НОВОЕ
В ЖИЗНИ
НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

Серия
«Математика,
кибернетика»
№ 11, 1980 г.

Издается
ежемесячно
с 1967 г.

В. А. Добровольский,
кандидат физико-
математических наук

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Издательство
«Знание»
Москва 1980

ББК 22.1
Д56

Добровольский В. А.

Д56 Основные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.: Знание, 1980.— 64 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика»; № 11).
11 к.

Брошюра знакомит читателя с основными задачами аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений на фоне ее исторического развития. Рассмотрено зарождение и становление этой теории, ее основные результаты как в области линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений.

Брошюра рассчитана на математиков, преподавателей, учащихся вузов и всех, кто интересуется математикой и ее историей.

20200 ББК 22.1
51

ВВЕДЕНИЕ

Предметом аналитической теории дифференциальных уравнений является исследование решений различных классов этих уравнений с точки зрения теории аналитических функций. При этом в зависимости от вида уравнения и его коэффициентов устанавлнваются характеристические свойства решений и их взаимосвязь с другими компонентами уравнения.

После создания основ математического анализа трудами Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли и других крупнейших математиков задача интегрирования дифференциальных уравнений в первоначальной ее постановке сводилась к построению алгоритма для получения решения уравнения из заданных функций — его коэффициентов — путем вычисления квадратур. Решение этой задачи оказалось возможным лишь для некоторых простейших видов дифференциальных уравнений. В подавляющем же большинстве случаев такая задача оказалась неразрешимой, и интегралы рассматриваемых уравнений, иногда весьма простых по своему виду, не выражались конечными комбинациями известных тогда функций.

При изучении дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами уже в XVIII в. встретилось еще больше трудностей, чем при вычислении интегралов от алгебраических функций. В тех случаях, когда интегралы от алгебраических функций не могли быть выражены через известные функции, их свойства как новых трансцендентных стали изучать по виду подынтегральных выражений.

Аналогично этому и в теории дифференциальных уравнений выделилась задача изучения свойств решения непосредственно по определяющему его уравнению. Впервые она была сформулирована в работе [14] французских математиков Ш. Брио и Ж. Буке в 50-х гг. прошлого века. Решение этой задачи и привело к построению двух важных направлений учения о дифференциальных уравнениях — аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений.

В аналитической теории дифференциальных уравнений общие методы теории функций комплексного переменного прилагаются к изучению решений как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений. При этом рассматривается поведение этих решений на всей комплексной плоскости, начиная с вопросов об их существовании, однозначности (или многозначности), о видах и расположении особых точек, зависимости от начальных условий, устойчивости и т. д.

В процессе развития этой теории были установлены такие классы дифференциальных уравнений, решения которых обладают свойствами, представляющими особый интерес как для теории аналитических функций, так и для многочисленных приложений. Разработка аналитической теории была делом многих математиков из разных стран. Актуальность поставленных задач, широкие рамки их применения на практике, а также творческая энергия исследователей определили весьма интересный и сложный путь развития этой теории.

В предлагаемой брошюре на историческом фоне рассматриваются основные классические результаты, полученные в главных направлениях аналитической теории дифференциальных уравнений. Некоторые ее интересные и важные разделы, например теория автоморфных функций, асимптотическое представление решений, их устойчивость и др., могут быть предметом других аналогичных брошюр. Естественно, здесь не представилось также возможным входить в подробную аргументацию излагаемых вопросов, давать доказательства упоминаемых теорем и т. п. Однако в соответствующих местах даны ссылки на источники (приведенные в конце брошюры), где разработано более основательно то или иное положение. Формулы пронумерованы сквозной нумерацией в круглых скобках. В конце текста в форме примечаний приведены краткие биографические справки о наиболее выдающихся ученых, упоминаемых в тексте.

Глава I. ИСТОКИ ТЕОРИИ

Аналитическая теория дифференциальных уравнений возникла в начале XIX в. на основе уже достаточно развитых методов теории функций комплексного переменного после создания основных методов интегрирования уравнений. Развитие ее происходило как под влиянием непосредственных запросов практики и науки, так и в результате теснейшего взаимодействия со многими другими отраслями математики — в силу внутренней логики развития предмета. Разработанные при этом методы и полученные результаты стали мощным идейным достижением в математическом анализе. Они оказали большое влияние на другие разделы теории дифференциальных уравнений, а также были полезными для решения ряда практических задач, в частности, в небесной механике.

§ 1. Роль практики и другие стимулы возникновения новой теории

Решающим фактором в развитии науки, в том числе и математики, являются потребности практики. Именно под их влиянием возникли и развивались отдельные проблемы рассматриваемой здесь теории. Так, например, метод «исчисления пределов» был создан французским математиком О. Коши [1] в связи с назревшей необходимостью упрощения и улучшения вычислительной работы в небесной механике. Здесь особое значение сыграли работы Коши по вопросам сходимости степенных рядов, оценок их остатков и т. д. Установление новых интересных результатов в этих разделах Коши ставил в прямую зависимость от решения многих прикладных задач [5, с. 9]. Дальнейшая разработка метода мажорант со стороны А. Пуанкаре [2] была обусловлена подготовкой фундамента для его знаменитых «Новых методов небесной механики» [11, ч. I], имеющих целью усовершенствовать расчеты движения небесных тел.

Однако в большинстве случаев развитие математики зависит от практических потребностей, как правило, не непосредственно, а через цепочку промежуточных звеньев. Так, запросы естествознания и техники ставят новые проблемы, для решения которых старые методы оказываются недостаточными. В связи с этим разрабатываются новые методы, которые вместе с тем продвигают и теорию. Например, работы С. В. Ковалевской [3] по теории движения твердого тела вокруг неподвижной точки [7] привели к новому направлению в аналитической теории дифференциальных уравнений, к постановке задачи об отыскании такого класса уравнений, интегралы которых есть однозначные функции. Аналогичная задача на теоретической основе ставилась такими учеными, как Л. Фукс [4], А. Пуанкаре и другими.

Как на второй замечательный пример укажем на работы А. М. Ляпунова [5] по механике, в процессе которых он создал ряд новых математических методов и целых направлений: качественную теорию дифференциальных уравнений, асимптотические методы, теорию устойчивости и др. Теория устойчивости возникла из решения задачи об устойчивости нашей Солнечной системы. Благодаря работам Пуанкаре, а особенно трудам Ляпунова эта теория выросла сейчас в весьма плодотворную самостоятельную ветвь математической науки с огромной библиографией.

Важнейшим источником прогресса науки является внутренняя логика ее развития, обусловленная характером и особенностями самой науки. В этом смысле она развивается относительно самостоятельно и независимо от непосредственной практики. Так, в 60—80-е годы прошлого века, после весьма бурного периода развития аналитической теории дифференциальных уравнений, Б. Риман [6], А. Пуанкаре, П. Пенлеве [7] и некоторые другие математики подошли в своих глубоких исследованиях к таким задачам, которые не поддавались изучению уже известными приемами и требовали качественно новых методов исследования. Эти методы впоследствии были созданы. Вышеуказанные стороны процесса развития науки — общественно-производственная практика и внутренняя логика — не сводятся одна к другой и не покрывают друг друга, а находятся в определенной, весьма тесной связи между собой, в диалектическом единстве.

Одной из ведущих сил развития рассматриваемой нами теории была борьба противоположностей внутри самой теории, которая на разных этапах проявлялась в различных формах. Так, математики XVIII в. предпринимали энергичные попытки найти алгоритм или метод решения любого дифференциального уравнения. Потом стало ясно, что этот вопрос в общем случае даже для уравнений первого порядка не решается. Анализ возникшего противоречия и привел к доказательству теоремы о существовании решения дифференциального уравнения. Значительно позже противоречия другого порядка стали источником весьма интересных методов решения проблемы Римана в теории линейных уравнений.

Важным источником идей аналитической теории дифференциальных уравнений была теория эллиптических и абелевых функций, выросшая из теории обращения эллиптических интегралов.

Вместе с тем построение рассматриваемой теории является продуктом мышления самих математиков. Многие интересные проблемы здесь поставлены и разрешены благодаря мощному творческому натиску Б. Римана, Л. Фукса, Э. Пикара [8], А. Пуанкаре, П. Пенлеве, А. М. Ляпунова, И. А. Лаппо-Данилевского [9] и многих других.

§ 2. Особые точки функций

Как для данной теории, так и для других отделов анализа весьма важным является понятие особых точек функций, а также особых точек дифференциальных уравнений.

Уже вскоре после установления основных операций математического анализа под особыми точками функций понимали такие значения аргумента, для которых функция не существовала или при которых нарушалась непрерывность функции или ее производной. Этот вопрос детально был рассмотрен Коши в учебнике по дифференциальному и интегральному исчислению (1823 г.). Здесь он уже различал полюсы (по более поздней терминологии), т. е. такие значения аргумента, для которых функция становилась бесконечно большой, и критические точки, при обходе которых функция получала различные значения. Затем были установлены некоторые интересные теоремы, касающиеся функций, обладающих полюсами. Так, интеграл, взятый вдоль замкнутого контура от функции, не имеющей внутри контура особой точки, равнялся нулю, а интеграл по такому же контуру, содержащему полюс подынтегральной функции, отличался от предыдущего на $2\pi i g$, где g — величина так называемого вычета подынтегральной функции относительно полюса. Вскоре было уточнено понятие существенно особой точки. Характерным примером ее является точка $z=0$ для функции $e^{1/z}$.

§ 3. Теорема существования и единственности

Большим достижением в теории дифференциальных уравнений было установление теоремы существования и единственности решений. Впервые этот вопрос был поставлен и решен различными способами Коши в 20—30-х гг. XIX в. Для доказательства теоремы им использовался так называемый первый метод, дополненный позже немецким математиком Липшицем и известный ныне как метод Коши — Липшица, затем метод последовательных приближений и мажорантный метод, усовершенствованный и методически обработанный через 20 лет французскими математиками Ш. Брио [10] и Ж. Буке [11]. Независимо от Коши последний метод был также разработан немецким математиком К. Вейерштрассом в 1842 г. Однако его работа долгие годы оставалась неизвестной, так как публикация ее состоялась значительно позже, в 1899 г. Рассмотрим применение этого метода для случая уравнения первого порядка с одной неизвестной функцией.

Разберем сперва вопрос о построении мажорантной функции $F(z, w)$ по отношению к данной функции $f(z, w)$.

Итак, пусть функция $f(z, w)$ голоморфна [12] в области $|z|<r$, $|w|<\rho$ и представима сходящимся в этой области рядом

$$f(z, w)=\sum_{k,l} a_{k,l} z^k w^l. \tag{1}$$

Если взять $0<r_1<r$, $0<\rho_1<\rho$, то при

$$|z| \leqslant r_1, \quad |w| \leqslant \rho_1 \tag{2}$$

функция $f(z, w)$ будет голоморфна и ограничена:

$$|f(z, w)|<M. \tag{3}$$

Подставив в равенство (1) $z=r_1 e^{\varphi i}$, $w=\rho_1 e^{\psi i}$, получим

$$f(z, w)=\sum_{k,l} a_{k,l} r_1^k e^{k\varphi i} \rho_1^l e^{l\psi i}. \tag{4}$$

Заменяя в обеих частях равенства (4) i на $-i$ и обозначая $\bar{f}$ выражение, комплексно сопряженное с f и $\bar{a}$ число, комплексно сопряженное с a, получим

$$\bar{f}(z, w)=\sum_{k,l} \bar{a}_{k,l} r_1^k e^{-k\varphi i} \rho_1^l e^{-l\psi i}. \tag{5}$$

Перемножим равенства (4) и (5), найденное произведение проинтегрируем по φ и ψ в пределах от 0 до 2π и, заметив, что

$$\int_0^{2\pi} e^{(k-k_1)\varphi i}\, d\varphi = \begin{cases} 2\pi \text{ при } k = k_1 \\ 0 \text{ при } k \neq k_1, \end{cases}$$

получим $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} f\cdot\bar{f} d\psi = (2\pi)^2 \sum_{k,\,l} a_{k,l}\,\bar{a}_{k,\,l}\, r_1^{2k}\,\rho_1^{2l}.$

Отсюда, учтя, что $f\cdot\bar{f} = |f|^2$, $a_{k,l}\cdot\bar{a}_{k,l} = |a_{k,l}|^2$, имеем

$$\sum_{k,l} |a_{k,\,l}|^2\, r_1^{2k}\,\rho_1^{2l} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} |f|^2\, d\psi.$$

Принимая во внимание оценку (3) и вычислив интегралы вида $\int_0^{2\pi} dx$, получим $\sum\limits_{k,l} |a_{k,l}|^2 r_1^{2k}\rho_1^{2l} < M^2$, откуда

$$|a_{k,l}| < M/r_1^k\rho_1^l. \tag{6}$$

Разумеется, формула (6) может быть обобщена на функции любого числа переменных.

Дана функция $f(z, w)$, представимая рядом (1). Рассмотрим другую функцию $F(z, w)$, разлагающуюся в ряд

$$F(z,\ w) = \sum_{k,l} A_{k,l} z^k w^l, \tag{7}$$

сходящийся внутри области (2) (здесь $A_{k,l}$ — действительные положительные числа).

Если для всех коэффициентов ряда (7) имеет место неравенство

$$|a_{k,l}| \leqslant A_{k,l}, \tag{8}$$

то функция $F(z, w)$ по отношению к функции $f(z, w)$ называется мажорантной, или усиливающей. Для обозначения этого соотношения А. Пуанкаре ввел символ $\gg$. Таким образом, $F(z, w) \gg f(z, w)$.

В силу неравенства (8) ряд (1) сходится в той области, где сходится ряд (7) и, следовательно, область сходимости ряда (1) не меньше области сходимости ряда (7).

Можно построить весьма простые мажорантные функции, используя неравенство (6). Для этого положим, согласно (8),

$$A_{k,l} = M/r_1^k\,\rho_1^l.$$

Тогда мажорантную по отношению к $f(z, w)$ функцию можно записать в форме $F(z, w) = \sum\limits_{k,l} M\dfrac{z^k w^l}{r_l^k \rho_1^l} =$

$= \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{z}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{w}{\rho_1}\right)}$. Следовательно,

$$\frac{M}{1-\left(\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)} \gg f(z, w) \tag{9}$$

Отсюда легко получить: $\dfrac{M}{1-\left(\frac{z}{r_1}+\frac{w}{\rho_1}\right)} \gg f(z, w)$.

Докажем далее следующую теорему Коши. Если в уравнении

$$w' = f(z, w) \tag{10}$$

функция $f(z, w)$ голоморфна в окрестности некоторых значений $z_0=w_0=0$, то это уравнение имеет интеграл $w=F(z)$, принимающий при $z=z_0$ значение w_0, голоморфный внутри окружности, определяемой равенством

$$|z| = r_1\left(1-e^{-\frac{1}{2M}\cdot\frac{\rho_1}{r_1}}\right). \tag{11}$$

Пусть интеграл уравнения (10) выражается рядом Маклорена

$$w=\sum_m \alpha_m z^m. \tag{12}$$

Если в (10) положить

$$f(z, w)=\sum_{k,l} a_{k,l} z^k w^l \tag{13}$$

и учесть (12), то для определения коэффициентов α_m ряда (12) получим формулы вида:

$$\alpha_m = P(a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,0}, \ldots, a_{m-1,0}), \tag{14}$$

где P — многочлен с действительными положительными коэффициентами. Рассмотрим далее вопрос о радиусе сходимости ряда (12). Сначала построим функцию f_1, мажорантную для f. Возьмем r_1 и ρ_1, удовлетворяющие условиям (2). Тогда функция $f(z, w)$ будет голоморфной внутри и на окружностях C_1, C_2 радиусов r_1 и ρ_1. Следовательно, можно найти такую величину M, что внутри и на окружностях C_1 и C_2 $|f(z, w)|<M$. Таким образом, можно взять

$$f_1(z, w) = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)}.$$

Далее рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$w' = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)}. \tag{15}$$

Для интеграла, как и в случае уравнения (10), можно построить ряд

$$w=\Sigma\beta_m z^m, \tag{16}$$

дающий формальное разложение интеграла уравнения (15), удовлетворяющего начальным условиям $z_0=0$, $w_0=0$. Коэффициенты этого ряда определяются через коэффициенты разложения функции $\frac{-M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)}=\sum\limits_{k,\,l} b_{k,\,l}z^k w^l$ также формулами вида (14): $\beta_m=P\,(b_{0,0},\, b_{0,1},\, \ldots,\, b_{m-1,0})$, причем по свойству мажорантных функций можно доказать, что

$$|\alpha_m|<\beta_m. \tag{17}$$

Радиус сходимости ряда (16) легко определяется, так как уравнение (15) можно непосредственно проинтегрировать. Разделяя переменные, найдем $\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)dw=\frac{Mdz}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)}$,

далее $\int\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)dw=M\int\frac{dz}{1-\frac{z}{\rho_1}}$ или $\frac{\rho_1}{2}\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)^2=$
$=Mr_1\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)+C.$

Подставляя сюда $z=0$, $w=0$, получим $C=\rho_1/2$. Тогда после элементарных преобразований находим

$$w=\rho_1\left\{1-\sqrt{1+\frac{2Mr_1}{\rho_1}\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)}\right\} \tag{18}$$

(знак минус перед радикалом справа соответствует условию $z=0$, $w=0$). Особыми точками функции w из (18) будет прежде всего особая точка функции $\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)$, то есть $z_1=r_1$, а затем та точка, в которой выражение под знаком радикала (18) обращается в нуль:

$$z_2=r_1\left(1-e^{-\frac{1}{2M}\frac{\rho_1}{r_1}}\right). \tag{19}$$

Так как $e^{-\frac{1\rho_1}{2Mr_1}}<1$, то z_2 является действительным, положительным и $0<z_2<r_1$. Таким образом, функция w голоморфна внутри окружности L с радиусом $|z|=z_2$ и представляется степенным рядом (16), сходящимся внутри окружности L. Следовательно, при всяком $|z|<z_2$ ряд $\sum\limits_m\beta_m|z|^m$

сходится абсолютно, а из условия (17) следует абсолютная сходимость и ряда (12). Таким образом, ряд (12) внутри окружности L сходится равномерно и определяет в ней голоморфную функцию $w=F(z)$. Из метода ее построения следует единственность такого голоморфного интеграла.

Вышеизложенный метод доказательства существования интеграла может быть распространен на систему n уравнений первого порядка с n неизвестными функциями, на уравнения высших порядков, на линейные уравнения. Применение метода мажорантных функций к доказательству существования интегралов уравнений с частными производными было дано в докторской диссертации С. В. Ковалевской в 1874 г., где вопрос освещался весьма полно. Та же тема, хотя и не столь основательно, разрабатывалась французским математиком Г. Дарбу [13].

В дальнейшем метод был существенно развит благодаря работам Линделефа, Пуанкаре, Мерэ, Горна и других (см. [5, гл. III, § 5, 6]). Он нашел широкое применение в приложениях и, в частности, в небесной механике при расчетах движения планет Солнечной системы.

§ 4. Из ранней истории гипергеометрического уравнения

Существенное значение, особенно для теории линейных дифференциальных уравнений, имело изучение отдельных их видов. В этом смысле особый интерес представляет гипергеометрическое уравнение. Известная популярность его далеко не случайна и обусловлена той важной ролью, которую оно играло на узловых пунктах развития анализа. Являясь простейшим примером однородного линейного уравнения второго порядка, не интегрируемого в общем виде, оно принадлежит к весьма важному классу так называемых фуксовых линейных дифференциальных уравнений. Определяемые этим уравнением функции играют заметную роль как в теории, так и в приложениях, при решении многих задач математической физики.

В начальный период исследований, то есть в XVIII в., гипергеометрическая функция изучалась математиками с трех точек зрения: 1) как представляемая степенным — гипергеометрическим рядом, 2) как решение соответственного (гипергеометрического) дифференциального уравнения второго порядка, 3) как определенный — гипергеометрический интеграл. Все эти три аспекта уже имели место в работах Л. Эйлера[14].

Гипергеометрическим, или по более поздней терминологии рядом Гаусса, называли степенной ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots \quad (20)$$

где α, β, γ обозначали (сначала действительные) числа при условии $\gamma > 0$. Если α или β обращались в нуль или становились отрицательными целыми числами, то ряд обрывался и переходил в полином некоторой степени.

Этот ряд привлекал внимание математиков сперва потому, что он соединял в себе большое число разложений в ряды известных функций, а затем как таковой, через который могли интегрироваться вышеупомянутые виды линейных уравнений второго порядка. Так, например, известные биномиальный, логарифмический и другие ряды можно было представить так

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots[m-(k-1)]}{k!} x^k = F(-m, 1, 1, -x);$$

$$\ln(1+x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k+1} = xF(1, 1, 2, -x); \quad (21)$$

$$\operatorname{arctg} x = xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right); \quad \arcsin x = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

Эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода:

$$K(x) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x^2\right); E(x) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, x^2\right).$$

Такое представление дает возможность изучать свойства рассматриваемых функций, используя полученные ранее результаты для функций гипергеометрического типа.

Исследование сходимости ряда (20) с помощью признака Даламбера[15] показывает, что этот ряд сходится равномерно по α, β, γ, x при $|x| \leqslant q < 1$ в любой ограниченной замкнутой области переменных α, β, γ, не содержащей в себе целых отрицательных и нулевого значения γ. Поэтому гипергеометрический ряд представляет аналитическую функцию переменных α, β, γ, x при $|x|<1$, $\gamma\neq-k$ ($k=0, 1, 2, \ldots$).

Наименование «гипергеометрический ряд» встречается впервые у Валлиса в его «*Arithmetica infinitorum*» (1655). Он предложил его потому, что закон составления членов рассматриваемого им ряда был следующим по сложности после геометрического ряда. Общий член изучаемого Валлисом ряда можно представить формулой

$$u_n = \frac{a\,(a+b)\,(a+2b)\ldots[a+(n-1)\,b]}{b\cdot 2b\ldots(n-1)\,b}. \tag{22}$$

Этот ряд может быть рассмотрен в качестве частного случая ряда Гаусса (20) и обозначен как $aF\left(\frac{a}{b}+1, 1, 1, 1\right)$. Ряд (20) как функция переменной x впервые изучался Эйлером. Так, в мемуаре 1778 г. Эйлер нашел дифференциальное уравнение, которому удовлетворял ряд (20):

$$x\,(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0. \tag{23}$$

К такому виду подходящим преобразованием независимой переменной могло быть приведено любое уравнение второго порядка так называемого фуксового типа с тремя особыми точками, так что они принимали значение 0, 1 и ∞. В дальнейшем под гипергеометрической функцией стали понимать, в общем, любое решение уравнения (23).

Во втором томе «Интегрального исчисления» Эйлера решение линейного уравнения второго порядка впервые давалось в форме определенного интеграла. Значительное внимание Эйлер уделил изучению интегралов указанных выше дифференциальных уравнений в форме степенных рядов. Он же разобрал некоторые важные случаи преобразования гипергеометрических функций.

Дальнейшее изучение гипергеометрической функции и определяющего ее ряда связано с именем Й. Пфаффа [16], который первым применил термин «гипергеометрический» именно к ряду вида (20). Пфафф довольно подробно исследовал ряд (20) и соответствующее дифференциальное уравнение.

Таким образом, изучение гипергеометрического ряда, обобщавшего, как было показано выше, ряды для многих известных тогда функций, рассматривалось как одна из важнейших задач.

Уже к концу XVIII в. значительное развитие получили исследования, изучавшие прежде всего понятие гипергеометрической функции. Сначала она рассматривалась как представимая гипергеометрическим рядом, затем как удовлетворяющая простейшему (см. (23)) и обобщенному гипергеометрическому уравнению при действительных значениях параметров. Большой вклад в изучение указанного вопроса внес К. Гаусс[17], занимавшийся им в начале XIX в. Фундаментальные исследования о рядах вида (20) были опубликованы им в 1813 г.

Сумму ряда (20), $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, симметрическую относительно α и β, Гаусс рассматривает как функцию четырех переменных, называемых им элементами, и находит для нее ряд интересных соотношений. Значения параметров α, β могут быть любыми, $\gamma>0$. Если $\alpha-1$ или $\beta-1$ — целое отрицательное число, то через $1-\alpha$ и $1-\beta$ членов ряд обрывается и переходит в рациональную алгебраическую функцию. Рассматривая отношение последующего члена к предыдущему, Гаусс устанавливает сходимость ряда при $|x|<1$. Затем он рассматривает частные случаи (всего 23), когда сумма гипергеометрического ряда является элементарной функцией x.

Первый и второй отделы первой части указанной работы Гаусса посвящены исследованию различных соотношений между функциями вида $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ при некоторых соотношениях между параметрами и разложениям отношения двух гипергеометрических функций в непрерывные дроби.

Исследованию гипергеометрического ряда при действительных значениях параметров и при $x=1$ посвящен третий (в первой части), самый большой отдел работы. В нем был сформулирован и строго доказан известный признак Гаусса сходимости рядов, а также получен ряд важных и интересных соотношений. Здесь же уточнялось понятие сходимости ряда вообще и разбирался случай расходимости ряда, общий член которого стремился к нулю. Тем самым была заложена основа строгой теории рядов с четким использованием понятия предельного перехода. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах Б. Больцано и О. Коши (соответственно чешского и французского математиков). Некоторая неполнота изложения Гаусса состояла в том, что условия сходимости выводились им для действительных значений параметров и не исследовались условия сходимости на окружности $|x|=1$. Решение этого вопроса в весьма общей форме впервые было опубликовано Вейерштрассом в 1856 г.

Вторую часть рассмотренной выше работы Гаусс предполагал посвятить теории дифференциальных уравнений, определяющих гипергеометрические функции, а третью часть — теории общих эллиптических функций.

Однако при жизни Гаусса публикаций об этих предметах не было, а продолжение работы появилось в форме четвертого отдела, содержащего § 38—57, лишь в 1866 г. при издании научного наследия Гаусса. Здесь гипергеометрическое дифференциальное уравнение получается в результате повторного дифференцирования функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ и как частный случай линейных соотношений из второго отдела основной работы. Оно давалось Гауссом в форме (23). Затем рассматривались преобразования независимого переменного x и функции F, при которых гипергеометрическое дифференциальное уравнение переходило в себя, но при других значениях параметров. Аргумент x преобразовывался в $1-x$, $x/(x-1)$, $1/x$. При этом Гаусс доказал возможность представления общего интеграла уравнения (23) в форме:

$$C_1F(\alpha, \beta, \gamma, x)+C_2F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x), \tag{24}$$

а также установил ряд новых интересных соотношений.

В четвертом отделе работы рассматриваются уже комплексные значения аргумента x. Однако применение их носило эпизодический характер. Для систематического построения теории гипергеометрических функций как функций комплексного переменного требовалась более глубокая и детальная разработка основ самой теории аналитических функций. Решение этой задачи было предметом работ многих ученых в последующий период. Оно нашло отражение в лекциях Ф. Клейна [18] о гипергеометрических функциях (1893—1894 гг.), которыми охватывались все основные результаты и методы, получившие известность к концу XIX в.

К работе Гаусса примыкали исследования Э. Куммера [19]. В первом из них (1834 г.) изучалось обобщенное дифференциальное уравнение третьего порядка для преобразования гипергеометрических функций. Более подробно эта проблема излагалась в большой статье Куммера в 1836 г.

Здесь он вполне определенно применил термин «гипергеометрический» именно к ряду Гаусса. В результате кропотливого исследования Куммер получил шесть видов дробно линейных подстановок аргумента

$$x,\ 1-x,\ 1/x,\ 1/(1-x),\ x/(x-1),\ (x-1)/x, \tag{25}$$

образующих замкнутую группу, и 24 вида различных решений гипергеометрического дифференциального уравнения (при независимых друг от друга параметрах α, β, γ), каждые четыре из которых были, по существу, тождественными. В мемуаре Куммера глава 7 посвящалась специально рассмотрению гипергеометрических функций $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ при изменении x в комплексной области, хотя и здесь еще не было построено общей теории. Основы ее были заложены в трудах Б. Римана, К. Вейерштрасса [20], О. Коши и других. Изученные ранее Куммером шесть интегралов образовали фундаментальную систему интегралов, попарно принадлежащих к особым точкам 0, 1 и ∞. Он же уделил внимание суммированию гипергеометрических рядов, а также рассмотрел множество различных соотношений между найденными интегралами как в обычном случае, так и в предположении существования некоторых зависимостей между параметрами α, β, γ (то есть так называемые преобразования высшего порядка). Найденные формулы применялись затем к изучению различных функций, содержащихся в общем выражении $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Существенные результаты в рассматриваемом направлении, в частности интегрирование гипергеометрического уравнения посредством определенных интегралов, были получены в трудах Якоби [21] (1843 г.), затем Тиссо, Вейлера, Летникова [22]. Последний для решения задачи разработал и удачно применил метод дифференцирования с произвольным указателем порядка дифференцирования. Ему удалось обобщить соответствующие формулы Якоби и получить также новые виды частных решений гипергеометрического уравнения.

Из сказанного выше мы видим, как из частных разрозненных исследований интересных особенностей гипергеометрического ряда, а затем и гипергеометрической функции ученые пришли к весьма общим результатам, явившимся основой новой теории, а сами функции стали изучать как решение соответствующего дифференциального уравнения. В дальнейшем это направление получило интенсивное развитие. Речь о нем будет идти в конце гл. IV.

Глава II. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Классификация особых точек

Как было показано в § 3 гл. 1, теорема существования и единственности определяла интеграл дифференциального уравнения в круге некоторого радиуса. Этот интеграл мог быть продолжен далее определенным способом. Полученная таким образом аналитическая функция удовлетворяет тому же уравнению, что и исходный элемент [3, с. 38]. Затем можно изучить интеграл во всей области его существования. Поведение интеграла и область существования определяются его особыми точками. Отсюда можно понять то большое внимание, которое уделяли многие математики изучению поведения интегралов уравнения в области особых точек. Изучение характера и расположения особых точек в зависимости от вида дифференциального уравнения является одной из основных и важнейших задач аналитической теории дифференциальных уравнений. В постановке и развитии этой задачи существенную роль сыграли само учение об особых точках функций и его эволюция. Об истоках его у нас уже шла речь в § 2 гл. 1. Важные результаты в этом направлении получил Коши. Они были существенно дополнены работами В. Пюизе, Б. Римана, К. Вейерштрасса.

Под критической понимается такая особая точка, когда функция меняет свое значение при обходе аргумента вокруг этой точки. Например, для функции $w=\sqrt{z}$ особая точка $z=0$ является критической. Если функции являются алгебраическими, то они имеют лишь конечное число различных значений в области таких точек, так как при продолжении обходов они циклически повторяются. В окрестности критической алгебраической точки z_0 функция представляется рядом вида:

$$w(z)=a_0+c\,(z-z_0)^{1/n}+a_2(z-z_0)^{2/n}+\dots \tag{26}$$

где n — целое, не меньше двух ($n\geqslant 2$).

В роли критической точки может выступать и полюс (критический полюс) функции. Тогда эта функция представляется таким рядом:

$$w(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-n/m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-(m-1)/n}+\ldots+$$
$$+a_{-1}(z-z_0)^{-1/n}+a_0+a_1(z-z_0)^{1/n}+\ldots \qquad (27)$$

Напомним, что в области полюса порядка m (m — целое) функция имеет разложение:

$$w(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\ldots+$$
$$+a_{-1}(z-z_0)^{-1/n}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots \qquad (28)$$

Критические алгебраические точки, полюсы и критические полюсы называются алгебраическими особыми точками. Функции, обладающие только такими особыми точками во всей плоскости, составляют класс алгебраических функций.

Классификация неалгебраических особых точек тесно связана с понятием об области неопределенности. Происхождение самого понятия связано, видимо, с введенным Фуксом понятием точек неопределенности. Истоки его можно усмотреть уже в докторской диссертации Пенлеве (1888 г.), когда для характеристики особой точки были привлечены понятия из теории множеств. Однако явно оно было введено Пенлеве лишь в работе 1900 г., затем попало в лекции Зоретти (1911 г.) и получило широкую известность. В. В. Голубев [23] [3, с. 41] характеризует его так. Около рассматриваемой особой точки z_0 однозначной функции описывается окружность C радиуса ρ. Через $D(\rho)$ обозначается множество значений, которые принимает или к которым неограниченно приближается функция или какая-нибудь ее ветвь при различных продолжениях ее внутри окружности C. Если ρ неограниченно уменьшать, то множество $D(\rho)$ стремится к некоторому предельному множеству F. Это множество F и есть область неопределенности функции в особой точке z_0. Можно доказать, что оно является или непрерывным множеством или состоит из одной точки. Это и положено в основу классификации неалгебраических особых точек. Если область неопределенности состоит из одной точки, то особая точка z_0 называется трансцендентной, если же область неопределенности состоит не из одной точки, то z_0 называется существенно особой точкой.

Примером трансцендентной особой точки может быть точка $z=0$ для функции $w=\ln z$. Примером существенно особой точки является обыкновенная существенно особая точка однозначной функции, например $z=0$ для функции $w=e^{1/z}$. Трансцендентные особые точки могут выступать для многозначных функций и в роли критических. Так, для функции $w=\sin 1/\sqrt{z}$ точка $z=0$ есть критическая существенно особая точка. Если область неопределенности особой точки покрывает всю плоскость, то она называется точкой с полной областью неопределенности. В противном случае будут точки с неполной областью неопределенности. В случае однозначных функций по теореме Сохоцкого — Пикара область неопределенности изолированной существенно особой точки покрывает всю плоскость. Если существенно особые точки не изолированы, то среди них могут быть такие, для которых область неопределенности не покрывает всей плоскости, а образует ее часть, например круговое кольцо или линию [3, с. 43].

Если функция w обладает изолированной существенно особой точкой z_0, то в ее окрестности она представляется рядом Лорана (ряд такого вида использовался Вейерштрассом несколько раньше, чем состоялась публикация Лорана):

$$w(z)=\ldots+a_{-m}(z-z_0)^{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\ldots+ +a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots \tag{29}$$

Областью сходимости этого ряда является круговое кольцо $R_1<|z|<R$ с центром в точке z_0, здесь R — радиус сходимости степенного ряда $a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$

§ 2. Подвижные и неподвижные особые точки решений дифференциальных уравнений

Переходя к изучению особых точек решений дифференциальных уравнений, следует иметь в виду следующее важное обстоятельство. В процессе интегрирования функция-интеграл получает произвольную постоянную C, входящую в нее таким образом, что положение особых точек или зависит, или не зависит от нее. Если положение особых точек изменяется с изменением начальных условий, то такие особые точки решений называются подвижными. Если положение особых точек решений не зависит от начальных условий, то они называются неподвижными.

На первых этапах развития теории, в силу ограниченности опыта, когда в основном изучались простейшие уравнения, в частности линейные, которые не обладали подвижными особыми точками, это обстоятельство проходило мимо внимания исследователей. Однако в процессе дальнейшего развития теории оно скоро было обнаружено. Едва ли не впервые Гамбургер (1877 г.) четко заметил, что для интегралов нелинейных дифференциальных уравнений (выше второй степени) существуют подвижные критические точки и что положение особых точек зависит определенным, но заранее неизвестным образом от констант, содержащихся в общем интеграле уравнения n-го порядка. А уже в работе 1884 г. Фукс выделил класс дифференциальных уравнений первого порядка, решения которых обладают неподвижными критическими точками. Разработка этой идеи была продолжена затем Пуанкаре и особое развитие получила в трудах Пенлеве, указавшего к концу 80-х гг. класс таких уравнений первого порядка, в интегралах которых отсутствуют подвижные трансцендентные и существенно особые точки.

Именно наличие или отсутствие того или иного вида подвижных особых точек в интегралах дифференциальных уравнений и было затем одним из существенных признаков, положенных в основу классификации этих уравнений.

Рассмотрим для примера уравнение

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2wz}. \tag{30}$$

Правая его часть голоморфна при $z\neq 0$, $w\neq 0$. Интегрируя его методом разделения переменных, получим $w^2=\ln z-\ln C$, откуда $w=\sqrt{\ln\frac{z}{C}}$. Для этого интеграла $z=0$ и $z=\infty$ есть трансцендентные особые точки, и точка C является критической алгебраической точкой [3, с. 45], так как $\ln\frac{z}{C}=\ln\left(\frac{z-C}{C}+1\right)=\frac{z-C}{C}-\frac{1}{2}\left(\frac{z-C}{C}\right)^2+\ldots$ и

$$w=\frac{\sqrt{z-C}}{\sqrt{C}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}\left(\frac{z-C}{C}\right)+\ldots}=$$
$$=\sqrt{z-C}\left[\frac{1}{\sqrt{C}}+\varphi(z)\right]$$

(где $\varphi(z)$ голоморфна в области $z=C$).

Здесь можно легко заметить, что трансцендентные особые точки одни и те же для всех интегралов, т. е. при различных C, и они являются неподвижными. Положение же критической точки зависит от C. Оно меняется при изменении начальных условий, определяющих интеграл, ибо C связано с начальными условиями z_0, w_0 соотношением $w_0 = \sqrt{\ln \frac{z_0}{C}}$, откуда $C = z_0 e^{-w_0^2}$. Таким образом, критическая алгебраическая точка $z=C$ является здесь подвижной.

Также подвижной критической алгебраической точкой $z=-C$ обладает решение $w = \sqrt{z+C}$ уравнения

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w}. \tag{31}$$

Уравнение
$$w' = w^2 \tag{32}$$

имеет интеграл $w = -1/(z+C)$ с подвижным (некритическим) полюсом $z=-C$.

Уравнение
$$w' = -w^3/2 \tag{33}$$

имеет интеграл $w = 1/\sqrt{z+C}$ с подвижным критическим полюсом $z=-C$.

Можно также указать примеры дифференциальных уравнений порядка выше первого, интегралы которых обладают подвижными трансцендентными и существенно особыми точками.

Неподвижные особые точки получаются в интегралах дифференциальных уравнений в связи с тем, что аргумент z входит в правую часть уравнения через его коэффициенты, которые сами могут иметь особые точки. Поэтому положение неподвижных особых точек интегралов можно определить сравнительно легко по уравнению. Отыскание же подвижных особых точек гораздо сложнее.

Исходя из изложенного выше, было установлено, что интегралы линейных уравнений не имеют подвижных особых точек [3, с. 47]. Существует весьма широкий класс и нелинейных уравнений, интегралы которых также не имеют подвижных особых точек. Такого вида уравнения давно привлекали внимание исследователей.

Был также установлен признак для дифференциальных уравнений первого порядка, интегралы которых обладают подвижной алгебраической критической точкой, следующей теоремой.

Если для уравнения

$$w' = f(z, w) \qquad (34)$$

$f(z_0, w_0)$ равно бесконечности и $1/f(z, w)$ голоморфна в области z_0, w_0, то интеграл, определяемый начальными условиями (z_0, w_0), имеет в точке z_0 критическую алгебраическую точку; эта алгебраическая критическая точка в общем случае есть подвижная точка, так как z_0 зависит от начального значения w_0, как это видно из уравнения $1/f(w_0, z_0)=0$ [3, с. 51].

Как на пример укажем на рассмотренное ранее уравнение (31). Для него в точке с координатами $w=0$, $z=z_0$ имеем $w'=\infty$, а $1/w'$ голоморфна в окрестности этой точки, и, как было показано, интеграл этого уравнения обладал подвижной критической алгебраической точкой. Уравнение же (33) имеет конечную правую часть при любом конечном w, и, как видно из приведенного выше выражения его интеграла, последний не имеет критических алгебраических точек, а имеет только критический (подвижный) полюс.

К этому вопросу можно подойти следующим путем. Так как функция в полюсах обращается в бесконечность, то в уравнении (33) сделаем подстановку $w=1/w_1$ и будем изучать интеграл, определяемый начальными значениями $(w_1)_0=0$ и $z=z_0$. После подстановки получим $w_1'=1/2w_1$, а это уравнение вида (31), интеграл которого обладал критической точкой (при $(w_1)_0=0$).

Но $(w_1)_0=1/w_0$ и, следовательно, при $w_0=\infty$, $z=z_0$ получим подвижный критический полюс. Приведенная и другие теоремы позволяют находить разложения интегралов в области подвижных алгебраических особых точек.

Значительно сложнее исследование дифференциальных уравнений на подвижные трансцендентные и существенно особые точки. Как правило, это уравнения не ниже второго порядка или такие первого порядка, в которые неизвестная функция w входит трансцендентно. Например, уравнение $w'=e^{-w}$ имеет интеграл $w=\ln(z-C)$ с подвижной трансцендентной точкой, а уравнение $w'+w\ln^2 w=0$ имеет интеграл с подвижной существенно особой точкой.

В этом направлении Пенлеве доказал важную теорему о том, что уравнения первого порядка, алгебраические относительно неизвестной функции и ее производной, не могут иметь в своих решениях подвижных трансцендентных и существенно особых точек [3, с. 55]. Эта теорема существенно упрощает исследование решений интегралов указанного типа дифференциальных уравнений.

§ 3. Особые точки дифференциальных уравнений

В тесной связи с особыми точками функций находится важное понятие особых точек дифференциальных уравнений.

Ш. Брио и Ж. Буке выпустили по теории функций комплексного переменного монографию, где систематически и методически были обработаны результаты, полученные до 1855 г. в трудах Коши, Лорана, Пюизе, Эрмита, Лиувилля и других ученых. Они же опубликовали и первую монографию по аналитической теории дифференциальных уравнений [14], а позже и по теории эллиптических функций на новой основе. Эти ученые ввели в указанных работах ряд новых сейчас хорошо известных понятий.

Введенные ими понятия критических точек, корней (или нулей) функций и полюсов (или бесконечностей) стали общеупотребительными и перешли затем в научную и учебную литературу. Под полюсом они понимали такую особую точку, во всей окрестности которой, за исключением самой точки, функция w голоморфна, а в самой точке z_0 становится бесконечной. Тогда функция $1/w$ будет голоморфной в z_0. Функцию, голоморфную в некоторой части плоскости, за исключением конечного числа полюсов, Брио и Буке называли мероморфной в этой части плоскости, т. е. подобной рациональным дробям.

В основу классификации функций, как позже и Вейерштрасс, они положили отношение последних к особым точкам. Брио и Буке писали, что любая монодромная функция* после первых трех категорий (рациональные, периодические, двоякопериодические) представляет новую трансцендентную, а трансцендентные функции различаются между собой по распределению их бесконечностей. Неисчерпаемым источником новых трансцендентных являются дифференциальные уравнения.

Как принципиально новый и важный вклад Брио и Буке в теорию отметим четкую постановку и довольно под-

---

* Под монодромной функцией Коши понимал такую функцию, которая непрерывна в некоторой точке и ее окрестности и однозначна.

робное решение вопроса о поведении интегралов дифференциальных уравнений в окрестности особых точек, в частности, когда правая часть уравнения

$$w' = f(z, w) \tag{34}$$

становится бесконечной или неопределенной [14]. Так был поставлен вопрос об исследовании особых точек дифференциальных уравнений. Брио и Буке принадлежит и первая, хотя еще и несовершенная классификация уравнений и их интегралов по характеру особых точек правой части уравнения (34). Под последними они понимали такие точки z, для которых не выполнялись условия теоремы Коши о существовании (и единственности) решений дифференциальных уравнений, но для окрестности которых можно было ставить вопрос о существовании решения $w = w(z)$. Оказалось, что в окрестности таких точек при некоторых условиях решения будут голоморфны. Принципиальные установки Брио и Буке в этом смысле не изменились и в начале нашего века перешли в учебную литературу. Так, в своем известном трактате по теории дифференциальных уравнений Форсайт (в т. 2) особыми точками дифференциального уравнения (34) считал такие, в которых функция $f(z, w)$: 1) не конечна; 2) не определена; 3) не однозначна.

Названия для особых точек дифференциальных уравнений первого порядка одним из первых предложил Пуанкаре в цикле работ начала 80-х гг. прошлого века. Однако приоритет в вопросе о классификации особых точек таких уравнений принадлежит выдающемуся русскому механику Н. Е. Жуковскому [24]. Этот вопрос был подробно им разобран в гл. II магистерской диссертации «Кинематика жидкого тела», опубликованной в «Математическом сборнике» (Москва) в 1876 г. Изучая кинематику жидкости с единой общей точки зрения, Жуковский вместе с тем разработал и совершенно новые методы исследования особых точек дифференциальных уравнений движения жидкости. Рассматривая движение бесконечно малой частицы жидкости (в главе I), он получил дифференциальные уравнения для возможных траекторий частицы в виде:

$$dx/(l_1x - ry) = dy/(l_2y + rx) = dz/l_3z. \tag{35}$$

После ряда преобразований Жуковский находит интегралы такой системы и исследует их геометрический смысл, выясняя тем самым расположение линий тока. Уже в процессе этого он получает семейства кривых, связанных с основными видами особых точек (указанных позже Пуанкаре), и другие при определенных сочетаниях величин l_1, l_2, l_3, r, z. Исследуя затем течение жидкости в гл. II, Жуковский рассмотрел случай (§ 20), когда скорости течения u, v, w внутри некоторого пространства, ограниченного замкнутой поверхностью, будут непрерывны, однозначны и конечны. При этом оказалось, что линии тока, заполняющие такое пространство, не могут пересекаться или соприкасаться, так как для каждой точки косинусы углов касательной к линии тока имеют одно определенное значение. Этого нельзя сказать, когда скорости u, v, w обращаются в $0, \infty, \frac{0}{0}$ или становятся многозначны. Жуковский называет критическими такие точки, в которых линии тока пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну, и разбирает свойства таких точек сначала для плоского течения.

Помещая начало косоугольных координат в точку, где скорости обращаются в $0, \infty, \frac{0}{0}$, он отыскивает предел u/v при $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$. Когда этот предел имеет конечную величину $\Phi\ (y/x)$, уравнения линий токов, бесконечно близких к началу координат, получаются при интегрировании уравнения $y'=\Phi\ (y/x)$.

Затем Н. Е. Жуковский переходит к рассмотрению различных критических точек и характеристике интегральных кривых вблизи их. Не выписывая формул, приведем лишь копию данных автором рисунков (рис. 1).

Из них легко усмотреть, что по современной терминологии: *1* — седловина; *2* — узел; *3* — дикритический узел; *4* — узел (отличный от *2*); *5* — фокус; *6* — центр. Так, в процессе исследования кинематики жидкости были открыты особые точки дифференциального уравнения.

Это открытие, естественно, не умаляет значения дальнейших работ Пуанкаре в данном направлении. Развивая далее идеи Брио и Буке, Пуанкаре, начиная с 1878 г., подробно исследовал уравнение вида:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P\ (z, w)}{Q\ (z, w)} \tag{36}$$

(где $P\ (z, w)$, $Q\ (z, w)$ — многочлены) в цикле работ о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Здесь Пуанкаре ввел понятие характеристик, называя так кривые, уравнения которых есть решения дифференциаль-

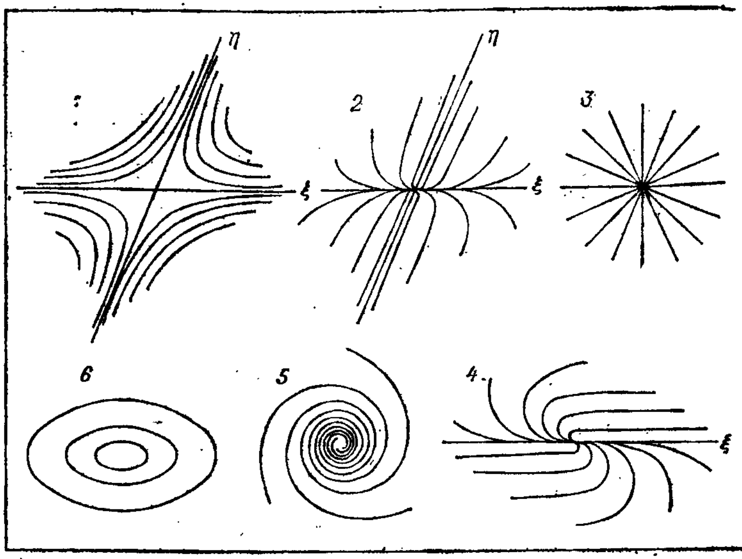

Рис. 1

ного уравнения (36). Для обхода трудностей, возникающих при изучении бесконечных ветвей, он применяет стереографическую[25] проекцию плоскости на сферу, а кривые, расположенные на ней определенным образом, называет циклами и полициклами. В зависимости от особенностей их расположения на сфере Пуанкаре вводит и специальную терминологию, используя топографическую систему кривых уровня на земной поверхности.

Двойные точки полициклов соответствуют седловинам, а особые точки, через которые не проходит ни один цикл, — вершинам и котловинам земной поверхности. Отсюда получены названия особых точек — седла, вершины (узлы) и котловины (фокусы). Особой точкой более сложного вида является центр, который вообще представляет аналогию с фокусом, но вокруг которого в некоторых случаях интеграл определяет замкнутую кривую. Эти четыре типа точек Пуанкаре назвал особыми точками первого рода. Особые точки второго рода можно рассматривать как результат слияния нескольких особых точек первого рода. Результаты Пуанкаре были затем дополнены и обобщены в работах Бендиксона, Берлинга, Дюляка и других.

§ 4. Дифференциальные уравнения первого порядка с неподвижными критическими точками

Особыми точками дифференциальных уравнений могут быть особые точки их коэффициентов, нули коэффициентов при старшей производной, точка ∞, критические, изолированные краевые и особые точки разных видов области существования интеграла, к которой принадлежат и начальные условия. Но особые точки решения могут быть различной природы в том смысле, что некоторые из них можно определить по форме правой части уравнения (34), а другие по этому виду определить нельзя.

При исследовании ряда теоретических и прикладных вопросов значительный интерес представляют такие типы дифференциальных уравнений, решения которых являются однозначными функциями, то есть не имеют критических особых точек. Первым приблнжением здесь было отыскание уравнений, интегралы которых не имели подвижных критических точек. Такие уравнения были названы уравнениями с неподвижными критическими точками.

Рассмотрим, какие из уравнений общего вида (36) (где P, Q — многочлены относительно w) могут обладать неподвижными критическими точками.

Пенлеве показал, что интегралы этого уравнения могут иметь только алгебраические особые точки. Следовательно, в искомом виде уравнений должны отсутствовать подвижные алгебраические критические точки и подвижные критические полюсы. Но для этого прежде всего необходимо, чтобы Q не содержало w, ибо в противном случае можно взять некоторое z_0, отличное от общих решений уравнения $P(z, w)=0$ и $Q(z, w)=0$ и, определив значение w_0 из уравнения $Q(z_0, w)=0$, найти, что интеграл, определяемый начальными условиями (z_0, w_0), как установили еще Брио и Буке, имеет подвижную критическую алгебраическую точку w_0, так как для нее правая часть уравнения (36) обращается в бесконечность.

Но если Q не зависит от w, то уравнение (36) можно записать в виде:

$$w'=\alpha_0(z)\, w^n+\alpha_1(z)\, w^{n-1}+\ldots+\alpha_n(z). \tag{37}$$

Интегралы уравнения (37) уже не имеют подвижных критических алгебраических точек. Подвижные критические полюсы в них будут отсутствовать в том случае, когда после подстановки $w=1/w_1$ получим из (37) новое уравнение для w_1 без критических точек

$$w_1'=-[\alpha_0(z)\, w_1^{-n+2}+\alpha_1(z)\, w_1^{-n+3}+\ldots+\alpha_n(z)w_1^2], \qquad (38)$$

в котором должно быть $n-2\leqslant 0$, так как при $n-2>0$ интегралы уравнения (38) будут иметь подвижные алгебраические критические точки, в которых $w_1=0$ (а интегралы уравнения (37) будут иметь подвижные критические полюсы). Таким образом, уравнения общего вида (36) с неподвижными критическими точками запишутся в форме:

$$w'=\alpha_0(z)\, w^2+\alpha_1(z)\, w+\alpha_2(z), \qquad (39)$$

где α_0, α_1, α_2 — некоторые функции от z. Уравнения вида (39) называются уравнениями Риккати.

Эти уравнения принадлежат к следующему по сложности классу после линейных и играют особую роль в аналитической теории дифференциальных уравнений. Многие интересные свойства этих уравнений были установлены еще основоположниками анализа. Интерес к их исследованию не ослабевал и в последующий период (см. об этом [5, с. 180 и след.]). Свое наименование, по предложению знаменитого французского ученого-энциклопедиста Ж. Даламбера, это уравнение получило от имени итальянского математика графа Я. Риккати (1676—1756 гг.). Можно показать, что единственными подвижными особыми точками интегралов таких уравнений могут быть подвижные (некритические) полюсы. Интегрирование их при помощи специальных подстановок может быть приведено к интегрированию линейного уравнения второго порядка [3, с. 62]. Также было установлено, что любой интеграл уравнения Риккати выражается рационально через три его частных интеграла. Отсюда следует важное заключение о том, что если уравнение Риккати имеет три однозначных интеграла, то и всякий его интеграл — однозначная функция. Это свойство характерно только для уравнения Риккати.

Проблема поиска условий отсутствия подвижных критических точек для уравнений вида

$$P\,(w',\, w,\, z)=0 \qquad (40)$$

(где P—многочлен по w, w'), коэффициенты которого являются аналитическими функциями от z, была поставлена и впервые решена Л. Фуксом в 1884 г.

Оказалось, что уравнение (40) можно записать в виде многочлена:

$$(w')^m+\psi_1(w,z)(w')^{m-1}+\ldots+\psi_m(w,z)=0, \tag{41}$$

любой коэффициент ψ_k которого должен быть, в свою очередь, многочленом относительно w степени не выше $2k$. Должны были соблюдаться и другие условия (см. [3, с. 78]). Условия Фукса являются необходимыми для отсутствия в решениях критических алгебраических особых точек. Они могли бы быть недостаточными в случае присутствия в решениях подвижных существенно особых точек, которые могли бы выступать в роли критических. Однако Пенлеве удалось доказать теорему о том, что решения уравнения (40) не имеют подвижных существенно особых точек. Таким образом была доказана достаточность условий Фукса для всей области существования решений уравнений этого вида.

Для теории интегрирования дифференциальных уравнений рассмотренного и других типов чрезвычайно важное значение имели работы Римана по геометрической теории алгебраических функций, в частности введенные им в рассмотрение многолистные поверхности. Эти поверхности, называемые поверхностями Римана, позволяют геометрически униформизировать функцию таким образом, что каждой точке поверхности соответствует одно значение конечнозначной функции, причем при непрерывном перемещении по поверхности непрерывно изменяется и функция. При помощи ряда преобразований поверхности Римана можно привести к так называемой канонической форме и изобразить в виде замкнутых дискообразных поверхностей с некоторым числом дыр. Это число называется родом поверхности или соответствующей алгебраической функции. На рис. 2 изображена поверхность рода 1. Поверхность рода 0 гомеоморфна сфере, рода 1 — тору и т. д. Оказалось возможным определить род функции по степени уравнения и по кратности ее критических точек при помощи формулы, установленной Риманом.

В трудах Римана, Шварца [26], Неймана и других было также показано, что для каждой поверхности рассматриваемого типа (рода) можно найти класс уравнений $P(w, z)=0$, где P — многочлен от w и z, для которого построенная поверхность есть поверхность Римана. Такое уравнение называлось уравнением соответствующего рода.

Эти факты были хорошо известны Фуксу. Поэтому он рассмотрел уравнение (41), когда оно имело род 0 или 1. Оказалось, что в первом случае рассматриваемое уравнение с неподвижными критическими точками приводится к уравнению Риккати, а во втором—интегрируется в эллиптических функциях.

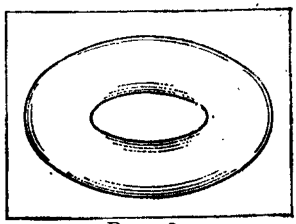

Рис. 2

Эти результаты были опубликованы в протоколах заседаний Берлинской академии от 26 июня 1884 г. А в протоколах Парижской академии от 15 июля того же года уже появилась заметка Пуанкаре, где развивались и дополнялись результаты Фукса, в частности трактовался и случай рода 1 как представляющий алгебраический интеграл. Более полно и обстоятельно результаты Пуанкаре были изложены в большой статье в 1885 г. Сначала он надеялся открыть новый класс функций, определяемых дифференциальными уравнениями, интегрируемыми в фуксовых трансцендентных функциях, но потом убедился, что уравнения первого порядка, удовлетворяющие условиям Фукса, не содержат реально новых видов дифференциальных уравнений, определяющих неизвестные до того функции. В конце работы Пуанкаре высказал предположение, что могут быть открыты существенно новые классы функций, определяемые уравнениями, интегрируемыми в фуксовых трансцендентных, но среди уравнений высших порядков.

Исследования Фукса и Пуанкаре вызвали множество работ, дополнявших и развивавших их идеи. Уравнения (41), впервые рассмотренные Фуксом, получили название фуксовых, как и соответствующие условия неподвижности критических точек. Эти условия были исследованы в большом мемуаре Пикара в 1889 г.

Существенное дополнение к условиям Фукса предлагалось в заметке Хилла и Берри в 1911 г. Они построили пример дифференциального уравнения первого порядка, которое удовлетворяло условиям Фукса, но его интеграл имел подвижные критические точки при $w=\infty$. Они отметили, что Фукс, видимо, обратил мало внимания на этот случай. Хилл и Берри первые указали на недостаточную корректность решения вопроса у Фукса, хотя необходимость проверки условий Фукса для преобразованного уравнения

(41) подстановкой $1/w$ отмечалась уже в лекциях Пенлеве [16, с. 60]. Но это замечание прошло мимо внимания Форсайта, Шлезингера и других авторов монографий по теории дифференциальных уравнений, так же как заметка Хилла и Берри ускользнула от внимания многих авторов более поздних учебных пособий по данному предмету.

В тесной связи с проблемой неподвижных критических точек интегралов находится задача отыскания условий неподвижности других характерных точек функции-интеграла: нулей, полюсов, максимумов, минимумов и т. д. Последняя была поставлена и успешно решена выдающимся югославским ученым М. Петровичем в его докторской диссертации 1894 г. Он установил необходимые и достаточные условия неподвижности нулей и полюсов общего интеграла для алгебраического дифференциального уравнения первого порядка и дал достаточные условия для уравнения высших порядков, предполагая их трансцендентные особенности неподвижными. Дальнейшее развитие и обобщение некоторых результатов Петровича содержатся в работах греческого математика Ремундоса и русского математика В. В. Голубева (см. [5, с. 157]).

Глава III. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Постановка задачи

Исследование характера особых точек дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих функцию и ее производные алгебраически, представляло еще большие трудности, чем изучение того же вопроса для уравнений первого порядка. Это обусловлено возможностью присутствия в интегралах таких уравнений подвижных существенно особых критических точек. При этом задача отыскания уравнений второго и более высоких порядков с неподвижными критическими точками значительно усложнялась. Распространение метода исследования Фукса на уравнения высших порядков или на системы к успеху не привело. Однако для их решения оказались весьма полезными новые результаты в теории алгебраических функций, к которой принадлежали многие работы молодого Э. Пикара. Он же искал (1880 г.) признаки существования решения без подвижных критических точек для уравнения вида

$$F\left(w, \frac{d^2w}{dz^2}\right)=0, \tag{42}$$

где F — полином. Было установлено, что уравнение такого вида (рода 0 или 1) может допускать однозначные интегралы (обладавшие особыми точками не сложнее, чем полюсами) лишь в форме рациональных функций от z и $e^{\alpha z}$ (α — константа) или функций двоякопериодических. Опираясь на теорию преобразования поверхностей, в 1886 г. Пикар исследовал уравнения вида

$$f(w, w', w'')=0 \tag{43}$$

(где f — полином) на однозначность его общего интеграла, обладающего существенно особой точкой только на бесконечности. При этом получалось, что род уравнения (рассматриваемого как уравнение поверхности) должен быть равен нулю или единице. В дальнейшем исследования Пикара по отдельным видам уравнений были дополнены в трудах Валленберга, Франсена, Миттаг-Леффлера.

Весьма важной оказалась идея С. В. Ковалевской, положенная ею в основу исследований интегралов уравнений движения твердого тела около неподвижной точки [7]. Как известно, интегрирование дифференциальных уравнений, интегралы которых имеют в конечной части плоскости из особых точек только подвижные полюсы, вполне возможно при некоторых условиях. Поэтому особый интерес представляли те случаи, когда интегралы уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки имели вышеуказанный характер. Задача распадалась на две: а) установить те случаи, когда интегралы уравнений движения имеют подвижные полюсы; б) доказать, что в таких случаях интегралы не имеют других особых точек, кроме подвижных (некритических) полюсов при любом конечном t, во все время движения. Обе задачи С. В. Ковалевская решила. Достаточность найденных ею условий была очевидна из того, что полученные уравнения удалось проинтегрировать и их интегралы в действительности оказались без подвижных критических точек. Указанные исследования С. В. Ковалевской являются классическим примером применения методов аналитической теории дифференциальных уравнений к решению задач механики. При этом она быстро и творчески использовала самые глубокие идеи относительно однозначности интегралов уравнений общего вида, которые в те годы только стали разрабатываться. В дополнение к уже известным Ковалевская нашла еще один случай однозначных интегралов изучаемой задачи.

В связи с неполнотой метода Ковалевской, предполагавшего в интегралах существование полюсов (а возможны были случаи, когда интегралы, не имея полюсов, могли обладать, например, существенно особыми точками или на конечной части комплексной плоскости вообще не иметь особых точек), для решения ее задачи в 1895 г. был предложен так называемый метод уравнений в вариациях А. М. Ляпунова, свободный от подобных недостатков.

В то же время (конец 80-х, начало 90-х гг. прошлого века), несмотря на ряд неудач в своих многочисленных исследованиях, Пикар предпринимал весьма энергичные попытки выделить класс уравнений второго порядка с неподвижными критическими точками, но решение общего вопроса оставалось открытым.

Однако в феврале 1893 г. появилась весьма важная заметка уже известного тогда математика П. Пенлеве, которой был дан новый импульс в исследовании однозначности интегралов дифференциальных уравнений второго порядка. Он изучал уравнение вида

$$F(z, w, w', w'')=0, \tag{44}$$

где F — алгебраическая функция по всем переменным. Было установлено, что большая часть таких уравнений не имеет существенно особых точек. В дальнейшем они были отнесены к так называемому общему классу. К особому классу были отнесены те уравнения, в интегралах которых могли присутствовать подвижные существенно особые точки. Были указаны условия принадлежности уравнений этому классу. Пенлеве установил, что если уравнение (44) принадлежит особому классу, то его интеграл $w(z)$ может не иметь подвижных существенно особых точек, но является в каждом случае трансцендентной функцией констант w_0, w'_0.

Вслед за сообщением Пенлеве появилась заметка Пикара, где он указал на большое значение работы и отметил, что, как показал Пенлеве, его (Пикара) раннее предположение о том, что дифференциальные уравнения вида (44) имеют, в общем, существенно особые подвижные точки, не верно. Пикар далее выразил надежду, что полезные исследования Пенлеве скоро внесут ясность в вопрос об особом классе уравнений, представляющих интерес для определения новых трансцендентных функций. Скоро эта надежда сбылась.

§ 2. Метод малого параметра

Пенлеве удалось найти необходимые условия отсутствия подвижных критических особых точек и прием, позволяющий доказать достаточность полученных условий. Его результаты были основаны на применении метода малого параметра, основу которого составляли теоремы Пуанкаре о разложении интегралов в ряд по степеням малого параметра. Этот метод, сущность которого будет понятна из дальнейшего, встречался еще до работ Пуанкаре, но в трудах последнего он получил особое развитие и обоснование. Примечательно то, что он был разработан прежде всего для решения некоторых важных задач небесной механики, в частности задачи о движении трех тел.

Как известно, задача о движении двух тел, притягиваемых друг к другу по закону Ньютона, решалась полностью. Но задача о движении трех тел, решение которой должно было дать закон движения двух планет около Солнца, представляла большие трудности, так как в общем случае соответствующая система уравнений не интегрируется в известных функциях.

Однако при решении этой задачи следовало иметь в виду, что массы планет по сравнению с массой Солнца весьма малы, а взаимные расстояния планет достаточно велики. Поэтому при решении задачи трех тел можно было использовать решение задачи двух тел — о движении одной планеты около Солнца и внести в нее некоторые, вообще малые поправки, вызванные наличием второй планеты (третьего тела). Таким образом, можно было искать решение (интеграл) дифференциального уравнения в форме разложения этого решения по степеням малого параметра отношения массы возмущающей планеты к массе Солнца.

Решая эту задачу, Пуанкаре дал важное дополнение к теореме Коши существования интегралов дифференциальных уравнений. Здесь мы приведем исходный пункт и результаты решения указанной задачи. Доказательство этой теоремы Пуанкаре можно найти в [3, с. 156—159].

Рассматривается система двух уравнений:

$$w_1'=F_1(z, w_1, w_2, \lambda); \quad w_2'=F_2(z, w_1, w_2, \lambda), \tag{45}$$

где F_1, F_2 — голоморфные функции в окрестности $\lambda=0$, а λ — некоторый малый параметр.

Далее правые части уравнений (45) представляются в форме степенных рядов по w_1, w_2, λ в точках w_{10}, w_{20}, 0, и уравнения (45) принимают вид:

$$\begin{aligned} w_1' &= F_1(z, w_{10}, w_{20}, 0)+\Sigma a_{m,n,p}(w_1-w_{10})^m(w_2-w_{20})^n \lambda^p; \\ w_2' &= F_2(z, w_{10}, w_{20}, 0)+\Sigma b_{m,n,p} (w_1-w_{10})^m(w_2-w_{20})^n \lambda^p \end{aligned} \tag{46}$$

Интегралы системы (45) ищутся в форме рядов, расположенных по степеням λ с соответствующими коэффициентами (функциями от z), как и коэффициенты ряда (46):

$$\begin{aligned} w_1 &= w_{10}+\varphi_1\lambda+\varphi_2\lambda^2+\ldots+\varphi_n\lambda^n+\ldots \\ w_2 &= w_{20}+\psi_1\lambda+\psi_2\lambda^2+\ldots+\psi_n\lambda^n+\ldots \end{aligned} \tag{47}$$

Затем доказывается: 1) что все коэффициенты ряда (47) однозначно определяются через коэффициенты рядов (46) и, следовательно, через значения частных производных от F_1, F_2 по аргументам w_1, w_2, λ в точках z, w_{10}, w_{20}, 0; 2) что ряды (47) сходятся при достаточно малом λ. Доказательство основано на методе мажорантных функций. Эти ряды и представляют решения системы дифференциальных уравнений (45), расположенные по степеням параметра λ и являющиеся голоморфными функциями вдоль некоторой кривой L.

Эти результаты и составляют теорему Пуанкаре, которая была очень удачно применена Пенлеве к выделению класса уравнений второго порядка с неподвижными критическими точками.

§ 3. Результаты Пенлеве

Метод Пенлеве был разработан в 90-е гг. XIX в. для получения конкретных видов указанного выше класса дифференциальных уравнений. Основные положения его были подробно изложены в одной из статей Пенлеве в марте 1900 г.

Этот метод, как уже отмечалось, распадался на две составные части: 1) отыскание необходимых условий неподвижности критических точек интегралов рассматриваемых уравнений и 2) установление достаточности или недостаточности этих условий.

Для простоты рассуждений уравнение второго порядка

$$w''=R\ (w', w, z) \tag{48}$$

заменялось системой уравнений первого порядка

$$w'=A\ (z, w, t)/C\ (z, w, t);\ t'=B\ (z, w, t)/C\ (z, w, t), \tag{49}$$

где A, B, C — полиномы.

Идея первой части метода весьма проста. В систему (49) вводится параметр $\lambda\neq 0$ таким образом, чтобы при $\lambda=0$ она становилась интегрируемой в элементарных функциях:

$$w'=A_1(z,\ w,\ t,\ \lambda)/C_1(z,\ w,\ t,\ \lambda);$$
$$t'=B_1(z,w,t,\lambda)/C_1(z,\ w,\ t,\ \lambda). \tag{50}$$

Интегралы полученной системы при $\lambda=0$ будут: $w=\varphi_0(z)$, $t=\psi_0(z)$. Тогда по теореме Пуанкаре при $\lambda\neq 0$ интегралы системы (50) можно разложить в ряды по возрастающим степеням λ:

$$\begin{aligned} w&=\varphi_0(z)+\varphi_1(z)\lambda+\ldots+\varphi_n(z)\lambda^n+\ldots \\ t&=\psi_0(z)+\psi_1(z)\lambda+\ldots+\psi_n(z)\lambda^n+\ldots \end{aligned} \tag{51}$$

где все $\varphi_n\psi_n$ можно выразить по известным φ_0 и ψ_0 при помощи квадратур.

Очевидно, что если вдоль некоторой кривой какая-нибудь из функций φ_n и ψ_n станет многозначной, то $w\ (z)$ и $t\ (z)$ будут также многозначны. Также число значений, которые принимает при обходе около некоторой точки, например, функция $w\ (z)$, будет не меньше числа значений, принимаемых при том же условии любой из функций $\varphi_n(z)$. Таким образом, для того чтобы $w\ (z)$ была однозначна при обходе аргумента по некоторому замкнутому пути, необходимо, чтобы все $\varphi_n(z)$ в этом случае были однозначны.

Итак, если надо получить уравнения с неподвижными критическими точками, то при введении параметра необходимо, чтобы все $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ были однозначны при обходе аргумента вокруг всех точек, которые не являются неподвижными особыми точками. Так можно найти необходимые условия для уравнений с неподвижными критическими точками. Уравнения (50), полученные в результате указанного построения при $\lambda=0$, Пенлеве назвал упрощенными.

При применении этого процесса к уравнению (48) прежде всего устанавливается, что R должен быть полиномом второй степени по w', то есть уравнение имеет вид:

$$w''=A\,(w, z)\,(w')^2+B\,(w, z)w'+C\,(w, z), \tag{52}$$

где A, B, C — рациональные дроби по w и аналитические по z. Положив затем $z=z_0+\lambda Z$ и перейдя в (52) к пределу при $\lambda\to 0$, получим упрощенное уравнение

$$w''=A\,(z_0,\ w)\,(w')^2. \tag{53}$$

Чтобы уравнение (52) имело неподвижные критические точки, необходимо, чтобы (упрощенное) уравнение (53) имело такие же точки, откуда получаются всевозможные выражения $A\,(z_0, w)$. Так как переменная Z явно не входит в уравнение (53), то последнее можно записать так:

$$w''=A\,(w)\,(w')^2. \tag{54}$$

При дальнейшем исследовании на отсутствие подвижных критических точек в (54) было установлено, что $A\,(w)$ должно иметь относительно w только простые полюсы с вычетами вида $1-1/N$ (где N — целое число) и не иметь целой части. В этом случае уравнение (54) имеет вид:

$$w''=\sum_k \frac{1-1/N_k}{w-a_k}\,(w')^2. \tag{55}$$

Применяя другие преобразования для w, z и используя предыдущие результаты, можно провести упрощение и уточнение вида функций $A\,(w, z)$, $B\,(w, z)$, $C\,(w, z)$ и найти их конкретные выражения в случае, когда уравнения (52) будут с неподвижными критическими точками [3, гл. 4, § 4—6].

Если предыдущие (необходимые) условия были выполнены и система не могла обладать алгебраическими подвижными критическими точками, то проводилось еще доказательство отсутствия подвижных существенно особых точек. Аналогичный метод введения малого параметра α в систему (49) использовался, чтобы показать существование в ее интегралах подвижных трансцендентных особых точек. Первая часть метода без особых трудностей применима к дифференциальной системе любого порядка. Но, как отмечал Пенлеве, усложнение второй части метода возрастает вместе с порядком системы.

Опираясь на эти методы, Пенлеве и его ученики нашли десятки конкретных видов уравнений типа (52) с неподвижными критическими точками, и среди них только шесть уравнений, которые не интегрировались в известных функциях. Из них укажем первое уравнение:

$$w''=6w^2+z. \tag{56}$$

Интеграл этого уравнения представляет собой мероморфную функцию (во всей плоскости), содержащую две константы в трансцендентной форме и обладающую подвижными полюсами второго порядка. Он с помощью подстановки $w=-(\ln u)''$ выражается через некоторую целую функцию $u(z)$, удовлетворяющую весьма простому уравнению третьего порядка [3, с. 190]. Так был открыт неизвестный ранее существенно новый тип трансцендентных функций, которые не приводились к классическим трансцендентным, известным ранее, или их комбинациям.

С помощью составленных таблиц канонических уравнений с неподвижными критическими точками решалась обратная задача о принадлежности отдельных видов уравнений (48) к данному классу.

Исследования Пенлеве очень скоро стали достоянием математиков разных стран и вызвали много работ, дополняющих его результаты в различных аспектах. Одним из первых откликнулся известный русский математик В. П. Ермаков в 1902 г., предложивший свой метод установления критических точек и их исследования в интегралах дифференциальных уравнений, а также иной подход к построению упрощенного уравнения и др. Наиболее существенные дополнения результатов Пенлеве дал в свое время его ученик Гамбье. Он нашел новые виды уравнений (48) с неподвижными критическими точками, а также указал три новых вида неприводимых уравнений. Он же дополнил метод Пенлеве в части исследования достаточности условий, рассматривая вопрос не только о подвижных полюсах, но и о подвижных нулях. Исследованием интегралов неприводимых канонических уравнений с успехом занимался в 1912 г. молодой русский математик В. В. Голубев, обративший особое внимание на изучение характера особых точек их интегралов. Он упростил и существенно дополнил рассуждения Пенлеве, показав, что интегралы уравнения (56) и других (названных уравнениями Пенлеве) — мероморфные функции и могут быть представлены не только в виде отношения двух целых трансцендентных функций по известной теореме Вейерштрасса, но и весьма просто через логарифмические производные целой функции. Представляли интерес указанные Голубевым несколько случаев интегрируемости рассмотренных уравнений через известные функции при подходящем выборе параметров.

После работ Пенлеве, его учеников — Бутру, Гарнье, Гамбье, Шази и других — к началу 20-х гг. нашего века сложилось впечатление, что в аналитической теории нелинейных уравнений наступило некоторое затишье, а теория уравнений Пенлеве считалась законченной. Работы в этой области в 20—30-е гг. продолжали Петрович, Мальмквист, Гарнье, а позже Хукугара, Иосида, Заремба, Шеффер, Бюро и другие.

Заметное оживление в этой области наметилось с 1950 г. благодаря работам Н. П. Еругина[27] и его учеников и сотрудников. Уже в 1952 г. Еругин высказал мнение, что теорию уравнений Пенлеве нельзя считать законченной, так как здесь оставались еще нерешенными многие вопросы, в частности, об общем представлении решений этих уравнений во всех областях их существования и ряд других. К настоящему времени они решены. В работах Н. П. Еругина был построен новый метод исследования, давший возможность изучить характер особых точек некоторых классов систем более общего вида, чем системы, эквивалентные уравнениям (48). Были указаны классы таких систем вида (49), которые не имеют подвижных существенно особых точек, и дан метод исследования и построения решений в окрестности особых подвижных точек этих уравнений. Весьма интересным и важным было установление факта о том, что решения второго уравнения Пенлеве являются решениями некоторых уравнений первого порядка. Существенное дополнение теории уравнений Пенлеве предложил в 60-е гг. Н. А. Лукашевич. Более глубокое изучение теории систем вида (49), в частности их классификацию, изучение подвижных особых точек их решений и др. провел в то же время А. И. Яблонский.

Глава IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Основы теории

Из предыдущего изложения видно, что значительное внимание математиков было обращено на изучение таких классов нелинейных уравнений, в интегралах которых отсутствовали подвижные критические точки. Проводилось исследование интегралов этих уравнений, изучались они и в других аспектах (теорема существования и единственности решений, асимптотическое представление, устойчивость и другие характеристики). Однако изучение их все же было фрагментарным и не характеризовалось получением достаточно общих результатов. Значительно больший прогресс в этом отношении имел место в аналитической теории линейных уравнений, интегралы которых, как известно, обладают лишь неподвижными особыми точками. В таком случае аналитический характер интегралов линейных дифференциальных уравнений вполне определяется поведением их в области неподвижных особых точек. А неподвижные особые точки интегралов линейных уравнений обусловливаются их присутствием в коэффициентах данного уравнения; такого рода непосредственная связь существенно облегчает решение общей проблемы исследования интегралов по заданному дифференциальному уравнению.

Как известно из общей теории, решение неоднородного линейного уравнения

$$w^{(n)}+a_1(z)w^{n-1}+\ldots+a_n(z)w=f(z) \tag{57}$$

может быть найдено, например, методом вариации произвольных постоянных, если известен общий интеграл соответствующего однородного уравнения. А общий (следовательно, и любой) интеграл однородного уравнения может быть выражен как сумма произведений произвольных постоянных C_i на соответствующие линейно независимые частные решения w_i, то есть

$$w=\sum_{i=1}^{n} C_i w_i \tag{58}$$

Но можно поставить вопрос иначе — об изучении совокупности функций w_i, линейно зависимых от n произвольных постоянных, при условии, что функции w_i регулярны во всей плоскости комплексного переменного z, за исключением конечного числа точек a_k. Впервые задачу такого рода изучал Б. Риман в 1857 г. для частного случая функций с тремя особыми точками, дополнительно предполагая, что они удовлетворяют уравнению второго порядка. В то же время им был поставлен вопрос и в общей форме, но соответствующая статья увидела свет впервые только почти через 20 лет, когда была уже в основном построена теория Фукса, исходной точкой которой служили дифференциальные уравнения. Риман же, оставаясь верным своим принципам, положенным в основу докторской диссертации (1851 г. см. [12, с. 49—87]), характеризует исследуемые им функции не с помощью формулы, роль которой могло бы играть дифференциальное уравнение или его решение, а посредством перечисления необходимых внутренних свойств, присущих изучаемым функциям, и, в частности, их поведением около особых точек, и уже в итоге исследования приходит к дифференциальному уравнению.

Эти функции w_i характеризуются так, что при обходе около каждой из точек $a_k (k=1,2, ..., n)$ любая w_i может быть выражена в форме линейной комбинации:

$$w_1, w_2, ..., w_n. \tag{59}$$

Иначе говоря, вся система функций (59) подвергается некоторому линейному преобразованию, которое считается заданным для каждой из точек a_k. Совокупность таких преобразований образует группу для данного семейства w_i. Исходя из заданных преобразований этой группы Риман хотел построить дифференциальное уравнение, имеющее своими интегралами все функции семейства. Установив ряд их свойств и характер коэффициентов интересующего его дифференциального уравнения, Риман, однако, не смог определить вид этого дифференциального уравнения и доказать существование системы функций $w_1, w_2, ..., w_n$ той природы, которая требовалась в его работе. Отсюда возникла известная «проблема Римана», о которой речь будет далее.

Эта общая постановка вопроса не была известна Фуксу, но он мог хорошо изучить упомянутую выше статью, где вопрос решался для частного случая. Там Риман писал, что он изучает «... гауссову трансцендентную функцию посредством нового метода, который в сущности применим ко всякой функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению с алгебраическими коэффициентами. С помощью этого метода можно почти непосредственно из определения вывести результаты, которые раньше получались иной раз в итоге достаточно кропотливых вычислений» [12, с. 159]. Риман вводит здесь понятие точки ветвления (особой критической точки). Исследуемую функцию он обозначает символом P, дает ее определение, изучает ее свойства. Здесь же ставится принципиально важный вопрос, трудность решения которого для случая более трех критических точек, вероятно, была понятна Риману, а именно вопрос о существовании функции, удовлетворяющей поставленным требованиям.

Интересно отметить, что этот мемуар Римана был написан в 1856 г., то есть именно в том году, когда вышли известные «Исследования» Брио и Буке [14]. Появление этих работ, весьма различных по тематике, по характеру и главное по методу, обусловливалось и различными исходными точками. Исследования по гипергеометрическому ряду и полученные весьма важные результаты были характерны для немецкой математики (Гаусс, Куммер, Якоби). Риман продолжил эти исследования принципиально новым и глубоким методом, поставил новую общую проблему, завладевшую потом умами многих математиков, и решил ряд других важных для развития рассматриваемой дисциплины вопросов, став одним из основателей аналитической теории дифференциальных уравнений.

В то же время у Брио и Буке мы встречаемся с широкой и прямой постановкой общего вопроса об исследовании функций по определяющим их дифференциальным уравнениям на основе глубоких идей французской школы теории функций, вызвавшей мощный поток исследований, которые содействовали образованию новой дисциплины.

Работа Фукса появилась на основе сочетания обоих вышеупомянутых принципов, хотя непосредственно его исследования начались после изучения трудов Римана.

В дальнейшем для простоты выкладок мы ограничимся случаем линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Полученные результаты распространяются и на линейные уравнения более высоких порядков.

§ 2. Разложение интегралов в окрестностях особых точек

Рассмотрим уравнение вида

$$w''+p_1(z)w'+p_2(z)w=0, \tag{60}$$

коэффициенты которого $p_1(z)$ и $p_2(z)$ — рациональные функции. Общий интеграл его запишется в форме

$$w=C_1w_1+C_2w_2, \tag{61}$$

где w_1, w_2 — два частных линейно независимых решения (интеграла), а C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Будем рассматривать далее поведение интегралов в области особых точек, которые для функций $p_1(z)$ и $p_2(z)$ являются полюсами. После обхода около одной такой особой точки $z=\zeta$ интегралы w_1, w_2 перейдут в w_1^*, w_2^*. Тогда

$$\begin{aligned} w_1^*(z)&=aw_1(z)+bw_2(z);\\ w_2^*(z)&=cw_1(z)+dw_2(z), \end{aligned} \tag{62}$$

где a, b, c, d — константы. На основе (61) имеем $w^*=C_1w_1^*+$ $+C_2\,w_2^*$. Кроме того, $w^*=\lambda w$, где λ — некоторая постоянная. Тогда

$$C_1w_1^*+C_2w_2^*=\lambda w. \tag{63}$$

Подставим в (63) значения w_1^*, w_2^* из (62) и значение w из (61) и, учитывая линейную независимость w_1 и w_2, получим систему:

$$\begin{aligned} &C_1(a-\lambda)+C_2c=0;\\ &C_1b+C_2(d-\lambda)=0. \end{aligned} \tag{64}$$

Так как C_1, $C_2\neq0$, то λ должно удовлетворять уравнению

$$\lambda^2-\lambda\,(a+d)+ad-bc=0. \tag{65}$$

Здесь $\lambda\neq0$, ибо при $\lambda=0$ получим линейную зависимость w_1^* и w_2^*, а значит w_1 и w_2. Уравнение (65), связанное с особой точкой ζ, Фукс назвал фундаментальным. Можно показать, что корни этого уравнения не зависят от выбора интегралов w_1 и w_2 и, следовательно, характеризуют особую точку уравнения ζ, а не случайно выбранные интегралы.

Фукс полагает $\lambda_k=e^{2\pi i r_k}$. Отсюда $r_k=\ln\lambda_k/2\pi i$. Далее для корней уравнения (65) рассматриваются два случая: 1) λ_1, λ_2 — различны; 2) $\lambda_1=\lambda_2$.

Пусть в первом случае имеются два линейно независимых интеграла $\tau_1(z)$ и $\tau_2(z)$, принимающих после обхода вокруг особой точки значения соответственно $\bar{\tau}_1(z)$ и $\bar{\tau}_2(z)$. Последние связаны с их значениями до обхода равенствами

$$\bar{\tau}_1(z)=\lambda_1\tau_1(z) \quad \text{и} \quad \bar{\tau}_2(z)=\lambda_2\tau_2(z). \tag{66}$$

Далее рассматривается функция $\varphi(z)=(z-\zeta)^{r_k}$. После обхода вокруг точки ζ функция $\varphi(z)$ переходит в $\bar{\varphi}(z)=$ $=\varphi(z)\lambda_k=\varphi(z)e^{2\pi i r_k}$. Отсюда дробь $\bar{\tau}_1(z)/\bar{\varphi}(z)=\tau_1(z)/\varphi(z)$ — однозначная функция от z в окрестности ζ. Обозначим эту дробь через $f_1(z)$, тогда $\tau_1(z)=\varphi(z)f_1(z)=(z-\zeta)^{r_1}f_1(z)=(z-$ $-\zeta)^{\ln\lambda_1/2\pi i}f_1(z)$. Аналогично $\tau_2(z)=(z-\zeta)^{\ln\lambda_2/2\pi i}f_2(z)$. Следовательно, любой интеграл уравнения (60) может быть представлен в виде:

$$w=C_1(z-\zeta)^{\ln\lambda_1/2\pi i}f_1(z)+C_2(z-\zeta)^{\ln\lambda_2/2\pi i}f_2(z), \tag{67}$$

где $f_1(z)$, $f_2(z)$ — однозначные функции в окрестности ζ. Для случая кратных корней уравнения (65) получается более сложная форма, на которой мы останавливаться не будем.

Распространение этого метода на системы линейных уравнений первого порядка дано Л. Соважем в 1894 г. Дальнейший прогресс в изучаемом вопросе связан с построением аппарата матричного исчисления и, в частности, с работами В. Вольтерра и их отражением в курсах Шлезингера (1908 г.).

§ 3. Случай регулярной особой точки

Формулы вида (67) давали лишь качественную характеристику поведения интегралов в окрестности особой точки ζ. Для вычисления их необходимо было еще найти способ определения показателей λ_k и коэффициентов разложения в ряд Лорана функций $f_i(z)$ по коэффициентам разложения функций p_i, входящих в уравнение (60). Так как величины r_k, входящие в формулу (67), зависели от $\ln\lambda_k$, то при надлежащем их выборе и при условии, что функции f_i имели в точке ζ лишь полюсы, можно было добиться того, что эти функции в окрестности точки ζ были бы голоморфны и отличны от нуля при $z=\zeta$. Таким образом, случай, когда точка ζ для функций f_i не являлась существенно особой, мог представить для всей теории особый интерес вследствие сравнительной простоты его изучения. Это имело место тогда, когда ряды Лорана для функций f_i содержали только конечное число отрицательных степеней $z—\zeta$. Решения, соответствующие этому случаю, Л. Томе в статье 1873 г. назвал регулярными, а особая точка соответственного дифференциального уравнения в этом случае стала называться регулярной. Если же она была существенно особой хотя бы для одной из функций f_i, то называлась иррегулярной особой точкой уравнения.

Исследованием случая прежде всего регулярных решений и занимался Фукс в серии своих первых работ 1865—1868 гг. При этом надо было искать удобный способ для вычисления величин r_i с помощью простых алгебраических операций из коэффициентов дифференциального уравнения так же, как и определение коэффициентов ряда Лорана рекуррентными формулами.

Как следует из вышеизложенного, регулярные решения линейных уравнений обладали тем простым свойством, что, будучи умноженными на некоторую целую положительную степень $z—\zeta$, становились целыми (конечными) и голоморфными в окрестности ζ. Очевидно, что таким свойством могло обладать не каждое уравнение с рациональными коэффициентами вида (60). Поэтому Фукс поставил себе задачу об определении свойств коэффициентов p_i— таких уравнений (60), которые обладали бы регулярными решениями. В процессе ее рассмотрения были решены и другие вопросы.

Для упрощения дальнейших выкладок примем $\zeta=0$, что не повлияет на общий вид уравнения (60). Тогда в случае $\lambda_1\neq\lambda_2$ и на основании (67) можно записать:

$$w_1=z^{r_1}f_1(z),\quad w_2=z^{r_2}f_2(z), \tag{68}$$

где f_1 и f_2— голоморфные функции, когда $z=0$, $f_1(0)\neq0$, $f_2(0)\neq0$.

Используя соответствующие преобразования, на которых мы останавливаться не будем, уравнение (60) для данного случая можно записать в форме

$$w''+\varphi_1(z)w'/z+\varphi_2(z)w/z^2=0, \tag{69}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — функции, голоморфные в точке $z=0$.

Как было впервые показано Фуксом, эта форма уравнения есть необходимая и достаточная, чтобы линейное дифференциальное уравнение (60) обладало регулярным решением (т. е. $z=0$ являлась регулярной особой точкой интегралов). Иначе говоря, коэффициенты уравнения (60) p_1, p_2 в точке $z=0$ могут иметь полюсы соответственно 1 и 2 порядка. В случае уравнения m-го порядка коэффициент p_m в точке $z-\zeta$ может иметь полюс (не выше) m-го порядка.

Для доказательства достаточности указанной формы Фукс ищет решение уравнения (69) в форме ряда

$$w=z^r\,(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots), \tag{70}$$

сходящегося по предположению в окрестности точки $z=0$. Затем ищутся формулы для определения коэффициентов и доказывается предполагаемая сходимость. Дифференцируя дважды ряд (70), находим w' и w'', а также, представляя рядами коэффициенты

$$\varphi_1(z)=p_0+p_1(z)+\ldots;\quad \varphi_2(z)=q_0+q_1(z)+\ldots$$

подставим полученные разложения в уравнение (69).

В результате получается уравнение

$$r\,(r-1)+p_0r+q_0=0, \tag{71}$$

которое определяет величину r в разложении (70). Уравнение (71) назвали определяющим фундаментальным уравнением. В дальнейшем, по предложению Фробениуса (1875 г.), за ним сохранилось более краткое наименование определяющего уравнения.

Решая это уравнение, найдем два корня r_1, r_2. Тогда из (71) $r_1+r_2=-p_0+1$. Затем для определения величин a_k можно положить $a_0=1$. Вопрос об области сходимости ряда (70) решается на основе мажорантного метода.

Из вышеизложенного легко сделать важный вывод о том, что если дифференциальное уравнение обладает только алгебраическими интегралами, то оно должно иметь форму, подобную (69). В этом случае корни определяющего уравнения должны быть различными рациональными числами.

Выше упомянутые работы Фукса вызвали большой поток дальнейших исследований, дополняющих, уточняющих и расширяющих полученные им результаты (Мост, Фробениус, Гефтер, Шлезингер, Похгаммер, Перрон, Шоттки, Соваж и другие) (см. [5, с. 273]).

§ 4. Уравнения класса Фукса

Линейные дифференциальные уравнения, интегралы которых обладают только регулярными особыми точками, представляют особый интерес и в честь впервые их изучавшего Л. Фукса получили название уравнений класса Фукса. Так как регулярные особые точки для коэффициентов уравнения (60) $p_1(z)$ и $p_2(z)$ являются полюсами, то в случае уравнений класса Фукса эти коэффициенты на всей комплексной плоскости, включая и бесконечно удаленную точку, в качестве особых точек должны иметь только полюсы и при том в конечном числе. Следовательно, функции p_1 и p_2 должны быть рациональными, причем p_1 имеет полюсы не выше первого, а p_2 — не выше второго порядка. Их можно представить в виде:

$$p_1(z) = \frac{P_1(z)}{\prod\limits_1^n (z-a_k)}; \quad p_2(z) = \frac{P_2(z)}{\prod\limits_1^n (z-a_k)^2}, \tag{72}$$

где $P_1(z)$, $P_2(z)$ — многочлены; a_k — координаты особых точек. Требование того, чтобы бесконечно удаленная точка была обыкновенной или регулярной особой точкой интеграла, налагает ограничение на степень многочленов P_1, P_2. Было установлено (см. [3, с. 221—223]), что показатель степени P_1 должен быть не выше $n-1$, а показатель степени P_2 — не выше $2n-2$. Тогда общий вид уравнений класса Фукса второго порядка запишется в форме:

$$w'' + \frac{p_0 z^{n-1} + p_1 z^{n-2} + \ldots + p_{n-1}}{\prod\limits_1^n (z-a_k)} w' + \frac{q_0 z^{2n-2} + q_1 z^{2n-3} + \ldots + q_{2n-2}}{\prod\limits_1^n (z-a_k)^2} w = 0. \tag{73}$$

И для такого уравнения, как и в случае одной особой точки $z=0$, можно найти выражения $p_1(z)$ через корни $r_1^{(k)}$, $r_2^{(k)}$ основного определяющего уравнения, соответствующего особой точке a_k. Что же касается $p_2(z)$, то здесь имеется многочлен, коэффициенты которого не определяются через $r_1^{(k)}$, $r_2^{(k)}$. Степень этого многочлена $n-2$, если $z=\infty$ является особой точкой коэффициентов, или $n-4$, если $z=\infty$ не является их особой точкой.

В результате можно сделать очень интересное и важное заключение. В том случае, когда все особые точки фуксова уравнения второго порядка находятся на конечном расстоянии от начала координат, коэффициенты этого уравнения полностью определяются через $r_1^{(\kappa)}$, $r_2^{(\kappa)}$, если $n-4<0$, т. е. число особых точек $n<4$ — одна, две или три. В первом из этих случаев уравнение может быть приведено к виду $\frac{d^2w}{dt^2}=0$; во втором получается уравнение Эйлера $\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{A_1}{t}\frac{dw}{dt}+\frac{C}{(a_2-a_1)^2}\frac{w}{t}=0$, отыскание общего интеграла которого не представляет особого труда [3, с. 227—228]. Более интересным является случай трех особых точек для уравнения второго порядка типа Фукса, получившего название уравнения Римана и послужившего предметом исследований многих выдающихся математиков, особенно когда оно имело форму гипергеометрического уравнения. О ранней истории его у нас шла речь в главе I.

В дальнейшем Риман провел детальное исследование названного его именем уравнения и показал связь его решения с гипергеометрической функцией Гаусса.

Дальнейшее развитие учения о гипергеометрических функциях связано с работами Вейерштрасса по общей теории аналитических функций. Вместе с тем был уточнен вопрос о сходимости общего гипергеометрического ряда. В 1871 г. Шварц дал оригинальное решение задачи о выделении из гипергеометрических функций класса алгебраических. Иначе говоря, опираясь на результаты Вейерштрасса, Шварц предложил весьма остроумный метод определения алгебраических интегралов рассматриваемых уравнений. Он исследовал величину $S=w_1/w_2$ отношения двух линейно независимых интегралов гипергеометрического уравнения, рассматриваемую как функцию от z. Решение вопроса об алгебраичности или трансцендентности функции S и относящейся к ней P-функции зависело от того, была ли сумма углов $\lambda\pi+\mu\pi+\nu\pi$ соответствующего кругового треугольника (см. далее) больше π или нет. Так оказалось возможным установить полную систему алгебраических S-функций. Теорема Шварца позволяла также решить вопрос, является ли однозначной обратная функция $z(S)$. Ввиду особой важности и большого интереса для науки рассмотренное им дифференциальное уравнение третьего порядка для S и его обобщения в дальнейшем стали называть уравнением Шварца, а его решения получили название функций Шварца; функции, обратные функциям Шварца, принадлежат к так называемому классу автоморфных функций. О дальнейших работах в этом направлении см. [5, с. 344 и след.].

В 1872 г. Шварц независимо от Римана доказал, что каждое частное решение S уравнения третьего порядка в случае вещественных λ, μ, ν дает простое конформное отображение верхней полуплоскости z на треугольник, образуемый дугами окружностей, пересекающихся под углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Далее чисто геометрически было найдено изменение функций S с помощью принципа симметрии. При этом треугольник из дуг окружностей отображался на сферу. Отсюда Клейн установил связь таких отображений с вращениями правильных многогранников. За функцией S утвердилось также название треугольной. Изучение треугольных функций привело к общим автоморфным функциям, обладающим естественной границей. В этом случае совокупность всех изображений фундаментальной области покрывает, и при том однозначно, всю внутренность некоторой окружности. Если продолжить неограниченно построение изображений треугольников относительно их сторон, то размеры их последующих изображений будут неограниченно уменьшаться (см. 3, с. 382). На первой странице обложки показана сеть треугольников с углами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{7}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}<1\right)$, которая покрывает внутренность данной окружности L. Можно доказать, что все точки окружности L будут существенно особыми для функции $S(z)$.

Глава V. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СВОЙСТВАМ ЕГО РЕШЕНИЙ (проблема Римана).

§ 1. Постановка задачи у Римана

Проблема Римана, состоящая в нахождении линейного однородного дифференциального уравнения фуксова типа по заданным особым точкам и группе монодромии, являлась одной из центральных в анализе на протяжении последнего столетия. Решению ее в различных вариантах, а также рассмотрению других примыкающих сюда вопросов уделяли внимание многие математики.

Истоком проблемы стал материал известного фрагмента Римана [12, с. 176], датированного 20 февраля 1857 г. и опубликованного впервые в 1876 г. В лекциях Клейна [6] отмечается всеобщее изумление, которое было вызвано публикацией этой работы (через десять лет после смерти автора).

Подробно о постановке задачи у Римана [см. 5, с. 371 и далее; 12, с. 176 и далее].

Ближайшая задача строящейся на новых принципах теории линейных дифференциальных уравнений, о которой шла речь в начале второй части фрагмента, состояла в разыскании простейших систем установленного Риманом класса n функций, удовлетворяющих уравнениям вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y_l^{(k)} = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{73}$$

Здесь приводился ряд интересных соображений, в частности, относительно уравнений класса Фукса, но в целом работа оставалась незаконченной. Но самое главное, что не было сделано Риманом,— не проведено до конца в общем виде доказательства существования систем функций $y_1, \ldots, y_n$, которые вели бы себя так, как требуется в его работе. На этой почве и выросла знаменитая проблема Римана. Самим Риманом она была разрешена для случая ($n=2$, $m=3$) гипергеометрического уравнения, когда явным образом записывалась фундаментальная система, обладающая нужными свойствами. О том, как он предполагал решать эту задачу в общем случае, указаний не осталось. Возможно, что в силу еще недостаточно развитой в то время теории дифференциальных уравнений и других смежных дисциплин Риман не видел всех трудностей доказательства существования. Но не лишено оснований и предположение, что он эти трудности осознавал и, будучи весьма осторожным и самокритичным, не спешил обнародовать свои новые идеи.

Таким образом, вопрос о существовании систем $y_1, \ldots, y_n$ указанного класса при $n \geqslant 2$ и $m > 3$ остался у Римана открытым, как и ряд других, относящихся к этой проблеме, вопросов.

§ 2. Первые решения проблемы Римана

В известном докладе на Втором международном конгрессе математиков (1900 г.) Д. Гильберт выдвинул как наиболее важную в теории линейных дифференциальных уравнений с одним аргументом проблему № 21: доказать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии. В скором времени он же дал (для случая $n=2$) первое корректное решение этой и так называемой краевой задачи Римана.

Более простое, чем у Гильберта, доказательство существования функций y в проблеме Римана для общего случая n (достигающее цели без введения функций Грина), основанное на теории интегральных уравнений и использующее весьма элементарные вспомогательные средства из теории функций комплексного переменного, было предложено в 1906 г. И. Племелем и опубликовано с некоторыми дополнениями через два года.

Следует отметить, что Риман свою проблему связывал с построением линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Шлезингер рассматривал эту проблему с 1901 г. для построения однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

В 1909 г. Дж. Биркгоф изучал вопрос о представлении решений системы уравнений

$$y_i'=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)y_i(i=1, \ldots, n) \tag{74}$$

в окрестности особых точек. Им была установлена форма фундаментальной системы решений для (74). В процессе дальнейшего изучения вопроса он предположил возможность обобщения проблемы Римана и на тот случай, когда особые точки системы дифференциальных уравнений являются нерегулярными. Напомним, что в классической постановке проблема Римана ограничивалась рассмотрением дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками. В 1910—1913 гг. Биркгоф занимался проблемой Римана для линейных дифференциальных уравнений с нерегулярными особыми точками, а также для линейных разностных уравнений. Биркгоф предложил обойти интегральные уравнения прямым применением метода последовательных приближений.

Цикл работ, трактующих решение задачи Римана и смежные с ней вопросы, принадлежит Гарнье. Эта проблема неоднократно привлекала его внимание с 1910 по 1957 г. В одной из первых работ этого цикла он показывает связь проблемы Римана с исследованиями Фукса 90-х годов XIXв. по линейным уравнениям и с теорией нелинейных уравнений второго порядка с неподвижными критическими точками. Последующие статьи Гарнье в этом направлении теснейшим образом связаны с его работами по нелинейным уравнениям второго и третьего порядков с неподвижными критическими точками (см. [5, с. 380]).

Весьма существенный и большой качественный скачок в ходе развития аналитической теории линейных уравнений был сделан при введении алгоритмического метода для решения ее основных проблем в работах талантливого ленинградского математика И. А. Лаппо-Данилевского, ученика В. И. Смирнова. Его исследования, явившиеся крупным явлением в мировой литературе по этому вопросу, могут быть рассмотрены как завершающие определенный, рассмотренный нами этап весьма интенсивного развития аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Для решения рассматриваемых далее задач Лаппо-Данилевским была создана, по существу, новая ветвь анализа, в основу которой положено понятие функциональной зависимости в области матриц.

Матричное исчисление широко применялось в работах Шлезингера. Однако он не пошел дальше использования нового аппарата для упрощения выкладок в известных уже приложениях аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Понятие о функции одной переменной матрицы рассматривали также Картан, Джорджи, Марти и другие.

§ 3. Метод Лаппо-Данилевского

Однако работы упомянутых и других математиков трудно назвать даже началом теории аналитических функций от матриц, ибо в основе новой теории лежал не ряд степеней одной переменной матрицы, а ряд композиций нескольких переменных матриц. Только в последнем случае могла быть обнаружена характернейшая особенность нового исчисления, а именно некоммутативность композиции, соответствующей умножению. Поэтому новую теорию нельзя было трактовать как простое формальное обобщение теории функции одной переменной матрицы. В случае коммутативности композиций матриц указанные далее прямые и обратные задачи теории допускали бы совершенно элементарное решение в конечном виде. Последний случай был рассмотрен Лаппо-Данилевским, давшим соответствующие формулы этих конечных решений. Построенный им новый аппарат теории аналитических функций матриц может быть представлен как обобщение известной теории функций комплексного переменного Вейерштрасса. Подобно тому как в обычной теории функций значениями аргументов и функций являются числа, в новой теории такими значениями являются матрицы; степенному ряду численных аргументов здесь соответствует ряд композиций аргументов-матриц, определяющий аналитическую голоморфную функцию этих матриц в области его сходимости. Были даны основные положения исчисления таких рядов композиций, рассмотрен вопрос о подстановке ряда в ряд и об обращении рядов.

При помощи построенного аппарата Лаппо-Данилевский исследовал — и это было общим во всех его работах — функции, удовлетворяющие системе линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Этот обширный класс функций, включающий в себя также все алгебраические функции, в общей градации аналитических функций следовал непосредственно за классом рациональных функций. Это обусловливало фундаментальное значение функций указанного класса как для теоретической, так и для прикладной математики.

Общей теорией функций, определяемых дифференциальными уравнениями с рациональными коэффициентами, И. А. Лаппо-Данилевский начал заниматься с 1927 г. и все свои фундаментальные труды создал в ближайшие 3—4 года. Главные его результаты были сообщены в 1927—1931 гг. в докладах Парижской академии, затем в более полном виде публиковались в Математическом сборнике, а после смерти автора (15 марта 1931 г.) — в трудах Математического института им. Стеклова (АН СССР) в 1934—1935 гг.

Первые публикации Лаппо-Данилевского в 1927 г. содержали применения нового, развиваемого им метода к алгоритмическому решению фундаментальных проблем изучаемой теории — Пуанкаре и Римана.

Сначала нужно было решить проблему для системы линейных однородных уравнений первого порядка (74): при данной конфигурации особых точек и матрице коэффициентов системы построить такое аналитическое выражение, которое представляло бы решения указанной системы во всей области их существования на плоскости аргумента и выявляло бы характер их зависимости от коэффициентов системы и конфигурации ее особых точек. Это так называемая основная прямая проблема. Но появилась и вторая задача — указать полную аналитическую характеристику особенностей решений в каждой особой точке уравнения или системы уравнений. Впервые она была четко сформулирована И. А. Лаппо-Данилевским. Частным ее случаем является построение явных аналитических выражений для матриц, производящих группу монодромии. Кроме того, напомним, что Пуанкаре поставил задачу об исследовании группы уравнения от параметров, входящих в его коэффициенты.

К указанным прямым проблемам, которые до Лаппо-Данилевского полностью не были решены, следует добавить еще и основную обратную проблему, поставленную Риманом, где речь шла о построении дифференциального уравнения по заданной его группе монодромии и при заданных особых точках. Она рассматривалась Лаппо-Данилевским в более общей форме, как задача о построении матрицы функций рассматриваемого класса, имеющей особенности данного типа в данных точках, и о восстановлении системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, которой эта матрица удовлетворяет. Решение классической задачи сводилось к исследованию зависимости матрицы решений регулярной системы дифференциальных уравнений и матрицы коэффициентов этой системы от заданных матриц — производящих группу монодромии. Анализ Лаппо-Данилевским общей задачи сводился к исследованию зависимости матрицы решений и матриц коэффициентов систем дифференциальных уравнений от данных характеристических матриц.

Указанные проблемы до работ Лаппо-Данилевского, как известно, уже рассматривались и решались, но далеко не полностью, а иногда и методами, не характерными для данной теории. Полное решение указанных проблем в алгоритмической форме было дано И. А. Лаппо-Данилевским.

По Лаппо-Данилевскому, считалось, что решение задачи доведено до конца, и оно называлось алгоритмическим, если, применяя аппарат функции от матриц для решения какой-либо задачи теории систем линейных дифференциальных уравнений, можно было выразить искомую величину в форме сходящегося ряда, коэффициенты которого затем последовательно вычислялись.

Построенный метод прилагался прежде всего к решению прямых задач. Впрочем, уже в 1927 г. И. А. Лаппо-Данилевский сообщил об алгоритмическом решении как проблемы Пуанкаре, так и проблемы Римана. (Более подробно о методах Лаппо-Данилевского см. [5, с. 389, и след.].)

После работ Лаппо-Данилевского наметился новый этап развития аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Эпицентр его переместился в Ленинград. Здесь появилось новое, довольно мощное научное направление, у истоков которого стоял замечательный ученый и педагог, позже — академик В. И. Смирнов. Его лучшие ученики и сотрудники, применив методы Лаппо-Данилевского в 30—40-х гг., получили ряд новых, очень важных результатов. Не входя в обзор их работ (см. [5, с. 395]), отметим только, что особенно интересные и важные результаты в данном круге проблем были получены Н. П. Еругиным; Н. Е. Кочиным, Б. Л. Крыловым и рядом других, главным образом ленинградских математиков.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Коши (*Cauchy*) Огюстен Луи (21.8.1779—23.5. 1857) — один из самых выдающихся математиков-аналитиков прошлого века. Множество его новых результатов и открытий сыграли фундаментальную роль в развитии теоретической и прикладной математики XIX в. Коши окончил Парижскую Политехническую школу в 1807 г., Школу мостов и дорог в 1810 г. и до 1813 г. работал инженером. В 1816 г. он был принят в члены Парижской академии наук. В 1816—1830 гг. читал курс математического анализа в Парижской политехнической школе и Коллеж де Франс.

2. Пуанкаре (*Poincaré*) Анри (29.4.1854—17.7.1912) — один из крупнейших математиков прошлого века, учился в Парижской Политехнической школе (1873—1875 гг.), а потом в Горной школе. Докторскую диссертацию защитил в 1879 г. и с тех пор преподавал математические курсы в различных учебных заведениях Парижа. Членом Парижской академии наук он был избран в 1887 г., был членом Бюро долгот — с 1893 г. Многочисленные научные работы А. Пуанкаре относятся ко многим отраслям математического анализа, алгебры, геометрии, прикладной математики, астрономии и физики. Им было предложено множество методов и получены фундаментальные результаты, открывающие пути к развитию новых отраслей математики. Изучение обыкновенных дифференциальных

уравнений с алгебраическими коэффицнентами привело Пуанкаре к открытию новых классов трансцендентных функций, получивших потом название автоморфных. При этом он существенно использовал основные результаты неевклидовой геометрии. Пуанкаре принадлежит ряд курсов по небесной механике, а также ряд сочинений философско-психологического характера, в которых проявлялись идеи махизма и агностицизма, что было предметом критики со стороны В. И. Ленина. См. также [11].

3. Ковалевская Софья Васильевна (3.1.1850—29.1.1891), математик, а также писатель и публицист, одна из немногих знаменитых женщин-математиков прошлой эпохи, первая в мире женщина-профессор (Стокгольмского университета с 1884 г.) и член-корреспондент Петербургской академии наук (1889 г.). С 1870 г. занималась в Берлине у К. Вейерштрасса (см. примеч. 20). В 1874 г. С. Ковалевская получила степень доктора философии Гёттингенского университета. Членом Московского математического общества избрана в 1881 г. За работу «Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки» в 1888 г. Ковалевская получила «большую премию» Парижской академии наук.

4. Фукс (*Fuchs*) Иммануэль Лазарь (5.5.1833—26.4.1902) — известный немецкий математик, доктор философии (1858 г.), с 1860 по 1867 г. — учитель различных средних учебных заведений Берлина и с 1866 г. — профессор Берлинского и других германских университетов. Членом Берлинской академии наук Фукс избран в 1884 г. С 1891 г. — издатель известного математического журнала Крелля. Л. Фукс был одним из основателей нового направления в анализе — линейной аналитической теории дифференциальных уравнений. Почти все его работы относятся к этому разделу. Создал в этом направлении мощную школу и имел многих последователей.

5. Ляпунов Александр Михайлович (25.5.1857—3.11.1918) — выдающийся русский математик и механик. В 1880 г. окончил Петербургский университет, защитил магистерскую диссертацию в 1885 г., докторскую — в 1892 г. Работал с 1885 г. доцентом, с 1892 г. — профессором Харьковского университета. В 1900 г. был избран членом-корреспондентом, а в 1901 г. — действительным членом Петербургской академии наук и с 1902 г. работал в Петербурге почти все время. Сравнительно немногочисленные работы Ляпунова отличаются большой глубиной, оригинальностью и совершенной обработкой. Он является основоположником ряда новых направлений в анализе и прежде всего теории устойчивости, равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Большой цикл его работ посвящен исследованию фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону всемирного тяготения. Работы Ляпунова были источником множества дальнейших исследований и началом ряда самостоятельных ветвей науки.

6. Риман (*Riemann*) Георг Фридрих Бернхард (17.9.1826—20.7.1866) — знаменитый немецкий математик, доктор (1851 г.) и профессор Гёттингенского университета (1857 г.), член ряда академий наук. Риман получил фундаментальные результаты во многих областях математики и некоторых прикладных вопросах. Подробнее о его деятельности см. [10, 12].

7. Пенлеве (*Painlevé*) Поль (5.12.1863—29.10.1933) — выдающийся французский математик. В 1877 г. окончил Нормальную школу (Париж), в 1887 г. защитил докторскую диссертацию и с

1895 г. — профессор Нормальной школы, Парижского университета и Парижской Политехнической школы. Научные интересы Пенлеве принадлежат теории функций, и аналитической (нелинейной) теории дифференциальных уравнений, одним из основателей которой он был, а также различным прикладным вопросам. В 1900 г. Пенлеве избран членом Парижской академии наук. С 1910 г. он избирается в палату депутатов и почти отходит от научной работы, занимая в последующие годы ряд министерских постов и пост премьер-министра Франции, председателя палаты депутатов. О его деятельности см. в [5].

8. Пикар (*Picard*) Эмиль (24.7.1856—11.12.1941) — известный французский математик. Окончил Нормальную школу (Париж) в 1877 г. С 1877 г. — преподаватель факультета наук Тулузы, затем с 1881 г. — профессор Нормальной школы и Сорбонны (Париж). В процессе преподавательской деятельности им был создан известный курс математического анализа. Только за 12 лет с 1877 г. Пикар опубликовал около 120 заметок и мемуаров. В 1889 г. был избран членом Парижской академии наук, а также членом-корреспондентом Петербургской (1895 г.) и ряда других академий и математических обществ. Он получил фундаментальные результаты в различных разделах математического анализа и приложений. Ему принадлежат интересные обзоры из области истории и философии математики.

9. Лаппо-Данилевский Иван Александрович (16.10.1896—15.3.1931) — выдающийся советский математик, воспитанник Ленинградского университета (окончил в 1925 г.). С 1927 г. в течение нескольких лет непрерывно появлялся ряд его работ, в которых излагалось построение теории функций от матриц и давалось ее применение к решению основных проблем теории линейных дифференциальных уравнений, о чем частично идет речь в тексте (гл. V). В 1929 г. Лаппо-Данилевский блестяще защитил докторскую диссертацию и стал читать в Ленинградском университете спецкурс по созданной им теории. В январе 1931 г. он избран членом-корреспондентом АН СССР. Умер в г. Гиссене от тяжелой болезни сердца.

10. Брио (*Briot*) Шарль Август Альберт (19.6.1817—20.9.1880) после блестящего окончания лицея Сан-Луи в Париже в 1838 г. был принят первым в Нормальную школу. Через год после окончания образования в 1842 г. он получил степень доктора и начал преподавать математику в колледжах различных городов.

С 1848 г. он стал работать в Париже, будучи преподавателем воспитавшего его лицея, а также Нормальной и Политехнической школ. К концу 50-х годов он получил кафедру математической физики в Сорбонне. Кроме научных работ по аналитической теории дифференциальных уравнений и теории специальных функций написал многочисленные курсы по отдельным предметам высшей и элементарной математики.

11. Буке (*Bouquet*) Жан Клод (17.12.1819—9.9.1885) — воспитанник парижских Политехнической и Нормальной школ 1839—1841 гг., наряду с Брио один из основателей нелинейной аналитической теории дифференциальных уравнений. Будучи профессором факультета наук в Лионе, в 1845 г. он встретился со своим товарищем (по Нормальной школе) Брио, и их дружба перешла в тесное и очень плодотворное многолетнее сотрудничество, весьма редкое для того времени. Из Лиона в 1852 г. Буке перешел на преподава-

тельскую работу в парижские лицеи, а в 1873 г. занял должность профессора математики в Сорбонне. Преподавал также механику и астрономию в Нормальной школе. В 1875 г. был избран членом Парижской академии.

12. Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области G, называется дифференцируемой в этой области, а также голоморфной или аналитической (иногда регулярной). Названия «голоморфная (подобная целой) функция» было введено учениками Коши — Брио и Буке. В современной литературе чаще используется понятие аналитической функции, употреблявшееся ранее Лагранжем, а позже Вейерштрассом.

13. Дарбу (*Darboux*) Жан Гастон (13.8.1842—23.2.1917) — воспитанник парижских Политехнической и Нормальной школ, был одним из крупнейших математиков второй половины прошлого века, автором фундаментальных работ в области, главным образом дифференциальной геометрии. После защиты докторской диссертации в 1866 г. был профессором различных учебных заведений, в том числе и Сорбонны. Членом Парижской академии избран в 1889 г., членом-корреспондентом Петербургской академии — в 1895 г. С 1870 г. он стал издавать один из наиболее известных математических журналов.

14. Эйлер (*Euler*) Леонард (4.4.1707—7.9.1783) — крупнейший математик, механик, физик и астроном XVIII в., уроженец Швейцарии. В Россию приехал в 1726 г. по приглашению Петербургской академии наук на должность адъюнкта по математике. Академиком стал в 1733 г. В 1741—1776 гг. жил в Берлине, затем возвратился в Петербург. В указанных выше и других областях получил ряд фундаментальных результатов и заложил основы новых направлений. Научное наследие его огромно — около 900 исследований, которые долго публиковались после его смерти.

15. Даламбер (*D'Alembert*) Жан Лерон (16.11.1717—29.10.1783)—крупный французский математик, механик и философ, член Парижской (с 1741 г.), Берлинской (с 1747 г.), Петербургской (с 1764 г.) и других академий наук.

Признак Даламбера сходимости знакоположительных числовых рядов состоит в следующем.

Пусть дан ряд: $u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ Тогда если при достаточно больших n выполняется неравенство $u_{n+1}/u_n \leqslant q < 1$, то ряд сходится, если же начиная с некоторого момента $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$, то ряд расходится.

16. Пфафф (*Pfaff*) Иоган Фридрих (22.12.1765—21.4.1825) — видный немецкий математик и астроном, член Прусской академии наук с 1817 г. Был профессором математики в университетах Хельмштадта и Галле.

17. Гаусс (*Gauss*) Карл Фридрих (30.4.1777—23.2.1855) — знаменитый немецкий математик, астроном и физик. Учился в Гёттингенском университете (1795—1798), докторскую диссертацию защитил в 1799 г. Сделал ряд фундаментальных открытий в теории чисел, алгебре, теории рядов, дифференциальной геометрии. Одним из первых начал рассматривать неевклидову геометрию.

18. Клейн (*Klein*) Феликс (25.4.1849—22.6.1925) — выдающийся немецкий ученый, получивший ряд фундаментальных результатов в теории чисел, алгебре, теории специальных функций, неевклидовой геометрии, по ряду прикладных вопросов. После защиты докторской диссертации в 1868 г. вел активную профессор-

скую деятельность в Эрлангене, Лейпциге, Мюнхене, имел многих видных учеников. Был основателем известного журнала *«Mathematische Annalen»*, инициатором многих важных изданий. Член-корреспондент Петербургской академии наук с 1895 г.

19. Куммер (*Kummer*) Эрнст Эдуард (29.1.1810—14.5.1893) — известный немецкий математик, доктор (1831 г.), профессор (с 1842 г.), член Берлинской академии наук (1855 г.). Опубликовал около ста работ, посвященных теории рядов, дифференциальным уравнениям и другим разделам анализа, а также механике. Важное значение имела созданная им в 1842 г. теория алгебраических чисел, методы которой оказали огромное влияние на последующее развитие теории чисел и алгебры.

20. Вейерштрасс (*Weierstrass*) Карл Теодор Вильгельм (31.10 1815—19.2.1897) — знаменитый немецкий математик, профессор Берлинского университета с 1856 г., член Берлинской академии наук с 1864 г. Его лекции и научные статьи посвящены теории аналитических функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, различным отделам анализа. Воспитал многих талантливых учеников, среди которых были С. В. Ковалевская, Г. Миттаг-Леффлер, Шварц, Фукс и другие.

21. Якоби (*Jacobi*) Карл Густав Якоб (10.12.1804—18.2.1851) — известный немецкий математик, член Берлинской академии наук (1836 г.), член-корреспондент (1830 г.) и почетный член Петербургской академии наук (1833 г.). Один из создателей теории эллиптических функций. Работал также в области теории чисел, алгебры, вариационного исчисления, дифференциальных уравнений, интегрального исчисления.

22. Летников Алексей Васильевич (1.1.1837—27.2.1888) — воспитанник Московского Межевого института, Парижской Политехнической школы и Сорбонны, доктор Лейпцигского университета (1867 г.), магистр (1868 г.), доктор (1874 г.), член-корреспондент Петербургской академии наук (1884 г.), профессор Московского Технического училища и Межевого института. Работы его относятся преимущественно к теории дифференцирования с произвольным указателем порядка дифференцирования и другим отделам анализа.

23. Голубев Владимир Васильевич (3.12.1884—4.12.1954) — известный русский и советский математик и механик, воспитанник Московского университета (окончил в 1908 г.), магистр (1916 г.), доктор (1917 г.), профессор с 1917 г. — Саратовского, с 1930 г. — Московского университетов, с 1932 г. — начальник кафедры высшей математики в Военно-воздушной академии им. Н. Е. Жуковского, член-корреспондент АН СССР (1934 г.), заслуженный деятель науки и техники (1943 г.), генерал-майор инженерно-технической службы. Работы его принадлежат главным образом теории аналитических функций, аналитической теории дифференциальных уравнений, а также к аэродинамике.

24. Жуковский Николай Егорович (5.1.1847—17.3.1921) — известный русский механик и математик, воспитанник Московского университета (1868 г.), магистр (1876 г.), доктор (1882 г.). Работал с 1876 г. в Московском высшем техническом училище, с 1885 г. — в Московском университете. В 1894 г. избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Исследования его принадлежат к аэродинамике, гидравлике, механике, математике и астрономии.

25. Суть стереографической проекции плоскости на сферу состоит в следующем. В трехмерном пространстве сфера радиуса $1/_2$

касается своей нижней точкой в начале координат O комплексной плоскости. Противоположную точку диаметра (полюс) обозначают через P. Тогда каждой точке Z плоскости ставится в соответствие точка A (z) сферы, находящаяся на пересечении сферы с лучом, соединяющим полюс с данной точкой z. При этом для каждой точки (кроме P) сферы устанавливается взаимно-однозначное соответствие с точками плоскости. Точку P считают образом бесконечно удаленной точки плоскости. Легко найти формулы, выражающие координаты точек A (z) сферы через координаты точек плоскости.

26. Шварц (*Schwarz*) Герман Амандус (25.1.1843—30.11.1921) известный немецкий математик, доктор (1864 г.) член Берлинской академии наук с 1893 г., преподаватель Берлинского университета с 1866 г., один из основателей немецкого математического союза. В лице Шварца сочетались черты творца науки и замечательного педагога. Работы принадлежат в основном теории аналитических функций.

27. Еругин Николай Павлович (род. 14.5.1907) — известный советский математик, академик АН БССР, заслуженный деятель науки БССР, Герой Социалистического Труда, воспитанник Ленинградского университета, ученик академика В. И. Смирнова. Педагогическую деятельность начал в Ленинграде в 1931 г. Кандидатскую диссертацию защитил в 1937 г., докторскую — в 1943 г. по возвращении после тяжелого ранения с Ленинградского фронта. В 1956 г. за работы по теории устойчивости и качественной теории дифференциальных уравнений Н. П. Еругину присуждена Государственная премия. С 1956 г. деятельность его протекает в Минске. Здесь был основан журнал «Дифференциальные уравнения», главным редактором которого бессменно является Н. П. Еругин. Он же создал школу теории дифференциальных уравнений, к различным ветвям которой относятся его многочисленные работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, ГОНТИ НКТП Украины, 1939.
2. Боль П. Г. Избранные труды. Рига, Изд-во АН Латвийской ССР, 1961.
3. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2-е. М.—Л., ГИЗ ТТЛ, 1950.
4. Еругин Н. П. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Л., Изд-во ЛГУ, 1956.
5. Добровольский В. А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. Киев, «Вища школа», 1974.
6. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I.— М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1937.
7. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки.— В кн.: Научные работы. Изд. 2-е. М., АН СССР, 1948.
8. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Вступительная статья В. И. Смирнова. М., Гостехиздат, 1957.

9. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, Изд-во ХМО, 1892.

10. Монастырский М. И. Бернхард Риман. Серия «Математика, кибернетика», № 4. М., «Знание», 1979.

11. Пуанкаре А. Избранные труды, т. I, II, III. М., «Наука», 1974.

12. Риман Б. Сочинения. (Перевод с немецкого).— М.— Л., 1948.

14. Смирнов В. И. Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго разряда с четырьмя особыми точками. Спб., 1918.

14. Briot et Bouquet — Recheches sur les propriétés des fonctions définies pas des équations différentielles.— Journal de l'Ecole Polytechnique, t. 21, Cah. 36, Paris, 1856, 133—198.

15. Fuchs L.— Zur Theorie der linearen Differentialgleihungen mit veränderlichen Coefficienten.— Journal für die reine und angevandte Mathematik, Bd. 66, Berlin, 1866, 120—160; Bd 68, Berlin, 1868, 534—585.

16. Painlevé P.— Lesons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées á Stockholm. [lith. 1895], Paris, 1897, 1—19, 1—6, 1—598.

17. Painlevé P.— . Sur les équations diférentielles du second ordre et d'ordre supérieur, dont l'intégrale génerale est uniforme.— Acta mathematica, t. 25, Stockholm,— 1902, 1—85.

СОДЕРЖАНИЕ

Вячеслав Алексеевич ДОБРОВОЛЬСКИЙ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Главный отраслевой редактор Л. А. Ерлыкин. Редактор Г. Г. Карвовский. Мл. редактор Т. Г. Иншакова. Обложка художника Л. П. Ромасенко. Худож. редактор М. А. Бабичева. Техн. редактор А. М. Красавина. Корректор В. В. Каночкина.

ИБ № 3101

Сдано в набор 12.09.80 г. Подписано к печати 24.10.80 г. Т-17 063. Формат бумаги $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 3,36. Уч.-изд. л. 3,52 Тираж 35 470. Заказ № 2160. Цена 11 коп. Издательство «Знание». 101835, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 804 311. Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области