лебега о монотонной сходимости[1]. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Пусть $\{f_n\}$ — такая последовательность измеримых функций, что*

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \qquad (x \in E). \tag{64}$$

Пусть функция f определена равенством

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E). \tag{65}$$

Тогда

$$\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu \qquad (n \to \infty). \tag{66}$$

Доказательство. Согласно (64), существует такое α, что

$$\int_E f_n \, d\mu \to \alpha \tag{67}$$

при $n \to \infty$, а так как $\int f_n \leqslant \int f$, то

$$\alpha \leqslant \int_E f \, d\mu. \tag{68}$$

Выберем c так, чтобы $0 < c < 1$, и пусть s — простая измеримая функция, такая, что $0 \leqslant s \leqslant f$. Положим

$$E_n = \{x \mid f_n(x) \geqslant cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Согласно (64), $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$, а в силу (65)

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{69}$$

При любом n

$$\int_E f_n \, d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n \, d\mu \geqslant c \int_{E_n} s \, d\mu. \tag{70}$$

[1]) Эта теорема обычно называется теоремой Б. Леви. — *Прим. перев*

Устремим в (70) n к ∞. Поскольку интеграл — счетно-аддитивная функция множества (теорема 10.24), то, как показывает (69), можно применить теорему 10.3 к последнему интегралу в (70), и мы получим

$$\alpha \geqslant c \int_E s\,d\mu. \tag{71}$$

Устремляя c к единице, мы видим, что

$$\alpha \geqslant \int_E s\,d\mu,$$

а из (53) следует, что

$$\alpha \geqslant \int_E f\,d\mu. \tag{72}$$

Теорема следует теперь из (67), (68) и (72).

10.29. Теорема. *Пусть* $f = f_1 + f_2$, *где* $f_i \in \mathscr{L}(\mu)$ *на* E $(i = 1, 2)$. *Тогда* $f \in \mathscr{L}(\mu)$ *на* E *и*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_1\,d\mu + \int_E f_2\,d\mu. \tag{73}$$

Доказательство. Сначала допустим, что $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$. Если f_1 и f_2 — простые функции, то (73) тривиально следует из (52) и (54). В общем случае выберем монотонно возрастающие последовательности $\{s'_n\}$, $\{s''_n\}$ неотрицательных измеримых простых функций, сходящихся к f_1, f_2. Теорема 10.20 показывает, что это возможно. Положим $s_n = s'_n + s''_n$.

Тогда

$$\int_E s_n\,d\mu = \int_E s'_n\,d\mu + \int_E s''_n\,d\mu,$$

и (73) получится, если мы устремим n к ∞ и применим теорему 10.28.

Теперь допустим, что $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \leqslant 0$. Положим

$$A = \{x \mid f(x) \geqslant 0\}, \quad B = \{x \mid f(x) < 0\}.$$

Тогда функции f, f_1 и $-f_2$ неотрицательны на A. Значит,

$$\int_A f_1\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A (-f_2)\,d\mu = \int_A f\,d\mu - \int_A f_2\,d\mu. \tag{74}$$

Аналогично функции $-f$, f_1 и $-f_2$ неотрицательны на B, так что

$$\int_B (-f_2)\,d\mu = \int_B f_1\,d\mu + \int_B (-f)\,d\mu,$$

или

$$\int_B f_1\,d\mu = \int_B f\,d\mu - \int_B f_2\,d\mu, \tag{75}$$

и (73) вытекает из (74) и (75).

В общем случае множество E можно разложить на четыре множества E_i, на каждом из которых $f_1(x)$ и $f_2(x)$ сохраняют знак. Из доказанного следует, что

$$\int_{E_i} f\,d\mu = \int_{E_i} f_1\,d\mu + \int_{E_i} f_2\,d\mu \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

и (73) получается, если мы просуммируем эти равенства.

Теорему 10.28 можно следующим образом переформулировать в терминах рядов функций.

10.30. Теорема. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций и*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E), \tag{76}$$

то

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Доказательство. Частные суммы ряда (76) образуют монотонно возрастающую последовательность.

10.31. Теорема Фату. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций и*

$$f(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E),$$

то

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu. \tag{77}$$

В (77) может иметь место строгое неравенство. Пример указан в упражнении 5.

Доказательство. Положим

$$g_n(x) = \inf f_i(x) \qquad (i \geqslant n)$$

при $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ и $x \in E$.

Тогда функция g_n измерима на множестве E и

$$0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \ldots, \tag{78}$$

$$g_n(x) \leqslant f_n(x), \tag{79}$$

$$g_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad (n \longrightarrow \infty). \tag{80}$$

Согласно (78), (80) и теореме 10.28,

$$\int_E g_n\,d\mu \longrightarrow \int_E f\,d\mu, \tag{81}$$

так что (77) следует из (79) и (81).

10.32. Теорема Лебега об ограниченной сходимости. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Пусть $\{f_n\}$ — такая последовательность измеримых функций, что*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad (x \in E) \tag{82}$$

при $n \longrightarrow \infty$. Если существует функция g, такая, что

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ x \in E), \tag{83}$$

и $g \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu. \tag{84}$$

Неравенство (83) означает, что функция g ограничивает последовательность $\{f_n\}$; этим объясняется название теоремы. В силу п. 10.25, утверждение теоремы остается верным, если (82) выполняется почти всюду на E.

Доказательство. Заметим сначала, что из теоремы 10.27 следует, что $f_n \in \mathscr{L}(\mu)$ и $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E.

Теорема Фату показывает, что

$$\int_E (f+g)\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (f_n+g)\,d\mu,$$

так как $f_n + g \geqslant 0$; иначе говоря,

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu. \tag{85}$$

Аналогично, поскольку $g - f_n \geqslant 0$, то

$$\int_E (g-f)\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n)d\mu,$$

так что

$$-\int_E f\,d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\left[-\int_E f_n\,d\mu\right],$$

а это значит, что

$$\int_E f\,d\mu \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu. \tag{86}$$

Существование предела в (84) и равенство (84) теперь следуют из (85) и (86).

Следствие. *Если* $\mu(E)<+\infty$, *последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно ограничена на* E *и* $f_n(x)\to f(x)$ *при всех* $x\in E$, *то выполняется* (84).

Сравнение с интегралом Римана

Наша следующая теорема показывает, что каждая функция, интегрируемая по Риману на некотором сегменте, интегрируема на этом сегменте и по Лебегу, и что функции, интегрируемые по Риману, подчиняются довольно ограничительным условиям непрерывности. Теория Лебега позволяет интегрировать функции гораздо более широкого класса. Однако самое значительное ее преимущество состоит, вероятно, в той свободе, с которой в интегралах Лебега оказывается возможным производить операции предельного перехода; с этой точки зрения теоремы о сходимости составляют суть лебеговской теории.

Одна из трудностей, встречающихся в теории Римана, заключается в том, что предел последовательности функций, интегрируемых по Риману (или даже непрерывных), может уже не быть интегрируемым по Риману. В теории Лебега эта трудность почти исключается, так как предел последовательности измеримых функций снова измеримая функция.

Пусть пространством X с мерой служит сегмент $[a, b]$ вещественной прямой с $\mu=m$ (мера Лебега), а $\mathfrak{M}$ — множество всех подмножеств сегмента X, измеримых по Лебегу. Вместо

$$\int_X f\,dm$$

для интеграла Лебега функции f по сегменту $[a, b]$ принято употреблять привычное обозначение

$$\int_a^b f\,dx.$$

Чтобы отличить лебегов интеграл от интеграла Римана, мы будем этот последний обозначать так:

$$\mathscr{R}\int_a^b f\,dx.$$

10.33. Теорема. (*a*) *Если* $f\in\mathscr{R}$ *на* $[a, b]$, *то* $f\in\mathscr{L}$ *на* $[a, b]$ *и*

$$\int_a^b f\,dx=\mathscr{R}\int_a^b f\,dx. \tag{87}$$

(*b*) *Пусть функция* f *ограничена на* $[a, b]$. *Тогда* $f\in\mathscr{R}$ *на* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда функция* f *непрерывна почти всюду на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть функция f ограничена. Пусть $\{P_k\}$ — такая последовательность разбиений сегмента $[a, b]$, что P_{k+1} — измельчение разбиения P_k и $\mu(P_k)\to 0$ при $k\to\infty$ (в этом доказательстве μ обозначает не меру, а диаметр разбиения). Если P_k — разбиение

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,$$

то положим $U_k(a)=L_k(a)=f(a)$ и

$$U_k(x)=M_i,\qquad L_k(x)=m_i\qquad (x_{i-1}<x\leqslant x_i,\ i=1,\ \ldots,\ n)$$

(обозначения те же, что и в п. 6.1). Тогда

$$U(P_k,\ f)=\int_a^b U_k\,dx,\qquad L(P_k,\ f)=\int_a^b L_k\,dx. \tag{88}$$

Поскольку P_{k+1} — измельчение разбиения P_k, то

$$U_1(x)\geqslant U_2(x)\geqslant\ldots\geqslant f(x)\geqslant\ldots\geqslant L_2(x)\geqslant L_1(x)\ (a\leqslant x\leqslant b). \tag{89}$$

Положим

$$U(x)=\lim_{k\to\infty}U_k(x),\qquad L(x)=\lim_{k\to\infty}L_k(x)\qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{90}$$

Теперь допустим, что $f\in\mathscr{R}$. Ввиду того что $\mu(P_k)\to 0$,

$$U(P_k,\ f)\to\mathscr{R}\int_a^b f\,dx,\qquad L(P_k,\ f)\to\mathscr{R}\int_a^b f\,dx. \tag{91}$$

Это последнее соотношение не было явно сформулировано в гл. 6 в виде теоремы, но его, конечно, легко вывести из доказательства теоремы 6.14 [см. формулы (28) и (29)]. Согласно (89) и (90),

$$\int_a^b U_k\,dx \to \int_a^b U\,dx, \qquad \int_a^b L_k\,dx \to \int_a^b L\,dx, \tag{92}$$

так что из (88), (91) и (92) следует, что

$$\int_a^b U\,dx = \int_a^b L\,dx = \mathscr{R}\int_a^b f\,dx. \tag{93}$$

Поскольку $L(x) \leqslant f(x) \leqslant U(x)$ на $[a, b]$, то первое из равенств (93) показывает, что

$$L(x) = f(x) = U(x) \tag{94}$$

почти всюду на $[a, b]$ (упражнение 1). Поскольку L и U измеримы, то это верно и в отношении f. Значит, $f \in \mathscr{L}$, и (87) следует из (93) и (94).

Теперь допустим, что x не принадлежит никакому из разбиений P_k (отметим, что множество всех точек, входящих в состав. какого-нибудь разбиения P_k, счетно и потому имеет меру нуль) Совсем легко показать, что тогда функция f непрерывна в точке x в том и только в том случае, когда $U(x) = L(x)$.

Таким образом, если $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$, то, как показывает (94), функция f непрерывна почти всюду на $[a, b]$. Обратно, если f непрерывна почти всюду на $[a, b]$, то (94) выполнено. Значит, выполнено первое из равенств (93), и, как показывают (92) и (88), для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое k, что

$$U(P_k, f) - L(P_k, f) < \varepsilon,$$

следовательно, по теореме 6.6, $f \in \mathscr{R}$ на $[a, b]$.

Многие соотношения между интегрированием и дифференцированием функций переносятся и в лебеговскую теорию. Если $f \in \mathscr{L}$ на $[a, b]$ и

$$F(x) = \int_a^x f\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{95}$$

то $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Обратно, если функция F дифференцируема в каждой точке сегмента $[a, b]$ («почти всюду» здесь недостаточно!) и если $F' \in \mathscr{L}$ на $[a, b]$, то

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доказательства можно найти в любой из достаточно подробных книг по теории интеграла.

Интегрирование комплексных функций

Пусть f — комплекснозначная функция, определенная на пространстве с мерой X, $f = u + iv$, где u и v — вещественны. Мы будем говорить, что функция f измерима, если обе функции u и v измеримы.

Легко проверить, что суммы и произведения комплексных измеримых функций снова измеримы. Из теоремы 10.18 следует, что $|f|$ — измеримая функция, если измерима комплексная функция f, так как

$$|f| = (u^2 + v^2)^{1/2}.$$

Допустим, что μ — мера на X, E — измеримое подмножество X, а f — комплексная функция, определенная на X. Мы будем говорить, что $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, если f измерима и

$$\int_E |f|\, d\mu < +\infty; \tag{96}$$

при этом мы полагаем, по определению,

$$\int_E f\, d\mu = \int_E u\, d\mu + i \int_E v\, d\mu,$$

если выполнено (96). Ясно, что (96) выполняется тогда и только тогда, когда $u \in \mathscr{L}(\mu)$ и $v \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, так как $|u| \leqslant |f|$, $|v| \leqslant |f|$, $|f| \leqslant |u| + |v|$.

Теоремы 10.23 (a), (d), (e), (f), 10.24 (b), 10.26, 10.27, 10.29, 10.32 могут быть перенесены на интегралы Лебега от комплексных функций. Доказательства совсем просты, и только доказательство теоремы 10.26 представляет некоторый интерес. Вот оно.

Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, то существует комплексное число c, $|c| = 1$, такое, что

$$c \int_E f\, d\mu \geqslant 0.$$

Положим $g = cf = u + iv$, где u и v вещественны. Тогда

$$\left| \int_E f\, d\mu \right| = c \int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu = \int_E u\, d\mu \leqslant \int_E |f|\, d\mu.$$

Заметим, что число $\int g\, d\mu$ вещественно (это следует из первых двух равенств).

Функции класса $\mathscr{L}^2$

В качестве приложения теории Лебега мы изложим обобщение теоремы Парсеваля (которую мы доказали лишь для непрерывных функций в гл. 8) и докажем теорему Рисса — Фишера для ортонормальных систем функций.

10.34. Определение. Пусть X — измеримое пространство. Мы будем говорить, что комплексная функция f принадлежит классу $\mathscr{L}^2(\mu)$ на X, если f измерима и

$$\int_X |f|^2 d\mu < +\infty.$$

Если μ — мера Лебега, то мы будем писать просто $f \in \mathscr{L}^2$. Если $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ (начиная с этого места мы будем опускать слова «на X»), то мы полагаем, по определению,

$$\|f\| = \left\{\int_X |f|^2 d\mu\right\}^{1/2}$$

и называем число $\|f\|$ нормой функции f.

10.35. Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Тогда $fg \in \mathscr{L}(\mu)$ и*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leqslant \|f\| \cdot \|g\|. \tag{97}$$

Это неравенство, как и в случае рядов и интегралов Римана, называется неравенством Шварца. Как и в рассмотренных ранее случаях, оно вытекает из неравенства

$$0 \leqslant \int_X (|f| + \lambda |g|)^2 d\mu = \|f\|^2 + 2\lambda \int_X |fg|\, d\mu + \lambda^2 \|g\|^2,$$

которое выполняется при всяком вещественном λ.

10.36. Теорема. *Если $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$, то $f + g \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и*

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Доказательство. Неравенство Шварца показывает, что

$$\|f+g\|^2 = \int |f|^2 + \int f\bar{g} + \int \bar{f}g + \int |g|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

10.37. Замечание. Определим расстояние между двумя функциями f и g в $\mathscr{L}^2(\mu)$, полагая его равным $\|f - g\|$. Ясно, что все, кроме одного условия п. 2.17, выполняются. Дело в том, что из равенства $\|f-g\|=0$ не следует, что $f(x)=g(x)$ при всех x, а следует только, что $f(x)=g(x)$ при почти всех x. Таким образом, если мы отождествим функции, отличающиеся только на множестве меры нуль, то $\mathscr{L}^2(\mu)$ оказывается метрическим пространством.

Рассмотрим теперь $\mathscr{L}^2$ на сегменте вещественной оси с мерой Лебега.

10.38. Теорема. *Непрерывные функции образуют всюду плотное множество в* $\mathscr{L}^2$ *на* $[a, b]$.

Точнее, это значит, что для любой функции $f \in \mathscr{L}^2$ на $[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция g, непрерывная на $[a, b]$ и такая, что

$$\|f-g\| = \left\{\int_a^b (f-g)^2\,dx\right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Доказательство. Мы будем говорить, что последовательность $\{g_n\}$ аппроксимирует функцию f в $\mathscr{L}^2$, если $\|f-g_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть A — замкнутое подмножество сегмента $[a, b]$, а K_A — характеристическая функция этого подмножества. Положим

$$t(x) = \inf|x-y| \qquad (y \in A)$$

и

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nt(x)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда функция g_n непрерывна на $[a, b]$, $g_n(x) = 1$ на A и $g_n(x) \to 0$ на B, где $B = [a, b] - A$. Значит,

$$\|g_n - K_A\| = \left\{\int_B g_n^2\,dx\right\}^{1/2} \to 0$$

по теореме 10.32. Итак, характеристическую функцию замкнутого множества можно аппроксимировать в $\mathscr{L}^2$ последовательностью непрерывных функций.

Согласно (39), то же верно и в отношении характеристической функции любого измеримого множества, и, стало быть, в отношении любой простой измеримой функции.

Если $f \geqslant 0$ и $f \in \mathscr{L}^2$, то пусть $\{s_n\}$ — такая монотонно возрастающая последовательность простых неотрицательных измеримых функций, что $s_n(x) \to f(x)$ при всех x. Теорема 10.32 показывает, что $\|f-s_n\| \to 0$, так как $|f-s_n|^2 \leqslant |f|^2$.

Отсюда следует утверждение теоремы и в общем случае.

10.39. Определение. Мы будем говорить, что последовательность комплексных функций $\{\varphi_n\}$ есть *ортонормальная* система функций на измеримом пространстве X, если

$$\int_X \varphi_n \bar{\varphi}_m \, d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n = m). \end{cases}$$

В частности, должно выполняться включение $\varphi_n \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Если $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и если

$$c_n = \int_X f \bar{\varphi}_n \, d\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то мы будем писать

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

как в определении 8.10.

Аналогично распространяется на $\mathscr{L}^2$ (или даже на $\mathscr{L}$) определение тригонометрического ряда Фурье на $[-\pi, \pi]$. Теоремы 8.11 и 8.12 (неравенство Бесселя) верны для любой $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Доказательства дословно те же.

Теперь мы можем доказать теорему Парсеваля.

10.40. Теорема. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{98}$$

где $f \in \mathscr{L}^2$ *на* $[-\pi, \pi]$. *Пусть* s_n *есть* n*-я частная сумма ряда* (98) *Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \| f - s_n \| = 0, \tag{99}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, dx. \tag{100}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме 10.38 существует непрерывная функция g, такая, что

$$\| f - g \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Легко видеть, что функцию g можно подобрать так, чтобы удовлетворялось условие $g(\pi) = g(-\pi)$. Тогда g можно продолжить на всю прямую как непрерывную периодическую функцию. По теореме 8.16 существует тригонометрический многочлен T степени N, такой, что

$$\| g - T \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, по теореме 8.11 (в случае $\mathscr{L}^2$) при $n \geqslant N$ имеем

$$\| s_n - f \| \leqslant \| T - f \| < \varepsilon,$$

откуда и следует (99). Равенство (100) можно вывести из (99) так же, как при доказательстве теоремы 8.16

Следствие. *Если* $f \in \mathscr{L}^2$ *на* $[-\pi, \pi]$ *и если*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то $\| f \| = 0$.

Таким образом, если две функции имеют одинаковые ряды Фурье, то они совпадают почти всюду.

10.41. Определение. Пусть f и $f_n \in \mathscr{L}^2(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в $\mathscr{L}^2(\mu)$, если $\| f_n - f \| \to 0$. Будем говорить, что $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{L}^2(\mu)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое N, такое, что из $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ следует неравенство $\| f_n - f_m \| \leqslant \varepsilon$.

10.42. Теорема. *Если* $\{f_n\}$ — *последовательность Коши в* $\mathscr{L}^2(\mu)$, *то существует функция* $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$, *такая, что* $\{f_n\}$ *сходится к* f *в* $\mathscr{L}^2(\mu)$.

Другими словами, $\mathscr{L}^2(\mu)$ — полное метрическое пространство.

Доказательство Поскольку $\{f_n\}$ — последовательность Коши, то мы можем найти такую строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, что

$$\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Выберем функцию $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$. В силу неравенства Шварца,

$$\int_X | g (f_{n_k} - f_{n_{k+1}}) | \, d\mu \leqslant \frac{\| g \|}{2^k}.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X | g (f_{n_k} - f_{n_{k+1}}) | \, d\mu \leqslant \| g \|. \tag{101}$$

По теореме 10.30 мы можем поменять местами суммирование и интегрирование в (101). Следовательно,

$$| g(x) | \sum_{k=1}^{\infty} | f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) | < +\infty \tag{102}$$

почти всюду на X. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|<+\infty \tag{103}$$

почти всюду на X. Действительно, если бы ряд (103) расходился на множестве E положительной меры, то мы могли бы выбрать функцию g отличной от нуля на множестве положительной меры, содержащемся в E, и прийти к противоречию с (102).

Поскольку k-я частная сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)),$$

сходящегося почти всюду на X, совпадает с

$$f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_1}(x),$$

то равенство

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

определяет $f(x)$ для почти всех $x\in X$, и неважно, как мы определим $f(x)$ в остальных точках множества X.

Теперь мы покажем, что функция f обладает нужными свойствами. Пусть $\varepsilon>0$. Возьмем число N, указанное в определении 10.41. Если $n_k>N$, то теорема Фату показывает, что

$$\|f-f_{n_k}\|\leqslant \varliminf_{i\to\infty}\|f_{n_i}-f_{n_k}\|\leqslant\varepsilon.$$

Таким образом, $f-f_{n_k}\in\mathscr{L}^2(\mu)$, а так как $f=(f-f_{n_k})+f_{n_k}$, то $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$. Кроме того, ввиду произвольности числа $\varepsilon>0$

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_{n_k}\|=0.$$

Наконец, из неравенства

$$\|f-f_n\|\leqslant\|f-f_{n_k}\|+\|f_{n_k}-f_n\| \tag{104}$$

следует, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f в $\mathscr{L}^2(\mu)$; действительно, выбирая n и n_k достаточно большими, мы можем сделать оба слагаемых в правой части неравенства (104) сколь угодно малыми.

10.43. Теорема Рисса—Фишера. *Пусть $\{\varphi_n\}$—ортонормальная система на X. Допустим, что ряд $\sum|c_n|^2$ сходится, и положим $s_n=c_1\varphi_1+\ldots+c_n\varphi_n$. Тогда существует функция $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$, такая, что $\{s_n\}$ сходится к f в $\mathscr{L}^2(\mu)$, причем*

$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n.$$

Доказательство. Если $n > m$, то

$$\| s_n - s_m \|^2 = | c_{m+1} |^2 + \ldots + | c_n |^2,$$

так что $\{s_n\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{L}^2(\mu)$. По теореме 10.42 существует функция $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \| f - s_n \| = 0.$$

Теперь при $n > k$

$$\int_X f\overline{\varphi}_k d\mu - c_k = \int_X f\overline{\varphi}_k d\mu - \int_X s_n\overline{\varphi}_k d\mu,$$

так что

$$\left| \int_X f\overline{\varphi}_k d\mu - c_k \right| \leqslant \| f - s_n \| \cdot \| \varphi_k \| = \| f - s_n \|.$$

Полагая $n \to \infty$, получаем

$$c_k = \int_X f\overline{\varphi}_k d\mu \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

и доказательство закончено.

10.44. Определение. Ортонормальная система $\{\varphi_n\}$ называется *полной*, если из того, что $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и

$$\int_X f\overline{\varphi}_n d\mu = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

следует, что $\| f \| = 0$.

Из теоремы 10.40 и равенства Парсеваля (100) следует полнота тригонометрической системы. Обратно, равенство Парсеваля выполняется для любой полной ортонормальной системы.

10.45. Теорема. *Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормальная система. Если $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ и если*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n, \tag{105}$$

то

$$\int_X | f |^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2. \tag{106}$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum | c_n |^2$ сходится. Положим

$$s_n = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n.$$

В силу теоремы Рисса—Фишера существует функция $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$, такая, что

$$g \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \tag{107}$$

и $\| g - s_n \| \to 0$. Значит, $\| s_n \| \to \| g \|$. Поскольку

$$\| s_n \|^2 = | c_1 |^2 + \ldots + | c_n |^2,$$

то

$$\int_X | g |^2 \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2. \tag{108}$$

Теперь из (105), (107) и полноты системы $\{\varphi_n\}$ следует, что $\| f - g \| = 0$, так что из (108) следует (106).

Комбинируя теоремы 10.43 и 10.45, мы приходим к очень интересному выводу: каждая полная ортонормальная система порождает взаимно однозначное соответствие между функциями $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ (причем функции, совпадающие почти всюду, отождествляются) и последовательностями $\{c_n\}$, для которых сходится ряд $\sum | c_n |^2$. Представление

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

и равенство Парсеваля показывают, что $\mathscr{L}^2(\mu)$ можно рассматривать как бесконечномерное евклидово пространство (так называемое «гильбертово пространство»), в котором точка f имеет координаты c_n, а функции φ_n служат координатными векторами.

Упражнения

1. Пусть $f \geqslant 0$ и $\int_E f \, d\mu = 0$. Доказать, что $f(x) = 0$ почти всюду на E.

Указание. Пусть E_n — подмножество множества E, на котором $f(x) > 1/n$. Положим $A = \bigcup E_n$; $\mu(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(E_n) = 0$ при всех n.

2. Если $\int_A f \, d\mu = 0$ для всякого измеримого подмножества A множества E, то $f(x) = 0$ почти всюду на E.

3. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций. Доказать, что множество точек x, в которых $\{f_n(x)\}$ сходится, измеримо.

4. Если $f \in \mathscr{L}(\mu)$ на E, а функция g ограничена и измерима на E, то $fg \in \mathscr{L}(\mu)$ на E.

5. Положим

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (0\leqslant x\leqslant 1/2),\\ 1 & (1/2<x\leqslant 1),\end{cases}$$

$$f_{2k}(x)=g(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

$$f_{2k+1}(x)=g(1-x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Тогда $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$,

но

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

(ср. с (77)).

6. Пусть

$$f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n} & (|x|\leqslant n),\\ 0 & (|x|>n).\end{cases}$$

Тогда $f_n(x)\to 0$ равномерно на R^1, но

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n\,dx=2 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

(Мы пишем $\int_{-\infty}^{\infty}$ вместо $\int_{R^1}$.) Таким образом, из равномерной сходимости не следует ограниченная сходимость в смысле теоремы 10.32. Однако на множествах конечной меры равномерно сходящиеся последовательности ограниченных функций сходятся ограниченно.

7. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ на $[a, b]$.

Указание. Рассмотреть пример 10.6 (b) и теорему 10.33.

8. Если $f\in\mathscr{R}$ на $[a, b]$ и если $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, то $F'(x)=f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

9. Доказать, что функция F, заданная равенством (95), непрерывна на $[a, b]$.

10. Если $\mu(X)<+\infty$ и $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$ на X, то $f\in\mathscr{L}(\mu)$ на X. Если

$$\mu(X)=+\infty,$$

то это, вообще говоря, неверно. Например, если

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|},$$

то $f\in\mathscr{L}^2$ на R^1, но $f\notin\mathscr{L}$ на R^1.

11. Если f, $g\in\mathscr{L}(\mu)$ на X, то определим расстояние между f и g, полагая его равным

$$\int_X |f-g|\,d\mu.$$

Доказать, что $\mathscr{L}(\mu)$ — полное метрическое пространство.

12. Допустим, что

(*a*) $|f(x, y)|\leqslant 1$, если $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$,

(*b*) при фиксированном x функция $f(x, y)$ непрерывна по y,
(*c*) при фиксированном y функция $f(x, y)$ непрерывна по x. Положим

$$g(x)=\int_0^1 f(x, y)\,dy \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Непрерывна ли функция g?

13. Рассмотрим функции

$$f_n(x)=\sin nx \qquad (n=1, 2, 3, \ldots, -\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

как точки пространства $\mathscr{L}^2$. Доказать, что множество этих точек замкнуто и ограничено, но не компактно.

14. Доказать, что комплексная функция f измерима тогда и только тогда, когда множество $f^{-1}(V)$ измеримо, каково бы ни было открытое плоское множество V.

15. Пусть $\mathscr{R}$ — кольцо элементарных подмножеств промежутка $(0, 1]$. Если $0<a\leqslant b\leqslant 1$, то положим

$$\varphi([a, b])=\varphi([a, b))=\varphi((a, b])=\varphi((a, b))=b-a,$$

и

$$\varphi((0, b))=\varphi((0, b])=1+b,$$

если $0<b\leqslant 1$. Показать, что этим определена аддитивная функция множества на $\mathscr{R}$, которая не регулярна и не может быть продолжена до функции, счетно-аддитивной на σ-кольце.

16. Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность положительных целых чисел, а E — множество всех точек $x\in(-\pi, \pi)$, в которых сходится последовательность $\{\sin n_k x\}$. Доказать, что $m(E)=0$.

Указание. При любом $A \subset E$

$$\int_A \sin n_k x\, dx \to 0$$

и

$$2\int_A (\sin n_k x)^2\, dx = \int_A (1-\cos 2n_k x)\, dx \to m(A) \text{ при } k \to \infty.$$

17. Допустим, что $E \subset (-\pi, \pi)$, $m(E) > 0$, $\delta > 0$. Воспользоваться неравенством Бесселя для доказательства того, что имеется не более чем конечное число таких целых n, что $\sin nx \geqslant \delta$ при всех $x \in E$.

18. Пусть $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$, $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Доказать, что

$$\left|\int f\bar{g}\, d\mu\right|^2 = \int |f|^2\, d\mu \int |g|^2\, d\mu$$

тогда и только тогда, когда существует такое число c, что $g(x) = cf(x)$ почти всюду. (Ср. с теоремой 10.35.)

ЛИТЕРАТУРА

(*) Александров П. С.
Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948.

Бак (Buck R. C.)
Studies in modern analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962

Беркил (Burkill J. C.)
The Lebesgue integral, Cambridge, New York, 1951.

Боас (Boas R. P.)
A primer of real functions, Carus Mathematical Monograph № 13, Wiley New York, 1960.

(*) Гельфанд И. М.
Лекции по линейной алгебре, М.—Л., 1951.

Грейвз (Graves L. M.)
The theory of functions of real variables, 2 ed., McGraw-Hill, New York 1956.

(*) Де Рам Ж.
Дифференцируемые многообразия, М., 1956.

Дьедонне Ж.
Основы современного анализа, М., 1964.

Камке (Kamke E.)
Theory of sets, Dover, New York, 1950.

Каратеодори (Carathéodory C.)
Vorlesungen über reelle Funktionen, B. G. Teubner, Leipzig, 1927.

Кестельман (Kestelman H.)
Modern theories of integration, Oxford, New York, 1937.

Кноп (Knopp K.)
Theory and application of infinite series, Blackie, Glasgow, 1928.

(*) Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
Элементы теории функций и функционального анализа, вып. 1, М. 1954; вып. 2, М., 1960.

Ландау Э.
Основы анализа, М., 1947.

Мак Шейн (McShane E. J.)
Integration, Princeton, N. J., 1944.

Натансон И. П.
Теория функций вещественной переменной, М., 1957.

(*) Райков Д. А.
Векторные пространства, М., 1962.

(*) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе.

(*) Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.
Лекции по функциональному анализу, М., 1954.

(*) Сакс С.
Теория интеграла, М., 1949.

Титчмарш Е.
Теория функций, М.—Л., 1951.

(*) Фихтенгольц Г. М.
Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, М., 1960.

Халмош П.
Теория меры, М., 1953.

Халмош П.
Конечномерные векторные пространства, М., 1963.

Харди Г. Х.
Курс чистой математики, М.—Л., 1900.

Харди Г. Х., Рогозинский В. В.
Ряды Фурье, М., 1959.

(*) Шилов Г. Е.
Математический анализ, специальный курс, 2-е изд., М., 1961.

(*) Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.
Интеграл, мера и производная, М., 1964.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Символы, перечисляемые ниже, сопровождаются кратким разъяснением их смысла и указанием номера страницы, на которой они определяются.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

У. Рудин

ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Редакторы *Н. И. Плужникова, Е. А. Горин*
Художник *А. Г. Антонова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Е. С. Потапенкова*

Сдано в производство 26/XI 1965 г.
Подписано к печати 30/IV 1966 г.
Бумага $60 \times 90^1/_{16}$=10 бум. л.
20 печ. л. усл. Уч.-изд. л. 16,17.
Изд. № 1/3303
Цена 1 р. 34 к. Зак. 1386
(Темплан изд-ва «Мир» 1966 г., пор. № 14).

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9

1 р. 34 к.

У. РУДИН Основы математического анализа