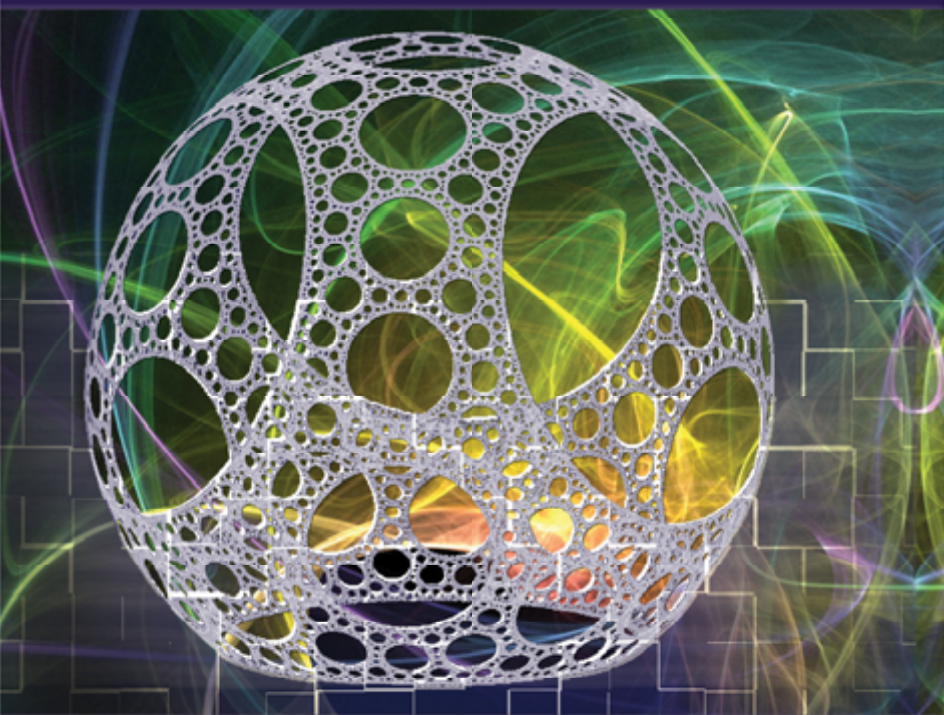


В. Н. Осташков

**ПРАКТИКУМ
ПО РЕШЕНИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ



В. Н. Осташков

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Допущено

Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов специальностей:

130202 – Геофизические методы исследования скважин

150001 – Технология машиностроения

150500 – Машины и аппараты химических производств

Лауреат конкурса НМС по математике 2010 г.

«Лучшее учебное издание по математике» в номинации:
Математика в технических вузах. Дополнительная литература

Электронное издание



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2013

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73
О-76

Электронный аналог печатного издания: Практикум по решению инженерных задач математическими методами : учебное пособие / В. Н. Осташков. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 200 с. : ил., [4] с. цв. вкл. — (Математическое моделирование).

Серия основана в 2009 г.

Осташков В. Н.

О-76 Практикум по решению инженерных задач математическими методами [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. Н. Осташков. — Эл. изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 200 с. : ил., [4] с. цв. вкл. — (Математическое моделирование).

ISBN 978-5-9963-2114-8

В учебном пособии реализуются принципы вариативности исследовательских профессионально-ориентированных задач и технических проблем, допускающих моделирование математическими средствами, в основном известными студентам технических университетов из курса высшей математики. Анализируются эвристические методы составления и решения профессионально-ориентированных задач, затрагиваются проблемы понимания собственных ощущений и способов мыслительной деятельности во время исследования и творческого процесса. Учебное пособие можно использовать в качестве дополнения к существующим учебным пособиям по математике.

Для студентов технических университетов и преподавателей.

**УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73**

По вопросам приобретения обращаться:

«БИНОМ. Лаборатория знаний»

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

ISBN 978-5-9963-2114-8

© БИНОМ. Лаборатория знаний,
2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	8
§ 1. Стержни (1–9)*	17
§ 2. Центроид (10–21)	27
§ 3. Коромысла и звёзды (22–44)	30
§ 4. Нагруженный клин (45–67)	61
§ 5. Вытекание из резервуара (68–75)	73
§ 6. Химия (76–87)	77
§ 7. Резервуары для хранения нефтепродуктов (88–105)	85
§ 8. Колебания рессоры (106–109)	100
§ 9. Работа по выкачиванию нефти (110–125)	109
§ 10. Перколяция (126–135)	115
§ 11. Физика Земли (136–156)	120
§ 12. Зубчатые колеса (157–169)	131
§ 13. Теплообмен. Криология (170–178)	145
§ 14. Механика (179–190)	149
§ 15. Часы. Маятники (191–203)	152
§ 16. Математика (204–225)	157
§ 17. Дендриты (226–230)	182
Приложение. Проекты	195
Список литературы	197

* В скобках указаны номера задач, относящиеся к соответствующему параграфу.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Наш разум по природе своей наделен
неутомимой жаждой познавать истину.

Цицерон

В России давно настало время перехода от сырьевой экономики к экономике высоких технологий. Для осуществления этого перехода требуются и время, и определенные ресурсы, и воля. Но, главное, требуются самые разнообразные технические идеи, люди с развитым техническим мышлением как носители этих идей, а также надлежащие социальные условия. Реализация научно-технических проектов немислима без воспроизводства носителей идей, организованных в огромный корпус компетентных инженеров: изобретателей, конструкторов, проектировщиков, производственников, эксплуатационников, призванных продвигать высокие технологии от разработки до реализации на рынке.

Бесспорно, подготовка инженеров, способных разрабатывать и внедрять инновационные проекты, считается сегодня приоритетной национальной проблемой, требующей комплексного решения. Фактически выпускающая кафедра выступает социальным заказчиком перед другими кафедрами относительно содержания подготовки высококвалифицированных специалистов, в частности перед математическими кафедрами. Университетам при подготовке технических интеллектуалов, заточенных на эффективное производство, надлежит осуществлять фундаментальную подготовку с учетом технологической специфики будущей профессии, реализовывать на учебных занятиях принципы вариативности постановки и решения как технических проблем, так и математических задач. М. В. Ломоносов верил в мощь русского гения и не без оснований был убежден,

Что может собственных Платонов
И быстрых разумом Невтонов
Российская земля рождать.

Настоящая книга — результат совпадения трехсторонних интересов в вопросах обучения поисковой, исследовательской, творческой деятельности будущих инженеров: во-первых, выпускающих кафедр, которые

определяют политику воспроизводства инженеров, нацеленных на новации, изобретения и открытия; во-вторых, автора как преподавателя высшей математики; в-третьих, самих будущих инженеров, заинтересованных в формировании своей математической компетентности с учетом приобретаемой профессии.

Работая над книгой, автор ставил перед собой три цели. Одна из них — обучающая — продиктована стремлением изложить в книге проблемы и задачи, которые способствовали бы формированию математической компетентности будущих инженеров. При этом предлагаемые проблемы и задачи должны быть подобраны с учетом профессиональной направленности.

Вторая цель — развивающая — познакомить читателя с приемами и методами исследовательской деятельности, первостепенной задачей которой является производство суждений и создание оригинального продукта — вершины творческого акта. «Нет ничего сильнее жажды познания», — считал В. И. Вернадский. И очень важно создать в университетской среде педагогические условия для утоления этой жажды и для развития у будущих инженеров способностей к творческой деятельности, заложенных Природой.

Третья цель — воспитывающая — прививая вкус к прекрасному, нацелить человека с техническим мышлением видеть мир целостным, самоподобным, сотканным из хитросплетений реальных, чувственных и абстрактных фрагментов реальности, а также и самому делать этот мир совершенным, комфортным для Природы и Человека. Известный поэт Валерий Брюсов писал:

Во все века жила, затаена,
Надежда — вскрыть все таинства природы.

Книга может быть использована как дополнение к существующим учебникам и учебным пособиям, в которых материал изложен, как правило, последовательно и в соответствии с определенными дидактическими принципами. Речь идет о таких, например, учебных изданиях, как учебники [32]–[34], решебник [13], учебные пособия [12], [41] и др. В отличие от них в настоящем учебном пособии изложение выстроено подобно тому, как это происходит при исследовании технической или математической проблемы: внешне эклектично, порой со случайными выходами далеко за пределы исследуемой проблемы. Эта книга задумана как эссе о рождении новых идей — с элементами математики, математических методов решения инженерных задач из различных предметных областей, математического и наглядного моделирования, составления новых задач путем изменения, варьирования условия данной задачи,

рефлексии как обращения к своим мыслям и как внутреннего монолога креативного человека. Возникшие при этом кластеры задач содержат кроме уже «изобретенных велосипедов» немало оригинальных задач. Всего набралось 230 задач, и перед автором возникла проблема их классификации. Было решено отказаться от группировки по разделам математики, так как тогда кластеры рассыпались бы в пыль, и было решено с целью сохранения этих кластеров, изложить задачи в той последовательности, в какой они появлялись у составителей — у автора и его учеников. Соответствие задач разделам математики отражено в табл. 1.

Таблица 1

Соответствие задач разделам математики

0. Элементарная математика	2, 49, 51, 62–65, 103, 104, 115, 117, 156, 178, 183–185, 204–206, 214
1. Матрицы и определители	46, 48, 76–85, 105, 225
2. Аналитическая геометрия	10–21, 22–44, 49, 50, 66, 67, 105, 139–142, 195, 196, 198, 199, 202, 208–213, 215–224
3. Линейная (векторная) алгебра	1, 3, 4, 45, 46, 48, 53, 76–85, 136, 216
4. Дифференциальное исчисление	9, 44, 49, 88–98, 157–160, 162–167, 169, 193
5. Интегральное исчисление	55–57, 61, 110–113, 143–146, 192
6. Дифференциальные уравнения	5–8, 22, 45, 47, 58–60, 61–75, 86, 87, 106–109, 120, 147–155, 170–174, 177, 179–182, 186–191, 194, 203
7. Ряды	90
8. Теория вероятностей и математическая статистика	116, 118, 128–135, 168, 226
9. Численные методы	87, 101, 128–130, 133–135, 161, 200–202, 226–230
10. Фрактальная геометрия	52, 105, 128–130, 200, 201, 225, 226–230
11. Не определено	45, 99, 100, 102, 114, 118, 119, 121–127, 137, 138, 175, 176, 197, 207, 214

В книге принята сквозная нумерация задач, а нумерация рисунков и таблиц соответствует номерам задач; так, например, запись «Рис. 214.2» указывает на второй рисунок к задаче 214.

Я хочу выразить признательность моим коллегам, общение с которыми оказало благотворное влияние на мои взгляды относительно

вопросов формирования исследовательских умений будущих инженеров, воспитания их креативности при составлении и решении математических и профессионально-ориентированных задач и разработки связанной с этой проблематикой методики преподавания математики в технических университетах. Прежде всего, я выражаю огромную благодарность профессору Е. И. Смирнову, многолетнее сотрудничество с которым существенно повлияло на формирование моего мировоззрения преподавателя математики. Кроме того, я много почерпнул из оживленных дискуссий с профессорами В. В. Афанасьевым и А. В. Ястребовым, а также из общения с профессорами О. Б. Епишевой, А. Л. Жоховым, Р. Х. Казаковым, Н. Д. Кучугуровой, А. Б. Ольневой, С. А. Розановой, Н. Х. Розовым, В. С. Сековановым, Ю. И. Худаком. Я благодарен профессорам Тюменского государственного нефтегазового университета д. т. н. Е. В. Артамонову, д. г.-м. н. Р. М. Бембелю, д. т. н. Ю. Д. Земенкову, д. т. н. Ю. И. Некрасову, д. ф.-м. н. В. Ф. Новикову, д. г.-м. н. Ю. С. Папину, д. ф.-м. н. Ю. В. Пахарукову, д. т. н. А. А. Силичу за многочасовые консультации по интересующим меня техническим вопросам.

Большое спасибо моему другу В. Н. Алексееву, заведующему кафедрой математического анализа Ишимского государственного педагогического института им. П. П. Ершова, просмотревшему рукопись. Его проверка всех выкладок, взвешенная критика и предложения положительно повлияли на окончательную редакцию. Я признателен профессору А. С. Тихомирову, обсуждение с которым избранных вопросов алгебраической геометрии было полезным для рукописи. Я выражаю благодарность профессору В. В. Майеру и доценту А. Н. Халину за энергичную помощь в издании этого учебного пособия. Я благодарен моему ученику, а ныне бизнесмену В. Нуняну за спонсорскую поддержку, а также моим коллегам В. В. Проботюку и М. В. Пескову за техническую помощь при подготовке рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Математическая истина абсолютна и вечна, а математические объекты обладают свойством собственного вечного существования.

Р. Пенроуз

У математики три источника развития: *реальный мир* во всем его многообразии, сама *математика* с ее внутренними проблемами и *человек* — связующее звено между практикой и теорией, творец в постановке и решении проблем, живущий и действующий в соответствии со своими генетическими, интуитивными и рациональными программами.

Характерной особенностью инженера является наличие у него *технического мышления*. Последнее — целый комплекс интеллектуальных процессов и их продуктов, который обеспечивает решение проблем в профессиональной деятельности инженера [15]. Интеграция технического и математического мышлений — процесс неизбежный. Как говорится, от ИКТ и математики не зарекайся. Техническое мышление (наряду с математическим, пространственным, художественным и др.) — одна из форм мышления, т. е. того, что рождает мысли. Мысль — это спутница истины, истина же — великая спутница тайны, а истина и тайна гармонично взаимосвязаны, сложно переплетены друг с другом лентой красоты. Постоянное стремление пытливого ума постичь мыслью неразлучную троицу — тайну, истину, красоту — рано или поздно приводит к производству суждений, рождению изобретений и свершению открытий. Как именно у инженера или математика возникает догадка, озарение, инсайт, до сих пор неясно, хотя об этом написано немало книг. Тема эвристики — науки о том, как надо изобретать — была актуальной всегда. К ней обращались ученые в различных областях человеческого знания: в инженерном деле — Архимед, Р. Луллий, Р. Декарт, И. Кулибин, Г. Лейбниц, Г. С. Альтшуллер, И. В. Иловайский, Дж. К. Джонс, А. Осборн, У. Гордон и др.; в математике — Евклид, Архимед, Н. И. Лобачевский, А. Пуанкаре, А. Н. Колмогоров, Г. Вейль, Р. Пенроуз и др.; в преподавании математики — Д. Пойа, А. Г. Мордкович, В. В. Афанасьев, Е. И. Смирнов, А. В. Ястребов, З. А. Скопец, В. С. Секованов, И. М. Яглом и многие другие. В настоящем учебном пособии сделана

скромная попытка осветить эту проблематику в контексте формирования творческого потенциала у будущих инженеров математическими средствами, предназначенными для решения задач, в большинстве своем выросших, словно яблони дивного сада, на плодородной почве техносферы.

В своей профессиональной деятельности инженер как человек, обладающий техническим мышлением и живущий одновременно в трех мирах — материальном, чувственном, абстрактном, — имеет дело с различными *объектами*. Последние суть фрагменты объективной реальности — материальные, чувственные (перцептивные), абстрактные (идеальные). Под *моделью* объекта A понимают объект \tilde{A} , сохраняющий типичные черты объекта A , т. е. те свойства и характерные особенности объекта A , которые важны для данного исследования, использования, применения.

☛ Чтобы воспроизвести последовательность семи цветов радуги, расположенных в порядке убывания длины волны:

Красный, Оранжевый, Желтый, Зеленый, Голубой,
Синий, Фиолетовый, (А)

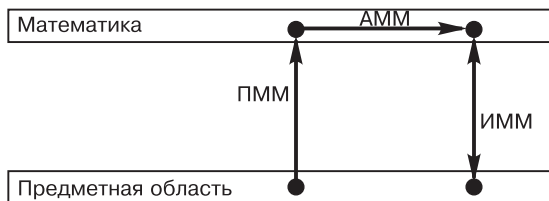
достаточно вспомнить, казалось бы, не более чем занятную фразу:

Каждый Охотник Желает Знать, Где Сидит Фазан. (\tilde{A})

Фраза \tilde{A} является моделью последовательности A , при этом \tilde{A} сохраняет типичные черты моделируемого объекта A : \tilde{A} и A состоят из 7 слов; слова и в A , и в \tilde{A} упорядочены; начальные буквы соответствующих слов совпадают. Здесь модель \tilde{A} является *абстрактной*, поскольку таковыми являются любые слова. ☛

Процесс построения модели, ее анализа, интерпретации полученных результатов называется *моделированием*. Моделирование, основанное на математических методах, называется *математическим*. Такое моделирование применительно к исследованию технического объекта A использует математический язык, опирается на знаково-символьные или численные методы анализа его математической модели (ММ) \tilde{A} и завершается интерпретацией полученных результатов — переводом с математического языка на технический. Математическое моделирование состоит из трех этапов:

Построение (ПММ) — Анализ (АММ) — Интерпретация (ИММ).



Этап ПММ обычно выполняется в три шага:

- 1) дается словесное описание объекта A — *содержательная* постановка задачи моделирования;
- 2) делается перевод предыдущего описания на технический язык и интуитивно предсказываются возможные сценарии поведения объекта A — *концептуальная* постановка задачи моделирования;
- 3) выполняется перевод с технического на математический язык — *математическая* постановка задачи моделирования.

Далее, на этапе АММ происходит игра по математическим правилам, характерной особенностью которой является потенциальная возможность по известным входным параметрам моделируемого объекта A найти путем анализа модели \tilde{A} выходные параметры объекта A . Параметрами могут служить любые математические объекты — числа, векторы, тензоры, соответствия, отображения, функции, инцидентии, множества и т. п. Наконец, из трех шагов состоит и этап ИММ:

- 1) дается истолкование на языке предметной области математических фактов, полученных в ходе анализа ММ;
- 2) выясняется, насколько хорошо теория согласуется с практикой (выполняется проверка ММ на адекватность);
- 3) осуществляется рефлексия (когда исследователь задается вопросами — что можно изменить в объекте A или модели \tilde{A} , в их свойствах, в методах исследования, в своем мышлении, в своем позиционировании относительно A или \tilde{A} и др.); при этом истинный исследователь не боится получить побочные, непредсказуемые продукты или суждения, а, наоборот, ставит разнообразные цели, даже если они конкурируют между собой. («Не всякое ли открытие состоит в неожиданном соприкосновении и последующей интерпретации двух различных контекстов?» [37, с. 173].)

Понятия модели и моделирования наиболее распространены в сфере обучения, в научных исследованиях, в проектной и конструкторской работе, в серийном техническом производстве. Чаще всего термин «модель» используют для обозначения устройства, отражающего

строение, свойства, действие данного объекта, и аналога данного объекта в виде чертежа, графика, схемы и т. п.

Компетенции инженера будем подразделять на профессиональные, информационные и технологические, а его личностные компетенции — на мировоззренческие, мотивационные, исследовательские. *Профессиональные* компетенции обеспечивают владение инженером комплексом профессиональных качеств, основанных на понимании структуры техносферы, знании характерных особенностей ее составляющих, умении реализовать свои *технологические* компетенции путем планирования, осуществления и мониторинга производственно-технологических процессов. *Информационные* компетенции содержат как компонент математическую компетенцию будущего инженера. К основным *математическим компетенциям* будущего инженера следует отнести понимание, знание и умения в области математики, необходимые для успешного изучения других дисциплин, использования математического аппарата как интегративного фактора междисциплинарного взаимодействия и организации исследовательской деятельности.

Моделирование является одним из составных компонентов наглядно-модельного обучения. В процессе обучения формируется модель существенных признаков объекта изучения, адекватных поставленной цели. Наглядно-модельное обучение включает в себя как построение модели (схемы, кода, заместителя), так и формирование адекватного результата внутренних действий обучаемых в процессе учебной деятельности. Предпочтение отдается «наглядной» модели как опоре на устойчивые ассоциации, простые геометрические формы, психологические законы восприятия и нейрофизиологические механизмы памяти. Модель должна отражать суть понятия, формы или метода исследования. Еще с начала XX столетия многие психологи (О. Зельц, М. Вертгеймер, М. Бунге и др.) подчеркивали существенность процесса визуализации исследовательской ситуации как важного этапа решения задачи.

Наглядное моделирование в преподавании исследовалось Я. Коменским, К. Д. Ушинским, П. Я. Гальпериным, В. В. Давыдовым, В. Г. Болтянским, Л. М. Фридманом, Е. И. Смирновым. Оно тесно связано с чувственной моделью, которая занимает центральное место в (математическом) моделировании, ибо оно формирует устойчивый результат внутренних действий обучаемого в процессе моделирования. Чувственная модель позволяет «увидеть» то, что чаще всего невозможно созерцать в физическом пространстве. Например, как «увидеть», что две двумерные плоскости 4-мерного пространства пересекаются в некоторой точке, если это пересечение моделируется системой уравнений? Как «увидеть» то, что противоречит нашей трехмерной интуиции? Абстрактная модель (после решения такой системы) поз-

воляет знать, что плоскости пересекаются в точке, а чувственная модель на основании полученного знания помогает это понять. Одни люди «видят» это пересечение как общую внутреннюю точку двух отрезков, другие воспринимают его как точку соприкосновения двух параллелограммов, третьи слышат некую музыкальную ноту, четвертые отмечают специфические вкусовые или тактильные ощущения и т. д. Чувственная модель не поддается никакой формализации, но она активно участвует в таком важнейшем мыслительном процессе, как абстрагирование. И только после того, как обе модели — абстрактная и чувственная — позволяют *понимать* абстрактный язык и *знать* существенные свойства объекта, возникает таинственный союз интуиции и логики, направленный на формирование у обучаемого соответствующей компетенции, согласно которой он должен *уметь* применять полученные знания для дальнейшего моделирования. Восприятие приемов знаково-символьного языка вместе с кластерами знаний преломляется в чувственной модели через призму интуиции в диагностично поставленную цель. Сказанное резюмирует следующее определение [35, с. 230].

Наглядное моделирование — это формирование адекватного категории диагностично поставленной цели, устойчивого результата внутренних действий обучаемого в процессе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельными знаниями или упорядоченными наборами знаний.

Важную роль при разработке моделей играют *гипотезы*, т. е. предсказания, основанные на наблюдениях и догадках, а также обобщения и специализации. Формулирование и проверка правильности гипотезы зиждутся, как правило, на аналогиях. *Аналогия* как форма мышления основана на сходстве двух объектов, зависящем от уровня абстрагирования, определяемого конечной целью, и параметров объекта исследования. *Обобщение* — это логический прием, состоящий в переходе от менее общего к более общему. *Специализацией* называют логический прием, состоящий в переходе от более общего к менее общему. Так, например, теорема Пифагора является специальным случаем теоремы косинусов, а прямозубое цилиндрическое зубчатое колесо — частный случай косозубых колес, которые, в свою очередь, являются специализацией винтовых зубчатых колес.

Если результаты моделирования хорошо описывают свойства и предсказывают поведение исследуемого объекта, то говорят, что модель *адекватна* объекту.

Обычно анализ и синтез рассматривают как две стороны единого мыслительного процесса. В то же время инженеру ясно, что если

техническое изделие разобрать на составляющие — выполнить анализ, а потом собрать в обратном порядке — выполнить синтез, то ничего не изменится не только в изделии, но и в мышлении инженера.

Как известно, *анализ* приводит к разложению целого на составляющие, *синтез* же соединяет элементы в единое целое. Анализ и синтез как свойственные людям мыслительные операции формируются в деятельности. Между анализом и синтезом могут быть сравнение, оценка, измерение и т. п. *Сравнение* — одна из операций мышления, направленная на сопоставление объектов или их частей по некоторому основанию. Если условиться, что анализ есть движение вниз ↓ в иерархии сложной системы, а синтез — движение вверх ↑, то можно сказать, что оценивание, сравнение, измерение — это движение по горизонтали →. Тогда триада

$$[\text{анализ} - \text{оценка} - \text{синтез}] \tag{1}$$

есть тройка стрелок ↓ → ↑, а триаде

$$[\text{синтез} - \text{оценка} - \text{анализ}] \tag{2}$$

отвечают стрелки ↑ → ↓.

По схеме

$$\text{Интегрирование} \equiv [\text{разбиение} - \text{оценка} - \text{суммирование}] \tag{3}$$

вводится понятие определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$, заданной на отрезке $I = [a, b]$. Триаду (1) мы перепишем, используя соответствующие (рис. 1.1) символы:

$$\int \equiv [\partial - \Omega - \Sigma]. \tag{4}$$

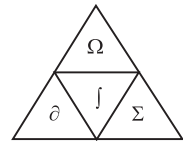


Рис. 1

Согласно схеме (4), определенный интеграл вычисляется в три этапа, а каждый из этапов, в свою очередь, можно представить тремя шагами. В итоге возникает 9-звенный путь

$$(\rightarrow \downarrow \rightarrow)(\downarrow \rightarrow \uparrow)(\rightarrow \uparrow \rightarrow):$$



Разбиение ∂

- оценка — задаем произвольное число $n \in \mathbb{N}$
- ↓ анализ — делим I на n отрезков $a_k, k = 1..n$
- оценка — измеряем длины Δx_k отрезков a_k

Оценка Ω

- ↓ анализ — выбираем точку $\xi_k \in a_k$
 → оценка — вычисляем $f(\xi_k)$ для каждого k
 ↑ синтез — перемножаем числа $f(\xi_k)$ и Δx_k

Суммирование Σ

- оценка — геометрически произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет площадь прямоугольника
 ↑ синтез — находим интегральную сумму $S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$
 → оценка — если при любых разбиениях отрезка I , таких, что $\varepsilon = \max \Delta x_k \rightarrow 0$, и при любом выборе точек ξ_k интегральная сумма S_k стремится к одному и тому же пределу, то этот предел называется определенным интегралом: $\int_I f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$.

С. Л. Рубинштейн ввел термин «анализ через синтез» для обозначения того, что в процессе мышления познаваемый объект включается в новые связи (см. схему (2)) и выступает в новом качестве, фиксируемом в новом понятии. В таких случаях благодаря неожиданным эмерджентным связям исследуемый объект, подобно искусно выращенному кристаллу, сияет свежими формами, преисполненный оригинальной палитры свойств, источая из глубин обновленного содержания свет истины, радующий беспрестанно пульсирующую мысль — мысль творческую, постоянно нацеленную на варьирование, на проникновение в непознанное.

Приемы варьирования настолько разнообразны, что практически невозможно собрать их в единый список с целью порекомендовать его другим для успешного погружения в творчество.

В технической области приемы варьирования можно разделить на 3 группы в соответствии с тем, что именно варьируется — объекты, их свойства или отношения между объектами [17, с. 80–99]:

✳ объекты — дробление, другое измерение, обратная связь, «посредник», копия, замена механической схемы, гибкие оболочки и тонкие пленки, «обратить вред на пользу»;

✳ свойства — вынесение, универсальность, матрешка, антивес, сфероидалность, пневмо- и гидроконструкции, пористость, однородность, композиционные материалы, изменение параметров, «дорогая долговечность» и «дешевая одноразовость»;

✳ отношения — асимметрия, объединение, предварительное напряжение, предварительное исполнение, эквипотенциальность, наоборот, ди-

наличие, механические колебания, периодическое движение, непрерывность полезного действия, отбрасывание и регенерация частей, фазовый переход, термическое расширение.

В математике приемы варьирования делятся также на три группы (см., например, монографию [5, с. 21–22]):

∫ объекты — *аналог* (замена одного объекта другим; например, замены: точка \leftrightarrow прямая, точка \leftrightarrow плоскость, точка \mapsto окружность и т. п.), *пространство* (переход от плоскостного размещения объекта к пространственному, изменение размерности объекта или его объемлющего пространства), *время* (перенос функционирования объекта в другое время);

∫ свойства — *локализация* (отделение части объекта, изменение части условий, частичное выполнение условия задачи), *деформация* (изменение размеров, показателей, качественных характеристик, оптимальность), *реструктуризация* (изменение структуры объекта посредством изменения отношений между его частями);

∫ отношения — *трансформация* (применение симметрий, антисимметрий, асимметрий, динамики, ритмики, нюансов, контраста; инверсия, инверсия процедур, обращение функций, взгляд на объект с противоположной точки зрения, замена динамики статикой и наоборот), *приспособление* (адаптация объекта к внешним условиям, к взаимодействию старого и нового), *обозначения* (с индексами, без индексов, векторная форма, матричная форма, тензорная форма).

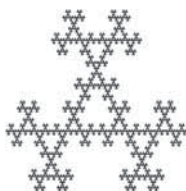
Рассматриваемые в данном пособии задачи являются преимущественно *профессионально-ориентированными*, т. е. они формулируются в терминах предметной области, допускают математическое моделирование и являются притягательными для личности: обладают занимательностью в фабуле задачи, допускают вариативность содержания, обогащают творческий опыт будущего инженера. Умение конструировать задачи и решать их — профессиональное качество, необходимое для каждого инженера.

Одной из форм развития творческих способностей является работа над проектом, который студент (или даже малая группа) сам выбирает, исполняет и оформляет. Перечень проектов приводится в Приложении, в самом конце книги. Выполняя их, будущие инженеры самостоятельно намечают стратегии достижения цели — будь то решение технической проблемы или математической задачи, — производят отбор необходимых методов, способов, приемов, причем не перенимая их слепо у кого-то, а творчески переосмысливая, искусно вплетая их в красоту рождающегося орнамента собственных фантазий — движущей силы

в фазовом пространстве творений, обеспечивающей прохождение идеи по траектории от погружения в проект до аттрактора-цели в виде исполненного проекта.

Великий математик Давид Гильберт в предисловии к своей книге «Наглядная геометрия» [10] пишет: «Пусть читатель прогуливается в огромном саду геометрии, в котором каждый может составить себе такой букет, какой ему нравится». Не менее увлекательно читатель может путешествовать как по бескрайней вселенной математики, так и по загадочным джунглям техносферы, чтобы там не только «найти то, не знаю, что», но и, главное, выпестовать свое истинно творческое Я.

§ 1. СТЕРЖНИ



Служенье муз не терпит суеты:
Прекрасное должно быть величаво.

А. С. Пушкин

Варьирование задачи может происходить как в предметной области, так и в математической. Читателю рекомендуется обратить внимание именно на метаморфозы в размышлениях исследователя. Рассмотрим простейшие задачи, на которых демонстрируются приемы математического моделирования и приемы вариативности как реальных объектов, так и математических моделей.

1. **Задача (основная).** Коромысло состоит из жесткого невесомого стержня и двух одинаковых шариков на его концах (рис. 1.1). Где должна находиться точка опоры коромысла, чтобы оно было в равновесии?



Рис. 1.1

Решение 1. Наш жизненный опыт, наша интуиция подсказывают, что опора должна находиться посередине коромысла. ■

☞ Это понятно и без математики. Впрочем, математики не могут не согласиться, что Истину порой можно постичь иррационально, например, исходя из соображений *красоты*, лежащей в основе *принципа симметрии*, или опираясь на личный опыт. В инженерной практике существует много таких ситуаций, когда решение технической проблемы ясно на интуитивном уровне. Если бы так было всегда! Будущим инженерам предоставляется возможность получить в университете солидную фундаментальную подготовку, необходимую, например, для исследования сценария динамического процесса или свойств объекта объективной реальности путем построения математической модели (ММ).

В данной задаче инженер, исходя из физических соображений и используя известные ему свойства векторного произведения двух векторов, легко найдет решение 2 — аналитическое. 🔒

Решение 2. Построение ММ. Пусть коромысло — отрезок AB на оси x с концами в точках $a, b \in \mathbb{R}$. И пусть $m_A = m$ — масса точки a , $m_B = m$ — масса точки b . Тогда если опора находится в точке $C(c)$, то момент \mathbf{M}_A силы $\mathbf{P}_A = gm_A$ относительно опоры равен: $\mathbf{M}_A = \overrightarrow{CA} \times \mathbf{P}_A$, момент \mathbf{M}_B силы $\mathbf{P}_B = gm_B$ относительно опоры равен: $\mathbf{M}_B = \overrightarrow{CB} \times \mathbf{P}_B$. Требуется, чтобы суммарный момент равнялся нуль-вектору: $\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B = \mathbf{0}$.

Анализ ММ. В ортонормированном репере $\{C; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ последнее векторное уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gm_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gm_B \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

или, равносильно,

$$\begin{aligned} -(c-a)gm_A \mathbf{j} - (c-b)gm_B \mathbf{j} &= \mathbf{0}, \\ (c-a)m_A + (c-b)m_B &= 0, \\ c(m_A + m_B) &= am_A + bm_B, \end{aligned}$$

$$c = \frac{am_A + bm_B}{m_A + m_B}. \quad (1)$$

По условию задачи, $m_A = m_B = m$, поэтому

$$c = \frac{1}{2}(a+b). \quad (2)$$

Интерпретация ММ. Формула (2) на языке предметной области означает, что опора должна находиться в середине отрезка $[a, b]$, т. е. в середине коромысла. Замечаем, что (2) является специальным случаем формулы (1). Если (1) — пример обобщения формулы (2), то примером конкретизации последней служит случай, когда $a = 0$, $b = 1$. Тогда, согласно (2), $c = 0,5$. Величина c в (2) называется средним арифметическим величин a, b . Согласно Платону, обучение есть припоминание душою знаний из ее прошлой жизни. Неважно, вспомнит исследователь о таком припоминании или нет, но он может вспомнить, что в этой замечательной жизни ему наряду со средним арифметическим посчастливилось знать и другие средние величин

a , b : среднее квадратичное $\sqrt{a^2 + b^2}$, среднее геометрическое \sqrt{ab} , среднее гармоническое $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (оно обратное среднему арифметическому

обратных величин). А вспомнив это, он может устремить свои творческие способности в направлении одного из этих средних. Но он может, глядя на формулу (1), отметить, что для него это *déjà-vu* не только в математике, но и в других дисциплинах. Выход за пределы полученной формулы (2) напоминает поведение опытного ягодника, который одну земляничку кладет в корзину, другую срывает, третью видит, а четвертую примечает. У опытного ягодника, как сказали бы психологи, угол зрения больше среднего. Увеличение угла зрения в исследовательской или творческой деятельности приходит с тренировками и помогает видеть, что формула (1) описывает факт из динамики, когда две материальные точки с известными массами движутся с известными скоростями по прямой и испытывают абсолютно неупругий удар, слившись в новую точку, которая будет двигаться со скоростью $v = \frac{v_1 m_1 + v_2 m_2}{m_1 + m_2}$; а также факт из раздела физики «Теплота», когда две одинаковые жидкости известной массы и известных температур перелиты в новый сосуд, в котором установится новая температура $T = \frac{T_1 m_1 + T_2 m_2}{m_1 + m_2}$; а также факт из электричества, когда плотность заряда двух заряженных конденсаторов, оказавшихся в параллельном соединении, вычисляется по формуле $q = \frac{q_1 c_1 + q_2 c_2}{c_1 + c_2}$.

Ситуация, в которой оказывается исследователь, является мировоззренческой, так как побуждает его занять определенную позицию [16, с. 96] относительно математики, предметных областей, науки в целом. При этом применительно к рефлексии как компоненте интерпретации он интуитивно отмечает, что формула (1) проявляется не только в данной задаче, но и в других математических областях, в других науках, готовя внутри себя предпосылки для озарения в виде суждения типа «Часть подобна целому». Таким образом, производство некоего суждения в одном уголке науки-вселенной придает исследователю уверенность, что аналоги этого суждения имеют место в других галактиках, которые он непременно окинет единым взором, как только увеличит угол зрения, подобно тому как Моцарт видел свою симфонию целиком и сразу. ■

☞ Точные математические выражения обнаруживают истину в объективной форме и дают новые возможности для творческого полета мысли. Применительно к отрезку AB с серединой C подмечаем (такой прием называют «Анализ через синтез»), что если точка C на отрезке AB

взята произвольно, то возникают три отрезка, вообще говоря, различной длины. В нашем же случае два из трех отрезков оказались равными. В этом частном наблюдении проявился важный для творчества принцип, который мы будем условно называть принципом максимума через минимум:

**«Природа стремится к максимуму разнообразия
через минимум форм».**

Другим проявлением этого принципа служит сама Природа, создавшая несметное разнообразие молекул, веществ, материалов, используя для этого чуть более ста химических элементов, которые подчиняются одному из основных законов естествознания — периодическому закону химических элементов, открытому в 1869 году Д. И. Менделеевым (1834–1907).


Покажем, как, руководствуясь указанным выше принципом, например, составить новую задачу. Для этого обратим внимание, что вместо длины отрезка можно взять отношение меньшего отрезка к большему. Тогда задача сводится к выбору точки $x \in [0,5; 1]$, такой, что из трех отношений $\frac{x}{1}$, $\frac{1-x}{1}$, $\frac{1-x}{x}$ по крайней мере два были равными. Если приравнять первые две дроби, то получим уже знакомое число $x = 0,5$. Если приравнять последние две дроби, то получается вырожденный случай: $x = 1$. Если равны крайние дроби, то мы приходим к уравнению

$$x^2 + x = 1, \quad (3)$$

корнями которого служат числа

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,6180339, \quad (4)$$

$$-\Phi^{-1} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx -1,6180339.$$

Число Φ называется *золотым сечением*. Если $\frac{1}{2}$ — символ равновесия, покоя, неподвижности, то Φ символизирует устойчивость в развитии многих динамических систем объективной реальности. Таким образом, нами решена задача 2 (см. ниже), которая была составлена в соответствии с принципом максимума через минимум. Этот принцип в математике применяется часто. 

Решение 3. Пусть коромысло совпадает с отрезком $I = [0; 1]$. Тогда точка $x \in I$ разбивает I на два отрезка, длины которых равны

$y = x$, $z = 1 - x$. Поскольку x — середина I , x удовлетворяет уравнению $y = z \Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = 1/2$. ■

Решение 4. Предыдущее решение подсказывает графическое решение: достаточно построить графики функций y , z и найти их точку пересечения. Рекомендуем читателю самостоятельно выполнить решение графическим способом. ■

Скажу попросту: слепая интуиция — синица в руках, тогда как разумная дискурсия — журавль в небе.

П. А. Флоренский

☉ Снова возвратимся к взаимоотношению интуиции и логики. Основатель и пропагандист тринитарной диалектики в России профессор Р. Г. Баранцев из Санкт-Петербурга предлагает семантическую формулу системной триады: «интуицио–эмоцио–рацио» [6, с. 27], отмечая, что она использует довольно условные понятия, унаследованные от диадной парадигмы. Если считать, что эмоции сильно коррелируют с психическими и физиологическими процессами, которые достались индивиду от предков, то упомянутая триада вполне согласуется с триадой: «наследственность–интуиция–логика», которая более предпочтительна с нашей точки зрения. Наследственность — природная данность, и она развивается во времени по жесткому объективному сценарию, управляется настоящим и прошлым. Интуиция воспитывается субъективным опытом благодаря мягким сценариям, управляется прошлым и будущим. Логика вырастает из обучения по мягкому объективному сценарию, управляется будущим и настоящим [46].

Если человек с западным мышлением сначала догадывается (все-таки интуиция есть!), а потом логически (как правило, строго математически) доказывает, что брошенный камень летит по параболе, то человек с восточным миропониманием просто созерцает полет и падение камня на землю.

Для Запада характерно предпочтение закономерному исходу испытания, а не случайному. На Востоке же, напротив, случайность — двигатель прогресса.

Однажды наше занятие проходило в лаборатории неорганической химии. Студенты искали различными способами точку опоры для коромысла. Студент-машиностроитель Андрей Т. взял стеклянную трубку и показал механический способ решения задачи (Восток!). «Сделаем так, — Андрей положил концы трубки на два указательных пальца. — Плавню сближаем пальцы. Смотрите, по трубке скользит один и только один палец. Почему? (Запад!) Это, по-моему, очевидно

(Восток?). Пальцы, скользя поочередно вдоль трубки, сближаются (Восток!) и встречаются где? (Запад!) На середине!». Едва Андрей закончил свое выступление, тут же было предложено еще одно занятное решение, когда слово взял студент-геолог Виктор Н.: «Предположим, в стеклянной трубке имеется скользящая непроницаемая перегородка. Если в оба конца трубки закачать одинаковое количество газа, то возникнет разность давлений по обе стороны от перегородки, перегородка начнет смещаться и остановится в точности посередине трубки, когда разность давлений исчезнет».

Решение 5. Пусть коромысло снова моделируется единичным отрезком I . На концах отрезка — материальные точки единичной массы. Отрезок опирается на две призмы: одна призма касается отрезка в точке x , близкой к 0, другая — в точке, удаленной от 1 на расстояние y , близкое к 0. Если призмы плавно сближать, то центр инерции всегда будет находиться между ними. Следовательно, призмы встретятся в середине отрезка. ■

☞ При решении задач на нахождение или на доказательство (здесь согласимся с Пойа [36, с. 145], который считает, что все математические задачи делятся на две категории: задачи на нахождение и задачи на доказательство) приходится составлять и решать всякие уравнения и неравенства, делать рисунки на плоскости, воображать 3D-образы и многие другие придумки, которые, бесспорно, неотъемлемы от процесса поиска решения, но которые после достижения результата, после оформления решения могут и не войти в записанное решение. Воистину жалко терять интересные идеи, которые родились в процессе решения, но остались вне оформления решения задачи. В таких случаях остается только одно: сформулировать для себя новую задачу и записать ее в свою копилку под условным названием «Сборник идей». Возвращаясь к призмам, зададимся вопросом: какое давление оказывает коромысло на призмы? В контексте интуитивного и логического постижения истины заметим: Востоку ясно, что если $x < y$, то давление P_x в точке x меньше давления P_y в точке y . А что скажет Запад? Пока можно сказать совершенно точно, что $P_x + P_y = 2$. Чему же равно отношение $\lambda = P_x/P_y$? Этот вопрос составляет содержание задачи 3 (см. ниже).

2. Задача. На отрезке найти такую точку, чтобы из отношений трех отрезков, возникших при этом, некоторые оказались равными между собой.

Решение — см. выше вывод формул (3), (4). ■

3. Задача. Коромысло состоит из жесткого невесомого стержня и двух одинаковых шариков на его концах. Оно опирается на две призмы. Найти силу, с которой коромысло давит на каждую призму.

Решение. *Построение ММ.* Пусть A, B — концы коромысла, C, D — опоры. Пусть точки A, B, C, D лежат на числовой прямой и имеют соответственно координаты $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Обозначим через \mathbf{P}, \mathbf{Q} силы, действующие на концы коромысла (рис. 3.1). В точке C действуют 3 силы: сила \mathbf{Q}_C рычага DB , который давит силой \mathbf{Q} относительно точки D , сила \mathbf{P}_C рычага DA , который давит с силой \mathbf{T} относительно точки D и реакция \mathbf{T} опоры.

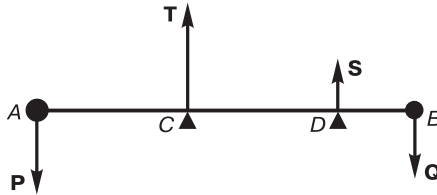


Рис. 3.1

Анализ ММ. Из условия

$$\mathbf{T} + \mathbf{Q}_C + \mathbf{P}_C = \mathbf{0}$$

равновесия в точке C посредством векторных произведений получаем

$$T = |\mathbf{T}| = |\mathbf{P}_C + \mathbf{Q}_C| = \frac{AD}{CD} P - \frac{BD}{CD} Q.$$

Аналогично получается давление S на вторую опору D :

$$S = |\mathbf{S}| = \frac{BC}{CD} Q - \frac{AC}{CD} P.$$

В частности, если $a = 0, b = 1, c = x, d = 1 - y$, то

$$T = \frac{(1-y)P - yQ}{1-x-y}, \quad S = \frac{(1-x)Q - xP}{1-x-y}. \quad (1)$$

При $Q = P$

$$T = \frac{1-2y}{1-x-y} P, \quad S = \frac{1-2x}{1-x-y} P. \quad (2)$$

Интерпретация ММ. Проверим формулу (5): если она правильная, то должно выполняться тождество $T + S = P + Q$. Действительно, это так: $T + S = \frac{(1-x-y)(P+Q)}{1-x-y} = P + Q$. Кроме того, из (2) следует, что если $y = x$, то $T = S = P$, что вполне согласуется со здравым смыслом. Чувство симметрии, равновесия приобретает с младенчества через деятельность. Выясним, при каких x, y в формуле (5) $T = S$. Если $T = S$, то, согласно (5),

$$\begin{aligned}(1-y)P - yQ &= (1-x)Q - xP \Rightarrow \\ P - y(P+Q) &= Q - x(P+Q) \Rightarrow \\ y &= x + \frac{P-Q}{P+Q}.\end{aligned}\quad (3)$$

Найдем ограничения на x, y . Для этого заметим, что из механических соображений следует неравенство $x+y \leq 1$. Отсюда и из соотношения (3) вытекает, что

$$2x + \frac{P-Q}{P+Q} \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{Q}{P+Q}.$$

Равенство достигается, если обе опоры совпадают с точкой равновесия. ■

□ Заменяем в задаче 3 коромысло однородным стержнем (моделирующим, например, бревно). Тогда получится задача 4. 🔒

Довольно неясное определение
это для них имело значение
ясное и понятное.

Н. С. Лесков, «Одному»

4. Задача. Бревно опирается на два пня. Найти силы, с которыми оно давит на пни.

Решение. **Построение ММ.** Пусть a, b — концы бревна, которое мы будем мыслить как отрезок $I = [a, b]$ числовой прямой; c, d — пни, на которых лежит бревно; P — вес бревна; T, S — реакции пней на бревно

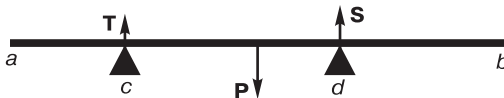


Рис. 4.1

(рис. 4.1). Тогда $\mathbf{T} + \mathbf{S} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$. Кроме того, относительно произвольной точки $x \in I$ сумма моментов этих трех сил должна быть нулевой:

$$(c - x)T + (d - x)S - \left(\frac{a+b}{2} - x\right)P = 0.$$

Анализ ММ. Последнее тождество справедливо при всех $x \in I$. Подставив вместо x соответственно d , c , получаем

$$T = \frac{(2d - a - b)}{2(d - c)}P, \quad S = \frac{(a + b - 2c)}{2(d - c)}P. \quad (1)$$

Интерпретация ММ. В частности, если $a = 0$, $b = 1$, $c = x$, $d = 1 - y$, то из равенств (4) следует

$$T = \frac{(1 - 2y)}{2(1 - x - y)}P, \quad S = \frac{(1 - 2x)}{2(1 - x - y)}P. \quad (2)$$

Формула (2) согласуется с формулой (2) задачи 3. ■

5. Задача. Коромысло состоит из упругого невесомого стержня и двух шариков массами m_1 и m_2 на его концах. Где должна находиться точка опоры коромысла, чтобы оно было в равновесии, и какова будет форма изгиба стержня? ■

☛ Если снова заменим в задаче 3 коромысло однородным стержнем, то получим задачу 6. А если в задаче 4 бревно заменить на массивную балку, то получим задачи 7 и 8.

Предыдущие задачи были статические. А если обратиться к динамике? Одна из самых простых реализаций динамической идеи отражена в задаче 9. ⚙

6. Задача. Однородный массивный стержень находится в равновесии, опираясь своей серединой на призму и деформируясь под собственным весом. Найти форму изгиба стержня.

7. Задача. Однородная массивная балка расположена горизонтально и опирается на две тумбы. Найти форму прогиба балки.

8. Задача. Горизонтальная однородная стальная балка длины L , свободно лежащая на двух опорах, прогибается под действием собственного веса, равного P кгс на единицу длины. Найти уравнение упругой линии (и максимальный прогиб) балки.

9. Задача. Линейка AB эллипсографа длиной $2l = 2m$ (рис. 9.1) движется так, что угол φ (в радианах) изменяется по закону

$$\varphi = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}.$$

При этом ползун A движется по горизонтальной прямой, а ползун B — по вертикальной. Найти траекторию точки C , лежащей на середине линейки, а также ее скорость и ускорение при $t = 1$ с.

Решение. Прежде всего, вычислим первые две производные функции $\varphi(t)$: $\dot{\varphi} = -t + 2$, $\ddot{\varphi} = -1$. Введем оси координат, как указано на рис. 9.1. Найдем координаты точки C :

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi. \quad (1)$$

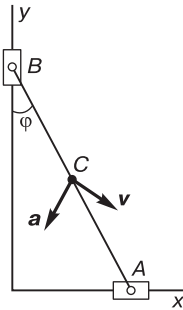


Рис. 9.1. Эллипсограф

Формулы (1) доставляют параметрические уравнения траектории точки C . Возведя в квадрат оба уравнения и сложив их, получим алгебраическое уравнение траектории точки C : $x^2 + y^2 = l^2$, т. е. C движется по окружности радиусом l с центром в начале координат. Так как вектор \mathbf{r} пути равен

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (l \sin \varphi(t), l \cos \varphi(t)),$$

то

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (l\dot{\varphi} \cos \varphi, -l\dot{\varphi} \sin \varphi)$$

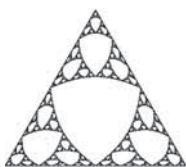
— скорость,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = (l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi), -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi))$$

— ускорение. Таким образом,

$$|\mathbf{v}(1)| = l\dot{\varphi} = 1 \text{ м/с}, \quad |\mathbf{a}(1)| = l\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2. \quad \blacksquare$$

§ 2. ЦЕНТРОИД



Закон сохранения импульса: центр инерции замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц
«Механика», 1958

Рассмотрим одно из фундаментальных понятий механики — центр инерции материальной системы точек, который в геометрии известен как **центроид системы точек**.

Определение. *Центроидом* системы $S = \{A_i\}_{i=1}^n$ точек A_1, A_2, \dots, A_n называется точка G , такая, что выполняется векторное равенство: $\sum_{i=1}^n \vec{GA}_i = \vec{0}$. В механике центроид системы материальных точек называется *центром инерции*, или *центром масс* (устаревшее), или *центром тяжести* (архаичное).

Закон сохранения импульса свидетельствует о важности понятия «центроид системы точек», вследствие чего между этим и предыдущим параграфами сохраняется преемственность. Покажем, как из задач 1 и 2 методом варьирования следует очередной каскад задач, и продемонстрируем, как исследовать объект (или явление) в разнообразных направлениях с целью выявления его новых особенностей — свойств, связей и отношений.

10. Задача. Доказать, что центроид G системы $S = \{X_i\}_{i=1}^n$ точек X_i вычисляется по формуле $\mathbf{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$.

Доказательство. Согласно определению центроида,

$$\sum_{i=1}^n G\vec{X}_i = \mathbf{0},$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \mathbf{G}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{G} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i = n\mathbf{G} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i. \quad (1)$$

■

11. Задача. Дана система $S = \{X_i\}_{i=1}^n$ материальных точек X_i , массы которых равны m_i . Доказать, что центр G инерции системы S вычисляется по формуле

$$\mathbf{G} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть система S лежит в пространстве \mathbb{R}^3 . Выберем произвольно единичный вектор \mathbf{e} и для каждой точки X_i рассмотрим вектор «силы» $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{e}$. Найдем в пространстве точку G , такую, чтобы сумма моментов сил \mathbf{F}_i , приложенных в точках X_i , относительно G равнялась нуль-вектору:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \mathbf{G}) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{G} \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \times m_i \mathbf{e} = \mathbf{G} \times \mathbf{e} \sum_{i=1}^n m_i. &\quad (2) \end{aligned}$$

В силу произвола \mathbf{e} , из равенства (2) следует формула (1). ■

12. Задача. Железная цепь скользит по прямоугольному клину. Исследовать траекторию ее центраоида.

Решение. Пусть цепь имеет единичную длину и единичную массу. В качестве клина возьмем равнобедренный треугольник ABC с основанием AB (рис. 12.1). Положим $AC = BC = 1$, $\angle ACB = 2\varphi$, $\varphi = \pi/4$. Середину O стороны AB примем за начало прямоугольной

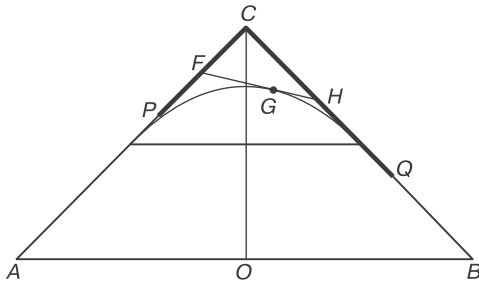


Рис. 12.1. При скольжении цепи по клину ее центроид G описывает параболу. При этом наглядно показано, что отрезок FH с концами в серединах левой и правой частей цепи касается параболы в точке G

декартовой системы координат, прямые OB и OC — за координатные оси Ox и Oy соответственно. Тогда искомая траектория есть дуга параболы $\frac{y}{\cos \varphi} = \frac{3}{4} - \frac{x^2}{\sin^2 \varphi}$, изображенной на рис. 12.1. ■

13. Задача. Железная цепь длиной 3 м скользит по сторонам квадрата со стороной 1 м. Исследовать траекторию ее центроида.

14. Задача. Разделить данный отрезок пополам.

15. Задача. На отрезке AB найти точку C , такую, что $AC = CB$.

16. Задача. Даны две точки A, B . Найти точку C , такую, что $\vec{AC} = \vec{CB}$.

17. Задача. Даны две точки A, B . Найти точку C , такую, что $\vec{AC} = \vec{CB}$.

18. Задача. Даны две точки A, B . Найти точку G , такую, что

$$\vec{GA} + \vec{GB} = 0.$$

19. Задача. Доказать, что центроид G точек A и B удовлетворяет векторному равенству $\vec{G} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$.

20. Задача. Доказать, что середина c отрезка $[a, b]$ вычисляется по формуле $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Определение. Простым отношением трех точек $a, b, c \in \mathbb{R}$ называется число $\lambda = (a, b; c) = (c - a)/(c - b)$.

21. Задача. Доказать, что если c — середина отрезка $[a, b]$, то

$$(a, b; c) = -1.$$

Читателю рекомендуется самостоятельно решить задачи 13–21.

§ 3. КОРОМЫСЛА И ЗВЁЗДЫ



Не продается вдохновенье,
Но можно рукопись продать.

А. С. Пушкин

Цель любого исследовательского поведения — комбинация следующих действий: поиск информации; уменьшение возбуждения, вызванного неопределенностью; изучение объекта, имеющее в своей основе психическую потребность в поисковой активности; изучение нестандартного объекта или разрешение нетипичной ситуации; изменение отношений организма с окружающей средой путем введения дополнительной информации в эту систему; понижение энтропии в семантическом пространстве; уменьшение хаоса; увеличение порядка; установление связей и отношений между объектами; понижение порога непонимания происходящего вокруг; производство суждений.

Исследование отличается от решения задачи тем, что первое не имеет финала, его можно продолжать до бесконечности, устанавливая все новые и новые связи и отношения объектов, выявляя их новые свойства впрок.

Человек живет в триединной вселенной:

- в реальном мире (абсолютно объективном);
- в чувственном мире (абсолютно субъективном);
- в мире идей, абстракций (объективном относительно индивида, но субъективном относительно социума),

которая представляет собой системную, целостную триаду «мир реальный — мир чувственный — мир абстрактный».

В целостной триаде нет упорядоченности. Павел Флоренский в книге «Столы и утверждение истины» [44, с. 66] пишет:

Следовательно, Истина есть **единая сущность о трех ипостасях**. Не три сущности, но одна; не одна ипостась, но три. Однако, при всем том, *ипостась и сущность — одно и то же*. Выражаясь несколько неточно, скажу: «Ипостась — абсолютная личность». Но спрашивается: «В чем же личность, как не в сущности?». И еще: «Разве дается сущность иначе как в личности?». — Да, и все-таки все предыдущее устанавливает, что не одна ипостась, а три, хотя

сущность — *конкретно* едина. И потому *нумерически*, числом — *один* Субъект Истины, а не три.

На с. 67:

«Почему же ипостасей именно три?» — спросят меня. Я говорю о числе «три» как имманентном Истине, как внутренне неотделимом от нее. Не может быть *мéньше* трех, ибо только три ипостаси извечно делают друг друга тем, что они извечно же суть. Только в единстве Трех каждая ипостась получает абсолютное утверждение, устанавливающее ее как таковую. Вне Трех нет ни одной, нет Субъекта Истины. А *бóльше* трех? — Да, может быть и больше трех, — через принятие новых ипостасей в недра Троичной жизни. Однако эти новые ипостаси уже не суть члены, на которых держится Субъект Истины, и потому не являются внутренне необходимыми для его абсолютности; они условные ипостаси, могущие быть, а могущие и не быть в Субъекте Истины. Поэтому-то их нельзя называть ипостасями в собственном смысле и лучше обозначить именем обожженных личностей и т. п. Но, кроме того, имеется еще одна сторона, доселе опущенная нами; впоследствии мы обсудим ее со тщанием, а пока заметим только: в абсолютном единстве Трех нет «порядка», нет последовательности. В трех ипостасях каждая — непосредственно рядом с каждой, и отношение двух только *мóжет* быть опосредствовано третьей. Среди них абсолютно немислимо первенство. Но всякая четвертая ипостась вносит в отношение к себе первых трех тот или иной *порядок* и, значит, *собою* ставит ипостаси в неодинаковую деятельность в отношении к себе как ипостаси четвертой. Отсюда видно, что с четвертой ипостаси начинается сущность совершенно новая, тогда как первые три были одного существа.

Другими словами. Троица может быть без четвертой ипостаси, тогда как четвертая — самостоятельности не может иметь. Таков общий смысл троичного числа.

На с. 461:

...Бесчисленные попытки дедуцировать Три-ипостась Божества мы не можем признать удачными. Утешением и назиданием философам да послужит же то, что даже числа измерений пространства, подразделений времени, лиц грамматики, членов первичной семьи, слоев жизнедеятельности человеческой, координат психики и т. д. и т. д. они не дедуцировали и даже не объяснили его смысла. Мало того. Чувствуется, что есть какая-то глубинная связь между всеми этими троичностями, но какáя — это вечно бежит от понимания, именно в тот момент, когда хочешь почти-найденную связь пригвоздить словом.

У человека исследовательская активность проявляется не столько в борьбе за выживание, сколько в творчестве [39]. Имеет ли исследовательское поведение биологические корни? Многочисленные эксперименты дали положительный ответ на этот вопрос. Но возникает законный вопрос у исследователя этого: а может, корни исследовательского поведения следует искать в неживой природе?

Исследовательская деятельность (ИД) проходит ряд *этапов* (табл. 22).

Таблица 22

Этапы исследования

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ	Образцы исследований	<i>Исследовательские проблемы в прошлом</i>
		<i>Биография исследователей</i>
		<i>Анализ их исследовательских действий</i>
	Психология исследователя	Обогащение ассоциативного ряда
		Активность конвергентного мышления
		Снижение регламентации поведения в ИД
	Исследовательские задачи	Наблюдения, поиск информации, выдвижение гипотез
		Постановка исследовательской задачи
		Пробные попытки вероятных путей решения
Построение математической модели		
ДЕЯТЕЛЬНОСТНЫЙ	Моделирование	Исследование модели
		Интерпретация полученных результатов
		<i>Условное принятие гипотез</i>
	<i>Погружение в проект</i>	<i>Освоение исследовательских умений</i>
		<i>Производство суждений</i>
		Кооперативное взаимодействие интуиции и логики
	Психология исследователя	Активность дивергентного мышления
		Инсайт, т. е. озарение
		Рефлексивный контроль
ОЦЕНОЧНЫЙ	Психология исследователя	Активность нелинейного мышления
		Переживание ситуации успеха
		Оценка гипотез
	Исследовательские задачи	Генерирование выводов
		Верификация полученных результатов
		<i>Оценка рисков</i>
	<i>Прогнозирование</i>	<i>Оценка истинности гипотез</i>
		<i>Выявление новых исследовательских проблем</i>

Из стартовой задачи посредством изменения элементов ее условия можно получить несколько новых задач, часть из которых уже решена и описана в существующей учебной или научной литературе. Относительно другой части полученных задач может оказаться неизвестным, имеются они в публикациях или нет. Но главное здесь не в том, что «изобретаются велосипеды», а в том, что, согласно нашей методике, ориентированной на составление новых задач, реализация принципов вариативности сопряжена, прежде всего, с гуманистической составляю-

щей дидактического процесса: в мышлении студентов вырабатывается привычка через творческую активность делать пусть небольшие, но открытия.

Задача 9 приводит к задаче 22, замечательной тем, что она допускает как различные способы решения, так и вариативность ее условия, рождая разнообразные новые задачи. Такую задачу мы будем называть *основной* или *ключевой*.

22. Задача. На евклидовой плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые a , b , пересекающиеся в точке O , и точка M . Провести через M прямую x , пересекающую a , b в точках A , B соответственно так, что $AM = MB$.

Решение 1. Предположим, задача решена. Тогда (рис. 22.1) M — точка пересечения диагоналей прямоугольника $OAPB$. Теперь ясно, как построить прямую x : сначала строим точку $P = Z_M(O)$, симметричную O относительно M , а затем ортогонально проектируем P на a , b ; теперь x строится как прямая, проходящая через проекции A , B .

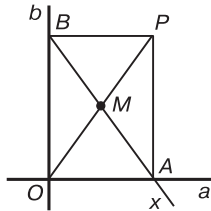


Рис. 22.1

Решение 2. Предположим, задача решена. Тогда окружность $\omega(M, r = OM)$ с центром M и радиусом OM (рис. 22.2) проходит через A , B .

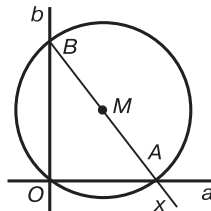


Рис. 22.2

Решение 3. Предположим, задача решена. Тогда $B = Z_M(A)$ (рис. 22.3). Поэтому B — точка пересечения прямых b и $a' = Z_M(a)$.

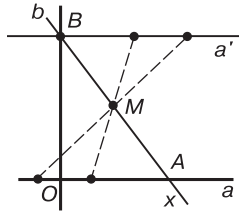


Рис. 22.3

Решение 4. Предположим, задача решена. Построим дополнительно прямую $z = OM$ и прямую $y = S_b(z)$, симметричную z относительно b (рис. 22.4). Тогда, очевидно, $x \parallel y$.

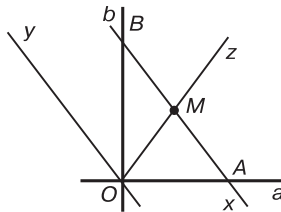


Рис. 22.4

Пусть даны четыре прямые $y = k_i x$, $i = 1..4$. По определению, двойное отношение этих четырех прямых есть число

$$(k_1, k_2; k_3, k_4) = \frac{(k_1, k_2; k_3)}{(k_1, k_2; k_4)} = \frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} : \frac{k_4 - k_1}{k_4 - k_2} = \frac{(k_3 - k_1)(k_4 - k_2)}{(k_3 - k_2)(k_4 - k_1)}. \quad (DV)$$

Четверка прямых называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1 . Легко убедиться, что четверка прямых a, b, y, x — гармоническая. Действительно, поскольку угловые коэффициенты данных прямых равны

$$k_a = 0, \quad k_b = \infty, \quad k_y = k, \quad k_x = -k,$$

то

$$(k_a, k_b; k_y, k_x) = \frac{(k - 0)(-k - \infty)}{(k - \infty)(-k - 0)} = -1.$$

Докажем следующую теорему, которая является основной теоремой проективной геометрии.

Теорема. Пусть на плоскости даны прямая g и две не принадлежащие ей точки P, Q ; и пусть $A, B, C, D \in g$ — произвольные четыре точки. Если при этом p_a, p_b, p_c, p_d — угловые коэффициенты соответственно прямых PA, PB, PC, PD , а q_a, q_b, q_c, q_d — угловые

коэффициенты соответственно прямых QA , QB , QC , QD , то $p = q$, где

$$p = (p_a, p_b; p_c, p_d), \quad q = (q_a, q_b; q_c, q_d).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что p — рациональная функция, зависящая от координат точки P . А, как известно, если рациональная функция (над полем \mathbb{C} комплексных чисел) не принимает какого-либо значения, то она постоянная. Функция p не принимает, например, значений 0 и 1; следовательно, она постоянная. ■

У. У. Соьер пишет [43, с. 135]:

Замечательно, что эта теорема была известна уже Паппу, который жил до 300 года н. э. Неизвестно, открыл Папп этот результат сам или узнал его от какого-нибудь раннего автора. Не знаем мы и хода мыслей, который привел к открытию этой теоремы. Об этом стоит очень и очень пожалеть, так как было бы чрезвычайно интересно знать, как она была открыта. Ибо это никоим образом не очевидный результат. 🔒

Решение 5. Предположим, задача решена. Проведем среднюю линию MK треугольника AOB (рис. 22.5). Тогда его медианы OM , BK пересекаются в некоторой точке G . При этом для центроида G точек A , O , B выполняется векторное равенство

$$\vec{OG} = \frac{2}{3} \vec{OM}. \tag{1}$$

Теперь ясно, как построить x : сначала строим точку G , удовлетворяющую условию (1), и точку $K \in a$, такую, что $MK \parallel b$, а затем находим B как пересечение прямых GK и b . Наконец, проводим искомую прямую $x = MB$.

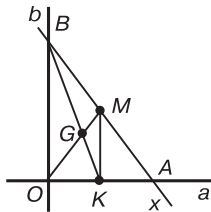


Рис. 22.5

Решение 6. Очевидно,

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}. \tag{2}$$

Выбрав прямые a , b в качестве осей аффинной системы координат (рис. 22.6) и положив $M = (m_1, m_2)$, $A = (x, 0)$, $B = (0, y)$, находим

$$\vec{MA} = (x - m_1, -m_2), \quad \vec{MB} = (-m_1, y - m_2).$$

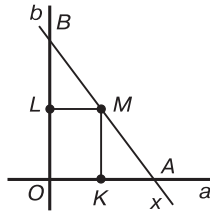


Рис. 22.6

Отсюда и из равенства (2) следует: $x = 2m_1$, $y = 2m_2$, что дает способ построения прямой x , которая имеет уравнение

$$\frac{x}{2m_1} + \frac{y}{2m_2} = 1 \Leftrightarrow m_2x + m_1y = 2m_1m_2.$$

Если K — проекция точки M на прямую a параллельно прямой b , L — проекция точки M на прямую b параллельно прямой a , то $A = Z_K(O)$, $B = Z_L(O)$.

Решение 7. Выберем прямые a, b в качестве координатных осей. Объединение $F = a \cup b$ состоит из нулей многочлена $F = x_1x_2$; F — коника, распавшаяся на прямые a, b . Искомая прямая x , согласно предыдущему решению, параллельна прямой, состоящей из нулей линейной формы $\delta = m_2x_1 + m_1x_2$. Цель нашего исследования — найти связь между алгебраическими объектами: $F, \delta, M = (m_1, m_2)$. По определению, поляра $\Delta = \Delta(F, M)$ точки $M = (m_1, m_2)$ относительно коники F есть множество нулей формы $\Delta = \frac{\partial F(m_1, m_2)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(m_1, m_2)}{\partial x_2} x_2$. Вычисления показывают, что $\Delta = \delta$. Так как $x \parallel \Delta$, то искомая прямая x есть множество нулей формы $x = m_2x_1 + m_1x_2 - 2m_1m_2$.

Решение 8. В терминах решения 7 и в несколько измененных обозначениях, если O — начало системы координат, то можно считать, что $F = a_i b_j x^i x^j$, $M = (m^1, m^2)$; $i, j = 1 \dots 2$. (Здесь и далее принимается соглашение: если один и тот же индекс встречается дважды — один раз вверху и один раз внизу, — то по нему производится суммирование. Например, $p_1 t^1 + p_2 t^2 + p_3 t^3 = \sum_{k=1}^3 p_k t^k = p_k t^k$.) Тогда

$$\Delta = a_i b_j m^i x^j, \quad x = a_i b_j m^i x^j - a_j b_i m^i x^j.$$

Решение 9. Пусть искомая прямая x пересекает несобственную прямую \mathbf{P}^1 в точке χ , а проекциями точек A, B, M из центра O на прямую \mathbf{P}^1 служат точки α, β, μ соответственно. Тогда, согласно комментарию в решении 4, $(\alpha, \beta; \mu, \chi) = -1$. Из приведенного анализа легко следует алгоритм построения точки χ , а следовательно, и прямой x .

Дано: прямая \mathbf{P}^1 , точка M , точки $\alpha, \beta, \mu \in \mathbf{P}^1$.

Найти: четвертую гармоническую точек α, β, μ , т. е. точку $\chi \in \mathbf{P}^1$, такую, что $(\alpha, \beta; \mu, \chi) = -1$, где $(\alpha, \beta; \mu, \chi) = (\alpha, \beta; \mu) / (\alpha, \beta; \chi)$.

Построение (рис. 22.9):

1) $A_1 = \beta M \cap O\alpha$, 2) $B_1 = \alpha M \cap O\beta$, 3) $\chi = A_1 B_1 \cap \mathbf{P}^1$, 4) $x = \chi M$.

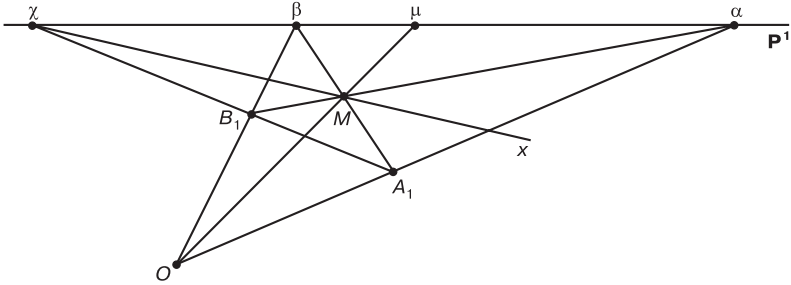


Рис. 22.9. Построение четвертой гармонической

Решение 10. Выберем a, b в качестве осей координат. Если $M = (x, y)$, то, согласно решению 6, угловой коэффициент искомой прямой равен $k = -y/x$. Тем самым на плоскости определено поле направлений, а вместе с ним семейство кривых, являющихся решениями дифференциального уравнения $y'x + y = 0$ и имеющих уравнения $y = \frac{C}{x}$ или, в более симметричной форме, $xy = C$. Через произвольную точку $M_0 = (x_0, y_0)$ проходит единственная интегральная кривая γ , определяемая уравнением $xy = x_0 y_0$. В силу гладкости кривой γ , искомая прямая строится однозначно как касательная к γ в точке M_0 (рис. 22.10).

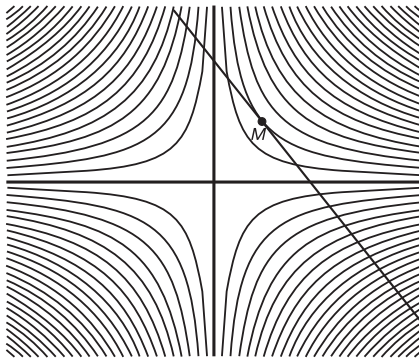


Рис. 22.10. Искомая прямая касается интегральной кривой дифференциального уравнения $y'x + y = 0$

Решение 11. Обратимся к рис. 22.4. Пусть прямая z составляет с прямыми a , b ориентированные углы α , β соответственно. При повороте вокруг O на угол α получаем соответствие $z \mapsto a \mapsto y$, а при повороте на угол β — соответствие $z \mapsto b \mapsto y$. ■

Решение 12. Предположим, задача решена и построены точки A и B , такие, что $AM = MB$. Тогда равны площади треугольников OMA , OMB . Вообразим, что в эти треугольники закачали равное количество «плоского» газа. Тогда давление на отрезок AM будет равно давлению на отрезок MB . Повернув прямую x вокруг M на небольшой угол, мы выведем систему из равновесия. Пусть, для определенности, AM меньше BM . Поскольку площадь треугольника OMA меньше площади треугольника OMB , давление газа на стороны первого треугольника будет больше, чем давление газа на стороны второго треугольника. Разность давлений приводит к вращению прямой x вокруг M и, как следствие, к выравниванию давлений в треугольниках. Вращение останавливается, когда давления в обоих треугольниках становятся равными. ■

☞ Отказавшись в предыдущей задаче от условия $a \perp b$, мы получаем задачу 23, несколько отличающуюся от задачи 22. Это различие есть следствие того, что прямые a , b не являются перпендикулярными. Стало быть, не любое из решений задачи 22 применимо в измененной задаче. Дело в том, что задача 23 носит аффинный характер, поэтому метрические методы не годятся для ее решения: в качестве решений задачи 23 можно принять решения 3, 5–10, 12 задачи 22. ☞

23. Задача. На евклидовой плоскости даны две прямые a , b и точка M . Провести через M прямую x , пересекающую a , b в точках A , B соответственно так, что $AM = MB$.

Орлу парить высоко без крыл нельзя.

А. Н. Островский

24. Задача. Даны окружность ω и две прямые a , b . Найти на ω точку M , такую, что касательная $t = t(\omega, M)$ к ω в точке M пересекает a , b в точках A , B , причем M — середина отрезка AB , т. е. $AM = MB$.

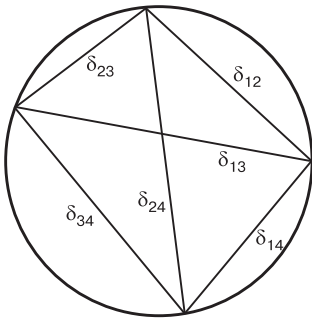
☞ Всегда занятно и поучительно наблюдать, как происходит метаморфоза задачи. Переход от задачи 23 к задаче 24 обусловлен заменой: точка \mapsto окружность.

Мы модифицировали в задаче 23 только один объект: точку заменили окружностью. Такой прием часто встречается в геометрии. Например,

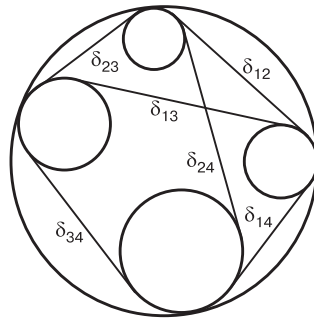
если в теореме Птолемея, которая гласит: «У четырехугольника, вписанного в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон», заменить вершины четырехугольника на окружности любых радиусов, — даже отрицательных! — то получится теорема Кэзи, которая звучит так: «Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ — окружности, которые касаются внутренним образом данной окружности, δ_{pq} ($p, q = 1..4$) — отрезок прямой, касающейся окружностей ω_p, ω_q внешним образом. Тогда $\delta_{12}\delta_{34} + \delta_{14}\delta_{23} = \delta_{13}\delta_{24}$ » (рис. 24.1).

См.: <http://www.mccme.ru/ask/qa/ptolemy.html>

http://www.gogeometry.com/equilic/casey_theorem_generalized_ptolemy.htm



Теорема Птолемея



Теорема Кэзи (Caesy)

Рис. 24.1. В обоих теоремах $\delta_{12}\delta_{34} + \delta_{14}\delta_{23} = \delta_{13}\delta_{24}$

Решение. Сначала рассмотрим специальный случай, когда прямые a, b являются диагоналями квадрата, а ω вписана в квадрат. Тогда, очевидно, стороны квадрата являются решениями задачи. Самое важное, что мы должны вынести из исследования этой очень специальной ситуации, это то, что задача имеет, по крайней мере, четыре решения, а не одно, как задача 22.

Найдем степень кривой γ , которая устроена следующим образом. Даны прямая a с уравнением $y = 0$ и окружность $\omega = \omega(H, R)$ с центром H и радиусом R , заданная параметрическими уравнениями

$$x = R \cos \varphi, \quad y = h + R \sin \varphi.$$

Пусть $P \in \omega$ — произвольная точка, t — касательная к ω в P , $A = t \cap a$. Точке P сопоставим точку $Q \in t$, такую, что P — середина отрезка AQ . Когда P пробежит окружность ω , Q опишет кривую γ . Нетрудно найти параметрические уравнения кривой γ :

$$x = R \cos \varphi + (h + R \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi, \quad y = 2(h + R \sin \varphi).$$

Исключая из этих уравнений параметр φ , легко видеть, что степень кривой γ равна $\deg \gamma = 4$. Поскольку в общем случае прямая b пересекает γ 4 раза, на ω имеются 4 точки, удовлетворяющие условию задачи. ■

Определение. Пусть даны три кривые f , g и γ . *Коромыслом кривой γ* назовем отрезок AB с концами на f , g , который своей серединой M касается кривой γ , при этом $A \in f$, $B \in g$. Обозначение: $[f\gamma g]$.

В терминах данного определения задача 24 может быть сформулирована в виде задачи 25.

25. Задача. Найти коромысло данной окружности с концами на двух данных прямых.

☞ **Специализации.** Они бывают порой важнее общей теоремы. Так, теорема Пифагора — специальный случай теоремы косинусов, — пожалуй, более значимый факт, нежели теорема косинусов. При этом заметим, что в теореме косинусов имеется непрерывный параметр — угол треугольника. Следовательно, однофакторные специализации являются точками числовой прямой, искать их достаточно просто. А вот если имеется несколько параметров, то перед исследователем стоит непростая задача: как в стоге сена найти хоть какую-нибудь да иголку. Взять хотя бы наш случай. Число параметров системы, состоящей из пары прямых a , b и окружности ω , можно подсчитать двумя способами.

1-й способ. В подходящей прямоугольной декартовой системе координат окружность ω имеет уравнение $x^2 + y^2 = 1$, прямые a , b — соответственно уравнения $y = p$, $y = kx + q$. Следовательно, специализация — это точка $C(k, p, q)$ трехмерного пространства.

2-й способ. На плоскости прямая имеет два параметра, а окружность — три: $2+2+3 = 7$; следовательно, всего имеется 7-параметрическое семейство систем. Но в евклидовой плоскости действует 4-параметрическая группа подобий (подобие общего вида задается центром подобия — 2 параметра, коэффициентом подобия — 1 параметр, и углом поворота — 1 параметр). Следовательно, множество систем указанного вида 3-мерное: $7 - 4 = 3$.

Трудно, конечно, найти что-то интересное, бесцельно двигая точку $C(k, p, q)$ по пространству. Здесь невозможно дать общие рекомендации. Остается надеяться на опыт исследователя, на его целеустремленность, продиктованную практикой, и — что немаловажно в творческих делах — на чувство красоты. Ниже предлагаются некоторые специальные случаи взаимного расположения окружности и двух прямых. Предлагаем читателю самостоятельно найти решения этих задач и постараться самим попробовать себя в качестве искателя специализаций. Удачи! ☞

26. Задача. Даны окружность ω , проходящая через ее центр O прямая a и касательная b к ω в точке M (рис. 26.1). Найти коромысло $l = [a\omega b]$ к ω с концами $A \in a$ и $B \in b$, а также доказать, что:

- (1) построение коромысла l невозможно циркулем и линейкой;
- (2) существуют три коромысла $l_i = [A_i C_i B_i]$ к ω , $i = 0, 1, 2$;
- (3) $C_0 C_1 C_2$ — правильный треугольник;
- (4) центроидом точек B_0, B_1, B_2 является точка $K = a \cap b$;
- (5) если ω — единичная окружность комплексной плоскости \mathbb{C} , M — комплексное число, K — положительное число, то $C_i = \sqrt{M}$.

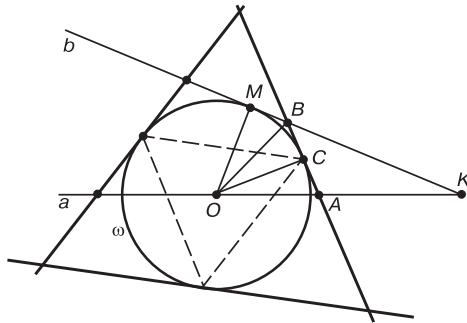


Рис. 26.1

27. Задача. Прямые a, b пересекаются под прямым углом в точке K , принадлежащей окружности ω (рис. 27.1). Найти коромысло $l = [a\omega b]$ к ω с концами $A \in a$ и $B \in b$, а также доказать, что:

- (1) построение коромысла l невозможно циркулем и линейкой;
- (2) существуют три коромысла $l_i = [A_i C_i B_i]$ к ω , $i = 0, 1, 2$;
- (3) $C_0 C_1 C_2$ — правильный треугольник;
- (4) центроид точек A_0, A_1, A_2 принадлежит ω ;
- (5) центроид точек B_0, B_1, B_2 принадлежит ω .

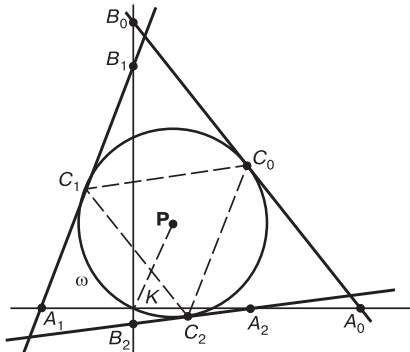


Рис. 27.1

28. Задача. Прямая a касается окружности ω в точке K , прямая b содержит K . Построить коромысло к ω с концами на a, b .

29. Задача. Прямая a касается эллипса γ в точке K , прямая b содержит K . Построить коромысло к γ с концами на a, b .

30. Задача. Прямая a касается эллипса γ в точке K , прямая b проходит через K перпендикулярно γ . Построить коромысло к γ с концами на a, b .

31. Задача. Прямая a касается параболы γ в точке K , прямая b содержит K . Построить коромысло к γ с концами на a, b .

32. Задача. В пространстве (евклидовом, аффинном, римановом, Лобачевского) даны две фигуры a, b и точка M . Найти точки $A \in a, B \in b$, такие, что $B = Z_M(A)$ (рис. 32.1).

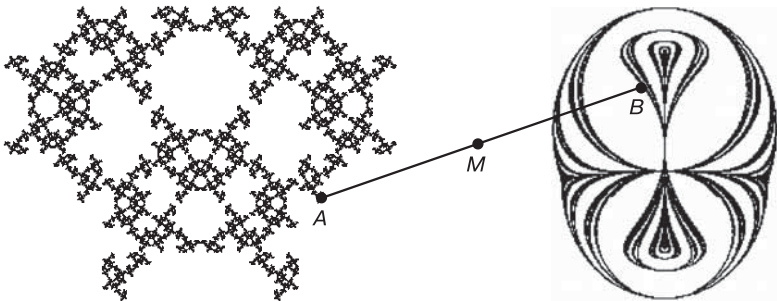


Рис. 32.1

33. Задача. На аффинной плоскости даны три попарно пересекающиеся прямые a_1, a_2, a_3 и точка M . Провести через M прямую t , пересекающую a_k в точке A_k , так, что M является центроидом точек A_1, A_2, A_3 , т. е. $\vec{MA}_1 + \vec{MA}_2 + \vec{MA}_3 = \vec{0}$.

Решение. Задача носит аффинный характер, поэтому в качестве данных прямых можно взять стороны правильного треугольника на евклидовой плоскости. Пусть в подходящем базисе прямые a_1, a_2, a_3 являются нулями соответственно форм

$$a_1 = 2y - 1, \quad a_2 = y - \sqrt{3}x + 1, \quad a_3 = y + \sqrt{3}x + 1$$

и пусть $M = (x_0, y_0)$. Тогда центроид точек пересечения треугольника $F = a_1 \cup a_2 \cup a_3$ с прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$, проходящей через M ,

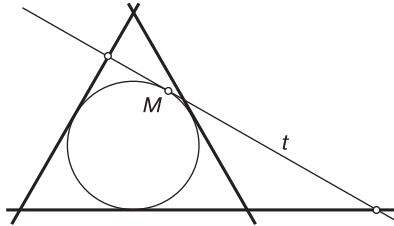


Рис. 33.1

совпадает с M тогда и только тогда, когда угловой коэффициент k прямой t удовлетворяет квадратному уравнению

$$(2y_0 - 1)k^2 - 4x_0k - (2y_0 + 1) = 0.$$

Нули дискриминанта $D = 16 \left(x_0^2 + y_0^2 - \frac{1}{4} \right)$ суть точки окружности $\omega \left(O, r = \frac{1}{2} \right)$, вписанной в F . С аффинной точки зрения, кривая ω определяется как коника, касающаяся сторон треугольника F в их серединах, и называется *коникой Штейнера*. Если $M \in \omega$, то через M проходит единственная прямая t , касающаяся ω (рис. 33.1). Если M находится вне ω , то таких прямых можно провести две. Если M окажется внутри ω , то t не существует. ■

34. Задача. Окружность проходит через вершину прямого угла прямоугольного треугольника ABC и, касаясь гипотенузы AB в ее середине D , пересекает один из катетов в точке E . Доказать, что для дуги CDE выполняется равенство $CD = 2DE$.

Определение. Будем называть n -звездой (или просто *звездой*) с центром в точке M конечное множество Z_M^n из n прямых евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , проходящих через M и делящих \mathbb{R}^2 на $2n$ равных углов; прямые, из которых состоит звезда, будем называть ее *лучами*.

35. Задача. Найти условие того, что две прямые с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 составляют 2-звезду.

Ответ. $k_1k_2 = -1$.

36. Задача. Найти условия того, что 3 прямые с угловыми коэффициентами k_1, k_2, k_3 составляют 3-звезду.

Ответ. $k_1 + k_2 + k_3 = -3k_1k_2k_3$,
 $k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2 = -3$.

37. Задача. Найти условия того, что 4 прямые с угловыми коэффициентами k_1, k_2, k_3, k_4 составляют 4-звезду.

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_2k_3k_4 + k_3k_4k_1 + k_4k_1k_2 + k_1k_2k_3 &= 0, \\ k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4 &= -6, \\ k_1k_2k_3k_4 &= 1. \end{aligned}$$

Вдохновение нужно в геометрии,
как и в поэзии.

А. С. Пушкин

38. Задача. Найти условия того, что n прямых с угловыми коэффициентами $k_i, i = 1..n$, составляют n -звезду.

☞ Решение этой задачи может быть найдено, очевидно, после переосмысления понятия углового коэффициента прямой и введения принципиально новых обозначений. ☹

Решение. Вернемся к задачам 35–37, переписав ответы в новых обозначениях, которые мы сейчас рассмотрим.

Мотивация: неудобные обозначения. Пусть \mathbf{P}^1 — множество всех прямых плоскости, проходящих через начало координат. Как известно из аналитической геометрии, общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0.$$

Если же прямая $a_1 \in \mathbf{P}^1$, то $C = 0$, и тогда она имеет уравнение

$$Ax + By = 0. \quad (1)$$

Возьмем еще одну прямую $a_2 \in \mathbf{P}^1$ с уравнением

$$Cx + Dy = 0$$

и рассмотрим кривую γ степени 2, которая распадается на прямые a_1, a_2 : $\gamma = a_1 \cup a_2$. Кривая γ имеет уравнение

$$(Ax + By)(Cx + Dy) = 0,$$

или

$$ACx^2 + (AD + BC)xy + BDy^2 = 0,$$

или $\Delta = 0$, где

$$\Delta = ACx^2 + (AD + BC)xy + BDy^2. \quad (2)$$

Такие обозначения не очень удобны. Так, если взять, например, три прямые $a_i \in \mathbf{P}^1, i = 1..3$, то их объединение есть кривая степени 3

с уравнением $\Delta = 0$, причем форма Δ будет еще сложнее, чем в формуле (2):

$$\Delta = (A_1x + B_1y)(A_2x + B_2y)(A_3x + B_3y),$$

или

$$\begin{aligned} \Delta = & A_1A_2A_3x^3 + (A_1A_2B_3 + A_1B_2A_3 + B_1A_2A_3)x^2y + \\ & + (A_1B_2B_3 + B_1A_2B_3 + B_1B_2A_3)xy^2 + B_1B_2B_3y^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Изменим обозначения. Перепишем уравнение (1), положив $x = \pi_0$, $y = \pi_1$, $A = \alpha^0$, $B = \alpha^1$:

$$\alpha^0 \pi_0 + \alpha^1 \pi_1 = 0.$$

Тогда прямая a есть множество нулей формы

$$\Delta = \alpha^i \pi_i \quad (4)$$

первой степени относительно переменных π_i .

Примем соглашение. Как мы условились в решении 8 задачи 22, в формуле (4) производится суммирование по повторяющемуся (один раз вверху и один раз внизу) индексу. Форму (4) можно записать одним из следующих равносильных способов:

$$\Delta = \alpha^i \pi_i = \sum_{i=0}^1 \alpha^i \pi_i = \alpha^0 \pi_0 + \alpha^1 \pi_1.$$

Сравним с прежними записями. Форма (2) примет вид

$$\Delta = (\alpha_1^A \pi_A)(\alpha_2^B \pi_B), \quad A, B \in \{0, 1\},$$

или

$$\Delta = \alpha_1^A \alpha_2^B \pi_A \pi_B = \alpha_1^0 \alpha_2^0 \pi_0 \pi_0 + \alpha_1^0 \alpha_2^1 \pi_0 \pi_1 + \alpha_1^1 \alpha_2^0 \pi_0 \pi_1 + \alpha_1^1 \alpha_2^1 \pi_1 \pi_1,$$

или, используя

понятие тензора,

$$\Delta = \alpha_1^{(A} \alpha_2^{B)} \pi_A \pi_B, \quad (5)$$

где $\alpha_1^{(A} \alpha_2^{B)}$ — так называемый тензор, являющийся симметризацией тензора $\alpha_1^A \alpha_2^B$:

$$\alpha_1^{(A} \alpha_2^{B)} = \frac{1}{2} (\alpha_1^A \alpha_2^B + \alpha_1^B \alpha_2^A). \quad (6)$$

Теперь выясним, как запишется форма (3), при этом естественнее перейти (как бы это сказать проще?) от безындексных индексов A, B, C к индексам с индексом — $A_1, A_2, A_3 \in \{0, 1\}$:

$$\Delta = (\alpha_1^{A_1} \pi_{A_1})(\alpha_2^{A_2} \pi_{A_2})(\alpha_3^{A_3} \pi_{A_3}),$$

или

$$\Delta = \alpha_1^{(A_1)} \alpha_2^{(A_2)} \alpha_3^{(A_3)} \pi_{A_1} \pi_{A_2} \pi_{A_3}. \quad (7)$$

Здесь снова тензор $\alpha_1^{(A_1)} \alpha_2^{(A_2)} \alpha_3^{(A_3)}$ является симметризацией тензора $\alpha_1^{A_1} \alpha_2^{A_2} \alpha_3^{A_3}$:

$$\alpha_1^{(A_1)} \alpha_2^{(A_2)} \alpha_3^{(A_3)} = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma} \alpha_1^{A_{\sigma(1)}} \alpha_2^{A_{\sigma(2)}} \alpha_3^{A_{\sigma(3)}}, \quad (8)$$

где σ — множество (в данном случае — группа) всех перестановок элементов множества $I_3 = \{1, 2, 3\}$.

Упражнения желательны. Рекомендуем читателю поупражняться в записи новых обозначений; например, развернуть выражения (5), (7), (8) в обычные суммы.

Поиск закономерности. Угловой коэффициент прямой (1) равен $k = -A/B$, а с учетом принятых нами обозначений $k = -\alpha^0 : \alpha^1$, при этом либо число α^0 , либо число α^1 , либо оба числа отличны от нуля. В случае двух прямых многочлен (2) выразится через угловые коэффициенты следующим образом (с точностью до ненулевого числового множителя):

$$\Delta = k_1 k_2 x^2 - (k_1 + k_2) x y + 1.$$

Согласно задаче 35, $a_1 \perp a_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 + 1 = 0$. Отсюда и из формулы (9) следует

$$\alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} + \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} = 0. \quad (9)$$

Аналогично, анализируя результаты задачи 36 и форму (7), замечаем, что

$$\alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \alpha_3^{(0)} + \alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} = 0, \quad \alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \alpha_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} = 0. \quad (10)$$

Формулы (9), (10) могут привести к догадке, даже не к догадке, а к миражу, в котором могут быть подмечены зыбкие контуры некоей эфемерной идеи, неясной гипотезы, зародыша инсайта; и это озарение может выкристаллизоваться уже в задаче 37:

$$\alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \alpha_3^{(0)} \alpha_4^{(0)} + \alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(1)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \alpha_3^{(0)} \alpha_4^{(1)} + \alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(1)} = 0, \quad (11)$$

$$\alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(1)} = 0.$$

Гипотеза. Самое трудное для рождения кристалла-гипотезы сделано: подмечена некая закономерность для начальных значений $n \in \{2, 3, 4\}$. Осталось подобрать приемлемую форму записи условий того, что при конкретном $n \in \mathbb{N}$ данные n прямых, проходящих через начало координат, образуют n -звезду. После некоторых попыток можно остановиться на следующем варианте:

$$\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \dots \alpha_k^{(1)} \alpha_{k+1}^{(0)} \dots \alpha_n^{(0)} + \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \dots \alpha_{k+2}^{(1)} \alpha_{k+3}^{(0)} \dots \alpha_n^{(0)} = 0, \quad (12)$$

где $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Условия (12) можно записать в более короткой форме. Для этого положим $\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \dots \alpha_k^{(1)} \alpha_{k+1}^{(0)} \dots \alpha_n^{(0)} = f_k$. Тогда условия (12) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1 = f_3 = \dots = f_{n-1}, f_2 = f_4 = \dots = f_n &\text{— для четных } n, \\ f_2 = f_4 = \dots = f_{n-1}, f_1 = f_3 = \dots = f_n &\text{— для нечетных } n. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

39. Задача. Пусть $X = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ — четверка диагоналей куба; $g : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^3$ — отображение множества Π всех плоскостей евклидова пространства \mathbb{R}^3 на множество всех его точек, определяемое тем, что всякой плоскости $\alpha \in \Pi$ ставится в соответствие центроид $g(\alpha) \in \mathbb{R}^3$ точек пересечения $\alpha \cap X$. Доказать, что полный прообраз $g^{-1}(M)$ произвольной точки $M \in \mathbb{R}^3$ состоит из трех попарно перпендикулярных плоскостей.

Решение. Сформулируем следующее

Определение. *Опорным отображением относительно кривой X называется отображение*

$$f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

сопоставляющее плоскости α центроид G точек пересечения $\alpha \cap X$ плоскости α с кривой X ; при этом G будем называть *опорой* плоскости α относительно X .

☛ Вопрос о нахождении полного прообраза $f^{-1}(M)$ произвольной точки M при опорном отображении (1) является, вообще говоря, достаточно трудным. Даже в случае алгебраической кривой степени n неясно, сколько плоскостей содержит $f^{-1}(M)$. В простейшем случае, когда X — кривая, распавшаяся на 3 некомпланарные прямые, проходящие через одну точку, легко доказать, что $f^{-1}(M)$ состоит из единственной плоскости. Если же X распадается на 4 выходящие из одной точки прямые, то, как показано ниже, $f^{-1}(M)$ состоит из трех плоскостей. ☛

Диагонали куба. Пусть $X = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ — четверка прямых общего положения (т. е. среди них нет компланарной тройки прямых) центральной связки прямых. Из школьного курса геометрии известно,

что существует параллелепипед, четверкой диагоналей которого является X . Поэтому, не нарушая общности, можно в качестве X взять четверку диагоналей куба, вершины которого в подходящем репере имеют координаты $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. При этом диагонали определяются параметрически обычным образом:

$$l_0 = \{(t, t, t) | t \in \mathbb{R}\}, \quad l_1 = \{(-t, t, t) | t \in \mathbb{R}\}, \\ l_2 = \{(t, -t, t) | t \in \mathbb{R}\}, \quad l_3 = \{(t, t, -t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Опора плоскости. Найдем координаты g_1, g_2, g_3 опоры $G = f(\pi)$ произвольной плоскости π , определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, которое (при $D \neq 0$) равносильно уравнению $ax + by + cz + 1 = 0$. Для этого введем следующие обозначения:

$$2p = a + b + c, \quad F = 16p(p - a)(p - b)(p - c), \\ \alpha = -a^2 + b^2 + c^2, \quad \beta = a^2 - b^2 + c^2, \quad \gamma = a^2 + b^2 - c^2, \\ \sigma_1 = a + b + c, \quad \sigma_2 = bc + ca + ab, \quad \sigma_3 = abc.$$

(Непонятно, почему вдруг зазвучали здесь героновские мотивы!) Пусть плоскость π пересекает прямую l_i в точке A_i , $i = 0..3$, причем

$$A_0 = \left(-\frac{1}{2p}, -\frac{1}{2p}, -\frac{1}{2p}\right), \\ A_1 = \left(\frac{1}{2(p-a)}, -\frac{1}{2(p-a)}, -\frac{1}{2(p-a)}\right), \\ A_2 = \left(-\frac{1}{2(p-b)}, \frac{1}{2(p-b)}, -\frac{1}{2(p-b)}\right), \\ A_3 = \left(-\frac{1}{2(p-c)}, -\frac{1}{2(p-c)}, \frac{1}{2(p-c)}\right).$$

Теперь найдем опору G плоскости π :

$$G = (g_1, g_2, g_3) = \frac{1}{4} (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) = \\ = \left(-\frac{1}{4F} \frac{\partial F}{\partial a}, -\frac{1}{4F} \frac{\partial F}{\partial b}, -\frac{1}{4F} \frac{\partial F}{\partial c}\right) = \left(-\frac{a\alpha}{F}, -\frac{b\beta}{F}, -\frac{c\gamma}{F}\right). \quad (2)$$

Покажем, например, что $g_1 = -\frac{a\alpha}{F}$. Действительно,

$$g_1 = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2p} + \frac{1}{2(p-a)} - \frac{1}{2(p-b)} - \frac{1}{2(p-c)}\right) = \\ = \frac{2}{F} (-p^3 + \sigma_1 p^2 - \sigma_2 p + \sigma_3 + p(-p^2 + 2ap + bc - ca - ab)) = \\ = \frac{2}{F} (p(a^2 - ab - ac) + abc) = \frac{a}{F} ((a + b + c)(a - b - c) + 2bc) = -\frac{a\alpha}{F}.$$

Попутно заметим, что $\frac{1}{4} \frac{\partial F}{\partial a} = a\alpha$, $\frac{1}{4} \frac{\partial F}{\partial b} = b\beta$, $\frac{1}{4} \frac{\partial F}{\partial c} = c\gamma$; кроме того, так как $\deg F = 4$, то $a \frac{\partial F}{\partial a} + b \frac{\partial F}{\partial b} + c \frac{\partial F}{\partial c} \equiv 4F$. Следовательно,

$$F = a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma.$$

Переход к проективной плоскости. Из формулы (2) следует, что

$$g_1 : g_2 : g_3 = \frac{\partial F}{\partial a} : \frac{\partial F}{\partial b} : \frac{\partial F}{\partial c},$$

или

$$g_1 : g_2 : g_3 = a\alpha : b\beta : c\gamma. \quad (3)$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения отображения

$$\bar{f} : \mathbf{P}^{2*} \rightarrow \mathbf{P}^2$$

двойственной плоскости \mathbf{P}^{2*} на проективную плоскость \mathbf{P}^2 : произвольной прямой $\bar{\pi} \in \mathbf{P}^{2*}$ с координатами $(a : b : c)$ сопоставляется точка $\bar{G} \in \mathbf{P}^2$ с координатами $(g_1 : g_2 : g_3)$. Четверка прямых l_i определяет в \mathbf{P}^2 полный четырехвершинник L , а в двойственной плоскости \mathbf{P}^{2*} — полный четырехсторонник L^* с шестью вершинами $M_{ij} = l_i \cap l_j$, $i, j = 0..3$. Три кривые степени 3 в \mathbf{P}^{2*} с уравнениями

$$c\gamma g_2 - b\beta g_3 = 0, \quad a\alpha g_3 - c\gamma g_1 = 0, \quad b\beta g_1 - a\alpha g_2 = 0,$$

вытекающими из уравнений (3), принадлежат, очевидно, одному пучку кубик с девятью базисными точками, шесть из которых совпадают с точками M_{ij} . Оставшиеся три точки π_1, π_2, π_3 из этих девяти образуют полный прообраз точки $\bar{G} \in \mathbf{P}^2$ в отображении \bar{f} . Это означает, что точка G является опорой трех плоскостей относительно X .

● Гипотеза о взаимной перпендикулярности опорных плоскостей.

Каково взаимное расположение плоскостей π_1, π_2, π_3 ? Мы можем предположить, исходя из симметричности куба и, следовательно, четверки X его диагоналей, что плоскости π_1, π_2, π_3 также обладают некоторой симметрией, простейшая из которых возникает в случае взаимной перпендикулярности этих плоскостей. Это (достаточно смелое) предположение подтверждают следующие примеры.

Пример 1. Если

$$\pi_1 = ax + by + 1, \quad \pi_2 = -bx + ay + hz + 1, \quad \pi_3 = -bx + ay - hz + 1,$$

где $h = \sqrt{a^2 + b^2}$, то плоскости π_1, π_2, π_3 взаимно ортогональны, а их опорой является, как легко проверить, точка


$$G = \left(\frac{-a}{a^2 - b^2}, \frac{b}{a^2 - b^2}, 0 \right).$$

Пример 2. Точка $G = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, 0\right)$ — опора плоскостей

$$\pi_1 = 3x + 4y + 5z + 1, \pi_2 = 3x + 4y - 5z + 1, \pi_3 = 4x - 3y + \frac{7}{24}.$$

Пример 3. Точка $G = (0, 0, 1)$ — опора плоскостей

$$\pi_1 = z - 1, \quad \pi_2 = x + y, \quad \pi_3 = x - y.$$

Сначала возникла неясная идея в виде теоремы, затем интуиция стала искать опору в примерах 1–3. Они подтвердили, что в частных случаях теорема оказалась верной. После этого мысль перетекла в логическую плоскость и — с некоторыми приключениями по ходу доказательства — поставила точку в следующей теореме. 

Теорема. Если точка является опорой трех плоскостей относительно диагоналей куба, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Пусть $\pi_1 = ax + by + cz + 1$ — произвольная плоскость с опорой $G = (g_1, g_2, g_3)$, определяемой равенством (2). Проведем через G две плоскости π_2^0, π_3^0 , перпендикулярные π_1 :

$$\begin{aligned} \pi_2^0 &= \left\{ (x, y) \mid \frac{x - g_1}{a} = \frac{y - g_2}{b} \quad \text{или} \quad bx - ay + ab(\beta - \alpha)/F = 0 \right\}, \\ \pi_3^0 &= \left\{ (x, y) \mid \frac{x - g_1}{a} = \frac{z - g_3}{c} \quad \text{или} \quad cx - az + ac(\gamma - \alpha)/F = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Плоскость $\pi(t)$ пучка s плоскостей, содержащего π_2^0, π_3^0 , имеет уравнение

$$(bt + c)x - aty - az + a(bt(\beta - \alpha) + c(\gamma - \alpha))/F = 0.$$

Найдем те значения параметра t , при которых опора G_t плоскости $\pi(t)$ совпадает с G (если такое совпадение возможно):

$$G_t = G \Leftrightarrow \begin{cases} (bt + c)(-(bt + c)^2 + a^2t^2 + a^2) = \rho g_1, \\ at(-(bt + c)^2 + a^2t^2 - a^2) = \rho g_2, \\ -a((bt + c)^2 + a^2t^2 - a^2) = \rho g_3, \end{cases} \quad (4)$$

где g_i удовлетворяют уравнениям (3), ρ — ненулевой множитель. Умножим первое уравнение из (4) на a , второе — на $-b$ и сложим их. После упрощения получим

$$a(c(a^2 - b^2)t^2 + 2b(a^2 - b^2)t + c(a^2 - c^2)) = \rho(ag_1 - bg_2). \quad (5)$$

Исключив множитель ρ из третьего уравнения системы (4) и из уравнения (5), получим квадратное относительно t уравнение

$$\frac{c(a^2 - b^2)t^2 + 2b(a^2 - b^2)t + c(a^2 - c^2)}{(a^2 + b^2)t^2 + 2bct - (a^2 - c^2)} = \frac{ag_1 - bg_2}{-g_3},$$

равносильное (с учетом равенства $\frac{ag_1 - bg_2}{-g_3} = \frac{a^2 - b^2}{c}$, следующего из (3)) уравнению

$$\gamma(a^2 - b^2)t^2 + 2bc(c^2 - b^2)t - (a^2 - c^2)\beta = 0, \quad (6)$$

корни t_2, t_3 которого удовлетворяют теореме Виета:

$$t_2 t_3 = \frac{(a^2 - c^2)\beta}{(b^2 - a^2)\gamma}, \quad t_2 + t_3 = \frac{2bc(c^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)\gamma}. \quad (7)$$

Этим корням соответствуют плоскости $\pi_2 = \pi(t_2)$ и $\pi_3 = \pi(t_3)$, ортогональные π_1 . Для доказательства того, что $\pi_2 \perp \pi_3$, достаточно доказать, что скалярное произведение векторов-нормалей к π_2, π_3 равно нулю:

$$(bt_2 + c)(bt_3 + c) + a^2 t_2 t_3 + a^2 = 0,$$

или

$$(a^2 + b^2)t_2 t_3 + bc(t_2 + t_3) + (a^2 + c^2) = 0. \quad (8)$$

Покажем с помощью соотношений (7), что равенство (8) выполняется тождественно:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \frac{(a^2 - c^2)\beta}{(b^2 - a^2)\gamma} + \frac{2b^2 c^2 (c^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)\gamma} + (a^2 + c^2) &= 0 \Leftrightarrow \\ (a^2 + b^2)(a^2 - c^2)\beta + 2b^2 c^2 (c^2 - b^2) + (a^2 + c^2)(b^2 - a^2)\gamma &= 0 \Leftrightarrow \\ (a^2 + b^2)(a^2 - c^2)\beta + b^2 c^2 (\beta - \gamma) + (a^2 + c^2)(b^2 - a^2)\gamma &= 0 \Leftrightarrow \\ ((a^2 + b^2)(a^2 - c^2) + b^2 c^2)\beta + ((a^2 + c^2)(b^2 - a^2) - b^2 c^2)\gamma &= 0 \Leftrightarrow \\ a^2(a^2 + b^2 - c^2)\beta + a^2(-a^2 + b^2 + c^2)\gamma &= 0 \Leftrightarrow \gamma\beta - \beta\gamma = 0. \end{aligned}$$

■

40. Задача. Найти центр масс системы трех материальных точек единичной массы, расположенных в вершинах треугольника.

Ответ. Точка пересечения медиан.

41. Задача. Найти центр масс однородного стержня, изогнутого в форме треугольника.

Вопрос. Точка пересечения медиан?

42. Задача. Найти центр масс треугольной пластины.

Ответ. Точка пересечения медиан.

43. Задача. В полуплоскости с границей b даны две точки L и K . Найти такую точку $M \in b$, чтобы длина ломаной LMK была наименьшей.

Решение 1 (геометрическое). Предположим, задача решена, точка M найдена (рис. 43.1). Сделаем дополнительное построение, отметив точку L' , симметричную L относительно b . Тогда

$$LM + MK = L'M + MK,$$

а сумма $L'M + MK$ будет минимальной, если $M \in L'K$. Решение M — единственное.

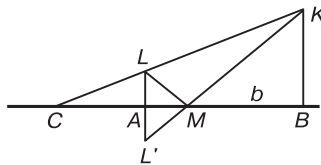


Рис. 43.1

Решение 2 (аналитическое). Примем b за ось абсцисс и положим $L = (0, 1)$, $K = (p, q)$, $p, q > 0$, $M = (x, 0)$. Тогда длина ломаной LMK есть функция $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(p-x)^2+q^2}$. Так как M — точка минимума функции f , то

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+q^2}} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2((p-x)^2+q^2) = (p-x)^2(1+x^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2(p-x)^2 + x^2q^2 = (p-x)^2 + x^2(p-x)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{p-x}{q}, \tag{1}$$

$$x = \frac{p}{1+q}. \tag{2}$$

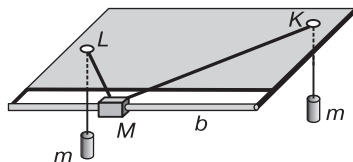


Рис. 43.2

Решение 3 (механическое). Пусть ползун M скользит без трения по штанге b (рис. 43.2). Грузы одинаковой массы m посредством нитей, прикрепленных к ползуну и продетых в отверстия L и K , тянут ползун с равными по модулю силами \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 (рис. 43.3), направленными вдоль нитей ML и MK . С механической точки зрения ясно, что система из двух грузов и ползуна будет в равновесии, если проекция силы $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ на штангу будет нулевой.

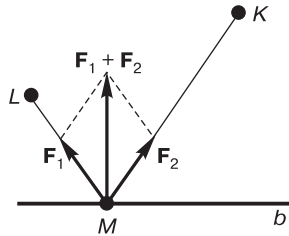


Рис. 43.3

Решение 4 (проективное). Пусть A, B — проекции соответственно точек L и K на b , $C = b \cap KL$ (рис. 43.1). Тогда $(A, B; C, M) = -1$. Действительно,

$$(A, B; C, M) = \frac{(A, B; C)}{(A, B; M)} = \frac{AC}{BC} : \frac{-AM}{BM} = -\frac{AL}{BK} : \frac{AL'}{BK} = -1.$$

Решение 5 (средствами MathCAD). Используем функцию $f(x)$ из решения 2. Тогда для конкретных p, q получаем решение в виде числа z (рис. 43.4). ■

$p := 5 \quad q := 3 \quad f(x) := \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{(p - x)^2 + q^2}$ $x := 0,1 \quad \text{Given } f(x) = 0,01 \quad z := \text{Minerr}(x) \quad z = 1,25$

Рис. 43.4

☞ Задача 22 замечательна тем, что она простая по формулировке и допускает вариации, которые приводят к новым задачам. Применим прием под названием «аналогия». В данном случае в качестве аналогии рассмотрим двойственную задачу.


В евклидовой геометрии имеются параллельные прямые, поэтому в ней принцип двойственности работает далеко не всегда. Согласно этому принципу, если верна теорема относительно точек и прямых проективной плоскости, а также их инцидентностей, то верна

и двойственная теорема, в которой слово «точка» заменяется на слово «прямая», а слово «прямая» — на слово «точка». Мы условимся обозначать точки латинскими буквами с верхними индексами: x^1, x^2, x^3 , а прямые — буквами с нижними индексами: x_1, x_2, x_3 . Отношение инцидентности будем обозначать символом \ni : запись $x^1 \ni x_1$ означает, что точка x^1 принадлежит прямой x_1 , равно как и запись $x_1 \ni x^1$. Через любые две точки x^1, x^2 проходит единственная прямая $x_0 = x^1x^2$. В евклидовой геометрии имеются параллельные прямые, поэтому в ней принцип двойственности работает далеко не всегда. Запись $x^0 = x_1x_2$ означает, что прямые x_1, x_2 пересекаются в точке x^0 . Симметрию относительно точки x^1 условимся обозначать через $[x^1]$, а симметрию относительно прямой x_1 — через $[x_1]$. Добавим также, что, как правило, для отрезка двойственным образом является угол, а для угла — отрезок. Впрочем, в силу искажения принципа двойственности на евклидовой плоскости, в каждой конкретной конструкции следует применять его творчески.

Покажем на примере задачи 43 и двойственной ей задачи, как работает принцип двойственности. Для этого формулировки и решения обеих задач поместим в табл. 43.

Таблица 43

Задача 43	Двойственная задача
На плоскости даны	
прямая x_0 , точки x^1, x^2 .	точка x^0 , прямые x_1, x_2 .
Построить такую	
точку $x^0 \ni x_0$,	прямую $x_0 \ni x^0$,
чтобы	
длина ломаной $x^1x^0x^2$	площадь треугольника $x_1x_0x_2$
была наименьшей.	
Решение	
Последовательно строим:	
1. $x^3 = [x_0]x^1$	1. $x_3 = [x^0]x_1$
2. $x_1 = x^2x^3$	2. $x^1 = x_2x_3$
3. $x^0 = x_0x_1$	3. $x_0 = x^0x^1$

Признаться, ради сохранения формы пришлось в формулировке задач опустить некоторые детали, о которых при обычных обстоятельствах мы обязательно сказали бы. В условии задачи 43 следует добавить, что данные точки лежат по одну сторону от данной прямой. А в задаче 22 обычно оговаривается, что данная точка должна принадлежать стороне (как отрезку) треугольника. 

44. Задача. Лесник, заметив в глубине леса пламя непотушенного костра, снял с пожарного стенда ведро, добежал до реки, зачерпнул воды и направился к костру, чтобы потушить его. В каком месте леснику следует взять воду из реки, чтобы как можно быстрее преодолеть путь от стенда до костра.

☛ Формулировка задачи 43 имеет как достоинства, так и недостатки. Недостатки: формулировка сухая и беспристрастная, эмоционально не окрашена. Достоинства: формулировка задачи корректная, т. е. в условии нет места разночтению, двусмысленности, домыслу; описывается идеальная ситуация.

Идеи приходят сами.

Д. Пойа

Рассуждения исследователя во время решения задачи 44. Задача 44 по содержанию кажется равносильной задаче 43. Однако это далеко не так. Дело в том, что ее формулировка не является математической, изложение похоже на правдивый рассказ о реальном случае. Как представить себе реальные условия, в которых оказался лесник? Например, лес какой — редколесье, тайга? Каков берег реки — крутой, пологий, прямолинейный, подковообразный? Обычно исследование начинается с изучения простейшей модели, которая в дальнейшем может усложняться. Предположим, выполняются следующие условия:

- 1) события происходят на горизонтальной ровной местности;
- 2) деревья в лесу растут так редко, что практически не мешают бежать по нему прямолинейно;
- 3) берег реки — прямая;
- 4) высота берега равна нулю;
- 5) лесник бежит с постоянной скоростью независимо от того, наполнено ведро водой или оно пустое.

Теперь легко догадаться, что все эти условия выполняются на геометрической модели задачи 43.

Описанная в условии задачи 44 ситуация может быть смоделирована на жесткой или мягкой модели. Жесткой моделью является решение задачи 43. Мягкая модель рождается с мысленного представления, как бежит человек с ведром — пустым, наполненным. Очевидно, скорость v_1 бега с пустым ведром больше скорости v_2 бега с наполненным ведром. Пусть $v_2 = kv_1$, $k \in (0; 1]$ (для подкрепления интуиции можно мыслить $k = \frac{1}{2}$). Таким образом, мы, изменив условие 5, получили новую задачу. Ее можно решать, как и задачу 43, несколькими способами: аналитически, геометрически, численно, механически и т. п.

Стремление исследователя к разнообразию решений проблемы (равно как и задачи) — не самоцель, но движитель исследовательской деятельности, ибо разные способы решения проблемы создают условия проявления сущности в виде явлений, когда тайное становится явным, когда неясные грани тайны начинают сверкать красотой истины. Оно способствует установлению связей между фрагментами исследуемой реальности, создавая в представлении исследователя картину максимально целостной, структурированной (неопределенность уменьшается). 🔒

Решение-исследование задачи 44.

{1} **Экстремум.** Поскольку путь лесника должен быть кратчайшим, наша задача — стандартное упражнение на минимум. Введем систему координат, составим функцию одной переменной, продифференцируем, решим уравнение и, наконец, найдем M . Действуя по этому плану, положим $L = (0; 1)$ — домик лесника, $K = (p, q)$ — костер, $M = (t, 0)$ — точка на берегу. Леснику для прохождения по ломаной LMK потребуется время

$$f(t) = \frac{LM}{v_1} + \frac{MK}{v_2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(p-t)^2+q^2}}{v_2}.$$

Далее,

$$\frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{v_1\sqrt{1+t^2}} = \frac{p-t}{v_2\sqrt{(p-t)^2+q^2}}. \quad (1)$$

Осталось возвести последнее уравнение в квадрат и решить относительно t алгебраическое уравнение степени 4.

{2} **Аналогия.** При решении задачи 43 надо было догадаться построить симметричную точку L' . Но как использовать точку L' в этой ситуации?

{3} **Гипотеза.** Ключом к решению задачи 43 явилось то, что точки K , M , L' оказались на одной прямой. Выясним, где может находиться точка T , чтобы она оказалась на прямой ML .

Пусть $M \in b$. На луче KM отложим отрезок KT , такой, что

$$KT = KM + kML.$$

Построим окружность $\omega(M, kML)$ и рассмотрим огибающую γ семейства всех таких окружностей, которые параметризованы текущей точкой $M \in b$. Чтобы понять вид огибающей γ , мы в целях экономии сил и времени можем построить семейство окружностей, например, в оболочке Visual Basic. Компьютер подсказывает, что огибающей должна

быть гиперболой. Следовательно, чтобы найти точку M , достаточно построить гиперболу γ и провести к ней нормаль KT (рис.44.1).

{4} *Доказательство.* Теперь, когда выдвинутая гипотеза подтверждена компьютерной графикой, самое время перейти к аналитическим исследованиям и найти уравнение кривой γ .

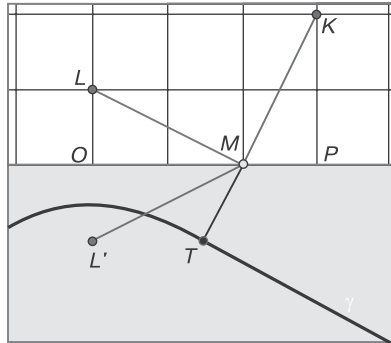


Рис. 44.1. Построение точки M при $k = 0,5$ (см. также цв. вклейку)

Пусть $M = (t, 0)$. Тогда $ML = \sqrt{1 + t^2}$, поэтому радиус r окружности $\omega(M, r = kML)$ удовлетворяет условию $r^2 = k^2(1 + t^2)$. Следовательно, γ — огибающая семейства Ω окружностей $\varphi(x, y, t) = 0$, где

$$\varphi = (x - t)^2 + y^2 - k^2(1 + t^2). \quad (2)$$

Как известно из теории огибающих, точки кривой γ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \varphi = 0, \\ \frac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Из второго уравнения системы находим $x = t(1 - k^2)$. Отсюда и из (2), (3) следует уравнение

$$-\frac{x^2}{1 - k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1, \quad (4)$$

которое показывает, что кривая γ — гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

с действительной полуосью $b = k$ и мнимой полуосью $a = \sqrt{1 - k^2}$. Фокусами гиперболы γ являются точки L, L' . На рис. 44.1 представлена нижняя ветвь гиперболы γ , т. е. кривая

$$y = -k\sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - k^2}}.$$

Нетрудно понять, что только одна нормаль к этой ветви содержит точку K . Это означает, что задача имеет единственное решение.

{5} **Мягкость.** В пределе при $k \rightarrow 1$ гипербола γ вырождается в двоянную ось ординат, а двойственная кривая γ^* , т. е. семейство касательных к γ , вырождается в два линейных пучка прямых, с центрами L и L' . Это означает, что построенная нами модель действительно является мягкой и жесткую модель, описанную в задаче 43, включает в себя как предельный случай при $k \rightarrow 1$.

{6} **Оптика.** Вернемся к пункту {1} нашего исследования и выясним геометрическое содержание равенства (1). Обозначив через O, P проекции на прямую b соответственно точек L, K и замечая, что $MO = t$, $ML = \sqrt{1 + t^2}$, $MP = p - t$, $MK = \sqrt{(p - t)^2 + q^2}$, а также, обнаружив, что $\frac{MO}{ML} = \sin \alpha_1$, $\frac{MP}{MK} = \sin \alpha_2$, приходим к выводу, что уравнение (1) выражает известный закон преломления Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

если α_1 интерпретировать как угол падения луча $L'M$, а α_2 — как угол преломления. Предположение о том, что луч света проходит от точки L' до точки K за минимальное время, называется *принципом Ферма наименьшего времени*.

{7} **Преломление.** Таким образом, задачи 43 и 44 решаются с оптической точки зрения совершенно одинаково: чтобы построить точку M , нужно направить луч света из точки L' в направлении «видимой» точки K . Этот луч пересечет прямую b в искомой точке M . Решение задачи опять-таки единственное. Из оптики известно, что луч света при переходе границы двух сред с разной плотностью преломляется. В нашем случае полуплоскость $y > 0$ рассматривается как среда, более плотная, чем полуплоскость $y < 0$.

{8} **Механика.** Обратимся к механическому решению 3 задачи 43, заменив второй груз более тяжелым, равным $\frac{m}{k}$. Тогда ползун окажется в состоянии устойчивого равновесия, когда сила $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ будет ортогональна штанге b .

{9} **Рефлексия.** Проанализируем шаги, которые мы делали во время исследования задачи 44, которая, скорее, является не задачей, а проблемой (табл. 44).

Таблица 44

Исследовательское действие	Цель	Мир ¹
{1} Экстремум		
1. Намечаем план исследования	Действовать по плану	Ч
2. Вводим систему координат	Построить модель	R
3. Строим функцию	Изучить модель	R, A
4. Получили уравнение	Любим трудности	A
5. Отказываемся от решения уравнения	Избегаем сложностей	Ч
{2} Аналогия		
6. Постановка проблемы	Надежда на инсайт	Ч
{3} Гипотеза		
7. Вспоминаем прошлый опыт	Найти аналогию	Ч
8. Применяем аналогию	Построить модель	R
9. Составляем задачу	Выдвинуть гипотезу	A
10. Формулируем гипотезу	Принять или отвергнуть	Ч
{4} Доказательство		
11. Строится модель	Изучить модель	R
12. Определение этапов исследования	Найти доказательство	A
13. Доказательство завершено	Гипотезу принять	Ч
{5} Мягкость		
14. Вспоминаем прошлые модели	Скорректировать	Ч
{6} Оптика		
15. Возврат к п. 4.	Дать интерпретацию	R
16. Строим геометрическую модель	Найти закономерности	A
17. Вывели закон преломления света	Уменьшить энтропию	Ч
{7} Преломление		
18. Переживание успеха	Получить удовлетворение	Ч
19. Найден очередной способ решения	Интеграция знаний	A, R
{8} Механика		
20. Вспоминаем механику	Построить механич. модель	Ч
21. Строим механическую модель	Интеграция знаний	A, R
{9} Рефлексия		
22. Анализ исследования	Схема исследования	R
23. Сравнение шагов исследования	Классифицировать по РЧА	A
24. Синтез исследования	Закончить рефлексию	Ч

¹Имеются в виду миры: реальный мир R, чувственный Ч и абстрактный A.

Резюме. Начиная исследование проблемы лесника, каковой явилась задача 44, мы, прежде всего, построили модель, а затем изучили отдельные ее стороны, произведя следующие исследовательские действия.

ИД1: Записали равенство $v_2 = k v_1$, $k \in (0; 1]$, указывающее на свойство модели, заложенное в нее перед началом исследования.

ИД2: Аналитически нашли целевую функцию $f(t)$, связывающую между собой скорости v_1, v_2 , координаты точек L, M, K .

ИД3: Свели построение точки M к решению уравнения (1) с параметрами, которое приводит к поиску корня алгебраического уравнения степени 4.

ИД4: Исходя из графического представления огибающей однопараметрического семейства окружностей, выдвинули гипотезу, а затем аналитически строго доказали, что огибающая γ является гиперболой. Нашли уравнение гиперболы. Дали геометрическую интерпретацию ее фокусов.

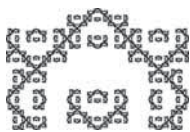
ИД5: Нашли геометрический способ построения точки M как пересечение берега с проходящей через K нормалью к нижней ветви гиперболы.

ИД6: Дав геометрическую интерпретацию уравнения и используя свои познания в физике (как следствие фундаментальной подготовки, полученной ранее), «открыли» закон преломления Снеллиуса. Тем самым нашли оптический способ построения точки M .

ИД7: Опираясь на познания в механике, проводя аналогию с механическим способом решения задачи 43, учитывая коэффициент k , получили механический способ построения точки M .

ИД8: Исходя из частного случая модели при $k = 1$ и используя принцип вариативности в исследовательской деятельности, применили прием «аналогия» в форме принципа двойственности и сформулировали двойственную задачу, которая оказалась уже решенной ранее задачей 22.

§ 4. НАГРУЖЕННЫЙ КЛИН



Догадаться перейти от Кружевницы к подсолнуху, потом от подсолнуха к носорогу, а от носорога прямо к цветной капусте способен только тот, у кого действительно есть кое-что в голове.

С. Дали

Если Д. Пойа все задачи делит на два типа: на нахождение и на доказательство, то Л. И. Фридман [45, с. 97] делит задачи — по характеру требований — на четыре типа: на нахождение, на преобразование, на построение, на доказательство (принципиально эта классификация не отличается от предыдущей). С обеими точками зрения вполне можно согласиться. Однако, принимая во внимание субъективную сторону творчества, стремясь постигнуть этапы мыслительного процесса при решении математических задач с присущими ему анализом, рефлексией, синтезом и реализацией идей, мы должны с необходимостью дополнить мнение Пойа и сказать, что все задачи делятся на три типа: на нахождение, на доказательство, на составление задач. Все, кто решал задачи, знают, что в процессе решения даже простых задач творческая активность проявляет себя тем, что выдвигаются различные гипотезы («Выдвижение гипотез является необходимым этапом решения многих задач» [50, с. 15]), генерируются, анализируются разнообразные идеи, которые, в сущности, и представляют собой составление задач. Они не являются целью при решении исходной задачи, они никак не следуют из постановки исходной задачи, однако чаще всего без составленных задач не обойтись. Простейший пример доставляет стереометрия, которую изучают в старших классах: каждая стереометрическая задача состоит из нескольких планиметрических, которые ученик сам придумывает и сам же их решает.

В БСЭ (с. 1314) говорится: «Творчество — деятельность, порождающая нечто качественно новое и отличающееся неповторимостью, оригинальностью и общественно-исторической уникальностью. Творчество специфично для человека, так как всегда предполагает творца — субъекта творческой деятельности; в природе происходит процесс развития, но не творчества».

Слово «творчество» разделим на части: т + во + рче + ство. Последняя часть означает целостность как, например, в словах *родство*,

единство, множество и т. п. Первые три части есть сжатое предложение с подлежащим «т», сказуемым «во», дополнением «рче». Теперь нетрудно добраться по извилистой тропинке до одного из вариантов прочтения этого предложения: «Ты воя руче», или, точнее, «Ты ваяешь руками». Мы не будем утверждать, что это именно так и есть, но наша интерпретация делает слово «творчество» более понятным нам самим. В этом предложении глагол «ваять» означает не просто делать что-то, а делать именно искусно, когда «на крыльях вымысла носимый ум улетал на край земной». Не надо бояться, что мы ошибемся. Ибо кто стучится, тому и открывают. Не бояться — одно из важнейших условий успешности в исследовательской или творческой деятельности. Смело выдвигать гипотезы, смело делать неожиданные предположения, как можно быстрее адаптироваться в незнакомой предметной области, в иносистемном.

Сформулируем проблему теории упругости, решение которой имеет большое значение для теории резания. Положив в основу исследования сумму главных напряжений нагруженного образца, творческая группа студентов столкнулась с рядом сложнейших понятий теории упругости, но, самое главное, поиски решения проблемы привели в разнообразные области: в теорию резания, теорию упругости, тензорное исчисление, геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, криологию, физиологию.

Теория резания металлов опирается на фундаментальные результаты теории упругости. В 1965–1973 гг. тогда еще начинающие исследователи Тюменского индустриального института (ТюмГНГУ с 1986 г.), а нынче крупные специалисты по теории резания профессора М. Х. Утешев, Е. В. Артамонов, Ю. И. Некрасов, В. В. Мелехов впервые применили в своих экспериментах лазер. Методами голографии и лазерной интерферометрии ими были получены уникальные результаты в теории упругости, положенные затем в основу исследований по теории резания, — науки во многом эмпирической. Но некоторые результаты тех экспериментов были неясны с точки зрения теории упругости. Так, например, в экспериментах с нагруженным клином была получена математически неясная голографическая картина, представленная на рис. 45.1.

45. Задача. Построить математическую модель плосконапряженного клина и выяснить структуру семейства изопахик (*изопахикой* называют кривую, в каждой точке которой сумма главных напряжений одна и та же).

При решении задач теории упругости для общего случая трехмерных тел встречаются большие математические затруднения, которые будущие

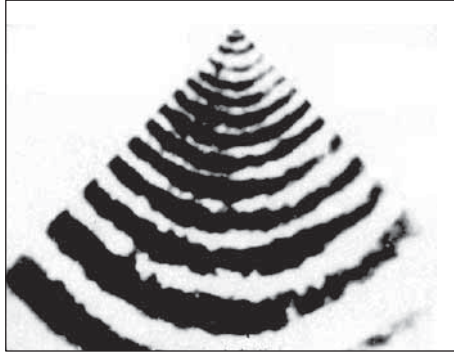


Рис. 45.1. Голографическая интерферограмма на плоско-напряженном клине из инструментальной стали У8А при нагрузке $P = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}$ (см. [28, с. 70])

инженеры-механики младших курсов порой не в состоянии преодолеть. Это обстоятельство вынуждает их переходить к более простым задачам, что очень целесообразно при проникновении в проблематику. Одной из простейших задач является плоская задача теории упругости (см. задачу 46).

46. Задача. (Плоская задача Фламана, 1892.) Пусть α — упругая полуплоскость с границей g ; $O \in g$ — точка приложения силы \mathbf{K} , направленной перпендикулярно прямой g ; $\sigma : \alpha \rightarrow \mathbf{R}$ — функция, такая, что для произвольной точки $M \in \alpha$ значение $\sigma(M)$ определяется как сумма главных напряжений $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$. Доказать, что изопахики, т. е. линии уровня функции σ , образуют параболический пучок окружностей, касающихся прямой g в точке O .

Решение. Прежде всего, заметим, что из курса «Сопроотивление материалов» известны понятия главных напряжений и тензора напряжений нагруженного тела. В справочной литературе, например в [2, 25, 42], можно найти, что в задаче Фламана тензор напряжений имеет вид

$$T = -\frac{2K}{\pi r^4} \begin{pmatrix} x^2 y & xy^2 & 0 \\ -xy^2 & y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

при этом $\sigma = \sigma_x + \sigma_y = -\frac{2Ky}{\pi r^2}$. Это означает, что изопахики образуют линейный параболический пучок окружностей, определяемый уравнением

$$\sigma \pi r^2 + 2Ky = 0,$$

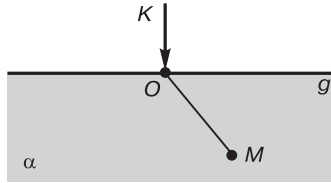


Рис. 46.1

или

$$x^2 + (y - b)^2 = b^2, \quad b = -\frac{K}{\sigma\pi}.$$

Посредством ИКТ строится пучок изоповерхностей в виде окружностей (см. рис. 46.2). ■

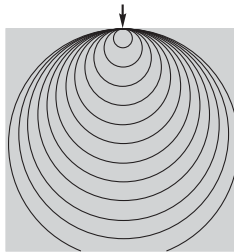


Рис. 46.2. Параболический пучок окружностей как семейство слоев отображения σ

Для построения графика в 3D можно воспользоваться различными пакетами, например MathCAD. Но полезно уметь самим строить графики в удобном для конкретной цели виде. График функции σ , представленный на рис. 46.3, построен в Visual Basic.

Рис. 46.3. Клетчатый график функции σ

Но все же на таком графике не виден главный объект изучаемого явления — семейство изопахик. Их можно рассмотреть на каркасном графике, основным достоинством которого является то, что «сквозь него видны» координатные плоскости (рис. 46.4).

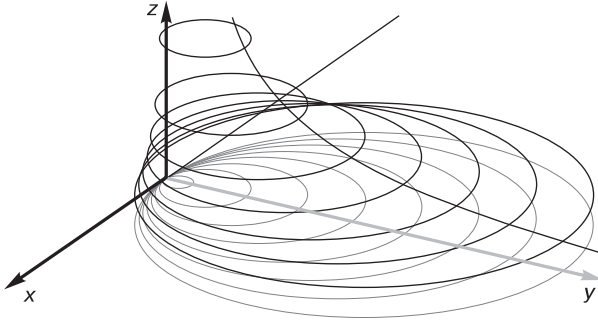


Рис. 46.4. Каркасный график функции σ

Приемы, которые применяются для творческого понимания данной ситуации, предполагают вариации объектов, свойств, отношений. Прежде всего, условие задачи Фламана следует разложить на составляющие, а затем проварьировать их. Тогда появится несколько идей. Так, если изменить условие нормальности нагружающей силы, то возникает задача 47.

47. Задача. Пусть α — упругая полуплоскость с границей g ; $O \in g$ — точка приложения силы \mathbf{K} , направленной под углом ψ к прямой g ; $\sigma : \alpha \rightarrow \mathbf{R}$ — функция, такая, что для произвольной точки $M \in \alpha$ значение $\sigma(M)$ определяется как сумма главных напряжений $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$. Исследовать семейство слоев отображения σ .

Решение этой задачи принципиально не выводит из ситуации, ибо оно сводится к анализу тензора напряжений, имеющемуся в справочной литературе. ■

Сохраним условие нормальности, но заменим сосредоточенную силу на распределенную. Тогда получается задача 48.

48. Задача. К границе упругой полуплоскости приложена равномерно распределенная сила — жесткий штамп в виде отрезка AB . Пусть $\sigma : \alpha \rightarrow \mathbf{R}$ — функция, такая, что для произвольной точки $M \in \alpha$ значение $\sigma(M)$ определяется как сумма главных напряжений $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$. Доказать, что изопахики, т. е. линии уровня функции σ , образуют

гиперболический пучок окружностей, проходящих через концы отрезка AB .

Решение этой задачи сводится к анализу тензора напряжений, известного из литературы. Он имеет вид

$$T = -\frac{K}{2\pi} \begin{pmatrix} 2(\theta_2 - \theta_1) - \sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 & \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 & 0 \\ \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2 & 2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь изопахтики составляют гиперболический пучок окружностей, проходящих через концы нагружающего отрезка (рис. 48.1). ■

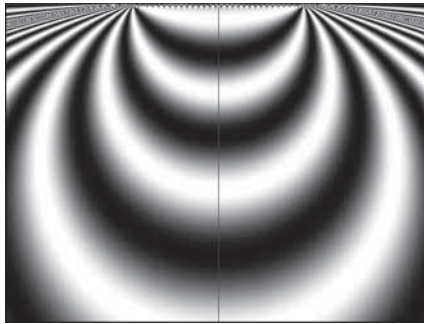


Рис. 48.1. Изопахики при нагружении штампом

Студенты, знакомые с окружностями, сразу же предложили задачу 49.

49. Задача. Пусть AB — отрезок плоскости; α — полуплоскость, границей которой служит прямая AB ; $\varphi : \alpha \rightarrow \mathbf{R}$ — функция, такая, что для произвольной точки $M \in \alpha$ значение $\varphi(M)$ определяется как величина угла AMB . Построить график функции φ .

☞ Если сложное явление имеет простое и наглядное (и, как правило, красивое) математическое истолкование, то это признак того, что построенная математическая модель адекватна изучаемому явлению. В данном случае математическая модель построена в теории упругости и передает внутреннюю красоту, по крайней мере, математики. Теория резания металлов широко опирается на теорию упругости. Но, как показывает практика, теория резания остается в большой степени эмпирической наукой, несмотря на изящность теории упругости. До сих пор теория упругости не дает удовлетворительного объяснения нагруженного тела с особенностями, каковым является, например, резец,

на кончике которого происходят во время резания заготовки сложнейшие механические, термические, электромагнитные явления. Мотивируемые задачей 45 (см. рис. 45.1) студенты погружаются в размышления, пытаются понять сущность проблемы, проявляют творческую активность, придумывая задачи, двигаясь от простого к сложному. На этом пути они задаются вопросом, поставленным в задаче 50. 🔒

50. Задача. Действительно ли функции φ и σ из предыдущих двух задач совпадают с точностью до числового множителя?

Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным. В связи с чем возникает задача 51.

51. Задача. На плоскости дан отрезок AB . Найти множество точек плоскости, из которых отрезок AB виден под углом φ .

Эта задача является легким упражнением на построение циркулем и линейкой, решаемая в школьном курсе геометрии.

Что можно еще изменить в задаче Фламана? Прежде всего, возникает идея рассмотреть нагружение не одной, а несколькими силами. Посредством ИКТ студенты исследуют сумму главных напряжений для двух, трех и более сил. В связи с открытием в последнее время буквально во всех областях науки и техники фрактальных структур возникает задача 52.

52. Задача. К границе упругой полуплоскости приложена сила, сосредоточенная в точках множества Кантора. Посредством ИКТ исследовать сумму главных напряжений.

Решение. Графическое решение этой задачи (см. рис. 52.1) доставляет эстетическое наслаждение самоподобием картины напряжений в нагруженной таким способом полуплоскости. ■

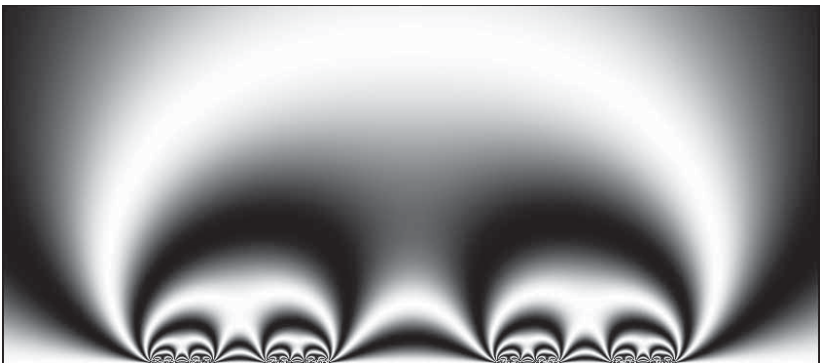


Рис. 52.1

Задачи 53, 55 получаются из задач 46 и 48, если перейти от двух измерений к трем. Обратим внимание на то, что задача Буссинека (в размерности 3) исторически появилась раньше (на 7 лет) задачи Фламана (в размерности 2). Это свидетельствует, прежде всего, о нетривиальности понятия «плоская задача».

53. Задача. Буссинека (1885). Сосредоточенная сила \mathbf{K} приложена нормально границе упругого полупространства \mathbb{P}^3 . Исследовать функцию $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}$, которая определена тем, что каждой точке полупространства \mathbb{P}^3 отвечает сумма $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ главных напряжений в этой точке, и доказать, что поверхности уровня этой функции составляют линейный пучок секстик (т. е. алгебраических поверхностей степени 6).

54. Задача. Сосредоточенная сила \mathbf{K} приложена под углом ψ к границе упругого полупространства \mathbb{P}^3 . Исследовать функцию $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}$, которая определена тем, что каждой точке полупространства отвечает сумма $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ главных напряжений в этой точке, и доказать, что поверхности уровня этой функции составляют линейный пучок секстик.

55. Задача. На границу упругого полупространства \mathbb{P}^3 давит жесткий квадратный штамп $\mathbb{Ш}$ с силой \mathbf{K} . Исследовать функцию $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}$, которая каждой точке полупространства ставит в соответствие сумму $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ главных напряжений в этой точке.

56. Задача. На границу упругого полупространства \mathbb{P}^3 давит жесткий квадратный штамп $\mathbb{Ш}$ с силой \mathbf{K} . Исследовать функцию $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}$, которая каждой точке полупространства ставит в соответствие телесный угол τ , под которым виден штамп $\mathbb{Ш}$ из этой точки.

57. Задача. На упругое невесомое полупространство \mathbb{P}^3 давит жесткий квадратный штамп $\mathbb{Ш}$ с силой \mathbf{K} . Выявить отношение σ/τ функций $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}$, $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}$, где σ — сумма главных напряжений в точке $x \in \mathbb{P}^3$, τ — телесный угол, под которым виден штамп $\mathbb{Ш}$ из точки $x \in \mathbb{P}^3$.

58. Задача. Пусть α — упругая массивная полуплоскость с границей g , моделирующая вечномерзлый грунт; $O \in g$ — точка приложения силы \mathbf{K} , направленной перпендикулярно прямой g ; $\xi: \alpha \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, такая, что для произвольной точки $M \in \alpha$ значение $\xi(M)$ определяется как сумма главных напряжений $\xi = \sigma_x + \sigma_y$. Исследовать семейство линий уровня функции ξ .

59. Задача. К границе упругой массивной полуплоскости, моделирующей вечномерзлый грунт, приложена равномерно распределенная сила — жесткий штамп в виде отрезка AB . Пусть $\xi : \alpha \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, такая, что для произвольной точки $M \in \alpha$ значение $\xi(M)$ определяется как сумма главных напряжений $\xi = \sigma_x + \sigma_y$. Исследовать семейство линий уровня функции ξ .

60. Задача. На вечномерзлом грунте \mathbb{P}^3 построено высотное здание. Исследовать функцию $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$, которая определена тем, что каждой точке полупространства \mathbb{P}^3 отвечает сумма $\xi = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ главных напряжений в этой точке.

☞ Как показывает численное моделирование, функции σ и τ очень близки друг к другу; здесь возникает гипотеза о том, что сумма главных напряжений в любой точке X полупространства, нагруженного квадратным штампом, пропорциональна телесному углу, под которым виден штамп из точки X . Этого результата в учебниках по теории упругости студентам обнаружить не удалось. Поэтому можно предположить, что полученный результат, скорее всего, является оригинальным.

Нерешенной осталась задача 45, которая ждет своего решения от последующих поколений креативно мыслящих студентов. 🔒

61. Задача. На стене висит картина, которую зритель рассматривает, идя по дорожке. В каком месте зрителю надо остановиться, чтобы рассмотреть картину лучше всего?

☞ Бистереографическая проекция или задачи двуглазой биомеханики. Во время обсуждения в творческой группе понятия «рассмотреть картину лучше всего» произошло то, что обычно случается при мозговом штурме: возник параллельный ассоциативный ряд.

Безгина Светлана (*недоуменно*): Странно, мы обсуждаем вопрос о рассматривании картины, как будто человек у нас всегда одноглазый.

Гуржий Сергей (*задумчиво*): Интересно, а телесные углы на обеих сетчатках глаз равны?

Дерингер Владимир (*категорично*): Конечно, не равны.

Гуржий Сергей: Тогда как мозг совмещает две различные картинки, которые возникают на сетчатках?

Дерингер Владимир (*подняв карандаш на вытянутой руке*): Я смотрю на Свету и вижу два карандаша. А когда смотрю на карандаш, вижу две Светы.

Безгина Светлана (*иронично*): Все зависит от точки зрения. Глаза разные, а точка зрения у них одна.

Дерингер Владимир (*удивленно*): А если карандаш расположить вот так, то, когда я смотрю на карандаш, вижу одну Свету.


Гуржий Сергей: А меня сколько?

Дерингер Владимир: Тебя, сэр, полтора.

Гуржий Сергей: Света права, все зависит от точки зрения. Пространство трехмерно, сетчатка двумерна. У человека два глаза, значит, дважды два четыре, поэтому подсчет параметров дает нам единицу: $4 - 3 = 1$, т. е. в пространстве имеется некая линия, которая видна слившейся поточечно.

Дерингер Владимир: «Дважды два» потом обсудим, а у меня вопрос. Глаз — сферический шарнир. У сферического шарнира три степени свободы. А у глаза? Две? И вообще, как организована пара глаз в своем взаимодействии?

Гуржий Сергей: Биомеханика!

Дальнейшее обсуждение двуглазой биомеханики привело к тому, что Сергей Гуржий пообещал заняться этой проблемой, что он и сделал во время зимних каникул, получив несколько оригинальных результатов (см. задачи 62–67). 

62. Задача. Дан треугольник AB_1C_1 . На сторонах AB_1 , AC_1 взяты точки B , C так, что $BB_1 = CC_1$. Окружности, описанные около треугольников ABC и AB_1C_1 , кроме точки A имеют еще одну общую точку D . Доказать, что треугольники DBC и DB_1C_1 являются равнобедренными.

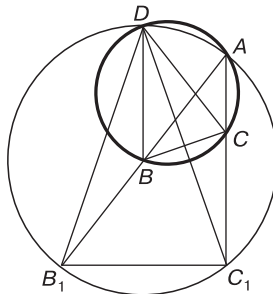


Рис. 62.1

Доказательство. Из равенства вписанных углов (рис. 62.1)

$$\angle BDC = \angle BAC = \angle B_1DC_1$$

следует

$$\angle BDB_1 = \angle CDC_1;$$

кроме того,

$$\angle AC_1D = \angle AB_1D, \quad \angle C_1CD = \angle B_1BD,$$

следовательно, с учетом равенства $BB_1 = CC_1$, треугольники C_1CD и B_1BD равны. Таким образом, $BD = CD$, $DB_1 = DC_1$. ■

63. Задача. В окружность вписаны треугольник ABC и равнобедренный треугольник DBC , $DB = DC$. Окружность, проходящая через A и D , пересекает прямые AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Доказать, что $BB_1 = CC_1$.

Доказательство аналогично предыдущему. ■

64. Задача. Пусть π — линейный пучок прямых с центром O евклидовой плоскости, ρ — поворот плоскости вокруг точки D на угол φ . Найти множество ξ точек пересечения соответственных прямых пучков π и $\sigma = \rho(\pi)$.

Решение. Пусть $O_1 = \rho(O)$, $T = t \cap \rho(t)$ для некоторой прямой $t \in \pi$. Тогда $T \in \omega$, где ω — окружность, содержащая O , O_1 , D . Следовательно, $\xi = \omega$. ■

65. Задача. Пусть π — связка прямых евклидова пространства с центром O , ρ — поворот пространства вокруг прямой g на угол φ . Найти множество θ точек пересечения соответственных прямых связок π и $\sigma = \rho(\pi)$.

Решение. Пусть $O_1 = \rho(O)$; тогда, согласно определению поворота пространства вокруг прямой, $g \perp OO_1$. Отсюда следует, что плоскость α , проходящая через OO_1 перпендикулярно g , отображается на себя. Обозначим через ω окружность, содержащую O , O_1 , $D = \alpha \cap g$. В соответствии с предыдущей задачей $\omega \subset \theta$. Кроме того, легко видеть, что $g \subset \theta$. Других точек у θ нет. Таким образом, $\theta = \omega \cup g$. ■

Рассмотренные четыре последние задачи предстали на пути решения следующей задачи.

66. Задача. Почему одни точки пространства мы видим нечеткими, размытыми (т. е. двойными), а другие — четкими? Что представляет собой множество всех четких точек?

67. Задача. На рис. 67.1 представлены изображения тетраэдра на левой и правой сетчатках глаз. Глядя на них, можно увидеть тетраэдр

объемно. Оценить визуально высоту тетраэдра, если наибольшая сторона его основания равна 1.

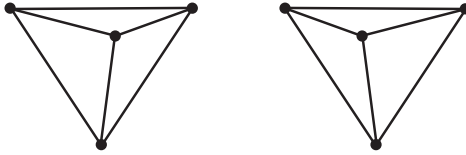


Рис. 67.1

§ 5. ВЫТЕКАНИЕ ИЗ РЕЗЕРВУАРА



Под лежачий камень вода не течет.

Пословица

Сначала решим профессионально ориентированную задачу об истечении нефтепродукта из цистерны, сводящуюся к составлению и решению дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Затем проварьируем форму резервуара. Это дает цикл задач, одна из которых эхом отзовется при решении задачи о водяных часах в § 15.

68. Задача. Цилиндрический резервуар высотой 6 м и диаметром основания 4 м поставлен вертикально и наполнен водой (или каким-либо нефтепродуктом). За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиусом $1/12$ м, сделанного в дне резервуара?

Решение (см. [13, № 512]). Для решения поставленной задачи надо воспользоваться формулой Бернулли, определяющей скорость v (в м/с) истечения жидкости из отверстия в резервуаре, находящегося на высоте h ниже свободного уровня жидкости:

$$v = \sigma \sqrt{2gh}.$$

Здесь $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, σ — постоянный (безразмерный) коэффициент, зависящий от свойств жидкости (для воды $\sigma = 0,6$).

Пусть через время t после начала истечения воды уровень оставшейся в резервуаре воды был равен h и за время dt понизился еще на dh ($dh < 0$). Подсчитаем объем воды, вытекший за этот бесконечно малый промежуток времени dt , двумя способами.

С одной стороны, этот объем $d\omega$ равен объему цилиндрического слоя с высотой $|dh|$ и радиусом, равным радиусу r основания резервуара ($r = 2 \text{ м}$). Таким образом, $d\omega = \pi r^2 |dh| = -\pi r^2 dh$.

С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне резервуара, а высота равна $v dt$ (где v — скорость истечения). Так как радиус отверстия равен $\rho = 1/12 \text{ м}$, $d\omega = \pi \rho^2 v dt = \pi \rho^2 \sigma \sqrt{2gh} dt$.

Приравнивая эти два выражения для одного и того же объема, приходим к уравнению

$$-r^2 dh = \sigma \rho^2 \sqrt{2gh} dt.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$dt = -\frac{r^2}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}; \quad (1)$$

$$t = C - \frac{2r^2}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}} \sqrt{h}.$$

Если $t = 0$, то $h = h_0 = 6$ м. Отсюда следует

$$C = \frac{2r^2}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}} \sqrt{h_0}.$$

Таким образом, связь между t и h определяется уравнением

$$t = \frac{2r^2}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h}),$$

а время T полного истечения найдем, полагая в этой формуле $h = 0$:

$$T = \frac{2r^2 \sqrt{h_0}}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}}.$$

Используя данные задачи ($r = 2$ м, $h_0 = 6$ м, $\sigma = 0,6$, $\rho = \frac{1}{12}$ м, $g = 9,8$ м/с²), находим $T \approx 1062$ с $\approx 17,7$ мин. На рис. 68.1 графически показана зависимость $h(t)$; ее графиком служит парабола с вершиной в точке $(T, 0)$. ■

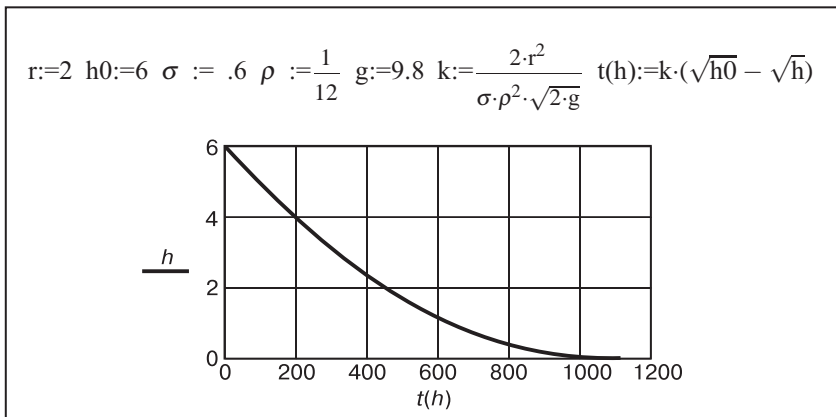

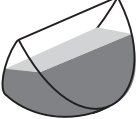


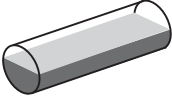



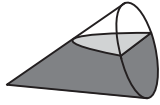



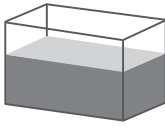
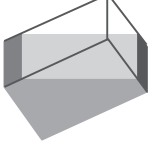



Рис. 68.1

Изменяя форму резервуара, его положение в пространстве, а также свойства нефтепродукта (например, σ), условия его истечения из резервуара (самотеком, принудительно и т. п.), мы получим каскад задач на тему вытекания. В табл. 68 приводятся различные формы резервуара и их положение в пространстве. Предлагаем читателю выбрать несколько форм из табл. 68 и решить соответствующие задачи. После анализа решенных задач полезно проварьировать условия и получить новые задачи.

Таблица 68

Форма	Положение		
Часть сферы			
Цилиндр			
Конус			
Усеченный конус			
Параллелепипед			

69. Задача. Шаровой резервуар объемом 600 м^3 наполнен водой. В его нижней части имеется круглое отверстие диаметром 12 см , через которое выливается вода. Сколько воды вытечет из резервуара, если воздух в него не попадает?

70. Задача. Из горизонтально расположенной цистерны длиной 10 м и диаметром 4 м через отверстие диаметром 20 см в нижней части выливается солярка. Через сколько минут наполненная доверху цистерна окажется пустой?

71. Задача. Наполненная нефтью цистерна длиной 10 м и диаметром 4 м расположена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту; в ее нижней части имеется круглое отверстие диаметром 20 см, через которое выливается нефть. Определить время, за которое нефть полностью выльется из цистерны.

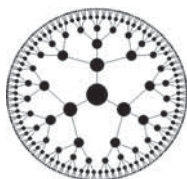
72. Задача. Резервуар имеет форму конуса высотой 4 м и радиусом основания 3 м, наполнен моторным маслом и расположен вершиной вверх. В его нижней части имеется круглое отверстие диаметром 12 см, через которое выливается жидкость. Определить время истечения всей жидкости из резервуара.

73. Задача. Резервуар имеет форму конуса высотой 4 м и радиусом основания 3 м, наполнен моторным маслом и расположен вершиной вниз. В его нижней части имеется круглое отверстие диаметром 12 см, через которое выливается жидкость. Определить время истечения всей жидкости из резервуара.

74. Задача. Резервуар имеет форму конуса высотой 4 м и радиусом основания 3 м, наполнен моторным маслом и лежит на образующей. В его нижней части имеется круглое отверстие диаметром 12 см, через которое выливается жидкость. Определить время истечения всей жидкости из резервуара.

75. Задача. Шаровой резервуар объемом 600 м^3 наполнен моторным маслом. В его нижней части имеется круглое отверстие диаметром 12 см, через которое выливается жидкость. Определить время истечения всей жидкости из резервуара.

§ 6. ХИМИЯ



Слеп физик без математики,
сухорук без химии.

М. В. Ломоносов

Редкий математик любит ботанику или химию. Тем не менее, инженер обязан быть компетентным в химии, а также проявлять свою математическую компетентность в химических реакциях, подобных, например, тем, которые рассмотрены в данном параграфе сквозь призму линейной алгебры, и в решении задач о диффузии как аналитически, так и численно.

76. Задача. Найти уравнение синтеза метанола из CO и H_2 в присутствии CO_2 и H_2O .

Решение [48, с. 23–24]. В состав молекулы метанола CH_3OH входит 4 атома водорода H , 1 атом углерода C , 1 атом кислорода O . Поэтому метанол как вектор есть линейная комбинация векторов H , C , O , составляющих базис 3-мерного векторного пространства. Для веществ, указанных в условии, можно составить следующую таблицу.

Вещество	Формула	H	C	O
Метанол	CH_3OH	4	1	1
Оксид	CO	0	1	1
Водород	H_2	2	0	0
Диоксид	CO_2	0	1	2
Вода	H_2O	2	0	1

Фактически эта таблица представляет гомоморфизм (линейное отображение) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ 3-мерного векторного пространства \mathbb{R}^3 в 5-мерное векторное пространство \mathbb{R}^5 , определяемое матричным равенством $y = Ax$, где

$$y = \begin{pmatrix} \text{CH}_3\text{OH} \\ \text{CO} \\ \text{H}_2 \\ \text{CO}_2 \\ \text{H}_2\text{O} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \text{H} \\ \text{C} \\ \text{O} \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *атомной*; ее ранг $\text{rk} A$ равен 3. Чтобы найти стехиометрический вектор $\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5)^T$ для реакции $y^T \alpha = 0$, найдем ядро $V = \ker g$ гомоморфизма $g: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$, определяемого равенством $x = A^T y$. Другими словами, необходимо решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Поскольку ранг атомной матрицы A равен $\text{rk} A = 3$, размерность ядра V равна $\dim V = \dim \mathbb{R}^5 - \text{rk} A = 5 - 3 = 2$. Нетрудно установить, что ядро V состоит из векторов вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

В качестве базиса ядра V можно взять любую пару линейно независимых векторов. Положив, например,

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

получаем два вектора

$$(1 \ -1 \ -2 \ 0 \ 0)^T, \quad (0 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1)^T,$$

которые определяют две независимые реакции



и



77. Задача. Записать уравнение горения водорода в кислороде.

Решение. В состав молекулы воды H_2O входит два атома водорода Н и один атом кислорода О. Поэтому вода как вектор есть линейная комбинация векторов Н, О, составляющих базис 2-мерного векторного пространства. Для воды, водорода и кислорода можно составить следующую таблицу.

Вещество	Формула	Н	О
Вода	H ₂ O	2	1
Водород	H ₂	2	0
Кислород	O ₂	0	2

Атомный гомоморфизм $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задается матричным равенством $y = Ax$, где

$$y = \begin{pmatrix} \text{H}_2\text{O} \\ \text{H}_2 \\ \text{O}_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \text{H} \\ \text{O} \end{pmatrix}.$$

Ядро $V = \ker g$ гомоморфизма $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемого равенством $x = A^T y$, имеет размерность $\dim \ker g = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rk} A = 3 - 2 = 1$ и состоит из решений уравнения

$$A^T \alpha = 0$$

или

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

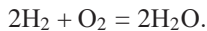
Множество решений этого уравнения есть множество векторов вида

$$\alpha = (2t \quad -2t \quad -t)^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В качестве базиса для V можно взять вектор $\alpha = (2 \quad -2 \quad -1)^T$. Он представляет реакцию



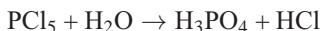
или



78. Задача. Прежде чем вылить в канализацию жидкие отходы лабораторных работ, содержащие соляную кислоту HCl, полагается их нейтрализовать щелочью (например, гидроксидом натрия NaOH) или содой (карбонатом натрия Na₂CO₃). Найти уравнение нейтрализации.

79. Задача. Схема реакции показывает, какие вещества вступают в реакцию и какие образуются в результате реакции. И в схемах, и в уравнениях реакций вещества обозначаются их формулами. Схема горения серы записывается так: S₈ + O₂ → SO₂. Написать уравнение реакции.

80. Задача. Из схемы

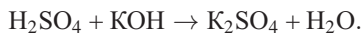


реакции, протекающей при взаимодействии пентахлорида фосфора с водой, видно, что образуется фосфорная кислота и хлороводород. Написать уравнение реакции.

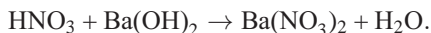
81. Задача. По схеме реакции горения метана в кислороде (или в воздухе) $\text{CH}_4 + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ найти уравнение реакции.

82. Задача. Схема восстановления железа водородом из его оксида $\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{H}_2 \rightarrow \text{Fe} + \text{H}_2\text{O}$ показывает, что при взаимодействии оксида железа с водородом (которое происходит при нагревании) образуются железо и вода. Найти уравнение реакции.

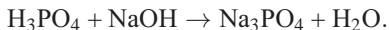
83. Задача. Найти уравнение реакции



84. Задача. Найти уравнение реакции



85. Задача. Найти уравнение реакции



86. Задача. Два жидких химических вещества A и B объемом 10 и 20 литров соответственно в процессе химической реакции образуют новое жидкое химическое вещество C . Считая, что температура в процессе реакции не меняется, а также что из каждых двух объемов вещества A и одного объема вещества B образуется три объема C , определить количество вещества C в произвольный момент времени t , если за 20 мин его образуется 6 л.

Решение. Пусть x — объем (в литрах) вещества C , образовавшегося за t часов. Согласно условию, в химическую реакцию за это время вступило $2x/3$ литров вещества A и $x/3$ литров вещества B . Тогда не вступило в реакцию $10 - \frac{2}{3}x$ литров вещества A и $20 - \frac{1}{3}x$ литров вещества B . Следовательно, согласно закону действующих масс, который гласит, что *скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции:*

$$\dot{x} = K \left(10 - \frac{2}{3}x\right) \left(20 - \frac{1}{3}x\right),$$

или

$$\dot{x} = k(15 - x)(60 - x), \quad (1)$$

где $k = 2K/9$ — коэффициент пропорциональности; при этом, согласно условию,

$$x(0) = 0, \quad (2)$$

$$x(1/3) = 6. \quad (3)$$

Для решения получившейся краевой задачи сначала интегрируем (1):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = kdt &\Rightarrow \frac{1}{45} \int \left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x} \right) dx = kt + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\ln(15-x) + \ln(60-x) = 45(kt + C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \frac{60-x}{15-x} = 45(kt + C) \Rightarrow \\ &\frac{60-x}{15-x} = e^{45(kt+C)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (2), (4) следует $C = \frac{1}{45} \ln 4$. Из (3), (4) следует $e^{15k} = \frac{3}{2}$. Отсюда и из (4) следует

$$\frac{60-x}{15-x} = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{3t} \Rightarrow x = 60 \frac{1 - (2/3)^{3t}}{4 - (2/3)^{3t}}.$$

На \mathbb{R}_+ функция $x(t)$ монотонно возрастает (рис. 86.1) и ограничена сверху. Об этом свидетельствует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 15,$$

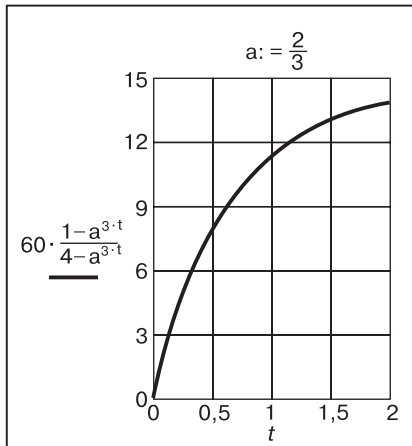


Рис. 86.1

который к тому же показывает, что максимальное количество вещества C может образоваться в количестве 15 литров (за бесконечно большое время). Впрочем, это следует непосредственно из условия задачи: вещества A имеется изначально 10 литров, поэтому оно может прореагировать лишь с 5 литрами вещества B . ■

87. Задача. Растворенное вещество с начальной концентрацией $C_0 \in \mathbb{R}_+$ диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, в растворитель, ограниченный плоскостями $x = h$ и $x = l$, $l > h$. Исследовать процесс выравнивания концентрации в предположении, что границы $x = 0$ и $x = l$ непроницаемы для вещества.

Решение 1 (аналитическое). Задача сводится к решению уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

при краевых условиях

$$\left. \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

$$C(x, 0) = \begin{cases} C_0, & x \in [0, h], \\ 0, & x \in [h, l]. \end{cases} \quad (4)$$

При данных условиях решением уравнения (1) является функция

$$C(x, t) = 2C_0 \left(\frac{h}{2l} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi h}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} e^{-Dk^2 \pi^2 t/l^2} \right). \quad (5)$$

На рис. 87.1 представлен график этой функции при $l = 2h$. ■

Решение 2 (численное). Решение будем искать в прямоугольнике Π , ограниченном прямыми $t = 0$, $x = 0$, $x = l$, $t = T$. При этом должны быть заданы значения искомой функции C на стороне $t = 0$.

Покроем Π сеткой, образованной прямыми $x = ip$, $i = 1 \dots n$, $t = jq$, $j = 1 \dots k$, и будем определять приближенные значения решения в узлах (i, j) сетки, т. е. в точках пересечения этих прямых. Положим $C(ip, jq) = c_{ij}$. Вместо (1) запишем соответствующее ему уравнение в конечных разностях для точки c_{ij} . При решении уравнений в частных

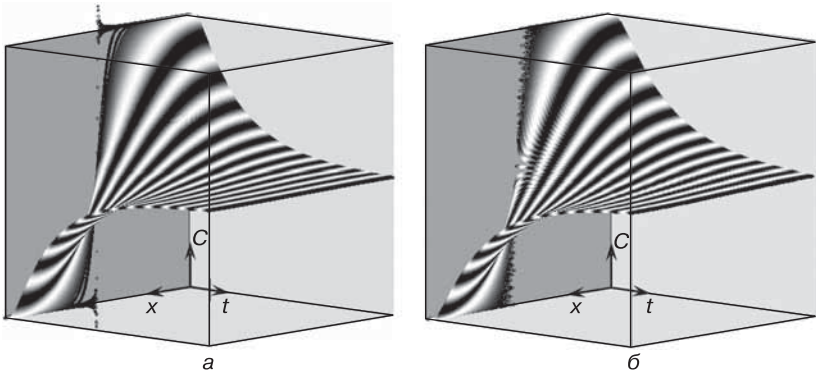


Рис. 87.1. 3D-график функции $C(x, t)$ концентрации диффундирующего растворенного вещества из раствора в растворитель: а) график, полученный по формуле (5); б) график, построенный посредством численного моделирования

производных методом конечных разностей производные заменяются соответствующими разностями:

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} \approx \frac{C(x, t+q) - C(x, t)}{q}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{p} \left(\frac{C(x+p, t) - C(x, t)}{p} - \frac{C(x, t) - C(x-p, t)}{p} \right). \quad (7)$$

Согласно (6), (7),

$$\frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{q} = D \frac{c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j}}{p^2}. \quad (8)$$

Из (8) следует:

$$c_{i,j+1} = (1 - 2Dq/p^2)c_{i,j} + Dq(c_{i+1,j} + c_{i-1,j})/p^2. \quad (9)$$

Из (9) следует, что если известны три значения в j -м ряду: $c_{i-1,j}$, $c_{i,j}$, $c_{i+1,j}$, то определяется значение $c_{i,j+1}$ в следующем ряду. Формула (9) упрощается, если $q = p^2/(2D)$. Тогда

$$c_{i,j+1} = \frac{1}{2}(c_{i+1,j} + c_{i-1,j}). \quad (10)$$

Для выполнения условий (2), (3) мы сначала вычислим значения $c_{i,j+1}$ для $i = 2 \dots n - 1$, а затем положим

$$c_{1,j+1} = \frac{1}{2}(c_{1,j} + c_{2,j+1}),$$

$$c_{n,j+1} = \frac{1}{2}(c_{n,j} + c_{n-1,j+1}).$$

Одно из приближенных решений при $l = 2h$, $n = 100$, $k = 8000$ наглядно представлено графиком на рис. 87.1б. Сравнивая графики аналитического и численного решений, мы видим, что они мало разнятся между собой. ■

Прямая обязанность художника —
показывать, а не доказывать.

А. А. Блок

§ 7. РЕЗЕРВУАРЫ ДЛЯ ХРАНЕНИЯ НЕФТЕПРОДУКТОВ



Вкус, который умеет выбирать и совершенствовать, есть важная часть изобретения.

А. С. Пушкин

Рассмотрим серию задач на развитие «жестяного» мышления, когда требуется изготовить из жести изделие с требуемыми свойствами.

88. Задача. Из квадратного стального листа со стороной $a = 6$ требуется изготовить удовлетворяющую трем требованиям коробку:

- (А) с открытым верхом
- (Б) с квадратным основанием
- (В) наибольшей вместимости.

Решение. Вырезав из каждого угла квадрат (рис. 88.1) со стороной x и загнув соответствующим образом края стального листа (рис. 88.2), получим коробку с открытым верхом, объем которой равен $V = x(a - 2x)^2$.

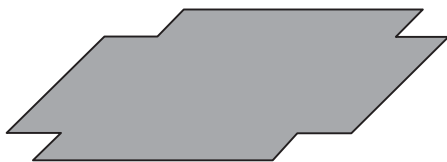


Рис. 88.1



Рис. 88.2

Так как

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 8ax + a^2, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 8a,$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{6}a \vee x_2 = \frac{1}{2}a, \quad \frac{d^2V}{dx^2}(x_1) = -4a < 0,$$

x_1 — точка максимума функции V ; при этом $V(x_1) = 2a^3/27 = 16$ (куб. ед.). ■

89. Задача. Из стального листа размером 8×5 требуется изготовить коробку наибольшей вместимости с открытым верхом. Сделать раскройку листа.

Решение. Вырежем из каждого угла прямоугольника квадрат со стороной x (рис. 89.1). Загнув края заготовки, получим коробку объемом $V = x(5 - 2x)(8 - 2x)$.

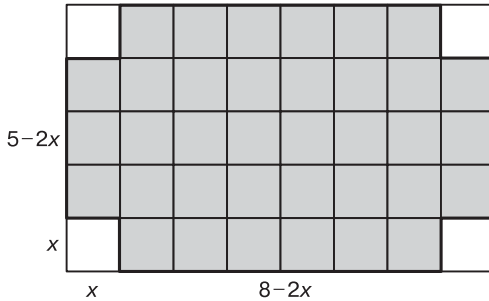


Рис. 89.1

Так как

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 52x + 40, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 52,$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{10}{3}, \quad \frac{d^2V}{dx^2}(x_1) = -28 < 0,$$

то x_1 — точка максимума функции V ; при этом $V(x_1) = 18$. ■

☛ Студентам с формирующимся исследовательским духом непременно захочется попробовать свои силы в решении задачи 89, когда стальной лист имеет размеры $a \times b$, где a, b — произвольные положительные числа. Если $a = b$, то получим задачу 88.

Из методических соображений данные в задаче 89 подобраны так, что $a, b, x_1 \in \mathbb{N}$. Посредством ИКТ легко решается вопрос о других целочисленных парах (a, b) , дающих целое значение x_1 ; например, $(21, 16)$, $(24, 9)$, $(30, 14)$, $(45, 24)$, $(120, 21)$, $(165, 48)$.

Инженеры мыслят не так, как математики, поэтому — в контексте вариаций на тему задачи 88 — креативные устремления будущих инженеров будут сопряжены, скорее всего, с предметной стороной задачи: какой объект, из чего и при каких ограничениях сделан, каковы оптимальные затраты: финансовые, энергетические, временные и т. п. В зависимости от этого, как показывает анализ содержания задач 90–105, могут возникнуть задачи различного уровня трудности в математическом отношении:

□ легкие (задачи 91–96, 98, 101 — на нахождение максимума функции);

□ повышенной трудности (задача 97 — на максимум функции, проблемы 103, 104 — на вариации относительного положения тел);

□ трудные (задача 99 — решается либо эмпирически, либо посредством мягкого моделирования; проблема 100 — не математическая, инженеру нужно исследовать ее математическими средствами, допуская на начальном этапе полет фантазии в условиях плохой видимости в предметной области, проблема 102 — конусы — это просто, они изучаются в школе; но здесь два конуса, да еще подобных; — погаснет ли пожар в платоновом пространстве? задача 105 — задача фрактальной геометрии, задача 90 — трудность в сложности).

Это только кажется, что задача 88 — нетрудная. Проблема — в прочтении текста задачи: в условии не сказано, что вырезать следует именно квадратики. Следовательно, задачи 88 и 89 не решены. Действительно, если, решая задачу 88, от жестянки отрезать не квадраты, а дельтоиды, определяемые параметрами x, y , то, легко видеть, днище коробки будет квадратом со стороной $p = a - 2x$, верх коробки — квадратом со стороной $q = p + 2y$, высота же коробки будет равна $h = y = \sqrt{x^2 - y^2}$. Стало быть, задача сводится к нахождению параметров x, y , при которых объем

$$W = \frac{h}{3}(p^2 + pq + q^2)$$

коробки будет максимальным. Другими словами, задача состоит в исследовании функции

$$W(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - y^2} [(a - 2x)^2 + (a - 2x)(a - 2x + 2y) + (a - 2x + 2y)^2]$$

двух переменных на экстремум. Задача эта, как легко убедиться, трудна для решения аналитическими средствами, но не вызовет ни малейшего затруднения, если под рукой окажется компьютер. Численные методы дают решение $(x, y) \approx (0,2342a; 0,1236a)$, при котором объем $W \approx 18 \frac{2}{3}$ (куб.ед.) получившейся коробки составляет $7/6$ объема V коробки в задаче 88.

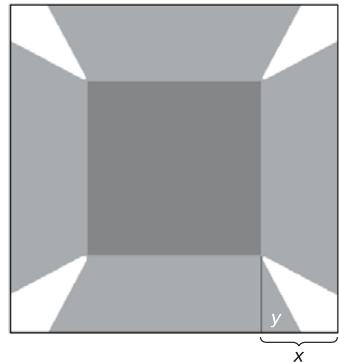


Рис. 88.3

Идея — удалить из стального листа не квадраты, а дельтоиды (рис. 88.3), — привела к необходимости исследовать мягкую модель (при ограничениях $y < 2x < a$), которая включает в себя как частный случай жесткую модель, когда дельтоид является

квадратом (при $y = x$). В жесткой модели боковые стороны коробки сшиты по вертикальному отрезку, в мягкой же модели они сшиты по наклонному отрезку (рис. 88.4). А если — вот она, новая идея! — сшить боковые стороны не по отрезку, а по дуге некой кривой (пока не очень понятно, какой именно)! Другими словами, пусть боковая грань коробки является не плоской, а частью искривленной поверхности, скажем, прямого кругового цилиндра (рис. 88.5). (Это уже не коробка, а какое-то корыто!) В данном случае, как подсказывает интуиция, боковина должна касаться основания коробки по некоторой образующей длины p , а верхний край боковины должен иметь вертикальную касательную плоскость. Тогда максимальный объем коробки будет равен $T \approx 20,49$ (куб. ед.) при $p \approx 1,8195$.



Рис. 88.4



Рис. 88.5

Как видим, $V < W < T$.

Задача 88 так и осталась нерешенной. 

90. Задача. У квадратной жестянки по углам вырезаются четыре квадрата со стороной a . Затем полученная таким образом крестообразная заготовка сгибается в прямую призму без верхней крышки, а четыре шва свариваются (паяются). Из четырех обрезков изготавливаются новые четыре коробки, новые обрезки (их уже будет 16) тоже пойдут в дело, и так до бесконечности. При каком a суммарный объем всех коробок будет максимальным?

Решение 1. В книге [31, с. 47] предложено решение в оболочке MathCAD PLUS 6.0, которое мы приводим на рис. 90.1.

$$n := 20 \quad V(x) := \sum_{i=1}^n 4^{i-1} x^i (x^{i-1} - 2x^i)^2 \quad x := 0.1$$

Given $V(x) = 0.1 \quad a := \text{MinErr}(x) \quad a = 0.173648177666038$

Рис. 90.1

Таким образом, решением является число $a = 0,173648\dots$

☞ Казалось бы, цель достигнута, искомое число a найдено. Однако, с исследовательской точки зрения, уровень неопределенности все еще высок, так как природа этого числа остается неясной; например, непонятно, является ли оно алгебраическим. Попытаемся уменьшить энтропию посредством решения 2. 🔒

Решение 2. Пусть сторона квадратной жестянки равна b . Тогда после первого шага итерационного процесса объем коробки равен $V_1 = a(b - 2a)^2 = \lambda b^3$, где $\lambda = x(1 - 2x)^2$, $x = a/b$. После второго шага получится объем V_2 четырех коробок, каждая из которых вырезана из квадрата со стороной a : $V_2 = 4\lambda b^3 x^3 = \lambda b^3 q$, $q = 4x^3$, и т. д. Суммарный объем равен

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{\infty} V_i = \\ &= \lambda b^3 + 4\lambda b^3 x^3 + \lambda b^3 (4x^3)^2 + \lambda b^3 (4x^3)^3 + \dots + \lambda b^3 (4x^3)^n + \dots = \\ &= \lambda b^3 (1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots) = b^3 \frac{x(1 - 2x)^2}{1 - 4x^3}. \end{aligned}$$

Поиск точки максимума приводит к необходимости найти нули многочлена 4-й степени: $f(x) = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 8x - 1$. Из геометрических соображений ясно, что точка $x = 1/2$ является точкой минимума функции V , а значит, нулем многочлена f . Следовательно, $f(x)$ делится без остатка на $2x - 1$, т. е. $f(x) = (2x - 1)g(x)$, где

$$g(x) = 8x^3 - 6x + 1.$$

Вычисление вещественного корня a многочлена g посредством линейной подстановки $2x = t$ сведем к нахождению вещественного корня τ кубического многочлена $h(t) = t^3 - 3t + 1$:

$$p = -3, \quad q = 1,$$

$$\tau = A+B, \quad A = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad Q = (p/3)^3 + (q/2)^2 = -\frac{3}{4},$$

$$A^3 = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi, \quad B^3 = \cos \frac{2}{3}\pi - i \sin \frac{2}{3}\pi,$$

$$A = \cos \frac{4}{9}\pi + i \sin \frac{4}{9}\pi, \quad B = \bar{A},$$

$$x_0 = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}(A + \bar{A}) = \cos 80^\circ = 0,173649\dots$$

Остается добавить, что при $b = 6$ суммарный объем $V = 16,32107$ оказался лишь на 2% больше объема, полученного в задаче 88. ■

Из шестнадцати атрибутов Раймондо
Луллио можно получить
20 922 789 888 000
различных сочетаний.

С. Дали

Теперь, когда нам стала ясна природа числа x_0 , появилась новая неопределенность, но уже иного порядка. Обычно комплексные числа, изображающиеся на плоскости точками единичной окружности, появляются при вращениях, колебаниях. А здесь такое число встретилось в задаче про коробку (правда, заготовка у нее квадратная).

Девиз исследователя: «Хорошо, когда не все понятно, — есть над чем подумать!».

Предположим, нам удалось устранить одну неопределенность, увеличив тем самым порядок за счет уменьшения хаоса, тогда появятся новые неясности. Стало быть, процесс построения порядка из хаоса приводит к увеличению хаоса посредством порядка: чем больше мы узнаем, тем больше непонятого становится. Хаос и порядок — питательная среда друг для друга.

Вывод: исследовательская деятельность нацелена на производство суждений, рождающихся в точках бифуркации.

91. Задача. Из листового железа требуется изготовить резервуар для хранения нефтепродуктов в форме прямоугольного параллелепипеда емкостью $V = 16 \text{ м}^3$, при этом расход металла должен быть минимальным.

Решение этой задачи инженер начнет с построения оптимизационной математической модели резервуара, поставив при этом три вопроса:

ЦФ — какова целевая функция?

ОМ — каковы ограничения модели?

ГУ — каковы граничные условия?

В оптимизационной математической модели целевая функция стремится к экстремальному значению.

Данная задача удовлетворяет критериям, предъявляемым к профессионально ориентированной задаче, а именно: быть технически мотивированной, быть математически моделируемой, иметь степени свободы для вариативности с целью обогащения исследовательского и креативного опыта личности. Изменяя ЦФ, ОМ или ГУ предыдущей задачи, можно получать различные задачи, основной и главной целью которых является не изобретение или открытие в технической области,

а формирование творческого потенциала будущего инженера. Заметим, что в предыдущей задаче бак обладает характерной особенностью — он «открытый», т. е. у него отсутствует верхняя грань. Если рассматривать полностью закрытые резервуары, то получится ряд задач, формулировка и решение которых обогатят исследовательский и математический опыт будущего инженера.

В зависимости от производственных и технологических возможностей предприятия могут существовать различные целевые функции. Мы ограничимся минимумом расхода на металл или минимумом длины сварного шва.

1. Ограничение на расход металла. Здесь возможны различные варианты изготовления резервуара. Результаты исследования некоторых форм помещены в табл. 91.1.

Таблица 91.1

Форма резервуара	Характерные линейные элементы	Длина, м	Площадь F , м ²
Куб	Ребро r	$r = 2,520$	38,0976
Бочка	Радиус основания r Высота $h = 2r$	$r = 1,366$ $h = 2,731$	35,1502
Конус	Радиус основания r Высота $h = 2r\sqrt{2}$	$r = 1,755$ $h = 4,963$	38,6878
Сфера	Радиус r	$r = 1,563$	30,7065

Прямоугольный параллелепипед. В случае изготовления резервуара в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами x , y , z математическая модель примет вид:

$$(ЦФ) F(x, y, z) = 2(yz + zx + xy) \rightarrow \min,$$

$$(ОМ) xyz = V,$$

$$(ГУ) x, y, z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Используя свои познания из курса дифференциального исчисления, инженер вычислит, что резервуар окажется кубом, ребро которого равно $r = \sqrt[3]{V} = 2\sqrt[3]{2} \text{ м} = 2,520 \text{ м}$ (рис. 91.1).

Бочка. Пусть для простоты бочка является цилиндром с образующей h и радиусом основания r . Тогда перед инженером — следующая математическая модель:

$$(ЦФ) F(r, h) = 2\pi r(r + h) \rightarrow \min,$$

$$(ОМ) \pi r^2 h = V,$$

$$(ГУ) r, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Решением задачи будет бочка, у которой

$$r = [0,5V/\pi]^{1/3} = 1,366 \text{ м}, \quad h = 2r.$$

Исследовательский дух инженера просто обязан сравнить оба полученных решения и выявить, какой резервуар предпочтительнее — куб или бочка. Поскольку на изготовление куба требуется

$$F_{\text{Куб}} = 6r^2 = 38,098 \text{ м}^2,$$

а на изготовление бочки — $F_{\text{Бочка}} = 6\pi r^2 = 35,150 \text{ м}^2$ листового железа, бочка обойдется дешевле куба на 8,4% (рис. 91.1).

Конус. Исследовательская тропинка может привести инженера к идее изготовить резервуар в виде конуса с основанием r и высотой h . В этом случае изучается следующая математическая модель резервуара:

$$\text{(ЦФ)} \quad F(r, h) = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \rightarrow \min,$$

$$\text{(ОМ)} \quad \pi r^2 h = 3V,$$

$$\text{(ГУ)} \quad r, h \in \mathbb{R}_+^*,$$

оптимальным решением которой является конус с

$$r = [1,5V/(\pi\sqrt{2})]^{1/3} = 1,755 \text{ м}, \quad h = 2r\sqrt{2} = 4,963 \text{ м}.$$

При этом расход материала оказывается почти таким же, как при изготовлении куба: изготовление конуса лишь на 1,5% дороже изготовления куба (рис. 91.1).

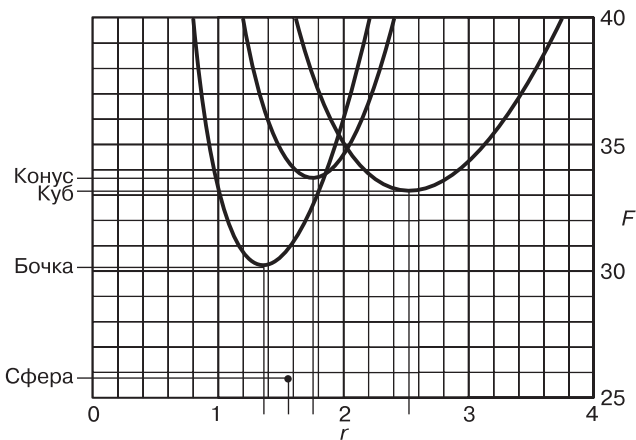


Рис. 91.1. Зависимости объемов резервуаров от радиуса r

Сфера. Если бы технологическое оборудование позволило путем штамповки изготовить из листовой стали полусферу, то получилось

бы самое экономичное решение технической задачи в виде сферы, половинки которой сварены по «экватору». В этом случае математическая модель остается без ЦФ, так как $3V = 4\pi r^3$, следовательно, $r = [0,75V/\pi]^{1/3} = 1,563$ м. Примечательно, что площадь сферы равна $F_{\text{СФЕРА}} = 30,707$ м², т. е. бочка на 14,5% дороже сферы.

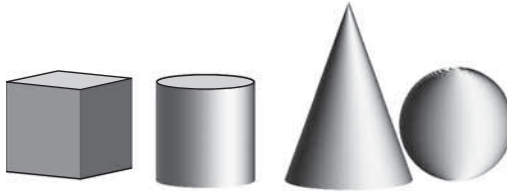


Рис. 91.2. Равновеликие резервуары

При решении задач важным является эмоциональное восприятие решаемой задачи, которое оказывает активное воздействие на деятельность творческого воображения. Воображение, возникая в ответ на стремление и побуждение студентов, реализуется в их творческой деятельности.

2. Ограничение на длину сварного шва. Результаты исследования некоторых форм при данном ограничении помещены в табл. 91.2.

Таблица 91.2

Форма резервуара	Характерные линейные элементы	Длины элементов, м	Длина шва, м
Куб	Ребра $r, 2r, 4r$	$r = \sqrt[3]{V/8}$	$12r = 15,119$
Бочка	Радиус основания r Высота $h = \pi r$	$r = 1,175$ $h = 3,691$	11,072
Конус	Радиус основания r Высота конуса h	$r = 1,647$ $h = 5,632$	16,217
Сфера	Радиус $r = \sqrt[3]{0,75V/\pi}$	$r = 1,563$	9,822

На рис. 91.3 приведено решение задачи в случае, когда резервуар имеет форму конуса.

Варьируя условия задачи, следует рассмотреть оба ограничения — и на расход листовой стали, и на длину сварного шва. При этом математическая модель может усложниться.

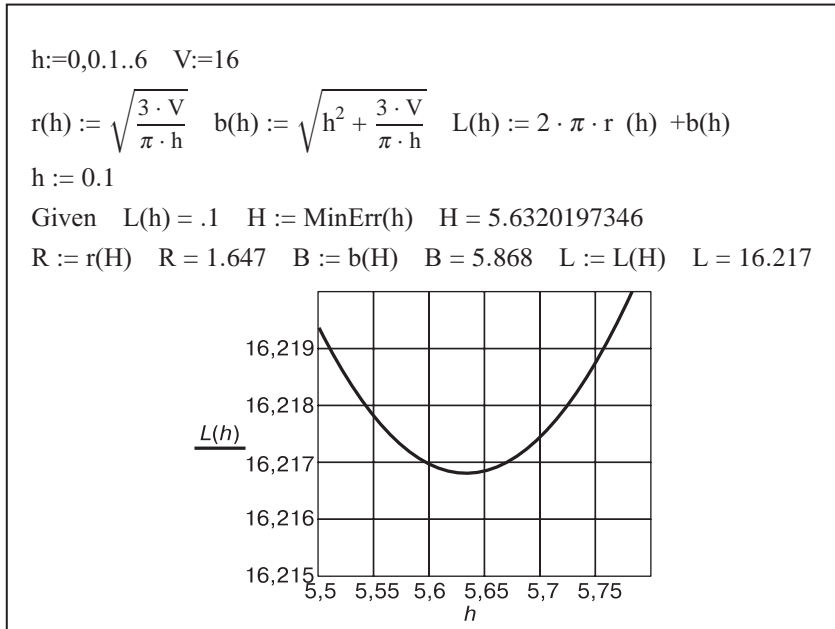


Рис. 91.3. Решение в MathCAD задачи о конусе с минимальной длиной шва

92. Задача. Из листового железа требуется изготовить цилиндрическую бочку для хранения керосина емкостью $V = 16 \text{ м}^3$, при этом расход металла должен быть минимальным.

93. Задача. Из листового железа требуется изготовить резервуар для хранения солянки конической формы емкостью $V = 16 \text{ м}^3$, при этом расход металла должен быть минимальным.

94. Задача. Из листового железа требуется изготовить резервуар для хранения нигрола в форме прямоугольного параллелепипеда емкостью $V = 16 \text{ м}^3$, при этом длина сварного шва должна быть минимальной.

95. Задача. Из листового железа требуется изготовить цистерну для хранения мазута емкостью $V = 16 \text{ м}^3$, при этом длина сварного шва должна быть минимальной.

96. Задача. Из листового железа требуется изготовить резервуар для хранения моторного масла конической формы емкостью $V = 16 \text{ м}^3$, при этом длина сварного шва должна быть минимальной.

97. Проблема. Из прямоугольной жестянки размером $a \times b$ требуется изготовить коробку с открытым верхом наибольшего объема. Чему может равняться высота такой коробки?

98. Задача. Из жестяного круга радиусом R требуется изготовить пожарное ведро наибольшей вместимости (такое ведро представляет собой боковую поверхность конуса). Найти размеры и вычислить объем пожарного ведра.

99. Проблема. Исследовать процесс испарения воды из пожарного ведра.

100. Проблема. Из жестяного круга радиусом R требуется изготовить емкость наибольшей вместимости. Выявить форму и найти размеры такой емкости.



Рис. 100.1. Кубки: a — циклоидальный, b — полусферический, v — конический

Данная задача — из числа творческих, так как допускает самые неожиданные повороты креативной мысли. В этом читатель убедится немедленно, как только начнет погружаться в проблему. В потоке сознания, навеянном данной темой, у читателя может возникнуть следующая задача: «Пусть γ — дуга кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0, \tau]$; при этом

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x_1 = x(\tau), \quad y_1 = y(\tau),$$

где τ — такое значение параметра t , что длина дуги γ равна R . Найти такую кривую γ , которая при вращении вокруг оси ординат дает сосуд наибольшего объема». Эту задачу можно попытаться решить методами вариационного исчисления. Но, к сожалению, его изучение не включено в дисциплину «Математика» для инженерных специальностей. Поэтому мы не будем решать эту задачу. Тем не менее можно рассмотреть частные случаи, взяв в качестве γ три кривые: половину арки циклоиды, четверть окружности и отрезок, длины которых равны 1; тогда получим

соответственно объемы:

$$V_1 = \frac{\pi}{6 \cdot 64} (9\pi^2 - 16) \approx 0,596,$$

$$V_2 = \frac{16}{3\pi^2} \approx 0,540,$$

$$V_3 = 2\pi\sqrt{3}/27 \approx 0,403.$$

Как видим, наибольший объем у циклоидального кубка, наименьший — у конического, а между ними (по вместимости) располагается полусферический кубок.

101. Задача. Из жестяного круга радиусом R требуется изготовить два пожарных ведра (рис. 101.1) наибольшей суммарной вместимости. Найти размеры ведер.

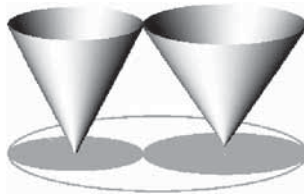


Рис. 101.1. Два пожарных ведра

102. Проблема. На плоской поверхности расположены два подобных пожарных ведра: одно лежит на боку, другое накрывает его сверху. Каким может быть коэффициент подобия ведер?

103. Задача. На столе две подобных кастрюли: меньшая лежит на боку и накрыта большей. Каким может быть коэффициент подобия кастрюль?

104. Задача. Внутри цилиндра помещены два подобных ему цилиндра. Какими могут быть коэффициенты подобий?

105. Задача. Внутри главной матрешки цилиндрической формы помещены две — подобные ей и равные между собой — матрешки (потомки 1-го поколения — дочки); внутри каждой из дочек — по две дочки, исполненные по подобию главной матрешки (потомки 2-го поколения — внучки); внутри каждой из внучек — по две дочки, подобные главной матрешке (потомки 3-го поколения — правнучки), и т. д. Как может выглядеть множество потомков n -го поколения в пределе $n \rightarrow \infty$?

Решение. Пусть H — высота большой матрешки, R — радиус ее основания; у маленькой же матрешки высоту и радиус основания обозначим h , r . Из условия подобия цилиндров следует:

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R}. \quad (1)$$

В условии задачи не сказано, как располагаются дочки относительно главной матрешки. Один из нетривиальных случаев расположения такой: дочки касаются своими образующими дна и крышки главной матрешки (рис. 105.1, 105.2). Отсюда следует, что

$$H = 2r. \quad (2)$$

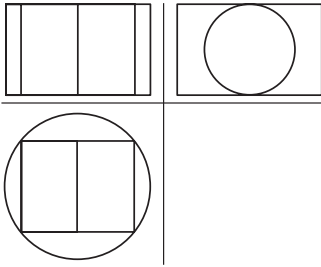


Рис. 105.1. Три проекции главной матрешки и двух ее дочек

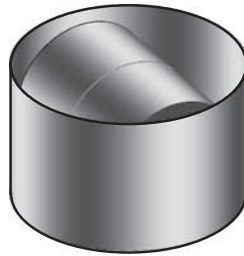


Рис. 105.2. Главная матрешка и две ее дочки

Наконец, полагая, что дочки имеют общее основание, и, применив теорему Пифагора, находим:

$$R^2 = r^2 + h^2. \quad (3)$$

Из (1), (2) следует $hR = 2r^2$. Отсюда и из (3) следует квадратное уравнение $2x^2 + x - 2 = 0$, где $x = h/R$; его положительным корнем служит число $\Psi = (\sqrt{17} - 1)/4 \approx 0,780776$. Таким образом,

$$\begin{aligned} h &= \Psi R = 0,780776 R, \\ r &= \frac{1}{2} R \sqrt{2\Psi} = 0,624811 R, \\ H = 2r &= R \sqrt{2\Psi} = 1,249621 R. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы описать положение матрешек в пространстве, введем прямоугольную декартову систему координат, — выбрав центр O главной матрешки

за начало и направив ось Oz вдоль оси матрешки, — и рассмотрим следующие преобразования. Пусть A — гомотетия с центром O и коэффициентом k . Гомотетия A определяется матричным уравнением:

$$X' = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поворот R вокруг оси Oz на угол $\varphi = \pi/2$ зададим уравнением:

$$X' = RX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, параллельный перенос T определим уравнением:

$$X' = TX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Положив $k = r/R$, $a = -h/2$, рассмотрим два преобразования:

$$\alpha = TRA, \quad \beta = T^{-1}R^{-1}A.$$

Обозначив главную матрешку через M_0 , выполним 1-й шаг итерационного процесса; получим две дочки $\alpha(M_0)$, $\beta(M_0)$ — потомков 1-го поколения; объединение

$$M_1 = \alpha(M_0) \cup \beta(M_0)$$

называют *предфракталом* 1-го поколения. После 2-го шага итерационного процесса получим предфрактал 2-го поколения

$$M_2 = \alpha(M_1) \cup \beta(M_1)$$

и т. д. После n -го шага итерационного процесса получим

$$M_n = \alpha(M_{n-1}) \cup \beta(M_{n-1}).$$

На рис. 105.3 показан предфрактал 9-го поколения.

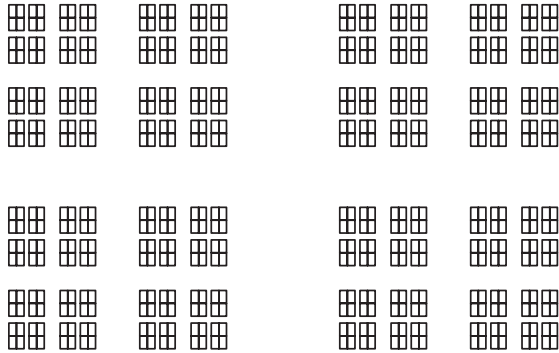


Рис. 105.3. Главная матрешка и 512 ее потомков в 9-м колене

Множество $M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ лежит в плоскости $y = 0$ и является *фракталом*. Его размерность Минковского равна

$$D_M = -\frac{\ln 2}{\ln k} = 1,47382.$$

■

Все, нет больше крупных бабочек!

С. Дали

§ 8. КОЛЕБАНИЯ РЕССОРЫ

Теорию гармонических колебаний и сопутствующие ей линейные дифференциальные уравнения второго порядка вместе с векторными полями и фазовыми кривыми студенты усваивают на порядок лучше, если это делать с применением наглядности в виде реальной рессоры и динамических графических образов, демонстрируемых на мониторе компьютера.

106. Задача. Пусть груз массы Q покоится на упругой рессоре R (рис. 106.1). Предположим, что сила, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия, — так называемая *восстанавливающая сила* — пропорциональна отклонению, т. е. равна $-ky$, где k — некоторая постоянная для данной рессоры величина — так называемая *жесткость рессоры*. (Рессоры, у которых восстанавливающая сила пропорциональна отклонению, называются рессорами с *линейной характеристикой*.) Груз отклонили от положения равновесия и отпустили. Исследовать закон движения груза [33, с. 98–107].

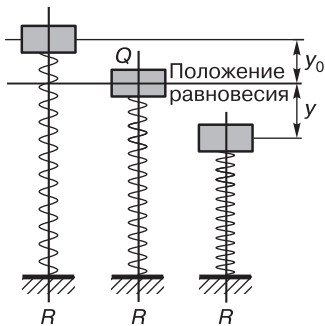


Рис. 106.1

Решение. А. Общее решение. Пусть y — отклонение груза от положения равновесия. Отклонение вниз будем считать положительным, вверх — отрицательным. Согласно второму закону Ньютона, $Q\ddot{y} = -ky$, $k > 0$. Это уравнение можно переписать так:

$$\ddot{y} + qy = 0, \quad (1)$$

где $q = \frac{k}{Q}$. Так как корнями характеристического уравнения $z^2 + q = 0$ являются комплексно сопряженные числа $\pm\omega i$, где $\omega = \sqrt{q}$, то

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (2)$$

— общее решение уравнения (1). Из (2) следует, что

$$y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

если $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, или равносильно, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi = \arctg \frac{C_1}{C_2}$. Колебания (3) называются *гармоническими*. Интегральными кривыми являются синусоиды с *периодом* колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Частотой колебания называется число колебаний за время 2π ; в данном случае частота равна ω ; A — *амплитуда* колебания, т. е. величина наибольшего отклонения груза от положения равновесия; φ — *начальная фаза*. График функции (3) изображен на рис. 106.2.

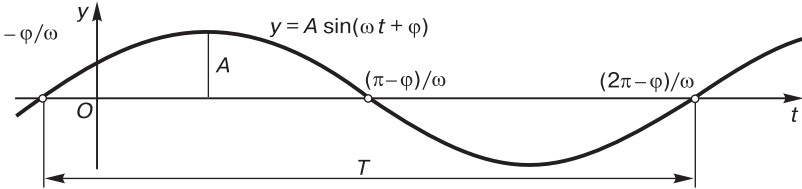


Рис. 106.2

Б. *Фазовый портрет*. Сделаем замену $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ и перейдем в так называемую *плоскость состояний* или *фазовую плоскость*. Фазовая плоскость есть пространство всех состояний рассматриваемой динамической системы. Разные состояния изображаются разными фазовыми точками; и наоборот, различные точки изображают различные состояния. Таким образом, изменение состояний системы можно мыслить как движение точки на фазовой плоскости по некоторой траектории — *фазовой кривой*; скорость этой точки называется *фазовой скоростью*.

Выясним, что представляют собой фазовые кривые. Из (3) следует

$$x_1 = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$x_2 = \omega A \cos(\omega t + \varphi).$$

Исключим параметр t :

$$x_1 = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$x_2/\omega = A \cos(\omega t + \varphi),$$

или

$$x_1^2 = A^2 \sin^2(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{x_2^2}{\omega^2} = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi);$$

после сложения и деления на A^2 получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{\omega^2 A^2} = 1 \quad (4)$$

с полуосями A , ωA (рис. 106.3).

Из (2) или, равносильно, (3) вытекает, что интегральные кривые составляют двумерное множество синусоид. В то же время из (4) следует, что фазовые кривые образуют одномерное семейство эллипсов. Уменьшение размерности многообразия кривых (в данном случае с 2 до 1) — не единственное достоинство фазовой плоскости как питательной среды качественных методов исследования дифференциальных моделей.

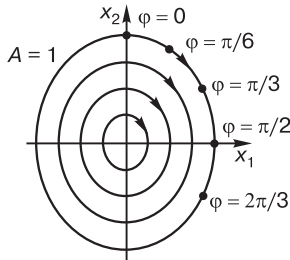


Рис. 106.3. Семейство фазовых кривых при амплитудах $A = 1/4, 1/2, \dots, 1$ ($\omega = 6/5$). Фазовые кривые — подобные эллипсы с отношением полуосей $1 : \omega$. На эллипсе, соответствующем амплитуде $A = 1$, расположены 5 точек с начальными фазами $\varphi = 0, \pi/6, \dots, 2\pi/3$. Всякая фазовая траектория является ориентированной

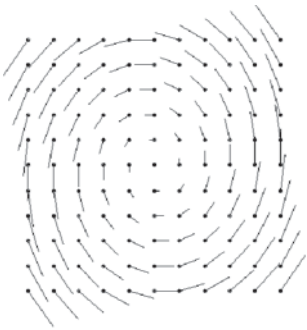


Рис. 106.4

В. Векторное поле. В каждой точке $x = (x_1, x_2)$ фазовой плоскости определен вектор скорости

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (\dot{y}, \dot{y}) = (x_2, -kx_1).$$

Тем самым на плоскости задано так называемое *векторное поле*. Его можно мысленно представить как течение жидкости по плоскости (рис. 106.4). Точка, в которой вектор скорости равен нулю, называется *особой* (или *неподвижной*) *точкой* векторного поля. В нашем случае особой является точка $(0, 0)$. Она соответствует такому состоянию динамической системы, когда скорость и ускорение равны нулю, т. е. система находится в состоянии равновесия, покоя.

Поскольку все фазовые кривые — эллипсы, а эллипс — замкнутая кривая, мы заключаем, что колебания груза — циклические, т. е. бесконечно много раз повторяются во времени (с периодом T). Замкнутая фазовая кривая называется *циклом*. ■

В предыдущей задаче движение груза и сжатие пружины происходят без потери энергии. Такая модель является идеальной, так как она не учитывает реальных факторов, приводящих к потере энергии. Тем не менее она помогла нам разобрать простейшие вопросы теории колебаний, а также познакомиться с некоторыми понятиями и терминами, связанными с фазовой плоскостью и векторным полем, а кроме того, дать интерпретацию колебаний в этих терминах. Появление следующей задачи мотивировано потерей энергии из-за наличия трения, которое в инженерной практике, как правило, необходимо учитывать.

107. Задача. Пусть груз массы Q совершает колебания на упругой рессоре с линейной характеристикой; при этом выполняются два условия: 1) восстанавливающая сила жесткости $k \in \mathbb{R}_+$, 2) движению груза препятствует сила F сопротивления, направленная в сторону, противоположную направлению движения, и пропорциональная скорости движения груза относительно нижней точки рессоры. Исследовать закон движения груза.

Решение. А. Общее решение. Согласно условию 2, $F = -\lambda v = -\lambda \dot{y}$, где $\lambda \in \mathbb{R}_+$ — так называемый *амортизатор*. Условие 1 обсуждалось в решении предыдущей задачи. Теперь уравнение движения груза на рессоре, согласно второму закону Ньютона, становится дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$Q\ddot{y} = -ky - \lambda\dot{y}, \quad (1)$$

или

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0, \quad (2)$$

где $p = \lambda/Q$, $q = k/Q$.

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ для (2) равны

$$k_1 = -\frac{1}{2}(p - \sqrt{D}), \quad k_2 = -\frac{1}{2}(p + \sqrt{D}), \quad D = p^2 - 4q.$$

1) Пусть $D > 0$. Тогда характеристические корни k_1, k_2 — отрицательные действительные числа. Общее решение выражается через показательные функции:

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что отклонение y при любых начальных условиях асимптотически стремится к нулю, если $t \rightarrow \infty$. В данном случае колебаний не будет, так как силы сопротивления велики по сравнению с жесткостью рессоры.

2) Пусть $D = 0$. Тогда корни k_1, k_2 равны между собой (и равны отрицательному числу $-p/2$). Общее решение есть семейство функций

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{pt}{2}}. \quad (4)$$

Здесь отклонение также стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, но не так быстро, как в предыдущем случае (благодаря наличию множителя $C_1 + C_2 t$).

3) Пусть $D < 0$. В этом случае корни k_1, k_2 — пара комплексно-сопряженных чисел: $k_1 = \alpha + \omega i, k_2 = \alpha - \omega i$, где $\alpha = -\frac{p}{2} < 0$, $\omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Общий интеграл равен

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad (5)$$

или

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (6)$$

Здесь амплитуда $Ae^{\alpha t}$ зависит от времени. А так как $\alpha < 0$, амплитуда стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е. (6) — уравнение затухающих колебаний. График затухающих колебаний представлен на рис. 107.1.

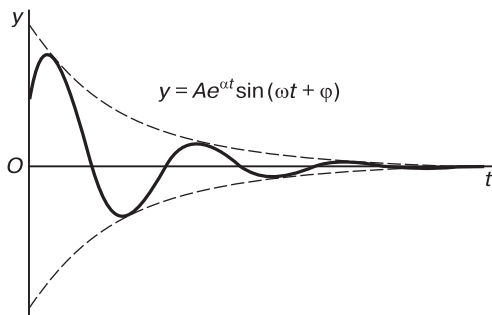


Рис. 107.1

Б. Фазовые портреты уравнения (2) показаны на рис. 107.2 для различных значений дискриминанта: $D < 0, D = 0, D > 0$.

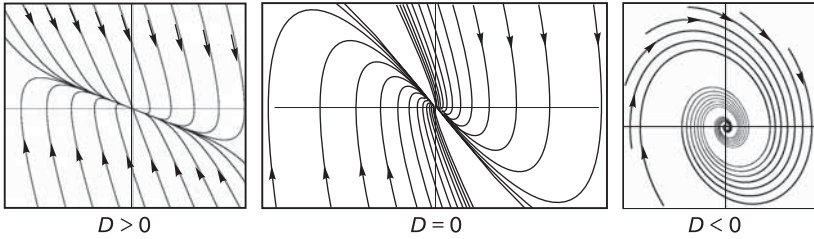


Рис. 107.2. Фазовые портреты уравнения (2) при различных D

В. Векторное поле уравнения (2) изображено на рис. 107.3 при различных D . ■

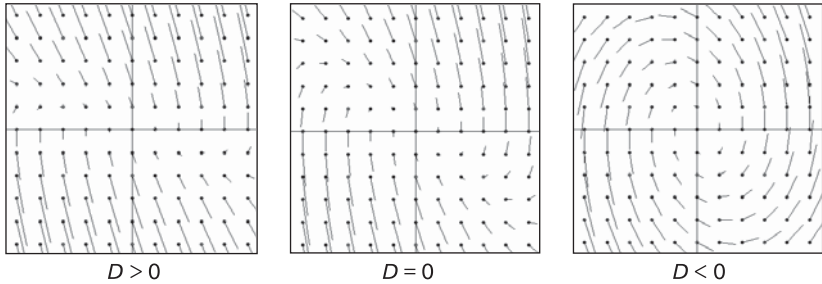


Рис. 107.3. Векторные поля уравнения (2) при различных D

108. Задача. Пусть груз массы Q совершает вынужденные колебания на упругой рессоре с линейной характеристикой, при этом выполняются три условия:

- 1) восстанавливающая сила жесткости $k \in \mathbb{R}_+$;
- 2) движению груза препятствует сила F сопротивления, направленная в сторону, противоположную направлению движения, и пропорциональная скорости движения груза относительно нижней точки рессоры;
- 3) возмущающая внешняя сила периодически толкает груз и изменяется по закону $f(t) = a \sin \omega t$.

Исследовать закон движения груза.

Решение. В данном случае уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = a \sin \omega t. \tag{1}$$

Пусть $p \neq 0$, $D = p^2 - 4q < 0$. Корни характеристического уравнения — пара комплексно-сопряженных чисел

$$k_1 = \alpha + \omega_0 i, \quad k_2 = \alpha - \omega_0 i, \quad \alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \omega_0 = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

В этом случае (см. формулы (5), (6) решения предыдущей задачи) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2)$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \quad (3)$$

Из (1), (3) следует

$$M = -p\omega G, \quad N = (q - \omega^2)G, \quad G = \frac{a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Положим

$$M = \hat{A} \sin \varphi, \quad N = \hat{A} \cos \varphi,$$

т. е.

$$\hat{A} = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{M}{N}.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения можно записать в форме

$$y^* = \hat{A} \sin \varphi \cos \omega t + \hat{A} \cos \varphi \sin \omega t = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi),$$

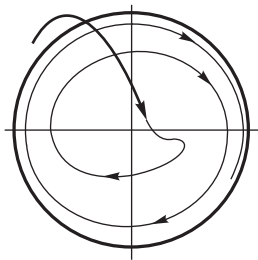


Рис. 108.1

или окончательно

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Общий интеграл уравнения (1) равен $y = \bar{y} + y^*$, т. е.

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Первый член суммы, стоящей в правой части (решение однородного уравнения), представляет затухающие колебания; при увеличении t он убывает, и, следовательно, через некоторый промежуток времени главное значение

будет иметь второй член, определяющий вынужденные колебания. Частота ω этих колебаний равна частоте внешней силы $f(t)$; амплитуда вынужденных колебаний тем больше, чем меньше p и чем ближе ω^2 к q . На рис. 108.1 показан типичный случай наличия аттрактора: фазовая кривая притягивается к циклу в виде окружности. ■

109. Задача. Пусть груз массы Q совершает вынужденные колебания на упругой рессоре с линейной характеристикой, при этом выполняются три условия:

- 1) восстанавливающая сила жесткости $k \in \mathbb{R}_+$;
- 2) колебания груза происходят без сопротивления;
- 3) возмущающая внешняя сила периодически толкает груз и изменяется по закону $f(t) = a \sin \omega t$.

Исследовать закон движения груза.

Решение. Уравнение упругих колебаний без сопротивления при наличии периодической внешней силы имеет вид

$$\ddot{y} + qy = a \sin \omega t. \quad (1)$$

Общее решение однородного уравнения таково:

$$\bar{y} = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (\omega_0^2 = q).$$

Если $\omega_0 \neq \omega$, т. е. собственная частота не равна частоте вынуждающей силы, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t.$$

Отсюда и из (1) следует $M = 0$, $N = \frac{a}{q - \omega_0^2}$. Общий интеграл уравнения

(1) равен

$$y = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega_0^2} \sin \omega t.$$

Таким образом, движение получается в результате наложения собственного колебания с частотой ω_0 и вынужденного колебания с частотой ω .

Если $\omega_0 = \omega$, то частное решение следует искать в форме

$$y^* = t(M \cos \omega t + N \sin \omega t). \quad (2)$$

Из (2) и (1) следует $M = -\frac{a}{2\omega}$, $N = 0$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{a}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Второй член, стоящий в правой части, показывает, что в этом случае амплитуда колебаний неограниченно возрастает во времени. Это явление, имеющее место при совпадении собственной частоты с частотой внешней силы, называется *резонансом*.

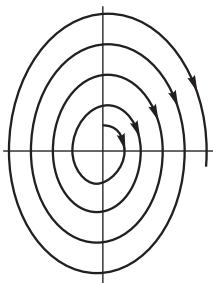


Рис. 109.1

Типичный фазовый портрет резонанса представлен на рис. 109.1. ■

§ 9. РАБОТА ПО ВЫКАЧИВАНИЮ НЕФТИ



Правильное научное построение допускает поправки и дополнения; неправильное построение — плотно забитая скважина.

Д. С. Лихачев

Цепочка задач «выкачивание нефти из цистерны — выкачивание воды из колодца — граница раздела «вода — нефть» — мятый лист бумаги — полимерная цепочка — вытекание воды из наклоненной трубы — подземные воды — геопатогенные зоны — разрывы трубопроводов — память металлов — условный рефлекс у кристалла» далеко не тривиальная, и возникла она в результате мозгового штурма, проведенного творческой группой студентов с целью решить проблемы трубопроводного транспорта на предмет аварий.

110. Задача. Вычислить работу, которую необходимо затратить для выкачивания бензина из вертикально расположенной цистерны длиной 10 м и диаметром 4 м.

111. Задача. Куб объемом 8 м^3 произвольно ориентирован в пространстве и заполнен водой. Вычислить работу, необходимую для выкачивания из него воды.

112. Задача. Вычислить работу, которую необходимо затратить для выкачивания бензина из горизонтально расположенной цистерны длиной 10 м и диаметром 4 м.

Решение. Проведем рассуждения в общем виде для произвольного резервуара. Пусть нам известна площадь $S(x)$ горизонтального сечения резервуара на любом уровне $x \in s = [a, b]$. Тогда работа, необходимая для перемещения слоя s жидкости на высоту h , вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \rho g(h-x)S(x)dx = \rho g(h) \int_a^b S(x)dx - \int_a^b xS(x)dx = \\ &= \rho gV(h - \frac{1}{V} \int_a^b xS(x)dx) = \rho gV(h - h_0), \end{aligned}$$

где g — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости, $V = \int_a^b S(x)dx$ — объем слоя s , $h_0 = \frac{1}{V} \int_a^b xS(x)dx$ — высота, на которой находится центр масс (центр инерции) слоя s . В частности, в данной задаче $V = 80\pi \text{ м}^3$, $h = 4$, $h_0 = 2$, поэтому $A = 160\pi\rho g$ (Дж).

Пусть в задаче 111 диагональ куба имеет угол наклона, равный φ , тогда из $V = 8$, $h = 2\sqrt{3} \cos \varphi$, $h_0 = h/2$ следует

$$A = 8\sqrt{3}\rho g \cos \varphi \text{ (Дж).}$$

113. Задача. Вычислить работу, которую необходимо затратить для выкачивания воды из колодца.

114. Проблема. Предложить модель границы раздела «вода — нефть», объясняющую динамику границы при заводнении нефти в условиях больших глубин (до 3 км) и больших давлений (до 300 атмосфер).

☞ Мягкий лист бумаги может служить моделью границы раздела «вода — нефть», но при определенных условиях. Тем не менее сама модель может стать объектом исследования. Автор предлагал сотням студентов ответить на простой вопрос: «Какие вы видите закономерности, когда смотрите на измятый лист бумаги, скажем, формата А4?». Читатель может проделать подобный эксперимент над бумагой, над собой, над привычкой не замечать нового в обыденном. Сомните произвольно чистый лист, небрежно разгладьте и внимательно осмотрите его. Закономерности есть, но они ускользают от понимания. В 1975 году автору довелось сдавать экзамен по дифференциальной геометрии своему декану В. М. Майорову. Когда речь зашла о разворачивающихся поверхностях, экзаменатор, указав на мятый лист бумаги, сказал: «Это разворачивающаяся поверхность? Этот вопрос задал мне профессор С. П. Фиников, когда я сдавал ему экзамен. Возможно, вам, молодой человек, повезет больше, чем мне, и вы найдете хоть какие-нибудь закономерности в мятых пространствах». ☞

115. Задача. Сомните в лепешку лист бумаги по четырем ребрам, выходящим из одной точки, т. е. согните так, чтобы все ребра оказались в одной плоскости. Докажите, что знакопеременная сумма углов равна нулю. Верно ли аналогичное утверждение для любого четного числа ребер? Возможно ли смятие бумаги в лепешку по трем, пяти, семи и т. д. ребрам?

116. Задача. Поэт нервно превратил в твердый шарик очередной лист бумаги (формата А4 для принтеров) с тремя лирическими

строчками. Физик проколол сей шарик тонкой иглой насквозь и спросил Математика: «Когда мы разгладим шарик в ровный лист, сколько дырок от иглы мы сможем на нем обнаружить?»

*Поэт опять, как Бах по фугам, в рифмах парясь,
В порыве лист скомкал в бумажный шарик.
Он будто нервный был при этом, но не злой.
А Физик шарик тонкой проколол иглой
И Математика глубокомысленно спросил:
«Когда разгладить нам достанет сил
Сей плотный шарик в лист обратно,
Дыр сколько будет в нем, узнать занятно».*

Решение. Пусть бумажный лист формата А4 размером $a \times b$, $a = 297$ мм, $b = 210$ мм беспорядочно скомкан в плотный шарик T радиусом R .

Сделаем несколько допущений. Во-первых, игла I очень тонкая, и она пересекает скомканную бумагу N раз. Во-вторых, сама бумага имеет реальную толщину ξ , равную приблизительно $0,1$ мм, хотя, как мы покажем ниже, мы не сможем воспользоваться величиной ξ . В-третьих, учитывая силу упругости реальной бумаги, будем считать, что среднее расстояние между соседними слоями бумаги равно ε (рис. 116.1). В-четвертых, назвав величину ε *условной толщиной* бумаги, будем считать, что слои с такой условной толщиной плотно прилегают друг к другу по всему объему V тела T , исключая тем самым полости внутри него. В-пятых, в точке прокола угол φ между иглой и участком бумаги, который будем считать плоским, является случайной величиной $\varphi \in (0, \pi/2]$. В-шестых, будем пренебрегать возможными пластическими свойствами бумаги.

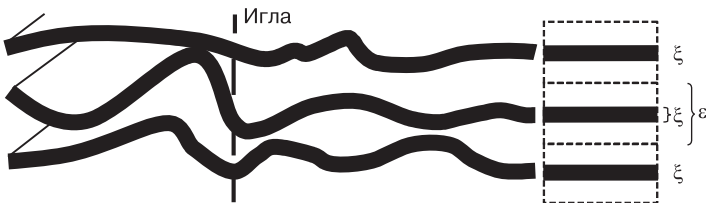


Рис. 116.1. Толщина ξ и условная толщина ε бумаги

Пусть d — длина пересечения иглы со слоем бумаги условной толщины ε (рис. 116.2). Тогда $d = \varepsilon / \sin \varphi$.

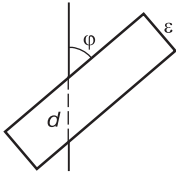


Рис. 116.2

Найдем плотность $p(\varphi)$ распределения случайной величины φ . Для этого заметим, что конец единичного радиус-вектора, проходящего под углом φ к фиксированной плоскости, описывает окружность радиусом $r = \cos \varphi$, длина которой равна $2\pi \cos \varphi$. Но площадь единичной полусферы равна 2π , поэтому $p(\varphi) = \cos \varphi$, причем выполняется условие нормировки $\int_0^{\pi/2} p(\varphi) d\varphi = 1$, ибо

$$\int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = [\sin \varphi]_0^{\pi/2} = 1.$$

Так как математическое ожидание ψ случайной величины φ равно

$$\psi = \int_0^{\pi/2} \varphi \cos \varphi d\varphi = \varphi \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} - 1,$$

в среднем величина d равна $d_0 = \varepsilon / \sin \psi = \varepsilon / \cos 1$. Следовательно,

$$N = \frac{2R}{d_0}.$$

Вычислим двумя способами объем V . С одной стороны, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$; с другой стороны, $V = ab\varepsilon$. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{4\pi R^3}{3ab}.$$

Значит,

$$N = \frac{2R}{d} = \frac{2R \cos 1}{\varepsilon} = \frac{2R \cdot 3ab \cos 1}{4\pi R^3} = \frac{3 \cos 1}{2\pi} \cdot \frac{ab}{R^2} = \mu abR^{-2},$$

где $\mu = \frac{3 \cos 1}{2\pi} = 0,257976$. Поскольку $a = 297$, $b = 210$, получаем $N = 16089,94R^{-2}$. Эксперимент показывает, что диаметр $2R$ тела T равен приблизительно 35 мм. Таким образом, $N \approx 52,5385537 \approx 53$.

В табл. 116 показаны некоторые значения числа N в зависимости от диаметра бумажного шарика. При достаточно больших физических усилиях можно уменьшить диаметр шарика до 25 мм. Тогда число проколов будет равно 103. Предположим, удалось сжать шарик до такого состояния, когда условная толщина ε сравняется с реальной толщиной ξ . Оказывается, диаметр такого шарика станет равным приблизительно

22,8 мм, а игла прошьет 124 слоя. Это — максимальный результат при данном способе деформации листа формата А4. ■

Таблица 116

2R	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
N	133	122	112	103	95	88	82	77	72	67	63	59	56	53	50	47	45	42	40

117. Задача. Если бы в предыдущей задаче Физик разрезал ножом бумажный комок и расправил его в первоначальный лист, то какова была бы длина линии разреза?

Решение. В сечении мы получим круг площадью S , внутри которого находится линия разреза, скорее всего, распавшаяся на много частей. Для решения задачи нам важно знать среднее расстояние ε между ближайшими, «параллельными», участками разреза. Тогда

$$\varepsilon = \frac{4}{3ab} \pi R^3,$$

поэтому $L = \frac{\pi R^2}{\varepsilon} = \frac{3ab}{4R} = \frac{18710}{70} = 2673$ мм, т. е. длина разреза будет более двух с половиной метров. ■

118. Проблема. Полимерная цепочка длины L собрана в плотный комок, который затем разрезали на две половины. Исследовать распределение длин кусков, на которые распалась цепочка.

119. Задача. Как специальным образом сложить лист бумаги формата А4, чтобы однократным прокалыванием иглы в сложенном листе получилось наибольшее число дырок?

Решение. Одно из возможных, но не окончательных решений таково. Если лист изгибать «змейкой» самым экономным образом в продольном направлении, а затем подвести нижний край листа к верхнему, то число проколов будет равно 1336 (при условии, что диаметр иглы равен $\xi = 0,1$). ■

120. Задача. Труба длиной 50 м и диаметром 10 см наклонена под углом α и заполнена водой. Исследовать зависимость уровня воды в трубе от времени, если вода начинает свободно выливаться из нее.

121. Проблема. В одной из пещер поток воды попадает в горловину каменной трубы природного происхождения и выходит из трубы в подземное озеро другой пещеры. Труба состоит из вертикальной

и горизонтальной частей. Вертикальная часть имеет форму усеченного конуса, а горизонтальная — форму кругового цилиндра. При этом уровень воды в вертикальной части совершает периодические колебания. Исследовать, при каких условиях это возможно.

122. Проблема. Как коррелируют между собой участки аварийного разрыва трубопроводов и геопатогенные зоны?

123. Проблема. Известно, что виновниками аварий на трубопроводах чаще всего являются трещины, которые в период своего роста имеют фрактальную структуру. Построить математическую модель, позволяющую средствами фрактальной геометрии изучать динамику трещин и предсказывать момент возникновения фатальной трещины.

Изменение величины остаточной намагниченности является своего рода «памятью» металла о ранее приложенных и затем снятых напряжениях. Классические сплавы Fe-Co-(5–9%V) обладают ярко выраженным эффектом магнитоупругой памяти по остаточной намагниченности.

В. Ф. Новиков

124. Проблема. Заведующий кафедрой физики Тюменского государственного нефтегазового университета профессор В. Ф. Новиков свыше 30 лет изучает магнитоупругую память металлов. Что такое память, где и как она хранится, а самое трудное, как извлечь информацию, записанную в памяти металла?

И когда-нибудь ученые вместе с мудрецами «Упанишад» провозгласят: «Жизнь во всем и везде».

Рабиндранат Тагор

125. Проблема. Можно ли выработать условный рефлекс у неживой материи, например у кристалла?

§ 10. ПЕРКОЛЯЦИЯ

Способности, как и мускулы, растут при тренировке.

В. А. Обручев

Исследование особенностей протекания (перколяции) жидкости в пористых средах (например, в нефтегазоносном коллекторе — одном из главных объектов внимания при геофизических исследованиях скважин) удобно проводить численно на квадратных и кубических решетках. При больших размерах решетки невозможно обойтись без компьютера. Однако для решеток с небольшим числом клеток в учебных целях можно ставить задачи, которые легко решаются вероятностными методами.

126. Проблема. Геофизические исследования скважин (ГИС) проводятся с целью получения данных для составления технологической карты эксплуатации скважины. Путем размельчения керна, взятого из нефтегазоносного коллектора, можно выявить распределение линейных размеров кварцевых частиц, входящих в состав керна, и оценить его проницаемость, пористость и другие перколяционные свойства. Решить обратную задачу: зная распределение размеров песчинок, «собрать» из них керн и предсказать его перколяционные свойства.

127. Проблема. Исследовать перколяционные свойства нефтегазоносного коллектора на модельных блочных мультифракталах.

128. Задача. Пусть дана квадратная сетка размера $L \times L$, $L \in \mathbb{N}$, клетки которой с вероятностью p служат *порами* (на рис. 128.1 они окрашены в черный цвет). Нефть, инжектированная в любую пору, может оросить соседнюю пору ходом шахматной ладьи. Поры, или «узлы», связанные с выбранным центром инжекции, образуют так называемый кластер. При

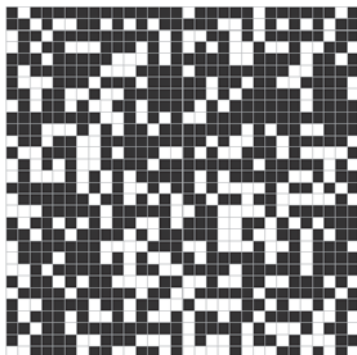


Рис. 128.1. Квадратная решетка

некоторых значениях p нефть под действием заводнения может просочиться из нижнего слоя в верхний. Показать многократным повторением численных экспериментов, что *критическая вероятность*

p_c , при которой нефтяной кластер простирается от нижнего края до верхнего, равняется $p_c = 0,59275 \pm 0,0003$.

129. Задача. Доказать, что критическая вероятность протекания нефти по треугольной сетке (рис. 129.1) равна $p_c = 0,5$.

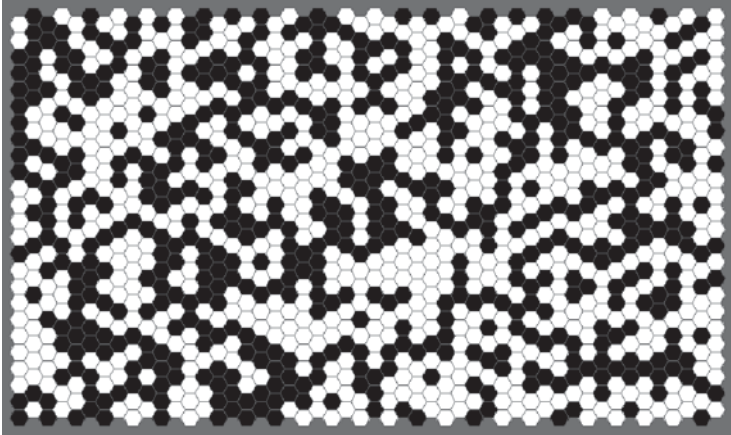


Рис. 129.1. Треугольная решетка

130. Задача. С помощью численных экспериментов найти критическую вероятность протекания нефти по шестиугольной сетке (рис. 130.1).

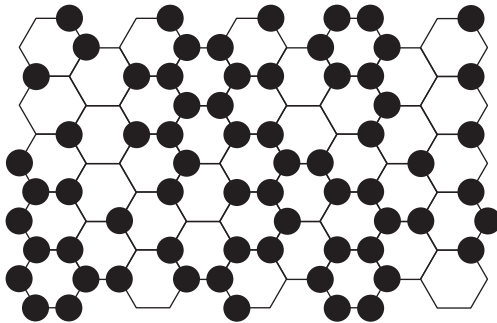


Рис. 130.1. Шестиугольная решетка






131. Задача. Исследовать протекание жидкости по решетке размером 2×2 .

Решение 1. Будем называть решетку «хорошей», если по ней возможно протекание снизу вверх. Будем говорить, что событие A наступило, если случайная решетка оказалась «хорошей». Выясним, чему равна вероятность $p' = P(A)$ того, что после заполнения узлов решетки с вероятностью p она окажется «хорошей». Пусть $H_i, i = 0..4$, — гипотеза, согласно которой при заданной вероятности p , заполнено i узлов. В этом случае будем говорить, что решетка имеет вес i . Вероятность гипотезы вычисляется по схеме Бернулли:

$$P(H_i) = C_4^i p^i q^{4-i}, \quad q = 1 - p.$$

Условная вероятность вычисляется по формуле $P(A|H_i) = k/n$, где k — число «хороших» решеток веса i , n — число различных решеток веса i . Обратим особое внимание на то, что число k мы можем подсчитать непосредственно, опираясь на наглядное изображение решетки. Заполним следующую таблицу.

Таблица 131

Решетки	Гипотезы	$P(H_i)$	$P(A H_i)$	$P(H_i)P(A H_i)$
	H_0	$C_4^0 p^0 q^4$	0	0
	H_1	$C_4^1 p^1 q^3$	0	0
	H_2	$C_4^2 p^2 q^2$	$2/C_4^2$	$2p^2 q^2$
	H_3	$C_4^3 p^3 q^1$	1	$4p^3 q$
	H_4	$C_4^4 p^4 q^0$	1	p^4

По формуле полной вероятности находим

$$p' = p^2(2q^2 + 4pq + p^2) = p^2(2(1 - p)^2 + 4p(1 - p) + p^2) = 2p^2 - p^4.$$

Итак,

$$p' = 2p^2 - p^4. \tag{1}$$

Решение 2. Найдем p' другим способом. Прежде всего, заметим, что в «хорошей» решетке есть, по крайней мере, один столбец заполненных узлов. Для данного столбца такое возможно с вероятностью p^2 .

Тогда $P(\bar{A}) = (1 - p^2)^2$. Следовательно,

$$p' = P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - p^2)^2. \quad (2)$$

Элементарные преобразования убеждают, что (1) и (2) равносильны.

Решение 3. Исследуем поведение вероятности p' как функции от p , проведя следующий численный эксперимент. Для заданного значения $x \in I = [0; 1]$ вероятности p строятся случайные решетки в количестве $\text{iter} = 500$ штук, и подсчитывается при этом количество благо «хороших» решеток. В качестве значения вероятности p' принимается относительная частота $y = \text{blago}/\text{iter}$ появления «хороших» решеток. Изменяя x с определенным шагом от 0 до 1, получаем приближенно график функции $y = f(x)$, представленный на рис. 131.1 вместе с графиком теоретической функции (2).

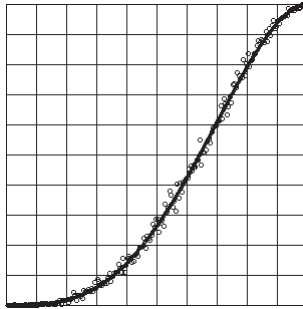


Рис. 131.1

При увеличении числа iter дисперсия Dy функции y уменьшается. Вопрос о зависимости Dy от iter требует отдельного исследования в отдельное время. ■

Ненаписанных стихов — не жаль!

М. И. Цветаева

132. **Задача.** На квадратной решетке размером 2×3 найти вероятность y того, что построенный с вероятностью x кластер простирается снизу доверху. Результат выразить в виде функции $y = y(x)$. Построить график функции $y(x)$ (рис. 132.1).

133. **Задача.** Построить перколяционную модель в пространстве, покрытом кубами, и найти критическую вероятность.

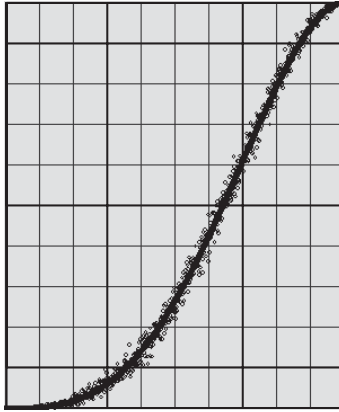


Рис. 132.1. График функции $y = x^3(x^3 - 4x^2 + 2x + 2)$

134. Задача. Изучить группу ренормпреобразований в случае: треугольной, квадратной, шестиугольной, кубической сетки; найти неподвижные точки.

135. Задача. Построить и изучить протекание нефти по порам двух совмещенных квадратных сеток: первая сетка имеет $L_1 \times L_1$ узлов, вторая — $L_2 \times L_2$ узлов, $L_1 = nL_2$, $n \in \mathbb{N}$. Узлы первой сетки заполнены с вероятностью p_1 , узлы второй сетки — с вероятностью p_2 (рис. 135.1). На координатной плоскости построить критическую кривую γ , состоящую из всех точек (p_1, p_2) , при которых происходит протекание нефти.



$p_1 = 0,3; p_2 = 0,52$

Рис. 135.1. Решетками с порами двух масштабов при $p_1 = 0,3; p_2 = 0,52$

§ 11. ФИЗИКА ЗЕМЛИ



Итак, напрасно многие думают, что все, как видим, сначала творцом создано, будто не токмо горы, доли и воды, но и разные роды минералов произошли вместе со всем светом и потому-де не надобно исследовать причин, для чего они внутренними свойствами и положением мест разнятся. Таковые рассуждения весьма вредны приращению наук, следовательно, и натуральному знанию шара земного, а особливо искусству рудного дела, хотя умникам и легко быть философами, выучась наизусть три слова: «Бог так сотворил» — и сие дая в ответ вместо причин.

М. В. Ломоносов

Физика Земли и околоземного пространства остается одной из малоизученных областей. В этом параграфе как ставятся проблемы, которые далеки от завершения, так и формулируются задачи, решаемые методами математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисления), а также задачи, которые могут быть решены методами евклидовой, конечной аффинной, проективной геометрий.

136. **Задача.** Почему большие реки северного полушария подмывают в основном правый берег?

Решение. Пусть для определенности река северного полушария течет с севера на юг. (В «Повести временных лет» сказано, что Волга течет «от севера к востоку»! Это не ошибка. В средние века говорили о частях света — о частях карты! — а нынче говорят о сторонах света, не давая корректного определения света.) Тогда вектор \mathbf{a} вращения воды по меридиану коллинеарен вектору $(1, 0, 0)$, вектор \mathbf{b} вращения Земли — вектору $(0, 0, 1)$. Кариолисова сила \mathbf{c} коллинеарна векторному произведению $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 1, 0)$. Следовательно, течение реки будет отклоняться в сторону правого берега. ■

137. **Проблема.** Существуют две конкурирующие точки зрения о температуре T в центре Земли: традиционная точка зрения А и точка зрения Б, автором которой является доктор геолого-минералогических наук, профессор Бембель Роберт Михайлович из Тюменского государственного нефтегазового университета. Согласно А, $T > 5000^\circ\text{К}$, но,

согласно Б, $T < 1^\circ\text{К}$. Построить и изучить математическую модель, объясняющую поведение температуры Земли на больших глубинах.

138. Проблема. Каковы механизмы, обеспечивающие многолетнюю (десятки лет) стабильность как динамики геотермальных источников, так и их физико-химических свойств?

139. Задача. На геологической карте тридевятого царства тридесятого государства 9 нефтяных вышек расположены в 10 рядов (в каждом ряду ровно 3 вышки). Возможно ли такое?

140. Задача. На геологической карте тридевятого царства тридесятого государства запланированы 10 нефтяных вышек, расположенных в 10 рядов. Возможно ли такое?

141. Задача. На геологической карте аффинного тридевятого графства тридесятого королевства 9 нефтяных вышек расположены в 12 рядов. Возможно ли такое?

142. Задача. Самолет пролетел 1000 км на юг, 1000 км — на восток, 1000 км — на север и оказался в исходном пункте. Выяснить возможный пункт вылета самолета.

143. Задача. Считая Землю жидким шаром радиусом R со средней плотностью ρ , найти давление в нем как функцию расстояния r до центра [22, с. 233, № 9.95].

$$\text{Ответ. } \frac{4}{3} \pi \rho^2 r (R - r).$$

144. Задача. Нефтегазоносный коллектор находится под глиняной сферической ловушкой радиусом 100 м. Оценить запасы нефти в коллекторе, если его пористость равна 30%.

Решение. Условие задачи является неполным, ибо из него следует, что нефтегазоносный коллектор D является сегментом шара радиусом $R = 100$ м, но не указаны ни высота h , ни основание r сегмента. Пусть в некоторой системе координат граница ∂T шара T имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Тогда коллектор ограничен снизу плоскостью $z = R - h$, и объем V шарового сегмента D равен интегралу

$$V = \iiint_D dx dy dz.$$

Перейдя к цилиндрическим координатам $\rho = x \cos \theta$, $\rho = y \sin \theta$, $z = z$, записываем:

$$V = \iiint_D \rho d\theta d\rho dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho d\rho \int_{R-h}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz = [\theta]_0^{2\pi} \int_0^r (\sqrt{R^2-\rho^2} - (R-h))\rho d\rho.$$

Учитывая, что $R^2 - r^2 = (R-h)^2$, $r^2 = 2Rh - h^2$, и сделав замену

$$t = R^2 - \rho^2, \quad dt = -2\rho d\rho,$$

находим

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{R^2}^{(R-h)^2} (\sqrt{t} - (R-h)) \left(-\frac{1}{2} dt\right) = \\ &= -\pi \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - (R-h)t \right]_{R^2}^{(R-h)^2} = \\ &= \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right) = \frac{1}{6} \pi h (h^2 + 3r^2). \end{aligned}$$

На рис. 144.1 представлена зависимость объема $V_{\text{нефть}}$ нефти от высоты h нефтегазонасного коллектора при $R = 100$. ■

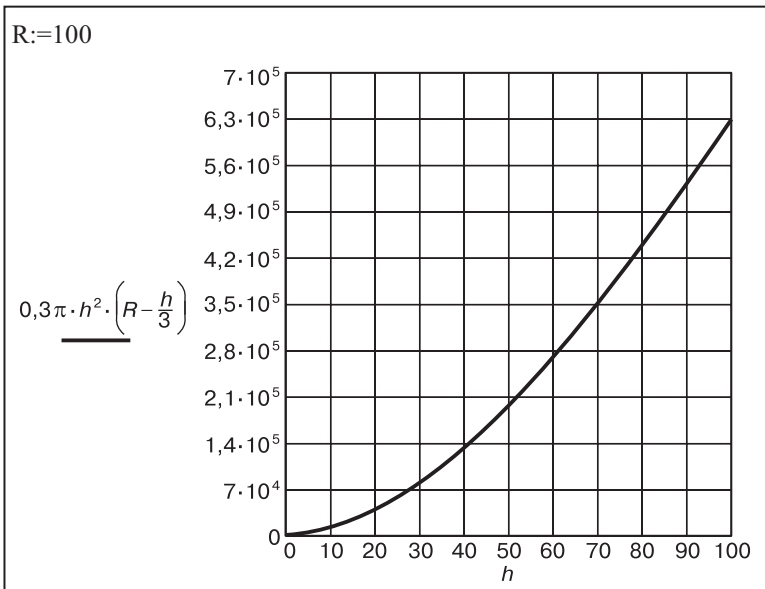


Рис. 144.1

☞ Из геологических соображений положим $h = 62$ м. Тогда мы можем вычислить запасы нефти в ловушке. В этом случае они составляют 958 050 кубических метров нефти, или 6 025 932 нефтяных баррелей, что по цене \$ 50 за 1 баррель дает — с учетом того, что в Западной Сибири на добычу 1 барреля нефти тратится до \$ 18 — почти \$ 200 000 000. Да, деньги вызывают интерес, большие деньги рождают экономику, а очень большие деньги определяют политику! Казалось бы, хочешь много денег, качай больше нефти, а для этого надо сильнее заводнять коллектор. Однако чрезмерное усердие при закачке воды может привести к тому, что мы будем получать вместо нефти свою же воду. Дело в том, что граница раздела «вода — нефть», являясь фрактальной, просачивается вместе с нефтью через пористую породу, и при определенных условиях возникают так называемые водяные «пальцы Хейли—Шоу», один из которых, попав в трубу, губит скважину. ☹

145. Задача. Нефтегазоносный коллектор находится под глиняной ловушкой, имеющей форму эллипсоида (эллиптического параболоида, цилиндра, конуса и т. п.). Оценить запасы нефти в коллекторе, если его пористость равна 20%.

146. Задача. Озеро Забошное, близ д. Большой Куртал Тюменской области, представляет собой шаровой слой, радиусы оснований которого равны 500 м и 250 м. Найти объем о. Забошного, если его глубина равна 10 м.

Решение. Пусть шаровой слой D ограничен сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и двумя параллельными плоскостями $z = R - h_1$, $z = R - h_2$ (рис. 146.1), причем величины h_1 , h_2 , $h = 10$ м удовлетворяют равенству

$$h_1 - h_2 = h. \tag{1}$$

Основания $r_1 = 500$ м, $r_2 = 250$ м шарового слоя связаны с R , h_1 , h_2 условиями $R^2 = r_1^2 + (R - h_1)^2$, $R^2 = r_2^2 + (R - h_2)^2$; откуда следует

$$2R = \frac{h_1^2 + r_1^2}{h_1} = \frac{h_2^2 + r_2^2}{h_2}. \tag{2}$$

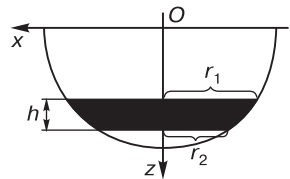


Рис. 146.1. Озеро

Объем V шарового слоя равен разности $V = V_1 - V_2$ объемов

$$V_1 = \frac{1}{6} \pi h_1 (h_1^2 + 3r_1^2), \quad V_2 = \frac{1}{6} \pi h_2 (h_2^2 + 3r_2^2)$$

шаровых сегментов (см. решение предыдущей задачи):

$$V = \frac{1}{6}\pi[h(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) + 3(h_1r_1^2 - h_2r_2^2)]. \quad (3)$$

Из (1) следует, что $h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2 = h^2$, или

$$h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2 = h^2 + 3h_1h_2. \quad (4)$$

Из (3), (4) получаем

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(hh_1h_2 + h_1r_1^2 - h_2r_2^2). \quad (5)$$

Из (2) следует, что $hh_1h_2 = h_1r_2^2 - h_2r_1^2$. Отсюда и из (5) находим:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(r_1^2 + r_2^2). \quad (6)$$

Подставляя в (6) значения данных величин, вычисляем объем воды в озере:

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot 10^3 + \frac{\pi}{2} \cdot 10 \cdot (500^2 + 250^2) = 4909262(\text{м}^3) \approx (170 \text{ м})^3. \quad \blacksquare$$

147. Задача. По какой траектории Земля движется вокруг Солнца?

Решение (см. [26, с. 46–55]). Исаак Ньютон, обобщая опытные данные, сформулировал закон движения тела, размеры которого пренебрежимо малы (материальной точки):

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (1)$$

Согласно гипотезе И. Ньютона, форма орбиты определяется притяжением планеты к Солнцу. Сила такого притяжения в соответствии с законом всемирного тяготения равна

$$\mathbf{F} = -G \frac{M_C m}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2)$$

где M_C — масса Солнца, m — масса Земли, G — гравитационная постоянная (коэффициент, устанавливаемый экспериментально), \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий Солнце и Землю (см. рис. 147.1), r — длина этого вектора. Знак минус говорит о том, что тела притягиваются друг к другу.

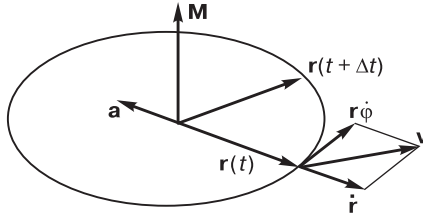


Рис. 147.1

Будем считать, что $M_C \gg m$, и что движение Земли никак не влияет на Солнце. Поэтому его можно считать неподвижным. Соотношения (1) и (2) вместе с определенным скорости и начальными условиями и дают математическую модель

$$\mathbf{v} = -\alpha \mathbf{r}/r^3, \quad \alpha = GM_C, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3)$$

Пусть $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Тогда из четырех векторных уравнений (3) следует двенадцать скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\alpha x/r^3, & \dot{v}_y &= -\alpha y/r^3, & \dot{v}_z &= -\alpha z/r^3, \\ \dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y, & \dot{z} &= v_z, \\ x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, & z(0) &= z_0, \\ v_x(0) &= v_x^0, & v_y(0) &= v_y^0, & v_z(0) &= v_z^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Эту автономную систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений можно решить аналитически. Уточним постановку задачи. Пусть нам нужно узнать положение планеты в момент времени t , если известна ее начальная скорость, положение и коэффициент α . Уравнения (4) справедливы в любой неподвижной прямоугольной декартовой системе координат.

Чтобы упростить дальнейший анализ, выберем эту систему так, чтобы выполнялись условия: $z(0) = 0$, $v_z(0) = 0$. Но тогда из третьего уравнения следует, что $\frac{dv_z}{dt} = 0$, поэтому движение будет происходить в плоскости (x, y) . Это движение будет описываться четырьмя уравнениями первого порядка, которые можно привести к виду

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\alpha y}{r^3}.$$

Перейдем к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и учтем, что

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi.$$

Это позволит переписать изучаемые уравнения в виде

$$\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -\frac{\alpha}{r^2} \cos \varphi,$$

$$\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = -\frac{\alpha}{r^2} \sin \varphi.$$

Умножив первое уравнение на $-\sin \varphi$, второе — на $\cos \varphi$ и сложив, получим

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

После умножения на r это выражение можно проинтегрировать:

$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\varphi} = \text{const}. \quad (5)$$

Смысл этого равенства понятен из рис. 147.1, на нем показаны радиус-векторы планеты в момент времени t и $t + \Delta t$. Площадь, описываемая радиус-вектором за время Δt , равна с точностью до бесконечно малых более высокого порядка $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$. Из полученного равенства следует второй закон Кеплера: радиус-вектор планеты описывает равные площади за равные промежутки времени. Эта же величина пропорциональна векторному произведению $\vec{r} \times \vec{v}$ или $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$, где $\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс. Вектор \vec{M} называется *моментом импульса*. Из сделанных выкладок следует, что он сохраняется при действии любой центральной силы. Умножив первое уравнение на $\cos \varphi$, второе — на $\sin \varphi$, получаем

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

Выражая $\dot{\varphi}$ через момент: $\dot{\varphi} = M/(mr^2)$, подставляя в последнюю формулу, получим

$$\ddot{r} - \frac{M^2}{m^2r^3} = -\frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{d}{dt}\left(U + \frac{1}{2}\frac{M^2}{mr^2}\right),$$

где функция $U = -\frac{\alpha}{r}$ ($F = -dU/dr$) называется *потенциалом*. Умножим последнее выражение на \dot{r} и учтем, что $m\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)$ и $\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\dot{r}$, где g — любая функция r . Отсюда получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{mr^2} + U\right) = 0. \quad (6)$$

Следовательно, величина E в скобках, называемая *полной энергией системы*, будет постоянна.

Последнее равенство можно было записать в самом начале, если воспользоваться законом сохранения энергии и учесть, что потенциальная энергия равна $U(r)$, а кинетическая — $\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$. Выражение в скобках представляет собой полную скорость Земли. Величина \dot{r} — составляющая вдоль радиус-вектора, $r\dot{\varphi}$ — ортогональная составляющая (рис. 147.1). Выражение для квадрата этой скорости следует из теоремы Пифагора.

Из равенства (6) следует, что

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}.$$

После разделения переменных это выражение можно проинтегрировать:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}. \quad (7)$$

Форму орбиты можно найти, используя равенство (5), в виде

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt.$$

Следовательно,

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (8)$$

Учитывая, что $U = -\frac{\alpha}{r}$, получим

$$\int_{r_0}^r \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2mE + \frac{m^2 \alpha^2}{M^2} - \left(\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}\right)^2}} = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{c - z^2}} = \frac{\arccos z}{\sqrt{c}} + \text{const},$$

где

$$z = M/r - m\alpha/M, \quad c = \sqrt{2mE + \frac{m^2 \alpha^2}{M^2}}.$$

Таким образом,

$$\varphi = \arccos \frac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{const.} \quad (9)$$

Выбрав начало отсчета так, чтобы константа оказалась равной нулю, получаем уравнение орбиты:

$$p/r = 1 + e \cos \varphi, \quad \text{где } p = M^2/m\alpha, \quad e = \sqrt{1 + 2EM^2/m\alpha^2},$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (10)$$

Из аналитической геометрии известно, что при $e < 1$ ($E < 0$) уравнение (10) определяет эллипс с полуосями $a = p/(1 - e^2)$, $b = p/\sqrt{1 - e^2}$. Зависимость координаты от времени дается интегралом (8) либо более изящным, но, тем не менее, неявным выражением. Так как эксцентриситет Земли равен $e = 0,01672$ [23, с. 405], земная орбита мало отличается от окружности (рис. 147.2). Самый большой эксцентриситет среди планет Солнечной системы — у Плутона, который равен $e = 0,25344$ (рис. 147.3). ■

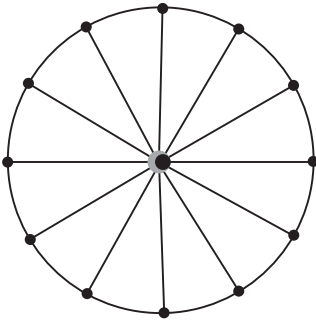


Рис. 147.2. Орбита Земли:
 $e = 0,01672$ — эксцентриситет;
 $d = 149\,600\,000$ км = 1 а. е. —
среднее расстояние до Солнца

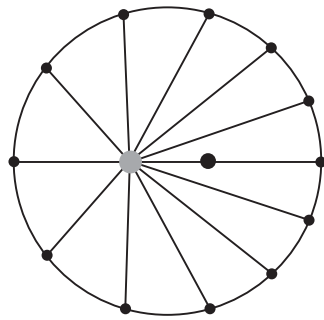


Рис. 147.3. Орбита Плутона:
 $e = 0,25344$ — эксцентриситет;
 $d = 5\,946\,500\,000$ км = 39,750 а. е. —
среднее расстояние до Солнца

148. Задача (третий закон Кеплера). Доказать, что квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших осей их орбит.

149. Задача. Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v_0 . По какой траектории полетит тело?

Решение. Для упрощения модели пренебрежем силами сопротивления. Зададим систему координат так, как показано на рис. 149.1. В произвольной точке M на тело действует лишь одна сила — его вес $P = mg$. Поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона дифференциальные уравнения движения в проекциях на координатные оси имеют вид: $m\ddot{x} = 0$, $m\ddot{y} = -mg$. Сократив на m и записав начальные условия, получим задачу Коши:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad (1)$$

$$x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (2)$$

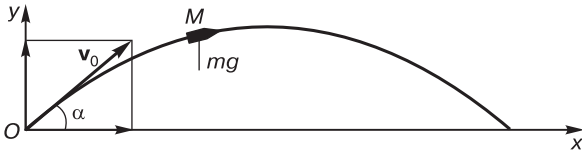


Рис. 149.1

Из (1) следует

$$\dot{x} = A_1, \quad \dot{y} = -gt + B_1,$$

$$x = A_1 t + A_2, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + B_1 t + B_2.$$

Отсюда и из (2) получаем уравнения движения:

$$x = tv_0 \cos \alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + tv_0 \sin \alpha. \quad (3)$$

150. Задача. Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v_0 . Сколько времени тело пробудет в полете? Как далеко улетит тело по горизонтали? На какую максимальную высоту поднимется тело? Что представляет собой траектория полета тела как кривая?

Решение. Воспользуемся уравнением движения из предыдущей задачи. Из второго уравнения (3) легко следует решение уравнения $y = 0$ относительно t :

$$0 = -\frac{gt^2}{2} + tv_0 \sin \alpha \Rightarrow t \left(-\frac{gt}{2} + v_0 \sin \alpha \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha. \end{cases}$$

Значение t_2 и дает ответ на первый вопрос.

Зная время $t_2 = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$ полета тела и используя (3), находим дальность $x(t_2) = \frac{2v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ и максимальную высоту полета $y(t_2/2) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$.

Наконец, исследуемая траектория — парабола с параметрическими уравнениями (3), которая в прямоугольных декартовых координатах имеет уравнение $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha$. ■

151. Задача. Определить, с какой скоростью v_2 следует бросить камень, чтобы он улетел с поверхности Земли на бесконечное расстояние.
Ответ. $v_2 \geq 11,2 \text{ км/с}$.

152. Задача. Определить, с какой скоростью v_1 следует бросить камень, чтобы он улетел с поверхности Земли. Доказать, что $v_2 = \sqrt{2}v_1$.
Ответ. $8,1 \text{ км/с}$.

153. Задача. Во время выхода в открытый космос космонавт А. Леонов бросил в сторону Земли заглушку от киноаппарата. Исследовать движение заглушки относительно космического корабля, считая скорость броска равной 10 м/с [7].

Ответ. Заглушка будет двигаться относительно космонавта приблизительно по эллипсу с большой осью около 32 км и малой осью около 16 км . Центр эллипса расположен в 16 км впереди космонавта по орбите, а период обращения по эллипсу равен периоду движения по орбите. Решение см. в [3, с. 37].

154. Задача. При запуске спутника на круговую орбиту на расстоянии 300 км от Земли направление скорости отклонилось на 1° в сторону Земли. Как изменится перигей?

155. Задача. Как изменится высота перигея, если набранная скорость будет на 1 м/с меньше расчетной?

156. Задача. Считая, что радиус планеты в α раз меньше радиуса Земли, а масса в β раз меньше, найти, во сколько раз ускорение свободного падения, а также первая и вторая космические скорости на ней меньше, чем на Земле.

Ответ. $\gamma = \beta\alpha^{-2}$, $\delta^2 = \beta/\alpha$. Например, для Луны $\alpha \approx 3,7$, $\beta \approx 81$. Следовательно, ускорение силы тяжести составляет примерно $1/6$ земного ($\gamma \approx 6$), а космические скорости — примерно $1/5$ земных ($\delta \approx 4,7$).

§ 12. ЗУБЧАТЫЕ КОЛЕСА



Все, что есть в природе, математически точно и определено.

М. В. Ломоносов

Целью параграфа является изучение формы зубчатых колес. Одно из самых удивительных зацеплений — эвольвентное — было предложено в 1754 г. Леонардом Эйлером.

Зубчатыми передачами называются механизмы с высшими кинематическими парами, в состав которых входят зубчатые колеса, рейки или секторы — звенья, снабженные профилированными выступами или зубьями. Зубчатые передачи бывают простые и сложные. Простая зубчатая передача — трехзвенный механизм, состоящий из двух зубчатых колес и стойки, в котором зубчатые колеса образуют между собой высшую пару, со стойкой — низшие (поступательные или вращательные). Простые зубчатые передачи классифицируются по многим основаниям: по виду передаточной функции (с постоянным передаточным отношением, с переменным передаточным отношением); по расположению осей в пространстве (с параллельными осями, с пересекающимися осями, со скрещивающимися осями); по форме профиля зуба (с эвольвентным профилем, с циклоидальным профилем, с круговым профилем — передачи Новикова); по форме линии зуба (с прямым зубом, косозубые, шевронные, с круговым зубом); по форме начальных поверхностей (цилиндрические, конические, гиперболоидные); по форме и виду зубчатых колес (червячные, с некруглыми колесами, винтовые). *Эвольвентная зубчатая передача* — цилиндрическая зубчатая передача, профили зубьев которой выполнены по эвольвенте окружности.

Нормалью к гладкой кривой γ в точке $A \in \gamma$ называется прямая $N(\gamma, A)$, проходящая через A перпендикулярно (нормально) касательной $T(\gamma, A)$ к γ в точке A . Касательную T определяем в три этапа:

1. Отмечаем точку $B \in \gamma$.
2. Проводим прямую AB .
3. Находим $T = \lim_{B \rightarrow A} AB$ (если предел существует).

Заметим, что в определении касательной не указывается размерность $E = \dim X$ пространства X , содержащего кривую γ . А нужно ли указывать размерность при определении нормали к кривой? Если $E = 2$, то нормаль к касательной единственная. Если $E > 2$, то нормалей имеется бесконечно много. Тогда спрашивается, все ли нормали в данной точке к кривой равноправны; и если нет, то какие

нормали к кривой, скажем в 3-мерном случае, следует выделить как обособленные. Предлагаем читателю самостоятельно попытаться свое исследовательское счастье и найти ответы на эти вопросы.

Мы живем в физическом пространстве, размерность которого, как уверяют нас физики, близка к 3. Математики же, с этим не споря, утверждают, что гладких поверхностей в Природе гораздо меньше, чем не гладких. Тем не менее, со времен Ньютона, если не ранее, математики, физики, инженеры исследовали и продолжают исследовать тела, поверхности которых они полагают гладкими. Вот, например, на плоской поверхности стола лежит небольшой валун, который касается стола в единственной точке, никуда не катится, не падает, другими словами, находится в состоянии равновесия, скорее всего, устойчивого. В любом случае можно заключить, что центр инерции камня и его точка опоры находятся на одной вертикали, т. е. на нормали к поверхности гладкого валуна. Мы не будем исследовать нормали к кривым и поверхностям во всех их проявлениях, а ограничимся узким кругом как теоретических вопросов чистой математики, так и несколькими прикладными аспектами, один из которых — проблема зацепления зубчатых колес.

157. Задача. Найти огибающую нормалей к параболе $y = x^2$.

Решение. В точке $M = (x, x^2)$ уравнение нормали ν к параболе σ с уравнением $y = x^2$ имеет вид

$$\begin{aligned} Y - y &= -\frac{1}{y'}(X - x), \\ \text{или} \quad \frac{1}{2x}X + Y - x^2 - \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь (X, Y) — текущая точка нормали ν , (x, y) — основание нормали, $y' = \frac{d}{dx}y(x) = 2x$ — угловой коэффициент касательной к σ , проведенной в точке (x, y) .

Дифференцируя по x уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2x^2}X - 2x &= 0, \\ \text{или} \quad x^3 &= -\frac{1}{4}X. \end{aligned} \quad (2)$$

Перепишем (1): $X + 2xY - 2x^3 - x = 0$. Дифференцируя, получаем $x^2 = \frac{1}{3}(Y - \frac{1}{2})$. Отсюда и из (2) следуют уравнения огибающей γ нормалей параболы σ : в параметрической форме —

$$X = -4x^3, \quad Y = 3x^2 + \frac{1}{2},$$

в неявном виде —

$$\frac{1}{16}X^2 = \frac{1}{27}\left(Y - \frac{1}{2}\right)^3,$$

в явном виде —

$$Y = 3\left(\frac{X}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2},$$

или

$$X = \sqrt{\frac{16}{27}}\left(Y - \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

■

Огибающая γ является алгебраической кривой и называется *полукубической параболой* (рис. 157.1).

Гюйгенс, размышляя над созданием точных часов, ввел понятие эволюты и эвольвенты кривой.

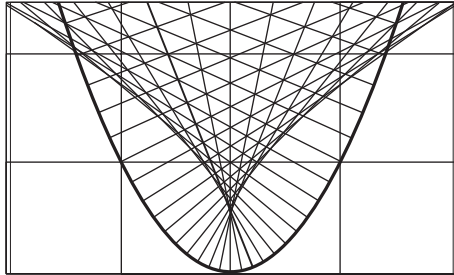


Рис. 157.1. Через каждую точку, лежащую выше эволюты, проходит 3 нормали к параболе

Определение. Огибающая γ семейства нормалей к произвольной плоской кривой σ называется *эволютой кривой σ* .

В зависимости от поставленной цели можно изменять условие предыдущей задачи в том или ином направлении и получать новые задачи. Одно из направлений — обобщение: вместо параболы нужно взять произвольную гладкую кривую. Другое направление — постараться понять, почему гладкая парабола дает кривую с особой точкой, которая имеется у полукубической параболы в виде острия — точки $(0; 1/2)$.

158. Задача. Найти уравнения касательной и нормали к плоской кривой σ , заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

в произвольной точке $M = (x(t), y(t))$.

Решение. Обозначим через \mathbf{r} радиус-вектор точки M . Тогда $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$ — вектор скорости точки M . Следовательно,

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} + \lambda \dot{\mathbf{r}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

— векторное уравнение касательной $T(\sigma, M)$ к σ в точке M . Из векторного уравнения касательной легко следуют ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} X = x + \lambda \dot{x}, \\ Y = y + \lambda \dot{y}. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначив нормаль к σ в точке M через $N(\sigma, M)$ и взяв в качестве направляющего вектора нормали вектор $\mathbf{n} = (-\dot{y}, \dot{x})$, запишем для нормали векторное уравнение

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \mu \mathbf{n}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

и параметрические уравнения

$$\begin{cases} X = x - \mu \dot{y}, \\ Y = y + \mu \dot{x}. \end{cases} \quad (4)$$

В частности, из (2), (4) мы можем записать для параболы $x = t$, $y = t^2$ уравнения касательной

$$\begin{cases} X = t + \lambda, \\ Y = t^2 + 2\lambda t \end{cases}$$

и нормали

$$\begin{cases} X = t - 2\mu t, \\ Y = t^2 + \mu. \end{cases}$$

159. Задача. Для кривой σ , заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, построить «параллельную» кривую σ' , которую описывает конец вектора постоянной длины a , нормального к σ .

Решение. Сначала отложим на каждой нормали $N(\sigma, M)$ вектор \mathbf{e} единичной длины. Поскольку длина вектора \mathbf{n} равна

$$n = |\mathbf{n}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

а вектор $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{n}}{n}$ — единичный вектор нормали, мы можем теперь записать для кривой σ' векторное уравнение $\mathbf{s} = \mathbf{r} + a \mathbf{e}$ или $\mathbf{s} = \mathbf{r} + a \frac{\mathbf{n}}{n}$

и параметрические уравнения

$$\begin{aligned} X &= x - a \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \\ Y &= y + a \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

160. Задача. Найти множество центров кривизны кривой σ , заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Решение. Напомним, что центром кривизны кривой σ в точке $M(t)$ является точка C пересечения нормали $N(\sigma, M)$ с бесконечно близкой нормалью. Это означает, что при некотором значении a для функций (1) должны выполняться равенства $\dot{X} = \dot{Y} = 0$. Достаточно взять одно из этих уравнений, например $\dot{X} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \frac{\ddot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{y} \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Rightarrow \dot{x} = \\ &= a \frac{\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \Rightarrow 1 = a \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \Rightarrow \\ a &= \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Найденная величина $R = a$ называется *радиусом кривизны*, а обратная величина $k = \frac{1}{R}$ — *кривизной* кривой σ в точке M . Из (1), (2) находим уравнение эволюты

$$\begin{aligned} X &= x - \theta \dot{y}, \\ Y &= y + \theta \dot{x}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\theta = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}}. \quad (4)$$

161. Задача. Изобразить на дисплее компьютера семейство нормалей к эллипсу и их огибающую.

Решение. Согласно (4) задачи 158, нормаль к эллипсу

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

в точке t имеет параметрические уравнения

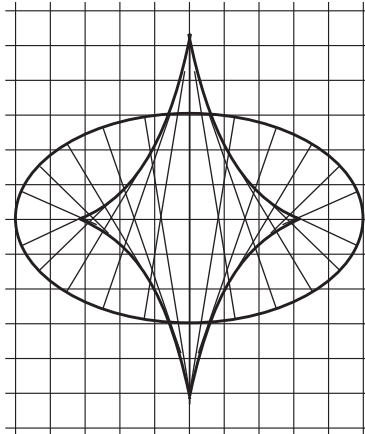


Рис. 161.1. Эволюта эллипса как огибающая его нормалей

$$x = (a - \mu b) \cos t, \quad y = (b - \mu a) \sin t.$$

Согласно (4) задачи 160,

$$\theta = \frac{1}{ab}(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t).$$

Отсюда и из (1) задачи 160 следуют параметрические уравнения эволюты эллипса

$$x = (a - b\theta) \cos t, \quad y = (b - a\theta) \sin t.$$

На рис. 161.1 изображены эллипс при $a = 5$ и $b = 3$, семейство нормалей с шагом $\frac{\pi}{12}$ для параметра t , а также эволюта эллипса, которая имеет 4 точки возврата:

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a}, 0 \right), \quad \left(0, \frac{b^2 - a^2}{b} \right), \quad \left(\frac{b^2 - a^2}{a}, 0 \right), \quad \left(0, \frac{a^2 - b^2}{b} \right). \quad \blacksquare$$

162. Задача. На каждой внутренней нормали к эллипсу на плоскости отложен отрезок длины a . Нарисовать полученную кривую и исследовать ее особенности и перестройки при изменении a .

163. Задача. Прodelать все то же самое для эллипсоида в трехмерном пространстве.

Решение задачи 162. Для эллипса $\sigma(0)$, заданного параметрическими уравнениями $x = p \cos t$, $y = q \sin t$, $q < p$, запишем параметрические уравнения «параллельной» кривой $\sigma(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Согласно уравнениям (1) задачи 159, кривая $\sigma(a)$ имеет уравнения

$$x = \left(p - q \frac{a}{\sqrt{p^2 \cos^2 t + q^2 \sin^2 t}} \right) \cos t,$$

$$y = \left(q - p \frac{a}{\sqrt{p^2 \cos^2 t + q^2 \sin^2 t}} \right) \sin t.$$

На рис. 162.1 для эллипса с $p = 5$, $q = 3$ построены кривые $\sigma(nh)$, где $h = 1,41$, $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Судя по рисунку, кривая $\sigma(h)$ не имеет особенностей. Следующие 4 кривые $\sigma(2h)$, $\sigma(3h)$, $\sigma(4h)$, $\sigma(5h)$ имеют по 4 точки возврата, расположенные на эволюте эллипса; при этом $\sigma(2h)$, $\sigma(4h)$ и $\sigma(5h)$ имеют по две точки самопересечения, в то время как у $\sigma(3h)$ они отсутствуют. Кривая $\sigma(6h)$ снова не имеет особенностей.

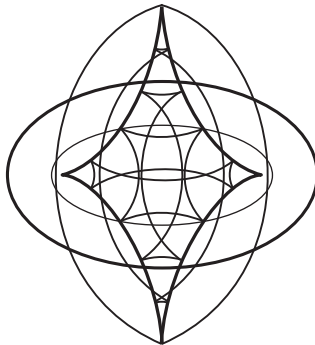


Рис. 162.1. Эллипс с полуосями 5 и 3, его эволюта и 6 «параллельных» кривых с шагом 1,41 (см. также цв. вклейку)

На рис. 162.2 представлена двумя графическими способами поверхность, горизонтальные сечения плоскостями $z = a$ которой служат «параллельными» кривыми $\sigma(a)$ эллипса. Наглядная модель упрощает исследование особенностей «параллельной кривой» и ее эволюцию с ростом a , при этом на числовой прямой появляется несколько точек бифуркации, которые мы укажем ниже.

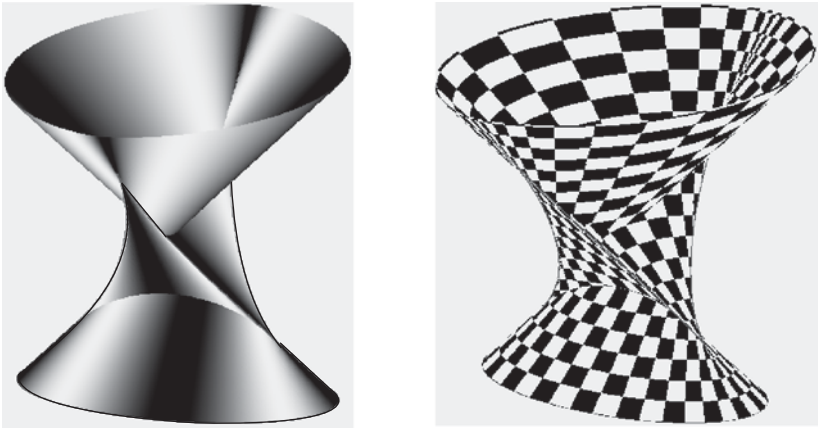


Рис. 162.2

Согласно (2) задачи 160, радиус кривизны эллипса равен

$$R(t) = \frac{(p^2 \sin^2 t + q^2 \cos^2 t)^{3/2}}{pq}.$$

Найдем экстремальные значения R :

$$R_{\min} = R(0) = q^2/p = 9/5, \quad R_{\max} = R\left(\frac{\pi}{2}\right) = p^2/q = 25/3.$$

На рис. 162.3 показана метаморфоза «параллельной» кривой $\sigma(a)$ при изменении параметра $a \in \mathbb{R}$. ■

Определение. Пусть σ — гладкая кривая, γ — ее эволюта. Тогда кривая σ называется *эвольвентой* кривой γ .

Очевидно, обратная задача — по эволюте γ восстановить кривую σ — имеет не одно решение, а бесконечно много. Дело в том, что если γ — эволюта кривой σ , то у всех кривых, «параллельных» σ , одна и та же эволюта γ . Дадим механическую интерпретацию эвольвенты.

Пусть дана окружность ω , на которую намотана нерастяжимая нить. Отметим на нити точку $P \in \omega$ и начнем разматывать нить, оставляя ее

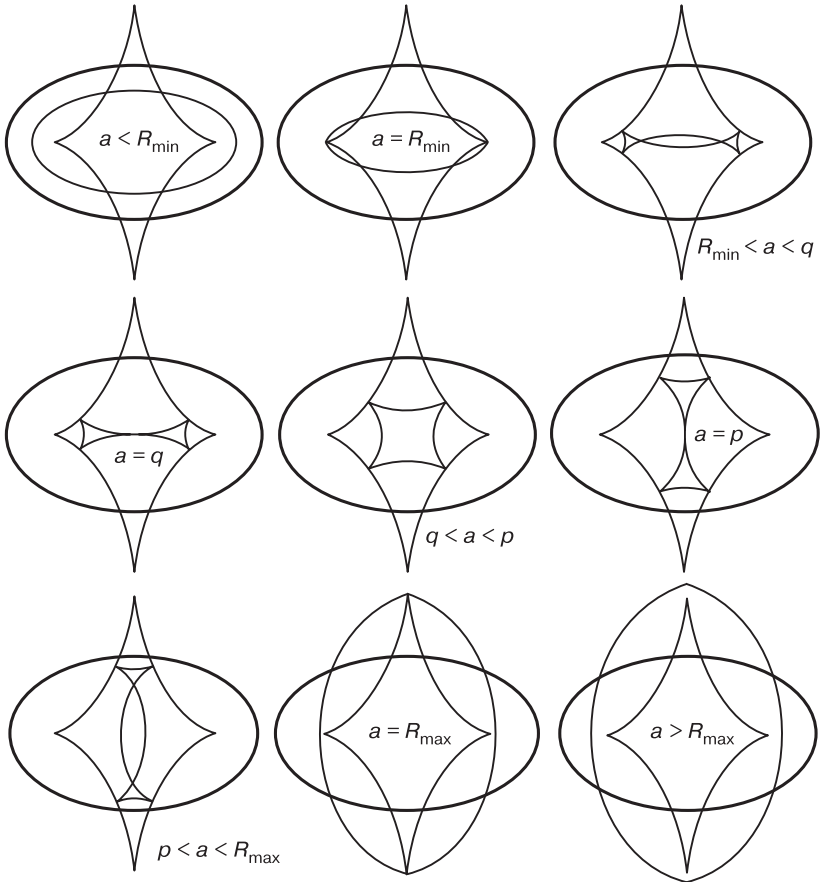


Рис. 162.3. Метаморфоза кривой, «параллельной» эллипсу

натянутой. Тогда точка P опишет эвольвенту окружности. (рис. 164.1). Точно так же с помощью нити можно строить эвольвенту произвольной гладкой кривой.

Рассмотрим еще одну механическую модель, приводящую к эвольвенте. Пусть колесо ω катится по рейке D . Если M — точка касания рейки и колеса в начальный момент времени $t = 0$, то дальнейшая судьба точки контакта зависит от системы отсчета. Если привязать систему координат к рейке, то точка M как точка колеса опишет так называемую циклоиду (рис. 165.1).

Если привязать систему координат к колесу, то точка M как точка рейки опишет эвольвенту окружности. В связи со сказанным составим и решим несколько задач.

164. Задача. Найти уравнение эвольвенты η для окружности ω , имеющей уравнения $x = R \cos t$, $y = R \sin t$.

Решение. Пусть $M = (R, 0)$ — точка окружности ω . Отведем конец нити от окружности ω так, чтобы она оставалась натянутой (рис. 164.1). Тогда нить длиной, скажем, d будет касаться ω в точке $P = (x, y)$, а конец нити окажется в точке K . При этом

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} - \frac{d}{r} \dot{\mathbf{r}},$$

где

$$\dot{\mathbf{r}} = (-R \sin t, R \cos t), \quad \dot{r} = |\dot{\mathbf{r}}| = R, \quad d = Rt.$$

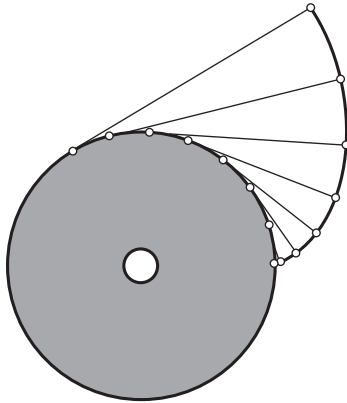


Рис. 164.1

Из векторного уравнения следуют параметрические уравнения эвольвенты η :

$$x = R \cos t + Rt \sin t, \quad y = R \sin t - Rt \cos t. \quad (1)$$

Если в качестве точки M взять точку $(R \cos t_0, R \sin t_0)$, то фазовый сдвиг на величину t_0 превратит уравнения (1) в уравнения

$$x = R \cos t + R(t - t_0) \sin t, \quad y = R \sin t - R(t - t_0) \cos t. \quad (2)$$

■

165. Задача. **Блез Паскаль:** «Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние, ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота».

С. Г. Гиндикин: «Кривую, так часто вычерчивающуюся перед глазами каждого, первыми заметили Галилей (1564–1642) в Италии и Мерсенн (1588–1648) во Франции. В Италии ее назвали циклоидой (это название, означающее «происходящая от круга», принадлежит Галилею), во Франции — рулеттой. Привилось первое название, а рулетками теперь называют кривые более широкого класса, речь о которых пойдет позднее. Математики XVII века, создававшие общие методы исследования кривых, были очень заинтересованы в новых «подопытных» кривых. Среди этих кривых циклоида заняла особое место. Она оказалась одной из первых трансцендентных кривых (кривых не алгебраического происхождения), для которых удалось найти красивый явный ответ в задачах о построении касательных и вычислении площади. Но больше всего поражало, что циклоида вновь и вновь появлялась при решении самых разных задач, в первоначальной постановке которых она не участвовала. Все это сделало циклоиду самой популярной кривой XVII века: крупнейшие ученые в Италии, и Франции (Торричелли, Вивиани (1622–1703), Ферма (1601–1665), Декарт (1596–1650), Роберваль (1602–1675)) решали разнообразные задачи о циклоиде, а в 1673 году Гюйгенс (1629–1695) констатировал, что «циклоида исследована точнее и основательнее всех других кривых».

Найти уравнение циклоиды.

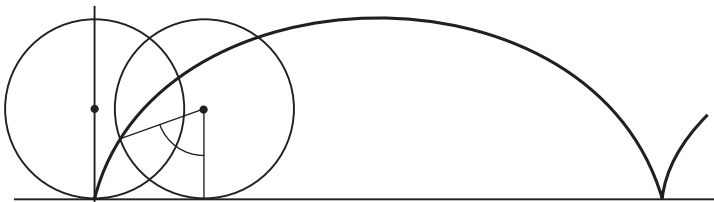


Рис. 165.1. Циклоида

Решение. Колесо совершает два движения одновременно: первое движение — вращение по закону $x = R \cos t$, $y = -R \sin t$, второе —

параллельный перенос на вектор $(x, y) = (Rt, 0)$. В результате получается сложное движение, при котором поворот и параллельный перенос согласованы условием того, что колесо катится без проскальзывания, следовательно, точка $(0, 0)$ описывает траекторию

$$x = Rt - R \sin t, \quad y = R - R \cos t, \quad (1)$$

называемую *циклоидой* (рис. 165.1). ■

166. Задача. Исследовать эвольвентное зацепление зубчатых колес.

Решение. Пусть окружность α задана уравнениями

$$x = c_1 + R_1 \cos t, \quad y = R_1 \sin t, \quad (1)$$

а окружность β — уравнениями

$$x = c_2 + R_2 \cos t, \quad y = R_2 \sin t. \quad (2)$$

На рис. 166.1 изображены два колеса с уравнениями (1), (2), а также по одной их эвольвенте, которые касаются друг друга. Дуга эвольвенты моделирует рабочую поверхность зуба шестеренки. Пусть

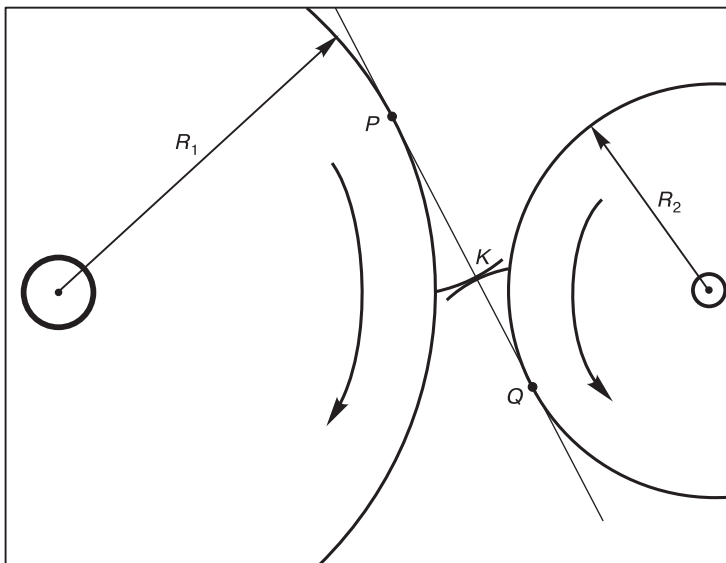


Рис. 166.1. Эвольвентное зацепление параллельных зубчатых колес. Эвольвенты соприкасаются в точке K , которая при указанных направлениях вращения колес смещается по внутренней касательной PQ к окружностям в направлении от P к Q . Параметры окружностей: $R_1 = 2$; $c_1 = -2$; $R_2 = 1,1$; $c_2 = 1,5$

число зубьев первого колеса равно n_1 , второго колеса — n_2 . Тогда отношение $k = n_1 : n_2$ называется *коэффициентом зацепления зубчатых колес*. Рассмотрим систему координат, привязанную к первому колесу. Тогда в этой системе отсчета эвольвента второго колеса будет катиться без проскальзывания по первой эвольвенте, а центр второго колеса будет описывать окружность, концентрическую с первой окружностью. В системе отсчета, привязанной к линии центров колес, точка контакта будет скользить по внутренней касательной PQ окружностей в направлении от P к Q . При этом технически ясно и математически очевидно, что равномерная угловая скорость вращения ведущего колеса α обеспечивает равномерное скольжение одной эвольвенты по другой, что, в свою очередь, приводит к равномерному вращению ведомого колеса β . ■

В идеале все обстоит именно так. Однако на практике поверхность зубьев имеет неровности, несмотря на то что они были обработаны тем или иным способом (шевингование, фрезерование, шлифовка и т. п.). О том, каким способом лучше всего обрабатывать зубья колес, см. задачу 168.

167. *Задача.* Найти форму зубьев двух зубчатых колес с эвольвентным зацеплением, если коэффициент зацепления равен $29 : 23$.

168. *Задача.* Выяснить, какой способ обработки зубчатого колеса лучше, если имеются эмпирические данные о радиальном биении колеса (см. табл. 168).

Таблица 168

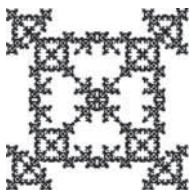
Радиальное биение зубчатого колеса, мкм	Шевингование, частота	Фрезерование, частота
10	1	5
20	7	5
30	13	5
40	16	5
50	15	5
60	12	5
70	8	5
80	3	4
90	3	4
100	4	4
110	5	4
120	3	4

Окончание табл. 168

Радиальное биение зубчатого колеса, мкм	Шевингование, частота	Фрезерование, частота
130		4
140		4
150		4
160		3
170		3
180		3
190		3
200		2
210		2
220		2
230		1
240		1
250		1
260		1
270		1
Σ	90	90

169. Задача. Внутри эллиптического цилиндра, лежащего на боку, вокруг его оси вращается тяжелый шарик. Цилиндр сделан из легкого материала, поэтому можно считать, что центр инерции всей системы сосредоточен в шарике. Исследовать процесс перекачивания цилиндра по горизонтальной поверхности при медленном вращении шарика. Изготовить действующую модель и проверить на ней результаты исследования.

§ 13. ТЕПЛООБМЕН. КРИОЛОГИЯ



Сквозь жар души, сквозь хлад ума.

А. А. Блок

Криологическая компетентность инженера является одной из важнейших для России, большая часть территории которой расположена в зоне вечной мерзлоты. Здесь рассмотрено несколько задач на тему теплообмена, теплопередачи, о нагревании и остывании.

170. Задача. При обходе заповедника два егеря обнаружили тушу убитого кабана. Ее осмотр показал, что выстрел браконьера был точным и кабан убит наповал. Рассудив, что браконьер должен вернуться за добычей, егеря решили дожидаться его, укрывшись недалеко от того места, где лежала туша. Вскоре показались два человека, направлявшиеся прямо к убитому животному. Задержанные всячески отрицали свою причастность к браконьерству. Однако у егерей уже были косвенные улики их виновности, но для ее полного доказательства следовало еще уточнить время, когда был убит кабан. В момент задержания подозреваемых температура x туши кабана была равна 31°C , а спустя час составляла 29°C . Считая, что в момент выстрела температура воздуха была $a = 21^\circ\text{C}$, а температура кабана $x_0 = 37^\circ\text{C}$, определить время выстрела.

Решение (см. [1, с. 13]). Как уже было сказано в § 1, математическое моделирование (ММ) состоит из трех этапов:

построение ММ — анализ ММ — интерпретация ММ.

Построение математической модели. На этом этапе необходимо учесть все данные в условии задачи. Содержательно из условия задачи следует: известна температура живого животного; после того как кабан был убит, температура его тела стала уменьшаться; известна температура тела в данный момент и температура воздуха. Требуется выявить и исследовать закон изменения температуры тела, т. е. функцию $x = x(t)$ аргумента t , где x — температура, измеряемая в градусах, t — время, измеряемое в часах.

Объектом нашего исследования является неизвестная функция $x(t)$, про которую известно, что:

- выстрел был сделан в момент $t = 0$;
- $x_0 = x(0) = 37^\circ\text{C}$;

- задержание неизвестных было в момент времени t_0 ;
- $x(t_0) = 31^\circ\text{C}$;
- $x(t_0 + 1) = 29^\circ\text{C}$;
- температура a воздуха в момент выстрела равна 21°C ;
- остывание возможно лишь при условии $x > a$.

Для завершения построения ММ сделаем еще два предположения:

- температура воздуха постоянна;
- $x(t)$ выражает закон излучения тепла.

Первое из этих предположений сделано для того, чтобы выйти из ситуации неопределенности, в которой мы оказались из-за отсутствия информации об изменении температуры воздуха, начиная с момента $t = 0$ выстрела. Если бы в лесу или в соседнем населенном пункте был установлен прибор, который фиксировал бы температуру воздуха за последние несколько часов (или дней), то мы могли бы воспользоваться записанной в его памяти информацией, чтобы построить так называемую «мягкую» модель и исследовать ее. Но если нет данных об изменении температуры за последние несколько часов (дней), то мы можем выйти из ситуации неопределенности, сделав предположение, что температура воздуха была постоянной. Тогда мы получаем так называемую «жесткую» модель.

Второе предположение означает, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой x тела и температурой a воздуха, т. е.

$$\dot{x} = -k(x - a), \quad (1)$$

где k — положительный коэффициент пропорциональности.

Исследование математической модели сводится к решению дифференциального уравнения (1) с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dx}{x - a} = -k \int dt \Leftrightarrow \ln(x - a) = -kt + \ln(x_0 - a) \Leftrightarrow \ln \frac{x - a}{x_0 - a} = -kt. \quad (2)$$

Из имеющихся данных и (170) следует

$$\begin{aligned} \ln \frac{31 - 21}{37 - 21} = -kt &\Rightarrow \ln \frac{29 - 21}{37 - 21} = -k(t + 1) \Rightarrow \\ \ln \frac{31 - 21}{37 - 21} - \ln \frac{29 - 21}{37 - 21} &= k \Rightarrow \\ k = \ln \frac{31 - 21}{29 - 21} = \ln \frac{5}{4} &= 0,223144. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (170), (170) следует

$$t = \frac{1}{0,223144} \ln \frac{37 - 21}{31 - 21} = \frac{\ln 1,6}{0,223144} = 2,106284. \quad (4)$$

Интерпретация математической модели. Из (4) следует, что между моментом выстрела и моментом задержания неизвестных прошло 2 часа 6 минут. ■

171. Задача. Теплопроводная труба диаметром 20 см сделана из однородного материала и защищена покрытием из магнезии толщиной 10 см. Температура трубы равна 160°C, а внешнее покрытие имеет температуру, равную 30°C. Исследовать распределение температуры внутри покрытия и найти количество теплоты, выделенной трубой на участке длиной 1 м в течение суток, если коэффициент теплопроводности $k = 1,7 \cdot 10^{-4}$.

172. Задача. При перекачке вязких и застывающих нефтепродуктов их предварительно подогревают для снижения вязкости, а следовательно, и для уменьшения гидравлических сопротивлений в трубопроводах. Исследовать теплообмен между предварительно нагретым нефтепродуктом и окружающей трубопровод средой, а именно, найти зависимость температуры $t(L)$ перекачиваемого нефтепродукта от пройденного по трубопроводу пути L [14, с. 260].

173. Задача. Исследовать нарастание корки застывшего нефтепродукта на стенках трубопровода во время перекачки [47, с. 113].

174. Задача. М. В. Ломоносов [38, с. 74]:

На противников системы Коперника

Случились вместе два Астронома в пиру
И спорили весьма между собой в жару.
Один твердил: Земля, вертясь, вокруг Солнца ходит;
Другой, что Солнце все с собой планеты водит;
Один Коперник был, другой слыл Птоломей.
Тут повар спор решил усмешкою своей.
Хозяин спрашивал: «Ты звезд течение знаешь?
Скажи, как ты о сем сомненье рассуждаешь?»
Он дал такой ответ: «Что в том Коперник прав,
Я правду докажу, на Солнце не бывав.
Кто видел простака из поваров такого,
Который бы вертел очаг вокруг жаркого?»

Оба Астронома завершали пир чаепитием. Птоломей растворил в своем чае три кусочка сахара и начал рассказывать Копернику, как правильно заваривать чай. Через 10 минут Коперник, спохватившись, также растворил в чае три кусочка сахара. После чего оба глубоко-мысленно молчали, предаваясь ароматам индийского напитка. Кто из астрономов пил более горячий чай?

175. Проблема. В окрестности г. Тюмени валун округлой формы находится в грунте на глубине 1 м. Через сколько лет он окажется на поверхности земли, если глубина промерзания грунта составляет в среднем 156 см?

176. Задача. Ледяной шар диаметром 10 см находится в лаборатории при температуре 20°C . Исследовать зависимость массы таящего льда от времени.

177. Задача. Исследовать охлаждение нагретого металлического шара, если температура окружающей среды постоянна и равна 0°C .

178. Задача (которая не решается математически). В зале — три лампы, а три выключателя к ним — на электрощите в коридоре. Каждый выключатель управляет одной и только одной лампой, разные выключатели — разными лампами. Требуется установить соответствие между лампами и выключателями, при этом разрешается:

- подойти один раз к электрощите,
- «поработать» с выключателями,
- зайти один раз в зал, чтобы выяснить работу ламп.

§ 14. МЕХАНИКА



Учись, мой сын: наука сокращает
Нам опыты быстротекущей жизни.

А. С. Пушкин

В этом параграфе рассмотрены задачи механики, некоторые достаточно трудны для решения.

179. *Задача.* Верхний конец вертикальной бурильной колонны свободен, а нижний — совершает колебания, подчиняясь гармоническому закону колебаний шарошек. Исследовать закон движения колонны, при этом:

- учесть влияние сил тяжести и трения;
- силу трения принять пропорциональной скорости колонны;
- считать, что в начальный момент колонна находилась в ненапряженном состоянии и скорости равнялись нулю [21].

180. *Задача.* Бурильная колонна наклонена под углом α к вертикали. Верхний конец колонны свободен, а нижний совершает колебания, подчиняясь гармоническому закону колебаний шарошек. Исследовать закон движения колонны [21].

181. *Задача.* Труба, открытая с одного конца, двигалась в направлении своей оси с постоянной скоростью и внезапно остановилась. Определить смещения воздуха внутри трубы [21].

182. *Задача.* Однородная струна, закрепленная на концах отрезка $I = [0; 1]$, имеет в начальный момент форму параболы U . Наибольшее отклонение струны в начальный момент равно h . Определить закон колебания струны, если в начальный момент скорости равны нулю, а объединение $U \cup I$ — симметричная фигура [21].

183. *Задача.* Животным пустыни приходится преодолевать большие расстояния между источниками воды. Как зависит максимальное время, которое может бежать животное, от размеров L животного?

Решение (см. [4]). Запас воды пропорционален объему тела, т. е. L^3 , испарение же — площади поверхности, т. е. L^2 . Поэтому максимальное время пробега от одного источника до другого прямо пропорционально L . Заметим, что максимальное расстояние, которое

может пробежать животное, также растет пропорционально L (см. следующую задачу).

Ответ. Прямо пропорционально L .

184. Задача. Как зависит скорость бега животного по ровному месту и в гору от размеров L животного?

Решение (см. [4]). Мощность, развиваемая животным, пропорциональна L^2 (кИД мышц примерно постоянен — около 25%, остальные 75% химической энергии переходят в тепло; теплопередача же пропорциональна поверхности тела, т. е. L^2 , значит, и полезная мощность пропорциональна L^2).

Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна квадрату скорости и площади поперечного сечения, поэтому затраченная на ее преодоление мощность пропорциональна $v^2 L^2 v$. Итак, $v^3 L^2 \sim L^2$, следовательно, $v \sim L^0$. И действительно, скорость бега по ровному месту у животных не мельче зайца и не крупнее лошади практически не зависит от размеров особи.

Для бега в гору необходима мощность $mgv \sim L^3 v$; поскольку развиваемая мощность $\sim L^2$, находим $v \sim L^{-1}$. Действительно, собака легко взбегает на холм, а лошадь замедляет шаг.

Ответ. По ровному месту $\sim L^0$, в гору $\sim L^{-1}$.

185. Задача. Как зависит от размеров животного высота прыжка?

Решение (см. [4]). Нужная для прыжка на высоту h энергия пропорциональна $L^0 h$, а совершаемая силой F мышц работа пропорциональна FL . Сила F пропорциональна L^2 (так как прочность костей пропорциональна площади их сечения). Итак, $L^3 \sim L^2 L$, т. е. высота прыжка не зависит от размеров животного. И действительно, тушканчик и кенгуру прыгают примерно на одинаковую высоту.

Ответ. $\sim L^0$.

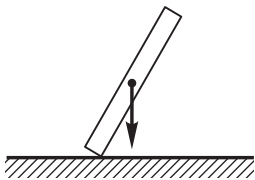


Рис. 187.1

186. Задача. Исследовать движение тела единичной массы под действием линейных пружин с линейным трением.

187. Задача. Стержень веса P , наклоненный к поверхности стола под углом 60° , начинает падать без начальной скорости (рис. 187.1). Найти силу реакции стола в начальный момент, считая стол: а) абсолютно гладким,

б) абсолютно шероховатым [4].

188. Задача. Исследовать, по какому закону растет численность живых организмов колонии, живущей в условиях неограниченных ресурсов питания и ореола обитания, без подавления другими видами.

Ответ. $x(t) = ke^t$.

189. Задача. Ферхюльста (1845). Исследовать, по какому закону растет численность живых организмов колонии, живущей в условиях неограниченных ресурсов питания, но ограниченного ореола обитания, без подавления другими видами.

Ответ. $x(t) = x_0 \frac{he^{\varepsilon(t-t_0)}}{h - x_0 + x_0e^{\varepsilon(t-t_0)}}$.

190. Задача. Вольтерры. Пусть в замкнутом водоеме имеется x щук и y карасей. В предположении, что щуки питаются только карасями, а карасями — только щуки, исследовать модель, объясняющую динамику численности карасей и щук:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bxy, \\ \dot{y} = cx - dxy, \end{cases} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*.$$

Решение выполним в оболочке MathCAD (см. рис. 190.1).

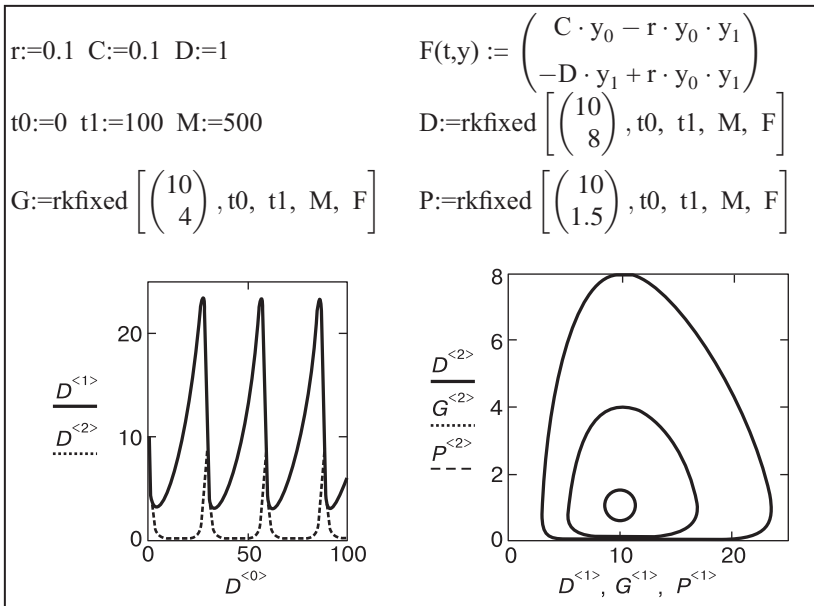


Рис. 190.1

§ 15. ЧАСЫ. МАЯТНИКИ

Есть время для любви,
Для мудрости — другое.

А. С. Пушкин

191. Задача. Галилео Галилей, а затем и Христиан Гюйгенс экспериментально выяснили, что маятниковые часы не являются точными. Можно ли в этом убедиться аналитически?

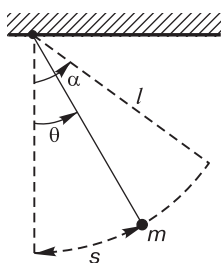


Рис. 191.1

Решение. Пусть l — длина стержня, массой которого можно пренебречь, m — масса гири на его конце (рис. 191.1), $\theta = \theta(t)$ — угол отклонения маятника в момент времени t , α — амплитуда, v — скорость движения гири. Если маятник отклонить на угол α , а затем отпустить, то, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(\cos \theta - \cos \alpha), \quad (1)$$

где g — ускорение свободного падения.

Очевидно, длина дуги s равна произведению $l\theta$, поэтому $v = \dot{s} = l\dot{\theta}$, и из (1) следует уравнение

$$\frac{l}{2} \dot{\theta}^2 = g(\cos \theta - \cos \alpha). \quad (2)$$

Для малых t угол θ убывает, поэтому мы, разделяя эти переменные, получаем из (2) уравнение $dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}$. Период T колебаний маятника равен

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что период колебаний маятника зависит от амплитуды α . Этот факт и является причиной того, что маятниковые часы не точные, так как практически при каждом колебании маятника его амплитуда хоть незначительно, но все же отличается от α .

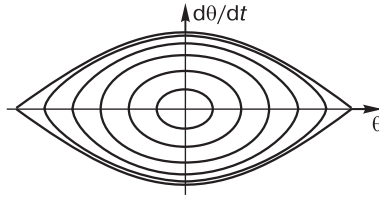


Рис. 191.2. Фазовые кривые колебаний математического маятника, соответствующие значениям амплитуды $\alpha = 0^\circ, 30^\circ \dots 180^\circ$

Построим фазовые кривые, зависящие от амплитуды α . Из (2) следует, что $\dot{\theta} = \pm k\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}$, где $k = \sqrt{2g/l}$. Из рис. 191.2 хорошо видно, что колебания маятника не являются гармоническими, так как фазовые кривые не являются эллипсами (см. задачу 106, рис. 106.3). При малых амплитудах фазовые кривые близки к эллипсам, а колебания — к гармоническим. ■

192. Задача. Вычислить длину циклоиды.

193. Задача. Найти эволюту циклоиды.

194. Задача. В 1673 г. Гюйгенс сконструировал точные часы, используя уникальное свойство циклоиды. Исследовать процесс катания металлического шарика по желобу в форме перевернутой циклоиды; в частности, убедиться, что период T колебаний шарика в желобе не зависит от амплитуды колебаний.

Решение. Пусть металлический шарик первоначально находится в точке M желоба, сделанного в форме перевернутой циклоиды (рис. 194.1), имеющей параметрические уравнения

$$x = R(\theta - \sin \theta), \quad y = R(1 - \cos \theta).$$

Пренебрегая силами трения и радиусом шарика, найдем время, в течение которого он скатится из точки M до нижней точки K

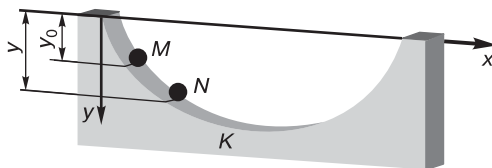


Рис. 194.1. К задаче 194 (см. также цв. вклейку)

желоба. Введем систему координат, как показано на рисунке. Пусть $M = (x_0, y_0)$, $x_0 = R\theta_0 - R \sin \theta_0$, $y_0 = R - R \cos \theta_0$. Когда шарик скатится из точки M в некоторую точку $N(\theta)$, высота шарика изменится на величину $h = y - y_0 = R(\cos \theta_0 - \cos \theta)$ (см. (1) задачи 165). Скорость v падающего тела находится по формуле $v = \sqrt{2gh}$, поэтому в нашем случае $v = \sqrt{2gR(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$. Поскольку $v = \dot{s}$, т. е. скорость равна производной пути s по времени t , то

$$\dot{s} = \sqrt{2gR(\cos \theta_0 - \cos \theta)}. \quad (1)$$

Так как

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2_{\theta} + y'^2_{\theta}} d\theta = R\sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = \\ &= R\sqrt{4 \frac{1 - \cos \theta}{2}} d\theta = 2R \sin \frac{\theta}{2} d\theta, \end{aligned}$$

уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$dt = \frac{2R \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gR(\cos \theta_0 - \cos \theta)}},$$

из которого следует

$$\begin{aligned} t &= \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{2R \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gR(\cos \theta_0 - \cos \theta)}} = -2\sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{R}{g}} \left[\arccos \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta_0/2)} \right]_{\theta_0}^{\pi} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} (\arccos 0 - \arccos 1) = \pi\sqrt{R/g}. \end{aligned}$$

Таким образом, период колебаний циклоидального маятника равен

$$T = 4\pi\sqrt{R/g}$$

и не зависит от амплитуды. Это свойство циклоидального маятника существенно отличает его от обычного (кругового) маятника. ■

195. Задача. На столе лежат часы. Найти угловую скорость часовой стрелки относительно Земли.

196. Проблема. Как может выглядеть циферблат солнечных часов?

197. Проблема. Можно ли смастерить такие солнечные часы, которые показывали бы еще и минуты?

Ответ. Говорят, можно. См., например, http://www.mycomp.com.ua/list/news_internet;jsessionid=CCD4F66536F360A8EA1D0A856C7DB2F4?page=52, а также [49, с. 244–246].

198. Задача. Мастер изготовил часы, у которых центр вращения минутной стрелки находится на конце часовой. Какую кривую описывает конец минутной стрелки?

199. Задача. Механические часы имеют три стрелки: часовую, минутную и секундную, причем центр вращения минутной стрелки находится на конце часовой, а центр вращения секундной стрелки — на конце минутной. Какую кривую описывает конец секундной стрелки?

200. Задача. У плоских часов имеется n стрелок: 1-я, 2-я, ..., n -я. Начало каждой стрелки находится на конце предыдущей. Описать траекторию, которую описывает конец последней стрелки.

201. Задача. У объемных часов имеется n стрелок: 1-я, 2-я, ..., n -я. Начало стрелки i находится на конце стрелки $i - 1$, при этом осью вращения стрелки i служит стрелка $i - 1$. Исследовать траекторию концевой точки последней стрелки.

202. Задача. На модели Птолемея Солнечной системы исследовать календарь солнечных и лунных затмений.

203. Задача. Известно, что древние водяные часы представляли собой чашу, из которой через небольшое отверстие на дне вытекала вода. Требуется найти форму водяных часов, при которой уровень воды убывал бы в чаше с постоянной скоростью.



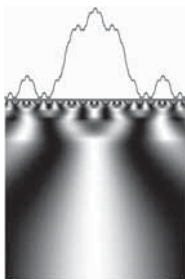
Рис. 203.1. Чаша водяных часов в разрезе

Решение проведем аналогично решению задачи 68. Пусть $S(h)$ — площадь горизонтального сечения чаши на высоте h , s — площадь отверстия на дне чаши. Тогда из уравнения $dt = -\frac{S(h)}{\sigma s \sqrt{2gh}} dh$, аналогичного уравнению (1) задачи 68, получаем $\sqrt{h} = -\frac{S(h)}{\sigma s \sqrt{2g}} \dot{h}$, откуда с учетом того, что чаша рассматривается как поверхность вращения, и того, что $\dot{h} = a \in \mathbb{R}$, следует $\sqrt{h} = -\frac{\pi r^2}{\sigma s \sqrt{2g}} a$, или

$$h = cr^4, \quad (1)$$

где $c = \frac{a^2 \pi^2}{2gk^2 s^2}$. Стало быть, чаша имеет форму поверхности, полученной вращением кватрики с уравнением (1) вокруг вертикальной оси h (рис. 203.1).

§ 16. МАТЕМАТИКА



Нет ничего практичнее хорошей теории.

Л. Больцман

Здесь рассмотрены разные задачи математики и их вариации. Если вариативность в предметной области приводит к большим финансовым затратам, то в математике вариативность обходится на два порядка дешевле. Но главное здесь в том, что на примерах математических задач будущие инженеры осваивают основные приемы креативности в математическом моделировании.

Проблемный и задачный подходы. В процессе обучения математике студент ставит своей целью:

- *понимать* математический язык,
- *знать* необходимые математические факты (теоремы),
- *уметь* для данного фрагмента реальности:
 - объяснять его эволюцию на математической модели,
 - управлять операциональными свойствами,
 - предсказывать возможную динамику.

Понимать, знать, уметь студент может научиться:

- во-первых, опираясь:
 - на готовые знания,
 - на собственный опыт получения новых знаний,
 - на чужой опыт получения новых знаний,
- во-вторых, исходя:
 - из собственных целей,
 - из целей общественности (социальный заказ),
 - из общечеловеческих целей,
- в-третьих, воспитывая в себе качества, необходимые:
 - 1) в познавательной деятельности,
 - 2) в исследовательской работе,
 - 3) в творческом горении.

- ◇ Фрагмент реальности,
- ◇ его феноменологическое описание,
- ◇ математическая модель

— вот три составляющие, которые сопровождают исследователей в любой области человеческого знания:

- × часть которого со временем утрачивается,
- × часть развивается далее,
- × часть передается подрастающему поколению

в виде готовых задач и упражнений или же в виде проблем. Первичным источником, как для учебной проблемы, так и для учебной задачи, являются проблемные ситуации, но их значимости для обучающегося различны.

Вероятно, *«подобно задаче, проблема также может быть описана в знаковой форме, лишь как языковое оформление переживания нераскрытости и непонятности проблемной ситуации, и стать формой предъявления знания о незнании»* [18, с. 43]:

- для себя,
- для других,
- для потомков.

Проблемный подход к формированию:

- познавательной,
- исследовательской,
- творческой

деятельности человека эффективнее задачного, ибо проблемный подход подобен приготовлению ухи

- ▷ из рыбы (которую еще надо наловить),
- ▷ на костре (для которого еще надо найти дрова),
- ▷ с единомышленниками (которых, как и денег, много не бывает).

Задачный подход проще: он аналогичен технологично организованному коллективному поеданию «культурных консервов». Этот путь всегда был и всегда будет в образовании, так как у него есть главное достоинство: длительность его протекания во времени предсказуема. Проблемный же подход, оцифрованный музыкой логики и расцвеченный яркими красками интуитивной палитры, к тому же требующий немало времени, способен дать много пользы, правда, порой с побочными эффектами, когда обучающийся попадает в волшебные чары ее величества Красоты Нерешенной Проблемы, и очарованный ею, может не вернуться назад. Много способных молодых людей погубили себя в поисках доказательства, например, теоремы Ферма или пятого постулата Евклида. О том, что попытки доказательства последнего погубили много

одаренных молодых умов, в свое время предупреждал юного гимназиста казанского университета Николая Лобачевского профессор Бартельс. Но ученик не внял молениям своего учителя. Великий русский математик Н. И. Лобачевский, открыв новую геометрию, продолжал практически в одиночестве возделывать неевклидовы поля. Трагедией Лобачевского было то, что он оказался в полущаге от всемирного признания своей «пангеометрии» еще при жизни: он по существу построил внутри своей геометрии модель евклидовой геометрии, назвав евклидовой плоскостью орисферу, а евклидовыми прямыми — орициклы на ней; ему бы сделать еще полшага — построить внутри евклидовой геометрии модель «пангеометрии»... Но это сделали уже другие геометры — Эудженио Бельтрами (Италия, 1868), Артур Кэли (Англия, 1870), Феликс Клейн (Германия, 1871), Анри Пуанкаре (Франция, 1882) — через много лет после смерти Лобачевского.

204. Задача. В геолого-минералогическом музее хранятся пять камней суммарной массой 40 кг. Сколько весит каждый из камней, если с помощью этих камней можно взвесить на чашечных весах за один раз любое целое число килограммов вещества — от 1 до 40?

Говорят, что задача о «взвешивании монет» стоила 10 000 человеко-часов непродуктивно потраченного времени математиков, занятых оборонной работой во время войны. Было даже сделано предложение сбросить эту задачу над Германией.

Дж. Литлвуд

205. Имеется 12 одинаковых по внешнему виду монет, среди них — одна фальшивая; по массе настоящие монеты равны между собой, а фальшивая отличается от настоящих. Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь выявить фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящей?

206. Задача. Пять камней нужно упорядочить по возрастанию масс, пользуясь чашечными весами без гирь, с помощью которых можно сравнить массы двух камней, ставя на каждую чашку лишь по одному камню. Как решить задачу с помощью не более семи взвешиваний?

Сделаем шаг в сторону, где больше света.

Н. С. Лесков, «Загон»

207. Задача. Предложить способ раскраски волчка белой и черной красками, чтобы при сильном вращении он был виден в дневном свете, скажем, зеленым.

См.: <http://class-fizika.narod.ru/sren2.htm>

208. Задача. Составить из 3 спичек правильный треугольник.

209. Задача. Составить из 6 спичек 4 правильных треугольника.

210. Задача. Составить из 10 спичек 10 правильных треугольников.

211. Задача. Составить из 15 спичек 20 правильных треугольников.

212. Задача. Имеются большой куб и маленький кубик. Можно ли в кубике проделать отверстие, через которое пройдет куб?

213. Задача. Провести через центр куба прямую так, чтобы сумма квадратов ее расстояний от вершин куба была: а) наибольшей, б) наименьшей.

Я пролил на рубашку кофе. Первая реакция тех, кто, в отличие от меня, не родился гением, это тотчас же приняться вытирать.

С. Дали

☛ Рассмотрим пример исследовательской проблемы, которую можно решать на любом уровне математической образованности. Ее можно сформулировать в виде проблемы 214. ☛

214. Проблема а. Самый равнобедренный треугольник — правильный. А как может выглядеть самый неравнобедренный треугольник?

Тут что-нибудь сверх понятия сделано.

Н. С. Лесков, «Левша»

Исследование. Поставленный таким образом вопрос является некорректным. Тем не менее попытки ответить на него приводят к более глубокому пониманию геометрии. Данный вопрос не является задачей в привычной знаниевой парадигме. Скорее, мы имеем дело с проблемой, результаты исследования которой зависят от того, какое определение мы дадим понятию «самый неравнобедренный треугольник» — СНТ.




Арифметическая прогрессия и углы. Если рассматривать треугольники с точностью до подобия, то для определения формы треугольника достаточно указать его углы α , β , γ . Ясно, что углы должны отличаться друг от друга как можно сильнее. Не совсем ясно, но кажется правдоподобным, что углы должны составлять три последовательных члена арифметической прогрессии. Если принять это, то $\alpha + \gamma = 2\beta$. Поскольку сумма углов треугольника равна 180° , то $\beta = 60^\circ$. Стало быть, углы треугольника равны: $\alpha = 60^\circ - \lambda$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ + \lambda$. Здесь λ — разность арифметической прогрессии, которая может изменяться от 0° до 60° . Нет никакого рационального объяснения, почему нужно взять то или иное значение λ . Но можно придерживаться мнения, что λ должно быть одинаково удалено от 0° и 60° . Тогда кандидатурой на роль СНТ будет треугольник с углами 30° , 60° , 90° .

☛ **Чем измеряется красота?** Цель любой исследовательской работы — производство суждений, а применительно к исследованиям в математике — теорем (и не только теорем). В понимании нашем что-то изменилось, улучшилось, структурировалось, как только мы пришли к выводу, что СНТ — это такой треугольник, у которого углы равны 90° , 60° , 30° . (Почти 90 – 60 – 90 ; такое возможно только в геометрии Римана или Мэрилин Монро.)

Очень часто мерилом непогрешимости выводов исследователя является красота, которую он (и почти всегда только он) видит в своих изысканиях. Можно ли считать, что полученный результат — красивый? С одной стороны, казалось бы, мы не открыли ничего необычного, ибо треугольник с указанными углами знаком любому школьнику. Но, с другой стороны, треугольник 90 – 60 – 30 как кандидатура на роль самого неравностороннего треугольника замечателен тем, что он является половинкой самого равностороннего треугольника, т. е. правильного треугольника. Другими словами, самый неравносторонний треугольник — половина самого равностороннего треугольника. Получилась трехзвенная петля (неутомимым выдумщиком петель в графике был голландский художник М. Эшер): формулировка проблемы начинается с правильного треугольника (1-е звено), исследования приводят к треугольнику 90 – 60 – 30 (2-е звено), который является половинкой исходного треугольника (3-е звено). Предлагаем читателю самостоятельно, в согласии с его мировоззрением, решить, является ли такой продукт исследования красивым.

Прогрессия — продукт повторов. Возникшая в предыдущих рассуждениях идея арифметической прогрессии наводит на мысль о том, что

в основу определения СНТ следует положить прогрессию. В случае с прямоугольным треугольником прогрессия оказалась арифметической. Но мы знаем еще и геометрическую прогрессию. Прогрессия замечательна тем, что она является продуктом однотипной операции, которую повторяют до бесконечности. Другими словами, прогрессия есть продукт того или иного итерационного процесса. А итерации присущи природным процессам. Дело в том, что любая неравновесная и открытая система стремится к уменьшению хаотического состояния, к увеличению порядка, т. е. любая такая система стремится к производству минимума энтропии. Вероятно, это фундаментальное свойство Природы, которое проявляет себя уже на наноуровне. «Так как характерные размеры элементов структуры нанобъектов лежат в интервале 10^{-9} – 10^{-7} м, соответствующем средним размерам атомов и молекул в обычных материалах, изменение структуры и свойств материалов на мезо- и макроуровнях определяется квантово-механическими эффектами и волновой природой процессов переноса на наноуровне. Во всех этих эффектах доминирующая роль принадлежит поверхностям раздела, являющимся фрактальными объектами и, как следствие этого, обладающим информационными свойствами» [19, с. 7]. Именно информационные свойства вообще и энергетическая целесообразность в частности приводят открытую неравновесную систему к предпочтению одной и той же процедуры, итераций при структурировании.

Однако вернемся к прогрессиям, которые можно положить в основу определения СНТ. Элементами арифметической или геометрической прогрессии могут служить какие-либо три однотипные характеристики треугольника: углы, стороны, синусы углов, тангенсы углов и т. п. Арифметическую прогрессию из углов мы уже рассмотрели. Геометрическую прогрессию из углов рассмотреть, конечно, можно, но мы не будем торопиться в этом направлении, так как обычно в геометрии углы не перемножают, а складывают. 



Модель Пойа. Можно определить форму треугольника не через углы, а иначе: задав, например, отношение сторон. Обсуждая формулу Герона, Джордж Пойа [36, с. 340] предложил следующее описание многообразия модулей треугольников.

Пусть x , y , z — стороны треугольника, записанные в порядке возрастания их длин, т. е. пусть $0 < x \leq y \leq z = 1$. Тогда многообразие модулей треугольников определяется системой неравенств $x \leq y$, $y \leq 1$, $x + y > 1$, являясь пересечением трех полуплоскостей. Это пересечение (рис. 214.1) есть треугольник $\Delta = TBO$ с вершинами $T = (1; 1)$, $B = (0; 1)$,

$O = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (включающий вершину T , стороны TB и TO , но не включающий вершины B, O и сторону BO).

Каждая точка треугольника Δ изображает класс подобных треугольников. Пересечение окружности $x^2 + y^2 = 1$ (на рис. 214.1 она, точнее ее дуга BE , показана белым цветом) с Δ представляет прямоугольные треугольники. Точки сторон TB и TO изображают равнобедренные треугольники, а вершина T — правильный треугольник. Очевидно, всякая точка X , близкая к T , изображает треугольник, мало отличающийся от правильного. Но чем дальше X удаляется от T , тем больше форма треугольника X отличается от формы равнобедренного треугольника. В то же время, чем дальше X от T , тем ближе X к прямой BO , представляющей вырожденные равнобедренные (по углам) треугольники. Получается противоречие «мотылька»: с одной стороны, он стремится улететь как можно дальше как от морозящей правильностью формы T , так и от холодящих равнобедренностью отрезков TB и TO ; с другой стороны, мотылек стремится приблизиться к прямой BO , но слишком близко подлететь боится, так как BO пышет жаром угольной равнобедренности. Возможно ли исследователю примирить внутри себя отрезок и угол, отрезочную и угольную неравнобедренности? И пока он этого не сделает, ему практически невозможно будет ответить на вопрос «Какой треугольник является самым неравнобедренным?».

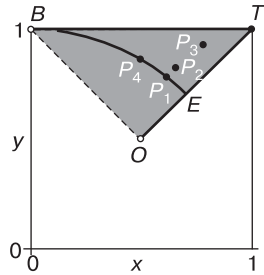


Рис. 214.1. Модель Пойа



Арифметическая прогрессия и стороны. Рассмотрим треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию: $x, x + d, x + 2d$. Из неравенства треугольника $2x + d > x + 2d$ следует, что $x > d$. Положим $x + 2d = 1$. Тогда $x = 1 - 2d$; следовательно, $0 \leq d < \frac{1}{3}$. Взяв середину $d = \frac{1}{6}$ отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, определим СНТ как треугольник со сторонами 4, 5, 6, который на рис. 214.1 представлен точкой $P_3 = \left(\frac{4}{6}, \frac{5}{6}\right)$.



Геометрическая прогрессия и стороны. Пусть стороны треугольника равны $t^2, t, 1$ для некоторого $t \in (0, 1]$. Из неравенства

треугольника $t^2 + t > 1$ следует, что $t \in (\Phi, 1]$; здесь $\Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ — золотое сечение как положительный корень уравнения $t^2 + t = 1$. Можно взять в качестве t среднее арифметическое чисел Φ , 1. Но в силу того, что прогрессия является геометрической, брать надо не среднее арифметическое, а среднее геометрическое: $t = \sqrt{\Phi}$. Таким образом, кандидатура на роль СНТ — прямоугольный треугольник со сторонами Φ , $\sqrt{\Phi}$, 1. На модели Пойа такой треугольник изображается точкой $P_4 = (\Phi, \sqrt{\Phi})$ (рис. 214.1).



Естественная модель. Модель Пойа хороша тем, что она дает явное представление о длине сторон. Недостатком же этой модели является то, что она не дает наглядного представления об углах и форме треугольника. Мы рассмотрим иную модель многообразия модулей треугольников; ее характерной особенностью является то, что изображающая точка и изображаемый треугольник (в его натуральную величину) присутствуют в модели одновременно. Модель строится следующим образом.

Зафиксируем на координатной плоскости точки

$$A = (-1; 0), \quad B = (1; 0).$$

Рассмотрим область Ω , точки которой удовлетворяют трем неравенствам:

$$x \geq 0, \quad y > 0, \quad (x+1)^2 + y^2 \leq 4.$$

Область Ω изображается пересечением круга радиусом 2 с центром A и первого квадранта, из которого удалена прямая $y = 0$ (рис. 214.2).

Пусть Δ' — произвольный треугольник со сторонами a , b , c , причем $0 < a \leq b \leq c$. Тогда треугольник Δ со сторонами

$$x = \frac{2a}{c}, \quad y = \frac{2b}{c}, \quad 2$$

подобен Δ' , при этом $C = (x, y) \in \Omega$, и вершинами треугольника Δ являются точки A , B , C . Следовательно, мы установили взаимно однозначное соответствие между классами подобных треугольников и точками области Ω . В частности, точки отрезка OT (без точки O) и дуги BT окружности (без точки B) изображают равнобедренные треугольники; точка $T = (0, \sqrt{3})$ представляет правильный треугольник; прямоугольные треугольники изображаются точками дуги BE окружности $x^2 + y^2 = 1$. На рис. 214.2 дуга BE белого цвета. Переход от модели Пойа к естественной модели осуществляется по формулам:

$$x' = \sqrt{4y^2 - S^2} - 1, \quad y' = S, \quad (1)$$

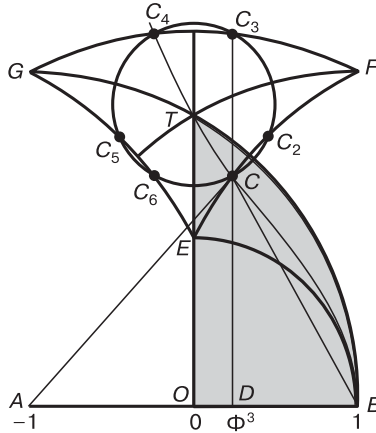


Рис. 214.2. Многообразие модулей треугольников как часть плоскости Лобачевского; оно окрашено в серый цвет

где

$$S = \sqrt{(x + y + 1)(x + y - 1)(x + 1)(y + 1)}$$

— площадь треугольника со сторонами $2x$, $2y$, 2 .

В качестве самого неравностороннего треугольника возьмем такой, у которого, во-первых, тангенсы углов образуют геометрическую прогрессию, и, во-вторых, разности тангенсов также составляют три последовательных члена геометрической прогрессии. Пусть t — тангенс наибольшего угла. Первое условие дает три числа: t , kt , k^2t , причем будем считать, что $0 < k < 1$. Из второго условия следует, что три последовательных члена

$$t - k^2t, \quad t - kt, \quad kt - k^2t$$

геометрической прогрессии удовлетворяют уравнению

$$(t - k^2t)(kt - k^2t) = (t - kt)^2$$

— произведение крайних членов равно квадрату среднего члена. Последнее уравнение равносильно уравнению относительно k :

$$k^2 + k = 1, \tag{2}$$

положительный корень которого равен золотому сечению:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6180339\dots$$

Осталось найти t . Как известно, для углов любого треугольника ABC произведение тангенсов равно сумме тангенсов:

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C.$$

Следовательно,

$$\Phi^3 t^3 = t + \Phi t + \Phi^2 t \Rightarrow \Phi^3 t^2 = 1 + \Phi + \Phi^2 \Rightarrow \Phi^3 t^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2\Phi^{-3}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \sqrt{2\Phi} \Rightarrow A = 48,03^\circ, \\ \operatorname{tg} B &= \sqrt{2\Phi^{-1}} \Rightarrow B = 60,93^\circ, \\ \operatorname{tg} C &= \sqrt{2\Phi^{-3}} \Rightarrow C = 71,04^\circ. \end{aligned}$$

☞ Пирамидоманы оживились!

Пирамидоманами называют тех людей, которые увлечены бесконечными поисками арифметических и геометрических закономерностей в архитектуре знаменитой египетской пирамиды Хеопса.

Пирамидоманам хорошо известны углы, которые мы получили только что. Дело в том, что построенный нами треугольник не только присутствует в пирамиде Хеопса, но и является пирамидообразующим элементом. Действительно, если треугольник $\Delta = ABC$ расположить так, чтобы вершина C оказалась на поверхности земли, а сторона AB — вертикальной (A — над, B — под землей), то, повернув Δ вокруг прямой AB три раза на угол $\pi/2$, мы получим две пирамиды: надземную — пирамиду Хеопса и подземную. Если принять высоту пирамиды Хеопса равной $H = 146$ м, то вершина подземной пирамиды окажется на глубине $\Phi H = 90,2$ м. Легко заметить, что соответствующие боковые грани обеих пирамид взаимно перпендикулярны. Таких закономерностей у пирамиды Хеопса очень много. Но мы не будем этим заниматься, чтобы не уподобляться пирамидоманам. Добавим лишь, что подземная вершина B имеет, вероятно, ритуальное предназначение. В таком случае в этой точке может быть расположено нечто важное: либо саркофаг, либо пресловутый золотой шар, либо капсула с посланием потомкам. Пора снаряжать экспедицию. . . 🔒

Найдем координаты x , y точки C , изображающей треугольник Δ . Для этого заметим, что поскольку $\operatorname{tg} A = \Phi \operatorname{tg} B$, то $x = \Phi^3$. Отсюда легко найти, что $y = \sqrt{8\Phi^3}$. Изобразим эту точку на Ω (рис. 214.2).

Представляется интересным рассмотреть Ω как часть плоскости Лобачевского в первой модели Пуанкаре (см., например, [11, с. 379–386]). Проведем в плоскости Лобачевского перпендикуляр p из точки E на прямую BT . Удивительно, но $C \in p$.

Дальше — больше. Выполним в плоскости Лобачевского осевые симметрии относительно прямых BT и OT . При первой симметрии g точка E отобразится в точку, которую обозначим F ; при второй симметрии e точка F отобразится в точку, которую обозначим G . Легко видеть, что осью симметрии f точек E и G служит прямая FT . Треугольник EFG является правильным; его углы равны $\varphi = 2 \arctg \frac{1}{2} \approx 0,295\pi \approx 53,1^\circ$.

Рассмотрим цикл σ точки C :

$$C \xrightarrow{g} C_2 \xrightarrow{f} C_3 \xrightarrow{e} C_4 \xrightarrow{g} C_5 \xrightarrow{f} C_6 \xrightarrow{e} C.$$

Ясно, что в плоскости Лобачевского существует окружность, содержащая σ . На модели Пуанкаре эта окружность изображается евклидовой окружностью (см. рис. 214.2).

215. Задача. Построить треугольник по стороне, высоте к ней и сумме второй и третьей сторон.

Примечание: задача сводится к построению эллипса.

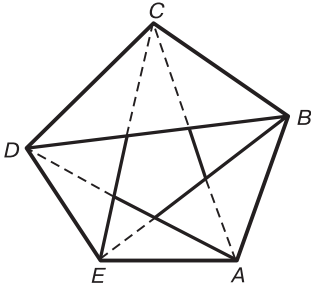
216. Задача Мебиуса. Дан пятиугольник $ABCDE$. Найти его площадь S , если известны площади: $\sigma_1 = S_{EAB}$, $\sigma_2 = S_{ABC}$, $\sigma_3 = S_{BCD}$, $\sigma_4 = S_{CDE}$, $\sigma_5 = S_{DEA}$.



Из воспоминаний аспиранта профессора З. А. Скопеца.

Научно-методический семинар, научный руководитель — заведующий кафедрой геометрии Ярославского государственного педагогического института им. К. Д. Ушинского, доктор физико-математических наук, профессор З. А. Скопец, 1978 г.

Профессор: Рассмотрим задачу Мебиуса о площади пятиугольника. Как пишет А. М. Лопшиц в статье «Задача Мебиуса и ее продолжения» в журнале «Квант» [24], впервые эта задача была опубликована в 1823 году молодым тридцатилетним астрономом обсерватории в Лейпциге Августом Мебиусом в его математической работе «Две геометрические задачи», напечатанной в качестве приложения в астрономическом издании: «Наблюдения Королевской университетской обсерватории». Задача была сформулирована в следующей редакции: «Каждые две из пяти произвольно заданных в плоскости точек A , B , C , D , E соединены прямой. Площади возникающих при этом пяти треугольников EAB , ABC , BCD , CDE , DEA заданы; требуется выразить через них площадь пятиугольника $ABCDE$. Вместо площадей этих пяти треугольников можно также считать заданными площади пяти четырехугольников: $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$, $EABC$, $ABCD$ — и искать выражение через них площади пятиугольника $ABCDE$ ».



Мы решим эту симпатичную задачу с помощью косо́го произведения векторов, а затем, специализируя надлежащим образом вершины 5-угольника, получим ряд новых задач школьного типа.

[К сожалению, у меня не сохранилось записей с того семинара. Позже я попытался восстановить решение профессора, но мне не удалось этого сделать. Тем не менее ниже приводится не самое

красивое, но решение.]

Мы определим косо́е произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} как отображение

$$V \times V \xrightarrow{\circ} \mathbb{R},$$

при котором паре $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V \times V$ будем ставить в соответствие число $\sigma = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}$, равное половине площади ориентированного параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} . В координатной форме косо́е произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} вычисляется по формуле

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Отметим некоторые свойства косо́го произведения:

- 1) $\mathbf{a} \circ \mathbf{0} = 0$,
- 2) $\mathbf{b} \circ \mathbf{a} = -\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ — свойство кососимметричности,
- 3) $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = 0$,
- 4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ \mathbf{c} + \mathbf{b} \circ \mathbf{c}$,
- 5) $(\lambda \mathbf{a}) \circ \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решение задачи 216. Для решения задачи введем на плоскости аффинную систему координат с началом в точке E , от которой отложим векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} с концами в точках A , B , C , D соответственно. Пусть

$$\sigma_1 = S_{ABC}, \quad \sigma_2 = S_{BCD}, \quad \sigma_3 = S_{CDE}, \quad \sigma_4 = S_{DEA}, \quad \sigma_5 = S_{EAD}.$$

Примем векторы \mathbf{a}, \mathbf{b} за базисные и выразим площади σ_k , $k = 1..5$, через $\sigma_5 = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}$. Для этого положим $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}$ и найдем α , β , γ , δ . Из равенства

$$\sigma_1 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \circ (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (-\mathbf{a} + \mathbf{b}) \circ ((\alpha - 1)\mathbf{a} + \beta \mathbf{b})$$

следует

$$\sigma_5(\alpha + \beta) = \sigma_1 - \sigma_5. \tag{1}$$

Из равенства

$$\sigma_2 = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \circ (\mathbf{d} - \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} + (\beta - 1)\mathbf{b}) \circ (\gamma\mathbf{a} + (\delta - 1)\mathbf{b})$$

получаем

$$\sigma_5(\alpha\delta - \beta\gamma - \alpha + \gamma) = \sigma_2. \quad (2)$$

Из равенства

$$\sigma_3 = \mathbf{c} \circ \mathbf{d} = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \circ (\gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b})$$

вытекает

$$\sigma_5(\alpha\delta - \beta\gamma) = \sigma_3. \quad (3)$$

Равенство $\sigma_4 = \mathbf{a} \circ \mathbf{d} = \delta\sigma_5$ дает уравнение

$$\sigma_5\delta = \sigma_4. \quad (4)$$

Поскольку

$$S = \sigma_3 + \sigma_5 + \mathbf{b} \circ \mathbf{c} = \sigma_3 + \sigma_5 + \mathbf{b} \circ (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \sigma_3 + \sigma_5 - \alpha\sigma_5,$$

то

$$\sigma_5\alpha = \sigma_3 + \sigma_5 - S. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (2)–(5), находим:

$$\sigma_5\beta = S - \sigma_1 - \sigma_3, \quad \sigma_5\gamma = \sigma_2 + \sigma_5 - S,$$

$$\sigma_5(\alpha\delta - \beta\gamma) = \sigma_3 \Rightarrow (\sigma_3 + \sigma_5 - S)\sigma_4 + (S - \sigma_1 - \sigma_3)(S - \sigma_2 - \sigma_5) = \sigma_3\sigma_5.$$

После элементарных преобразований получаем квадратное уравнение относительно S :

$$S^2 - \Sigma S + \Pi = 0, \quad (*)$$

где $\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5$, $\Pi = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_5 + \sigma_5\sigma_1$. ■

Профессор: Мы получили общий результат. Если расположить вершины 5-угольника специальным образом, то мы, во-первых, проверим правильность уравнения (*), во-вторых, можем получить новую задачу школьного типа, которая, в-третьих, может подсказать новую идею. [Далее профессор стал искусно оперировать пятью точками, которые он изображал мелом на доске обычно в виде маленьких

копеечных кружочков, перемещая их по плоскости для построения различных 5-угольников и таким образом составляя новые задачи.]

Профессор: 1° **Правильный 5-угольник.**

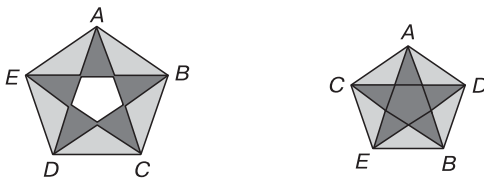
217. Задача. Решить задачу 216 для правильного пятиугольника.

Решение. Для правильного 5-угольника при $\sigma_i = 1$ уравнение (*) приводится к виду

$$S^2 - 5S + 5 = 0 \quad (**)$$

и имеет два положительных решения: $S_1 = 3 + \Phi$, $S_2 = 2 - \Phi$, где

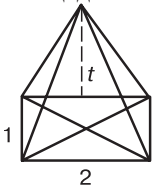
$$\Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6180339\dots$$



Первое решение есть площадь правильного 5-угольника $ABCDE$, вершины которого нужно обходить по сторонам, второе же решение является площадью правильного 5-угольника $ADBEC$, вершины которого нужно обходить по диагоналям. ■

Профессор: 2° **Конверт.**

218. Задача. Рассмотрим 5-угольник под условным названием «конверт»; для него $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1/2$, $\sigma_3 = t$, $\sigma_4 = 1/2$, $\sigma_5 = 2$. Найти площадь «конверта».



Решение. Так как $\Sigma = 3 + t$, $\Pi = 2 + t$, отсюда и из (*) следует уравнение $S^2 - (3 + t)S + 2 + t = 0$ с корнями $S_1 = 2 + t$, $S_2 = 1$.

Очевидно, что в данном случае искомая площадь равна $2 + t$. ■

Профессор: 3° **Задача (новая).**

219. Задача. Найти площадь Δ треугольника ABC , внутри которого отмечены точки P , Q , такие, что площади треугольников ABP , ABQ , BQC , CPQ , APC равны 1.

Решение. Для пятиугольника $ABQCP$
 $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = -\sigma_5 = 1 \Rightarrow \Sigma = 1,$
 $\Pi = -3.$

Отсюда и из (*) следует, что $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2},$
 поэтому $\Delta = S + 2.$ ■

Эта задача носит аффинный характер, поэтому равенство всех сторон данного треугольника является лишним условием.

Профессор: 4° **Задача (ложный след).**

220. Задача. На медианах m_a, m_b правильного треугольника ABC отмечены точки P, Q соответственно, причем треугольники CPQ, APC, BQC являются равновеликими. Найти отношение площадей трапеции $ABQP$ и треугольника $CPQ.$

Ответ. $\frac{\sqrt{13} - 1}{2}.$

Профессор: 5° **Арифметическая прогрессия.**

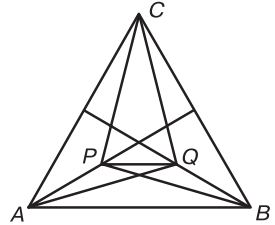
221. Задача. Найти площадь пятиугольника, если площади σ_i образуют арифметическую прогрессию.

Решение. По условию,

$$\sigma_1 = a - 2d, \quad \sigma_2 = a - d, \quad \sigma_3 = a, \quad \sigma_4 = a + d, \quad \sigma_5 = a + 2d.$$

Тогда $\Sigma = 5a, \Pi = 5a^2,$ и при $a = 1$ мы получим уравнение (**). ■

Профессор: Мы рассмотрели несколько примеров, подтверждающих плодотворность идеи о том, что специализации достаточно общей геометрической или алгебраической конструкции способствуют рождению новых задач, новых идей, новых методов. Математика отличает три качества: дерзость ума, интерес к закономерностям, чувство красоты. Когда в геометрии возникают радикалы, например подобные тем, которые мы получили выше: $\sqrt{5}$ и $\sqrt{13}$, представляется интересным найти скрытые причины их появления. Указанные радикалы мы получили посредством одного и того же механизма, работающего на внутренней энергии задачи Мебиуса, а поскольку в математике просто так ничего не случается, мы можем быть уверенными, что иррациональности эти, возможно, кому-то из вас рано или поздно встретятся в других разделах математики, или в физике, или в биологии и т. п.



222. Задача. Сколько прямых круговых цилиндров проходит через 5 точек общего положения в пространстве?

Решение в стиле профессора З. А. Скопеца.

1. Проективная формулировка. Пусть $A = \{A_1, \dots, A_5\}$ — общая пятерка точек евклидова пространства E^3 . Абсолютом E^3 , как известно, служит мнимая коника c^2 , лежащая в несобственной плоскости α . С проективной точки зрения искомый цилиндр F есть квадратичный конус с вершиной $C \in \alpha$, такой, что $F \cap \alpha$ — пара касательных к c^2 .

2. Кривые в α . Исключив из A точку $A_k, k = 1, \dots, 5$, мы рассмотрим конструкцию, порождающую в α кривую γ_k ; затем докажем, что 5 кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ имеют 6 общих точек C_1, \dots, C_6 ; тем самым определятся 6 вершин искомого конуса.

Положим, например, $k = 1$. Тогда кривую $\gamma = \gamma_1$ мы определим как множество точек плоскости α , таких, что две выходящие из $C \in \gamma$ касательные к c^2 и 4 прямые $CA_i, i = 2..5$, — образующие конуса F .

Чтобы найти $\deg \gamma$, найдем число точек пересечения γ с прямой, в качестве которой достаточно взять общую касательную t к c^2 , т. е. точку $t \in c^{2*}$ двойственной коники.

3. Построение соответствия. Далее, положив

$$\pi = \langle A_2, A_3, A_4 \rangle, \quad g = \pi \cap \alpha, \quad B = t \cap g, \quad h = \pi \cap \langle t, A_5 \rangle,$$

рассмотрим отображение $f : t \rightarrow t$ как композицию $f = \nu \circ \mu \circ \lambda$ отображений

$$\begin{array}{ccccccc} t & \xrightarrow{\lambda} & g & \xrightarrow{\mu} & h & \xrightarrow{\nu} & t \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ L & \mapsto & G & \mapsto & H & \mapsto & L' \end{array}$$

определяемых тем, что

$$\langle L, G \rangle \in c^{2*}, \quad H = h \cap k \setminus \{B\}, \quad L' = \langle A_5, H \rangle \cap t;$$

здесь $k = k[A_2, A_3, A_4, B, G]$ — коника, проходящая через указанные в квадратных скобках точки. Очевидно, μ и ν — биекции, в то время как λ^{-1} — двузначное соответствие. Следовательно, f — (1, 2)-соответствие на t . Каждая из трех его неподвижных точек принадлежит γ . Итак, $\deg \gamma = 3$.

4. Конфигурация Дезарга! Положив $A_{ij} = \langle A_i, A_j \rangle \cap \alpha$, замечаем, что:

$$\begin{array}{l} \gamma_1 \text{ содержит } A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{34}, A_{35}, A_{45}, \\ \gamma_2 \text{ содержит } A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{34}, A_{35}, A_{45}. \end{array}$$

Стало быть, из 9 точек пересечения $\gamma_1 \cap \gamma_2$ следует исключить 3 точки: A_{34}, A_{35}, A_{45} . Его оставшиеся 6 точек являются общими для $\gamma_1, \dots, \gamma_5$.

Решение в стиле профессора А. С. Тихомирова.

У Сэмпла и Рота [53] в главе XI, п. 4.7, табл. 4, говорится о том, что множество квадратичных конусов, вершины которых расположены в данной плоскости, есть алгебраическое 7-мерное многообразие V_7^6 степени 6 в пространстве \mathbf{P}^9 всех двумерных квадрик. Поскольку конус, содержащий пятерку A , — круговой цилиндр, этот конус пересекает несобственную плоскость α по паре прямых, касающихся коники c^2 .

Проварьируем двойственную конику c^{2*} в пару линейных пучков прямых в несобственной плоскости α с центрами A_6, A_7 . Тогда исходная задача равносильна следующей: найти число N квадратичных конусов в \mathbf{P}^3 с вершинами в данной плоскости α , проходящих через 7 данных точек A_1, \dots, A_7 .

Поскольку множество всех квадрик, проходящих через данную точку, изображается в \mathbf{P}^9 гиперплоскостью, 7 гиперплоскостей и V_7^6 имеют 6 общих точек. ■

223. Задача. Пусть A — вершины правильной 4-угольной пирамиды с единичными ребрами. Тогда существует 6 цилиндров, содержащих A : оси четырех из них ортогональны боковым граням, а оси двух других — параллельны ребрам основания. Изобразить оси этих цилиндров.

224. Задача. Пусть $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ — куб, $A = \{P, Q, R, R_1, P_1\}$. Известно, что через A проходит 6 прямых круговых цилиндров. Оси пяти цилиндров очевидны: 3 оси куба, диагональ SQ_1 и прямая FG , где F, G — центры граней PQ_1P_1, QRR_1Q_1 . Где шестая ось?



225. Задача. Исследовать последовательность

$$x_n = (n + \alpha)a + \left[\frac{n}{\sigma} + \beta \right] \frac{a}{\rho}, \quad (1)$$

где α, β — начальные фазы, ρ, σ — положительные иррациональные числа, $[x]$ — антье-функция или целая часть числа x .

Решение. Из (1) следует

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_n - x_{n-1} = (n + \alpha)a + \left[\frac{n}{\sigma} + \beta \right] \frac{a}{\rho} - (n - 1 + \alpha)a + \left[\frac{n-1}{\sigma} + \beta \right] \frac{a}{\rho} = \\ &= a + \left(\left[\frac{n}{\sigma} + \beta \right] - \left[\frac{n-1}{\sigma} + \beta \right] \right) \frac{a}{\rho} = \\ &= a + \left(\frac{n}{\sigma} + \beta - \frac{n-1}{\sigma} - \beta - \left(\left\{ \frac{n}{\sigma} + \beta \right\} - \left\{ \frac{n-1}{\sigma} + \beta \right\} \right) \right) \frac{a}{\rho} = \\ &= a + \left(\frac{1}{\sigma} - \left(\left\{ \frac{n}{\sigma} \right\} - \left\{ \frac{n-1}{\sigma} \right\} \right) \right) \frac{a}{\rho} = \begin{cases} a & \text{при } h = 0, \\ b & \text{при } h = 1, \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

где $h = \left[\frac{n}{\sigma} + \beta \right] - \left[\frac{n-1}{\sigma} + \beta \right] = \frac{1}{\sigma} - \left\{ \frac{n}{\sigma} \right\} + \left\{ \frac{n-1}{\sigma} \right\}$, период b , иррациональный исходному a , задается параметром ρ согласно равенству $b = \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) a$. С другой стороны, прямым подсчетом нетрудно убедиться, что на каждое значение n , при котором $h = 0$ в (1), приходится в среднем $\sigma - 1$ значение n , удовлетворяющее условию $h = 1$. Таким образом, величина $1 - \frac{1}{\sigma}$ определяет частоту следования периода b .

Задавая произвольные иррациональные σ , ρ , легко построить последовательность отрезков a , b , отвечающую (2). Ее важнейшая особенность состоит в том, что, не обладая свойством периодичности, она, по определению (2), не является случайной. Меняя величины параметров ρ , σ , можно добиться любых иррациональных значений отношения периодов $\frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\rho}$ и частоты $1 - \frac{1}{\sigma}$. Из всего набора, отвечающего различным значениям ρ , σ , можно выделить последовательности, которые задаются рекуррентно следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = k, \quad a_n = ka_{n-1} + a_{n-2}. \quad (3)$$

При любом натуральном k последовательность (3) обладает свойством самоподобия. В частности, при $k = 1$ получается последовательность Фибоначчи. (Она встречается в решении задачи из «Книги абака» Леонардо Фибоначчи 1202 года: *Некто получил в подарок пару новорожденных крольчат. Сколько пар кроликов будет у него через год, если крольчата один месяц взрослеют, и затем каждый месяц у них появляется пара новорожденных крольчат?*) Только самоподобные множества, как утверждается в [29], обладают фрактальными свойствами. Определим далее значения ρ , σ , обеспечивающие самоподобие.

В данном случае самоподобие означает, что, во-первых,

(*) простым изменением масштаба последовательность (3) может быть переведена в себе подобную (рис. 225.1), и, во-вторых,

(**) следует обеспечить одинаковый вклад отрезков a, b в суммарную длину последовательности.

Из (*) следует условие

$$\frac{a}{b} = \frac{(k-1)a+b}{ka+b}, \tag{4}$$

принимающее при учете связи $b = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) a$ вид квадратного уравнения

$$\rho^2 - k\rho - 1 = 0. \tag{5}$$

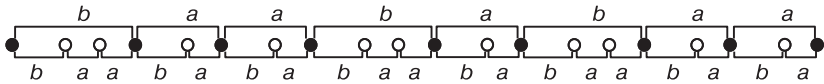


Рис. 225.1. Масштабное преобразование для квазипериодической последовательности атомов двух сортов при $k = 2$ (сверху указаны исходные периоды a, b , снизу — их значения, уменьшенные в τ раз)

Таким образом, локальное самоподобие достигается при значениях масштабного фактора ρ , равных

$$\tau = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 4}). \tag{6}$$

Из (**) следует совпадение средних длины $\frac{a}{\sigma}$ и $b \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)$ отрезков a, b , чередующихся с частотами $\frac{1}{\sigma}$ и $1 - \frac{1}{\sigma}$. Учитывая (5), видим, что это условие обеспечивается при частотном факторе

$$\sigma = \frac{k-1+\tau}{k} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{k^2}} - \frac{1}{k} < 2. \tag{7}$$

В частности,

$$\sigma(2) = \tau_1, \quad \sigma(1) = \frac{1+\tau_2}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma(5) = \frac{2+\tau_3}{3}, \tag{8}$$

где τ_k имеет вид (6). В табл. 225.1 приводятся значения $\sigma(k)$, $k = 1..10$.

Таблица 225.1

k	$\sigma(k)$
1	1,618033989
2	1,707106781
3	1,767591879
4	1,809016994
5	1,838516481
6	1,86037961
7	1,877150706
8	1,890388203
9	1,901085803
10	1,909901951

Итак, последовательность (1) принимает вид

$$x_n = (n + \alpha)a + \left[\frac{kn}{k-1+\tau} + \beta \right] \frac{a}{\tau}. \quad (9)$$

Таблица 225.2

Последовательность (9)

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	2	5	10	17
4	3	12	33	72
5	5	29	109	305
6	8	70	360	1292
7	13	169	1189	5473
8	21	408	3927	23184
9	34	985	12970	98209

Нетрудно заметить, что

$$x_n = kx_{n-1} + x_{n-2} \quad (10)$$

и

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \tau \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует (5) с положительным корнем (6). Рекуррентное задание (10) равносильно заданию последовательности (9) в замкнутой

форме с помощью формулы

$$x_n = \frac{\left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}\right)^n - \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}\right)^n}{\sqrt{k^2 + 4}}, \quad (12)$$

частным случаем которой является формула Бине (при $k = 1$):

$$x_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \quad (13)$$

Из (12) следует равенство

$$x_n \approx \frac{1}{\sqrt{k^2 + 4}} \tau^n, \quad (14)$$

определяющее фрактальную размерность последовательности (9):

$$D = \frac{\ln \tau}{\ln \xi^{-1}}, \quad (15)$$

где ξ — масштабный фактор. Следовательно, эффективная ветвистость дерева Кэли (рис. 225.2), порождаемого последовательностью (1), равна τ . Термин «дерево» ввел в 1857 г. А. Кэли. Деревья рассматривал за 10 лет до Кэли, в 1847 г., Кирхгоф. Задолго до этого понятие дерева использовалось при иерархическом упорядочении офицерских званий и чинов. С давних времен появилось понятие генеалогического дерева.

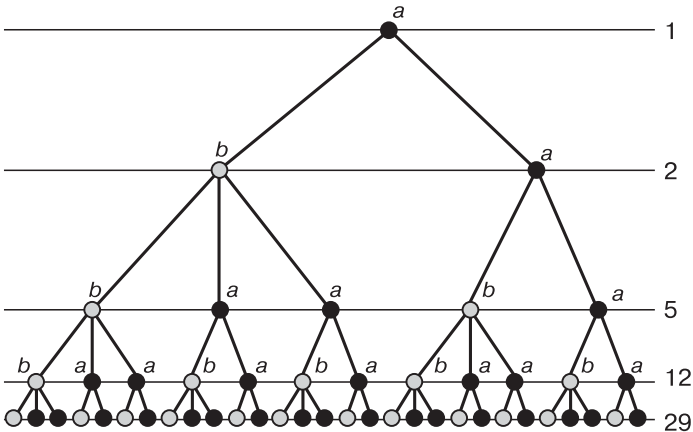


Рис. 225.2. Дерево Кэли для $k = 2$

Теорема Кэли: Число деревьев с n помеченными вершинами равно $C_n = n^{n-2}$.

Прямым перебором значений $n = 0, 1, \dots$ в соотношении (9) можно убедиться, что оно генерирует последовательность длин отрезков a, b , и на n -м шаге (9) может быть получена n -кратным действием оператора

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \quad (16)$$

на вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} a \\ (k-1)a+b \end{pmatrix},$$

составленный из отрезков $a, (k-1)a+b$ как из проекций:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \widehat{S}^n \begin{pmatrix} a \\ (k-1)a+b \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Оператор (16) генерирует уровни иерархического дерева, начиная с третьего, соответствующего последовательности (9).

Полученная математическая конструкция реализуется в природе при чередовании атомов квазикристалла вдоль выделенного направления [29]. Такой ряд можно моделировать, например, как проекцию ближайших узлов прямоугольной решетки со сторонами a, b на прямую g , проходящую под углом 45° к ее осям (рис. 225.3).

Наряду с фракталом F , каковым является последовательность (9), представляется исключительно важным (и пока новым) рассмотреть фрактал \widetilde{F} , состоящий из степеней оператора (16):

$$\widetilde{F} = \{\widehat{S}^n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Характерной особенностью элементов из \widetilde{F} является то, что они суть эквиаффинные преобразования плоскости, т. е. отображают фигуру на равновеликую фигуру. Следовательно, фрактал \widetilde{F} как точечное множество четырехмерного пространства \mathbb{R}^4 всех 2×2 -матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (18)$$

лежит на двух трехмерных квадратичных конусах, которые состоят из матриц с детерминантами, равными ± 1 . Легко понять, что \widehat{S}^n — симметричная матрица, т. е.

$$a_{21} = a_{12}, \quad (19)$$

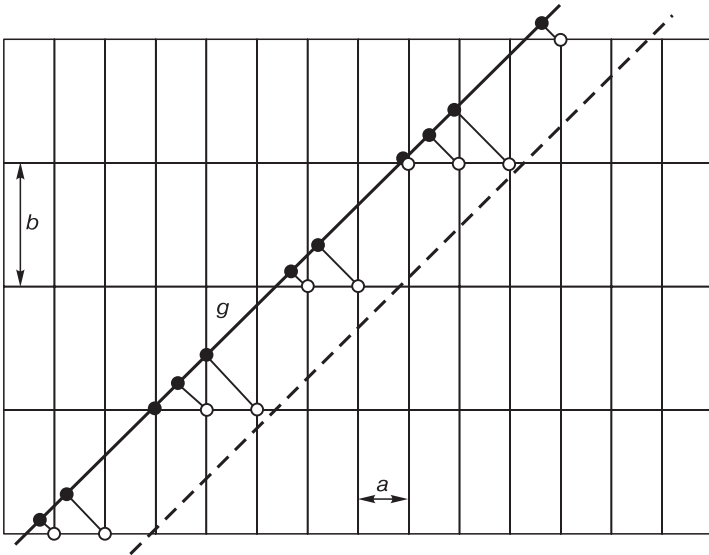


Рис. 225.3

поэтому \tilde{F} лежит в 3-плоскости с уравнением (19). Применим стандартный прием, используемый при изучении многомерных конструкций для понижения размерности на единицу — проектирование из начала координат: пусть $\mathbf{P}^3 = P(\mathbb{R}^4)$ — проективное пространство размерности $\dim \mathbf{P}^3 = 3$ как проективизация пространства \mathbb{R}^4 . Каждая точка \mathbf{P}^3 есть некая матрица вида (18), элементы которой берутся с точностью до ненулевого множителя. Введение переменных $x = \frac{a_{11}}{a_{12}}, y = \frac{a_{22}}{a_{12}}$ с учетом

(19) приводит к плоской модели: фрактал \tilde{F} оказывается в плоскости и является ограниченным множеством. Следует особо подчеркнуть: мы добились того, что неограниченное множество элементов бесконечной последовательности (9) типа последовательности Фибоначчи биективно ограниченному множеству \tilde{F} , что позволяет найти клеточную размерность последнего, например, численно.

Обобщим задачу Фибоначчи: *Если новорожденная пара крольчат сначала созревает α месяцев и затем каждые β месяцев рождает пару, то чему будет равно число пар кроликов через n месяцев?*

При $\alpha = \beta = 1$ мы получаем классическую последовательность Фибоначчи, рекуррентно записываемую так:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

а при произвольных α, β , очевидно, так:

$$a_n = a_{n-\beta} + a_{n-\beta-\alpha}. \tag{20}$$

При $\alpha = 1, \beta = 2$ последовательность (20) дает дерево, приведенное на рис. 225.4, и ее члены

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 49, \dots$$

связаны рекуррентным соотношением

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3},$$

которое соответствует оператору, аналогичному (16):

$$S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

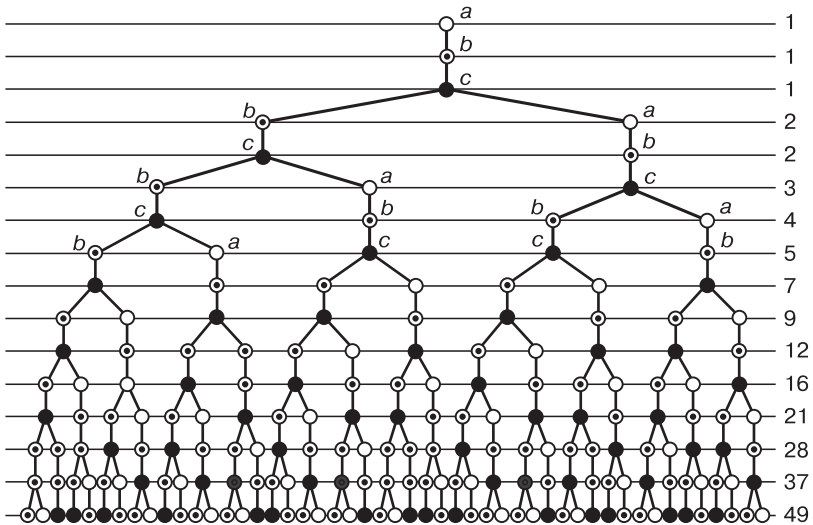


Рис. 225.4. Последовательность типа $(\alpha = 1, \beta = 2)$

При $\alpha = 2, \beta = 1$ последовательность (20) дает дерево, приведенное на рис. 225.5, и ее члены

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 78, 119, \dots$$

связаны рекуррентным соотношением

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3},$$

которое соответствует оператору, аналогичному (16):

$$S_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

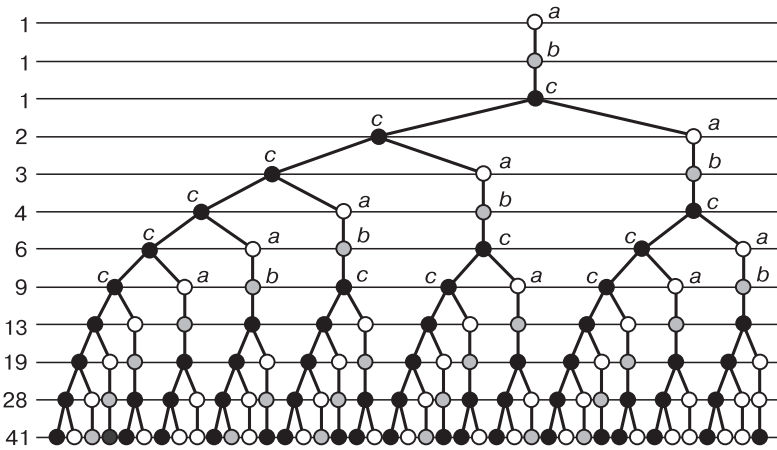


Рис. 225.5. Последовательность типа $(\alpha = 2, \beta = 1)$

§ 17. ДЕНДРИТЫ

Творчество — общее дело, творимое
уединенными.

М. И. Цветаева

Дендритные структуры представляют собой малоизученные объекты. Например, дендриты, которые вырастают в процессе парафинизации нефти, практически невозможно наблюдать визуально из-за непрозрачности нефти. Поэтому их свойства и динамику роста можно изучать либо аналитически, либо численно посредством построения модельных дендритов. В контексте дидактики данный параграф демонстрирует достоинства инновационной концепции наглядного моделирования. При этом главным плюсом при численном моделировании является возможность визуализировать процесс роста модельных дендритов.

226. Задача. Исследовать процесс роста парафинового кластера в нефти в условиях, близких к равновесному состоянию.

☞ На примере исследования процесса выделения твердых углеводородов при кристаллизации из нефтяных фракций рассмотрим дидактический комплекс вопросов, лежащих в основе обучения студентов математическим методам наглядного моделирования в рамках спецкурса по избранным вопросам математики. В основе наглядного моделирования применительно к учебному процессу лежат три составляющие:

- физическая (в предметной области рассматривается исследовательская проблема — как происходит рост парафиновых образований во время кристаллизации в нефти);
- математическая (строится и изучается численная модель, дающая представление о механизмах и причинах роста кристаллов);
- дидактическая (на занятиях в малой группе у студентов формируется понимание физической и математической моделей, знание свойств математической модели и умение интерпретировать полученные результаты в терминах физической модели).

Депарафинизацией называется процесс удаления из нефтяных фракций твердых углеводородов, выкристаллизовывающихся из раствора при понижении температуры. К числу углеводородов, выделяющихся в кристаллическом состоянии из нефтяных фракций, относятся высокомолекулярные парафиновые углеводороды, а также нафтеновые, нафтеноароматические и ароматические углеводороды с длинными алкильными цепями нормального и слаборазветвленного строения.

Изучение состава углеводородов, кристаллизующихся из различных нефтяных фракций при их охлаждении, показало, что углеводороды распределяются во фракциях следующим образом:

- ▷ в низкокипящих фракциях нефти содержатся преимущественно нормальные парафиновые углеводороды;
- ▷ с повышением температуры кипения во фракциях постепенно снижается содержание нормальных парафиновых углеводородов и увеличивается количество парафиновых углеводородов изо-строения и циклических с длинными алкильными цепями;
- ▷ в высококипящих (остаточных) фракциях преимущественно содержатся циклические углеводороды (главным образом нафтен-овые и в значительном количестве ароматические) с длинными алкильными цепями [20].

Наряду с монокристаллическими образованиями при кристаллизации твердых углеводородов из растворов могут образоваться как скопления из монокристаллов, так и дендритные структуры. Дендриты имеют рыхлую геометрию и при фильтрации задерживают много жидкой фазы. Дендритная кристаллизация наблюдается обычно при охлаждении неочищенных, содержащих смолы нефтепродуктов. 🔒

Для построения математической модели процесса кристаллизации заметим, что он, как известно, начинается с выделения из пересыщенного раствора зародышей кристаллов. Последующая кристаллизация протекает при дальнейшем охлаждении раствора на уже образовавшихся зародышах. Для получения в процессе кристаллизации крупных кристаллов важно, чтобы количество зародышей, образующихся в первый момент, было невелико, так как распределение вновь выделяющихся кристаллов твердых углеводородов при охлаждении раствора на слишком большом числе зародышей приведет к образованию мелких кристаллов. Количество зародышей зависит от скорости охлаждения раствора: чем выше скорость охлаждения, тем больше кристаллических зародышей образуется в растворе и тем меньшим будет размер образовавшихся кристаллов. Из этого следует, что одним из основных условий образования крупных кристаллов является скорость охлаждения раствора.

Кроме того, мы будем исходить из того, что скорость $v = \frac{dx}{dt}$ роста кристаллов (в z/c) на образовавшихся центрах кристаллизации определяется уравнением И. И. Андреева:

$$v = kS(x - x'), \quad (1)$$

где k — коэффициент, зависящий от диффузии молекул, достигших насыщения d , и средней длины диффузионного пути δ : $k = d/\delta$;

S — поверхность выделившейся твердой фазы; x — концентрация пересыщенного раствора; x' — растворимость зародышей кристаллов при данной степени их дисперсности.

Изучение формирования кластеров путем агрегации отдельных частиц играет важную роль во многих областях естествознания [8]. В коллоидах и аэрозолях кластеры обнаруживают геометрическую скейлинговую структуру с многими вполне определенными характерными масштабами [40]. Исходный пункт для теоретического исследования был найден с помощью численного моделирования. До сих пор не известно, почему кластеры являются фракталами, но приходит понимание того, как реализуется их фрактальная структура и как их фрактальная размерность связана с физикой процесса. Для моделирования процесса кристаллизации в растворах необходимы новые численные методы и модели. Модель ограниченной диффузией агрегации (ДОА) Сандера [40, 51] представляется особенно пригодной для изучения эффектов нелокального поля диффузии.

В последнее время внимание исследователей привлекло необратимое объединение частиц в кластеры. Стало понятно, что именно кластеризация является одним из способов возникновения фракталов в необратимых процессах.

Для того чтобы по достоинству оценить модель ДОА, лучше всего рассмотреть начавшую складываться в последние годы общую феноменологию других кинетических процессов, сопровождающихся переходом из равновесного состояния в неравновесное. Обычно мы можем выделить три динамических режима (конвекция Рэля–Бенара [9] служит хорошим примером):

- 1) режим, близкий к равновесному,
- 2) образование структур,
- 3) хаотический режим.

В задаче Рэля–Бенара они соответствуют режимам теплопроводности, образованию конвективных валиков и турбулентности. Эти же режимы удастся обнаружить и в процессах, ограниченных диффузией. Это обстоятельство позволяет понять существенные особенности модели ДОА, которая до сих пор, несмотря на свою предельную простоту, упорно сопротивлялась попыткам аналитического объяснения.

Связь между ДОА и затвердеванием в виде дендритов известна уже в течение некоторого времени [8]. В дальнейшем мы рассмотрим ее более подробно, а пока достаточно сказать, что диффузию скрытой теплоты от растущего кристалла мы отождествляем с движением случайно блуждающих частиц к кластеру. Ясно, что неравновесный кристалл, форма которого определяется построением Вульфа, соответ-

ствует режиму «1». Изящные формы снежинок соответствуют режиму «2». Неупорядоченный, хаотический рост кристалла, отождествляемый с ДОО, доведенной до конечного предела, служит примером режима «3» и порождает фрактальные структуры. Наиболее точным из известных нам экспериментальных примеров ДОО является электролитическое осаждение металлов на небольшой электрод.

В целях большей наглядности и уменьшения машинного времени целесообразно построить сначала двумерную модель кристаллизации. При этом будем исходить из предположения, что скорость охлаждения высокая, по крайней мере, достаточная для того, чтобы пренебречь растворимостью x' в (1). Такое же допущение мы сделаем при построении и трехмерной модели (именно она наиболее удобна для прямого сравнения с экспериментами).

С помощью численного моделирования следует изучить сначала модель вида «частица–кластер», а затем более сложную модель «кластер–кластер», которые были предметом интенсивных исследований в 80-х годах прошлого столетия. Таким образом, перед студентами ставится 4 задачи: изучить 2- и 3-мерные модели «частица–кластер», «кластер–кластер».

Модель «частица–кластер» очень проста: совершающие случайное блуждание частицы парафина в результате аккреции образуют кластер, приходя поодиночке издали и присоединяясь либо к точечному центру кристаллизации, либо к ранее аккрецировавшим в кластер частицам. Интенсивные компьютерные исследования показали [8, 40], что в результате такого процесса образуются сложные разветвленные фракталы.

Адекватность такой модели основана на возникшем в последнее время достаточно ясном понимании того, что дендриты, подобные образующимся при кристаллизации или в минералах типа псиломелана (рис. 226.1), тождественны дендритам, вырастающим при ДОО.

Одна из проблем при исследовании дендритов — это проблема визуализации их структуры. В Природе и Техносфере существует несметное разнообразие объектов, обладающих дендритной структурой: береговые линии, трещины во льду, электрогазоразряды, колонии бактерий, капуста Романеску, кораллы, сталактиты и сталагмиты, геологические системы, линейные молнии, наноструктура металлов, оксиды марганца — *pyrolusite* и др.

Модель «частица–кластер» (рис. 226.2) строится на квадратной решетке размером $L \times L$, $L = 10 \div 1000$, при этом должны выполняться следующие правила:

- 1) первоначально имеется единственный точечный зародыш, который представляет собой центральную клетку решетки,

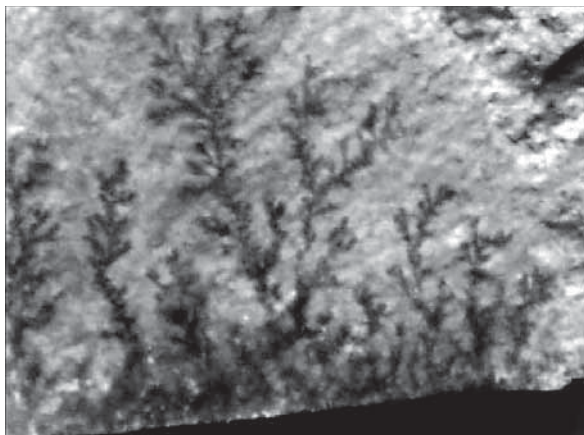


Рис. 226.1. Псиломелан (см. также цв. вклейку).

Цвет: *черный, буро-черный.*

Блеск: *металлический, матовый, смолистый.*

Прозрачность: *непрозрачный.*

Черта: *черная, бурая.*

Твердость: *4–6, хрупкий.*

Плотность: *4,4–4,7.*

Излом: *неровный, шероховатый.*

Сингония: *моноклинная.*

Форма кристаллических выделений: *тонкокристаллические агрегаты, гроздевидные, желвакообразные, рыхлые землистые массы; псиломелан встречается также в виде скелетных кристаллов — дендритов на поверхностях скола пород.*

Класс симметрии: *призматический — 2/m.*

Отношение осей: *3,319 : 1 : 4,809; $b = 92^\circ 30'$.*

Спайность: *Отсутствует.*

Т. пл.: *Не плавится.*

Поведение в кислотах: *растворяется в HCl*

2) частица определяется как квадратная клетка с единичной стороной; частица стартует из случайной клетки на краю решетки и совершает случайное блуждание по решетке до тех пор, пока она не соприкоснется одной из частиц кластера или группы соседствующих частиц,

3) процесс прекращается, как только кластер достигает в своем росте края решетки.

Первое правило моделирует рост только одного кластера. Правило 2 допускает только древовидные кластеры и не разрешает появление

петель. Заключительное правило необходимо для остановки численного моделирования.

Применение нашей модели обладает рядом достоинств. Численный метод прост и эффективен. Модель позволяет легко воспроизводить сравнительно сложные геометрии. Кроме того, флуктуации, всегда присутствующие в любой термодинамической системе (и играющие важную роль в процессе роста), естественно, могут быть включены через случайные блуждания частиц. Наконец, модель может быть легко модифицирована с тем, чтобы учесть различные экспериментальные условия. Например, эффекты анизотропного поверхностного натяжения или наложенный на систему градиент температуры могут быть непосредственно воспроизведены в модели.

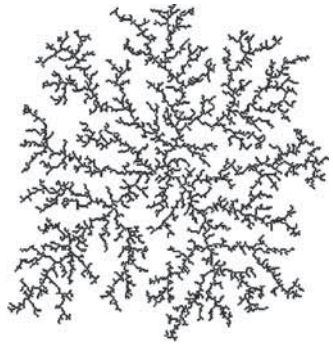


Рис. 226.2. Кластер в модели ДОА

Изображенный на рис.226.2 кластер получен с помощью программы 1, написанной на Visual Basic и представленной ниже.

Программа 1

```
Private Sub Form_Click()
m1 = 9000: m2 = m1: ix = 8000: iy = 10000
k = 150: n = 2 * k + 1: cen1 = 0.5: cen2 = 0
ReDim x(n + 1, n + 1): ReDim CBET(n + 1, n + 1)
For i = k To k + 2
  x(i, k + 1) = 1: p = i: q = k + 1
  X1 = ix + m1 * ((p - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((q - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (p / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (q / n - cen2)
  Line (X1, Y1)-(X2, Y2), CBET(i, 2), BF
Next
For i = k To k + 2
  x(k + 1, i) = 1: q = i: p = k + 1
  X1 = ix + m1 * ((p - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((q - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (p / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (q / n - cen2)
```

```

Line (X1, Y1)-(X2, Y2), CBET(i, 2), BF
Next
For i = 1 To n
  x(i, 1) = 2
  X1 = ix + m1 * ((i - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * (0 / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (i / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (1 / n - cen2)
Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, B
Next
For i = 1 To n
  x(i, n) = 2:
  X1 = ix + m1 * ((i - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((n - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (i / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (n / n - cen2)
Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, B
Next
For i = 2 To n "---- 1
  x(1, i) = 2
  X1 = ix + m1 * (0 / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((i - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (1 / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (i / n - cen2)
  Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, B
Next
For i = 2 To n "---- 1
  x(n, i) = 2
  X1 = ix + m1 * ((n - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((i - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (n / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (i / n - cen2)
  Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, B
Next
h = 1: ff = 15
For i = 1 To 20000
  p = k + 1 + ff * Int(k / ff * Rnd) * (1 - 2 * Int(2 * Rnd))
  q = k + 1 + ff * Int(k / ff * Rnd) * (1 - 2 * Int(2 * Rnd))
  If h >= k - 2 Then GoTo 1000
  If x(p, q) = 1 Then GoTo 500
  For j = 1 To 50000
    summa = 0:SWET = 0

```

```

For jj = -1 To 1: For ji = -1 To 1
  summa = summa + x(p + jj, q + ji)
  SWET = SWET + CBET(p + jj, q + ji)
Next: Next
If summa = 0 Then GoTo 10
If summa = 1 And Abs(q - k - 1) > h Then h = Abs(q - k - 1)
If summa = 1 Then x(p, q) = 1
If summa = 1 Then X1 = ix + m1 * ((p - 1) / n - cen1):
If summa = 1 Then Y1 = iy - m2 * ((q - 1) / n - cen2)
If summa = 1 Then X2 = ix + m1 * (p / n - cen1):
If summa = 1 Then Y2 = iy - m2 * (q / n - cen2)
If summa = 1 Then Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, BF
If summa = 1 Then GoTo 500
If summa > 1 Then GoTo 500
10 p = p + Int(3 * Rnd) - 1: q = q + Int(3 * Rnd) - 1
  Next
500
Next
1000
End Sub

```

Для воспроизведения дендритного роста мы использовали модель ДОА с одной затравочной частицей в центре квадратной решетки. При этом присоединение частицы может быть слабым — одна-единственная связь с кластером, средним — 2 связи, сильным — 3 связи. Число связей мы определим как число вершин частицы, соприкасающихся с кластером. Легко доказать, что в этой модели число связей не может превышать 3.

Фрактальная размерность D_0 (ее еще называют клеточной размерностью [27]) множества X численно определяется следующим образом. Покроем X квадратной решеткой, у которой сторона клетки равна ε . Затем подсчитаем число $N(\varepsilon)$ клеток, покрывающих X . Тогда, по определению,

$$\dim_M X = D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon^{-1}}.$$

Для двумерного случая фрактальная размерность дендритов близка к 1,7. Это означает, что масса агрегата возрастает как $L^{1,7}$, где L — линейный размер, а средняя плотность изменяется как $L^{1,7}/L^2 = L^{-0,3}$, т. е. убывает, в полном соответствии с внешним видом подобных форм роста. В трехмерной ДОА фрактальная размерность обычно находится вблизи 2,5. [Любопытно заметить, во-первых, что Леонардо

да Винчи эмпирическим путем пришел к выводу: «Совокупная толщина всех ветвей дерева на любой высоте равна толщине ствола (ниже их)» [27, с. 224]. Это означает, что для ветвей настоящего дерева диаметр d до ветвления и диаметры d_1, d_2 после разветвления удовлетворяют соотношению $d^\Delta = d_1^\Delta + d_2^\Delta$, где $\Delta = 2$. Согласно Бенуа Мандельброту [27, с. 230], Мюррей установил опытным путем, что вес ветви пропорционален ее диаметру, возведенному в степень $M \sim 2,5$. По мнению же самого Мандельброта, $M = 2 + \Delta/3$. Во-вторых, как доказано в статье [30], множество всех 2-граней бесконечной кубической решетки 3-мерного пространства имеет размерность 2,5.]

При ДОО отдельные частицы после некоторых случайных блужданий оседают на агрегате, порождая случайные фракталы, которые моделируют рост парафиновых дендритов в нефти. Для них характерна древовидная структура с многочисленными «фьордами» на многих размерных масштабах (рис. 226.3). Причина образования подобных структур при ДОО заключается в том, что блуждающая частица оседает, как правило, вблизи выступа фрактала, а не в глубине фьорда. Вероятность проникновения в глубокий фьорд чрезвычайно мала.

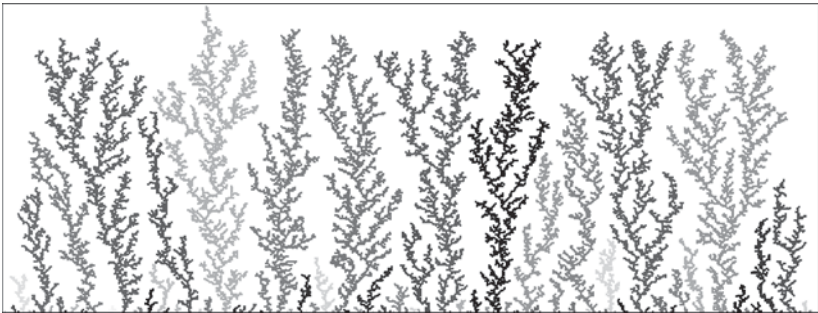


Рис. 226.3. Модельные дендриты (см. также цв. вклейку)

Изображенные на рис. 226.3 дендриты получены с помощью программы 2, написанной на Visual Basic и представленной ниже.

Программа 2

```
Private Sub Form\_Click()
m1 = 12000: m2 = m1: ix = 8000: iy = 10200
k = 400: n = 2 * k + 1: cen1 = 0.5: cen2 = 0
ITER = 25000: Horizont = 0.96: h = 1
ReDim x(n + 1, n + 1): ReDim CBET(n + 1, n + 1)
```

```

For i = 1 To n Step 5:
  x(i, 2) = 1: CBET(i, 2) = i * 10000: p = i: q = 2
  X1 = ix + m1 * ((p - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((q - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (p / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (q / n - cen2)
  Line (X1, Y1)-(X2, Y2), CBET(i, 2), BF
Next
For i = 1 To n
  x(i, 1) = 2
  X1 = ix + m1 * ((i - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * (0 / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (i / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (1 / n - cen2)
  Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, B
Next
For i = 1 To n
  x(i, n) = 2
  X1 = ix + m1 * ((i - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((n - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (i / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (n / n - cen2)
  Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, B
Next
For i = 2 To n - 1
  x(1, i) = 2
  X1 = ix + m1 * (0 / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((i - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (1 / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (i / n - cen2)
  Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, B
Next
For i = 2 To n "---- 1
  x(n, i) = 2
  X1 = ix + m1 * ((n - 1) / n - cen1)
  Y1 = iy - m2 * ((i - 1) / n - cen2)
  X2 = ix + m1 * (n / n - cen1)
  Y2 = iy - m2 * (i / n - cen2)
  Line (X1, Y1)-(X2, Y2), 0, B
Next
For i = 1 To ITER
  p = Int((n - 4) * Rnd) + 3

```



```

If h < n - 2 Then q = h + 5
If h >= n - 2 Then GoTo 1000
If x(p, q) = 1 Then GoTo 500
For j = 1 To 50000
  summa = 0: COLORR = 0
  For jj = -1 To 1: For ji = -1 To 1
    summa = summa + x(p + jj, q + ji)
    COLORR = COLORR + CBET(p + jj, q + ji)
  Next: Next
  If summa = 0 Then GoTo 10
  If summa = 1 And q > h Then h = q
  If summa = 1 Then x(p, q) = 1
  If summa = 1 Then CBET(p, q) = COLORR
  If summa = 1 Then X1 = ix + m1 * ((p - 1) / n - cen1)
  If summa = 1 Then Y1 = iy - m2 * ((q - 1) / n - cen2)
  If summa = 1 Then X2 = ix + m1 * (p / n - cen1)
  If summa = 1 Then Y2 = iy - m2 * (q / n - cen2)
  If summa = 1 Then Line (X1, Y1)-(X2, Y2), SWET, BF
  If summa = 1 Then GoTo 500
  If summa > 1 Then GoTo 500
10 p = p + Int(3 * Rnd) - 1
  wes = Rnd: If wes > Horizont Then q = q - 1
  Next
500
Next
1000
End Sub

```

Для вычисления вероятности прикрепления частицы к кластеру заметим, что частица, будучи квадратом, может иметь с кластером одну, две или три общие вершины. На рис. 226.4 изображен кластер из трех частиц-клеток с координатами (1; 1), (1; 2), (2; 1), окрашенных в темный цвет.

5	3	4	
3		1	4
3			3
5	3	3	5

Рис. 226.4. Вероятность прикрепления частицы к выступам кластера намного выше, чем к точкам внутри изгиба

Блуждающая частица может присоединиться к этому кластеру, попав в одну из 12 белых клеток. Число одношаговых путей, по которым частица может попасть в белую клетку, записано внутри клетки. Среди 12 белых клеток имеется 5 угловых — (0; 0), (3; 0), (3; 2), (2; 3), (0; 3), 6 срединных — (1; 0), (2; 0), (3; 1), (1; 3), (0; 2), (0; 1), 1 фьорд — (2; 2). Угловые клетки имеют 1 связь с кластером, срединные — 2 связи, фьорд — 3 связи. Поскольку всего имеется 42 одношаговых маршрута, ведущих в белые клетки извне, вероятности p_k того, что частица попадет в белую клетку с k связями, равны

$$p_1 = 23/42 \approx 0,5476, \quad p_2 = 18/42 \approx 0,4286, \quad p_3 = 1/42 \approx 0,0238.$$

Мы видим, что соединиться с кластером внутри фьорда у частицы мало шансов. Это означает, что в реальной кристаллизации внутри фьорда концентрация парафиновых частиц меньше, так как многие из них уже присоединились к кластеру. В окрестности же выступов концентрация высокая, так как пока мало частиц из этой окрестности присоединились к дендриту.

Внешнее сходство между псиломелановым дендритом на рис. 226.1 и формами ДОА на рис. 226.3 не случайно. Оба процесса описываются уравнением Лапласа $\nabla\phi = 0$ из теории потенциала, причем градиент потенциала соответствует полю диффузии в ДОА, а поверхность кластера ДОА — эквипотенциальной поверхности. При таком подходе к ДОА можно предположить, что частицы будут с большей вероятностью прилипать к тем местам кластера, где высок градиент потенциала, т. е. вблизи выступов. «Рост» молнии или парафинового дендрита происходит, как правило, в направлении наибольшего градиента потенциала. Глубокие же фьорды наших узоров на рис. 226.2 и 226.3 хорошо экранированы и поэтому либо растут очень медленно, либо не растут вовсе. Такое соответствие между теорией потенциала и фрактальным ростом было полностью подтверждено тщательными измерениями и численными решениями потенциального уравнения [52]. ■

227. Задача. Построить и исследовать средствами ИКТ 2-мерную модель «частица — кластер» роста парафинового кластера в нефти в условиях, близких к равновесному состоянию.

228. Задача. Построить и исследовать средствами ИКТ 3-мерную модель «частица — кластер» роста парафинового кластера в нефти в условиях, близких к равновесному состоянию (рис. 228.1).

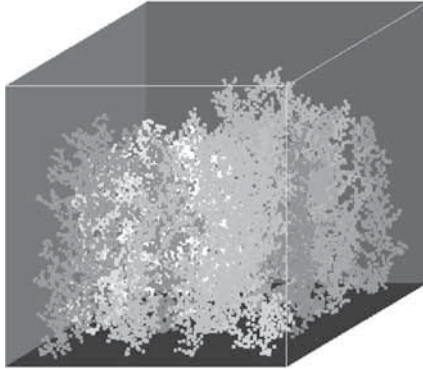


Рис. 228.1. Пространственные кластеры в модели «частица–кластер» (см. также цв. вклейку)

229. Задача. Построить и исследовать средствами ИКТ 2- и 3-мерные модели «кластер — кластер» роста парафинового кластера в нефти в условиях, близких к равновесному состоянию.

230. Задача. В модели «частица — кластер» исследовать динамику конкуренции между кластерами. Построить на дважды логарифмической плоскости зависимость $N(t)$ числа «выживших» в данный момент кластеров от времени. Доказать, что $N(t) \sim t^D$; найти D .

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОЕКТЫ

- [1] Почему камни «всплывают» на поверхность земли? [2] Меандры рек. [3] Вариации на тему теоремы Пифагора. [4] Циклоида и ее свойства. [5] Спираль Архимеда. [6] Двойная спираль ДНК. [7] Математика в геологии. [8] Математика в теории механизмов и машин. [9] Зависимость массы таящего льда от времени. [10] Солнечные часы, показывающие минуты. [11] Циферблат солнечных часов. [12] Часы, у которых центр вращения минутной стрелки находится на конце часовой. [13] Расчет солнечных затмений на данной территории. [14] Механические часы с часовой, минутной и секундной стрелками: причем центр вращения минутной стрелки находится на конце часовой, а центр вращения секундной стрелки — на конце минутной. [15] Геометрия вложенных друг в друга матрешек. [16] Математические и механические задачи в работах Гюйгенса. [17] Золотое, серебряное и другие сечения. [18] Металлический стержень с одной и более точками опоры. [19] Геометрия эллипсографа. [20] Механизмы Чебышёва. [21] Применение векторной алгебры в химии. [22] Выкройки сосудов из жести. [23] Зацепления зубчатых колес. [24] Зацепление Новикова зубчатых колес. [25] Зацепление колес со скрещивающимися осями. [26] Причины стабильности геотермальных источников. [27] Геометрия гипсофилов. [28] Структура минералов. [29] Физический смысл производной порядка $\frac{3}{2}$. [30] Множество Мандельброта. [31] Симметрия в мире молекул. [32] Фуллерены. [33] Мартенситы. [34] Траектория тела, брошенного под углом к горизонту. [35] Космические скорости. [36] Фрактальная природа трещин в трубопроводе. [37] Истечение жидкости из резервуара. [38] Испарение жидкости из сосуда. [39] Орбита Земли. [40] Законы Кеплера. [41] Компьютерная модель, позволяющая датировать древние гороскопы. [42] Колебания рессоры. [43] Колебания в электрических цепях. [44] Резонанс. [45] Работа по выкачиванию нефти из резервуара. [46] Задача Ферхюльста. [47] Задача Вольтерры. [48] Маятник Фуко. [49] Циклоидальный маятник Гюйгенса. [50] Водяные часы. [51] Метеорология и уравнения Лоренца. [52] Падение тела с большой высоты. [53] А. М. Ляпунов — создатель теории устойчивости. [54] Аттракторы динамических систем. [55] Детерминированный хаос. [56] Температура Земли на больших глубинах. [57] Передача тепла по металлическому стержню. [58] Скорость охлаждения нагретого металлического шара. [59] Центр инерции. [60] Задача Фламана. [61] Задача Буссинеки. [62] Диффузия. [63] Нефтяная ловушка и оценка запасов нефти в ней. [64] Спек-

тры механических колебаний. [65] Сейсмосигналы. [66] Вибросигналы, обрабатываемые методами вейвлет-анализа. [67] Шумы бурильной колонны. [68] Извлечение информации из белого шума. [69] Аппроксимация сигналов. [70] Черно-белая раскраска волчка. [71] Колебание струны. [72] Момент силы. [73] Момент инерции. [74] Ячейки Бенара, циклоны и антициклоны. [75] Уравнение Навье—Стокса. [76] Уравнение Кортевега—де Фриза. [77] Цунами. [78] Риски при добыче твердых углеводородов. [79] Нефтяные пеки. [80] Автоколебания при течении жидкости по трубе. [81] История зарождения теории вероятностей. [82] Азартные игры и теория вероятностей. [83] Академик А. Н. Колмогоров и теория вероятностей. [84] Дельта-дисперсия Колмогорова. [85] Геопатогенные зоны и аварийные разрывы трубопровода. [86] Мятый лист бумаги как модель границы раздела «вода—нефть». [87] Геометрия псиломелана. [88] В модели ограниченной диффузией агрегации (ДОА) «частица—кластер» исследовать динамику конкуренции между кластерами. Построить на дважды логарифмической плоскости зависимость $N(t)$ числа «выживших» в данный момент кластеров от времени t . Проверить гипотезу, что $N(t) \sim t^D$; найти D . [89] ДОА: 2-мерная модель «частица—кластер». [90] τ ДОА: 3-мерная модель «частица—кластер». [91] ДОА: 2-мерная модель «кластер—кластер». [92] ДОА: 3-мерная модель «кластер—кластер». [93] Путем размельчения керна, взятого из нефтегазонасного коллектора, можно выявить распределение линейных размеров кварцевых частиц, входящих в состав керна, и оценить его проницаемость, пористость, перколяционные свойства. Решить обратную задачу: зная распределение размеров песчинок, «собрать» из них керна и предсказать его свойства. [94] Оценка рисков при землетрясениях. [95] Пальцы Хейли—Шоу. [96] Шевингование, фрезерование, шлифовка? [97] Геометрия Обь-Иртышского бассейна. [98] Геометрия Байкальской рифтовой системы. [99] Палеонтология, точки бифуркации и постоянная Фейгенбаума. [100] Юра́ и Мел. [101] Самоуправляемый синтез наноструктурных материалов. [102] Что такое память, где и как она хранится, как извлечь информацию, записанную в памяти, например, металла? [103] Эффекты памяти формы. [104] Евклидовы фракталы в геологии. [105] Аффинные фракталы в физике. [106] Проективные фракталы. [107] Построение фракталов посредством итерированных круговых инверсий. [108] Мультифрактальные структуры в материаловедении. [109] Стохастические горные ландшафты. [110] Течение Эль-Ниньо. [111] Логнормальное распределение в полупроводниках. [112] Может ли горячее нагреваться от соприкосновения с холодным? [113] Закон Ричардсона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987. — 160 с.
2. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. — М.: Высшая школа, 1971. — 288 с.
3. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
5. *Афанасьев В. В.* Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач: Монография. — Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1996. — 168 с.
6. *Баранцев Р. Г.* Синергетика в современном естествознании / Предисл. Г. Г. Малинецкого. Изд. 2-е, доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 160 с. (Синергетика: от прошлого к будущему.)
7. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. — М.: Наука, 1972. — 430 с.
8. *Вичек Т.* Формирование структур отвердевания в моделях агрегации // Фракталы в физике: Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля 1985). — М.: Мир, 1988. — С. 345–349.
9. *Гетлинг А. В.* Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 248 с.
10. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия: Пер. с нем. — 3-е изд. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
11. *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках. — 3-е изд., расширенное. — М.: МЦНМО, 2001. — 448 с.
12. *Губин В. И., Осташков В. Н.* Статистические методы обработки экспериментальных данных: Учеб. пособие для студентов технических вузов. — Тюмень: Изд-во ТюмГНГУ, 2007. — 202 с.
13. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов. В 2 ч. Ч. I. — 4-е изд., испр. и доп. — М.: Высш. шк., 1986. — 415 с., ил.
14. *Едигаров С. Г., Михайлов В. М., Прохоров А. Д., Юфин В. А.* Проектирование и эксплуатация нефтебаз: Учебник для вузов. — М.: Недра, 1982. — 280 с.
15. *Ефимович И. А., Скифский С. В.* Интеллектуальная собственность — результат технического творчества: Учебное пособие. — Тюмень: Изд-во «Вектор Бук», 2004. — 320 с.

16. *Жохов А. Л.* Мирозозрение: становление, развитие, воспитание через образование и культуру: Монография.— Архангельск: ННОУ «Институт управления»; Ярославль: Ярославский филиал ИУ, 2007. — 348 с.
17. *Заёнчик В. М., Карачёв А. А., Шмелёв В. Е.* Основы творческо-конструкторской деятельности: Методы и организация: Учебник для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2004. — 256 с.
18. *Иванов Д. А., Митрофанов К. Г., Соколова О. В.* Компетентностный подход в образовании. Проблемы, понятия, инструментарий: Учебно-методическое пособие. — Омск: Изд-во ОмГПУ, 2003. — 101 с.
19. *Иванова В. С.* Введение в междисциплинарное наноматериаловедение. — М.: САЙНС-ПРЕСС, 2005.— 208 с.: ил. (Сер. Фракталы. Хаос. Вероятность.)
20. *Казакова Л. П.* Твердые углеводороды нефти. — М.: Химия, 1986. — 176 с.
21. *Карнаухова Т. И., Скалкина М. А.* Высшая математика: уравнения математической физики: Методические указания и задания для геологических специальностей. — Тюмень: Изд-во Тюменского индустриального ин-та, 1981.— 62 с.
22. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И.* и др. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учебное пособие для вузов / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — С.-Петербург: Техническая книга, 1994. — 496 с.
23. *Куликовский П. Г.* Справочник любителя астрономии. — М.: Наука, 1971. — 632 с.
24. *Лопищ А. М.* Задача Мёбиуса и ее продолжения // Квант, 1977, № 3, с. 4–6.
25. *Лурье А. И.* Теория упругости.— М.: Наука, 1970. — 940 с.
26. *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику. Изд. 3-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 256 с.
27. *Мандельброт Б. Б.* Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
28. *Некрасов Ю. И., Барбышев Б. В., Леонов В. Б., Некрасов Р. Ю., Путилова У. С.* Напряженно-деформированное состояние, разрушение и прочность режущего инструмента: Учебное пособие. — Тюмень: Изд-во ТюмГНГУ, 2008. — 326 с.
29. *Олемской А. И., Флат А. Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды. // УФН.— 1993.— Т. 163.— № 12.— С. 1–50.

30. *Осташков В. Н., Кортаева В. А.* Фрактальная размерность неограниченных множеств // Биниология, симметрология и синергетика в естественных науках: Матер. междунар. конф. — Тюмень: Изд-во ТюмГНГУ, 2001. — С. 115–118.
31. *Очков В. Ф.* MathCAD PLUS 6.0 для студентов и инженеров. — М.: ТОО фирма «КомпьютерПресс», 1996. — 238 с., ил.
32. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. — Т. 1. — Изд-е 12-е. — М.: Наука, 1978. — 456 с.
33. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. — Т. 2. — Изд-е 12-е. — М.: Наука, 1978. — 576 с.
34. *Письменный Д. Т.* Конспекты лекций по высшей математике: полный курс / Дмитрий Письменный. — 5-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2007. — 608 с.: ил. — (Высшее образование).
35. Подготовка учителя математики: инновационные подходы: Учеб. пособие / Под ред. В. Д. Шадрикова. — М.: Гардарики, 2002. — 383 с.
36. *Поля Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. — М.: Наука, 1970. — 452 с.
37. *Поля Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. — Изд-е 2-е, испр. — М.: Наука, 1975. — 464 с.
38. Русская эпиграмма. — М.: Худож. лит., 1990. — 366 с., ил. (Классики и современники. Поэтическая б-ка.)
39. *Савенков А. И.* Психологические основы исследовательского подхода к обучению: Учебное пособие. — М.: «Ось-89», 2006. — 480 с.
40. *Сандер Л.* Континуальная ДОА: случайный фрактальный рост, порождаемый детерминистической моделью // Фракталы в физике: Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля 1985). — М.: Мир, 1988. — С. 336–344.
41. *Скалкина М. А., Осташков В. Н., Крусков Н. П.* Высшая математика. Часть 1: Учебное пособие. — Тюмень, Изд-во ТюмГНГУ, 1998. — 64 с.
42. Справочник для студентов технических вузов: высшая математика: физика: теоретическая механика: сопротивление материалов / А. Д. Полянин, В. Д. Полянин, В. А. Попов и др. — 3-е изд. — М.: АСТ: Астрель, 2007. — 735, [1] с., ил.
43. *Сойер У. У.* Прелюдия к математике / Пер. с англ. М. Л. Смоленского и С. Л. Романовой. Рассказ о некоторых любопытных и удивительных областях математики с предварительным анализом математического склада ума и целей математики. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1972. — 192 с.

44. *Флоренский П. А.* Столп и утверждение истины: Опыт православной теодицеи.—М.: АСТ, 2005.— 633, [7] с.— (Philosophy).
45. *Фридман Л. М.* Теоретические основы методики обучения математике: Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений.— М.: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998.— 224 с.
46. *Чернавский Д. С.* Информация, самоорганизация, мышление // Синергетика: Труды семинара. Материалы круглого стола «Самоорганизация и синергетика: идеи, подходы и перспективы». — Т. 3.— М.: МГУ, 2000.— С. 143–182.
47. *Черников В. И.* Сооружение и эксплуатация нефтебаз.— М.: Государственное и научно-техническое изд-во нефтяной и горно-топливной литературы, 1955.— 522 с.
48. *Шикин Е. В.* Линейные пространства и отображения.— М.: Изд-во МГУ, 1987.— 311 с.
49. *Шрёдер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая.— М.— Ижевск: РХД, 2001.— 528 с.
50. *Ястребов А. В.* Задачи по общей методике преподавания математики: Учебное пособие.— Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009.— 148 с.
51. *Levine D., Steinhardt P.* J. Phys. Rev. B., 1986, **34**, p. 596.
52. *Niemeyer L., Pietronero L., Wiesmann H. J.* Response dimension of dielectric breakdown. // Phys. Rev. Lett.— 1984.— V. 52.— P. 1033–1040.
53. *Semple J. G., Roth L.* Introduction to algebraic geometry.— N. Y. ed. O. F. G. Schilling, 1965.— 446 p.

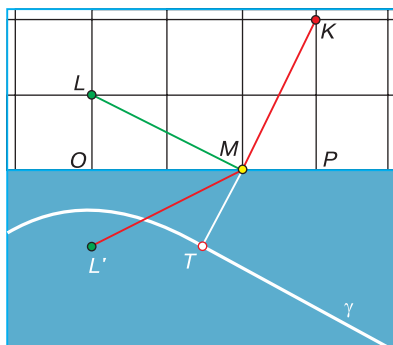


Рис. 44.1

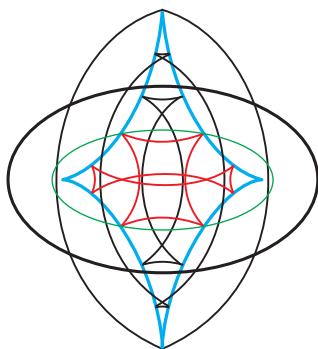


Рис. 162.1

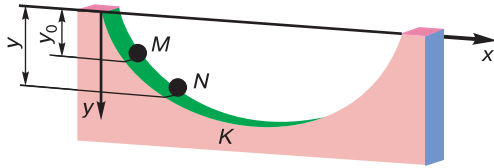


Рис. 194.1

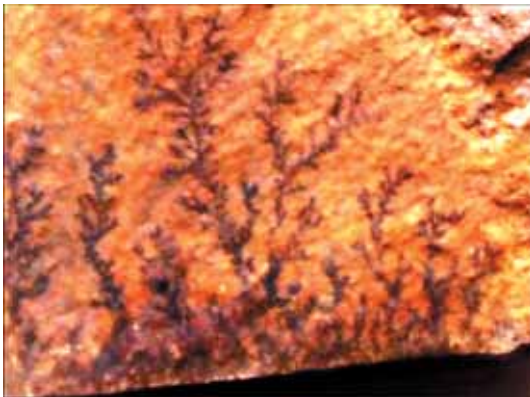


Рис. 226.1

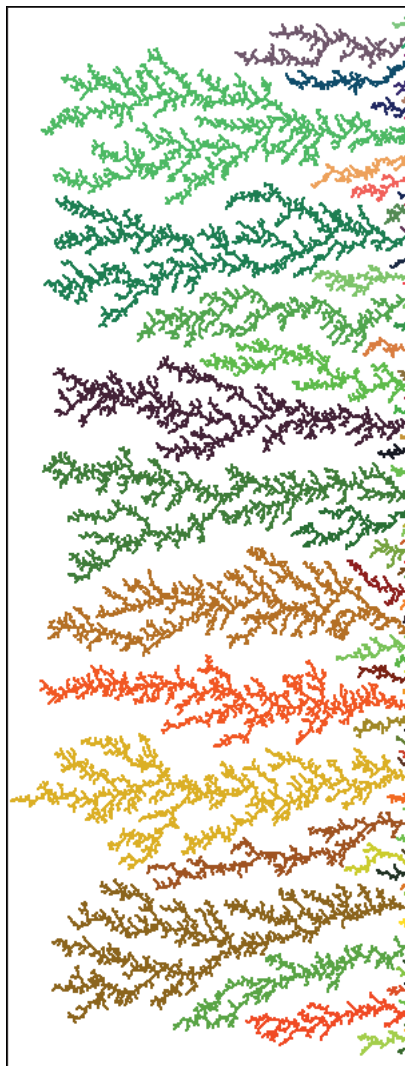


Рис. 226.3

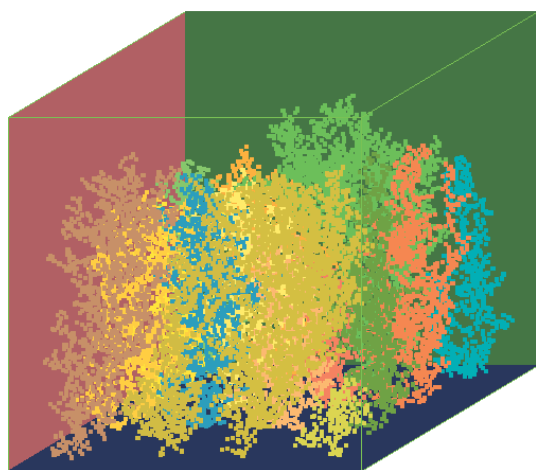


Рис. 228.1

Учебное электронное издание

Серия: «Математическое моделирование»

Осташков Владимир Николаевич

**ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ
ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ
Учебное пособие**

Редактор *М. С. Стригунова*

Художник *Н. А. Новак*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*

Корректор *Е. Н. Клитина*

Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете **И^АТ_ЭX 2_ε**

Подписано 20.12.12. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 12,5.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 10-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry.