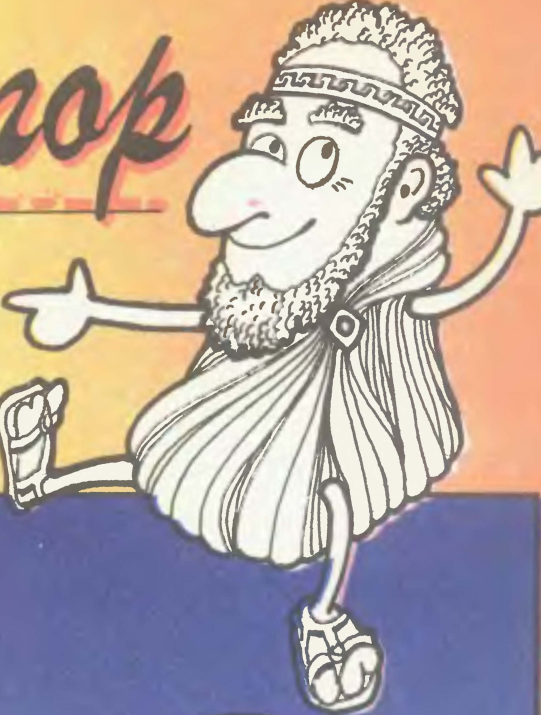
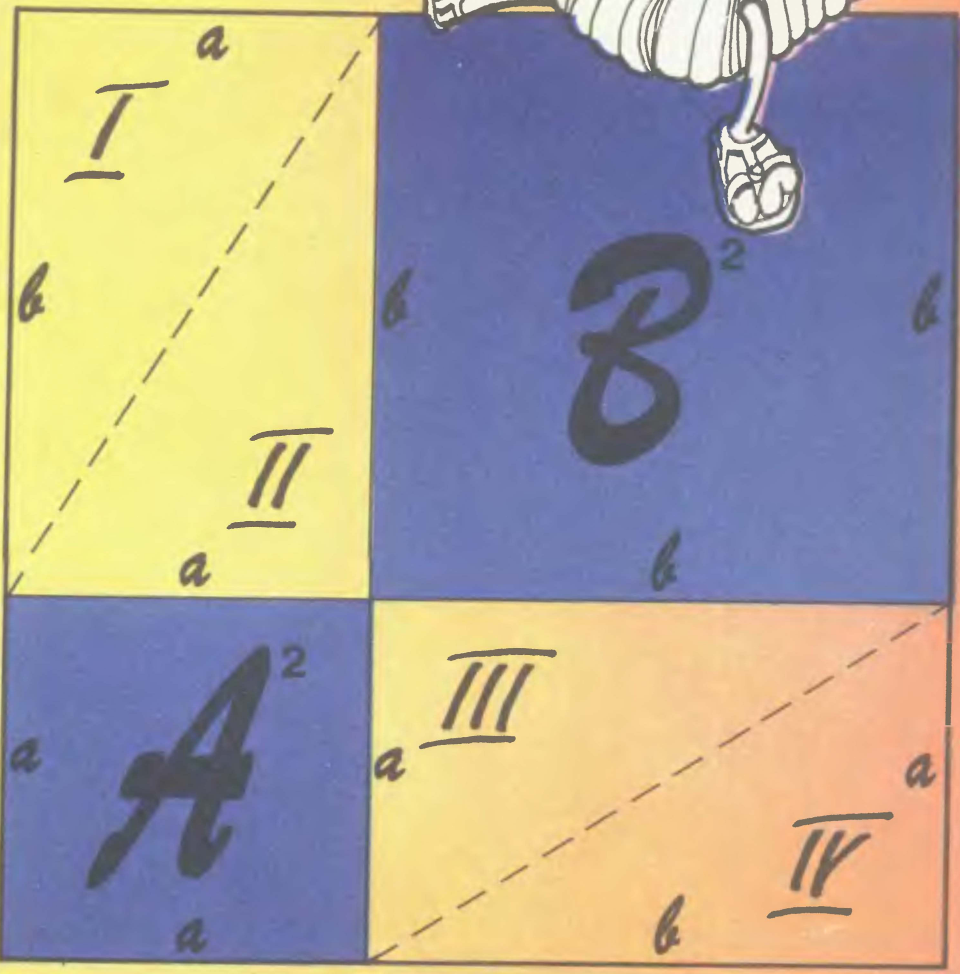
Пифагор

Занимательная математика





Халамайзер А. Я.

Пифагор

Москва
«Высшая школа»
1994

Занимательная
математика

ББК 22.1
Х 17
УДК 51

Рецензент — акад., проф. *Б. В. Гнеденко*

Книга составлена при участии
В. П. Лишевского

Халамайзер А. Я.

Х17 Пифагор: Науч.-попул.— М.: Высш. шк., 1994.— 79 с.: ил.— (Занимательная математика)

ISBN 5-06-003012-1

Книга в увлекательной форме раскрывает основные вопросы математики на примере логических задач. Изложение построено по типу известных книг Я. И. Перельмана. В книге даны математические фокусы; нестандартные задачи с необычными сюжетами, нетрадиционные методы их решения; подчас неожиданные приложения математики.

Для любителей занимательной математики.

$Х\ \dfrac{\mathbf{1602010000 — 117}}{\mathbf{001(01) — 94}}$ **без объявл.**

ББК 22.1
51

ISBN 5-06-003012-1

К читателям

В памяти всех народов из поколения в поколение передаются многочисленные забавные задачи, требующие смекалки и размышлений. В дореволюционной России были широко распространены книги Игнатьева и Перельмана (одна из них называлась «В царстве смекалки»). С их помощью учились рассуждать, развивали свое воображение и оттачивали логику многие поколения подростков, ставших впоследствии известными учеными, инженерами и изобретателями. Эти книги ввели их в мир научных исканий. «Пифагор» призван продолжить эту добрую традицию.

Сейчас, более чем когда-либо в прошлом, наша страна нуждается в мыслящих людях, стремящихся к открытиям и применению достижений науки для создания все более совершенных технических систем, новых технологий для более полного использования материалов и энергии, для нахождения новых методов ведения сельского хозяйства, лечения болезней и т. п.

Книга «Занимательная математика» ставит перед собой задачу развивать у учащихся нетрадиционный подход к изучению математики. На примерах, которые окружают нас со всех сторон, занимательные книги по математике вызывают интерес к математическому познанию и логическому мышлению. Ведь эти качества необходимы не только математику, программисту или инженеру, но и врачу, дипломату, политическому деятелю. Хочется надеяться, что книга «Пифагор» пробудит у читателей потребность в интеллектуальном и нравственном совершенствовании.

В книге «Пифагор» вы найдете материалы на разные вкусы: рассказы из истории науки и жизни математиков, нестандартные задачи и нетрадиционные методы их решения, математические фокусы и различные, подчас неожиданные приложения математики. Спектр материалов широк, как широка и разнообразна вечно молодая математика.

Желаем вам приятного времяпрепровождения.

Гнеденко Б. В.

Пифагор и его знаменитая теорема

Эта книга называется «Пифагор», и было бы странно, если бы в ней не было рассказа о жизни и деятельности великого греческого ученого.

Трудно говорить о человеке, умершем две с половиной тысячи лет тому назад, даже если это великий Пифагор. Никакие бесспорные свидетельства его жизни и деяний не сохранились. Биографию ученого и его труды приходится реконструировать по произведениям других античных авторов, а они часто противоречат друг другу. Так, например, один из них пишет, что когда Пифагор доказал свою замечательную теорему, то принес в жертву богам 100 быков. (Такое жертвоприношение в Древней Греции называлось гекатомбой.) Другие же авторы утверждают, что Пифагор был вегетарианцем и, следовательно, противником убийства животных, будь то для еды или жертвоприношения. Второе более вероятно, так как Пифагору принадлежит высказывание: «Воздержи себя от убийства животных: пролитие крови оных привело людей к неистовству проливать кровь подобных себе».

Имя Пифагора еще при его жизни обросло многочисленными легендами, а он сам почитался как высшее существо (почти божество) не только как выдающийся философ и математик, но и как маг и чародей. В дальнейшем изложена версия жизни ученого, которая представляется наиболее достоверной. (О «разбросе» сведений говорит, например, такой факт: в Большой Советской Энциклопедии, во втором и третьем изданиях, между которыми уместилось всего два десятилетия, год рождения ученого указан с интервалом в десять лет.)

Пифагор родился в 569 г. до н. э. на острове Самосе, поэтому к его имени добавляют еще уточнение — Самосский. (Есть Пифагор Регийский.) Пифагором же его звали потому, что он вещал истину непогрешимо, как Пифия*.

Отец ученого Мнесарх был камнерезом. По другой легенде — художником, изготовившим необычной красоты перстень, который носил самосский тиран Поликрат. С этим перстнем связано несколько легенд, одна из которых описана в известном стихотворении Фридриха Шиллера «Поликратов перстень».

Предание гласит, что Поликрат был счастливым и удачливым царем. Врагов он побеждал, все дела удавались, казна полнилась. «Не могут быть все время одни прибытки,— говорили при дворе.— Быть беде!» Чтобы потерять хотя бы что-нибудь, Поликрат выбросил в море свой любимый перстень, сотворенный руками отца Пифагора, но боги не

---

*Пифия — жрица-прорицательница Дельфийского оракула при храме Аполлона в Дельфах (Древняя Греция).

приняли жертвы. Рыбаки поймали рыбу, а в желудке у нее повар нашел «потерянный» перстень. О надвигающейся беде заговорили с новой силой. Вскоре Поликрат был обманным путем пленен своим союзником сатрапом Магнезии Оройтом и окончил жизнь в муках на кресте. Распятие в древнем мире было таким же обычным видом казни, как позже повешение, расстрел или электрический стул.

До 18 лет Пифагор жил на Самосе, а затем поселился у дяди на острове Лесбос, где продолжил свое образование у философа Ферекида.

Через два года (в 549 г. до н. э.) Пифагор переехал в город Милет (Малая Азия), где стал изучать математику и небесную механику под руководством известных ученых того времени Фалеса и Анаксимандра.

Фалес Милетский (ок. 625 — 547 гг. до н. э.) вошел в историю науки как родоначальник античной, а вернее сказать, всей европейской философии и науки. Все существующее в природе он выводил из единой основы (первостихии), которой считал «влажную природу» (воду): все возникает из нее и в нее возвращается.

В математике Фалес установил равенство углов при основании равнобедренного треугольника; равенство треугольников, у которых равны одна сторона и два прилежащих к ней угла; деление круга диаметром пополам; что число есть совокупность единиц.

В астрономии он определил длину года в 365 дней, установил время солнцестояний и равноденствий, предсказал солнечное затмение 585 г. до н. э., что принесло ему особую славу.

Ученик Фалеса Анаксимандр (ок. 610 — 546 гг. до н. э.) учил о бесконечном множестве миров во Вселенной, непрерывно рождающихся и гибнущих (один из них — наша планета), начертил первую географическую карту (на меди) и построил первые в Греции солнечные часы и некоторые астрономические инструменты.

Фалес в молодости жил в Египте и, видимо, рассказал Пифагору о высоком уровне культуры этой страны. Охваченный неуемным стремлением к знаниям, начинающий ученый отправился в Египет, куда прибыл в 547 г. до н. э.

Наукой в Египте ведали служители храмов, которые неохотно делились своими знаниями даже с соотечественниками, тем более с чужеземцами. Пифагору стоило большого труда пробиться в касту жрецов. Он выдержал все испытания, обряды, обеты и был принят в сонм служителей культа. Обучение наукам велось под присмотром верховного жреца Сонхиса.

В Египте Пифагор прожил 21 год, он овладел всеми премудростя всеми тайнами египетских жрецов и достиг высших ступеней в храмовой иерархии.

В 526 г. до н. э. в Египет вторглись войска персидского царя Камбиза, и Пифагор вместе с другими жрецами был уведен в плен. Так он попал в Вавилон, где прожил еще 12 лет. Только в 513 г. до н. э. 56-летний Пифагор вернулся на родину, где застал еще живым своего первого учителя Ферекида.

Пифагор полгода путешествовал по стране, знакомясь с ее общественным строем, религией и наукой, но Греция встретила ученого неласково, и он поселился в Кротоне — небольшом южноитальянском городке, расположенном на самой «подошве сапога» Апеннинского полуострова.

В Кротоне Пифагор стал выступать с проповедями, которые посвящались различным нравственным проблемам, устройству мира, переселению душ и другим вопросам. На выступления философа собиралось до шестисот человек. О силе воздействия Пифагора на слушателей говорит такой факт. Когда он однажды произнес речь, направленную против роскоши, то все женщины отнесли свои нарядные платья в храм Геры, так как ни одна из них не решалась показаться на улице в дорогом одеянии.

Одна из посетительниц таких лекций-проповедей — молодая красавица Феана — влюбилась в шестидесятилетнего ученого и стала его женой. У Пифагора были дочь Дамо и сын Телавг, который впоследствии стал преемником отца и учителем известного древнегреческого философа, врача и политика Эмпидокла (ок. 490 — ок. 430 гг. до н. э.).

Пифагор был хорошо сложен и красив лицом, которое обрамляла длинная заостренная борода. Он носил восточную одежду, к которой привык за 33 года жизни в Египте и Вавилоне. Античные авторы сообщают, что он был неприхотлив и умерен в пище. Часто «довольствовался только медом или сотами, или хлебом, вина в дневное время не касался, на закуску обычно ел овощи вареные и сырые, а изредка рыбу. Одежда его была белая и чистая, постельная ткань — белая шерстяная, ибо лен в тех местах еще не был известен. В излишествах он никогда не был замечен — ни в еде, ни в любви, ни в питье; воздерживался от смеха и всяких потех, вроде издевок и пошлых рассказов; не наказывал ни раба, ни свободного, пока был в гневе».

Пифагор основал сообщество своих учеников и последователей, которое было одновременно научно-философской школой, религиозно-мистическим союзом, духовным братством и даже политической организацией. В основе религиозно-философского учения Пифагора (пифагореизма) лежало представление о числе как основе всего существующего в мире. «Числа суть боги на земле», — говорил он. Космос, вещи, душа рассматривались как числа и их отношения. Каждому числу придавался определенный жизненный смысл. Единица трактовалась как абсолютная и неделимая единичность, двойка — как уход в бесконечность, тройка — как осмысление этой бесконечности, четверка — как первое телесное воплощение троичной формы, и т. д. Числовые соотношения распространялись на акустику, музыку, космос, который мыслился состоящим из десяти небесных сфер, каждая из которых издавала свой звук. Пифагорейцы считали, что в мире существует десять основных противоположностей: конечное и бесконечное, четное и нечетное, одно и множество, правое и левое, мужское и женское, покоящееся и движущееся, прямое и кривое, свет и тьма, доброе и злое, квадратное и продолговато-четырехугольное.

Пифагор и его последователи верили в переселение душ и их вечный круговорот. Он говорил: «Не бойся смерти: ибо жизнь есть не что иное, как точка неизмеримого круга существ, который всем бытиям назначено многократно пробежать... Смерть есть только перемена жилища».

Философское учение Пифагора представляет сейчас лишь исторический интерес, а вот все результаты, полученные им в математике, имеют непреходящее значение.

Пифагору приписывают создание учения о числах: четных и нечетных, простых и составных, совершенных и фигурных; нахождение способов построения некоторых правильных многоугольников и многогранников; разработку учения об арифметических, геометрических, гармонических пропорциях и таких же средних. Он заложил основы учения о подобии, ввел систематические доказательства в геометрию и доказал теорему, носящую его имя.

Соотношение между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника было известно задолго до Пифагора. Еще в Древнем Египте треугольник со сторонами 3, 4, 5 использовался при разметке прямоугольных земельных участков после ежегодного уничтожения границ между ними разлившимся Нилом. Пифагору принадлежит геометрическое доказательство теоремы, которая первоначально формулировалась так: квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах этого треугольника. Если обозначить катеты прямоугольного треугольника буквами a и b, а гипотенузу — c, то получится известное каждому соотношение $a^2+b^2=c^2$ — квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

В заключение — о последних днях Пифагора.

Умные, добродетельные, обладающие талантами люди всегда вызывают недоброжелательство, зависть у серой толпы. Один из учеников Пифагора, выгнанный из школы за неблаговидный поступок, сумел восстановить горожан против ученого.

Школа Пифагора была разгромлена и подожжена. В пламени погибли многие ученики и их великий учитель. По другой версии, Пифагору удалось бежать, и он умер в изгнании (в Метапонте). Случилось это около 500 г. до н. э.

Таковы жизнь, деяния и смерть одного из выдающихся умов древности — Пифагора. Его считают автором многих трудов, но на самом деле ему принадлежат лишь три: «О воспитании», «О государстве» и «О природе». Другие же созданы его учениками и последователями, а некоторые — противниками, старавшимися таким образом опорочить Пифагора. Но это им не удалось — подделка всегда обнаруживалась. Ведь недаром же выдающийся философ древности Гераклит (конец VI — начало V в. до н. э.) считал Пифагора самым умным человеком своего времени.

ИЗРЕЧЕНИЯ, ВЫСКАЗЫВАНИЯ ПИФАГОРА

В словах и в делах своих показывай всегда справедливость.

Ежели ты каким делом править не в состоянии или оного не разумеешь, оставь его другим.

Умеренность во всяких вещах есть наилучшее средство к спокойствию.

Старайся великие дела производить, только ничего великого наперед не обещай.

Народы! Старайтесь прежде иметь добрые нравы, нежели законы: нравы суть самые первые законы.

Где нравы без просвещения или просвещение без нравов, там невозможно долго наслаждаться счастием и свободой.

Не живи у народа, у которого находится... более законов, нежели добрых нравов... более темниц, нежели гостиниц.

Не живи в том городе, где пышность и великолепие народных памятников оскорбляют бедность честных семейств.

Первым бросил кости рыжий и сразу зажмурился — он боялся взглянуть.
— Одиннадцать! — закричали все хором.
Ходжа Насреддин понял, что погиб: спасти его могло только двенадцать...
Он взял в левую руку хвост ишака и ударил себя этим хвостом по правой руке, в которой были зажаты кости.
Всеобщий вопль потряс чайхану... На костях было двенадцать очков.

(Л. Соловьев. «Повесть о ходже Насреддине».)

В кости играли не только на Востоке, но и чуть ли не во всех странах мира. Кости бросали д'Артаньян и его товарищи-мушкетеры, византийские купцы и золотоискатели Невады, сиятельные графы и морские пираты. Чаще всего играли двумя костями: каждый из партнеров бросал кости на стол или на специальный поднос; выигрывал тот, у кого сумма очков оказывалась больше.

На одном из московских рынков заметил я лет двадцать назад двух парней, которые предлагали всем желающим сыграть в кости.

— Каждый может выиграть десять рублей! Поставишь рубль — выиграешь десять! — зазывал один, подбрасывая три кости.

Второй объяснял «правила» игры:

— Желаешь сыграть — ставь на кон рубль и бросай три кости. Сколько очков выпадет — считай. А выигрыш по таблице — от полутора рублей до десяти.— И он показывал большую таблицу на листе фанеры.

Желающих рискнуть рублем нашлось немало. На моих глазах один за другим подходили любители острых ощущений и клали на фанеру по рублю. Еще больше оказалось болельщиков.

Несколько человек, выбросив 7 или 14 очков, разбогатели на полтинник, кое-кому выпадало 6, 15, 16 очков; лишь один получил пятирублевый выигрыш. Расстались же со своими рублями более 60 человек.

Проигравшие придирчиво осматривали и ощупывали кости, но они были без обмана, т. е. строго кубической формы и совершенно однородны. Через некоторое время поблизости показался милиционер, и парни сочли за лучшее исчезнуть. По моим наблюдениям, менее чем за час они выиграли рублей двадцать. В те годы это были немалые деньги.

Секрет выигрыша парней довольно прост. Чтобы разобраться в нем, займемся несложной арифметикой.

Бросая одну кость, можно получить одно, два, три, четыре, пять или шесть очков. Каждое число очков будет выпадать в среднем одинаково часто. Можно сказать, что все шесть вариантов равновозможны. Говорят, что каждый вариант осуществляется в среднем в шестой части всех бросаний. Иначе, вероятность получения, скажем, пяти очков при одном бросании кости составляет 1/6. Такую же вероятность имеет и получение другого числа очков. Эти события *равновероятны*.

Возьмем теперь две кости. Бросая их, получим 36 (или $6 \cdot 6$) вариантов. Возможные при этом суммы очков показывает таблица на пересечении показаний числа очков 1-й и 2-й костей:

2-я кость	*Возможная сумма очков при бросании двух костей*					
	1-я кость					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Легко заметить, что 2 очка получаются лишь в одном варианте $(1+1)$, а, например, 8 очков — в пяти вариантах: $2+6$, $3+5$, $4+4$, $5+3$, $6+2$.

Значит, 8 очков будут выпадать *в среднем* в 5 раз чаще, чем 2 очка. Можно сказать, что вероятность получения при одном бросании пары костей двух очков составляет 1/36. Это можно записать так: $P(2)=1/36$ (P — первая буква французского слова «probabilité» — вероятность).

Рассматривая таблицу, можно также найти:

$$P(3)=\frac{2}{36};\quad P(4)=\frac{3}{36};\quad P(5)=\frac{4}{36};$$

$$P(6)=\frac{5}{36};\quad P(7)=\frac{6}{36};\quad P(8)=\frac{5}{36};$$

$$P(9)=\frac{4}{36};\quad P(10)=\frac{3}{36};\quad P(11)=\frac{2}{36}$$

и, наконец, $P(12)=1/36$.

Может ли на двух костях оказаться 13 очков? Нет, не может, поэтому $P(13)=0$. Вообще, вероятность невозможного события равна нулю; точно так же вероятность достоверного события, которое неминуемо должно произойти, считается равной единице. Взойдет ли завтра в Москве Солнце? Да, обязательно, хотя читатель может проспать этот момент или не заметить его из-за облачности: P(завтра в Москве взойдет Солнце)$=1$.

Продолжим наше рассуждение. При бросании трех костей получается $6\cdot 6\cdot 6=6^3=216$ вариантов. В каждом из них мы насчитываем от 3 до 18 очков. Но 3 очка получаются лишь в одном варианте:

$$1+1+1=3.$$

5 очков можно получить шестью способами (в шести вариантах):

$$1+1+3=5;\quad 1+3+1=5;\quad 3+1+1=5;$$
$$1+2+2=5;\quad 2+1+2=5;\quad 2+2+1=5.$$

Для 10 очков существуют 27 вариантов (найдите их!). Значит, в среднем 10 очков будут выпадать в 27 раз чаще, чем 3 очка. Столь же часто могут выпадать 11 очков; в 50 вариантах (из 216) оказываются 9 или 12 очков, немногим меньше вариантов для 8 или 13. Можно строго доказать, что ставить рубль при этих условиях игры *невыгодно*. Конечно, кто-то может случайно выбросить 3 очка (или 18), но это будет чрезвычайно редким событием. При многократной игре в выигрыше всегда останутся эти «ловкие» парни. Если вы встретите таких парней, не играйте с ними!

ИЗРЕЧЕНИЯ, ВЫСКАЗЫВАНИЯ ПИФАГОРА

Закон есть вещь святая: вверяйте исполнение оного только чистым рукам.

Первое достоинство народного правителя состоит в том, чтобы всегда говорить истину.

Есть народы столь стыдливые, что не могут смотреть на непокрытую истину... Не будьте так стыдливы: истину полезно видеть нагую. Ложь пусть покрывает себя одеждою. Лицемерие пусть надевает на себя маску: приличности много сделали вреда истине.

Почитайте самих себя: народ, уважающий самого себя, никогда не может быть невольником.

Сережа решает задачу

Прежде чем приступить к решению, Сережа обычно заглядывает в ответ. А потом старается подобрать действие, приводящее к этому ответу.

Однажды Сережа решал вместе с классом задачу:

В гараже стоят 8 машин, причем грузовых на 4 больше, чем легковых. Сколько легковых машин в гараже?

Сережа заглядывает в ответ: две легковые машины. Какими же действиями из данных в условии чисел 8 и 4 можно получить 2? Ясно каким: делением.

— Значит, 8 делим на 4,— «решает» Сережа.— Получается 2.— И он гордо поднимает руку: — Ольпетровна, я решил! Получается две легковые машины! Верно?

— Ответ верный,— подтвердила Ольга Петровна. А когда Сережа объяснил, как он получил «ответ», некоторые ученики засмеялись. Но Ольга Петровна даже не улыбнулась, а совершенно серьезно продолжала: — Смеяться тут нечего. Давайте лучше решим еще одну похожую задачу, а ты, Сережа, пиши на доске, чтобы всем было видно:

В гараже стоят 10 машин, причем грузовых на 4 больше, чем легковых. Сколько легковых машин в гараже?

Сережа задумался. Ведь 10 на 4 не делится. Как быть? Но сообразительная Леночка уже тянет руку:

— Можно, я расскажу, Ольпетровна? Если лишние 4 грузовика уйдут на погрузку, то в гараже останется только 6 машин, грузовых и легковых поровну, по три штуки...

— Машины — это тебе не штуки,— бросает Сережа, все еще стоящий у доски.

— Ну и пусть не штуки, а машины,— соглашается Лена.— Значит, легковых машин в гараже было три штуки, т. е. три машины, а грузовых тоже три, да еще четыре ушли на погрузку, значит, всего семь грузовых...

— Верно, Лена. Молодец, ставлю тебе пятерку,— похвалила учительница.— А тебе, Сережа, понятно теперь? Объясни еще раз.

— Ежу понятно,— буркнул Сережа.— Лишние ушли на погрузку, так осталось поровну, значит, остальные шесть делим напополам...

— «Напополам» нельзя разделить, Сережа, я уже тебе сколько раз говорила,— поправляет учительница.— Делим пополам, т. е. на две равные части.

— Значит, делим на две равные части,— покорно повторяет Сережа,— по три машины в каждой равной части.

Ольга Петровна берет ручку и ставит в журнал оценку.

— Лена, дай дневник, поставлю тебе пятерку.

— А мне, Ольпетровна, троечку? — умоляюще тянет Сережа.— Ведь у меня в первой задаче ответ верный был, вы сами сказали...

— Кроме верного ответа нужен еще верный ход решения,— назидательно замечает Ольга Петровна.— Так что тройку тебе еще надо заслужить. Вот на следующем уроке еще раз проверю, как ты решаешь, тогда и отметку поставлю.

Чему равен икс?

Сережа записал на доске $x = \frac{3}{\frac{5}{7}}$

— Как же вычислить значение этой «трехэтажной» дроби? — спросила Ольга Петровна.

— Очень просто,— ответил Сережа и стал вычислять:

$$x_{\text{Сережи}} = \frac{3}{\frac{5}{7}} = 3 : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{5}$$

Марина подсчитала по-другому:

$$x_{\text{Марины}} = \frac{\frac{3}{5}}{7} = \frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{35}$$

— Какое же вычисление правильное? — спросил кто-то. — И какой ответ верный?

— Выражение, записанное Сережей на доске вначале, определенного смысла не имеет,— объяснила Ольга Петровна.— Его можно понимать и как $\frac{21}{5}$, и как $\frac{3}{35}$. Чтобы это выражение получило определенное значение, знак равенства необходимо писать против «главной» дробной черты:

$$x_C = \frac{3}{\frac{5}{7}} \text{ или } x_M = \frac{\frac{3}{5}}{7}$$

— Сегодня я покажу вам фокус,— объявила Ольга Петровна на первом собрании математического кружка. — Согласны?

— Согласны! — послышались голоса ребят.

— А какой фокус? — спросил Миша.— Я тоже знаю фокус с иголкой...

— Я покажу арифметический фокус,— сказала учительница.— Только нужно аккуратно считать, чтобы не ошибаться в сложении и умножении.

Некоторые ребята достали листочки бумаги и ручки.

— *Пусть каждый из вас задумает какое-нибудь целое число,*— начала Ольга Петровна.— *Лучше небольшое, чтобы легче было считать. Мне не говорите. Готово? Теперь умножьте это число на* 5, *к произведению прибавьте* 4 *и полученную сумму удвойте*...

— Готово! — закричал Сережа.

— Нет, нет, не говори,— остановила его учительница.— Я сама угадаю.

Ребята повторяли про себя числа; некоторые писали на листочках, прикрывая рукой от соседей и, главное, от учительницы.

— *Теперь прибавьте* 99,— продолжала Ольга Петровна,— *и у каждого получится трехзначное число. Оставьте в этом числе только последнюю цифру, а остальное зачеркните.*

— Как это: зачеркнуть? — спросила Надя.

— Например, у тебя получилось трехзначное число 364,— учительница написала это число на доске.— Если зачеркнуть первые две цифры, останется только 4. Вот так: ~~3~~ ~~6~~ 4.

— Понятно! — закричали сразу четверо или пятеро.— Готово, зачеркнули!

— *К тому, что осталось,*— диктовала дальше Ольга Петровна,— *прибавьте* 23, *а потом разделите на* 5.

Нина, сидевшая на второй парте у окна, быстро сосчитала и выжидающе уставилась на учительницу.

— Подойди ко мне, Нина,— сказала учительница, заметив, что девочка уже закончила подсчет. И тихонько сказала Нине на ухо: — *У тебя получилось шесть.*

— Верно! — удивилась Нина.— А как вы узнали?

— А сколько у меня получилось? — спросил с последней парты Сережа.

Ольга Петровна подошла к нему и сказала тихонько:

— *У тебя получилось шесть.*

Потом она подошла по очереди к каждому и повторила то же самое. Как она могла это узнать?

Фокус легко разгадывается, если воспользоваться правилами действий с переменными величинами. Предположим, что задумано целое число x. Умножив его на 5, прибавив 4 и удвоив, получаем

$$(5x+4)\cdot 2=10x+8.$$

Затем Ольга Петровна предложила прибавить 99:

$$(10x+8)+99=10x+107=(10x+100)+7 \text{ или } 10\cdot(x+10)+7$$
$$\text{или } (x+10) \text{ десятков и 7 единиц.}$$

Число десятков учительница не знает (оно зависит от первоначально задуманного числа x), а число единиц знает, оно равно 7 независимо от задуманного вначале числа x. Поэтому она и предложила оставить после зачеркивания только эту последнюю известную ей цифру 7.

Дальше очень просто: учительница предложила проделать еще два действия с известным ей числом 7, и сама проделала в уме те же действия: $7+23=30$; $30:5=6$.

Окончательный результат, число 6, она и сообщила Нине, а потом и всем другим ребятам.

Сереже фокус понравился, хотя он и не очень хорошо понял объяснение. Но едва началось следующее собрание кружка, Сережа встал со своего места и подошел к учительнице.

— Ольпетровна, а сегодня вы опять покажете нам фокус? — спросил он.

— Могу,— ответила учительница.— Ну, пока не начали, *придумай какое-нибудь двузначное число*...

— Тридцать пять! — почти выкрикнул Сережа.— Это как раз номер нашей школы.

— Ты число-то придумай,— сказала Ольга Петровна,— *а мне не говори*. Я тебе задам вопросы о делении, и тогда сама угадаю.

— Ну ладно, я придумал другое число, номер моего дома. Вы ведь не знаете, где я живу? — на всякий случай спросил Сережа.

— Конечно, не знаю,— успокоила его учительница.— А теперь скажи, *делится твое число на* 3?

— *Делится!*— подтвердил Сережа.

— *А на* 5 *делится*? Или будет остаток?— спросила Ольга Петровна. Сережа повернул голову к окну и стал считать, беззвучно шевеля губами.

— *В остатке четыре.*

— *А на* 7?

— *В остатке пять.*

Теперь начала считать Ольга Петровна.

— *Ты задумал* 54,— сказала она через полминуты..

— А как вы узнали?— спросил было Сережа.

— Сейчас некогда, потом объясню,— ответила учительница, которую уже обступили ребята.— Ну, ребята, садитесь по местам, я покажу этот фокус еще раз.

— А можно я задумаю?— спросила шустрая Нина со второй парты, когда все уселись.

— Ну хорошо, задумай двузначное число и скажи мне, какие получатся остатки, если разделить его на 3, на 5, на 7.

— Если на 3, в остатке 1, на 5 — в остатке 2, на 7 — в остатке 4.

— Ты задумала 67,— объявила Ольга Петровна.

Она «угадала» еще три задуманных числа, а потом изобразила на доске небольшую таблицу.

Ост (3) $\cdot$ 70 $= M$ 15 $= P$. Ост (5) $\cdot$ 21 $= N$ 15 $= P$. Ост (7) $\cdot$ 15 $= P$.

$M+N+P$ (потом вычесть 105?) = Ответ.

— А что это означает?— спрашивали ребята, срисовывая табличку.

— Это означает, что остаток от деления на 3 нужно умножить на 70, остаток от деления на 5 умножить на 21, от деления на 7 — на 15. Если все три произведения сложить, то полученная сумма будет иметь как раз такие остатки от деления на 3, на 5, на 7. Это и будет задуманное число (или число, которое больше задуманного на 105, потому что $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; если к любому числу прибавить 105, то наши остатки не изменятся).— И учительница предложила Нине проверить это на задуманном ею числе 67:

$70 \cdot 1 + 21 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = 70 + 42 + 60 = 172; \quad 172 - 105 = 67.$

Попробуй теперь сам, читатель!

Числа, числа, числа,...

Запись и чтение чисел

Каждое из чисел 8 и 22 записывается с помощью одной цифры, число триста пятьдесят три — с помощью двух цифр (некоторые цифры могут повторяться). Всего лишь десятью различными цифрами люди научились записывать бесчисленное множество различных чисел.

Из лекции по истории математики

В нижнем левом углу стандартных почтовых конвертов уже много лет печатается канва для шестизначного почтового индекса; на оборотной стороне печатаются стандартизованные образцы записи цифр (рис. 1).

Различные народы на разных этапах своего развития пользовались различной нумерацией, различными способами обозначения цифр и чисел. Небольшие числа почти у всех народов обозначались когда-то нужным количеством точек или палочек (рис. 2).

Цифры племени майя	.	..	...
Римские цифры	I	II	III

Впрочем, и наши привычные цифры 1, 2, 3 возникли, очевидно, из торопливой записи одной, двух, трех черточек.

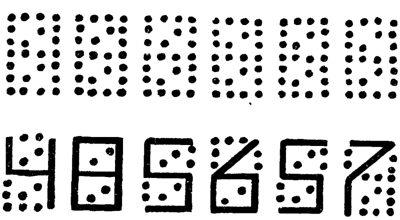


Рис. 1

Рис. 2

Эти цифры появились впервые в Индии около полутора тысяч лет назад вместе с десятичной позиционной системой счисления. Эта система оказалась более удобной, чем другие, например двенадцатеричная система, которой пользовались в древнем Вавилоне. Однако в Европе эта система стала известной лишь в XII веке от арабских ученых. Поэтому наши цифры в отличие от римских называются арабскими.

«Ничто не вечно под луной»,— гласит известная пословица. И цифры тоже постепенно меняли свой вид. Древние рукописи позволяют проследить, как менялась с течением времени запись «наших» цифр.

Числа счастливые и несчастливые

«Я увидела на стене счастливые номера».

«Пять счастливых номеров в карточке Спортлото».

«Дух отца хозяина назвал счастливые числа».

«Число 527 приносит удачу».

«Число 13 — несчастливое»...

Что же означают «счастливые числа» или «счастливые номера»?

Какие числа можно считать «счастливыми»? Действительно ли они «приносят удачу»?

...Два молодых человека вошли в московский автобус. Один, оторвав билет, внимательно посмотрел на номер.

— Несчастливый,— разочарованно протянул он.— Вот если бы через три билета оторвал...

Его спутник, достав из кармана пятак, дождался, пока оторвут еще два билета, и взял себе «счастливый».

— Какие же билеты счастливые? — спросил пожилой пассажир.

— Те, у которых сумма первых трех цифр шестизначного номера такая же, как и сумма трех последних цифр,— ответил юноша.— Вот мне сегодня достался счастливый.

— А в чем заключается это счастье? — последовал новый вопрос.

Но в ответ юноша лишь пробормотал что-то о предстоящем экзамене: очевидно, он был студентом.

Говорят, в С.-Петербурге счастливым считается билет, в шестизначном номере которого суммы цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, окажутся одинаковыми. Например, билет 513876

$$(5+3+7=15 \text{ и } 1+8+6=15).$$

К сожалению, автор тоже не знает, какое «счастье» ожидает обладателя «счастливого» билета. Но автор хотел бы порассуждать немного о свойствах чисел и о действиях над ними.

Древнегреческий философ Пифагор и его последователи считали числа основой, на которой держится весь мир и его закономерности, считали, что миром управляют числа. Все события, по мнению пифагорейцев, зависели от соотношений между числами. В то время люди не понимали истинных причин многих естественных явлений и привлекали для их объяснения сверхъестественные представления, в том числе и мистику чисел — религиозное учение, которое в числовых закономерностях видело проявление «высшей силы».

Особая роль приписывалась единице — «матери всех чисел». Сохранились до наших дней поверья и о других числах.

Два считалось началом неравенства: два больше, чем один.

Позднее появился специальный символ, означающий «больше»:

$$2>1.$$

Три считалось у некоторых народов самым большим числом, которое можно «сосчитать». Даже в начале XX в. жители некоторых островов Полинезии «считали» предметы так: один, два, три, много.

В различных поверьях и легендах сохранились триединые действия; скажем, успех достигался с третьего раза (с третьей попытки); в сказаниях встречаются три дворца (золотой, серебряный, медный); три сына (или брата); во многих религиях — триединый бог: Бог-Отец, Бог-Сын, Бог-Святой Дух.

У некоторых народов число два считается символом мужского пола, это — четное начало; число три — символом женского пола, нечетным началом, а число пять, равное $3+2$,— символом соединения начал, т. е. брака.

Много поверий связано с числом семь. Вспомним хотя бы пословицы:

— семеро одного не ждут;
— один с сошкой, семеро с ложкой;
— семь раз отмерь, один — отрежь;
— семеро по лавкам;
— семь пядей во лбу;
— у семи нянек дитя без глазу;
— семь бед — один ответ, и т. д.

Во всех этих пословицах «семь» используется как «много».

Почему же именно семь?

Психологи установили, что «одним взглядом» человек обычно охватывает точное число предметов (в натуре или на рисунке), если их не больше шести. Если же предметов семь или более, взгляд чаще всего не может охватить их и определить точное количество.

Верования в мистические манипуляции с числами оказались весьма живучими и кое-где сохранились даже до наших дней. Пример тому — верования в «счастливые» и «несчастливые» автобусные билеты.

«Счастливые» годы Вильгельма I

После 1871 г., когда образовалась Германская империя, а прусский король Вильгельм I стал императором, появились прорицатели (предсказатели), которые связывали жизнь императора с результатами арифметических действий. Утверждали, например, что если сложить числа, соответствующие дате его рождения (22.03.1797 г.), и число букв в его имени (Wilhelm), то получится

$$22+3+1797+7=1829,$$

т. е. год его бракосочетания. Если сложить этот год и сумму его цифр, то получится

$$1829+1+8+2+9=1849,$$

т. е. год «великой победы королевской власти», иначе говоря, год подавления баденского восстания. Далее «предсказатели» повторили это действие и получили

$$1849+1+8+4+9=1871,$$

т. е. год, когда Германия стала империей, а Вильгельм — императором. Следующее великое событие предсказывали в 1888 г., потому что $1871+1+8+7+1=1888$. Случилось так, что именно в этом году Вильгельм... умер.

Магические квадраты

Другим примером веры в могущество чисел является история «магических квадратов».

Посмотрите на квадрат, в клетках которого по порядку расставлены первые 9 чисел (рис. 3). Складывая эти числа вдоль строк, столбцов или диагоналей, мы получаем различные суммы. А нельзя ли найти такие числа, чтобы все суммы оказались одинаковыми?

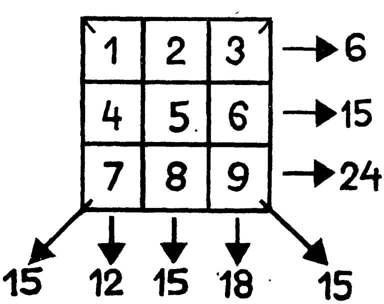


Рис. 3

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 4

Оказывается, можно. Ниже приводятся образцы таких квадратов, называемых «магическими», у которых сумма слагаемых по любому направлению является одинаковой.

Подобные квадраты, содержащие 9, 16, 25,... чисел, издавна привлекали людей. Как интересно: все суммы по столбцам, строкам и даже по диагоналям оказываются одинаковыми. Чудеса, да и только! Ясно, что такой квадрат должен обладать «магической силой», может, например, служить талисманом, приносящим его владельцу счастье или удачу.

«Торговец ждет покупателя, сидя где-нибудь в укромном углу шумного восточного базара,— говорится в научно-популярной книжке Е. Гуревича «Тайна древнего талисмана».— А вот и покупатель. После долгих переговоров он развязывает конец грязной чалмы, дает обладателю сокровища пару медных монет и получает желанный кусок пергамента. Небрежной скорописью на нем написана молитва к пророку и изображен таинственный и всемогущий квадрат. Изображен так же, как это делали и отец почтенного бизнесмена, и дед его, и прадед, если только он умел держать перо в руке...»

В 1514 г. знаменитый немецкий художник Альбрехт Дюрер изготовил гравюру, где над фигурой женщины изображен защитный талисман — магический квадрат в 16 клеток (рис. 4). Простейший магический квадрат с 9 клетками описан еще в арабском манускрипте VIII в.; там же упомянут его составитель, живший на заре нашей эры. Впрочем, и он, вероятно, не сам составил этот квадрат, а переписал откуда-нибудь...

Постепенно люди начали понимать, что никакие магические квадраты не способны предохранить от беды или защитить на поле брани. Но эти квадраты долго еще оставались забавой для любителей счета. Впрочем, не только для любителей; ими занимались и великие ученые, такие, как гений XVIII в. Леонард Эйлер и «король математиков» Карл Фридрих Гаусс. Магические квадраты упоминаются во многих сотнях книг на разных языках мира. И лишь в последние годы выяснилось, что рассуждения о магических квадратах находят применение в некоторых задачах экономики.

Не бойтесь числа 13!

В начале нашего столетия известный немецкий актер Карл Зонтаг собрался в одну из гастрольных поездок. Посмотрев вслед извозчику, который привез его к вокзалу, знаменитый артист воскликнул:

— Дважды дьявольское число!

И, тут же отказавшись от поездки, отправил телеграмму: «На гастроли не приеду тчк сел не в те дрожки». На удалявшейся пролетке значился регистрационный номер 13 — 13.

Число 12, дюжина, очень удобно в практическом смысле. Гусиные перья всегда продавались дюжинами или гроссами (гросс — 12 дюжин). До сих пор мы часто покупаем полдюжины чашек, тарелок, вилок, ножей, ложек, дюжину или полдюжины носовых платков, салфеток, полотенец, рубашек... Иногда берется треть дюжины, четверть дюжины (но не треть или четверть десятка!). Счет некоторых народностей, названия чисел в некоторых языках до сих пор основаны на двенадцатиричной системе счисления.

Если же предметов оказывается не 12, а 13, часто говорят «чертова дюжина». Многие и по сей день испытывают безотчетный страх перед числом 13. Кое-кто боится тринадцатого числа, другие — тринадцатого этажа, дома номер тринадцать; иные опасаются ездить на тринадцатом автобусе или в тринадцатом вагоне и чувствуют себя неуютно, если на встрече Нового года оказывается 13 человек. В англоязычных странах на многих улицах отсутствует дом номер 13, в гостиницах отсутствует 13-й этаж, а вместо комнаты номер 13 значится 12-бис; многие клиенты не желают селиться в «несчастливом» номере.

— Как и во всех больших отелях, в «Сент-Грегори» отсутствовал 13-й этаж: сразу за двенадцатым шел четырнадцатый,— рассказывает современный американский писатель Артур Хейли в известном романе «Отель».

В знаменитой чикагской гостинице «Статлер» часто устраиваются семейные и деловые приемы с обедом или ужином. Однако если обедать должны 13 человек, администрация ставит еще 14-е кресло с манекеном во фраке, которому тоже подают обед. Этот четырнадцатый участник званых обедов получил у персонала гостиницы шутливое прозвище «Людовик Четырнадцатый».

В Париже для подобных случаев до последнего времени существовала специальная контора, посылавшая четырнадцатого участника приема во фраке или смокинге, если требовалось — при орденах.

А в Тулузе с 1854 г. существует «Общество 13 врачей», которое собирает свои заседания тринадцатого числа каждого месяца в тринадцатом номере одной из гостиниц города, демонстрируя тем самым свое презрительное отношение к суевериям...

Вычисли свою отметку сам!

... В классе была контрольная по математике. А после уроков многие ученики пришли к учительнице.

— Ольга Петровна, а какую отметку вы мне поставили за контрольную? — спросила Лена.

— Я еще не проверила,— ответила учительница.— Завтра узнаешь.

— А мою проверили? — А мою? — посыпались вопросы.

— Не знаю, не знаю,— повторяла учительница.— Впрочем, можно вычислить чью-нибудь отметку,— добавила она.— Вот хотя бы твою, Лена.

Лена обрадовалась и вышла к доске.

— *Возьми мел, Лена, и напиши на доске все цифры, какие бывают. А потом вычислим все вместе.*

Лена написала:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 0$$

— А теперь смотрите все и считайте,— сказала учительница, стерла нуль и расставила знаки:

$$1+2+3-4+5+6-7+8-9=$$

Все стали считать. Витя первым объявил:

— Пять! Молодец, Ленка! А мне, Ольга Петровна?

— Ну иди ты, Витя,— согласилась учительница.— Цифры оставь, а все знаки сотри.— И учительница расставила знаки так:

$$12+3-4-5+6-7+8-9=$$

— Значит, мне четверка за контрольную? — переспросил Витя, когда все подсчитали.— Тоже неплохо!

Затем вышел Сережа с последней парты. Ему учительница опять расставила знаки по-новому:

$$1+2+3+4+5-6-7+8-9=$$

Все опять принялись считать. Сережин сосед не выдержал:

— Кол тебе, лентяй! — закричал он, выполнив действия. Но Сережа обиделся:

— Выходит, я хуже всех, что ли? — пробурчал он себе под нос. Тогда Ольга Петровна успокоила его:

— Не обижайся, Сережа, я пошутила,— улыбнулась она.— Ты ведь тоже хорошо умеешь решать задачи. А контрольную я еще не проверила, все оценки узнаете завтра. Я только хотела показать, что можно расставить знаки так, чтобы получилось любое заранее указанное не очень большое натуральное число, например 20, или 40, или 100, какое хотите:

$$1+2+34-5-6-7-8+9=20;$$
$$1+2-3+45+67-8\cdot 9=40;$$
$$1+2+3-4+5+6+78+9=100.$$

— А если захотите,— предложила учительница,— можете сами попробовать расставить знаки так, чтобы получилось любое целое число от 1 до 20. Попробуйте дома, а в следующую пятницу посмотрим, кто как сделал.

Однажды в порядке шутки электронно-вычислительной машине поставили задачу: в последовательностях

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \quad \text{и} \quad 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$$

так расставить знаки «+», «−» или соединить цифры, чтобы в результате действий получилось 100. Вскоре машина «выдала» свыше 20 решений. Вот некоторые из них:

$$123-45-67+89=100;$$
$$12+3+4+5-6-7+89=100;$$
$$98-76+54+3+21=100;$$
$$9-8+76+54-32+1=100;$$
$$9-8+7+65-4+32-1=100.$$

Спортлото и простая арифметика

Мы видим, что действия с числами и порядок этих действий можно «подогнать» чуть ли не под любой заранее намеченный результат. Сами по себе числа не могут быть «счастливыми» или «удачными» (так же, как «несчастливыми» или «неудачными»). Но важно, чтобы действия над числами выполнялись правильно и осмысленно, а выводы из этих действий были обоснованными. Иначе могут получиться казусы, об одном из которых мы расскажем в качестве шутливого завершения этого рассказа.

... Пожилой мужчина выбрал в своей карточке «6 из 45» числа 5, 12, 18, 25, 32, 39 и «угадал» пять номеров.

— Как же ты догадался выбрать именно эти числа? — спросил его племянник, ученик шестого класса.

— Математику надо знать,— назидательно ответил дядя.— Карточку я купил пятого числа, это как раз был день моего рождения, значит — число счастливое. А другое счастливое число — это семь; вот я и прибавлял к пяти всякий раз по семь...

— Как же так? — переспросил племянник.— Наверное, у тебя с арифметикой неладно. Ведь пять плюс семь действительно двенадцать, а двенадцать плюс семь — не восемнадцать, а девятнадцать...

— Ну вот! — перебил разгневанный дядюшка.— Я выиграл пять тысяч, а он будет учить меня арифметике...

Числа, числа, числа,...

Шофер посмотрел на спидометр и увидел, что тот показывает 15951 км. «Теперь, наверное, не скоро появится такое же симметричное число»,— подумал он, но ровно через два часа счетчик показал новое число, которое тоже в обе стороны читалось одинаково. С какой скоростью ехал автомобиль?

Сколько матчей

540 команд разыгрывали кубок одной из республик по футболу. Соревнования проводили по олимпийской системе: команды по жребию разбивались на пары, которые встречались между собой; проигравшие выбывали из соревнований, а выигравшие вновь разбивались на пары. В случае ничьей назначалось дополнительное время — до результата. Если на каком-то этапе оставалось нечетное число команд, то одна из них (по жребию) сразу допускалась в следующий тур.

Директора всех стадионов собрались и решили подсчитать, сколько матчей придется провести, чтобы определить команду-победительницу. Один из собравшихся стал составлять таблицу (рис. 5).

— Постойте, постойте! — воскликнул директор университетского стадиона.— Давайте воспользуемся простой логикой. Ведь после каждого матча из розыгрыша исключается ровно одна команда, верно?

— Ну, верно,— послышались голоса.— Что из того?

— Начинают борьбу 540 команд,— продолжал директор университетского стадиона,— в конце остается одна, победительница. Так?

— Ну, так...

Тур	Было команд	Проводится матчей	Остается команд
I	540	270	270
II	270	135	135
III	135	67	68
...	...	...	...

Рис. 5

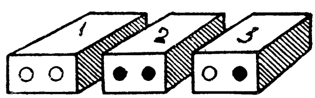


Рис. 6

— Значит, будет исключено 539 команд, а для этого придется провести 539 матчей! — торжествующе закончил находчивый директор.

Как переставить таблички

В трех одинаковых закрытых коробках имеется по два шарика: в одной — два белых, в другой — два черных, в третьей — белый и черный (рис. 6). На каждой коробке есть табличка: на одной — с двумя белыми кружочками, на другой — с двумя черными, на третьей — с белым и черным. Но известно, что содержимое каждой коробки *не соответствует* имеющейся на ней табличке.

Требуется определить содержимое каждой коробки (цвет шариков в каждой коробке). Для этого разрешается вынуть только один шарик только из одной коробки. Из какой коробки нужно вынуть шарик?

Вынуть следует шарик из третьей коробки. Если, допустим, он оказался черным, то и второй шарик в этой коробке должен быть черным (если бы он был белым, то содержимое коробки соответствовало бы табличке на ней!).

В первой коробке не два черных шарика; в ней не могут быть и два белых, так как это соответствовало бы табличке на коробке. Значит, в первой коробке белый и черный шарики, а во второй — два белых.

Если же вынутый шарик белый, то второй шарик в этой коробке тоже белый; тогда во второй коробке белый и черный, а в первой коробке два черных.

На маскараде

— Теперь будем играть в обманщиков,— объявил распорядитель студенческого бала-маскарада.— Те, у кого пригласительный билет с четным номером, будут отвечать на все вопросы только правду, у кого пригласительный билет с нечетным номером — только неправду. А Тамара будет задавать вопросы и постарается догадаться, кто обманщик, а кто говорит только правду. Начинай, Тамара!

— А ты что, главный обманщик, что ли? — сразу же спросила Тамара. Но распорядитель пробормотал что-то и скрылся за спины соседей.

— Что он сказал? — обратилась Тамара к девушке в лисьей маске.

— Сказал, что обманщик.

— А вы что слышали? — переспросила Тамара у ее спутника Медведя.

— Сказал, что говорит только правду,— заверил Медведь.

И Тамара сразу же охарактеризовала Лису и Медведя.

А как охарактеризует Лису и Медведя читатель? Обманщики они или нет?

Что же в действительности сказал распорядитель? Если он говорит правду, то и ответил, что говорит только правду. А если он — обманщик, то и на этот вопрос должен ответить неправду, т. е. что он говорит только правду. Другого ответа распорядитель *по условию игры* дать не мог. Значит, Лиса — обманщица, а Медведь говорит правду.

После шахматного турнира

Победителями первенства школы по шахматам оказались восьмиклассник Белов, девятиклассник Черняк и десятиклассник Рыженко.

— Обратите внимание,— заметил один из них,— среди нас есть рыжий, блондин и я — брюнет. Но ни одна из фамилий не соответствует цвету волос ее обладателя.

— Действительно, забавно,— согласился восьмиклассник.

Какого цвета волосы у каждого победителя?

По условию Белов не может быть блондином, Черняк — брюнетом, Рыженко — рыжим.

Поэтому на пересечении соответствующих строк и столбцов таблицы *а*) можно поставить нули.

		Белов	*Черняк*	*Рыженко*
а)	Блондин	0		
	Брюнет		0	
	Рыжий			0
б)	Блондин	0		
	Брюнет	0	0	
	Рыжий			0
в)	Блондин	0	1	0
	Брюнет	0	0	1
	Рыжий	1	0	0

Кроме того, известно, что восьмиклассник Белов — не брюнет; это отмечено дополнительным нулем в таблице *б*). Значит, Белов может быть только рыжим, брюнетом — только Рыженко, а Черняк — блондином. Теперь можно заполнить остальные клетки таблицы *в*).

Бог Правды, Лжец и Дипломат
(логическая задача)

В старинной индийской задаче говорится о фигурках трех богов: один из богов (Бог Правды) на все вопросы отвечает правду и только правду; другой никогда не говорит правды (Бог Лжи); третий дает различные ответы, иногда правдивые, иногда лживые (Бог Хитрости, или Дипломат).

Некоему мудрецу разрешили задать каждому из богов по одному вопросу и по ответам на эти вопросы определить,«кто есть кто». Мы сформулировали эту задачу в стихотворной форме.

В старинном храме, говорят,
Стоят на чердаке
Бог Правды, Лжец и Дипломат,
Все — с лотосом в руке.

Бог Правды, лотосом клянясь,
Лишь истину твердит.
Бог Лжи, нимало не смутясь,
Неправду говорит.

А Дипломат дает ответ
По прихоти своей:
То правду говорит, то — нет,
Но всякий раз: «Ей-ей!»

Пришел в тот храм мудрец Рашид
И к первому: — Привет!
С тобою рядом кто стоит?
— Бог Правды! — был ответ.

— Теперь скажи мне о себе,—
— Второго он спросил.
— Я Дипломат, служу судьбе,—
Второй проговорил.

Шагает к третьему Рашид
(Рашид был стар и сед).
— Мой бог, сомненье разреши,
Скажи, кто твой сосед?

— О досточтимейший мудрец,
Не бей напрасно ног.
Могу сказать: он страшный Лжец,—
Ответил третий бог.

Теперь, читатель, разбери —
Узнать я был бы рад:
Кто Лжец, кто правду говорит
И кто же — Дипломат?

Ответ (рассуждение мудреца):

1. Если в соответствии с первым утверждением вторая фигура принадлежит Богу Правды, то вторая фигура должна это подтвердить. Значит, вторая фигура — не Бог Правды.

2. Но первая фигура тоже не Бог Правды, так как она не сказала правды.

3. Итак, Бог Правды — третья фигура.

4. Бог Правды говорит всегда правду; значит, вторая фигура — Бог Лжи.

5. Остается: первая фигура — Бог Хитрости (Дипломат).

Шапки с пером фазана

При дворе одного восточного владыки жили некогда три мудреца — Абдул, Али и Ахмед. Каждый из них без ложной скромности утверждал, что именно он — мудрейший из мудрых.

— Кто же из них действительно мудрейший? — спросил однажды владыка у своего придворного шута.

— Это нетрудно узнать, о владыка,— с готовностью ответил шут.— Прикажи изготовить пять бархатных шапок с тюрбанами и два из них украсить пером фазана. А потом призови своих мудрецов. Когда мудрецы явились, шут показал им все пять шапок, потом велел прикрыть глаза повязками, надел каждому на голову одну из шапок, снял повязки и объявил:

— Тот, кто догадается, есть на его тюрбане перо или нет, и будет объявлен мудрейшим из мудрых. Можешь ли ты ответить на этот вопрос, о мудрейший Абдул?

А шут надел всем троим шапки без пера. Абдул, как и другие «мудрейшие», видел две шапки без пера у своих соперников, но есть ли перо на его собственной голове?

— Не могу, ибо боюсь ошибиться, — осторожно проговорил Абдул.

— А ты, о мудрейший Али?

— И я не могу,— ответил Али.

— А я могу! — воскликнул тотчас Ахмед.— У меня шапка без пера! Поистине, я — мудрейший из мудрых!

Если бы один из мудрецов увидел две шапки с пером, он немедля понял бы (и сказал об этом!), что его шапка — без пера. Значит:

(1) Абдул не видел двух шапок с пером.

(2) Очевидно, не видел двух шапок с пером и Али. Но он не видел и одного пера!

(3) Ахмед мог, например, рассуждать так: «Если у меня есть перо, то Али, видя одно перо и зная, что Абдул не видит двух перьев, сделал бы вывод, что у него нет пера. А раз он такого вывода не сделал, то он не видит пера на моем тюрбане. Итак, на моей голове нет пера!»

Общие делители

Однажды Ольга Петровна не успела проверить контрольные работы семиклассников. Но первый урок у нее был в шестом; вот она и решила дать шестиклассникам задание, а тем временем проверить работы седьмого класса.

Ольга Петровна написала на доске 12 шестизначных чисел вида $\overline{авсавс}$ (например, 283283) и предложила найти как можно больше общих делителей этих двенадцати чисел. Но уже через 3 минуты Таня подняла руку:

— Ольга Петровна, я нашла 7 общих делителей для всех данных чисел!

Можете ли вы найти эти общие делители так же быстро?

Решение: любое число вида $\overline{авсавс}=\overline{авс}\cdot 1001$ (например, $283283=283\cdot 1001$); каждое такое число делится на $1001=7\cdot 11\cdot 13$ и, следовательно, на $7\cdot 11=77$, на $7\cdot 13=91$, на $11\cdot 13=143$. Значит, общими делителями всех чисел указанного вида будут 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001. Эти делители и нашла Таня.

Какой день недели?

— Помнится, в Татьянин день, 25 января, я была в Политехническом музее на очень интересной лекции,— вспоминала Таня летом.

— 25 января?— переспросил Сережа.— А какой день недели это был?

— Не помню, уже несколько месяцев прошло. Но знаю, что три воскресенья в январе пришлись на четные числа.

— Ну, этого достаточно.

Так какой же день недели был 25 января?

По справедливости

В 1263 г. арабский ученый Захария-ибн-Мухаммед Казвини* (1203 — 1283) составил обширный трактат «Космография», своего рода энциклопедию сведений о мире. Трактат содержит и математические проблемы. Вот одна из проблем, рассмотренная в трактате Казвини.

— Жили-были двое. У одного было три «хлеба», у другого — два. Когда они хотели съесть их, подошел третий, и они съели весь хлеб втроем, разделив его поровну. Уходя, третий оставил 5 дирхемов** и сказал: разделите по справедливости!

Обладатель двух хлебов потребовал 2 дирхема, оставляя другому 3. Но люди рассудили иначе...

Мы прервем здесь рассуждение Казвини и предложим читателю самостоятельно распределить эти 5 дирхемов *по справедливости*.

Пленники царя Дадона

Рассказывают, что в одном из своих походов царь Дадон захватил сто пленников. Вернувшись, он повелел посадить их в сто одиночных камер, а вдоль коридора, в который выходили двери камер, нарядил круглосуточную стражу.

Общий ключ от всех камер царь Дадон всегда носил на своем поясе. Если этот ключ поворачивали в замке любой камеры на один оборот, дверь отпиралась, делали еще один оборот — дверь снова запиралась и т. д.

Перед своим днем рождения царь Дадон решил было отпустить пленников на свободу. Он послал одного из своих адъютантов с приказом повернуть ключ в замке каждой камеры на один оборот. И это было исполнено. Однако день рождения царя еще не наступил, и стража бдительно охраняла пленников.

Едва только адъютант принес ключ обратно, царь Дадон передумал. Он послал другого адъютанта с приказом повернуть

---

*Старинный город Казвин находится в северной части Ирана.

**Дирхем — денежная единица и монета, имевшая хождение во многих странах мусульманского мира в течение сотен лет.

ключ на один оборот в замках второй, четвертой, шестой..., т.е. каждой камеры с четным номером. Затем третий посланец повернул ключ на один оборот в замках третьей, шестой, девятой, двенадцатой и т. д. камер; четвертый — во всех, номера которых делятся на 4.

Точно так же поступили по приказу царя Дадона все последующие посланцы вплоть до сотого, который повернул ключ на один оборот в замке сотой камеры. После этого наступил, наконец, день рождения Дадона. Стража была снята, и пленники, камеры которых оказались отпертыми, получили свободу. Сколько же пленников отпустил на свободу царь Дадон?

Шестизначное число

Педагог и историк математики Иван Яковлевич Депман (1885 — 1970) написал несколько занимательных книжек для учащихся. Мы приведем (с некоторыми сокращениями) одну из задач, подробно разобранных им в книге «Рассказы о решении задач» (Ленинград, 1964).

> Найти шестизначное число M, которое при умножении на 2, 3, 4, 5, 6 дает тоже шестизначное число, записанное теми же цифрами (разумеется, в другом порядке).

Обозначим цифры искомого числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,а само число $M=\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}$.

Решение мы разобьем на отдельные этапы.

1. Вряд ли можно надеяться «угадать» требуемое число. Поэтому стоит подумать, как найти отдельные цифры этого числа. Ну, хотя бы первую цифру x_1. Всякая ли цифра может стоять на первом месте? Скажем, может ли быть $x_1=4$? Т. е. может ли искомое число иметь вид $M=\overline{4x_2x_3x_4x_5x_6}$?

Если такое шестизначное число умножить на 3, то оно станет семизначным, а это противоречит условию. Даже если первая цифра числа будет 2, то, умножив число M на 5 или на 6, мы обязательно получим семизначное число.

Итак, установлено, что $x_1=1$, т. е. $M=\overline{1x_2x_3x_4x_5x_6}$.

2. Первая цифра числа $2M$ (или $M+M$) будет, очевидно, 2 (или 3); число $3M$ (или $2M+M$) будет иметь первой цифрой 3 (или 4) и т. д. Значит, первые цифры чисел M, $2M$, $3M$, $4M$, $5M$, $6M$ все разные и идут в возрастающем порядке. Значит, все шесть цифр первоначального числа M тоже разные, причем среди них, очевидно, не может быть 0.

3. Стоит подумать о цифре x_6 — последней цифре числа M. Может ли быть, например, $x_6=5$? — Нет, потому что в числе $2M$ на последнем месте оказался бы нуль, а мы уже знаем, что в числе M нет нуля. По этой же причине x_6 не может быть равным 2, 4, 6, 8. Значит, для x_6 остаются только три возможности: 3, 7 или 9.

Может ли быть $x_6=3$?

Если $x_6=3$, то числа M, $2M$, $3M$, $4M$, $5M$, $6M$ будут иметь в разряде единиц 3, 6, 9, 2, 5, 8. Это легко установить с помощью таблицы умножения. И, следовательно, шестизначное число M состоит именно из этих шести цифр. А мы уже знаем, что эти числа содержат единицу. Получилось противоречие. Значит, наше предположение неверно: x_6 не равно 3.

4. Точно так же можно убедиться, что x_6 не равно 9 (убедись в этом, читатель!). Поэтому если число M вообще существует, то $x_6=7$. Все другие возможности мы исключили. А умножая 7 на 2, 3, 4, 5, 6, мы получаем, что цифра единиц будет соответственно 4, 1, 8, 5, 2. Из *этих цифр и состоит M.*

5. Сведем полученные результаты в таблицу (рис. 7) и постараемся определить x_2. Может ли быть x_2 равно 2?

Но тогда в числе $3M$ первая цифра окажется тройкой! А тройки среди цифр числа M (и всех чисел, кратных M) не существует!

Далее, x_2 не может быть цифрой 5, так как в этом случае $2M$ начиналось бы с цифры 3. Значит, $x_2=4$.

6. Подобными же рассуждениями можно определить остальные цифры числа M. Но можно сделать это гораздо проще.

Совершенно очевидно, что в каждом столбце таблицы стоят *шесть разных цифр*, тех же, которые стоят в первом или последнем столбце и сумма которых $1+2+4+5+7+8=27$. Складывая все эти шестизначные числа, мы получим 27 единиц, 27 десятков, 27 сотен и т. д., т. е.

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & & & & & & 2 & 7 \\
 & & & & & 2 & 7 & \\
+ & & & & 2 & 7 & & \\
 & & & 2 & 7 & & & \\
 & & 2 & 7 & & & & \\
 & 2 & 7 & & & & & \\
\hline
21M= & 2 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 7
\end{array}
\qquad \text{или } M=\frac{2999997}{21}.
$$

M	1	x_2	x_3	x_4	x_5	7
$2M$	2	.	.	.	.	4
$3M$	4	.	.	.	.	1
$4M$	5	.	.	.	.	8
$5M$	7	.	.	.	.	5
$6M$	8	.	.	.	.	2

Рис. 7

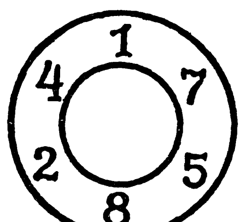


Рис. 8

Итак, $M = 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7$

$$\begin{aligned} 2M &= 2\ 8\ 5\ 7\ 1\ 4 \\ 3M &= 4\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1 \\ 4M &= 5\ 7\ 1\ 4\ 2\ 8 \\ 5M &= 7\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5 \\ 6M &= 8\ 5\ 7\ 1\ 4\ 2 \end{aligned}$$

Ответ: искомое число $M = 142857$.

Замечание. Если найденные шесть цифр расположить по кругу, то все они получатся при движении по этому кругу (против часовой стрелки). Такой способ образования чисел из заданных цифр (или слов из заданных букв) и можно назвать «круговой перестановкой» (рис. 8).

Круговые перестановки (цифр, букв и других элементов) находят широкое применение в естествознании и в технике.

Котята

Наташа нашла голодного котенка и принесла его домой. У нее всегда жили несколько котят, которых она очень любила. Но неохотно говорила в классе, сколько их: боялась, что подружки будут над ней смеяться. А когда соседка по парте очень уж настаивала, Наташа сказала:

— Три четверти всех моих котят и еще три четверти котенка.

Соседка решила, что Наташа сказала глупость, и обиделась.

Но Наташа в самом деле сообщила, сколько у нее котят — стоило только подумать.

Сколько же котят было в это время у Наташи?

Очевидно, три четверти котенка составляют оставшуюся четверть общего количества котят. Значит, общее количество можно получить делением:

$$3/4 : 1/4 = 3.$$

Проверяем: три четверти этого количества составляют

$$3/4 \cdot 3 = 9/4 = 2\ 1/4; \quad 2\ 1/4 + 3/4 = 3.$$

Итак, у Наташи жили в это время три котенка.

Искусство перевода

Рассказывают, что великий физик, создатель теории относительности Альберт Эйнштейн (1879 — 1955), будучи еще первоклассником, спросил, что такое алгебра.

— Алгебра — это арифметика для лентяев, которым лень думать и решать задачи арифметически,— ответил отец (по другим сведениям — дядюшка).

Многие арифметические задачи, действительно, решаются с помощью алгебры проще, если удается по условию задачи составить уравнение.

Приведем некоторые примеры.

Сколько гусей в стае?

Вот старинная народная задача.

Летела стая гусей, а навстречу один гусь.

— Здравствуйте, сто гусей! — прокричал гусь.

— И вовсе нас не сто,— ответил вожак стаи.— Но если бы к нашей стае еще такую же, да полстаи, да четверть стаи, да ты, гусь, с нами, тогда было бы сто.

Сколько же гусей было в стае?

Чтобы решить эту задачу (и многие другие задачи), удобнее всего заняться «переводом»: перевести условие задачи, сообщение вожака стаи, с обиходного языка на математический, на язык равенства, обозначив число гусей в стае через x (см. табл.).

Математическая запись привела нас к уравнению, решить которое довольно просто. Сложим все неизвестные величины («приведем подобные члены») в левой части, а известную единицу перенесем вправо (если не прибавлять «тебя, одного гуся», то будет, очевидно, не 100, а 99):

$$x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=100-1;$$

$$2\frac{3}{4}x=99;\ x=99:2\frac{3}{4}=99:\frac{11}{4}=36.$$

Обиходный язык	*Математическая запись*
Если к нашей стае	x
Еще такую же стаю	$(x)+x$
Да полстаи	$(x+x)+\frac{1}{2}x$
Да четверть стаи	$(x+x+\frac{1}{2}x)+\frac{1}{4}x$
Да ты (один), гусь, с нами	$(x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x)+1$
Было бы сто	$x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$

Итак, в стае было 36 гусей. Проверяем:

$$36+36+\frac{1}{2}36+\frac{1}{4}36+1=36+36+18+9+1=100.$$

Сколько лет папе и маме?

Когда Сереже исполнилось 12 лет, он поинтересовался, сколько лет папе и маме.

— Вместе нам троим 85 лет,— сказал папа.— А мама моложе меня на три года.

Предположим, папе x лет; маме на 3 года меньше, т. е. $(x-3)$. А всем вместе $12+x+(x-3)=85$.

Получилось уравнение, которое нетрудно решить:

$$12+x+(x-3)=85;$$
$$12+x+x-3=85;$$
$$2x=85-12+3=76;$$
$$x=76:2=38.$$

Итак, Сережиному папе 38 лет, а маме 35 лет. Проверяем: $12+38+35=85$, т. е., действительно, «всем троим 85 лет», хотя складывать возраст разных людей можно только условно.

В дальнейшем тебе встретятся, читатель, и более сложные уравнения, и системы из нескольких уравнений, например два уравнения с двумя неизвестными. Решить уравнение (или систему уравнений) можно чаще всего стандартными приемами, по общим правилам. А составлять уравнение приходится для каждой задачи или группы задач по-своему.

Галки и палки

Рассмотрим еще одну старинную задачу.

Прилетели галки, сели на палки.
Сели по одной — галка лишняя,
Сели по две — палка лишняя.
Сколько было галок,
Сколько было палок?

Пусть галок было x, а палок — y. Если на каждую из y палок сядет по одной галке (y галок), то еще одна галка окажется лишней; иначе говоря, количество галок на одну больше, чем количество палок, т. е.

$$x=y+1. \tag{1}$$

А если на каждую палку сядут по две галки, то на одной (лишней) палке галок не будет; галки займут не все y палок, а только $(y-1)$ палок. Значит, количество галок $2\cdot(y-1)$, т. е.

$$x=2(y-1). \tag{2}$$

Теперь можно записать систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x=y+1; \\ x=2(y-1). \end{cases}$$

Левые части этих уравнений одинаковы, значит, равны и правые части:

$$y+1=2(y-1),$$

откуда $y=3$, а из (1) следует, что $x=3+1=4$.

Проверяем: 1) три галки могут сесть по одной на три палки, одна галка лишняя;

2) четыре галки могут сесть на две палки по две, тогда третья палка лишняя.

Ответ: 4 галки и 3 палки.

А теперь, читатель, реши аналогичную задачу самостоятельно.

Лошадь и Верблюд

Однажды Лошадь и Верблюд несли мешки с поклажей,
А сколько каждый нес из них, пусть кто-нибудь мне скажет.
Сказала Лошадь:
— Ты возьми один мешок, Верблюдик!
— Тогда,— ответил тот,—
Моя поклажа вдвое больше будет!
Вот если б ты с моей спины мешок сняла,
Поклажа наша равной бы была!
... Так рассуждая меж собой, несли они поклажу,
А сколько каждый нес из них, пусть кто-нибудь мне скажет.

На приеме у княгини Тверской

«Княгиня Бетси, не дождавшись конца последнего акта, уехала из театра. Только что она успела ... обсыпать свое длинное бледное лицо пудрой, стереть ее и приказать чай в большой гостиной, как уже одна за другой стали подъезжать кареты к ее огромному дому на Большой Морской. Гости выходили на широкий подъезд, и тучный швейцар беззвучно отворял огромную дверь, пропуская мимо себя приезжавших.

Почти в одно и то же время вошли хозяйка с освеженною прической и освеженным лицом из одной двери и гости из другой — в большую гостиную с темными стенами, пушистыми коврами и ярко освещенным столом, блестевшим под огнями свеч белизной скатерти, серебром самовара и прозрачным фарфором чайного прибора. Хозяйка села за самовар и сняла перчатки... Общество разместилось, разделившись на две части...

— Расскажите нам что-нибудь забавное, но не злое,— сказала жена посланника, великая мастерица изящного разговора, обращаясь к дипломату...»

Это начало одной из глав романа «Анна Каренина» могло бы иметь и другое, вполне правдоподобное продолжение. У княгини Бетси Тверской, жены двоюродного брата Анны Карениной, было сто двадцать тысяч рублей годового дохода — состояние по тем временам огромное. А в великосветском обществе модно было в те годы проявление филантропии. Аристократы снисходили время от времени до пожертвований нескольких десятков рублей «в помощь голодающим» — т. е. возвращали ими же обобранным крестьянам небольшую долю своих «доходов».

Не претендуя на художественное мастерство Л. Н. Толстого, мы попробуем в том же жанре продолжить описание приема у княгини Тверской в несколько ином направлении.

— Сегодня, господа, мы решили устроить лотерею,— объявила хозяйка дома, когда разговор в обществе на какой-то момент остановился.— Уведомляю вас, что изготовлено всего сто билетов; каждый билет продается за десять рублей...

— Превосходно, княгиня! — не утерпел подполковник с флигель-адъютантским вензелем.— Благоволите на мое имя...

— Обождите, граф,— остановила его княгиня Бетси.— Я еще не объяснила всех условий. Итак, продается сто билетов по 10 рублей каждый.— Она подняла над головой сложенные веером билеты.— Объявляется главный выигрыш двести рублей, два других выигрыша по сто рублей и еще два по пятьдесят рублей. Остальные деньги, всего пятьсот рублей, будут отосланы в помощь голодающим Черниговской губернии...

— Превосходно, княгиня,— повторил подполковник.— Благоволите продать мне десять билетов по вашему собственному выбору! — и он протянул княгине хрустящую «катеньку» *.

— Извольте сами выбрать, граф.— Княгиня Бетси с обворожительной улыбкой протянула к нему веер, из которого граф выбрал себе билеты. Получив взамен новенькую сторублевую ассигнацию, княгиня Бетси бережно уложила ее в приготовленную шкатулку.

— А мне, княгиня, позвольте билетики под нумерами семь, семнадцать и семьдесят семь,— обратился к хозяйке барон Тушкевич, красивый белокурый молодой человек, похожий на французского короля Людовика Пятнадцатого.— Мне всегда, видите ли, везет на числа, оканчивающиеся семеркой. Вот увидите, я непременно выиграю...

Впрочем, и для него, обладателя постоянного многотысячного дохода, этот выигрыш не мог представлять особого интереса.

Гости друг за другом подходили к хозяйке за билетами...

Лотереи в XVII веке и в наши дни

Однажды телевидение показало спектакль «Не заплачу́» (по пьесе современного итальянского драматурга Эдуардо де Филиппо). Мелкий конторский служащий успешно играет в лотерее, делая ставки на числа, подсказанные ему во сне ду́хами умерших родственников. Во сне ему привиделся и дух отца нынешнего хозяина конторы, который якобы посоветовал: «Поставь, сынок, на числа один, два, три и двадцать шесть».

Служащий последовал совету. На билет, купленный за 15 лир, выпал миллионный выигрыш. А хозяин конторы, придравшись к тому, что «выигрышные» числа отец хотел подсказать ему самому, а не его служащему, пытается присвоить себе выигрыш и «не заплатить» служащему.

Уже с давних пор люди играли в кости, карты и другие игры, заключали пари («бились об заклад») по поводу исхода предстоящих событий. От невинных забав постепенно переходили к игре на значительные ставки.

Особенно широкое распространение получили азартные игры с развитием денежного обращения. Христианской церкви пришлось издавать указы и постановления, запрещавшие или ограни-

---

*«Катенька» — обиходное до 1917 г. название сторублевой купюры, на которой был изображен портрет императрицы Екатерины.

чивающие игру. Английским участникам третьего крестового похода в конце XII в. не разрешалось проигрывать более 20 шиллингов за 24 часа. Издавались указы о запрещении игры и на Руси, например Екатериной II в 1782 г.

Родиной числовых лотерей является Италия. В конце XVI в. в Генуе ежегодно выбирали 5 сенаторов из 100 в «светлейшую коллегию». Многие пытались угадать, кого выберут. С 1576 г. генуэзцы стали заключать денежные пари. Вскоре эти пари вошли в обычай.

Каждый желающий мог назвать, т. е. записать, имена сенаторов, которые, как он предполагал, будут избраны. Богатые генуэзские купцы организовали контору, которая принимала ставки на любую указанную комбинацию имен сенаторов. Если этих сенаторов действительно выбирали, игрок получал определенный выигрыш — во столько-то раз больше его ставки.

С 1620 г. вместо имен сенаторов стали просто писать числа от 1 до 90, из которых случайным образом вытягивались 5 номеров. Номера таким образом «разыгрывались», и эти розыгрыши получили название «генуэзское лото» или «генуэзская лотерея». Лотерея приносила доход. Через некоторое время коронованные владыки запретили «частным лицам» проведение лотерей, объявив их государственной монополией.

Ставки в генуэзской лотерее можно было делать, например, на один номер из 90. Если этот номер оказывался среди вытянутых, владелец билета получал 15-кратную ставку. Но ясно, что вероятность выигрыша составляет $\frac{5}{90}$, или $\frac{1}{18}$; значит, *в среднем* выигрывал каждый 18-й билет (а не каждый 15-й, что было бы справедливо). Именно поэтому устроители лотереи получали значительную прибыль. Можно было сделать ставку на 2 номера («амбо»), на 3 («трен»), на 4 («катерн») или даже на все 5 номеров («квин»). Однако такие билеты давали устроителям еще большее преимущество и в среднем еще большую прибыль. Если, например, покупался билет с тремя номерами, то вероятность выигрыша на такой билет $\frac{1}{11748}$, а выигрыш полагался в 5 500 раз больше ставки, т. е. в два с лишним раза меньше, чем должно быть «по справедливости». При игре на 5 номеров выигрыш в один миллион ставок может выпасть в среднем один раз на 44 миллиона билетов.

... Лотерейная лихорадка очень быстро охватила всю Италию. Каждый мечтал выиграть — и, в полном соответствии с математическими законами, чаще всего проигрывал. К власть имущим и к священнослужителям посыпались жалобы, главным образом от женщин: мужчины, едва получив в руки деньги, бежали делать ставки, оставляя семью без куска хлеба. Многие совершали растраты, а потом в свое оправдание заявляли, что им якобы явился во сне святой дух и написал на стене счастливые номера... Папа римский Бенедикт XIII запретил католикам принимать участие в лотереях. Однако его преемник папа Клементий XII, нуждаясь в деньгах для пополнения своей казны, организовал свою собственную лотерею. В последующие годы лотерейная горячка проникла в Австрию, Францию и другие страны Европы. В Берлине в середине XVIII в. распевали шуточную песенку:

Чума гуляет по Востоку.
Но разве бог не справедлив?—
Он подвергает Запад року,
В нем лотереи сотворив.

Лотереи и в самом деле стали неотвратимым роком, особенно для небогатых слоев общества. Во многих городах Германии жизнь чуть ли не всего населения концентрировалась вокруг лотерей. В последние годы XVIII в. в немецком городе Люккенвальде все только и думали, и говорили о том, как же наконец выиграть в лотерее.

Вот еще одно свидетельство популярности лотерей уже в XX в. Это отрывки из книги австралийского писателя Ф. Харди «Власть без славы», вышедшей в Мельбурне в 1950 г. и вскоре переведенной на русский язык.

— Я придумал, как добыть деньги. Через две недели будут состязания почтовых голубей между Уоррагулом и Мельбурном... Мы будем принимать пари на эти гонки. Или, точнее, пари буду принимать я, а вы будете собирать ставки, — объявил Джон Уэст своим приятелям.

— Этот голубь Уарата на испытаниях покрыл дистанцию в рекордное время. А мы будем принимать ставки на всех голубей, кроме него. Деньги верные. Мы будем принимать любые ставки, три пенса, даже пенс...

Голубь Уарата в самом деле вышел победителем. Джону после уплаты комиссионных агентам осталось чистыми 11 соверенов.

Далее автор рассказывает, как с помощью этого первоначального капитала Джон Уэст основал лотерею и какие доходы от нее получал.

Любопытный рассказ о лотереях мы находим в книге американского писателя Айры Уолферта «Банда Тэккера» (Нью-Йорк, 1943).

... Это была очень популярная игра. Каждый играющий выбирал три цифры и составлял из них трехзначное число. Если выигрыш падал на это число, то игрок получал свою ставку, увеличенную в 600 раз, 600:1. Ставил 5 центов — получал 30 долларов, ставил 1 доллар — получал 600. Номера разыгрывались ежедневно, и в разные периоды выигравшее число определялось разными способами. В тот период пользовались показателями тотализатора на скачках.

Лео знал, что каждый сборщик работает на комиссионных под наблюдением контролера... Контролер также брал себе комиссионные, а остальное отдавал «банкиру» — держателю лотереи. Банкир выплачивал выигрыши, покрывал расходы по содержанию лотереи, а остальное клал себе в карман.

... Тэккер узнал про лотереи и решил создать объединение. Предполагалось сначала разорить держателей лотерей, а затем прибрать их дело к рукам. Тэккер знал, что, по существовавшему поверью, число 527 приносит удачу перед днем Благодарения — праздником в память первых колонистов — и что многие игроки ставят на это число... Тэккер решил заплатить 25000 долларов кому следовало, чтобы обеспечить выигрыш этого номера в среду накануне дня Благодарения...

... Итак, в будущую среду все лотереи лопнут. Когда же их владельцы начнут метаться в поисках денег, чтобы спасти свой бизнес, Тэккер окажется тут как тут. Он одолжит им деньги при условии, что отныне две трети доходов с каждой лотереи будут поступать в его карман.

Выигрыш в лотерею

В последнее время появилось много всевозможных лотерей: «Лотто миллион», «Фортуна», «Миг удачи» и другие. Давайте подсчитаем вероятность выигрыша, это, возможно, отобьет у некоторых охоту испытывать свою судьбу.

Пусть продан 1 млн. билетов по 100 рублей каждый. Тогда вырученная сумма составляет 100 млн. рублей, из которых 40% идет на выигрыши, а 60% — ее устроителям на покрытие расходов и прибыль. Пусть 40 млн., выделенных на выигрыши, делятся на 40 призов по 1 млн. рублей. Тогда вероятность выигрыша — отношение числа благоприятных случаев ко всем возможным — равна $40:1\,000\,000=1:25\,000$ — одной двадцатипятитысячной. Это очень маленькое число. С таким же успехом можно надеяться выиграть деньги по трамвайному билету.

Игра и стратегия

— Витька, сыграем, а? — спросил во дворе Кирилл.

— Во что?

— Да не во что, чудак человек, а на что! Ну, хоть на мороженое. Выиграешь — я тебе покупаю мороженое, проиграешь — ты мне. Согласен?

— В шахматы, что ли?

— Да не в шахматы, чудак человек. Не умею я в шахматы. Просто подкину я монетку, орел-решка. Угадаешь — выиграл, не угадаешь — проиграл. Понял?

— Чего ж не понять. Только в такую дурацкую игру я играть не буду. Давай хоть в шашки. Только ни на какое не на мороженое...

Крестики-нолики

Читатель играл, вероятно, в крестики-нолики. На девятиклеточной доске каждый из двоих противников поочередно делает ходы, т. е. ставит свой знак (крестик или нолик) в одну из клеток; выигрывает тот, кому удается первым составить целый ряд своих знаков по горизонтали, по вертикали или по диагонали. Играющие ставят крестики и нолики с определенным расчетом, выбирают определенную *стратегию*, имеющую целью, например, составить ряд крестиков, мешая при этом противнику составить ряд ноликов. Каждый «ход» — решение, которое принимает играющий, — влияет на исход игры.

Предположим, что начинает «крестик». На рисунках можно проследить примерную партию.

3	0		
2		X	
1			
	a	b	c

Положение после первого хода

3	0		
2		X	0
1			X
	a	b	c

Положение после второго хода

3	0		
2		X	0
1	X		X
	a	b	c

Положение после третьего хода «крестика»

Теперь «крестик» грозит занять клетку *b1* или клетку *c3*; одним ходом предотвратить обе угрозы «нолик» не может, поэтому «крестик» выигрывает.

Рассмотрим другую партию.

3			0
2		X	
1			
	a	b	c

	0		0
		X	
			X
	a	b	c

Теперь «крестик» обязан занять клетку *b3*, «нолик» занимает *b1*, и партия оканчивается вничью.

Игра эта очень простая. Она может быть полностью проанализирована. Оказывается, если начинающий занимает центральную клетку, а его противник — клетку вверху, внизу или сбоку, то начинающий выигрывает; если же противник первым ответом занимает угловую клетку, то выиграть начинающему не удается.

Игра в крестики-нолики ведется в условиях полной информации: каждый участник знает все правила игры и все сделанные до данного момента ходы.

Примерами стратегических игр с полной информацией являются шахматы и шашки. Каждый игрок знает расположение фигур, знает все сделанные ходы, может предвидеть (лучше или хуже) некоторые дальнейшие ходы.

В «морской бой», в карты и в домино обычно играют в условиях неполной информации: игрок знает свои карты (фишки домино), но не всегда знает карты или фишки противника, расположение кораблей.

При раздаче карт (фишек) важную роль играет случай (иногда в шутку говорят: «Его величество Случай»). При перемешивании карт (фишек) расположение их у играющих определяется случайным образом; однако во многих играх по некоторым действиям противника можно сделать разумные предположения о том, какие у него на руках карты (фишки) и соответственно выбрать выгодную стратегию.

Еще меньшей является предварительная информация во всевозможных лотереях, где разыгрываются те или иные выигрыши — денежные, вещевые, право на бесплатное путешествие и т. п. Распределение выигрышей в лотереях почти целиком зависит от «Его величества Случая»: на мой лотерейный билет может выпасть тот или иной выигрыш, а может и не выпасть. Почти целиком — это значит, что правила игры (лотереи) могут содержать какие-то ограничения: например, в большинстве лотерей на один и тот же билет не может выпасть более одного выигрыша.

Чаще всего выигрыш определяется по числам: по номеру лотерейного билета, по его серии или — при игре в «Спортлото» — по комбинации чисел, «загаданных» играющим, и т. п. Некоторые правила проведения лотерей описаны выше. Как уже сказано, почти все лотереи как в прошлые столетия, так и ныне проводятся по таким условиям, чтобы обеспечить прибыль ее устроителям.

Оказалось, что многие практические задачи — торговые, экономические, военные — также представляют собой «игры», в которых выигрышем являются производство и сбыт товаров, уменьшение расходов, прибыль, успехи в военных или транспортных операциях.

Более 40 лет назад американский ученый Дж. фон Нейман разработал математические основы теории игр и показал некоторые приложения этих «игр» в экономике.

В этой статье мы расскажем о несложных стратегических играх, т. е. играх с полной информацией. Играя в них (разумеется, не на уроках в школе!), можно учиться логично рассуждать и анализировать возникающие ситуации.

Мини-шахматы

На девятиклеточной шахматной доске расположены два белых и два черных коня (рис. 9). Каждый, кто когда-либо играл в шахматы, знает, что конь ходит буквой «Г»; вот и все правила этой несложной игры.

Каждый поочередно ходит своими конями так, чтобы они заняли поля, на которых в начальном положении стояли кони противника; выигрывает тот, кто успеет сделать это раньше. Если один из коней еще стоит на первоначальном поле, противник все же имеет право занять это поле своим конем, а «сбитого» коня поставить на любое свободное поле.

Белые могут, например, начать ходом *К a1 — c2*; черные отвечают *К c3 — a2* и т. д.

В эту игру можно играть и без «противника»; тогда сбивать коней нельзя, а нужно стараться поменять коней местами за возможно меньшее число ходов.

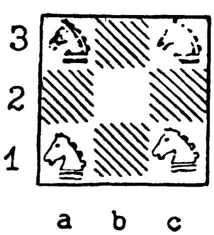


Рис. 9

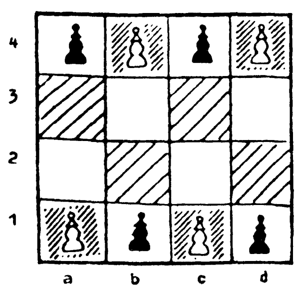


Рис. 10

Четыре на четыре

Вот начальное положение белых и черных фишек (рис. 10). Ими могут служить пешки, шашки, камешки, монетки — любые однородные предметы двух цветов. «Доску» легко расчертить на листке бумаги.

Каждый поочередно передвигает фишку своего цвета на соседнюю свободную клетку по горизонтали или по вертикали (но не по диагонали). Начинают белые. Выигрывает тот, кто сумеет занять своими фишками три последовательные клетки по горизонтали, по вертикали или по диагонали. Вот примерная партия:

1. *c*1 — *c*2 *d*1 — *c*1
2. *b*4 — *b*3 *d*1 — *b*2
3. *b*3 — *a*3 (иначе черные выиграют ходом 3. . . . *a*4 — *a*3)

3. . . . *a*4 — *b*4
4. *a*1 — *b*1 (любой ход)
5. *d*4 — *d*3 и белые выиграли.

Путь фигуриста

Для представления «Балета на льду» каток превратили в большую шахматную доску — вся ледовая площадка состояла из 64 белых и черных клеток. Отдыхая в промежутках между репетициями, фигуристы развлекались, решая шахматно-геометрические задачи. Одна была такая: двигаясь только по белым клеткам и пересекая их вершины не более чем по одному разу, переместиться из ближнего правого угла поля в противоположный по диагонали дальний левый угол, побывав в каждой белой клетке. После нескольких попыток одному из фигуристов удалось это сделать. Попробуйте повторить его маршрут. Подскажем, что он состоял из семнадцати прямолинейных отрезков.

Теорема Пифагора

Мы ознакомим читателей с одним из способов доказательства «теоремы Пифагора».

Квадрат, сторона которого имеет длину $a+b$, можно разбить на части либо как на рисунке a, либо как на рисунке b (рис. 11). Ясно, что части I, II, III, IV на обоих рисунках одинаковы. А если от равных (площадей) отнять равные, то и останутся равные, т. е.

$$c^2=a^2+b^2.$$

Впрочем, древние индусы, которым принадлежит это рассуждение, обычно не записывали его, а сопровождали чертеж лишь одним словом: СМОТРИ!

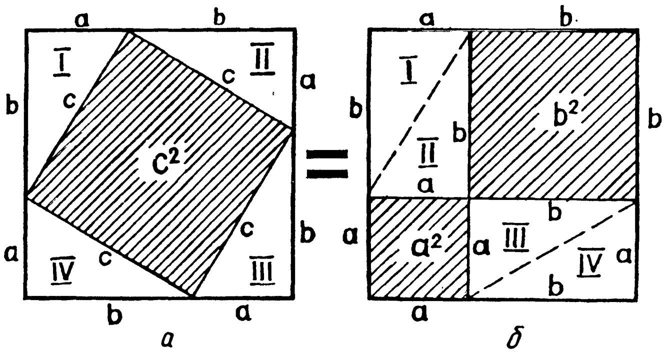


Рис. 11

Вопреки Пифагору

Дорога к реке шла мимо поля, огибая его под прямым углом.

— Гипотенуза всегда короче суммы двух катетов! — провозгласил Петя Верхоглядкин и пошел напрямик, топча молодую зелень.

Боба Белоручкин двинулся за ним.

— Стойте! — сказал Вася Дотошкин.— Во-первых, топтать посевы не полагается. А во-вторых, я могу доказать вам, что гипотенуза равна сумме катетов, и, значит, дорогу вы не сократите.

Вася начертил на земле прямоугольный треугольник и обозначил буквами его углы (рис. 12). Из середины гипотенузы (точка D) он опустил перпендикуляры на катеты.

— Смотрите,— сказал Вася друзьям,— длина ломаной $AEDFB$ равна сумме длин катетов. Теперь из середин гипотенуз каждого из двух полученных треугольников (точки K и L) снова опустим перпендикуляры на катеты. Длина восьмизвенной ломаной $AMKNDOLPB$ снова равна сумме длин катетов.

Процесс этот можно продолжать бесконечно. Последовательность ломаных будет иметь своим пределом гипотенузу. С другой стороны, длина каждой ломаной постоянна и равна сумме длин катетов. Двух пределов последовательность иметь не может,— заключил Вася,— значит, доказано: сумма катетов равна гипотенузе!

— Похоже, что это правильно,— подумав, заключил Петя и вернулся на дорогу, потянув за собой Боба.— Теорема Пифагора устарела!

Вася улыбнулся, довольный своей находчивостью. «Для того чтобы приучить друзей к порядку, можно даже погрешить против математических законов»,— решил он про себя.

Попытайтесь найти ошибку в Васином доказательстве.

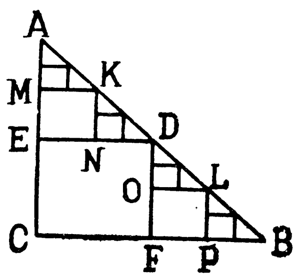


Рис. 12

Школьная типография

Когда старшеклассники пришли на собрание, они заметили на дверях свеженький, еще пахнущий краской плакатик:

10-Б

— Наши шефы, сотрудники областного издательства, обещали помочь создать школьную типографию,— сообщил директор.— Нам передали печатный станок и немного крупного шрифта, например для заголовков или для плакатов. Есть еще литеры с цифрами, знаками препинания, всякими там плюсами, минусами. Вы заметили, наверное, плакатик на дверях — это мы вчера с Ниной Васильевной сами напечатали, да еще упражнения для ее малышей.— Директор показал несколько листков с не очень аккуратно напечатанными арифметическими упражнениями

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 567 \\ 284 \\ \hline \end{array} \qquad - \begin{array}{r} 857 \\ 389 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 45684:423= \\ 342\cdot 27= \end{array} \end{array}$$

— Обещали нам прислать из типографии инструктора-печатника,— продолжал директор.— Кто желает из учеников, может вместо уроков труда печатному делу учиться. Да не все сразу,— добавил директор, увидев лес поднятых рук.

— А тексты для сочинений или изложений тоже напечатать можно? — спросила Зоя Сергеевна.— Или, например, сказки?

— Можно, Зоя Сергеевна, все можно,— ответил директор.— Вот только шрифта подкупить придется, но денег у нас маловато. А большие они у вас, эти тексты да сказки?

— Не очень большие, Николай Павлович, страниц до пяти... Скажем, десять тысяч букв, не больше.

— На десять тысяч литер у нас денег хватит. А потом будем заказы принимать, какие-нибудь пригласительные билеты, визитные карточки печатать — глядишь, немного денег заработаем, еще литер купим...

А пока дадим завхозу поручение: купить десять тысяч литер для строчных букв, заглавные у нас есть, пока хватит...

— Я заготовлю письмо, Николай Павлович,— отозвался завхоз.— Так, в русском языке всего 33 буквы, значит, по 303 литеры, а для буквы О — 304 литеры...

— Ну уж нет,— перебила Зоя Сергеевна,— буква букве рознь. Буква О или Е часто встречается, а скажем, Э или Ф — куда как реже. Выходит, половину сказки наберем, а дальше одни ФЭ печатать будем.

Все засмеялись.

— Зоя Сергеевна права,— заметил математик Валерий Константинович.— Одни буквы встречаются в текстах чаще, другие реже. Завтра я с десятиклассниками на факультативе займусь этим.

... Валерий Константинович дал нескольким участникам факультатива задание: выбрать из произведений художественной литературы разные отрывки, отсчитать по две тысячи знаков и отметить, сколько раз повторяется каждая буква. Результаты одного из подсчетов приведены в таблице:

а — 124,	е — 145,	к — 56,	п — 46,	ф — 4,	щ — 6,
б — 28,	ж — 14,	л — 71,	р — 79,	х — 18,	ъ или ь — 28,
в — 75,	з — 32,	м — 53,	с — 92,	ц — 8,	ы —32,
г — 26,	и — 123,	н — 107,	т — 106,	ч — 23,	э — 4,
д — 50,	й — 20,	о — 181,	у — 42,	ш — 12,	ю — 12,
					я — 36,
					пробел — 347
					Всего — 2000

— Частота появления букв в «обычных» текстах примерно одна и та же,— объяснил Валерий Константинович директору, который был химиком-биологом, и передал ему таблицу.— На десять тысяч знаков потребуется соответственно в пять раз больше литер, чем указано в таблице. А имеющиеся у нас дополнительно литеры для заглавных букв составят резерв на случай, если какая-либо буква встретится чуть чаще, чем в среднем. Да скажите завхозу, чтобы шпации для пробелов между словами не забыл, их сколо тысячи семисот пятидесяти штук надо!

Исследования различных русских текстов показали, что чаще других встречается буква О — в среднем 9% общего количества знаков текста, далее идут Е — 7,2%, А, И — 6,2%, Н, Т — 5,3%, С — 4,5% и т. д. Реже всего встречаются Щ — 0,3%, Э, Ф — 0,2%.

Эти подсчеты оказываются весьма полезными при формировании наборных касс, подготовке алфавитных справочников, отгадывании шифров и в некоторых других случаях.

А приведенные рассуждения типичны для исследований по статистике — науке, изучающей законы распределения случайных величин. Ну, скажем, законы распределения карт или фишек домино у играющих, законы распределения ясных и дождливых дней в данной местности, частоту рождения мальчиков и девочек в данном городе или области.

Хомо компьютерус

За несколько десятилетий своего существования компьютеры прошли разительную эволюцию.

Между первыми электронно-ламповыми чудовищами, занимавшими огромные залы, и компактными современными персоналками (именно так профессионалы называют персональные компьютеры) разница значительно бóльшая, чем между каравеллами Колумба и современным океанским лайнером.

С компьютером работают люди. Компьютеры работают для людей. Поэтому успешная компьютеризация невозможна, если рассматривать машины в отрыве от человека, от его сильных и слабых сторон, его целей и потребностей.

Люди совершенствуют компьютеры, чтобы они лучше соответствовали своему назначению. ЭВМ учатся видеть, слышать, говорить, рисовать; растут объем их памяти и скорость выполнения логических и арифметических операций; уменьшаются размеры и цена; повышается надежность.

Однако до самого последнего времени мало кто обращал внимание на то обстоятельство, что общение с ЭВМ приводит к изменению самих людей, их поступков, привычек, характеров и даже судеб*.

На наших глазах рождается новое социальное явление — homo computerus**.

... Программисты, системные аналитики, администраторы баз данных... Полвека назад о таких профессиях не слышал ни один человек в мире. А сейчас... Что это за люди? Чем они отличаются от других представителей homo sapiens — человека разумного?

Остановимся на некоторых, до сих пор не всеми осознанных особенностях компьютерных профессионалов.

---

*Есть пословица: «Посеешь поступок — пожнешь привычку, посеешь привычку — пожнешь характер, посеешь характер — пожнешь судьбу».

**Хомо компьютерус (лат.) — человек компьютеризованный.

Язык — выразитель мысли

Все мы с детства «владеем родным языком». Что же это значит? Или, точнее: что мы понимаем под «владением»?

Каждый человек считает, что умеет правильно выражать собственные мысли на родном языке и понимать мысли других людей, говорящих на этом языке.

Как ни парадоксально это звучит, но большинство людей не умеют говорить на своем родном языке. Говорить — в смысле правильно выражать свои мысли.

Прислушаемся к салонному разговору. Хозяйка развлекает беседой одного из первых гостей, собирающихся на вечеринку.

— Скажите, Сергей Петрович, у вас есть дача?

— Нет, Вера Николаевна, отдыхать езжу на юг.

— А машины у вас тоже нет?

— Да.

— Что значит «да», Сергей Петрович?

— Тоже нет.

Говоря «да», Сергей Петрович хочет сказать (в этом контексте) «нет».

В Теннесси и в Кентукки

... Некий бизнесмен подал в фирму, продающую персональные компьютеры, жалобу: он неоднократно получал на свой запрос бессмысленные ответы. По жалобе прибыл консультант-программист. Он предложил бизнесмену еще раз набрать на клавиатуре его запрос.

Тот набрал:

КЛИЕНТЫ, ПРОЖИВАЮЩИЕ В
ТЕННЕССИ И В КЕНТУККИ

На экране сразу же появилась надпись:

НЕ ЗНАЧАТСЯ

— Видите?! — кипятился бизнесмен.— А я точно знаю, что и в том, и в другом штате у нашей фирмы есть клиенты!

Консультант попытался было объяснить незадачливому бизнесмену, что ни один человек не может постоянно проживать и в штате Теннесси, и в штате Кентукки.

— Вы должны четко сформулировать, что именно вы хотите получить в ответ на ваш запрос,— терпеливо объяснял консультант.

— Перестаньте учить меня! — вскипел бизнесмен.— Я сам знаю все гораздо лучше вас! Я хочу, чтобы в списке был каждый клиент из Теннесси и каждый клиент из Кентукки!

— Сейчас получите этот список,— ответил консультант и набрал:

КЛИЕНТЫ, ПРОЖИВАЮЩИЕ В
ТЕННЕССИ ИЛИ В КЕНТУККИ

И секунду спустя на экране появились фамилии с адресами. Затем консультант нажал клавишу «Печать» — и через полминуты вручил бизнесмену требуемый список.

— А если вы хотите получить отдельные списки клиентов из Теннесси и клиентов из Кентукки,— продолжал консультант,— то лучше набрать два отдельных запроса.

Минуту спустя компьютер напечатал два отдельных списка.

Люди думают и говорят на человеческом языке (русском, английском, немецком...), а не на языке формальной логики. Человеческий язык гораздо богаче формального, он насыщен различными оттенками, но обращаться на нем к компьютеру пока еще невозможно: этот язык недостаточно однозначен. Человек, наделенный здравым смыслом (скажем, секретарь бизнесмена), сразу понял бы, что требуется список всех клиентов, проживающих в Теннесси, и всех, проживающих в Кентукки, но не тех, кто проживает в Теннесси и в Кентукки одновременно, чего, конечно, быть не может.

Как разделить сокровище

Знаете ли вы способ самого справедливого деления буханки хлеба, кучки драгоценностей или чего-нибудь еще на двоих? Механизм простой и изящный: один участник делит на две любые доли (пусть неравные, ему же хуже!), а второй выбирает ту из получившихся долей, которая ему кажется больше (лучше) другой.

Но как быть, если участников трое? И из них любые двое могут быть в тайном сговоре против третьего? Ответ таков: первый делит на три любые доли. Второй выбирает самую, по его мнению, *плохую*. Если с этим согласен третий, то ее отдают тому, кто делил, а если не согласен, то ее забирает третий. Затем оставшиеся две доли опять соединяются и уже известным способом делятся на тех двоих, которые пока ничего не получили.

Решение (и даже просто проверка решения) таких задач представляется нам чрезвычайно увлекательным. Этот факт не имел бы такого серьезного значения, если бы не выяснилось, что те, кого объединяет с нами любовь к решению и разбору подобных задач, чаще всего оказываются хорошими программистами или математиками. И наоборот, люди, далекие от ЭВМ и от математики, чаще всего не проявляют к подобным задачам интереса, за исключением разве что профессиональных юристов.

Интересно ли вам играть в новую игру? Быстро ли приспосабливаетесь к новым, непривычным для вас правилам игры? Нравится ли вам получать неожиданные результаты, пользуясь средствами, которые на первый взгляд для этого совсем не подходят? Математики и программисты на эти вопросы обычно отвечают положительно.

Наверное, это не случайно.

Итак, психология, логика мышления и даже поведение профессиональных программистов (как уже сказано, их только в нашей стране уже почти полмиллиона) во многих случаях отличаются от психологии, мышления и поведения «обычных» людей. Этот факт, находящий множество подтверждений, можно объяснить двояко: программистами становятся почти исключительно люди, изначально обладающие некоторыми особенностями, либо на их мышление накладывает отпечаток длительная профессиональная деятельность.

Ответ точный или ответ полезный

... Два человека летели на воздушном шаре, попали в бурю и заблудились. Через несколько часов они приземлились в совершенно незнакомом населенном пункте и, не вылезая из корзины шара, спросили прохожего:

— Скажите, пожалуйста, где мы находимся?

— Вы находитесь в корзине воздушного шара,— ответил абориген.

— Наверное, это программист,— задумчиво сказал один из воздухоплавателей другому.— Только программист может дать такой абсолютно точный и абсолютно бесполезный ответ.

Когда специалисту — консультанту в какой-либо технической области — задают вопрос по специальности, то хороший консультант задумывается: а действительно ли спрашивающего интересует именно то, о чем он спросил? Очень часто бывает, что нужен ответ на другой, несколько более общий вопрос, может быть, совет совсем из другой области. Точный ответ на вопрос «Как лучше всего колоть орехи имеющимся у меня микроскопом?» гласил бы, что микроскоп удобнее всего держать за тубус, а орех положить на твердую, но не скользкую поверхность. Однако полезный ответ на этот вопрос состоит в том, что колоть прибором орехи не следует, для этого есть специальные инструменты.

Итак, верный, точный, правильный ответ на заданный вопрос часто оказывается бесполезным или даже вредным.

К сожалению, длительное общение с компьютерами, которые сами, как правило, дают только точные ответы, приводит к тому, что профессионалы часто почти автоматически начинают общаться с людьми в такой же строго бесполезной манере. Когда профессионалу задает вопрос тоже профессионал, то он рассчитывает на формальный, строгий, точный ответ, т. е. он старается сформулировать именно тот вопрос, точный ответ на который его на самом деле интересует. Выше мы приводили «не совсем точный» запрос бизнесмена, еще не научившегося точно формулировать свои запросы.

... А вот вопрос задает «обычный» человек:

— Могу ли я доехать на этом трамвае до вокзала?

— Да,— отвечает программист.

Ответ верный. Может доехать. Но трамвай-то идет в данный момент в другую сторону! Спрашивающий может проехать 17 остановок до конца маршрута, затем еще 26 остановок в обратную сторону и действительно доедет до вокзала. Полезный же ответ состоял даже не в том, что надо проехать на трамвае с тем же номером 10 остановок в обратную сторону, а в том, чтобы воспользоваться останавливающимся тут же автобусом-экспрессом, который будет у вокзала через пять минут и подходит ближе к перрону.

Однако это ответ на вопрос «Как лучше добраться до вокзала?», а такого вопроса программисту не задавали!

Зачем нужны «профессиональные идиоты»

«Профессиональный идиот» — это не всегда буквальная характеристика. В коллективах, создающих сложные — и не только компьютерные — системы, так называют высококвалифицированных профессионалов, в чьи задачи входит нахождение слабых мест в сдаваемых разработках. Они получают в свое распоряжение систему непосредственно перед или сразу после прохождения ОТК и стараются вывести ее из строя законными способами.

Когда представитель этой профессии возьмется за очередную модель телевизора, то он, вероятно, попробует:

— включить ее в сеть не с тем напряжением — не должно быть ничего хуже сгоревшего предохранителя;

— выключить из сети не выключателем, а просто вынуть вилку из розетки;

— одновременно нажать две или более кнопок выбора программы;

— перевести все регуляторы в крайнее положение (можно попробовать несколько комбинаций) и т. д.

Работа «профессионального идиота» чрезвычайно важна. Именно она позволяет находить в системах места, имеющие недостаточную «защиту от дурака»*. При неполной проверке особых ситуаций возможно, например, что из-за ошибки одного билетного кассира будет надолго парализована продажа железнодорожных билетов во всем городе или даже в нескольких городах. Поэтому в качестве «профессиональных идиотов» обычно используются специалисты с большим собственным опытом работы по созданию сложных систем. Они могут чутьем уловить места, где разработчик не предусмотрел достаточной защиты программы от маловероятной ошибки человека или оборудования.

---

*«Защита от дурака», как и выражение «профессиональный идиот», не метафора, а вполне серьезный, знакомый специалистам термин, относящийся к надежности человеко-машинных систем. Это, иначе говоря, защита от непродуманных действий при пользовании системой — скажем, тем же телевизором или нагревательным прибором.

Если кофеварку или другой электрический водонагревательный прибор включить без воды, прибор выйдет из строя. Поэтому во многих таких приборах предусмотрена «защита от забывчивых»: если вода не налита, нагревательный элемент не включается.

Длительная работа в качестве «профессионального идиота» создает привычку к анализу самых невероятных для обычных людей ситуаций. Это может показаться страшно скучным, а сам такой специалист — неприятным собеседником или попросту «занудой». Но анализ некоторых не вполне обыденных ситуаций показывает, что над ними стоит все же поразмыслить.

Робовладельцы, проходите техминимум!

К девятнадцатому дню рождения Сереже подарили робота. Это дядя Володя, завлаб какого-то НИИ, постарался. А чтобы не отвлекать гостей, он запрограммировал включение «Робика» только на следующее утро.

Утром, едва проснувшись, Сережа позвал своего помощника:

— Робик! Для начала почисть мне ботинки.

— Как это сделать? — спросил робот металлическим голосом.

— Выйди в переднюю, найди под вешалкой два коричневых ботинка, там же достань из шкафа банку с коричневой мазью, нанеси по 3 грамма мази на каждый ботинок и растирай щеткой до блеска.

Когда вчерашний именинник вышел в переднюю, робот как раз заканчивал растирать абрикосовый джем на его правом ботинке. Сережа было возмутился, но робот резонно возразил, что выполнил все, как было приказано. Ну, а если в шкафу более одного сосуда с коричневыми мазями, то ... Одним словом, «шеф, отдавайте приказания точнее».

Ну что тут скажешь безмозглой машине? Очевидно, приказание и в самом деле следовало сформулировать точнее...

К сожалению, формулировать приказания точнее Сережа так и не научился. В тот же день он взял «Робика» в коллектор школьных учебных пособий, где работал кладовщиком, привел в пыльную кладовку и приказал:

— Выброси отсюда все глобусы, а другие предметы не трогай.

— Какие предметы являются глобусами? — проскрипел робот.

— Округлые предметы различных размеров, соединенные с подставкой более тонким стержнем,— сказал хозяин, предварительно осмотревшись и не увидев в кладовке других «округлых» предметов.

Это приказание дорого обошлось Сереже. Робот быстро расправился с глобусами, потом с нечеловеческой силой схватил хозяина за округлую голову и выбросил из кладовки, чуть не сломав при этом «более тонкий стержень». Проведя месяц на больничной койке в гипсе «по самые уши», Сережа категорически отказался иметь дело с любой самодвижущейся техникой.

Робовладельцы! Учитесь излагать свои мысли как можно точнее! Приобретая робота, не забудьте пройти техминимум по культуре речи!

Как выпить море?

Истории и литературе известно немало случаев, когда от выполнения обязательства удавалось избавиться по причинам... нечеткой формулировки этих обязательств.

В пьесе Г. Фигейредо «Эзоп» («Лиса и виноград»), которая шла и на сценах московских театров, показаны события, имевшие место более двух тысяч лет назад. Философ Ксанф дал необдуманное обязательство отдать все свое имущество. Потом одумался и стал искать возможность сохранить состояние, но не потерять уважения сограждан.

Ксанф (пишет и говорит вслух): «Философ Ксанф обязуется пойти завтра на берег Самоса и выпить море. Если он не выпьет море, он отдаст все свое состояние, свой дом и своих рабов...»

Через некоторое время Ксанф в беседе со своим рабом Эзопом жалеет о данном им обязательстве.

Ксанф: Я подписал обязательство отдать свой дом, если не выпью море.

Эзоп: Выпей море, Ксанф!

Ксанф: Эзоп, скажи, что мне делать? Как сохранить мой дом?

Эзоп: Пойди к морю и скажи людям, что ты намерен выполнить свое обещание — выпить море. Так и скажи: я выпью море. Только море. Без воды рек, впадающих в него. Потом предложи: отделите воды рек от морской воды, и я выпью всю воду, оставшуюся в море!

Ксанф: ... и так как это невозможно, то я сохраню свой дом... Замечательно придумано!

В заключение мы приведем (со значительными сокращениями) отрывок из новеллы* Джованни Фиорентино «Венецианский купец», иллюстрирующий, как недостаточная четкость текста договора позволила оспорить его и заставить кредитора отказаться от взыскания долга.

*Эта классическая новелла, вошедшая в сборник «Il pecorone» (1378), была позднее использована Шекспиром для одноименной пьесы, которая с успехом шла на сцене московского театра им. Е. Вахтангова полвека назад. Перевод автора.

Фунт мяса, но ни капли крови!

Мессер Ансальдо одолжил у ростовщика десять тысяч дукатов с условием, что если он не вернет их до ближайшего дня святого Иоанна, то ростовщик имеет право вырезать у мессера Ансальдо фунт мяса из любой части тела...

Они изложили судье дело, причем каждый приводил свои доводы. Судья (который стремился помочь мессеру Ансальдо откупиться от ростовщика любыми деньгами, но избавить его от расплаты кровью) внимательно прочитал текст договора и обратился к ростовщику:

— Я думаю, что ты можешь взять сто тысяч дукатов и отпустить доброго человека...

— Это меня не устраивает,— отказался ростовщик.

Тогда было решено рассмотреть дело в судебном заседании.

Судья вызвал мессера Ансальдо и указал на него ростовщику:

— Итак, суд постановил, что ты можешь вырезать у него фунт мяса из любой части тела. Вырезай! Только смотри, чтобы ты точно использовал свое право... — Судья послал за палачом, велел принести топор и плаху и продолжал: — Но если ты прольешь хоть каплю крови мессера Ансальдо, то тоже будешь казнен, ибо в договоре ничего не указано о крови должника, а безнаказанно проливать кровь в Венеции нельзя! А теперь, если ты не глуп, то найдешь выход.

Тут ростовщика охватил страх, и он пошел на попятный:

— Синьор судья, вы оказались умнее меня. Прикажите выдать мне сто тысяч дукатов, и я удовлетворюсь.

— Нужно было брать деньги, когда тебе предлагали,— назидательно заметил судья.— А теперь тебе присудили, как ты сам требовал по договору, фунт мяса мессера Ансальдо, но ни одного сольдо... Ни одного гроша. Хочешь фунт мяса должника — получи его. Не хочешь — откажись, тогда я объявлю договор недействительным.

Над ростовщиком стали смеяться.

— Кто роет яму другому, сам попадает в нее,— послышалось в публике.

Видя, что ему ничего не добиться, ростовщик со злостью порвал договор в клочки. Теперь мессер Ансальдо был свободен.

Общение с компьютером и шлифовка языка

Итак, общение с компьютером, развитие логического (математического) мышления создает привычку к четкости, однозначности.

Миллионы людей начинают задумываться над реалиями, которые, к сожалению, отнюдь не всегда соответствуют декларациям, в том числе и официальным.

Эти миллионы людей общаются с десятками миллионов других, не столь привыкших к четкости, точности, однозначности, неуклонному соответствию слов и поступков. Оказывается, понимание реальности правил, законов, установлений может улучшить условия существования индивидуума — и все больше людей задумываются над «отдельными» «нетипичными» несоответствиями, а порой и пытаются эти нетипичные несоответствия устранять...

Компьютеризация охватывает все стороны нашей жизни. Все больше членов нашего общества ощущают удобства как от общения с компьютером, так и от перестройки своего мышления.

... Пещерный человек хорошо знал, чего ему следовало опасаться: с мамонтом не дерись, тигра остерегайся, змею к телу не допускай.

Укрощение огня не только позволило обогревать жилище и варить пищу, но и заставило опасаться пожаров и ожогов.

Создание паровой машины не только позволило построить железную дорогу, но и заставило остерегаться быстродвижущихся агрегатов.

Развитие химии и химической технологии не только обеспечило нас новыми лекарствами, новыми видами одежды, но и потребовало предохранения от попадания незнакомых веществ в пищу и на кожу.

Широкая электрификация вместе с возможностью использования электричества потребовала и защиты от поражения электрическим током.

Использование атомной энергии потребовало новой, особенной защиты.

Компьютер усиливает интеллектуальные возможности человеческого мозга. Но как опасно соприкосновение незащищенной руки с электрическим током, так и в обществе, где царят непродуманные, невсеохватывающие, нередко даже противоречащие друг другу (а потому невыполняющиеся) законы, применение компьютера создаст новые трудности.

Очевидно, что законы, правила и другие установления необходимо в преддверии компьютерной эры пересмотреть; сформулировать их строго однозначно, непротиворечиво, не допуская двусмысленного толкования.

Необходимо повышать культуру языка, и не только законодателей, которые должны владеть языком безупречно, но и большинства населения.

Леонтий Магницкий и его „Арифметика"

По «Арифметике», напечатанной в Москве в 1703 г., очень большим по тем временам тиражом 2400 экземпляров, училось несколько поколений; она оставалась основным учебником в России даже после появления на русском языке «Универсальной арифметики» Эйлера (1740). Михаил Ломоносов называл эту книгу «вратами своей учености». Кроме правил счисления и объяснения основных арифметических действий, «которые нужны людям купецким, ремесленным, чиновным и вообще всем», в книге Магницкого были главы, посвященные алгебре, геометрии, астрономии, навигации...

В начале XVIII в. в России почти не было образованных людей. По указу Петра I, хорошо понимавшего необходимость развития наук вообще и математических наук в частности для кораблестроения и кораблевождения, для строительства и торговли, для развития экономики и военного дела, в 1701 г. в Сухаревой башне в Москве была создана школа математических и навигационных наук. Наряду со специально приглашенным Андреем Фархварсоном из Абердинского университета (Шотландия) и двумя англичанами преподавателем в школу был назначен Леонтий Магницкий, который вскоре и подготовил книгу — первый подробный учебник математики и некоторых ее приложений — на русском языке.

Леонтий Филиппович Магницкий происходил, вероятно, из крестьян Тульской губернии. В исторической книжке, напечатанной в России в 1831 г., рассказывается, что Магницкий был одним из наиболее образованных людей в России того времени; что он самостоятельно изучил математические науки, немецкий, латинский, итальянский и голландский языки; что Петр I, беседуя с ним о математических науках, был так восхищен его глубокими познаниями, что прозвал его «Магнитом» и приказал именовать Магницким. Какую фамилию он имел до того, неизвестно...

Магницкий много лет преподавал арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, а иногда и морские науки. С 1716 г. до самой смерти он руководил школой, из которой вышли тысячи хорошо образованных по тем временам людей.

В качестве примера можно назвать «солдатского сына» Николая Гавриловича Курганова, который уже в 18-летнем возрасте преподавал будущим морякам математику и астрономию, а позднее стал выдающимся исследователем, педагогом, автором и переводчиком книг по математике, астрономии, навигации и даже «Грамматики российской универсальной», известной также под названием «Письмовник».

«Арифметика» Магницкого удовлетворяла важной государственной и общественной потребности своего времени, ее изучали много и прилежно... она прослужила до середины XVIII в., — отмечает профессор А. П. Юшкевич в «Истории математики в России».

А теперь попробуйте решить несколько задач из «Арифметики».

1. Некто взял кошелек и пошел покупать игрушки. За первую игрушку он уплатил 1/5 своих денег, за вторую — 3/7 остатка, за третью — 3/5 нового остатка; после этого у него осталось 1 рубль 92 копейки.

Сколько денег было в кошельке и сколько стоила каждая игрушка?

2. «Сколько у тебя учеников?» — спросил крестьянин, собираясь отдать в учение своего сына. «Пока немного, — ответил учитель.— Но если придет еще столько же, и еще половина этого числа, и еще четверть этого числа, и твой сын, то будет сто». Сколько учеников было у учителя?

3. Хозяин нанял работника на год, обещая уплатить 12 рублей и тулуп. Работник прослужил только 7 месяцев; хозяин уплатил ему 5 рублей и дал тулуп. Определить цену тулупа.

4. Путник идет из города в деревню 30 дней; другой путник идет из деревни в город 20 дней. Через сколько дней они встретятся, если выйдут одновременно?

5. Муж и жена выпивают бочонок питья за 10 дней; муж один выпивает такой бочонок за 14 дней; за сколько дней выпьет такой же бочонок жена?

6. Некто оставил в наследство жене, дочери и троим сыновьям 48 000 рублей: жене одну восьмую часть всей суммы, а каждому сыну вдвое больше, чем дочери. Сколько денег получил каждый?

7. (Более сложная задача из раздела о прогрессиях.) Продавец просит за коня 156 рублей, но покупатель считает эту цену слишком высокой. «Тогда купи только гвозди в его подковах (по 6 гвоздей в каждой подкове),— предлагает продавец.— За первый гвоздь уплати мне 1/4 копейки, за следующие — 1/2 копейки, 1 копейки, 2 копейки и т. д., т. е. за каждый следующий гвоздь — вдвое дороже. А лошадь я отдам в придачу к гвоздям бесплатно». Покупатель обрадованно согласился, надеясь уплатить за гвозди не более 10 рублей. Сколько ему пришлось уплатить на самом деле?

Решить задачу — что это значит?

Обучаясь в школе, каждый решил, конечно, не одну сотню задач. И вот — опять задачи!

Нет, мы не просто рассмотрим еще несколько задач. Мы постараемся разобраться, что значит «решить задачу», что значит «найти ответ на вопрос задачи», в чем разница между «я не знаю решения» и «задача не имеет решения»...

Начнем мы, конечно, с самых простых задач.

Задача 1. *Сережа купил 4 шариковые ручки по 35 рублей каждая и 10 тетрадей по 3 рубля. Сколько денег он уплатил в кассу?*

Ответ получается в результате несложных действий:

$35\cdot 4+3\cdot 10=170$ (рублей).

Ученик третьего класса, решая подобную задачу, даже не подумает о возможности иного ответа; задача допускает лишь единственный ответ.

К сожалению, так бывает не всегда.

Задача 2. Учительница диктует:

— *Запишите: Два плюс пять умножить на три. Сколько получилось?*

У Сережи получилось $2+5\cdot 3=17$; у Марины $(2+5)\cdot 3=21$. Оба ответа верные. Или, если угодно, оба неверные. Потому что учительница не сказала, нужны ли скобки, т. е. нужно ли сумму $2+5$ умножить на 3 или найти сумму числа 2 и произведения $5\cdot 3$.

Говорят, что такая постановка задачи *некорректна*, так как она допускает *не единственное* истолкование.

Задача 3. *«Сережа встретил Марину на поляне с цветами». К чему здесь относится «с цветами»?*

На этот вопрос можно дать три различных ответа:

(1) Сережа держал в руках цветы (например, подарил их Марине);

(2) Марина имела при себе цветы (может быть, венок из цветов);

(3) Цветы росли на той поляне, где Сережа встретил Марину.

В литературном описании подобная фраза свидетельствует о небрежности автора и редактора. Читатель улыбнется — и только. В более серьезных случаях *неопределенное* указание может быть понято ошибочно.

... Рассказывают, что один осужденный обратился к царю, прося его помиловать. Царь согласился и написал: «Казнить нельзя помиловать!». Он имел в виду: «Казнить нельзя, помиловать!». Но, будучи не очень грамотным, забыл поставить тире или запятую. А судьи прочитали: «Казнить, нельзя помиловать!». И осужденному отрубили голову.

Передаваемые сообщения, указания, условия задач должны быть сформулированы *однозначно*, т. е. так, чтобы в них был вполне определенный смысл. Некорректная постановка задачи может привести к неправильным действиям, а иногда — вызвать опасные последствия. Особенно важно корректно формулировать условия при работе с электронно-вычислительными машинами, а ведь в недалеком будущем пользоваться электронно-вычислительной техникой придется чуть ли не каждому.

Решение каждой задачи, каждое отдельное действие должно быть верным. Это требование необходимо, но оно не всегда достаточно.

... Однажды Сережа сокращал дробь $\frac{16}{64}$ таким образом:

— Если в числителе и в знаменателе убрать одинаковые числа, величина дроби не изменится,— формулирует Сережа «правило», не замечая искажения смысла. Он зачеркивает в числителе и в знаменателе шестерки и пишет

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ верен, но *способ выполнения* указан неверно. Зачеркивание одинаковых цифр в числителе и в знаменателе лишь в редких случаях приводит к верному ответу. Вообще же этот «способ» не может быть выведен из правил действий с дробями и большей частью приводит к неправильному результату.

Иногда можно «угадать» верный ответ на вопрос задачи, но полноценным является лишь *обоснованное* решение. А следующие примеры покажут, что *верное* и *обоснованное* решение должно быть еще и *полным*.

Задача 4. *Найти двузначное число, являющееся точным квадратом и оканчивающееся цифрой 6.*

Ответ «36» является правильным, но неполным: условиям задачи удовлетворяет также число 16. Полным ответом являются два числа: 36 и 16 (или 16 и 36). Дотошный исследователь попытается найти еще и другие решения, например, перебирая все двузначные квадраты: 16, 25, 36, 49, 64, 81, легко проверить, что только 16 и 36 оканчиваются цифрой 6. Такое исследование дает уверенность, что других ответов на вопрос задачи не существует.

Задача 5. *Поезд, идущий на расстояние в 63 км, был задержан после 24 км пути и оставшийся путь проходил с увеличенной на 4 км/ч скоростью. На прохождение оставшегося пути им было затрачено на 20 минут больше, чем на прохождение пути до остановки. Найти первоначальную скорость поезда* (эта задача предлагалась на вступительных экзаменах в Московский институт инженеров транспорта).

Составим несложную таблицу.

	S, км	V, км/ч	t, ч
До остановки	24	x	$t_1 = \frac{24}{x}$
После остановки	39	$x+4$	$t_2 = \frac{39}{x+4}$

По условию, t_2 на 20 мин или на 1/3 ч больше, чем t_1,

$$\text{т. е. } t_1 + \frac{1}{3} = t_2 \text{ или } \frac{24}{x} + \frac{1}{3} = \frac{39}{x+4}.$$

Умножая все члены этого уравнения на общий знаменатель и упрощая, получаем

$$x^2 - 11x + 288 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $x_1 = 9$, $x_2 = 32$.

Итак, первоначальная скорость поезда оказывается равной 9 или 32 км/ч. Первый ответ не очень правдоподобный, с такой скоростью поезда *обычно* не ходят. Но *формально* задача имеет два ответа.

Задача 6. *Две параллельные хорды окружности, радиус которой 25 см, имеют длину 14 и 40 см. Найти расстояние между этими хордами* (рис. 13, *а*).

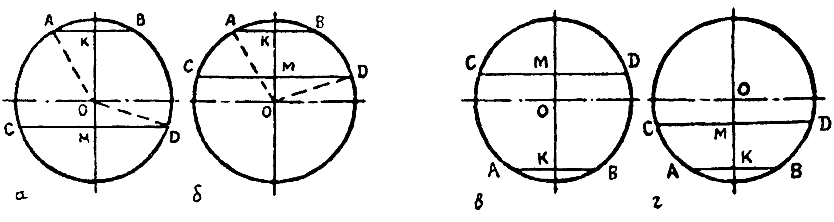


Рис. 13

Замечая, что $AK=KB$ и $CM=MD$ (так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам), и проведя радиусы OA и OD, найдем по теореме Пифагора:

$$(1)\ \text{из}\ \triangle OAK\text{: } OK=\sqrt{AO^2-AK^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24\ (\text{см}),$$
$$(2)\ \text{из}\ \triangle ODM\text{: } OM=\sqrt{OD^2-MD^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15\ (\text{см}),$$

после чего непосредственно вычисляем длину искомого отрезка KM:

$$(3)\ KM=OK+OM=24+15=39\ (\text{см}).$$

Итак, задача решена? Да, решена верно, но ... неполно.

Дело в том, что на рис. 13, *а* одна из наших хорд расположена выше, а другая — ниже центра окружности, т. е. *по различные стороны* от центра. Но ведь обе хорды могут быть расположены выше центра, т. е. *по одну сторону* от центра, а тогда расстояние между хордами будет иное (см. на рис. 13, *б*).

Теперь (1) и (2) этапы решения сохраняются без изменения, но длина отрезка KM составит *не сумму, а разность* длин отрезков OK и OM:

$$(3)\ KM=OK-OM=24-15=9\ (\text{см}).$$

Можно было бы расположить хорды и по-другому (рис. 13, *в*, *г*); однако во всех случаях третий этап решения сведется либо к нахождению суммы $24+15$, либо к нахождению разности $24-15$; найденные выше два ответа исчерпывают все возможные случаи.

Задача 7. *Периметр прямоугольного спортзала составляет 70 м, а его площадь — 300 кв. м. Найти длину и ширину зала* (рис. 14).

Обозначим длину зала x (м), тогда ширина его составит $(35-x)$ м, а площадь — $S=x(35-x)$ кв. м.

По условию, $x(35-x)=300$. Решая это уравнение, получаем $x=15$, $x=20$. Значит, задача имеет два решения?

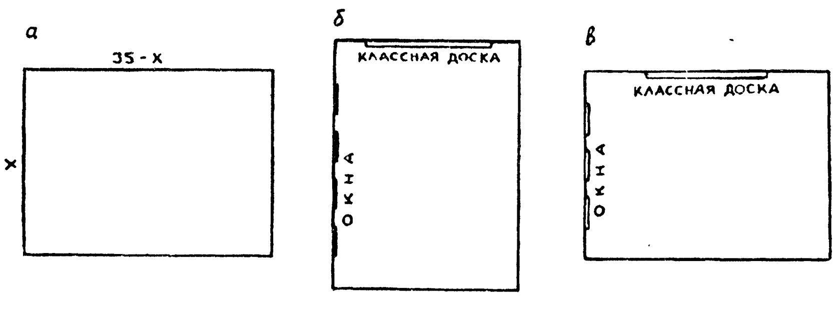


Рис. 14

Однако принято считать, что длина не меньше ширины.

Ответ: Длина спортзала 20 м, ширина 15 м.

Примечание. Если бы речь шла о лекционном зале, по одной стороне которого расположены окна, а по смежной (свет из окон должен падать для слушателей слева) — классная доска, то задача имела бы два различных решения (рис. 14, *б*, *в*).

Задача 8. *Длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целым числом сантиметров. Найти эти длины, если они составляют арифметическую прогрессию* (арифметической прогрессией называется ряд чисел, в котором каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа — «разности» арифметической прогрессии, обозначаемой d).

Пусть длина меньшего катета x см, бóльшего катета $(x+d)$, гипотенузы $(x+2d)$ см. Тогда, по теореме Пифагора,

$$x^2+(x+d)^2=(x+2d)^2.$$

Раскрывая скобки и упрощая, получим $x^2-2xd-3d^2=0$ или, разделив все члены на d^2,

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2-2\frac{x}{d}-3=0.$$

Это уравнение имеет решения

$$\left(\frac{x}{d}\right)_1=-1, \quad \left(\frac{x}{d}\right)_2=3.$$

Первое решение явно не имеет смысла: отношение длин двух отрезков, т. е. отношение двух положительных чисел, не может быть отрицательным. Второе решение показывает, что меньший катет втрое больше разности прогрессии, $x=3d$. А так как все длины — целые числа (сантиметров), то для x и d возможны пары значений (3; 1), или (6; 2), или (9; 3) ... вообще ($3k$; k).

Ответ: Длины сторон треугольника (рис. 15) выражаются тройками чисел ($3k$, $4k$, $5k$). Задача имеет бесчисленное множество решений.

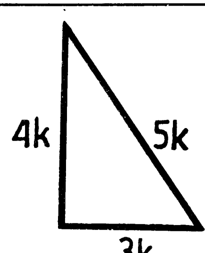


Рис. 15

Задача 9. *Найти трехзначное число, оканчивающееся цифрой 4 и делящееся на 11 и на 13.*

— Я не знаю такого числа,— сказал Сережа, трижды прочитав условие.

— Я тоже не знаю,— заметила Марина.— Но я вижу, что числа 11 и 13 — простые, их общее наименьшее кратное равно их произведению $11 \cdot 13$ или числу 143. Так?

— Так,— подтвердил Сережа.— А другие числа, делящиеся на 11 и на 13, имеют вид $143n$. Значит, искомое число тоже имеет вид $143n$.

— Но если такое число оканчивается четверкой, то и число $3n$ тоже оканчивается четверкой,— догадалась Марина. Она просмотрела таблицу умножения на 3: только $3 \cdot 8 = 24$ оканчивается цифрой 4.— Значит, $n = 8$. Верно, Сережа?

— Но возможно также $n = 18$ или $n = 28$ и т. д.,— дополнил Сережа.— Среди этих чисел и нужно искать.

— Постой, постой,— сказала Марина, произведя умножение.— Вот я нашла, что $143 \cdot 8 = 1144$. А это ведь число четырехзначное, и оно самое меньшее из чисел вида $143n$, оканчивающееся четверкой. Значит, трехзначное число никак не получается...

И ребята решили: *такого трехзначного числа не существует*.

Значит ли это, что задача решена?

Да, конечно, задача решена полностью. Вместо «я не знаю такого числа» Сережа может теперь сказать «такого числа не существует». Этот вывод и является решением задачи (иногда говорят: негативным решением), если он, как в нашем примере, достаточно обоснован.

Итак, что же значит «решить задачу»? — Это значит получить *верное*, *обоснованное и полное* решение.

Требование найти число, которое... — означает требование найти *все* числа, удовлетворяющие поставленным условиям. Кроме того, полагается еще провести анализ, показать, что других таких чисел не существует, например, как это сделано в задаче 4.

Или убедительно доказать, что такого числа не существует.

Требования найти точку, найти расстояние, построить фигуру... означают необходимость найти все возможные точки, все возможные расстояния, построить все возможные фигуры, отвечающие поставленным условиям (например, как это сделано в задаче 6). Поэтому во многих задачах как бы подразумевается дополнительный вопрос: а есть ли еще другие решения задачи? Все ли возможные решения найдены?

На эти подразумевающиеся вопросы тоже следует ответить и подкрепить ответ рассуждениями.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Витя и Саша встретились в вагоне электропоезда.*

— Я всегда езжу в пятом вагоне от хвоста,— сказал Саша.

— А я в пятом вагоне от головы поезда,- заявил Витя.

Сколько вагонов было в электропоезде?

2. *Маша живет на третьем этаже большого дома, а Наташа — на девятом. Как только по радио объявляют: «Московское время — восемь часов»,— обе девочки начинают спускаться по лестнице (на лифте детям спускаться не разрешается), чтобы вместе идти в школу. Маша успевает сойти вниз за одну минуту и в подъезде ждет Наташу, которая с такой же скоростью спускается с девятого этажа. За сколько минут спустится с девятого этажа Наташа? Сколько минут Маша ждет Наташу?*

3. *Яблоко весит столько же, сколько два персика, а три персика — столько же, сколько две груши. Вес трех слив равен весу одной груши. Весу скольких слив равен вес одного яблока?*

4. *Дима с мамой подошли к кассе, чтобы уплатить за покупку 49 рублей. Мама как раз накануне получила зарплату одними трехрублевыми купюрами.*

— Постарайтесь дать без сдачи,— сказала кассирша.— Я только что сдала выручку, и у меня осталась только одна пятерка.

— Ничего, рассчитаемся,— ответил Дима, помог матери отсчитать несколько «трешек» и отдал ей вместе с чеком полученную сдачу — «пятерку».

Сколько «трешек» отдали кассирше Дима с мамой?

5. *Из города на турбазу, находящуюся на противоположном берегу озера, одновременно отправились пароход и катер. Скорость катера вдвое больше скорости парохода; расстояние между пристанями составляет 6 км. Катер, подойдя к турбазе, сразу же повернул обратно к городу. На каком расстоянии от городской пристани катер встречает пароход?*

6. *Запиши шесть одинаковых цифр (например, шесть двоек или шесть семерок), затем расставь знаки арифметических действий и скобки так, чтобы в результате этих действий получилось 100.*

7. На самой длинной городской линии трамвай идет от начального до конечного пункта ровно два часа и отправляется с конечных пунктов через каждые 15 минут, т. е., например, в 9.00, в 9.15, в 9.30 и т. д.

Однажды в газетах сообщили, что движение по этой линии усиливается и теперь трамваи будут отправляться с конечных пунктов через каждые 10 мин, т. е., например, в 9.00, в 9.10, в 9.20, в 9.30 и т. д.

Сколько встречных вагонов попадалось на пути трамвая, выходившего с конечного пункта в 10.00, до усиления движения и сколько после?

8. Четверо соседей пришли к чабану покупать овец.

— Много ли у тебя овец? — поинтересовались они.

— Совсем мало, даже сотни не осталось,— ответил чабан.

— Не продашь ли хоть половину? — спросил один из покупателей, у которого была большая семья.

— А мне хоть половину остальных,— подал голос другой.

— И мне! И мне! — попросили остальные.

— Ну ладно, продам,— согласился чабан.— Тебе, многодетному, половину всех овец и еще пол-овцы. Тебе, — обратился он ко второму,— половину остальных овец продам и еще пол-овцы.— То же он обещал и третьему, и четвертому.— А после этого у меня всего пять овечек на развод останется, тех уж не продам...

Удивились покупатели, но подсчитали овец и ... продажа состоялась. Ни одной овцы не пришлось делить на части.

Сколько овец было у чабана первоначально?

9. Электричка ежедневно привозит директора завода на станцию ровно в 8 ч утра. К этому же времени к станции подъезжает заводская машина и отвозит директора на завод, расположенный в поселке за несколько километров от станции.

Однажды директор приехал на станцию в 7 ч утра и размеренным шагом направился по шоссе к заводу. Пройдя 4,5 км, он встретил свою машину, сел в нее и приехал на завод на 12 мин раньше, чем обычно.

В котором часу директор встретил свою машину? Какова скорость машины на этом шоссе, если считать ее постоянной? Какова скорость, с которой шел директор?

10. В деревне Рассказово жил некогда крестьянин по имени Федор, по прозванию Федька-лентяй. На работу никто его не брал, потому что всерьез работать он не хотел, а деньги получать любил. Попросился он однажды в артель к дровосекам, а они ему велели катиться к дьяволу.

— Да какой же дьявол меня работать возьмет? — проговорил он и пошел восвояси. И вдруг, откуда ни возьмись, сам дьявол перед ним оказался. Приветливо ухмыляется, хвостиком помахивает:

— Вот, значит, я и есть дьявол,— говорит.— И хочу взять тебя работать. Работа будет легкая, а деньги платить буду немалые.

— А что за работа? — спросил лентяй.

— Видишь вон мостик через речку? — спросил дьявол.— Через этот мостик туда-обратно перейдешь, и станет у тебя денег против прежнего вдвое.

— Через мост перейти — работа и вправду не тяжелая,— согласился лентяй.— А денег и вправду вдвое больше станет? Не обманешь?

— Не обману,— заверил его дьявол.— Но за каждый переход, как деньги свои удвоишь, мне за добрый совет платить будешь... А много ли у тебя есть денег? — Лентяй обшарил карманы и сказал сколько.— Ну, значит, за всякий переход будешь мне 24 алтына платить.

Обрадовался лентяй. Перешел на другой берег, вернулся — денег в кармане и вправду вдвое больше стало. Отдал он дьяволу 24 алтына и снова на мост пошел. Вернулся, отдал опять 24 алтына и пошел в третий раз. Опять деньги удвоились, и стало... ровно 24 алтына. Забрал их дьявол, расхохотался на всю округу и тут же исчез, словно его и не было. У лентяя же, хоть и без того не много денег было, а теперь и тех не стало.

Сколько же денег было у лентяя вначале?

11. Биолог вывел новую разновидность долгоживущих амеб. Через каждую минуту одна амеба делится на две. Биолог кладет в пробирку одну амебу, и ровно через час вся пробирка до краев оказывается заполненной амебами. Через какое время пробирка наполнится до краев амебами, если в пробирку положить не одну, а две амебы?

12. У одного путешественника не было денег, но была золотая цепочка, состоящая из семи звеньев. Хозяин гостиницы, к которому путешественник обратился с просьбой о ночлеге, согласился держать постояльца неделю, если тот будет давать ему ежедневно в виде платы одно из звеньев цепочки. Какое наименьшее число звеньев надо распилить, чтобы путешественник мог ежедневно, в течение семи дней, расплачиваться с хозяином гостиницы? (При расчете хозяин может возвращать постояльцу полученные от него ранее звенья.)

Если справитесь с этой задачей, то попробуйте решить ее в общем виде: у путешественника есть цепочка, состоящая из n звеньев, и ему надо пробыть в гостинице n дней.

13. Вот одна из дошедших до нас задач древних римлян.

Некто, умирая, оставил жену в ожидании ребенка и сделал такое завещание: в случае рождения сына отдать ему 2/3 оставленного имущества, а матери — 1/3. В случае рождения дочери отдать ей 1/3 наследства, а матери — 2/3. Вдова заве-

щателя родила близнецов: мальчика и девочку. Как разделить наследство, чтобы удовлетворить условиям завещания?

14. *Число 10, с точки зрения математика, совсем не является священным. Мы пользуемся этим числом больше, чем другими, лишь потому, что у нас десять пальцев. В древности они помогали считать. Если у человека было бы только четыре пальца (по два на каждой руке), то нас, наверное, учили бы считать по-другому: не 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и т. д., а 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21 и т. д. Вместо того чтобы учить в школе, что $3+5=8$, мы учили бы, что $3+11=20$.*

Авторы фантастических произведений утверждают, что различные системы счисления могут причинить неудобства будущим космонавтам, когда они станут посещать другие миры.

Предположим, что у обитателей Венеры нет ни рук, ни ног, но зато на большом выпуклом лбу есть щупальца. Тогда жителей Венеры, видимо, учат считать не по десятичной системе, как нас, а по некоей другой, в основу которой положено число, равное числу щупалец на лбу.

Представим себе теперь следующий разговор.

КОСМОНАВТ. Я вижу, что здесь, на Венере, семьи очень многочисленные. Не скажете ли, сколько у вас детей?

ЖИТЕЛЬ ВЕНЕРЫ (почесывая щупальцем затылок). У меня, кажется, 33 *сына и* 50 *дочерей. Значит, если не ошибаюсь, в общей сложности —* 113.

Сколько детей — по нашему земному счету — у жителя Венеры и сколько щупалец у него на лбу?

15. *Как при помощи пяти двоек получить число семь?*

16. *Сможете ли вы получить число 9, используя все десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?*

17. *Три супружеские пары отправились в воскресный день за покупками. Имена мужчин: Владимир, Петр и Алексей. Имена женщин: Мария, Нина и Алла. Каждый из шестерых заплатил за купленный предмет столько рублей, сколько предметов он купил. Владимир купил на 23 предмета больше, чем Нина, а Петр — на 11 предметов больше, чем Мария. Известно также, что каждый мужчина истратил на 63 рубля больше своей жены.*

Кто на ком женат?

18. *Эта задача и две следующие взяты из книги «Вопросы и решения вардапета Анании Ширакца, армянского математика* VII *века» (Петроград,* 1918 *г.).*

Слышал я от отца своего следующее. Во время известных войн армян с персами Зауракoм Камсараканом были совершены чрезвычайные подвиги: будто бы, напав на персидские войска *трижды в течение месяца, он сразил в первый раз половину войска, и, преследуя во второй раз, перебил четвертую часть войска, и в третий раз — одиннадцатую. Оставшиеся в живых, в числе двухсот восьмидесяти, обратились в бегство в Нахчаван. Итак, мы должны узнать по этому остатку, сколько их было до избиения.*

19. *Во время известного восстания армян против персов, когда Заурак Камсаракан убил Сурена, один из военачальников армянских отправил посла к персидскому царю, чтобы доложить ему эту печальную весть. Посол проезжал в день по пятьдесят миль. Когда узнал об этом спустя пятнадцать дней Заурак Камсаракан, он отправил погоню — вернуть его. Гонцы проезжали в день по восемьдесят миль. Итак, узнайте, через сколько дней они смогли нагнать посла.*

20. *В городе Афины было три водоема одного размера, и в эти водоемы были проведены три трубы. Одна из труб была так мощна, что наполняла водоем за один час, вторая, более тонкая, чем эта, наполняла за два часа, а третья, еще более тонкая, наполняла за три часа. Итак, узнайте, за какую часть часа трубы наполняют водоем, если они соединены.*

21. *После первого снижения цен покупательная способность населения возросла на 20%, а после второго — на 25%. На сколько процентов в целом возросла покупательная способность населения?*

22. *Самолет от точки A до точки B пролетел точно на юг 1000 км. От точки B он повернул на восток и пролетел до точки C еще 1000 км. В точке C летчик увидел медведя. Какого цвета был медведь, если расстояние AB равно расстоянию AC?*

23. *Можно ли из 45 вычесть 45 так, чтобы в остатке получилось тоже 45?*

24. *Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?*

25. *Из пункта A в пункт B выезжает автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через час после него в том же направлении вылетает самолет, скорость которого 700 км/ч. Самолет догоняет автомобиль, поворачивает и летит назад до пункта A, затем снова догоняет автомобиль и снова возвращается в пункт A и т. д. Сколько километров пролетит самолет, пока автомобиль приедет в пункт B, если расстояние между пунктами 300 км?*

26. *В таблицу из m строк и n столбцов записаны произволь-*

ные действительные числа (положительные, отрицательные и нули). Разрешается изменять знаки одновременно у всех чисел одной строки или одного столбца. Докажите, что, проделав такую операцию над несколькими столбцами и строками, можно получить таблицу, в которой сумма чисел в каждой строке и каждом столбце — число неотрицательное (положительное или нуль).

27. Согласно закономерности, найденной между числами в первом квадрате, определите недостающее число во втором квадрате (рис. 16).

28. В центре квадрата отсутствуют четыре числа. Если вы определите их верно, то сумма чисел по вертикали будет равна 160 (рис.17).

29. Разрежьте квадрат на две равные фигуры так, чтобы сумма чисел в каждой из них была равна 100 (рис. 18).

30. Определив закономерность между числами, найдите неизвестные (рис. 19).

14	27
53	105

3	5
9	

Рис. 16

47	68	33	12
69			34
23			48
21	54	19	66

Рис. 17

7	31	3	17
5	13	1	28
6	9	22	4
27	4	15	8

Рис. 18

12	6	0		10
1	3	11	5	2
11	18		28	15

Рис. 19

13	14	15	16
12	11	10	9
5	6	7	8
4	3	2	1

Рис. 20

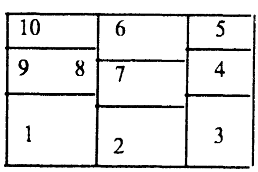


Рис. 21

31. На рис. 20 изображен план подземного лабиринта из 16 комнат, соединенных дверьми. Можно ли, начиная с комнаты 1, обойти комнаты так, чтобы пройти через все двери комнат только один раз? В какой комнате закончится обход?

32. *На рис. 21 изображен план подземного лабиринта из 10 комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую проходите? Из какой комнаты надо начинать движение?*

Рассказывают, что некто при встрече с Пифагором спросил того: «Который час?». Пифагор ответил: «До конца суток осталось дважды две пятых того, что уже прошло от начала».
Который был час?

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу?
— Вот сколько,— ответил философ,— половина изучает математику, четверть музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

Ответы и указания

Числа, числа, числа... Показание спидометра — 16061 км. Скорость 55 км/ч.

Какой день недели? Три воскресенья в четные числа месяца могли быть только 2-го, 16-го и 30-го числа. Значит, 25-е число — вторник.

По справедливости. Если третий оценил съеденную им долю в 5 дирхемов, то, очевидно, вся еда стоит втрое дороже — 15 дирхемов, а каждый «хлеб» — 3 дирхема. Обладатель трех хлебов уплатил за них 9 дирхемов, а съел, как и остальные, на 5 дирхемов; поэтому он должен получить по справедливости еще 4 дирхема. Обладатель двух хлебов, уплативший за них 6 дирхемов, тоже съел на 5 дирхемов и должен получить еще один дирхем.

Пленники царя Дадона. Открытыми оказались те камеры, номера которых имеют нечетное число делителей. Однако каждое число M вместе с делителем A имеет и сопряженный делитель M/A, иначе говоря, делители каждого числа образуют пары, например $30=1\cdot 30=2\cdot 15=3\cdot 10=5\cdot 6$.

Число делителей может оказаться нечетным в том и только в том случае, когда делитель A совпадает с делителем M/A, или при условии $M=A^2$. А это означает, что отпертыми оказались камеры, номера которых являются точными квадратами; например, число 25 имеет три делителя: 1, 5 и 25.

Ответ: Открытыми оказались камеры с номерами 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Царь Дадон отпустил на свободу десятерых пленников.

Задачи из «Арифметики» Магницкого. 1. 10,50 рубля; 2,10 рубля; 3,60 рубля; 2,88 рубля. **2.** 36. **3.** 4,80 рубля. **4.** Через 12 дней. **5.** За 35 дней. **6.** 6000; 6000; 12000. **7.** $4\ 194\ 303\frac{3}{4}$ копейки, или почти 42 тысячи рублей.

Лошадь и верблюд. 5 и 7.

Путь фигуриста. Движение начните из нечетного узла.

Задачи для самостоятельного решения

1. 9. **2.** За 4 мин. **3.** Четырех. **4.** 18. **5.** Пусть пароход успел пройти до встречи x км, а катер 6 км «туда» и еще $(6-x)$ км «обратно», причем путь катера $6+6-x$, или $12-x$, вдвое больше, чем путь парохода x, т. е. $12-x=2x$, откуда $x=4$ км. **6.** Возможны, например, записи $(222-22):2=100$ или $(999-99):9=100$ и т. п. **7.** 17; 25. **8.** 95. **9.** Эти 12 мин «экономила» машина, не дойдя до станции 6 мин. За 6 мин машина должна была дойти до станции 4,5 км; значит, скорость машины $\frac{4{,}5 \text{ км}}{6 \text{ мин}}$, т. е. 0,75 км/мин, или 45 км/ч. Директор же прошел 4,5 км за 54 мин, или за 0,9 ч; его скорость $\frac{4{,}5 \text{ км}}{0{,}9 \text{ ч}}=5$ км/ч. **10.** 21 алтын.

11. Если в пробирку положить одну амебу, то через минуту их там окажется две, а через час пробирка заполнится до краев. Следовательно, если положить в пробирку две амебы, пробирка заполнится до краев через 59 мин.

12. Если распилить у семизвенной цепочки только одно звено — третье и снять его, у путешественника будет три кусочка цепочки: в одно, два и четыре звена. В первый день постоялец платит хозяину гостиницы одно звено, во второй он дает ему два звена и забирает назад одно, в третий день он прибавляет это одно звено к двум другим, в четвертый постоялец вручает хозяину гостиницы цепочку из четырех звеньев, забирая назад три звена, и т. д. В общем виде задача решается так.

Если распилить k звеньев, то k дней можно ежедневно рассчитываться за пребывание в гостинице. На $(k+1)$-й день понадобится кусок цепочки длиной в $k+1$ звено. Отдав его хозяину гостиницы, путешественник получит k звеньев сдачи и следующие k дней будет расплачиваться ими. Второй кусок цепочки должен иметь $2(k+1)$ звеньев, а сдачи путешественник получит $2k+1$ звено, третий кусок должен иметь длину $2^2(k+1)$, четвертый — $2^3(k+1)$ и т. д.

$$k+(k+1)+2(k+1)+2^2(k+1)+2^3(k+1)+\dots$$
$$\dots+2^k(k+1)=(k+1)(1+2+2+2^2+2^3+\dots+2^k+1)-1=$$
$$=(k+1)(2^{k+1}-1+1)-1=(k+1)2^{k+1}-1.$$

Таким образом, число k находится из условия:

$$n\leqslant(k+1)2^{k+1}-1.$$

Например, если $n=100$, то $k=4$, т. е. достаточно распилить всего четыре звена.

13. *Согласно завещанию мать должна получить в два раза больше, чем дочь, а сын — в два раза больше, чем мать, т. е. доли наследства должны относиться, как 4 : 2 : 1. Следовательно, имущество надо разделить на семь равных частей. Четыре части должен получить сын, две — мать и одну — дочь. (Между прочим, эту задачу решил знаменитый римский юрист Сальвиан Юлиан.)*

14. *59 детей и 7 щупалец. (Счет велся по семеричной системе.)*

15. $2\times2\times2-2:2=7; \quad 22:2-2^2=7.$

Помимо этих двух известны также и другие решения.

16. *Вот несколько возможных решений:*

$$97\,524:10\,836=9,$$
$$95\,823:10\,647=9,$$
$$0\cdot12\,345\,678+9=9,$$
$$1^{23\,456\,790}+8=9.$$

17. *Из условия задачи следует:* $x^2-y^2=63$, *где* x *— количество предметов, купленных мужем, а* y *— женой. Левая часть уравнения разлагается на множители* $(x+y)$ *и* $(x-y)$, *а число 63 можно разложить на множители тремя способами:* $63=63\cdot1$, $63=21\cdot3$, $63=9\cdot7$. *Таким образом, мы приходим к трем системам уравнений:*

$$\begin{cases}x_1+y_1=63,\\ x_1-y_1=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2+y_2=21,\\ x_2-y_2=3,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_3+y_3=9,\\ x_3-y_3=7,\end{cases}$$

из которых найдем: $x_1=32$, $y_1=31$, $x_2=12$, $y_2=9$, $x_3=8$, $y_3=1$.

Теперь находим те значения x *и* y, *разность которых равна 23. Это* x_1 *и* y_2. *Следовательно, Владимир купил 32* предмета, а Нина — *9. Разность* x_2 *и* y_3 *равна 11. Значит, Петр купил 12 предметов, а Мария — 1. Таким образом, супружеские пары: Владимир и Алла, Петр и Нина, Алексей и Мария.*

18. *До побоища было тысяча семьсот шестьдесят всадников.*

19. *Они настигли в двадцать пять дней.*

20. *Соединенные трубы наполняют водоем в четверть и шестую и двенадцатую и двадцать вторую часть часа (6/11* часа).

21. *На 50%. (Если до снижения цен на 10 руб. можно было купить a* кг *масла, то после первого снижения можно на 10 руб. купить 1,2 a кг масла, а после второго — $1{,}2 \cdot 1{,}25\,a = 1{,}5\,a$ кг.)*

22. *Так как $AB = AC$, то точка A — Северный полюс. Следовательно, медведь был белого цвета.*

23.

$$\begin{array}{rl} & 987\,654\,321 \text{ (сумма цифр} = 45) \\ - & 123\,456\,789 \text{ (сумма цифр} = 45) \\ \hline & 864\,197\,532 \text{ (сумма цифр} = 45) \end{array}$$

24. *За сутки минутная стрелка делает 24 оборота, а часовая — 2. Следовательно, минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза, а при каждом «обгоне» стрелки образуют прямой угол два раза. Таким образом, за сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол 44 раза.*

25. *Автомобиль на путь из A в B тратит 5 ч. Самолет вылетает на час позже, значит, он будет летать 4 ч и налетает за это время $700 \cdot 4 = 2\,800$ км.*

26. *Будем изменять знаки в тех строках или столбцах, где сумма чисел отрицательна; при этом сумма чисел в таблице будет увеличиваться. Мы будем получать все новые и новые таблицы. Так как заменой знаков можно получить только конечное число разных таблиц, то через некоторое число «шагов» мы не сможем повторить подобную операцию, т. е. придем к таблице, где сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательна.*

27. *17.*

28. *47, 68, 33, 12.*

29. *Рис. 22.*

30. *Третье (нижнее) число каждого столбца является суммой первого числа и второго числа, умноженного на 5. Например: $(12:2) + (1 \cdot 5) = 11$. Следовательно, искомые числа 55 и 6.*

31. *Рис. 23.*

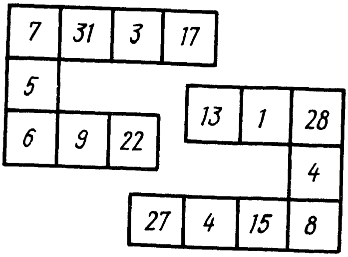


Рис. 22

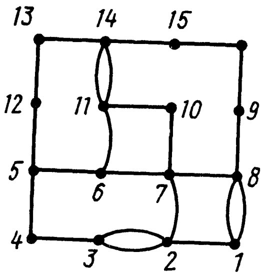


Рис. 23

Занимательная математика

Халамайзер Александр Яковлевич

Пифагор

Редактор *Г. Н. Чернышева*
Оформление художника *Н. Н. Аникушина*
Художественный редактор *Т. А. Коленкова*
Технический редактор *Г. А. Виноградова*
Корректор *Г. И. Кострикова*

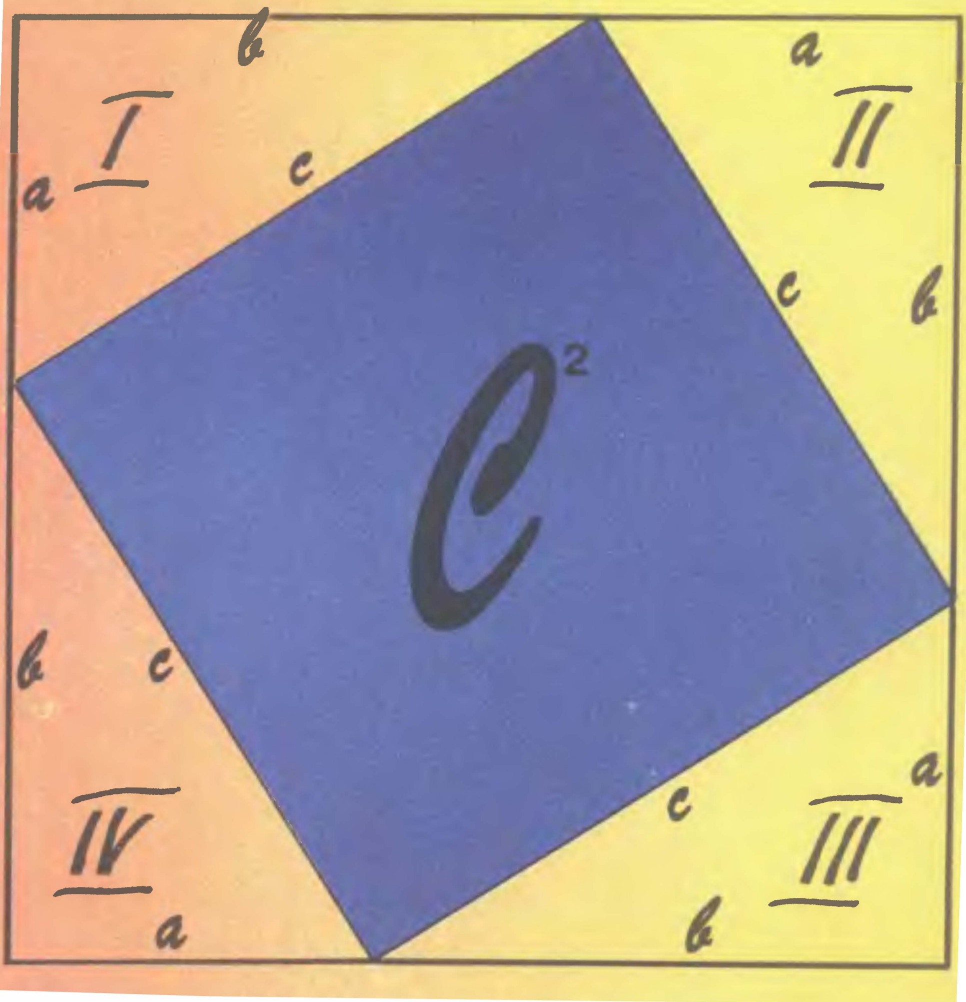
ИБ № 10014

ЛР № 010146 от 25.12.91. Изд. № ФМ-110. Сдано в набор 18.02.93. Подп. в печать 10.11.93. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура журн. руб. Печать офсетная. Объем 5 усл. печ. л. 10,5 усл. кр.-отт. 4,29 уч.-изд. л. Тираж 20000 экз. Зак № 143.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4,
Неглинная ул., д. 29/14.

Набрано на персональном компьютере издательства.

Отпечатано в АООТ «Ярославский полиграфкомбинат». 150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.


b
a
I
a
c
II
c
b
c²
b
c
IV
a
c
a
III
b