Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

**Н. П. ПУЧКОВ, Т. В. ЖУКОВСКАЯ,
Е. А. МОЛОКАНОВА и др.**

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОРАЗВИТИЯ БАКАЛАВРА

В четырёх частях

Часть 3. Математический анализ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Инноватика»

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2013

УДК 514.12:512.64(075.8)
ББК В11я73
М34

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой распределённых
вычислительных систем ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
С. М. Дзюба

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
алгебры и геометрии ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
А. И. Булгаков

Авторский коллектив:
Н. П. Пучков, Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова,
И. А. Парфенова, А. И. Попов

М34 **Применение** математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра : в 4 ч. / Н. П. Пучков [и др.]. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013.

ISBN 978-5-8265-1237-1

Ч. 3 : Математический анализ : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Инноватика» / Н. П. Пучков [и др.]. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 80 с. – 100 экз.

ISBN 978-5-8265-1232-6.

Представлены базовые понятия математического анализа, изложены методы по использованию математических знаний при решении модельных задач профессиональной деятельности, даны рекомендации по организации самостоятельной работы.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Инноватика».

УДК 514.12:512.64(075.8)
ББК В11я73

ISBN 978-5-8265-1232-6 (ч. 3)
ISBN 978-5-8265-1237-1

ВВЕДЕНИЕ

Теория компетентностного подхода в обучении предполагает глубокое усвоение основ изучаемой дисциплины, обеспечивающее возможность эффективной деятельности будущего специалиста.

Несмотря на то, что по классическому курсу высшей математики для вузов написано много учебников и учебных пособий, некоторые основополагающие разделы, ориентированные на новые направления подготовки (например, 222000 «Инноватика»), нуждаются в дополнительных методических рекомендациях по их освоению.

Данное пособие не преследует цели последовательного изложения всего программного материала, здесь более подробно, отчасти не совсем строго, рассматриваются вопросы программного материала, лежащие в основе изучаемого курса и в наибольшей мере, на наш взгляд, способствующие формированию предметных компетенций.

Основной упор в пособии делается на формирование навыков самостоятельной работы. Задания для самостоятельного выполнения ранжированы по уровню сложности, начиная от тестовых заданий, заканчивая задачами повышенной сложности и творческими задачами.

Такой подход к изложению материала вполне обосновывает основную цель профессионального образования, заключающуюся в подготовке квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, готового к постоянному творческому росту, социальной и профессиональной мобильности.

Становится оптимально разрешимой задача обучения студентов в вузе, заключающаяся, с одной стороны, в получении необходимых знаний, умений и навыков для конкретной профессиональной деятельности, а с другой, в формировании своих личностных качеств, необходимых для любой профессии и общественной жизни, творческой самореализации.

Предлагаемое учебное пособие может также быть использовано студентами высших технических учебных заведений, обучающихся на инженерных направлениях подготовки.

Материал пособия обеспечивает не только углубление математических знаний, но и их использование при изучении других разделов математики, а также дисциплин математического, естественнонаучного и профессионального циклов.

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I. Учебные цели. В результате изучения материала студенты должны *иметь представление* о переменных величинах и их свойствах; об одном важном классе переменных величин, называемых функциями; основных понятиях математического анализа – понятиях предела и бесконечно-малого; непрерывности; *знать* понятие множества, его свойства; понятие, способы задания, свойства функции, её предела; понятие числовой последовательности, её свойств и предела.

II. Формирование компетенций. Формирование математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, развитие индуктивного мышления.

III. Введение в тему.

Математический анализ – совокупность разделов математики, посвящённых исследованию функций и их обобщений методами бесконечно малых. В систематической форме он возник XVII–XVIII веках в трудах И. Ньютона, Г. Лейбница, Л. Эйлера и других математиков. Для полноценного обоснования математического анализа невозможно обойтись без построения теории множеств, содержащей общие принципы, исчерпывающим образом характеризующие собой всю совокупность вещественных чисел. Переменные величины в свою очередь могут принимать определённые значения, принадлежащие указываемым множествам. А функциональная зависимость между переменными величинами является основополагающей в идее овладения явлениями природы и процессами техники с помощью математического аппарата.

Следовательно, математический анализ можно определить ещё и как раздел математики, изучающий различные динамические процессы, т.е. взаимосвязи переменных величин, которые называются функциональными зависимостями или функциями.

Вот почему разумное изучение, объяснение и эффективное осуществление инновационных нововведений немыслимо без знания математического анализа. Знание таких понятий, как множество и функция, их свойств и способов задания обусловливают формирование аналитического мышления. Умение решить поставленную задачу напрямую зависит от грамотной оценки проблемной ситуации, правильной постановки цели и выбора условий реализации. Другими словами, необходимо уметь правильно оценить область, на которой задача определена, множество значений, на которых будет задача разрешима, функциональную зависимость между переменными и результатами.

Сравнительно не сложный представленный в пособии материал, типичные для всего математического анализа ход мыслей, цепи представлений и образов и даже целые логические схемы весьма полезны для будущего специалиста в области инноваций.

Для контроля качества усвоения изложенного материала необходимо сконцентрировать внимание на следующих вопросах:

1. Переменные величины и их классификация.
2. Множество и его элементы.
3. Функция, область определения функции, множество значений функции.
4. Числовая последовательность и её предел.
5. Предел функции в точке и на бесконечности.
6. Свойства функций, имеющих передел.
7. Бесконечно малые функции.
8. Непрерывность функции в точке.
9. Первый и второй замечательные пределы, следствия из них.

1.1. ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА[1]

Переменная величина. В текущей жизни большинство конкретных наблюдаемых величин являются переменными, т.е. меняются с течением времени хотя бы немного. Переменная величина в математическом анализе обозначается с помощью одной из последних букв латинского алфавита: x, y, z, а также u, v, w. Считается, что с течением времени эта величина изменяет своё численное значение.

Величина, которая численно не изменяется, называется постоянной величиной (сумма углов в шестиугольнике, π). Постоянные величины принято обозначать первыми буквами латинского алфавита: a, b, c и т.д. Различают абсолютно постоянные величины и параметры (условно, в пределах рассматриваемого вопроса, постоянные величины).

Постоянная величина «a» геометрически изображается неподвижной точкой прямой линии (A, рис. 1.1).

Переменная величина «x» геометрически изображается движущейся точкой прямой линии (M, рис. 1.1).

Совокупность численных значений, принимаемых переменной величиной x, называется областью её значений.

Наиболее часто приходится встречаться с такими переменными величинами, у которых область значений есть: либо «отрезок», либо «интервал».

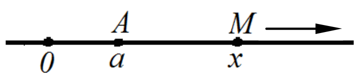

Рис. 1.1

Отрезком называется часть прямой, отсекаемая двумя непод-

[1] Этот раздел написан Н. П. Пучковым, который оставляет за собой право придерживаться именно такого изложения.

вижными точками a и b с обязательным присоединением к этой части её конечных точек a и b: $a \leq x \leq b$, $x \in [a, b]$.

Интервалом называется часть прямой, отсекаемая двумя неподвижными точками a и b с обязательным выключением из этой части её граничных точек a и b: $a < x < b$, $x \in (a, b)$.

Таким образом, в отличие от отрезка, интервал не имеет концов. Эта, вроде бы, незначительная разница (на две точки) крайне важна для математического анализа.

В математическом анализе имеет место определённая классификация переменных величин, при предположении, что всякая переменная величина x изменяет своё численное значение с течением времени, и поэтому характер изменений положен в основу классификации.

Монотонные переменные величины. Переменная величина x называется *возрастающей*, если её всякое последующее значение больше предшествующего, и *убывающей*, если всякое последующее значение меньше предшествующего. И возрастающие, и убывающие переменные величины образуют класс монотонных величин.

На числовой прямой возрастающая величина x изображается точкой, перемещающейся постоянно вправо, а убывающая – влево.

Немонотонные величины называются колеблющимися величинами (температура воздуха в течение дня).

Ограниченные переменные величины. Переменная величина x называется ограниченной, если, начиная с некоторого момента времени, её абсолютная величина $|x|$ сделается и будет впредь всегда оставаться меньше некоторого постоянного положительного числа A: $|x| < A$.

Здесь не ставится цель соблюдения условия, чтобы x была ограниченной величиной всё время; достаточно, если это неравенство сделается верным, лишь начиная с некоторого момента.

Переменная величина называется *неограниченной*, когда нельзя найти такого положительного числа *A*, чтобы $|x| < A$ было постоянно соблюдено, начиная с некоторого момента времени.

Непрерывные переменные величины. Монотонная величина x называется *изменяющейся* непрерывно на отрезке $[a, b]$, когда при своём изменении от a к b или наоборот, она последовательно проходит через все промежуточные значения, не пропустив ни одного из них.

Приращение переменной величины. Изучение переменной величины начинается обычно с того, что наблюдают то изменение, которое с ней происходит, когда она переходит от прежнего численного значения (пусть это будет x') к новому x''.

Разность $x'' - x'$ и называется приращением переменной x. Если эту разность обозначить h, то

$$x'' = x' + h.$$

Часто эту разность h обозначают единым символом $\Delta x'$ («дельта икс»). Тогда новое значение $x'' = x' + \Delta x'$. На практике обычно штрихи не применяют и считают, что x – прежнее значение, а $x + \Delta x$ – новое.

Получив в такой форме первоначальное представление о переменной величине, можно перейти к более строгому обоснованию одного из наиболее важного вида таких величин – функций, но предварительно необходимо рассмотреть понятие множества, используемого при определении функции.

Множества. Обозначения. Логические символы. Основные положения теории множеств формулируются ещё в курсе математики средней школы. Начиная с понятия натурального числа, постепенно расширяется понятие «числа» и вводится понятие множества действительных чисел – основополагающего для дальнейшего изучения функций.

Под *множеством* понимается совокупность объектов, называемых его *элементами*, обладающих общим для всех их характеристическим свойством. Множества обозначают большими буквами латинского алфавита, элементы – малыми буквами. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом Ø.

Множество можно задать *перечислением его элементов* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ или *описанием свойства* $P(x)$, которым обладают его элементы, $X = \{x \mid P(x)\}$.

Рассмотрим пример задания множества перечислением его элементов.

Пример 1.1. $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Рассмотрим пример задания множества описанием свойств его элементов.

Пример 1.2. $X = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ – множество корней квадратного уравнения.

Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, числа, уравнения, точки, углы и т.д. Именно этим объясняется чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к самым разнообразным областям знания (математика, физика, лингвистика, экономика и т.д.). Для математики особо важную роль играют множества, составленные из «математических» объектов – чисел.

Множества, элементами которых являются числа, называют *числовыми* множествами. Примерами числовых множеств являются множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество действительных чисел и т.д.

Для некоторых числовых множеств приняты *стандартные обозначения*. Например, для указанных выше, N – множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, R – множество действительных чисел, $[a,b]$ – отрезок числовой прямой. $N \subset Z \subset R$, $[a,b] \subset R$.

Множество можно задать *с помощью операций над множествами* ($X \bigcup У$ – объединение; $X \bigcap У$ – пересечение; $X \setminus У$ – разность множеств). Схематично они изображаются с помощью кругов Эйлера [5].

Пример 1.3. Даны множества: $X = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $У = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Задать перечислением элементов множества $X \bigcup У$, $X \bigcap У$, $X \setminus У$.

Решение.

$X \bigcup У = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X \bigcap У = \{3, 5, 7\}$, $X \setminus У = \{1, 2\}$.

В математическом анализе, в зависимости от характера решаемой задачи, рассматриваются множества, элементами которых являются точки прямой, плоскости или пространства. Один из видов таких множеств – окрестность заданной точки.

Если точка x_0 расположена на прямой Ox, то её δ-*окрестностью* называется множество точек *x*, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ или $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, т.е. интервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

Если точка $M_0(x_0,\ y_0)$ расположена в плоскости Oxy, то её δ-*окрестностью* называется множество точек $M(x,\ y)$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, т.е. множество точек, лежащих внутри круга, радиуса δ.

Аналогично для точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, расположенной в пространстве $Oxyz$, δ-*окрестность* – это сфера радиуса δ:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta .$$

Все перечисленные окрестности условно обозначаются $U_\delta(x_0)$, $U_\delta(x_0, y_0)$, $U_\delta(x_0, y_0, z_0)$.

1.2. ФУНКЦИИ

Понятие и определение функции. Характеристики функциональной зависимости. Наблюдения в текущей жизни с очевидностью убеждают нас в том, что одни переменные величины зависят от других.

Переменная, которой можно приписывать какие угодно, допустимые для неё числовые значения, называется *независимой переменной* (*аргументом*), а переменная, численное значение которой вполне определяется после того, как стало известным значение независимой переменной, называется *зависимой*.

Один из видов такой зависимости – функциональная.

Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому допустимому значению x по определённому правилу (закону) ставится в соответствие единственное значение переменной y.

Открытие закона, по которому одна переменная величина зависит от другой, – это та цель, которую ставит себе всякая ветвь естествознания. Цель считается достигнутой, когда удаётся выразить зависимость наблюдаемой переменной величины y от независимой переменной величины x с помощью математических знаков, т.е. с помощью формулы. Всякая формула есть не что иное, как указание тех математических действий, которые надо провести под величинами, входящими в формулу. Когда необходимо просто выразить факт функциональной зависимости (неважно, какой структуры) записывают $y = f(x)$, где значок $f(x)$ – обозначение рассматриваемой функции, характеристика функции, символ математической операции, а значение $y = f(x)$ – результат применения операции к числу x.

Для студентов нематематических специальностей важно при изучении математики понять следующее обстоятельство. Понятие функциональной зависимости имеет исключительное значение не только в самой чистой математике, но также и в практических её приложениях. Физические законы являются не чем иным, как выражением способа, посредством которого величины зависят от других, способных как-им-то образом измениться. Так, например, давление атмосферы зависит от высоты, энергия пули зависит от её массы и скорости. Задача физики состоит в точном или приближённом определении природы такого рода зависимостей.

С помощью понятия функции можно дать точную в математическом смысле характеристику физического явления. При этом под математической функцией следует понимать просто закон, управляющий взаимными зависимостями переменных величин – и не более того. Понятие функции не предусматривает существования чего-либо близкого к «причине и следствию» в отношениях между независимой и зависимой переменными. Так, например, закон Бойля, относящийся к газу, заключённому в некоторую замкнутую оболочку при постоянной температуре, утверждает, что произведение давления газа p на его объём V есть величина постоянная: $p \cdot V = C$; при этом не следует понимать ни того, что перемена объёма есть «причина» изменения давления (хотя $p = C/V$), ни того, что изменение давления есть «причина» изменения объёма (хотя $V = C/p$).

В физике часто больший интерес представляет сама величина y, как таковая, чем та математическая процедура, с помощью которой значение y может быть получено из значения x, если только математическая формула не помогает при анализе поведения величины y. Например, сопротивление u воздуха движению предмета зависит от скорости v движения и может быть найдено экспериментально, независимо от того, известна ли явная математическая формула $u = f(v)$.

Математический анализ выделяет понятие функции и изучает свойства функций, отвлекаясь от того, какие зависимости между физическими величинами они выражают.

Всякая функция $y = f(x)$ имеет свою собственную совокупность всех допустимых значений для x, называемую областью определения функции.

Приращение функции. При рассмотрении функциональной зависимости наблюдаются две переменные величины – аргумент x , который может иметь приращение Δx и функция y, которая может иметь приращение Δy. Для математического анализа очень важно уметь находить приращение функции Δy, когда мы даём её аргументу x приращение Δx и, таким образом, получаем его новое значение $x + \Delta x$.

Если дана функция $y = f(x)$, то

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Например, если $f(x) = x^2$, то

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 .$$

Если же $f(x) = x^3$, то

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 .$$

Понятие функции на языке числовых множеств.

О п р е д е л е н и е 1.1. На множестве X задана *функция* f переменной величины x , если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие по некоторому правилу или закону единственное определенное число $y \in R$. Обозначение: $y = f(x)$.

Переменная x называется *аргументом*, множество X – *областью определения* функции (обозначение $X = D(f)$), число y называется *значением функции* в точке x. Множество всех значений функции обозначается $E(f)$.

Далее мы будем рассматривать только аналитически заданные функции (с помощью формул $y = f(x)$. Примерами аналитически заданных функций являются: степенная $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$; показательная $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$.

В математике существует необходимость наряду с функциями $y = f(x)$ рассматривать им обратные $x = f^{-1}(y)$, где y – аргумент, а x – соответствующее значение функции.

О п р е д е л е н и е 1.2. Функция $f^{-1}: Y \to X$, ставящая в соответствие каждому элементу $y \in Y$ единственный элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$, называется *обратной* к данной функции f: $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

При формальном изучении таких функций можно не использовать символ f^{-1}, а писать, например, $x = \varphi(y)$, или $y = \varphi(x)$, считая y функцией, а x – аргументом.

Примерами таких функций являются:

$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, как обратная к функции $y = x^n$, $n \in N$;

$y = \log_a x$, как обратная к функции $y = x^a$;

$y = \arcsin x$, как обратная к функции $y = \sin x$ и т.д.

Из всего множества аналитически заданных функций выделяют основные элементарные функции: степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические. Примеры таких функций приведены выше и описаны в учебнике [5]. Из основных элементарных функций, как из «кирпичиков», создают с помощью операции суперпозиции элементарные функции.

О п р е д е л е н и е 1.3. Если на некотором промежутке X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z, а на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f\left(\varphi(x)\right)$ называется *сложной* функцией или *суперпозицией* функции f и φ и обозначается $g \circ f$.

Примером могут служить: $y = \cos 2x$, $y = \log_2\left(x^2 + 1\right)$ и т.д.

Элементарными называют функции, которые можно задать с помощью формулы $y = f(x)$, содержащей лишь конечное число арифметических операций над основными элементарными функциями и суперпозиций.

К простейшим свойствам функций относятся: ограниченность, монотонность, чётность, периодичность. Более сложные свойства функций опираются на понятие предела.

1.3. ПРЕДЕЛЫ

1.3.1. Пределы переменных величин

Понятие предела переменной величины. Геометрический смысл. Мы рассматривали переменную величину x, которая изменяется во времени и всё время. Это означает, что никакое из значений, принятых переменной x, не будет последним.

Изменение переменной x может протекать весьма разнообразно. Но среди всех возможных изменений заслуживает внимания такое, при котором эта переменная x стремится к постоянной величине «a», таким образом, отличие x от a всё более сглаживается с течением времени.

О п р е д е л е н и е 1.4. Число a называется пределом переменной x, если абсолютная величина разности $|x-a|$ со временем сделается и будет потом всё время оставаться меньше любого малого положительного числа ε, каким бы ни было малым это положительное число.

Геометрически наличие предела у переменной величины истолковывается довольно просто. Если на прямой линии переменная величина x изображается точкой M, а постоянная величина «a» точкой A (рис. 1.1), то можно сказать, что движущаяся точка M стремится к неподвижной точке A, как к своему пределу. Это означает, что точка M движется так, что попадает со временем на любой заранее выбранный нами маленький промежуток, охватывающий точку A, и будет впредь там оставаться.

Отсюда следует, что одна и та же переменная величина x может иметь не более одного предела.

Символически факт наличия предела записывается в виде $\lim x = a$.

Бесконечно малые величины. Теперь мы вводим самое основное понятие, на котором строится весь математический анализ.

О п р е д е л е н и е 1.5. Переменная величина называется бесконечно малой, если она имеет своим пределом нуль: $\lim x = 0,\ x \to 0$.

Из определения следует, что переменная величина x называется бесконечно малой, если она ведёт себя так, что её абсолютная величина $|x|$, начиная с некоторого момента, сделается и будет в дальнейшем всё время оставаться меньше любого наперёд заданного положительного числа ε, каким бы малым оно ни было.

Необходимо понимать, что бесконечно малое по определению есть всегда переменная величина и поэтому никакое постоянное число, каким бы малым оно ни было, никогда не есть бесконечно малое.

Говоря о бесконечно малой величине, следует иметь в виду, что речь идёт не о понятии величины, стремящейся к нулю, а лишь о термине «бесконечно малая величина», данное словосочетание призвано описывать только характер изменения данной величины, а не её «размеры».

Связь бесконечно малого и понятия предела. Если какая-либо переменная величина x стремится к пределу *a*, то разность $x-a$ будет, очевидно, бесконечно малым, т.е. начиная с некоторого момента, выполняется неравенство $|x-a|<\varepsilon$, каково бы ни было заданное положительное число ε.

Если обозначить разность $x-a$ через α, то получим $x=a+\alpha$ и можем сказать, что всякая переменная величина, стремящаяся к пределу, разбивается на сумму двух слагаемых: первое слагаемое есть постоянное число, являющееся пределом рассматриваемой переменной величины, второе же слагаемое есть бесконечно малое.

Справедливо и обратное.

Эта зависимость устанавливает связь теории пределов и теории бесконечно малых.

Понятие о бесконечно большом. В математическом анализе встречаются три символа: $+\infty$, $-\infty$ и просто ∞, называемые «плюс бесконечность», «минус бесконечность» и просто «бесконечность».

Роль этих символов состоит только в указании на то или иное поведение переменных величин, «конечных» во всякий момент времени.

Уясним смысл этих символов на первом из них. Переменная величина x называется положительной бесконечно большой (положительной бесконечностью), если её изменение со временем сделается и будет оставаться всегда больше любого, произвольного выбранного положительного числа N, каким бы большим оно ни было, т.е. если осуществляется и остаётся затем всегда в силе неравенство $x>N$.

В этом случае говорят, что x «неограниченно увеличивается» и символически обозначают этот факт как $\lim x=+\infty$. Но при этом необходимо помнить, что бесконечность не есть предел в настоящем смысле, ибо настоящий предел есть число, а бесконечность не есть число: и бесконечно большое, и бесконечно малое суть переменные величины, в каждый момент времени имеющие определённое значение.

Аналогично можно определить и отрицательную бесконечность $(-\infty)$ для величины x и просто бесконечность (∞) для величины $|x|$.

Бесконечно большие (x) величины и бесконечно малые (α) величины связаны очень простым соотношением

$$\alpha = \frac{1}{x}.$$

1.3.2. Предел числовой последовательности

Два определения предела. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется бесконечной, если за каждым числом, входящим в эту последовательность (членом), имеется следующий. Такова, например, последовательность натуральных чисел: 1, 2, ..., n, ...

Задать последовательность – это значит указать способ вычисления любого её члена a_n по его номеру n, в этом смысле последовательности

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots;$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots;$$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

считаются заданными. В первом случае a_n определяется по формуле $a_n = n^2$, во втором $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, в третьем $a_n = \frac{n+1}{n}$. a_n называют *общим членом последовательности*.

Последовательность, заданная общим членом a_n, обозначается $\{a_n\}$.

С изменением n меняется и a_n, поэтому можно сказать, что a_n есть функция от n: $a_n = f(n)$.

Может случиться, что при неограниченном возрастании n переменная величина a_n будет иметь своим пределом некоторое число A:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Тогда можно сказать, что последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ имеет A своим пределом. Так, например, третья из написанных выше последовательностей имеет своим пределом единицу. Более строгое определение предела последовательности можно сформулировать так.

Определение 1.6. Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $\bar{n}$, начиная с которого, выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in N \ \forall n \geq \bar{n} \ \left(|a_n - A| < \varepsilon\right). \qquad (1.1)$$

Сходящиеся и бесконечно большие последовательности. Последовательность, имеющая предел A, называется *сходящейся,* говорят, что *последовательность сходится к числу* A. Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется *расходящейся*.

Неравенство (1.1) равносильно неравенствам

$$\begin{cases} A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \\ \bar{n} \leq n < \infty \end{cases},$$

которые означают, что элемент a_n находится в интервале $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ с центром в точке A, т.е. принадлежит ε-окрестности точки a ($U_\varepsilon(A)$). Другими словами, как только n попадает в полуинтервал $[\bar{n}, \infty)$, соответствующее значение a_n попадает в окрестность точки A.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого числа $M > 0$ существует номер $\bar{n}$, начиная с которого, выполняется неравенство $|x_n| > M$ (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$).

Такой, например, является первая из написанных выше последовательностей.

В данном примере имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Признаки существования предела последовательности. Для заданной последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ чрезвычайно важно уметь установить, имеет ли она предел, даже если бы мы не могли точно вычислить величину этого предела.

Укажем ряд случаев, когда существование этого предела легко установить.

На числовую последовательность как на переменную величину можно перенести свойства монотонности и ограниченности [3, 5].

В символах математики это записывается следующим образом.

Числовая последовательность называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*), если каждый последующий член последовательности больше (меньше) предыдущего

$$\forall n \in N \ \left(x_{n+1} > x_n \quad (x_{n+1} < x_n)\right).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такое число M, что для любого $n \in N$ выполнено неравенство $x_n \le M \left(x_n \ge M\right)$. Последовательность $\{x_n\}$, ограниченная и снизу и сверху, называется *ограниченной*. Например,

$$1, 0, -1, 0, 1, \ldots, \ \sin\frac{\pi n}{2}, \ldots \ .$$

Последовательность, не являющаяся ограниченной, называется *неограниченной*.

Из приведённых выше примеров, примером монотонных последовательностей являются первая (возрастающая) и третья (убывающая). Примером ограниченных последовательностей являются вторая и третья.

Теорема 1.1 (необходимое условие сходимости). Если числовая последовательность *имеет предел*, то она *ограничена*.

Но ограниченная последовательность может и не быть сходящейся.

Теорема 1.2 (достаточные условия сходимости). Если числовая последовательность монотонная и ограниченная, то она сходится.

Примем теоремы без доказательства.

Ограниченность монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием сходимости (согласно теоремам 1.2 и 1.3).

Примером сходящейся последовательности является последовательность

$$a_n = \frac{n+1}{n}.$$

Эта последовательность монотонно убывающая.
$(n+1)$-й член последовательности равен

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}, \text{ и}$$

$$a_{n+1} < a_n \text{ для } \forall n \in N \text{ , так как}$$

$$a_{n+1} - a_a = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n^2+n} \text{ для } \forall n \in N .$$

Эта последовательность ограничена снизу, так как

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \geq 1 \text{ для } n \in N .$$

Так как $\frac{1}{n} = \alpha$ – бесконечно малая величина, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Число e. Примером сходящейся последовательности является и последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Она является монотонно возрастающей и ограниченной сверху (условие 2) (см. доказательство в [5]). Предел данной последовательности обозначается строчной латинской буквой «*e*»:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e .$$

Число *e* является иррациональным числом

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ldots .$$

и играет важную роль в математике, например, является основанием натуральных логарифмов.

1.3.3. Предел функции

Пределы на бесконечности. Определение предела функции можно ввести, опираясь на определение предела переменной величины, и в частности, числовой последовательности.

Бывают случаи, когда функция $f(x)$, определённая для всех *x*, стремится к вполне определённому числу, когда аргумент *x* безгранично увеличивается $(x \to +\infty)$.

Тогда пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} = f(+\infty)$.

Если же в указанных условиях $f(x)$ предела не имеет, тогда символ $f(+\infty)$ ничего не обозначает и его писать нельзя.

Аналогично символ $f(-\infty)$ обозначает предел (если он имеется) переменной величины $f(x)$, когда *x* убывает безгранично, и имеет место неравенство:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(-\infty).$$

Рассматривая случаи, когда аргумент x функции $y = f(x)$ стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или $|x| \to \infty$, определение предела функции можно сформулировать так.

О п р е д е л е н и е 1.7. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *на бесконечности* ($+\infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\bar{x}$, что при условии $\bar{x} < x < +\infty$ $\left(x \in \left(\bar{x}, +\infty\right)\right)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

Аналогично можно рассмотреть случаи, когда $x \to -\infty$ и $|x| \to \infty$.

Если при этом $f(x)$ монотонна и ограничена, то предел A существует.

Например,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} \left(1 - e^x\right) = 1.$$

Односторонние пределы. Как и для бесконечности (на концах числовой оси), такие пределы существуют и в каждой точке x_0: слева и справа; они соответственно обозначаются $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

Предел $f(x_0 - 0)$ получается так: предполагают, что аргумент x непрерывно приближается к значению x_0, никогда, однако, не делаясь ему равным.

Если в этих условиях величина $f(x)$ имеет предел, то его называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева, обозначают через $f(x_0 - 0)$ и пишут

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Если же в указанных условиях $f(x)$ не имеет предела, тогда символ $f(x_0 - 0)$ ничего не обозначает и его писать нельзя.

Предел $f(x_0 + 0)$ получается аналогично:

$$f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x).$$

Можно так же использовать другую форму записи:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+0).$$

Сравнивая рассматриваемую ситуацию с предыдущей (предел на бесконечности), можно заметить, что x_0 «занял место» бесконечностей. Пусть величина $\delta > 0$, тогда $(x_0-\delta,\, x_0)$ – левосторонняя окрестность точки x_0.

Опираясь на такое представление, можно сформулировать более строгое определение одностороннего предела.

О п р е д е л е н и е 1.8. Число A называется левым (правым) пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех значений аргумента $x \in (x_0-\delta,\, x_0)$ $\left(x \in (x_0,\; x_0+\delta)\right)$ соответственно выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Оба эти предела называются *односторонними*.

Предел функции в точке x_0. Функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 предел, имеет в этой точке как правый, так и левый пределы, и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.

Обозначение: $$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = A.$$

Учитывая эти обстоятельства, можно сформулировать определение предела функции в точке при любом способе приближения x к x_0.

О п р е д е л е н и е 1.9. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 1.2).

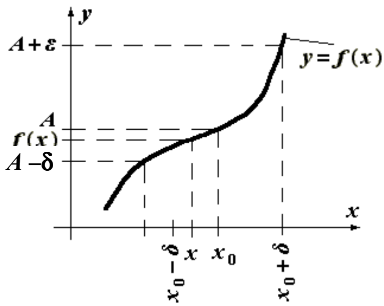

Рис. 1.2

Для функции как переменной величины справедливы определения бесконечно малой и бесконечно большой величин.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, т.е. для любого числа $M > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Свойства бесконечно малых функций. Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Сумма двух бесконечно малых в точке x_0 функций является бесконечно малой в точке x_0 функцией.

Свойство 2. Произведение бесконечно малой в точке x_0 функции $\alpha(x)$ на ограниченную в окрестности точки x_0 функцию $f(x)$ является бесконечно малой в точке x_0 функцией.

Следствие. Произведение двух бесконечно малых в точке x_0 функций является функцией бесконечно малой.

Свойство 3. Для того чтобы функция $f(x)$ была бесконечно большой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы функция $\dfrac{1}{f(x)}$ была бесконечно малой в этой точке. В условной форме это свойство выглядит так:

$$\left[\frac{1}{0}\right] = \infty, \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

Свойства 1 – 3 остаются справедливыми и при $x \to \infty$.

В простых примерах вычисление предела функции при заданном пределе её аргумента не вызывает особых затруднений. Вообще же говоря, эта задача трудная, и общего метода её решения не существует. В то же время существует ряд простых методов, правил, которые существенно упрощают процесс нахождения пределов – это основные теоремы о пределах. Ввиду их очевидности нет смысла останавливаться на их доказательствах.

Во избежание усложнений предполагается, что пределы всех функций, о которых говорится в этих теоремах, конечны. Независимая же переменная может иметь любой предел (даже бесконечный), лишь бы только при этом не были бесконечными пределы функций.

Арифметические операции над пределами. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, то функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $B\neq 0$) также имеют пределы в точке x_0, причём

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B;\ \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B;\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

Как на практике находить пределы? По определению – громоздко. Упрощает этот процесс знание арифметических операций над пределами и «простейших» пределов, играющих особо важную роль при изучении математического анализа. В этой таблице предполагается, что $a>0$, а параметр $c\neq 0$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}=\infty$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty} cx=\infty$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{c}=\infty$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x}=0$;

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty,\ a<1$; 6. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0,\ a<1$;

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0,\ a>1$; 8. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty,\ a>1$;

9. $\lim\limits_{x\to 0+}\log_a x=-\infty,\ a>1$; 10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=\infty,\ a>1$.

При нахождении пределов используются также результаты сравнения бесконечно малых величин.

Сравнение бесконечно малых функций. Учитывая, что сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются бесконечно малыми функциями, следует отметить, что деление одной бесконечно малой на другую может привести к различным результатам.

Рассмотрим правила сравнения бесконечно малых функций.

О п р е д е л е н и е 1.10. Пусть при $x\to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда: если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая *более высокого порядка*, чем $\beta(x)$: $\alpha(x)=o(\beta(x))$; если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые *одного* *порядка*; если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)\sim\beta(x)$ – *эквивалентные* бесконечно малые; если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая *n-го порядка* относительно $\beta(x)$.

Нахождению пределов способствует ещё одно важное свойство функций – свойство непрерывности.

1.4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие и определение непрерывной функции. Функция, являясь переменной величиной, также может обладать свойством непрерывности. Дополнительные сложности исследования этого свойства объясняются тем, что непрерывное изменение аргумента функции не гарантирует её непрерывность.

Простейший вид непрерывности функции представляет собой непрерывность функции в точке *a*. В смысловом выражении это понятие означает, что функция $f(x)$ непрерывна в данной точке a, если численное значение функции $f(x)$ «нечувствительно мало» отличается от $f(a)$, когда величина x аргумента «достаточно близка» к a.

Математически строгое определение звучит так.

Определение 1.11. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a*, если неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, где ε есть заранее взятое какое-нибудь положительное число, делается заведомо верным всякий раз, как соблюдено неравенство $|x-a|<\delta$, где δ есть положительное число, величина которого обусловлена ранее взятым числом ε.

Таким образом, непрерывность функции $f(x)$ в точке a математически выражается двумя неравенствами:

$$\left.\begin{array}{ll}|f(x)-f(a)|<\varepsilon & \mathrm{I}\\ |x-a|<\delta & \mathrm{II}\end{array}\right\},$$

из которых первое (I) должно оказаться следствием второго (II).

Функция $f(x)$, не имеющая непрерывности в точке *a*, называется *разрывной* в этой точке.

Непрерывные функции обладают очень важным свойством, которое часто принимают за определение непрерывной функции. Его можно изложить таким образом. Непрерывность функции $f(x)$ в точке a вполне равносильна стремлению численного значения $f(x)$ к пределу $f(a)$, когда аргумент x стремится к пределу a, т.е. справедлива система двух основных равенств

$$\left.\begin{array}{ll} \lim f(x) = f(a) & \text{I;} \\ \lim x = a & \text{II,} \end{array}\right\}$$

из которых первое обязано быть верным при стремлении переменной x к a.

Эта система записывается также в виде

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{III}.$$

Это свойство, которое иногда принимается за определение непрерывной функции, предопределяет важное следствие.

«Непрерывная функция позволяет переходить к пределу под её знаком, т.е. делает законным равенство»

$$\lim f(x) = f(\lim x),$$

т.е. для вычисления предела непрерывной функции достаточно вычислить эту функцию для самого предела аргумента.

Доказательство получается формальной заменой буквы a в равенстве I её значением из II.

Существует ещё одно определение непрерывности, которое имеет наиболее конструктивное правило испытания функции на непрерывность.

Перепишем систему двух основных равенств в виде

$$\lim\left[f(x) - f(a)\right] = 0;$$
$$\lim(x - a) = 0.$$

Если рассматривать разность $x - a$ как приращение Δx, то $f(x) - f(a)$ можно рассматривать как приращение функции Δf (или Δy), тогда система примет вид

$$\left.\begin{array}{l} \lim \Delta y = 0; \\ \lim \Delta x = 0 \end{array}\right\}$$

и читается таким образом: «непрерывность функции $f(x)$ в точке a равносильна утверждению, что приращение Δy становится величиной бесконечно малой, когда приращение Δx аргумента становится бесконечно малым

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 .$$

Свойства непрерывных функций, имеющих предел.

Свойство 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $C \cdot f(x)$ (C – постоянная), $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке x_0, а, кроме того, если $g(x) \neq 0$, то и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывна в точке x_0.

Свойство 2. Суперпозиция функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0, и функции $F(y)$, непрерывной в точке $y_0 = f(x_0)$, – сложная функция $F(f(x))$, непрерывная в точке x_0.

Все элементарные функции непрерывны при всех значениях аргумента, при которых они определены.

Рассмотренные ранее односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ необходимо рассматривать со значением функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ и таким образом можно выразить непрерывность функции в этой точке равенством

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) .$$

Это двойное неравенство выражает необходимое и достаточное условие непрерывности $f(x)$ в точке x_0.

Если справедливо только одно из равенств: $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ или $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то говорят об односторонней непрерывности $f(x)$.

Разрывы функций. Всякая точка разрыва может возникнуть по двум причинам.

1. Несуществование, по крайней мере, одного из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$.

2. При наличии обоих указанных пределов нарушение равенств $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

Если нарушается одно из равенств, то имеет место односторонняя непрерывность.

Наиболее интересен случай так называемого устранимого разрыва, когда $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но оба предела не равны $f(x_0)$, т.е. налицо ситуации «вынутой точки» из кривой, соответствующей графику непрерывной функции.

Если же возвратить точку на её место, изменив значение функции $f(x)$ в этой точке, то $f(x)$ станет непрерывной.

Все прочие виды разрывов невозможно превратить в непрерывность путём изменения численного значения функции $f(x)$ в одной только точке x_0. Поэтому они носят название неустранимых разрывов.

Кажущиеся разрывы. Неопределённости. Случается, что функция выражается формулой, которая утрачивает численный смысл при каком-нибудь значении аргумента, хотя сама функция представляет реальные законы для всех возможных значений независимой переменной.

Например, формула

$$f(x)=\frac{(x-3)^3}{x^2-6x+9}$$

разрушается при $x=3$, потому что и числитель, и знаменатель дроби при $x=3$ обращается в ноль и $f(x)$ невычислима.

Однако такое повреждение формулы для $f(x)$ при $x=3$ не означает однозначного повреждения самой функции $f(x)$ и появления неустранимого разрыва, так как можно дать такую численную величину функции $f(x)$ в точке $x=3$, что эта функция станет непрерывной и, таким образом, подозрение на разрыв становится просто кажущимся.

В данном случае разрыв можно устранить алгебраически:

$$f(x)=\frac{(x-3)^3}{(x-3)^2}=x-3 .$$

На практике, когда случается такое обстоятельство, для нахождения значения $f(x)$ в точке x_0 вычисляют (если это возможно) $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.

Если последние величины равны между собой, то считают, что повреждена не сама функция, а лишь дающая её формула, и тогда просто принимают $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$ и восстанавливают этим непрерывность $f(x)$. При этом $f(x_0)$ называют истинным значением функции в точке x_0.

Иногда это восстановление производится чисто алгебраически, именно так, что надлежащими элементарными преобразованиями данной для $f(x)$ формулы: сокращениями, приведением подобных членов и т.д., устраняется повреждение формулы для $x=x_0$ без изменения численных величин функции в других точках.

Но далеко не всегда столь простым чисто алгебраическим способом удаётся восстановить непрерывность функции и открыть её истинное значение в точке x_0, у которой разрушается формула.

Так, например, формула

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},$$

очевидно, разрушается при $x=0$ и устранить это разрушение чисто алгебраически нельзя.

Однако функция $f(x)$, заданная этой формулой, непрерывна при $x=0$, чему соответствует специальное доказательство, и истинное значение $f(x)$ при $x=0$ равно 1.

Находить истинную величину функции $f(x)$, вообще, дело очень трудное, потому что в самой точке x_0 формула утрачивает смысл и для нахождения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ прибегают обычно к дифференциальному исчислению, дающему самое главное средство к определению истинных величин функции, называемое «раскрытием неопределённости», так как функция $f(x)$ не определена в точке x_0.

Выделяют семь видов неопределённости:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Правила раскрытия этих неопределённостей изложены в учебниках [3, 5], на конкретных пределах далее по тексту.

Бесконечные разрывы, бесконечный промежуток. Асимптоты.

Полезно расширить класс рассматриваемых функций в двух направлениях. Во-первых, мы допустим теперь для функции $y=f(x)$ возможность обращаться в бесконечность для отдельных значений x. Это значит, если x_0 есть одно из таких значений, то при приближении x к x_0 (с любой стороны), $f(x)$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$. Во-вторых, возникает вопрос о поведении функции в бесконечном промежутке.

Рассмотрим случай бесконечного разрыва функции, например, при $x=x_0$. При приближении x к x_0, с одной стороны, функция стремится к бесконечности, с другой, её график будет безгранично приближаться к вертикальной прямой $x=x_0$ в верхней или нижней её части, смотря по знаку бесконечного предела. Эта прямая позволяет отчётливо представить себе вид графика за пределами чертежа. Примерами могут служить известные нам графики функций $y=\dfrac{a}{x}$ при $x=0$: при $x\to 0$ слева график функции уходит в $-\infty$, при $x\to 0$ справа – в $+\infty$; $y=\log_a x$: при $x\to 0$ слева график функции уходит в $-\infty$.

В случае бесконечного (в одну сторону или обе) промежутка подобную «услугу» иногда оказывает горизонтальная или наклонная прямая, к которой график приближается безгранично.

Например, график функции $y=\dfrac{a}{x}$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ приближается к прямой $y=0$; график функции $y=x+\dfrac{a}{x}$ при $x\to\pm\infty$ приближается к прямой $y=x$.

В связи с этим, дадим следующее определение.

Пусть имеем кривую, ветвь которой в том или ином направлении удаляется в бесконечность. Если расстояние δ от точки кривой до некоторой определённой прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то прямая называется асимптотой данной кривой.

Различают *вертикальные* и *наклонные* асимптоты. Если асимптота кривой перпендикулярна оси абсцисс, то она называется *вертикальной асимптотой*, в противном случае асимптота называется *наклонной асимптотой*. *Горизонтальная асимптота* (т.е. асимптота, параллельная оси абсцисс) является частным случаем наклонной асимптоты.

Прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, когда функция имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел в точке *a*, т.е.

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty .$$

Вертикальные асимптоты перпендикулярны оси абсцисс. Они могут находиться в точках разрыва второго рода или на границе области определения.

Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty(x\to-\infty)$, где

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(f(x)-kx\right).$$

1.5. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Пределы непрерывных функций. Непрерывность функции в точке x_0 означает, что обозначения функции *f* и предела $\lim\limits_{x\to x_0}$ можно поменять местами:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Пример 1.4. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2 - 2x + 5\right)$.

Решение. Многочлен $3x^2 - 2x + 5$ – элементарная функция, определённая, а, следовательно, непрерывная в точке $x = 2$. Поэтому

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2 - 2x + 5\right) = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 5 = 13.$$

Пределы в точках разрыва.

Пример 1.5. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 9}$.

Решение. В данном случае предел знаменателя при $x \to 3$ равен нулю, т.е. функция, $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 9}$ терпит разрыв в этой точке, а функция $\left(x^2 - 9\right)$ является бесконечно малой. Следовательно, для вычисления предела используем предел 1 из таблицы «простейших» пределов п. 1.3.3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{18}{0}\right] = \infty.$$

Раскрытие неопределённостей при нахождении пределов рациональных функций. Для более сложных рациональных функций следует учитывать, что предел рациональной функции $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в точке x_0 равен значению функции в точке x_0, если $Q_m(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = R(x_0).$$

Для нахождения предела таких функций можно применить следующие правила.

Правило 1. При вычислении предела рациональной функции в точке x_0 для раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ нужно числитель и знаменатель делить на $(x-x_0)$ до тех пор, пока неопределённость не исчезнет.

Пример 1.6. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-4x-5}$.

Решение. В данном случае предел и знаменателя, и числителя при $x\to -1$ равен нулю. В таких случаях говорят, что имеем неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x+1\neq 0$ ($x\to -1$, но $x\neq -1$):

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-4x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{3(x+1)(x-1/3)}{(x+1)(x-5)}=\lim_{x\to -1}\frac{3x-1}{x-5}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{3\cdot(-1)-1}{-1-5}=\frac{2}{3}.$$

Правило 2. Для раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ нужно числитель и знаменатель разделить на наибольшую степень переменной x и перейти тем самым к бесконечно малым функциям (этот приём применим и при нахождении пределов иррациональных функций).

Пример 1.7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Решение. Здесь мы имеем дело с неопределённостью вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для нахождения предела этой дроби в числителе и знаменателе вынесем за скобку наибольшую степень переменной x, т.е. x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x}}=\frac{1}{2}.$$

Функции $\frac{3}{x},\frac{1}{x},\frac{2}{x},\frac{5}{x}$ при $x\to\infty$ являются бесконечно малыми по свойству 3 бесконечно малых функций.

Замечание. При нахождении предела рациональной функции на бесконечности в случае неопределённости $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ существуют алгоритмические способы её раскрытия.

Правило 3. При нахождении $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ имеем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_0}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_0} = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases} \tag{1.2}$$

В примере 1.7 степени числителя и знаменателя одинаковые: $n = m = 2$, поэтому предел функции равен отношению коэффициентов при наибольших степенях: $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Пример 1.8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x + 1}$.

Решение. Здесь $n = 2 < m = 3$, поэтому предел равен нулю.

Правило 4. Для раскрытия неопределённости $[\infty - \infty]$ при $x \to x_0$, появляющейся при разности рациональных функций, необходимо привести рациональные дроби к общему знаменателю и тем самым перейти к неопределённости $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Пример 1.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1}\frac{1 + x + x^2 - 3}{1 - x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(1+x+x^2)} = -\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(1+x+x^2)} = -\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)} =$$

$$= -\frac{1+2}{(1+1+1)} = -1.$$

Неопределённость $[\infty - \infty]$ иногда можно также устранить умножением и делением на сопряжённое выражение.

Например, гипербола: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, $\Rightarrow$ $y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}$ имеет асимптоту $y=kx+b$,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{1-4/x^2}\right)=\pm\frac{3}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{1-4/x^2}\right)-\left(\pm\frac{3}{2}x\right)\right)=$$

$$=\pm\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\pm\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x}=\pm\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0.$$

$y=\pm\frac{3}{2}x$ – асимптота.

Замечательные пределы функций. При вычислении пределов трансцендентных функций, содержащих тригонометрические функции, часто используется предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{1.3}$$

называемый первым замечательным переделом (термин, использующийся в советских и российских учебниках по математическому анализу для обозначения некоторых широко известных математических тождеств со взятием предела). Примем без доказательства следствия первого замечательного предела:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

Пример 1.10. Вычислить предел $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\sin 3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}.$$

Предел, применяемый при вычислении пределов функций вида $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ на бесконечности существует и равен e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{1.4}$$

называется *вторым замечательным пределом* и раскрывает неопределённость $\left[1^\infty\right]$.

Примем без доказательства следствия первого замечательного предела:

1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$, где $a>0$, $a\neq 1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Пример 1.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}$.

Решение. Имеем неопределённость $\left[1^\infty\right]$. Преобразуем данное выражение, сделаем замену переменной и используем свойства пределов функций:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2+3}{x^2-2}\right]^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x^2-2)/3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(x^2-2)/3}\right)^{(x^2-2)/3}\right)^{\frac{2x\cdot 3}{x^2-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x^2-2}}=e^0=1.$$

Из первого и второго замечательного пределов и следствий к ним могут быть выведены следующие эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0$:

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x\sim e^x-1\sim\ln(1+x).$$

Применение эквивалентных бесконечно малых позволяет в ряде случаев упростить вычисление пределов.

1.6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.6.1. Определите общий член последовательности $1,\ -1,\ \frac{7}{9},\ -\frac{5}{8},\ \ldots$:

1) $a_n = \frac{3n-2}{n^2}$; 3) $a_n = (-1)^n \frac{3n-2}{n^2}$;

2) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n^2}$; 4) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{3n+2}{n^2}$.

1.6.2. Выберите множество, которому может принадлежать ε-окрестность числа (точки) $x = -4$:

1) $(-5;\ -4] \cup (-4;\ -3)$; 3) $(-6;\ -2)\backslash[-4;\ 0)$;

2) $(-5;\ -3) \cap (-4;\ -2)$; 4) $(-6;\ -2)\backslash[-3;\ -1)$.

1.6.3. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 + (n+3)^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n-3n^5}{4n^2+8}$; 5) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-3}{x+5}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

1.6.4. Предел $\lim\limits_{x\to -2-} 5^{\frac{4}{x+2}}$ равен

1) 1; 2) 5; 3) 0; 4) + ∞.

1.6.5. Укажите верные утверждения, если $x\to 1$:

1) $\sin x \sim x$; 2) $\sin(x-1) \sim x-1$; 3) $\sin(x+1) \sim x+1$; 4) $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$.

1.6.6. Известно, что $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = 10$. Какое из следующих утверждений верно?

1) $x = c$ – точка устранимого разрыва;

2) $x = c$ – точка разрыва первого рода;

3) $x = c$ – точка разрыва второго рода;

4) $x = c$ – точка непрерывности.

1.6.7. С помощью графического метода решения, укажите, на каком из данных отрезков уравнение $\lg x + x - 2 = 0$ имеет действительный корень:

1) $[1,\ 2]$; 2) $[2,\ 3]$; 3) -25; 4) действительных корней нет.

1.6.8. Найдите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\cos 5x}{\operatorname{tg} x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(9x-9)}{-8x^2+6x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\sin\dfrac{2}{3x}$.

1.6.9. С помощью второго замечательного предела и следствий из него найдите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^x$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-7x+5}{4x^2+5x}\right)^{2x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}\cdot\sin 4x}{\ln(1+\sin x)}$.

1.6.10. Найдите точки разрыва функции, установите их характер и постройте график функции в окрестности точек разрыва:

1) $y=10^{\frac{x}{x-1}}$; 2) $y=\dfrac{3x+1}{x^2-5x+6}$; 3) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

1.6.11. Найти асимптоты функции:

1) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$; 2) $2y(x+1)^2=x^3$; 3) $(y+x+1)^2=x^2+1$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

I. Учебные цели. В результате изучения материала лекции студенты должны *получить представление* об одном из основных понятий математического анализа – производной, о её геометрическом и физическом смыслах и возможностях использования этого понятия в различных областях математического анализа. *Знать* понятия производной и дифференциала; таблицу производных и правила дифференцирования различных функций; возможности применения производной к различным математическим вычислениям, в том числе к исследованию функции и построению графика.

II. Формирование компетенций. Формирование математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, развитие аналитического и логического мышления.

III. Введение в тему.

Основным понятием дифференциального исчисления является понятие производной, которое возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой или о вычислении скорости неравномерного движения. Дифференциальное исчисление лежит в основе построения модели многих технических и экономических процессов.

Глубокие знания этого раздела математики являются основополагающими в формировании умения грамотно анализировать и синтезировать какую-либо иерархическую систему, строить математическую модель её инновационного управления.

Для контроля качества усвоения изложенного материала необходимо сконцентрировать внимание на следующих вопросах:

1. Определение производной функции $f(x)$ в точке x_0.
2. Определение дифференциала функции в точке.
3. Геометрический и механический смыслы производной и дифференциала функции в точке.
4. Правила нахождения производной суммы, разности, произведения, частного двух функций.
5. Правило дифференцирования производной сложной, обратной функции и функции, заданной параметрически.
6. Таблица производных элементарных функций.
7. Производные высших порядков.
8. Многочлен Тейлора, формула Маклорена и их применение.
9. Применение производных к нахождению предела.
10. Определение асимптоты графика функции. Виды асимптот.
11. Применение производной к исследованию функции.

2.1. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В математическом естествознании и других приложениях анализа производная играет выдающуюся роль, потому что она даёт локальную характеристику изучаемого явления в наиболее важном отношении – количественно оценивает изменяемость одной из двух связанных между собой переменных величин при изменении другой.

Основная задача дифференциального исчисления состоит в планомерной оценке изменения величины y рассматриваемой функции $f(x)$ при изменении аргумента x и достигается сравнительной оценкой приращений функции и аргумента: Δy и Δx.

Как было отмечено ранее, если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x и если Δx стремится к нулю, то и Δy стремится к нулю, т.е. оба приращения Δy и Δx одновременно величины бесконечно малые.

О п р е д е л е н и е 2.1. Производная данной функции есть предел отношения приращения этой функции Δy к приращению независимой переменной, когда она приближается к нулю как своему пределу.

Когда предел этого отношения существует и есть конечное число, тогда говорят, что данная функция дифференцируема, или что она имеет производную.

Обозначают

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Символ $\frac{dy}{dx}$ не рассматривается как неизменная дробь, а рассматривается лишь как предел некоторой переменной истинной дроби. Все части символа $\frac{dy}{dx}$ являются крепко связанными между собой одним общим смыслом и неотделимы друг от друга (вроде того, как неотделимы буквы l и g друг от друга в символе логарифма $\lg N$).

Символ $\frac{d}{dx}$, рассматриваемый сам по себе, называется знаком дифференцирования и просто показывает, что функцию, за ним написанную $(y = f(x))$, нужно продифференцировать по x.

Отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ до своего перехода к пределу зависит от двух переменных величин: начального значения x аргумента и величины его приращения Δx. Но когда ищут предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то он (этот предел) перестаёт зависеть от Δx и сама производная $\frac{dy}{dx}$ оказывается выражением, содержащим только букву x, и значит, это будет некоторая функция аргумента x.

Пример 2.1. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение. $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Эта новая функция аргумента x, будучи выведена из данной функции $y = f(x)$, иначе говоря, произведённая данной функцией $f(x)$, и получила по этой причине имя производной функции от данной функции $y = f(x)$.

Изучаемый раздел получил название «дифференциальное исчисление», а не, например, «исчисление производных», потому что в основу было положено слово «difference – разность». Эти разности: приращение функции и приращение аргумента содержатся в формуле нахождения производной: $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Дифференцируемость, как и непрерывность, является локальным свойством функции.

Только непрерывные функции $y = f(x)$ могут обладать производными, т.е. непрерывность – необходимое условие дифференцируемости; разрывные функции заведомо не имеют никакой производной в точке разрыва.

В этом легко убедиться, доказав, что если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то Δy, как и Δx, бесконечно малая величина.

Обратное заключение не всегда верно: известны функции, которые, будучи непрерывными, тем не менее не имеют производной.

Общее правило дифференцирования следует из определения производной и состоит из следующих этапов:

1) в функцию $f(x)$ вместо x подставляют $x + \Delta x$, что даёт новое значение функции $f(x + \Delta x)$;

2) находят приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) находят частное $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) находят предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Механический смысл производной. Пусть некоторое тело перемещается прямолинейно со скоростью v, являющейся функцией времени t, т.е. v = v(t).

Производная функции $s = s(t)$, описывающая закон прямолинейного движения тела, в момент времени t_0

$$\mathrm{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

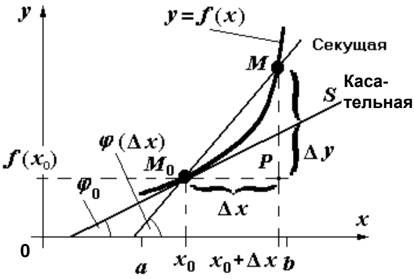

Рис. 2.1

определяет скорость в этот момент времени (мгновенную скорость). Если вместо функции $s = s(t)$ взять произвольную функцию $y = f(x)$, то производную $f'(x_0)$ можно рассматривать *как скорость изменения функции* в точке x_0.

Геометрический смысл производной. Пусть плоская кривая является графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (рис. 2.1). Требуется провести касательную к графику функции при $x = x_0$.

Касательной M_0S к линии в точке M_0 (рис. 2.1) называется прямая, проходящая через точку M_0 и занимающая предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M к точке M_0 по графику (или, что то же самое, при $\Delta x \to 0$).

Для проведения касательной, кроме точки M_0, необходим также угол наклона её к оси $0x$ (угол φ_0 на рис. 2.1). Найдём этот угол. Обозначим через $\varphi(\Delta x)$ угол, который образует секущая M_0M с осью $0x$ (этот угол зависит от Δx). Из геометрических соображений видно, что

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \frac{PM}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M переходит в касательную, то

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi(\Delta x),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким образом, значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно *угловому коэффициенту касательной*, проведённой к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Механический и геометрический смыслы производной наглядно обосновывают возможность определения скорости изменения одной переменной величины – функции, в зависимости от изменения другой величины – независимой переменной.

Общее правило дифференцирования есть правило основное, однако процесс применения этого правила к конкретным случаям – вещь достаточно трудоёмкая; вследствие этого, чтобы облегчить труд, из общего правила был выведен ряд специальных правил для быстрого дифференцирования выражений стандартного вида, часто встречающихся на практике.

Совокупность этих формул образует канон дифференциального исчисления, так как является столь исчерпывающе полным, что позволяет уже продифференцировать любую произвольно написанную функцию.

Иначе говоря, после того, как канон дан, дифференцирование функций уже не нуждается ни в каком переходе к пределу и поэтому не требует при отыскании производной проявления какой-либо изобретательности, а только простого внимания. Этот канон делает процесс дифференцирования механическим процессом. Наука им обязана К. Ф. Лейбницу.

Каждый обучающийся должен не только удержать каждую формулу дифференцирования в памяти, но и уметь существующее правило выразить словами. В приведённых ниже формулах u, v и w означают функции от x; все эти функции предполагаются дифференцируемыми.

Формулы для дифференцирования

1. Дифференцирование постоянного: $\frac{dc}{dx} = 0$;
2. Дифференцирование алгебраической суммы:

$$\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx} ;$$

3. Дифференцирование произведения постоянного на функцию

$$\frac{d}{dx}(c \cdot v) = c \cdot \frac{dv}{dx} ;$$

4. Дифференцирование произведения двух функций

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} ;$$

5. Дифференцирование частного

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} ;$$

6. Дифференцирование функции от функции

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

где y есть функция от u.

7. Дифференцирование обратных функций

$$\frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy},$$

где y есть функция от x.

8. *Дифференцирование функции, заданной параметрическим способом.* Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $x=\varphi(t)$ и $x=\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t=t_0$, причём $\varphi'(t_0)\neq 0$, тогда функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$ и справедливо равенство

$$y'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

9. *Логарифмическое дифференцирование.* Для вычисления производных функций, представляющих произведение большого числа сомножителей, а также функций вида $y=f(x)^{g(x)}$ применяется специальный приём, называемый *логарифмическим дифференцированием.* Используя свойства логарифма, прологарифмируем функцию $y=f(x)^{g(x)}$:

$$\ln y=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\cdot\ln f(x).$$

Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что переменная y является функцией аргумента x, т.е. $\ln y(x)$ является сложной функцией. Тогда

$$\frac{1}{y}\cdot y'=g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x).$$

Выразим из этого равенства y' и окончательно получим

$$y'=f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

С помощью определения производной функции $f(x)$ в точке x_0 и правил дифференцирования можно получить производные всех элементарных функций, которые представлены в следующей таблице.

Таблица производных

1) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$;

2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$;

4) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;

5) $(a^x)' = a^x \ln a$;

6) $\left(e^x\right)' = e^x$;

7) $\left(\sin x\right)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

11) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Используя общее правило дифференцирования и формулы дифференцирования можно найти производные всех основных элементарных функций и составить таблицу производных (которую можно найти в любом учебнике по дифференциальному исчислению).

Процесс (правило) нахождения производных напоминает решение аналогичной задачи нахождения пределов: во-первых, существует возможность применения определения при нахождении производной заданной функции; во-вторых, учитывая зачастую сложность применения определения, можно применять правила нахождения производных и таблицу производных основных элементарных функций.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием функции*.

Рассмотрим связь между понятием производной и дифференцируемостью функции в точке.

Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = A,$$

то, как показано ранее,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = A + \alpha, \ \lim \alpha = 0$$

или $$\Delta y = A \cdot \Delta x \alpha \cdot \Delta x \ .$$

Поэтому определение дифференцируемой функции можно сформулировать так.

О п р е д е л е н и е 2.2. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если её приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \,, \tag{2.1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция (при $\Delta x \to 0$), A – некоторое число, не зависящее от Δx .

Таким образом, дифференцирование функции означает действие разделения её приращения на две части – линейную относительно приращения аргумента $A\Delta x$ и бесконечно малую более высокого порядка, чем линейная часть.

Нетрудно показать, что $A = f'(x_0)$, где x_0 – точка из равенства $\Delta x = x - x_0$.

Дифференциал. Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, тогда переменную величину $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, стремящуюся к пределу $f'(x)$, можно представить в виде суммы предела и бесконечно малой величины:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \,,$$

откуда $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

В общем случае производная $f'(x)$ не равна нулю и является ограниченной величиной. В этом случае произведение двух бесконечно малых $\alpha \cdot \Delta x$ является бесконечно малым более высокого порядка, чем первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$, которое, таким образом, будет главной, более значимой частью приращения Δy . Одновременно, в силу своей структуры, первое слагаемое линейно относительно Δx. В теории дифференциального исчисления произведение $f'(x) \cdot \Delta x$ называют *дифференциалом* функции $f(x)$ и обозначают $df(x)$.

Итак, главная, линейная относительно Δx часть приращения Δy (2.1) есть *дифференциал* функции $f(x)$, равный произведению производной $f'(x)$ от этой функции на произвольное число Δx , рассматриваемое как приращение независимой переменной *x*.

Если теперь положить $f(x)=x$, то $f'(x)=1$, а $d(f(x))= = dx = 1\cdot\Delta x$, то можно записать, что $dy = f'(x)\cdot dx$.

В случае, когда $f(x)$ – линейная функция от x: $f(x)=ax+b$, то $\Delta y = a(x+\Delta x)+b-(ax+b)=a\cdot\Delta x$. Таким образом, $\Delta y = a\cdot dx = dy$ и можно сказать, что дифференциал линеаризует приращение функции.

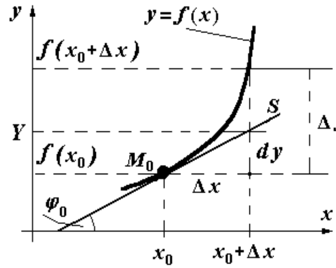

Рис. 2.2

Геометрический смысл дифференциала. Из уравнения касательной имеем

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x .$$

Выражение в правой части равенства является дифференциалом функции $y = f(x)$, поэтому $Y - f(x_0) = dy$. Следовательно, *дифференциал равен приращению* $Y - f(x_0)$ *ординаты касательной*, проведённой к графику функции в точке с абсциссой x_0 (рис. 2.2).

В прикладных науках при малых значениях Δx часто не делают различия между приращением Δy и дифференциалом dy функции $y = f(x)$ (формально дифференциал не является приращением). Поэтому, естественно возникают вопросы, встающие по поводу замены:

1) в какой мере эта замена обоснована?

2) какую пользу может она принести?

Для дифференцируемой функции

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\cdot\Delta x = dy + \alpha\cdot\Delta x.$$

Если $f'(x_0)\neq 0$, то $\dfrac{\Delta y}{dy} = 1 + \dfrac{\alpha}{f'(x_0)} \to 1$, так как α – бесконечно малая величина.

Следовательно, Δy и dy эквивалентные бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и разность между ними при $\Delta x \to 0$ есть бесконечно малая высшего порядка ($\alpha\cdot\Delta x$) по сравнению с каждой из этих величин в отдельности и, заменяя приращение дифференциалом (или обратно), мы допускаем лишь бесконечно малую относительную погрешность.

Отвечая на второй вопрос, можно заметить, что строение дифференциала теоретически проще и практически удобнее, чем строение приращения; дифференциал dy есть линейная функция величины Δx и изучение его не требует ничего, кроме вычисления $f'(x_0)$ в одной точке.

Пример 2.1. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x^2+1}$.

Решение. Последовательно применяя теорему 2.5 и таблицу производных, получим

$$y' = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1} \cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}\right)' = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2+x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)' = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1} \cdot 2x}{\left(2+x^2\right) \cdot \sqrt{x^2+1}}.$$

Производные и дифференциалы высших порядков. Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию аргумента x. Если она дифференцируема, то её производная $(f'(x))'$ называется *производной второго порядка* или *второй производной* функции $y = f(x)$ и обозначается y'', $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$. В свою очередь производная n-го порядка является производной от производной (n – 1)-го порядка, т.е. $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Например, механический смысл второй производной: если функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то первая производная есть мгновенная скорость точки в момент времени x, а вторая производная равна скорости изменения скорости, т.е. ускорению движущейся точки в этот момент.

Пример 2.2. Найти формулу n-й производной функций $y = \sin x$.

Решение. $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, и т.д.

$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, имеем формулу $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке x промежутка (a,b). Для n-го дифференциала функции справедлива формула

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n,\ n = 1, 2, \dots\ .$$

2.2. ПРИЛОЖЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИЗУЧЕНИЮ ФУНКЦИЙ

В учебниках [3, 5] изложение вопросов, связанных с приложениями дифференциального исчисления, осуществляется в два этапа: сначала формулируются основные теоремы дифференциального исчисления, а затем показывается их использование для исследования функций. Здесь же основные теоремы упоминаются по ходу исследования функций.

Одной из основных задач математического анализа является исследование свойств функций. К их числу относятся:

1) область определения;
2) множество значений;
3) точки разрыва, поведение функции на бесконечности;
4) чётность;
5) периодичность;
6) интервалы монотонности, точки экстремума;
7) интервалы выпуклости графика функции, точки его перегиба.

Наличие такой информации о свойствах функции позволяет выполнить её наглядное представление – график.

Если 1, 2, 4 и 5-е свойства можно определить без использования методов дифференциального исчисления, то «расшифровать» остальные – практически невозможно. Хотя ещё в школьном курсе математики учащиеся определяли, что, например, функция $y = (x-2)^2$ достигает при $x = 2$ своего минимального значения, а $y = 1 - x^2$ при $x = 0$ – своего максимального.

Третье свойство исследуется с использованием теории пределов и рассмотрено в разделе 1.4.

Рассмотрим применение идей дифференциального исчисления для исследования шестого свойства «интервалы монотонности, точки экстремума».

Напомним, что функции убывающие, невозрастающие, возрастающие и неубывающие объединяются в класс монотонных переменных величин. Точки (на оси Ox), отделяющие промежутки возрастания функции от промежутков убывания (и наоборот), называются точками экстремума: в первом случае – максимума, во втором – минимума.

Чтобы выявить предполагаемые точки экстремума, можно воспользоваться одной из основных теорем дифференциального исчисления – теоремой Ферма.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X. Говорят, что она принимает в точке $x_0 \in X$ *наибольшее* (*наименьшее*) *значение*, если для всех точек x множества X выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$.

***Теорема* 2.1** (Ферма). Если функция $f(x)$, определённая на интервале (a,b), в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$ принимает наибольшее или наименьшее значение и дифференцируема в этой точке, то её производная в точке x_0 равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Условия теоремы являются необходимым условием существования точек экстремума у дифференцируемой функции, а именно: эти точки надо искать среди точек, в которых производная $f'(x)$ обращается в ноль (эти точки называются *стационарными*), используя при этом какие-то дополнительные сведения.

Логично заключить, что экстремум может быть и в точках, в которых функция не дифференцируема.

Примеры:

1) $y = x^2$; $y' = 2x \Rightarrow y' = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$ – минимум функции.

2) $y = x^3$; $y' = 3x^2 \Rightarrow y' = 0$ при $x = 0$, однако эта точка не является точкой экстремума.

3) $y = |x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, \quad x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1;\ \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, односторонние пределы не равны, функция в точке $x = 0$ не дифференцируема. Однако это точка минимума, где $y = 0$.

($|x|$ при $x \ne 0$ всюду больше нуля).

Какие же условия являются достаточными условиями существования экстремума функции?

Точки экстремума – точки изменения характера монотонности. Убедиться в монотонности функции можно на основе использования формулы Лагранжа.

***Теорема* 2.2** (теорема Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале (a,b), то в этом интервале существует такая точка c, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \quad (2.2)$$

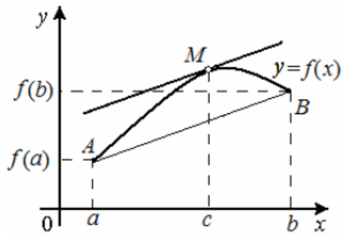

Рис. 2.3

Это равенство называется *формулой Лагранжа*.

Условие теоремы означает, что если x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) два произвольных значения переменной x из отрезка $[a,b]$, то знак производной $f'(c)$ при всех $c \in (a, b)$ однозначно характеризует поведение функции $f(x)$ (рис. 2.3).

Действительно:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1), \; x_2 > x_1.$$

Если $f'(c)=0$, то $f(x_2)=f(x_1)$ и $f(x)$ является постоянной на (a,b).

Если $f'(c)>0$, то $f(x_2)>f(x_1)$ и $f(x)$ является возрастающей на (a,b) функцией.

Если $f'(c)<0$, то $f(x_2)<f(x_1)$ и $f(x)$ является убывающей на (a,b) функцией.

Таким образом, постоянство знака производной гарантирует монотонность функции, а смена знака производной при переходе через стационарную точку, является достаточным условием экстремума функции в этой точке. Причём смена знака производной с «+» на «–» происходит в точке максимума, а смена знака с «–» на «+» происходит в точке минимума.

Например, если $y=x^2$, то $y'=2x$. $y'=0$ при $x=0$, $y'<0$ при $x<0$, $y'>0$ при $x>0$. Происходит смена знака производной $y'=2x$ при переходе через стационарную точку $x=0$ с «–» на «+». Следовательно, точка $x=0$ – точка минимума для $y=x^2$.

Выпуклые (*и вогнутые*) *функции*. После класса монотонных функций, возрастающих или убывающих, выделяется класс так называемых выпуклых или вогнутых функций. В некоторых учебниках они различаются как выпуклые вверх и выпуклые вниз. Определение выпуклых функций можно дать как из аналитических, так и из графических соображений.

Аналитическое представление в своём наиболее простом виде (для непрерывных функций) гласит так:

функция $f(x)$, определённая и непрерывная на множестве X (замкнутом или нет, конечном или бесконечном), называется *выпуклой вверх*, если для любых точек x_1 и x_2 из X выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

т.е. среднее арифметическое значений функции в точках x_1 и x_2 не превосходит значений этой функции в точке, являющейся среднеарифметическим значением величин x_1 и x_2.

В случае функции выпуклой вниз знак неравенства меняется на противоположный.

Графическое представление можно сформулировать так: функция $f(x)$, определённая и непрерывная на множестве *X*, называется *выпуклой вверх*, если её график целиком находится под касательной, проведённой в его любой точке (касательная не пересекает график). На рисунке 2.4 касательная проведена в точке $x = c$. Для функции выпуклой вниз график функции расположен над касательной.

Аналогично тому, что точки экстремума функции разделяют промежутки её убывания и возрастания (и наоборот), существуют точки на графике функции, разделяющие промежутки её выпуклости и вогнутости. Эти точки называются точками перегиба.

Какие же условия выпуклости, вогнутости и точек перегиба для функции $y = f(x)$.

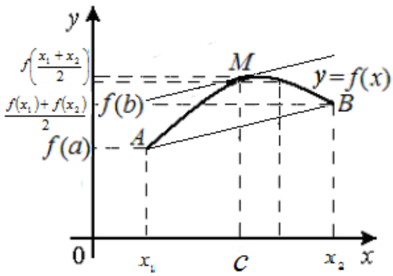

Рис. 2.4

Рассмотрим три функции:

$$y_1 = \frac{x^2}{2},\ y_2 = 2 + \frac{1}{4}(x-2)^3 \text{ и}$$

$$y_3 = x + \frac{1}{4}\sin \pi x.$$

Эти функции определены и непрерывны на отрезке $[0,2]$. Более того, на этом отрезке они принимают только положительные значения и равные значения на концах отрезка: 0 и 2.

Их производные

$$y_1' = x\,,\quad y_2' = \frac{3}{4}(x-1)^2 \quad \text{и} \quad y_3' = 1 + \frac{\pi}{4}\cos\pi x$$

неотрицательны, т.е. все три функции являются, в широком смысле слова, возрастающими. Однако графики функций заметно отличаются:

$y_1 = \dfrac{x^2}{2}$ – выпукла вниз,

$y_2 = 2 + \dfrac{1}{4}(x-2)^3$ – выпукла вверх,

$y_3 = x + \dfrac{1}{4}\sin\pi x$ при $x \in (0,\,1)$ выпукла вверх, а при $x \in (1,2)$ – выпукла вниз функция.

Следовательно, знание первой производной недостаточно для исследования функции на выпуклость.

В то же время вторые производные:

$y_1'' = 1$, $y_2'' = \dfrac{3}{2}(x-2)$, $y_3'' = -\dfrac{\pi^2}{4}\sin\pi x$ характерны тем, что $y_1'' > 0$, $y_2'' < 0$, $y'' < 0$ при $x \in (0,\,1)$ и $y_3'' > 0$ при $x \in (1,2)$, т.е. существенно различны и тоже могут каким-то образом характеризовать новые свойства функций.

Формула Тейлора, с выводом которой можно познакомиться, например, в учебнике [5], являясь обобщением формулы Лагранжа, связывает многократно дифференцируемую функцию $f(x)$ с её n первыми производными

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{n-1!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\ \xi \in (x_0,\,x).$$

Здесь последний член формулы $\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$, $\xi \in (x_0, x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора в формуле Лагранжа и часто обозначается символом R_n. Остальная правая часть формулы Тейлора называется многочленом его имени и позволяет успешно решать другие важные вопросы исследования свойств функции $f(x)$.

Например, при $n=2$ формула Тейлора имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Используя это представление для $f(x)$, можно провести следующие доказательства.

1°. Если x_0 – точка, подозрительная на экстремум, то $f'(x_0)=0$. Следовательно $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$.

Так как $(x-x_0)^2>0$, знак $f''(\xi)$ определяет знак разности $f(x)-f(x_0)$, а именно:

– если $f''(\xi)>0$, то $f(x)>f(x_0)$ и при $x=x_0$ имеет место минимум $f(x)$,

– если $f''(\xi)<0$, то $f(x)<f(x_0)$ и при $x=x_0$ имеет место минимум $f(x)$.

2°. Запишем уравнение касательной, проведённой к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, в виде

$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, где Y, в отличие от y, обозначает ординату точек касательной.

Найдём разность

$$y-Y=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)=$$

$$=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Так как, опять же, $(x-x_0)^2>0$, знак разности $y-Y$ определяется знаком $f''(\xi)$, а именно:

– если $f''(\xi)>0$, то $y>Y$, т.е. точки графика функции $y=f(x)$ расположены над касательной и функция $f(x)$ выпуклая вниз (вогнутая);

– если $f''(\xi)<0$, то $y<Y$, т.е. точки графика функции $y=f(x)$ расположены под касательной и функция $f(x)$ выпуклая.

Очевидно, что в точках перегиба (пусть, например, $x=c$) $f''(c)=0$. Это необходимое условие существования точки перегиба.

Следовательно, абсциссы точек перегиба находятся среди точек, в которых производная данной или равна нулю, или не существует.

Возвращаясь к примерам, заключаем, что так как $y_1''=1>0$, то $y=\dfrac{x^2}{2}$ на $(0,\ 2)$ – вогнутая; $y_2''=\dfrac{3}{2}(x-2)<0$, то $y_2=2+\dfrac{1}{4}(x-2)^3$ на $(0,\ 2)$ – выпуклая; $y_3''=-\dfrac{\pi^2}{4}\sin\pi x$ отрицательна на $(0,1)$ и положительна на $(1,\ 2)$, то $y_3''=-\dfrac{\pi^2}{4}\sin\pi x$ выпуклая на $(0,1)$, вогнутая на $(1,\ 2)$, а точка $x=1$ является точкой перегиба (здесь действительно $y_3''(x)=0$).

Схема исследования функции и построение графика. Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Рассмотрим примерную схему, по которой целесообразно исследовать поведение функции и строить её график.

1. Найти область определения функции.
2. Определить, является ли функция чётной и нечётной. В случае положительного ответа, продолжить исследование только на полуоси.
3. Определить, является ли функция периодической. В случае положительного ответа, продолжить исследование только на одном периоде.
4. Найти точки разрыва функции и определить поведение графика в окрестности этих точек.
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
6. Найти асимптоты.
7. Исследовать с помощью первой производной на экстремумы и интервалы монотонности.
8. Исследовать с помощью второй производной на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.
9. Выбрать точки для уточнения поведения функции и вычислить в них значения функции.
10. Построить график, учитывая исследование, проведённое в пунктах 1 – 9.

На оси $0x$ следует выделить характерные точки: точки разрыва, $x=0$, нули функции, точки экстремума, точки перегиба. В этих точках вычислить значения функции (если они существуют) и на плоскости $0xy$ отметить соответствующие точки графика, а также точки, выбранные для уточнения. Линия, проведённая через все построенные точки с учётом интервалов монотонности, направлений выпуклости и асимптот, даст эскиз графика функции.

Пример 2.3. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ и построить её график.

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме $x=1$, при котором обращается в нуль знаменатель.

2. Функция не является ни чётной, ни нечётной (есть как чётные степени, так и нечётные, переменной x).

3. Функция не является периодической.

4. Точка $x=1$ является точкой разрыва функции. Определим характер разрыва и исследуем поведение функции в её окрестности

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty\ .$$

Точка $x=1$ является точкой разрыва второго рода.

5. Так как уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных корней, то график функции не пересекает ось Ox. При $x=0$ имеем $y=-1$, график пересекает ось Oy в точке $(0;-1)$.

6. Выясним вопрос о существовании асимптот. Из пункта 4 получаем: прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Найдём наклонные асимптоты. Вычислим пределы

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x-1}\right)=1.$$

Аналогично, при $x\to-\infty$. Итак, график функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$. Построим асимптоты на чертеже.

7. Исследование с помощью первой производной.

7.1. Первая производная заданной функции равна

$$y'=1+\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=1-\frac{2}{(x-1)^2}\ .$$

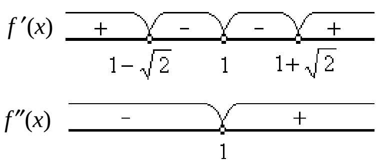

Рис. 2.5

Критические точки первого рода: $y'=0$, $(x-1)^2=2$, получаем две точки: $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$.

7.2. Отмечаем на области определения функции критические точки (рис. 2.5).

7.3. Определяем знак производной на каждом из интервалов. Получаем, что функция на интервале $\left(-\infty;\, 1-\sqrt{2}\right)$ возрастает, на интервале $\left(1-\sqrt{2};\, 1+\sqrt{2}\right)$ убывает, а на $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ снова возрастает. Точка максимума $x=1-\sqrt{2}$, точка минимума $x=1+\sqrt{2}$.

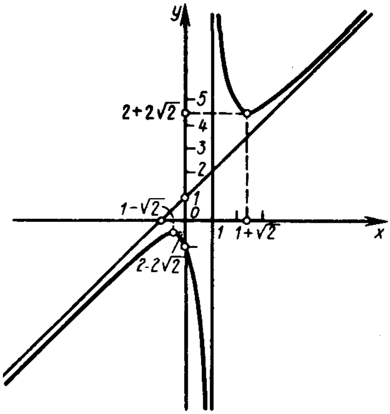

Рис. 2.6

7.4. Экстремальные значения функции:

$$y\left(1-\sqrt{2}\right)=2-2\sqrt{2}\,; \quad y\left(1+\sqrt{2}\right)=2+2\sqrt{2}\,.$$

8. Исследование с помощью второй производной.

8.1. Вторая производная равна: $y''=\dfrac{4}{(x-1)^3}$.

Критических точек второго рода нет.

8.2. Исследуем знак второй производной на интервалах области определения функции (см. рис. 2.5).

9. Дополнительные точки: $y(-1)=-1,\ y(2)=5,\ y(3)=5$.

10. Используя полученные данные, строим эскиз графика (рис. 2.6).

2.3. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

2.3.1. Теорема Коши, следствие. Правило Лопиталя

Теорема 2.3 (Ролля). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале (a,b) и на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$, тогда найдётся точка $c\in(a,b)$ такая, что значение производной в этой точке $f'(c)=0$.

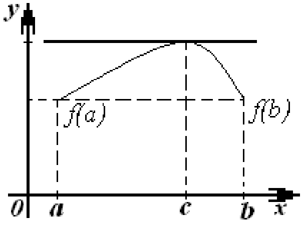

Рис. 2.5

Все условия теоремы Ролля существенны.

Обобщением теоремы Лагранжа, является теорема Коши.

Теорема 2.4 (Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $g(x) \neq 0$ во всех точках интервала (a,b), тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2.2}$$

Следствие теоремы Коши. Если:

1. $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ так же, как их первые $n-1$ производные;
2. $f^{(n)}(x)$ и $g^{(n)}(x)$ определены на (a, b);
3. $f(x)$ и $g(x)$ так же, как их первые $n-1$ производные равны нулю в точке $x = a$;
4. $g^{(n)}(x)$ не равна нулю ни при одном $x \in (a, b)$, то

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}, \ a < \xi < b. \tag{2.3}$$

Правило, вытекаемое из равенства (2.4), называется правилом Лопиталя. Не совсем строго оно словесно выражается так:

имея дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(a) = g(a) = 0$, и таким образом, при $x \to a$ имеет место неопределённость $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, надо продифференцировать отдельно числитель, отдельно знаменатель и составить новую дробь $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Её величина $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ и является пределом $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Если окажется, что новая дробь нисколько ни лучше старой по той причине, что опять $f'(a) = g'(a) = 0$, тогда надо повторить применение правила Лопиталя и составить дробь $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$, величина которой $\dfrac{f''(a)}{g''(a)}$ является пределом обеих предшествующих дробей, когда $x \to a$.

Если опять окажется, что $f''(a) = g''(a) = 0$, то надо рассмотреть дробь $\dfrac{f'''(x)}{g'''(x)}$ и т.д.

В результате надо стремиться к такой дроби $\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, у которой числитель и знаменатель непрерывны в точке $x = a$, но не равны нулю одновременно.

В таком случае правило Лопиталя окажется достаточным для раскрытия неопределённости $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Правило Лопиталя – есть правило практическое и его бывает достаточно во многих случаях.

Однако возможны случаи, когда уже при первом применении этого правила или числитель, или знаменатель дроби $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ теряют непрерывность в точке $x = a$. Тогда правило Лопиталя приходится оставить.

Пример 2.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Для раскрытия неопределённости $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ справедливо утверждение, аналогичное предыдущему, если в его формулировке заменить условие $f(x_0)=g(x_0)=0$ на условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Пример 2.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Неопределённости $[0\cdot\infty]$ и $[\infty-\infty]$ с помощью преобразований сводятся к неопределённостям вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, а затем раскрываются по правилу Лопиталя.

Пример 2.6. $\lim\limits_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{(x)^{-1}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{(\ln x)'}{\left((x)^{-1}\right)'}=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\Big/\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Неопределённости $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$ сводятся к неопределённости вида $[0\cdot\infty]$ предварительным логарифмированием исходных функций.

Пример 2.7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{1/\ln x}$.

Решение. Пусть $\lim\limits_{x\to +0}(\mathrm{ctg}x)^{1/\ln x} = [\infty^0] = A$. Тогда

$$\ln A = \ln \lim_{x\to +0}(\mathrm{ctg}x)^{1/\ln x} = \lim_{x\to +0}\ln(\mathrm{ctg}x)^{1/\ln x} = \lim_{x\to +0}\frac{1}{\ln x}\ln\mathrm{ctg}x = [0\cdot\infty] =$$

$$= \lim_{x\to +0}\frac{\ln\mathrm{ctg}\,x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +0}\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\Big/\frac{1}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to +0}\frac{x}{\cos x\cdot\sin x} = -\lim_{x\to +0}\frac{2x}{\sin 2x} = -1. \Rightarrow \ln A = -1, A = e^{-1}.$$

2.3.2. Формула Тейлора, представление функции. Нахождение пределов

Формула Тейлора находит применение не только при исследовании функции $f(x)$ на выпуклость, но и для специального представления функции и нахождения пределов.

Частный случай формулы Тейлора (2.10) при $x_0 = 0$ *называется формулой Маклорена*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{п!}x^n + R_n(x). \quad (2.4)$$

Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $\alpha \in R$;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

Такие представления функции упрощают процесс их исследования, в том числе и вычисления. Кроме того, формула Тейлора для функции $y = f(x)$, n раз дифференцируемой в точке x_0 и имеющей остаточный член

$$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right), \quad x \to x_0, \tag{2.5}$$

называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*. Выбирая соответствующий порядок формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, можно применять её для вычисления пределов функций.

Пример 2.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение. Для вычисления предела разложим функцию $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ по степеням *x*. По степени знаменателя можно заключить, что здесь определённую роль играют члены 3-го порядка относительно *x*. Запишем формулу Маклорена 3-го порядка для функции $f(x) = \sin x$: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right) - x\right)\Big/ x^3 =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)\right)\Big/ x^3 = -\frac{1}{3!} + \lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^4\right)}{x^3} = -\frac{1}{3!} + 0 = -\frac{1}{6}.$$

Если функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в точке x_0 и формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

с остаточным членом

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{2.6}$$

где точка ξ лежит между точками x и x_0, называется *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Если заменить функцию $f(x)$ её многочленом Тейлора

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

то абсолютная погрешность этого равенства будет

$$|R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

Формула Тейлора в данном виде является источником приближённых формул. На её основе составлены таблицы значений ряда элементарных функций. При вычислении значения функции $f(x)$ приближённо заменяют функцию многочленом Тейлора и численно оценивают сделанную при этом ошибку, т.е. остаточный член формулы Тейлора.

2.4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.4.1. Пользуясь определением производной, доказать, что:

1) $(x^2)' = 2x$;   2) $(\cos x^2)' = -2x\sin x^2$.

2.4.2. Найти производные y' функций:

1) $y = \sin(3x) - \dfrac{\cos x}{x^3}$; 2) $y = \ln x \arcsin x - x^5 \operatorname{ctg} x$;

3) $y = \operatorname{tg}(x \lg x)$; 4) $y = (\sin x)^{\cos x}$; 5) $x^2 + y^3 = \sin(xy)$.

2.4.3. Найти дифференциал dy функций:

1) $y = \arcsin(0{,}2x)$;   2) $y = xe^{-x}$;   3) $y = \ln(3 - x^4)$.

2.4.4. С помощью дифференциала первого порядка найти приближённые значения следующих величин:

1) $\sqrt[3]{1{,}03}$;   2) $\sin 27°$;   3) $\operatorname{arctg} 0{,}997$;   4) $\log_2 2{,}01$.

2.4.5. Выберите выражения, которым будет равен $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{arcctg} x^2}$,

если к нему применить правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1+x^2)}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x/\operatorname{tg} x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1+x^4)}{2x}$; 4) 0,5.

2.4.6. Найдите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7 - 3x^4 + 5x - 3}{2x^5 - 5x^4 - 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln(1+1/x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\ln x\ln(x-1)$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$; 8) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

2.4.7. Разложите многочлен $P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ по степеням двучлена $(x-1)$.

2.4.8. Напишите формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\dfrac{x}{x-1}$ в окрестности точки $x_0=2$.

2.4.9. Используя формулы Маклорена, напишите формулы Маклорена для функций:

1) $y=e^{-x^2/2}$; 2) $y=\sin^2 x$; 3) $y=\sin\dfrac{5x}{2}$.

2.4.10. Вычислите с точностью до 0,001 приближённые значения следующих чисел: 1) e; 2) ln(1,05); 3) $\sqrt[5]{33}$.

2.4.11. Используя разложение по формуле Маклорена, найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{5x^2-7x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3+x^4}$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

I. Учебные цели. В результате изучения материала лекции студенты должны *получить представление* о функции нескольких переменных и их особенностях по сравнению с функцией одной переменной: частных производных, дифференциалах, условиях экстремума. *Уметь* находить области определения функций двух переменных, их производные и дифференциалы при различных способах задания, решать задачи на экстремум, наибольшее и наименьшее значение.

II. Формирование компетенций. Формирование математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, развитие способности к обобщению, привитие настойчивости и самообладания.

III. Введение в тему.

Функции одной переменной не охватывают все зависимости переменных величин, существующие в природе. Например, температура T тела в данный момент времени t зависит от координат точки её измерения x, y и z, от времени t, т.е. её значения определяются значениями четырёх переменных x, y, z и t: $T(x, y, z, t)$. Поэтому, расширяя понятие функциональной зависимости, рассмотрим понятие функции нескольких переменных на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функции двух переменных.

Вопросы для контроля качества усвоения изложенного материала.

1. Функция двух независимых переменных. Область определения.
2. График функции двух независимых переменных.
3. Определение частной производной функции $z = f(x, y)$.
4. Полное приращение и полный дифференциал функции $z = f(x, y)$. Выражение полного дифференциала функции через её частные производные.
5. Частная производная третьего порядка функции $z = f(x, y)$.
6. Правило дифференцирования неявно заданной функции.
7. Определение точек экстремума функции $z = f(x, y)$, экстремальные значения функции.
8. Формула для производной по направлению.
9. Определение градиента скалярного поля. Основные свойства.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение функции двух переменных можно сформулировать аналогично тому, которое дано в п. 1.2 для функции одной переменной.

Переменная величина z называется функцией переменных величин x и y, если каждой паре допустимых значений (x, y) по определённому правилу ставится в соответствие единственное значение переменной z.

Более строго этот факт формулируется так.

О п р е д е л е н и е 3.1. Если каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторого множества $D \subset R^2$ соответствует определённое число $z \in R$, то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных.

Обозначения: $z = f(x, y)$, $f: D \to R$.

Так как упорядоченная пара чисел $(x, y) \in D \subset R^2$ является координатами точки M на плоскости, то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки M и писать $z = f(M)$. Множество D называют *областью определения* функции двух переменных. С геометрической точки зрения множество D – это совокупность точек на плоскости R^2.

При исследовании функции двух переменных используется понятие δ-окрестности точек, где она определена (см. п. 1.1).

Геометрически функция двух переменных изображается в виде поверхности, которая определяется уравнением $z = f(x, y)$, проекцией поверхности на плоскость $0xy$ является область определения. Эту поверхность и называют графиком функции. Например, функция $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ имеет областью определения круг $x^2 + y^2 \le 4$ (ограниченная замкнутая область), графиком функции является верхняя полусфера (рис. 3.1).

Предел функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на множестве D и точка $M_0(x_0, y_0)$ такая, что в любой её окрестности содержится по крайней мере одна точка из множества D.

О п р е д е л е н и е 3.2. Число A называется *пределом* функции $z = f(M)$ в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in D$, удовлетворяющих условию $M \in U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\}$, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам пределов функции одной переменной.

Пример 3.1. Найдите $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{l} 0 \le \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \le 1, \\ \text{т.е.ограничена} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} y \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Здесь имеем произведение бесконечно малой функции на ограниченную.

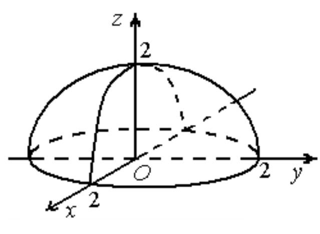

Рис. 3.1

Приращения функции $z = f(x, y)$. Изменения (приращения) функции $f(x, y)$ могут происходить как при изменении (приращении) переменной x на величину Δx, или переменной y на величину Δy или при одновременном изменении и x, и y. В зависимости от этого, различают частные и полное приращения функции $z = f(x, y)$.

Частные приращения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ это:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

а полное Δz:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Пусть, например, $z = x^2 + 2xy$.

Тогда

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)y - \left(x^2 + 2xy\right) =$$
$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta x = 2(x + y)\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\Delta_y z = x^2 + 2x(y + \Delta y) - \left(x^2 + 2xy\right) = 2x\Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) - \left(x^2 + 2xy + y^2\right) =$$
$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x\Delta y + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y =$$
$$= 2(x + y)\Delta x + 2x\Delta y + \Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y,$$

очевидно, что

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Функция называется *непрерывной* на множестве *D*, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Замкнутая ограниченная область, в которой определена функция двух переменных, является аналогом отрезка для функции одной переменной, поэтому свойства функции, непрерывной на отрезке, можно сформулировать и для функции двух переменных.

Свойство 1. Если функция $z = f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она ограничена в этой области, т.е. существует число k такое, что для всех точек области выполняется неравенство $|f(M)| \le k$.

Свойство 2. Если функция $z = f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она достигает в этой области своих точных граней.

Свойство 3. Если функция $z = f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями, т.е. если $A < C < B$, где A и B – какие-то значения функции в данной области, то в этой области существует точка M_0, в которой $f(M_0) = C$.

3.2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и её частное приращение по x

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

О п р е д е л е н и е 3.4. Если существует предел отношения частного приращения функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ к приращению аргумента x при стремлении Δx к нулю, то он называется частной производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x.

Обозначение: $f'_x(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Таким образом,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично вводится понятие частной производной по переменной y:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Из определения следует, что частная производная функции двух переменных по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y. Поэтому частные производные вычисляют по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной.

Пример 3.2. Найдём частные производные функции $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(xy^2)^2} \cdot y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(xy^2)^2} \cdot 2xy .$$

Так как при нахождении частных производных функции $z = f(x, y)$ она рассматривается как функция одной переменной, то для неё можно ввести понятие дифференциала как для функции одной переменной. Эти дифференциалы называются частными дифференциалами:

$$d_x z = f'_x(x, y)\,dx , \quad d_y z = f'_y(x, y)\,dy .$$

Понятия частных производных связаны с понятием дифференцируемости функции. Рассмотрим полное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) .$$

О п р е д е л е н и е 3.5. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если её полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y , \tag{3.1}$$

где A и B – постоянные, не зависящие от Δx и Δy ; $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Главная часть полного приращения функции, линейная относительно Δx и Δy , называется *полным дифференциалом функции*

$$dz = A\Delta x + B\Delta y .$$

Теорема 3.1 (необходимое условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она имеет в этой точке частные производные.

Доказательство. По определению дифференцируемой функции выполняется равенство (3.1). Положим $\Delta y = 0,\ \Delta x \neq 0$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x \ \Rightarrow\ \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1 .$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A, \text{ т.е. } f'_x(x, y) = A.$$

Аналогично доказывается, что в точке $M(x, y)$ существует частная производная $f'_y(x, y) = B$. Теорема доказана.

Следствие. Полный дифференциал функции равен сумме частных дифференциалов, т.е.

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = d_x z + d_y z.$$

Для независимых переменных *x* и *y* полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$.

Теорема 3.2 (достаточное условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $M(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке.

Примем теорему без доказательства.

Из определения полного дифференциала функции $z = f(x, y)$ следует, что при достаточно малых Δx и Δy имеет место приближённое равенство $\Delta z \approx dz$, которое можно переписать в следующем виде:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Эту формулу широко используют в приближённых вычислениях. Полный дифференциал можно использовать также для оценки абсолютной погрешности вычислений. Действительно, зная абсолютные погрешности аргументов *x* и *y*, заменяем приращение функции её дифференциалом и получаем оценку абсолютной погрешности функции *z*:

$$|\Delta z| \le |z'_x||\Delta x| + |z'_y||\Delta y|. \qquad (3.2)$$

Пример 3.3. С какой степенью точности следует знать величины электродвижущей силы и сопротивления цепи, чтобы определить величину тока в цепи с точностью до 0,2 А? Величина тока *i*, электродвижущая сила *E* и сопротивление *r* связаны соотношением $i = \frac{E}{r}$.

Решение. Найдём частные производные функции $i = i(r, E)$:

$$i'_r = -\frac{E}{r^2}, \quad i'_E = \frac{1}{r}.$$

Из неравенства (3.2) имеем

$$|\Delta i| \le |i_r|\Delta r + |i'_E|\Delta E, \text{ тогда } |\Delta i| \le \frac{E}{r^2}\Delta r + \frac{1}{r}\Delta E.$$

Для того чтобы $|\Delta i| < 0{,}2A$, достаточно $\frac{E}{r^2}\Delta r < 0{,}1$ и $\frac{1}{r}\Delta E < 0{,}1$, т.е. $\Delta r < \frac{0{,}1r^2}{E}$ и $\Delta E < 0{,}1r$.

3.3. ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

При решении многих задач, использующих дифференциальное исчисление, приходится дифференцировать сложные и неявно заданные функции двух переменных. Дифференцирование таких функций осуществляется по специальным формулам, которые являются обобщением правил дифференцирования функций одной переменной.

Пусть аргументы функции $z = f(x, y)$ являются функциями двух переменных: $x = x(u,v), y = y(u,v)$. Тогда функция $z = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ является *сложной функцией* независимых переменных u и v.

Теорема 3.3. Если функции $x = x(u,v), y = y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u,v), а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $\left(x(u,v), y(u,v)\right)$, то сложная функция $z = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ имеет частные производные в точке (u,v), которые вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3.3)$$

Примем теорему без доказательства.

Частный случай: $z = f(x, y)$, где $y = y(x)$, т.е. $z = f(x, y(x))$ – сложная функция одной независимой переменной x. Тогда из формул теоремы (3.3) получаем *формулу полной производной:*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Функция $z = z(x, y)$ называется *неявной*, если она задаётся уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (3.4)$$

неразрешённым относительно z. Уравнение (3.4) не всегда определяет неявную функцию $z(x, y)$, достаточные условия существования неявной функции даёт следующая теорема.

Теорема 3.4. Если функция $F(x,y,z)$ и её производные $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, причём $F(x_0, y_0, z_0)=0$, а $F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой уравнение (3.4) определяет единственную функцию $z = z(x, y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки (x_0, y_0), и такую, что $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Примем теорему без доказательства.

Найдём частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением (3.4). Для этого, подставив в уравнение вместо z функцию $z(x, y)$, получаем тождество $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$. Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z(x,y))=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z(x,y))=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}, \quad (F'_z\neq 0). \tag{3.5}$$

Неявная функция $y = y(x)$ одной переменной задаётся уравнением $F(x,y)=0$ и её производная находится по формуле

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}, \quad (F'_y\neq 0).$$

Пример 3.4. Найти частные производные функции z, заданной уравнением $\sin z + x^2 y + z + 2 = 0$.

Решение. Здесь $F=\sin z + x^2 y + z + 2$, $F'_x = 2xy$, $F'_y = x^2$, $F'_z = \cos z + 1$. По формулам (3.5) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy}{\cos z+1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{\cos z+1}.$$

3.4. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Последовательное дифференцирование. Частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от $(x,y)\in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y),$$

аналогично f''_{yx}, f''_{yy}. Также определяются частные производные более высокого порядка. Частная производная, взятая по различным переменным, например f''_{yx}, f''_{xy}, называется *смешанной частной производной*.

Пример 3.5. Найти частные производные второго порядка для функции $z=2xy^2+x^2-4y^3$.

Решение. Так как $z'_x=2y^2+2x$, $z'_y=4xy-12y^2$, то

$$z''_{xx}=2,\ z''_{xy}=4y,\ z''_{yx}=4y,\ z''_{yy}=4x-24y.$$

Оказалось, что $z''_{yx}=z''_{xy}$. Этот результат не случаен.

Теорема 3.5. Если частные производные высшего порядка функции $z=f(x,y)$ непрерывны, то смешанные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой: $z''_{yx}=z''_{xy}$.

Примем теорему без доказательства.

Применение производных высших порядков. Производные высших порядков применяются при исследовании функции двух переменных на экстремум. Понятие экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной переменной.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области D и точка (x_0,y_0) – внутренняя точка области D. Точка (x_0,y_0) называется *точкой максимума* функции $z = f(x,y)$, если существует такая окрестность $U_\delta(x_0, y_0)$ этой точки, что для всех (x,y) из проколотой окрестности $U_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ выполняется неравенство $f(x,y) < f(x_0, y_0)$.

Аналогично определяется *точка минимума* функции: что для всех (x,y) из проколотой окрестности $U_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ выполняется неравенство $f(x,y) > f(x_0, y_0)$.

Отметим, что в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения. В области D функция может иметь несколько экстремумов. На рисунке 3.2 (x_1, y_1) – точка максимума, а (x_2, y_2) – точка минимума. Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимальным (минимальным) значением*.

Рассмотрим условия существования экстремумов функции.

Теорема 3.6 (необходимое условие экстремума). Если в точке (x_0, y_0) дифференцируемая функция $z = f(x,y)$ имеет экстремум, то её частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем одну из переменных: например, $y = y_0$. Получим функцию $z = f(x, y_0)$ одной переменной *x*, которая имеет экстремум при $x = x_0$. Тогда по необходимому условию экстремума функции одной переменной, производная этой функции равна нулю, т.е. $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогично можно доказать, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Теорема доказана.

Точка (x_0, y_0), в которой обращаются в нуль обе частные производные функции $z = f(x,y)$, называется *стационарной точкой*. Функция может также иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Такие точки и стационарные точки называются *критическими*.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

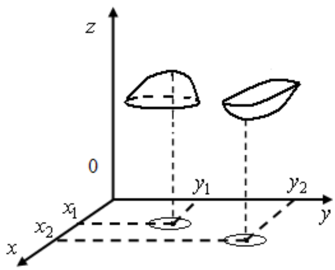

Рис. 3.2

Теорема 3.7 (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной (x_0, y_0) и в некоторой её окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим

$$\Delta(x_0 y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

тогда

1) если $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум: максимум, если $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$; минимум, если $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$;

2) если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) не имеет экстремума.

Примем теорему без доказательства.

Замечание. В случае $\Delta(x_0, y_0) = 0$ функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) может иметь экстремум, может не иметь его. Требуется дополнительное исследование.

Пример 3.6. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - xy$ на экстремум.

Решение. Здесь $z'_x = 3x^2 - y$, $z'_y = 3y^2 - x$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют. Найдём стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0, \\ 3y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27y^4 - y = 0, \\ x = 3y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(27y^3 - 1) = 0, \\ x = 3y^2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0,\ y = 0; \\ x = 1/3,\ \ y = 1/3. \end{array} \right.$$

Отсюда получаем стационарные точки: $(0;0)$, $(1/3;1/3)$.

Находим частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -1$, $z''_{yy} = 6y$. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{vmatrix}; \quad \Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0, \quad \Delta\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

В точке $(0;0)$ экстремума нет. В точке $(1/3;1/3)$ функция имеет минимум, так как $z''_{xx}(1/3;1/3) = 2 > 0$.

Производные высших порядков применяются также в дифференциальной геометрии при нахождении уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности.

3.5. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

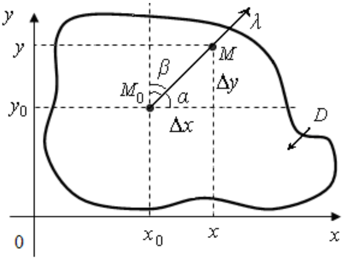

Рис. 3.3

Обобщением понятия частных производных является производная по направлению. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0, y_0)$ – внутренняя точка области D. Рассмотрим луч λ, выходящий из точки M_0 и направленный по вектору $\overline{M_0M}$ (рис. 3.6). Приращение функции по направлению λ обозначим $\Delta_\lambda z(M_0) = z(M) - z(M_0)$.

О п р е д е л е н и е 3.6. Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta_\lambda z(M_0)}{|M_0M|}$, когда точка M, двигаясь по лучу λ, приближается к M_0, то он называется *производной* функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 *по направлению* λ и обозначается $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial \lambda}$ или $f'_\lambda(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \lambda} = \lim_{M \to M_0} \frac{\Delta_\lambda z(M_0)}{M_0M}.$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в точке M_0 по направлению луча λ. Абсолютная величина производной равна величине скорости, а знак производной – характер изменения функции (возрастание или убывание).

Теорема 3.7. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в области D, то она имеет производную в любой внутренней точке $M_0(x_0, y_0)$ по любому направлению λ, причём

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\cos\beta, \tag{3.6}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы луча λ.

Доказательство. По определению дифференцируемой функции ее полное приращение (приращение по направлению λ) можно записать в виде

$$\Delta_\lambda z(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Поскольку $\Delta x = M_0 M \cos\alpha,\ \Delta y = M_0 M \cos\beta$ (рис. 3.6), отношение $\dfrac{\Delta_\lambda z(M_0)}{M_0 M}$ будет равно

$$\frac{\Delta_\lambda z(M_0)}{M_0 M} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta.$$

Переходя к пределу при $M \to M_0$, получаем формулу (3.6), что доказывает также существование производной по направлению. *Теорема доказана.*

Замечание 1. Если направление λ совпадает с положительным направлением оси $0x$, т.е. $\alpha = 0,\ \beta = \dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\partial z}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Замечание 2. Производная по направлению λ', противоположному направлению λ, равна производной по направлению λ, взятой с противоположным знаком: $\dfrac{\partial z}{\partial \lambda'} = -\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}$.

Укажем некоторые свойства градиента, часто облегчающие его нахождение:

а) $\operatorname{grad}(u_1 + u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2$;

б) $\operatorname{grad} C u_1 = C \operatorname{grad} u_1$, где C – постоянная;

в) $\operatorname{grad} u_1 u_2 = u_2 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{grad} u_2$;

г) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

Проверку этих свойств легко сделать, используя определение 3.5.

3.6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.6.1[2]**.** Для функции $z = x^3 + xy$ справедливы соотношения …

☐ $\dfrac{\partial z}{\partial y} + x = 1$; ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} - 3x^2 - y = 0$; ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial y} - x = 0$; ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

---

[2] В тестовых заданиях приняты обозначения: ◯ – выбирается один вариант ответа; ☐ – выбираются несколько вариантов ответа.

3.6.2. Направление наискорейшего возрастания функции $u = x^2 yz$ в точке $P(-1;\,1;\,0)$ совпадает с направлением вектора …

○ $\bar{k}$; ○ $\bar{i} + \bar{j}$; ○ $2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$; ○ $2\bar{i} - 2\bar{j}$.

3.6.3. Приближённое значение функции $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $P(2{,}95;\ 4{,}04)$, вычисленное с помощью дифференциала, равно …

○ 5,062; ○ 5,002; ○ 5,001; ○ 5,02.

3.6.4. Найдите области определения функций и изобразите их на плоскости:

1) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; 2) $z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)}$.

3.6.5. Найдите частные производные функций по каждой из независимых переменных:

1) $z = x^2 \operatorname{arctg}(xy)$; 2) $u = x^4 + \dfrac{y+z}{x}$;

3) $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$ в точке $P(1;2)$.

3.6.6. Найдите частные производные функции $z(x, y)$, заданной неявно

1) $z\ln(x+z) - \dfrac{xy}{z} = 0$; 2) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$ в точке $M_0(1, -2, 2)$.

3.6.7. Найдите точки экстремума функции $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1) Функция, область определения и множество значений функции.
2) Определение числовой последовательности, её предела.
3) Определение предела функции в точке и на бесконечности.
4) Свойства функций, имеющих передел.
5) Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
6) Первый и второй замечательные пределы, следствия из них.
7) Определение непрерывной в точке x_0 функции.
8) Что называется производной функции $f(x)$ в точке x_0?
9) Дифференциал функции в точке, его свойства.
10) Геометрический и физический смыслы производной и дифференциала функции в точке.
11) Правила нахождения производной суммы, разности, произведения, частного двух функций.
12) Правила дифференцирования производной сложной, обратной функции и функции, заданной параметрически.
13) Производные высших порядков.
14) Многочлен Тейлора, формула Маклорена и их применение.
15) Теорема Лопиталя, её применение.
16) Применение первой производной к исследованию функции.
17) Применение второй производной к исследованию функции
18) Функция двух независимых переменных, её область определения.
19) Частные производные функции $z = f(x, y)$. Полное приращение и полный дифференциал функции $z = f(x, y)$.
20) Правило дифференцирования неявно заданной функции.
21) Экстремум функции $z = f(x, y)$.
22) Производная по направлению.
23) Градиент, основные свойства градиента.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.6.1. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3n-2}{n^2}$. **1.6.2**. $(5{,}1;\ 5{,}5)$. **1.6.4**. 3. **1.6.5**. 2. **1.6.6.** 3. **1.6.7.** 1. **1.6.8. 1)** 3; **2)** 4; **3)** 0; **4)** $2/3$. **1.6.9. 1)** $e^{\frac{1}{3}}$; **2)** e^{-6}; **3)** e^{2}; **4)** 4. **1.6.10. 1)** $x=1$ – точка разрыва второго рода; **2)** $x=3$ – точка разрыва первого рода (скачок); **3)** $x=2$, $x=3$ – точки разрыва второго рода. **1.6.11. 1)** $y=0$; **2)** $x=-1$; $y=\dfrac{1}{2}x-1$; **3)** $y=-1$, $y=-2x-1$. **2.4.4**. **1)** 1,01; **2)** $0{,}5-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{120}\approx 0{,}45$; **3)** $\dfrac{\pi}{4}-0{,}0015\approx 0{,}7839$; **4)** $1+\dfrac{0{,}01}{2\ln 2}\approx 1{,}007$. **2.4.5**. 3. **2.4.6. 1)** 0; **2)** 2; **3)** 0; **4)** 2; **5)** 0; **6)** 0; **7)** 1; **8)** 0,5; **9)** *e*. **2.4.7.** $-6(x-1)^2+(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5$. **2.4.8.** $2-(x-2)+(x-2)^2-$ $-(x-2)^3+\dfrac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}$, где $0<\theta<1$. **2.4.9. 1)** $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2^2 2!}-\dfrac{x^6}{2^3 3!}+\ldots$ $\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2^n n!}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$. **2.4.10. 1)** 1,646; **2)** 0,049; **3)** 2,113. **2.4.11. 1)** 0,3; **2)** 0,5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Винберг, Э. Б.** Курс алгебры / Э. Б. Винберг. – Москва : МЦНМО, 2011. – 592 с.

2. **Сборник** задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин и др. – 7-е изд.– Москва : Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

3. **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. : Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 5-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2006. – 256 с.

4. **Ноздрин, И. Н.** Прикладные задачи по высшей математике / И. Н. Ноздрин, И. М. Степаненко, Л. К. Костюк. – Киев : Издательское объединение «Вища школа», 1976. – 176 с.

5. **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – Москва : Высшая школа, 1996. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……………………………………………………………... 3

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ……………….. 4

1.1. Переменная величина ……………………………………… 5

1.2. Функции ……………………………...……………………….. 8

1.3. Пределы ………………………………………………….….. 12

1.3.1. Пределы переменных величин ……………………... 12

1.3.2. Предел числовой последовательности ……………... 14

1.3.3. Предел функции ……………………………………….. 17

1.4. Непрерывные функции …………………………………….. 22

1.5. Практические примеры нахождения пределов ..………….. 28

1.6. Задания для самостоятельной работы …………………….. 33

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ………………………. 34

2.1. Производная и дифференциал функции одной переменной 35

2.2. Приложение понятия производной к изучению функций 45

2.3. Нахождение пределов с помощью производных …………. 53

2.3.1. Теорема Коши, следствие. Правило Лопиталя …….. 53

2.3.2. Формула Тейлора, представление функций. Нахождение пределов ……………………………………………… 56

2.4. Задания для самостоятельной работы …………………….. 58

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ………………………………….... 59

3.1. Основные понятия функции двух переменных …………... 60

3.2. Частные производные и дифференцируемость функции ... 63

3.3. Производные сложных и неявных функций. Последовательное дифференцирование………..…...……………………….. 66

3.4. Экстремум функции двух переменных …..……………….. 68

3.5. Производная по направлению. Градиент ……..…………... 71

3.6. Задания для самостоятельной работы ……….…………… 72

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ …………………………………………….. 74

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ……………………………………………………………. 75

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ..…………………………………………….. 76

Для заметок

Учебное издание

ПУЧКОВ Николай Петрович
ЖУКОВСКАЯ Татьяна Владимировна
МОЛОКАНОВА Елена Анатольевна и др.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОРАЗВИТИЯ БАКАЛАВРА

Часть 3. Математический анализ

Учебное пособие

Редактор И. В. Калистратова
Инженер по компьютерному макетированию О. М. Гурьянова

ISBN 978-5-8265-1232-6

9 785826 512326

Подписано в печать 16.12.2013.
Формат 60×84 /16. 4,65 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 552

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08;
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru