О. А. ВОЛЬБЕРГ

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией проф. Н. В. ЕФИМОВА

ИЗДАНИЕ 3-е, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Утверждено Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

Книга Вольберга „Основные идеи проективной геометрии" вводит читателя в современное аналитическое мышление и излагает основные вопросы проективной геометрии, особенно понимание евклидовой геометрии с проективной точки зрения.

Книга может служить пособием для повышения квалификации учителей математики и изучения проективной геометрии интересующимися ею.

Несмотря на то, что книга не является систематическим курсом проективной геометрии, она может служить в некоторой мере пособием и для студентов физико-математических факультетов. Книга написана в оригинальном стиле, отличающемся от принятого в официальных руководствах.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию читателей книга О. А. Вольберга „Основные идеи проективной геометрии" выходит из печати уже третий раз.[1] Для математической книги, не являющейся учебником и не имеющей официально установленной обширной аудитории учащихся, это — не мало. Успех книги О. А. Вольберга объясняется тем, что проективная геометрия в ней изложена оригинально, существенным образом отлично от традиционного изложения учебных руководств. Своеобразная система изложения гармонирует с его легкостью и эмоциональностью.

Третье издание этой книги значительно отличается от первых двух. Автор внес в свою книгу много изменений и дополнил ее.

К сожалению, автор не успел привести новые части книги в полное согласование со старым текстом. Взяв по поручению издательства на себя эту работу, я постарался уничтожить несогласованности и математические неточности изложения, оставив без изменения его оригинальный стиль.

Н. Ефимов

11/XII 1948 г.
Москва

---

[1] Первые два издания выпущены Издательством Общей технической литературы.

ГЛАВА ПЕРВАЯ,

В КОТОРОЙ ЧИТАТЕЛЬ ЗНАКОМИТСЯ С ОСНОВНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Проектирование

1. Если вы хотите срисовать что-либо, легче всего это выполнить так. Возьмите прозрачную пластинку и, глядя через нее на предмет, обведите линии оригинала, которые вырисовываются на ней. Таким образом вы скопируете вещь, как копируют рисунок (рис. 1).

Геометрически дело здесь сводится к тому, что каждая точка предмета изображается точкой пересечения плоскости картины с лучом зрения, идущим от вашего глаза к изображаемой точке. Такое копирование называется *проектированием*. Ваш глаз является *центром проекции*, самый рисунок — *проекцией*, пластинка, на которую вы проектируете, — *плоскостью проекции*.

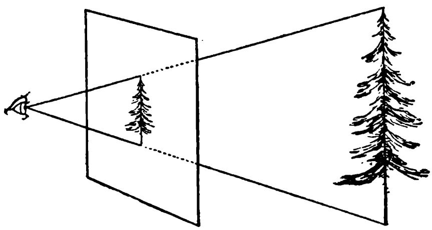


Рис. 1. Проектирование.

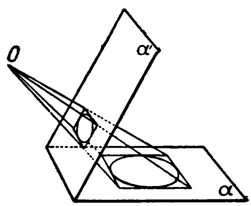


Рис. 2. O — центр проекции; α' — плоскость проекции.

2. На рис. 2 изображено проектирование узора, нарисованного в плоскости α, на другую плоскость α'. Рисунок, который получается на α', во многом сходен с оригиналом, но кое в чем отличен от него. Прямая линия изображается на рисунке прямой линией, точка — точкой. Но окружность получается большей частью не в виде окружности, а в форме овала, называемого эллипсом. Отрезки, которые на оригинале равны, изображаются на рисунке (проекции), вообще говоря, неравными отрезками. Таким образом, одни свойства фигур при проектировании сохраняются, а другие не сохраняются: квадрат изображается четырехугольником — четырехугольность сохраняется, прямолинейность сторон тоже сохраняется; но стороны четырехугольника, который является „портретом“ квадрата, уже не будут равны и попарно параллельны, а углы не останутся прямыми. Равенство отрезков, параллельность линий, величина углов — все это изменяется. Значит, проектируя, мы не повторяем оригинала, а *преобразуем* его. Те свойства фигур, которые устанавливаются измерением (их называют *метрическими* свойствами), при этом преобразовании изменяются. Те же свойства, которые не изменяются при проектировании, называются *проективными*. Ими-то и занимается *проективная* геометрия.

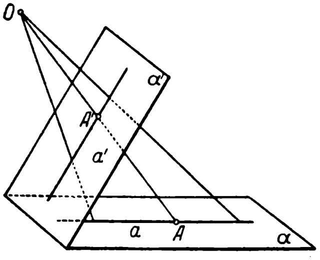


Рис. 3. Точка A и прямая a инцидентны; их проекции на плоскость α' тоже инцидентны.

3. Перечислим простые свойства проектирования фигур: точка преобразуется в точку, прямая — в прямую.

Точка, лежащая на некоторой прямой, преобразуется в точку, лежащую на изображении этой прямой.

Отсюда следует, что точки, расположенные на одной прямой, преобразуются в точки, тоже лежащие на одной прямой.

Если точка A лежит на прямой a, то говорят, что точка A и прямая *a инцидентны*. Инцидентные элементы (т. е. точка и прямая, проходящая через нее; можно также сказать — прямая и точка, лежащая на ней) преобразуются в инцидентные же элементы (рис. 3). Инцидентность при проектировании сохраняется.

Бесконечно удаленные точки

4. Каждой точке оригинала, вообще говоря, соответствует в качестве ее изображения одна точка проекции.

Слова „вообще говоря“ мы вынуждены употребить потому, что из этого правила существуют исключения.

Взгляните на рис. 4. Он представляет собой рисунок (проекцию) равнины (плоскости), по которой проходит железная дорога. Обратите внимание на то, что рельсы на рисунке сходятся в одной точке. В действительности, конечно, рельсы параллельны; стало быть, та точка, в которой сходятся их изображения, не является изображением (проекцией) какой-либо точки настоящего железнодорожного полотна.

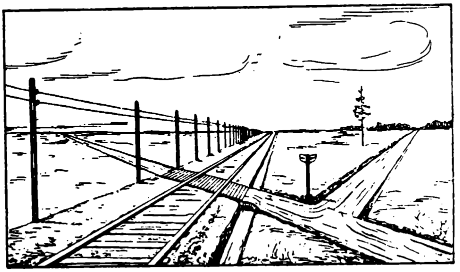


Рис. 4. На линии горизонта лежат изображения бесконечно удаленных точек нарисованной здесь равнины.

5. Легко понять, откуда взялась на рисунке эта лишняя точка. Если проектировать плоскость α на плоскость α' (рис. 5,*I*), то точки прямой a изобразятся точками прямой a'. Но на прямой a' окажется одна точка, которая не является изображением какой-либо точки прямой a: это точка A', лежащая на луче, параллельном прямой a. Значит, все точки прямой a' представляют собой проекции точек прямой a — все, кроме одной точки A'.

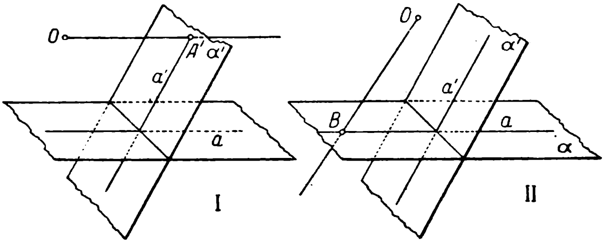


Рис. 5. *I*. Точка A' является проекцией бесконечно удаленной точки прямой a на прямую a'. *II*. Проекцией точки B на прямую a' является бесконечно удаленная точка прямой a'.

6. На прямой a нет точки, изображением которой является точка A'; чтобы заполнить этот пробел, Дезарг предложил считать, что точка A' является изображением *„бесконечно удаленной точки“* прямой a. Такой способ устранять исключения путем создания новых понятий является в математике весьма обычным. Например, чтобы сделать уравнение $x+a=b$ всегда разрешимым (даже если $b<a$), созданы отрицательные числа. Аналогичное значение имеет изобретение бесконечно удаленных точек.

Разберемся в этом подробней.

7. Возьмем прямую a и точку P, не инцидентную с ней (черт. 6). Проведем через P прямую b, пересекающую a. Обозначим точку их пересечения через M. Представим себе, что секущая b поворачивается вокруг точки P, приближаясь к положению параллели b^* к a. Точка пересечения b с a будет при этом бесконечно удаляться по прямой a. Поэтому, когда прямые a и b станут параллельными, мы припишем им „бесконечно удаленную точку пересечения“. Вместе с тем о параллельных прямых мы будем говорить, что они „пересекаются в бесконечно удаленной точке“.

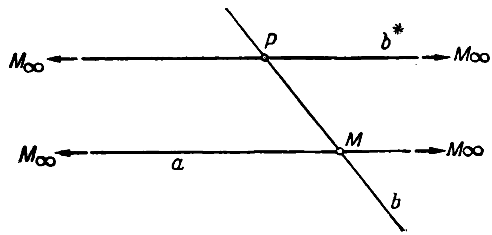


Рис. 6. Прямая b пересекает прямую a в точке M. Если прямая b^* параллельна прямой a, то мы говорим, что она пересекает прямую a в бесконечно удаленной точке.

8. Проследим, как перемещается точка пересечения прямых a и b, когда секущая b делает полный оборот вокруг точки P. Сперва точка пересечения M движется в определенном направлении; когда прямая b займет положение параллели b^*, точка M придет в бесконечно удаленную точку прямой a — точку M_∞. Но вот прямая b, пройдя положение b^*, продолжает поворачиваться дальше. Точка M теперь появляется со стороны противоположной той, куда она ранее удалилась и, продолжая двигаться в прежнем направлении, приближается к своему исходному положению. Когда секущая b закончит оборот, точка M вернется в исходное положение. Она как бы завершит „кругосветное путешествие": двигаясь всё время в одном направлении, придет в конце концов снова к началу своего пути, но со стороны, противоположной той, куда первоначально удалялась. Словом, точка M описывает замкнутый путь. Поэтому отныне мы должны рассматривать прямую как замкнутую линию.

9. Приписав каждой прямой одну бесконечно удаленную точку, Дезарг действительно уничтожил указанное выше исключение: теперь каждая точка прямой a' является проекцией определенной точки прямой a — обыкновенной или бесконечно удаленной. Обратно, каждая точка прямой a проектируется в определенную точку прямой a' — обыкновенную или бесконечно удаленную (рис. 5, *II*).

10. Ряд прямых, параллельных прямой a (рис. 7), проектируется на плоскость α' в виде прямых, пересекающихся в одной точке, — именно в той, которая считается проекцией бесконечно удаленной точки прямой a. Поэтому следует считать, что все прямые, параллельные между собой, имеют общую бесконечно удаленную точку. Иначе говоря, по Дезаргу, все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной точке — именно в их общей бесконечно удаленной точке.

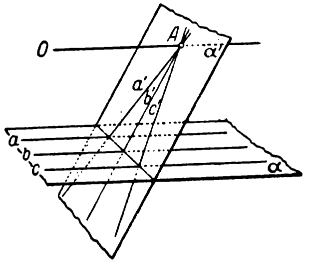


Рис. 7. Точка A' является проекцией бесконечно удаленной точки прямой a; она же является проекцией бесконечно удаленной точки прямой b, а также c.

Такой способ трактовать параллельные прямые, как „пересекающиеся", как будто противоречит определению параллельных прямых. Но это только так кажется. Дезарг не оспаривает Евклида. Он вносит чисто словесное изменение в евклидово определение. Непересекающиеся прямые одной плоскости Дезарг предлагает называть „пересекающимися в бесконечно удаленной точке". „Ну что ж, пусть называются", — скажет читатель. К чему, однако, эта детская игра словами? Оказывается, что такая „словесная игра" чрезвычайно полезна в новой геометрии. Она позволяет внести целый ряд обобщений. Во-первых, мы теперь можем утверждать, что каждая точка одной плоскости проектируется в точку другой плоскости — без всяких исключений, — и наоборот, каждая точка второй плоскости является проекцией точки первой плоскости — опять-таки без каких-либо исключений. Во-вторых, некоторые утверждения элементарной геометрии могут быть выражены проще, чем обычно.

Например по Евклиду:

через точку P, лежащую вне прямой a, можно провести одну и только одну прямую, параллельную a.

По Дезаргу, это предложение является частным случаем другого общего предложения:

через две точки (в данном случае через точку P и бесконечно удаленную точку прямой a) можно провести одну и только одну прямую.

Итак, по Дезаргу, все прямые одной плоскости пересекаются либо в обыкновенных, как еще говорят в *„собственных“*, либо в бесконечно удаленных (*„несобственных“*) точках. Бесконечно удаленные точки могут проектироваться в собственные точки. На рис. 4 точка, в которой сходятся изображения рельсов, есть изображение общей несобственной (бесконечно удаленной) точки настоящих рельсов. Точно так же точки, в которых сходятся края тропинок, являются проекциями соответствующих бесконечно удаленных точек равнины.

11. Обратим еще внимание на то, что все бесконечно удаленные точки равнины изображены на рис. 4 точками одной прямой (художники называют эту прямую *линией горизонта*). Легко понять, почему это так. Все проектирующие лучи, параллельные плоскости оригинала α (рис. 8), лежат в одной плоскости β. Эта плоскость пересекает плоскость проекции α' по прямой b', точки которой являются изображениями бесконечно удаленных точек плоскости α.

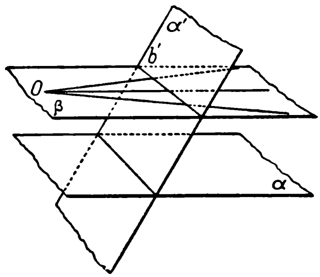


Рис. 8. Прямая b' представляет собой проекцию бесконечно удаленной прямой плоскости α.

Перед нами опять досадное исключение: прямая b' — единственная прямая плоскости α', которая не является проекцией какой-либо прямой плоскости α. Чтобы устранить это исключение, Дезарг предложил называть совокупность всех бесконечно удаленных точек плоскости — *бесконечно удаленной прямой*. В таком случае прямую b' следует считать проекцией бесконечно удаленной прямой плоскости α. Пробел опять заштопан. Вместе с тем штопка закончена, так как все прорехи закрыты: каждая точка или прямая плоскости α проектируется в точку или прямую плоскости α', и обратно: каждая точка или прямая плоскости α' является проекцией точки или прямой плоскости α.

12. Итак, все параллельные между собой плоскости должно считать пересекающимися по одной бесконечно удаленной („несобственной“) прямой. И, наоборот, две плоскости, пересекающиеся по бесконечно удаленной прямой — параллельны. Значит, бесконечно удаленные прямые двух непараллельных плоскостей различны. В пространстве, стало быть, имеется бесконечное множество бесконечно удаленных прямых. Совокупность всех бесконечно удаленных прямых (она же совокупность всех бесконечно удаленных точек) пространства пересекается каждой „собственной“ прямой в одной точке и поэтому называется *бесконечно удаленной* (или *несобственной*) *плоскостью*.

13. Введение бесконечно удаленных элементов — точек, прямых и плоскости — вносит чисто словесное изменение в формулировку некоторых теорем геометрии. Нет никакой разницы, скажем ли мы, что две плоскости параллельны или что они пересекаются по бесконечно удаленной прямой.

Но стилистическое усовершенствование формулировок, которое получается благодаря бесконечно удаленным элементам, оказывается (в некоторых случаях) весьма значительным. Отпадает ряд исключений. Например, известно, что две прямые плоскости пересекаются в одной и только в одной точке, если они не параллельны. Оговорка „если они не параллельны“ теперь оказывается излишней: две прямые плоскости пересекаются в одной и только в одной точке (собственной или бесконечно удаленной). Точно так же плоскость и прямая, лежащая вне ее, отныне всегда пересекаются; две плоскости тоже всегда пересекаются. Все оговорки, связанные с параллельностью, отпадают.

Отпадает, между прочим, надобность делать какие-либо оговорки в упомянутых выше исключительных случаях, когда проектирующая прямая или проектирующая плоскость параллельны плоскости проекции. Если прямая, проектирующая некоторую точку, параллельна плоскости проекций, проекция точки все же существует и представляет собой точку, именно бесконечно удаленную (рис. 5). Если плоскость, проектирующая прямую, параллельна плоскости проекций, проекция прямой существует и представляет собой прямую — бесконечно удаленную прямую плоскости проекций.

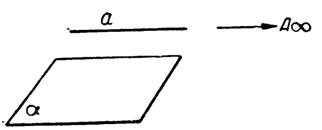


Рис. 9. Запись $A_\infty \sim a$ означает, что каждая прямая, определяющая бесконечно удаленную точку A_∞, параллельна плоскости α (или лежит в плоскости α).

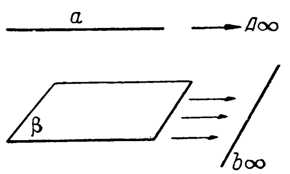


Рис. 10. Запись $A_\infty \sim b_\infty$ означает, что каждая прямая, определяющая бесконечно удаленную точку A_∞, параллельна каждой плоскости, определяющей бесконечно удаленную прямую b_∞ (или лежит в такой плоскости).

14. Сохраняется ли при проектировании инцидентность бесконечно удаленной точки с собственной или с бесконечно удаленной прямой? Прежде всего выясним, как надо понимать инцидентность между двумя элементами, когда один из них или оба бесконечно удалены.

Будем обозначать прямые малыми буквами, точки — большими, а плоскости — греческими.

Бесконечно удаленные элементы будем отмечать значком ∞. Для обозначения инцидентности введем знак $\sim$: запись $A \sim a$ означает, что точка A инцидентна с прямой a.

Что значит

1) $A_\infty \sim b$? 3) $A_\infty \sim \alpha$?

2) $a_\infty \sim \alpha$? 4) $A_\infty \sim b_\infty$?

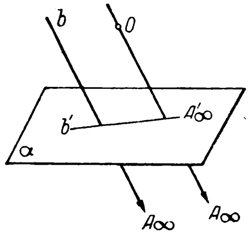


Рис. 11. Проекция точки A_∞, принадлежащая прямой b, лежит на прямой b', которая является проекцией прямой b.

Ответ:

1) Смысл утверждения $A_\infty \sim b$ ясен: точка A_∞ является бесконечно удаленной точкой прямой b.

2) Точно так же утверждение $a_\infty \sim \alpha$ обозначает, что прямая a_∞ является бесконечно удаленной прямой плоскости α.

3) Если $A_\infty \sim \alpha$, то все прямые, проходящие через точку A_∞ (все они параллельны между собой) параллельны[1] плоскости α, т. е. направление на точку A_∞ параллельно плоскости α (рис. 9).

4) Наконец, если $A_\infty \sim b_\infty$, то все прямые, проходящие через точку A_∞, параллельны плоскостям, проходящим через прямую b_∞ (рис. 10).

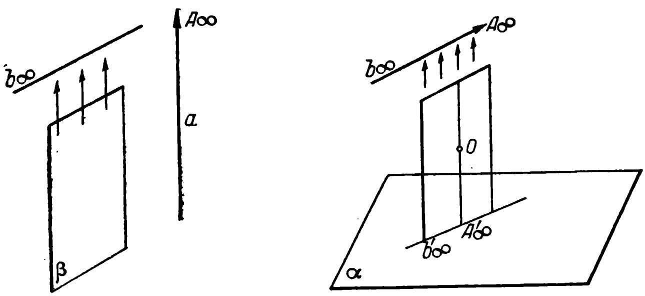


Рис. 12. Если A_∞ инцидентна с b_∞, то A'_∞ инцидентна с b'_∞.

15. Обратимся теперь к проектированию.

Пусть бесконечно удаленная точка A_∞ инцидентна с прямой b (рис. 11): $A_\infty \sim b$.

Обозначим проекцию точки A_∞ из центра O на плоскость α через A'_∞, а проекцию прямой b (из того же центра на ту же плоскость) — через b'.

Очевидно, проектирующая прямая OA_∞ параллельна прямой b, стало быть, лежит в проектирующей плоскости Ob.

---

[1] Прямые, лежащие в плоскости, мы тоже называем параллельными этой плоскости.

Значит, $A'_\infty \sim b'$. Инцидентность сохраняется!

Она сохраняется и в том случае, если не только проектируемая точка, но и проектируемая прямая бесконечно удалена.

Пусть b_∞ — бесконечно удаленная прямая плоскости β, а A_∞ — бесконечно удаленная точка, инцидентная с b_∞ (рис. 12): $A_\infty \sim b_\infty$.

Проектирующая плоскость Ob_∞ и проектирующая прямая OA_∞ параллельны плоскости β и, стало быть, инцидентны между собой: $OA_\infty \sim \overline{Ob}_\infty$.

Значит, $A'_\infty \sim b'_\infty$. Инцидентность и в этом случае сохраняется.

Словом, инцидентность точек с прямыми при проектировании сохраняется всегда.

Аксиомы соединения проективного пространства

16. Выше мы сказали, что введение бесконечно удаленных элементов вносит только стилистические изменения в геометрию. Так обстоит дело, если мы в ы д е л я е м бесконечно удаленные точки, прямые и плоскость как элементы особого рода. Во многих вопросах нет нужды в таком выделении. Мы уже видели, что имеются свойства, общие у несобственных и собственных точек, прямых и плоскостей. Более того, некоторые свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве, обогащенном бесконечно удаленными элементами, формулируются проще, если не выделять бесконечно удаленные элементы, т. е. если не делать различия между собственными и несобственными элементами.

Мы сейчас перечислим основные свойства точек, прямых, плоскостей *„расширенного“* пространства (его называют также *„проективным“* пространством) в виде нескольких аксиом, в которых под точками, прямыми и плоскостями подразумеваются любые (собственные или несобственные) точки, прямые и плоскости. Очевидно, что все теоремы, которые мы выведем из этих аксиом, тоже будут справедливы в расширенном (проективном) пространстве, где не делается никаких различий между бесконечно удаленными и собственными элементами. При доказательстве этих теорем не будет никакой надобности рассматривать, как мы делали выше, отдельно случай, когда те или иные элементы являются собственными или бесконечно удаленными: теорема будет доказана сразу для всех случаев.

Таким образом, выгода от введения бесконечно удаленных элементов перерастет стилистическое упрощение формулировок: мы выгадаем не только на формулировках, но и на доказательствах. При этом, как вы скоро увидите, выгадаем гораздо больше, чем можно сейчас ожидать — по меньшей мере вдвое больше, чем вы предполагаете. (Разрешите эту несколько загадочную фразу временно оставить неразъясненной.)

17. Аксиомы проективного пространства, которые мы сейчас сформулируем, называются аксиомами соединения или аксиомами инцидентности (так как в них говорится об инцидентности точек, прямых и плоскостей).[1]

18. Аксиома I_1. 1) *Если точка A инцидентна с прямой a, то прямая a инцидентна с точкой A, и наоборот.*

2) *Если прямая a, инцидентна с плоскостью α, то плоскость α инцидентна с прямой a, и наоборот.*

3) *Если точка A инцидентна с плоскостью α, то плоскость α инцидентна с точкой A, и наоборот.*

Содержание этой аксиомы можно записать так:

1) Утверждения $A \sim a$ и $a \sim A$ *равносильны.*

2) „ $a \sim \alpha$ и $b \sim a$ „ .

3) „ $A \sim \alpha$ и $\alpha \sim A$ „ .

Аксиома утверждает, что инцидентность между двумя объектами есть отношение *симметричное.*

19. Аксиома I_2. *Если точка A инцидентна с прямой a, а прямая a инцидентна с плоскостью α, то точка A инцидентна с плоскостью α, т. е.* если

$$A \sim a \text{ и } a \sim \alpha, \text{ то } A \sim \alpha.$$

Справедливость этого для собственных точек, прямых и плоскостей евклидова пространства очевидна. Нетрудно убедиться, что условия, при которых мы дополняли евклидово пространство несобственными элементами, согласуются с этой аксиомой.

Например, если

$$A_\infty \sim a \text{ и } a \sim \alpha, \text{ то } A_\infty \sim \alpha \text{ (рис. 13).}$$

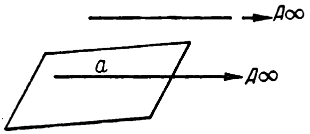


Рис. 13. Если $A_\infty \sim a$ и $a \sim \alpha$, то $A_\infty \sim \alpha$.

Иными словами, всякая прямая, параллельная прямой a плоскости α, параллельна плоскости α. Это известная теорема евклидовой геометрии. Точно так же, если

$$A_\infty \sim a_\infty \text{ и } a_\infty \sim \alpha, \text{ то } A_\infty \sim \alpha.$$

Смысл тот же, что и в предыдущем утверждении.

20. Аксиома I_3. *Две плоскости определяют одну и только одну прямую, инцидентную с ними.*

Иначе говоря, две плоскости пересекаются по одной и только одной прямой.

Эта аксиома не имеет места в евклидовом пространстве, где две плоскости могут быть параллельны.

Прямую пересечения плоскостей α и β мы будем обозначать через $\alpha\beta$.

21. Аксиома I_4. *Две точки определяют одну и только одну прямую, инцидентную с ними, т. е. через две точки можно провести*

[1] Элементами проективного пространства, помимо точек, являются проективные прямые и проективные плоскости. Однако прилагательное „проективный“ по отношению к прямым и плоскостям обычно опускается.

одну и только одну прямую. Если точки собственные — это известная аксиома евклидовой геометрии. Но она справедлива и в том случае, если одна из точек или обе они бесконечно удалены.

В самом деле, пусть A — собственная точка, B_∞ — бесконечно удаленная. Все прямые, проходящие через точку B_∞, параллельны между собой. Из них одна и только одна проходит через точку A.

Две бесконечно удаленные точки A_∞ и B_∞ тоже определяют одну и только одну прямую.

Действительно, все плоскости, проходящие через точки A_∞ и B_∞, т. е. параллельные направлениям на A_∞ и на B_∞, параллельны между собой, т. е. имеют одну и только одну (общую) бесконечно удаленную прямую.

22. Аксиома I_5. *Если точки A и B инцидентны с плоскостью π, то прямая AB инцидентна с этой плоскостью.*

Если $A \sim \pi$ и $B \sim \pi$, то $AB \sim \pi$.

Иными словами, если точки A и B лежат в плоскости π, то и прямая AB лежит в этой плоскости.

Если A и B — собственные точки — это известная аксиома геометрии Евклида.

Пусть точка A_∞ — бесконечно удалена. Если $A_\infty \sim \pi$, то $A_\infty B$ есть прямая, проходящая через B параллельно плоскости π.

Аксиома утверждает: если прямая параллельна плоскости и одна точка ее лежит в этой плоскости ($B \sim \pi$), то прямая лежит в данной плоскости (параллельность понимается не в строгом смысле, т. е. к числу прямых, параллельных плоскости, относятся прямые и лежащие в ней).

Пусть теперь обе точки A_∞ и B_∞ бесконечно удалены. Тогда $A_\infty B_\infty$ есть бесконечно удаленная прямая плоскостей, параллельных направлениям на A_∞ и на B_∞.

Аксиома утверждает в этом случае, что все плоскости, параллельные двум направлениям, параллельны между собой. Это известная теорема Евклида.

Если плоскость π_∞ бесконечно удалена, а одна из точек A или B — собственная точка, условие аксиомы не может быть выполнено, ибо на бесконечно удаленной плоскости лежат только бесконечно удаленные точки. Наконец, если обе точки и плоскость бесконечно удалены, то утверждение аксиомы тривиально, так как все бесконечно удаленные прямые лежат на бесконечно удаленной плоскости.

23. Аксиома I_6. *Если плоскости α и β инцидентны с точкой P, то прямая $\alpha\beta$ инцидентна с этой точкой.*

Если $\alpha \sim P$ и $\beta \sim P$, то $\alpha\beta \sim P$.

Иначе говоря, если плоскости α и β проходят через точку P, то прямая их пересечения $\alpha\beta$ проходит через эту точку.

Если точка P и обе плоскости α и β собственные, — это одно из предложений геометрии Евклида. Если точка P_∞ бесконечно удалена (рис. 14), то инцидентности $\alpha \sim P_\infty$ и $\beta \sim P_\infty$ означают, что плоскости α и β параллельны направлению на точку P_∞.

Аксиома утверждает, что прямая, параллельная двум плоскостям, параллельна прямой их пересечения. Это известная теорема геометрии Евклида.

Если одна из плоскостей α или β бесконечно удалена, то либо условие аксиомы невыполнимо (если P — собственная точка), либо аксиома тривиальна (если точка P бесконечно удалена).

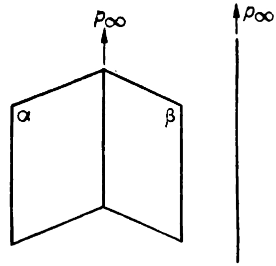


Рис. 14. Если $\alpha \sim P_\infty$ и $\beta \sim P_\infty$, то $\alpha\beta \sim P_\infty$.

24. Аксиома I_7. *Три точки, не инцидентные с одной прямой, определяют одну и только одну плоскость, инцидентную с ними.*

То есть через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость. Если все эти точки собственные — это аксиома евклидовой геометрии. Пусть одна из трех точек является бесконечно удаленной точкой прямой a (обозначим ее A_∞), а две другие — B и C — собственные точки. Плоскость, инцидентная с B, C и A_∞, должна проходить через B и C параллельно прямой a. Такая плоскость существует и только одна.

Пусть и точка B бесконечно удалена (B_∞). Назовем одну из прямых, инцидентных с ней, через b. Плоскость $A_\infty B_\infty C$ должна пройти через точку C, параллельно двум непараллельным между собой прямым a и b. Такая плоскость, существует и только одна.

Наконец, если все три точки бесконечно удалены, — единственная плоскость, проходящая через них, есть бесконечно удаленная плоскость пространства.

25. Аксиома I_8. *Три плоскости, не инцидентные с одной прямой, определяют одну и только одну точку, инцидентную с ними.*

То есть, если три плоскости не пересекаются по одной прямой, то они пересекаются в одной точке.

В геометрии Евклида эта аксиома была бы верна с оговоркой, что не существует прямой, параллельной всем трем плоскостям. Для проективного пространства оговорка не нужна: если среди плоскостей нет параллельных, но все они параллельны одной прямой, то эти плоскости попарно пересекаются по трем параллельным прямым, которые имеют общую бесконечно-удаленную точку; эта точка инцидентна со всеми тремя плоскостями. Аналогично обстоит дело, если две плоскости параллельны, а третья пересекает их. Если все три плоскости параллельны, они имеют общую бесконечно удаленную прямую и, стало быть, условие аксиомы не соблюдено. Пусть теперь одна из трех плоскостей бесконечно удалена, а две другие пересекаются. Тогда бесконечно удаленная точка прямой их пересечения и есть единственная общая точка всех трех плоскостей. Наконец, если одна плоскость бесконечно удалена, а две другие параллельны между собой, то условие аксиомы не соблюдено, так как бесконечно удаленная плоскость проходит через прямую (бесконечно удаленную) пересечения двух других плоскостей.

26. Принцип двойственности. Обратите внимание на то, что наши аксиомы, начиная с третьей, попарно весьма сходны между собой. Если в аксиоме I_3 заменить слово „плоскость" словом „точка", то получится аксиома I_4. Если в аксиоме I_5 вместо „плоскость" везде написать „точка", а вместо „точка" — „плоскость", получится аксиома I_6. Такая же перестановка слов превращает аксиому I_7 в I_8.

Применим эту замену к аксиомам I_1 и I_2.

Первый пункт аксиомы I_1 гласит:

Утверждения $A \sim a$ и $a \sim A$ равносильны.

Напишем вместо „точка A" — „плоскость α".

Получим: Утверждения $\alpha \sim a$ и $a \sim \alpha$ равносильны.

Из первого пункта аксиомы получили второй пункт. Третий пункт таким же образом превращается в самое себя.

Аксиома I_2 заменой слова „точка" словом „плоскость" и наоборот тоже превращается в самое себя. Итак, указанная замена слов превращает первые две аксиомы в самих себя, а прочие аксиомы друг в друга: I_3 — в I_4; I_4 — в I_3; I_5 — в I_6; I_6 — в I_5; I_7 — в I_8; I_8 — в I_7.

27. Такая структура аксиом, допускающая замену слов „точка" и „плоскость" одно другим, называется *двойственностью.*

Двойственность аксиом должна повлечь за собой двойственность теорем, которые вытекают из этих аксиом.

В самом деле, всякая теорема, которая будет доказана на основании аксиом I_1, I_2, I_3 и т. д. до I_8, путем перестановки слов „плоскость" и „точка" переходит в теорему, основанную на аксиомах I_1, I_2, I_4, ... I_7, т. е. на той же системе аксиом в другом порядке.

Таким образом, в проективном пространстве имеет место принцип двойственности: каждая теорема проективной геометрии, путем замены слов „точка" и „плоскость" одно другим, превращается в новую, тоже справедливую, теорему.[1] Такой приятной возможности дублировать все доказанные теоремы нет в евклидовой геометрии. Замена слов „плоскость" и „точка" одно другим превратило бы „параллельные плоскости" в „параллельные точки". Но „параллельных точек" нет. Поэтому указанная замена слов совершенно недопустима.

В проективной геометрии тоже нет параллельных точек, но в ней нет и параллельных плоскостей. Таким образом, замечательный принцип двойственности теснейшим образом связан с введением бесконечно удаленных элементов.

Это обстоятельство я имел в виду, когда сказал, что выгода от введения бесконечно удаленных элементов „по меньшей мере вдвое больше, чем вы предполагаете".

---

[1] Собственно говоря, проведенный выше анализ аксиом I_1 — I_8 не дает еще строгого доказательства принципа двойственности, так как аксиомы I_1 — I_8 не составляют полной системы аксиом проективной геометрии (они недостаточны и для обоснования всех предложений этой книги, в дальнейших главах которой будут введены новые аксиомы). Понятие о полной системе аксиом, точную формулировку принципа двойственности в проективной геометрии и доказательство его читатель может найти, например, в книге Н. В. Ефимова „Высшая геометрия", Гостехиздат, 1949, § 61, 142—146. (*Примеч. ред.*)

28. Рассмотрим пример. На основании установленных аксиом нетрудно доказать такую теорему:

Через прямую и точку, лежащую вне ее, можно провести одну и только одну плоскость.

Мы сейчас докажем эту теорему, а затем в доказательстве произведем механическую замену слов „точка“ и „плоскость“ одно другим. Все доказательство останется безупречно логичным и приведет нас к новой теореме.

Прежде всего формулируем теорему, не употребляя выражений „лежащий вне ...“ и „можно провести ...“.

Теорема. *Если точка и прямая не инцидентны, то существует одна и только одна плоскость, инцидентная с ними.*

Двойственная теорема гласит!

Если плоскость и прямая не инцидентны, то существует одна и только одна точка, инцидентная с ними.

На житейском языке это значит: плоскость и прямая, не лежащая на ней, пересекаются в одной и только в одной точке.

29. Чтобы доказать обе теоремы, достаточно доказать одну из них и затем механически произвести указанную замену слов. Получится доказательство двойственной теоремы. Оба доказательства выпишем рядом — слева для первой теоремы, справа для второй.

Пусть точка A и прямая p не инцидентны (рис. 15).

Пусть плоскость α и прямая p не инцидентны (рис. 16).

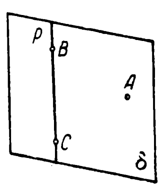


Рис. 15. Если точка A и прямая P не инцидентны, то существует одна и только одна плоскость δ, инцидентная с ними.

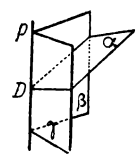


Рис. 16. Если плоскость α и прямая p не инцидентны, то существует одна и только одна точка D, инцидентная с ними.

Возьмем две точки B и C, инцидентные с прямой p.[1]

Возьмем две плоскости β и γ, инцидентные с прямой p.[1]

[1] Строго говоря, наши аксиомы не позволяют утверждать, что на всякой прямой существуют две точки и что через всякую прямую можно провести две плоскости. Наш список аксиом следовало бы дополнить еще несколькими аксиомами „существования“, о которых кое-что будет сказано дальше.

Имеем три точки A, B и C не инцидентные с одной прямой.

Согласно аксиоме I_7, существует одна и только одна плоскость, инцидентная с этими точками.

Обозначим ее через δ.

Так как $B \sim \delta$ и $C \sim \delta$ то, согласно аксиоме I_5,

$$BC \sim \delta.$$

Две точки B и C, согласно аксиоме I_4, определяют единственную прямую BC, инцидентную с ними.

А так как прямая p инцидентна с B и C, то прямые p и BC тождественны.

$$BC \equiv p.$$

Поэтому $p \sim \delta$.

Значит, плоскость δ действительно инцидентна с прямой p и с точкой A.

Плоскость δ является единственной плоскостью, удовлетворяющей этому условию.

Действительно, пусть существует вторая плоскость δ', инцидентная с прямой p и точкой A.

Так как $B \sim p$ и $p \sim \delta'$, то, согласно аксиоме I_2, $B \sim \delta'$. На том же основании $c \sim \delta'$.

Выходит, что две плоскости δ и δ' инцидентны с тремя точками A, B и C, не инцидентными с одной прямой.

По аксиоме I_7 это невозможно.

Имеем три плоскости α, β и γ, не инцидентные с одной прямой.

Согласно аксиоме I_8, существует одна и только одна точка, инцидентная с этими плоскостями.

Обозначим ее через D.

Так как $\beta \sim D$ и $\gamma \sim D$ то, согласно аксиоме I_6,

$$\beta\gamma \sim D.$$

Две плоскости β и γ, согласно аксиоме I_3, определяют единственную прямую $\beta\gamma$, инцидентную с ними.

А так как прямая p инцидентна с β и γ, то прямые p и $\beta\gamma$ тождественны.

$$\beta\gamma \equiv p.$$

Поэтому $p \sim D$.

Значит, точка D действительно инцидентна с прямой p и с плоскостью α.

Точка D является единственной точкой, удовлетворяющей этому условию.

Действительно, пусть существует вторая точка D', инцидентная с прямой p и плоскостью α.

Так как $\beta \sim p$ и $p \sim D'$, то, согласно аксиоме I_2, $\beta \sim D'$. На том же основании $\gamma \sim D'$.

Выходит, что две точки D и D' инцидентны с тремя плоскостями α, β и γ, не инцидентными с одной прямой.

По аксиоме I_8 это невозможно.

30. Рассмотрим второй пример. Известно, что существует многогранник (например, куб), ограниченный 6-ю плоскостями (гранями) и имеющий 12 ребер и 8 вершин.

Принцип двойственности позволяет утверждать, что существует многогранник с 6-ю вершинами, 12 ребрами и 8-ю гранями (рис. 17). Это октаэдр (восьмигранник). Можно точнее уяснить себе строение восьмигранника, применяя принцип двойственности к тому, что известно о шестиграннике.

В шестиграннике из каждой вершины исходят три ребра, т. е. каждая вершина (точка) инцидентна с тремя ребрами (прямыми).

Значит, в двойственной фигуре (шестивершиннике — он же восьмигранник) каждая грань (плоскость) инцидентна с тремя ребрами (прямыми). Проще говоря, грани октаэдра — треугольники.

В шестиграннике каждая грань — четырехугольник, т. е. каждая грань инцидентна с четырьмя ребрами.

Применяя к этому утверждению принцип двойственности, получим, что в октаэдре каждая вершина инцидентна с четырьмя ребрами, т. е. из каждой вершины исходят четыре ребра.

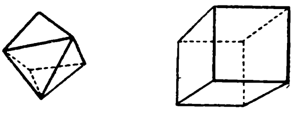


Рис. 17. Куб и октаэдр — взаимно двойственные многогранники.

31. Еще пример. Известно, что существует многогранник, ограниченный 12-ю гранями — пятиугольниками. Это — додекаэдр (рис. 18, *I*). Он имеет 30 ребер и 20 вершин. Принцип двойственности позволяет сделать вывод, что существует многогранник с 12-ю вершинами, 30-ю ребрами и 20-ю гранями. Это — икосаэдр (рис. 18, *II*). В додекаэдре из каждой вершины исходят три ребра; значит, в икосаэдре в каждой грани лежат три ребра (т. е. грани — треугольники). В додекаэдре на каждой грани лежат пять ребер; значит, в икосаэдре из каждой вершины исходят 5 ребер.

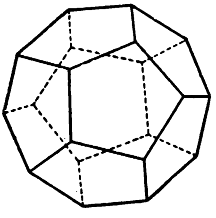


Рис. 18. *I*. Додекаэдр.

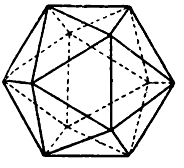


Рис. 18. *II*. Икосаэдр.

32. Принцип двойственности в геометрии проективного *пространства* называют „большим“ принципом двойственности. Это название дается для того, чтобы отличить его от принципа двойственности в геометрии проективной *плоскости*, который называют „малым“. О нем будет идти речь в следующей главе.

ГЛАВА ВТОРАЯ,

В КОТОРОЙ РАСКРЫВАЮТСЯ ГЛАВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОСЕВЫХ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Осевая коллинеация

33. Проектирование точек одной плоскости на другую плоскость относит каждой точке оригинала одну и только одну точку в качестве ее изображения и каждой точке изображения — одну и только одну точку в качестве оригинала. Это выражают, говоря, что проектирование есть о д н о - о д н о з н а ч н о е т о ч е ч н о е п р е о б р а з о в а н и е одной плоскости в другую.

34. Спроектировав плоскость α на плоскость α', можно затем спроектировать плоскость α' на третью плоскость α'' (из другого или из того же центра). В частности, можно спроектировать α' снова на первоначальную плоскость α (рис. 19). Таким образом, каждая фигура плоскости α будет преобразована в фигуру той же плоскости, причем каждая точка будет преобразована в точку, каждая прямая — в прямую, а инцидентные элементы — в инцидентные же элементы.

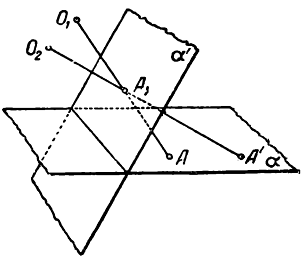


Рис. 19. Точка A проектируется на плоскость α' из центра O_1. Полученная таким образом точка A_1 обратно проектируется на плоскость α из центра O_2.

35. Обратим еще внимание на прямую пересечения плоскостей α и α'. Ясно, что при проектировании плоскости α на α' каждая точка этой прямой преобразуется в самое себя. При обратном проектировании α' на α каждая точка прямой их пересечения снова преобразуется в самое себя. Таким образом при преобразовании плоскости α в самое себя, которое получается, если последовательно проектировать сперва α на α', а затем α' снова на α, одна прямая плоскости α преобразуется в самое себя, причем каждая точка этой прямой тоже преобразуется в самое себя, т. е. остается на своем месте.

36. Итак, существует такое одно-однозначное преобразование плоскости в самое себя, при котором:

1) каждая точка преобразуется в точку,
2) каждая прямая — в прямую,
3) сохраняется инцидентность точек с прямыми,

4) все точки одной определенной прямой преобразуются сами в себя.

37. Это преобразование плоскости в самое себя можно охарактеризовать еще иначе.

Точки, расположенные на одной прямой, называют *коллинейными* (т. е. „сопринадлежащими линии“, подразумевается — прямой линии). Преобразование, о котором идет речь, есть *одно-однозначное точечное преобразование плоскости в самое себя, сохраняющее коллинейность точек и преобразующее все точки одной прямой в самих себя.* Этими словами дано краткое, но полное описание полученного преобразования.

38. Существует очень простой способ осуществить такое преобразование (рис. 20).

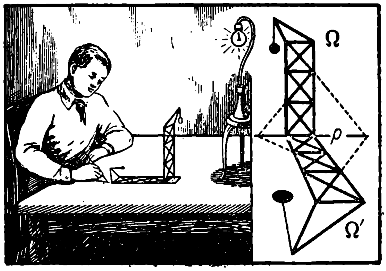


Рис. 20. Ω и Ω′ — две тени одной и той же плоской фигуры при разных положениях источника света; *p* — прямая, по которой плоскость отбрасывающей тень фигуры пересекается с плоскостью стола.

Тень, которую отбрасывает плоская фигура на поверхность стола, есть проекция этой фигуры на стол. Если передвинуть источник света (центр проекции), тень (проекция) изменит свое положение и свою форму; мы скажем, что она преобразовалась в новую тень. При этом те точки тени, которые лежали на одной прямой, окажутся преобразованными в точки новой тени, опять-таки лежащие на одной прямой (коллинейность сохраняется!); а те точки тени, которые находились на пересечении плоскости фигуры с плоскостью доски стола, останутся на своих местах, т. е. будут преобразованы сами в себя.

39. Прямая, все точки которой преобразуются сами в себя, называется о с ь ю преобразования, а самое преобразование, существование которого только что доказано, — *осевой коллинеацией: осевой,* чтобы подчеркнуть наличие оси; *коллинеацией,* так как оно сохраняет коллинейность точек.

Вообще *коллинеациями называют одно-однозначные точечные преобразования, сохраняющие коллинейность точек, т. е. преобразующие точку в точку, прямую в прямую и инцидентные элементы в инцидентные же элементы.* Одним из таких преобразований является хорошо всем известное д в и ж е н и е.

Если фигура Ω передвинута на другое место, то, назвав ее в новом положении фигурой Ω′, можно сказать, что движение преобразовало фигуру Ω в фигуру Ω′. При этом каждая точка фигуры Ω преобразована в точку фигуры Ω′, каждая прямая — в прямую, инцидентные элементы — в инцидентные же, так что движение представляет собой коллинеацию. Но, разумеется, движение — это специальный вид коллинеаций: существует много коллинеаций, весьма отличных от движения, в частности такова осевая коллинеация.

40. Если бы мы захотели сейчас охарактеризовать движение как особый вид коллинеаций, то натолкнулись бы на значительные трудности. Можно, конечно, определить движение как такую коллинеацию, которая сохраняет равенство фигур. Но о равенстве фигур мы судим по тому, что они могут быть совмещены наложением, т. е. преобразованы одна в другую посредством движения. Таким образом, движение было бы определено тем, что оно преобразует друг в друга равные фигуры, а равными назывались бы фигуры, которые преобразуются друг в друга движением.

Проективной геометрии удалось разорвать этот ложный круг и дать такое определение движения, которое не опирается на понятие „равенство". Тем самым метрическая (т. е. измерительная) геометрия получает совершенно новое освещение. Это одно из самых интересных и важных достижений проективной геометрии.

Первое звено проективного определения движения в наших руках: движение есть коллинеация, которая... Дальнейшие звенья будут постепенно присоединяться по мере углубления нашего знакомства с новой геометрией.

Ось и центр

41. Приступаем к изучению определенных выше преобразований — осевых коллинеаций. Условимся в обозначениях.

Если какое-либо преобразование относит точке A точку A', т. е. преобразует A в A', мы будем писать $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$. Запись $\begin{pmatrix} A, & B, & C \ldots \\ A', & B', & C' \ldots \end{pmatrix}$ означает, что точка A преобразуется в A', B в B', C в C'. Словом, под каждой точкой записывается та точка, в которую она преобразуется. Точно так же можно, конечно, отметить, в какую прямую преобразуется данная прямая.

Если точка A преобразуется в A', мы будем называть точки A и A' *соответственными* в рассматриваемом преобразовании. При этом преобразуемую точку A иногда будем именовать *прообразом*, а соответствующую ей точку A' — *образом*. Точно так же назовем прямые a и a' соответственными, если a преобразуется в a': a — *прообраз*, a' — *образ*.

Прямые мы будем обозначать либо двумя прописными буквами, указывающими две точки ее, либо одной строчной буквой.

Точно так же точка будет обозначаться либо одной прописной буквой, либо двумя строчными, указывающими две прямые, проходящие через нее. Так, AB есть прямая, проходящая через точки A и B; ab — точка пересечения прямых a и b.

Наряду с этим иногда будут применяться и более сложные обозначения. Именно, точку пересечения двух прямых AB и CD будем обозначать так: $AB \cdot CD$; точно так же $ab \cdot cd$ означает прямую, соединяющую точки ab и cd. Легко понять и такие записи: $N \cdot ab$

или $n \cdot AB$. Первая означает прямую, соединяющую точку N с точкой ab, вторая — точку пересечения прямых n и AB.

Наконец, для указания на тождественность двух вещей мы будем употреблять знак $\equiv$. Запись $R \equiv ab$ означает, что точка R тождественна с точкой ab; $r \equiv AB$ значит прямая r тождественна с прямой AB.

42. Пусть p — ось какой-то коллинеации, преобразующей точку A в A' (рис. 21). В какую прямую преобразует эта коллинеация прямую AA'?

Обозначим через X точку пересечения прямой AA' с осью p. Рассматриваемая коллинеация преобразует точку X в самое себя, а точку A в A'

$$\begin{pmatrix} X, & A \\ X, & A' \end{pmatrix},$$

стало быть, прямая XA преобразуется в XA'. Но XA и XA' — это одна прямая AA'. Таким образом, прямая AA' преобразуется в самое себя.

43. Точки, которые преобразуются *сами в себя*, называются *двойными* точками преобразования. Точно так же прямые, которые преобразуются сами в себя, — *двойные* прямые преобразования. Ось является двойной прямой коллинеации. Прямая AA' тоже двойная прямая коллинеации. Но между ними есть существенная разница: в то время как все точки оси являются двойными, точки прямой AA' не двойные, во всяком случае *не все* ее точки двойные: точка A, например, не является двойной. Чтобы различить эти два типа двойных прямых, мы будем называть *собственно-двойными* такие прямые, н е в с е точки которых являются двойными. Если же в с е точки прямой двойные, то прямую будем называть *неизменной*. Ось коллинеации — неизменная прямая; AA' — собственно-двойная прямая.

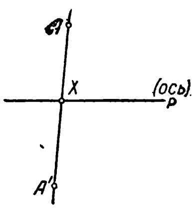


Рис. 21. AA'—двойная прямая.

Мы можем теперь выразить установленное только что свойство осевой коллинеации так:

Прямая, соединяющая соответственные точки осевой коллинеации, является собственно-двойной прямой.

44. Пусть a и b две д в о й н ы е прямые коллинеации. Вопрос: в какую точку преобразуется точка пересечения прямых a и b, т. е. точка ab (рис. 22, *I*)?

Так как точка ab лежит на двойной прямой a, она может быть преобразована только в одну из точек этой прямой (инцидентность сохраняется!). Точно так же ясно, что она преобразуется в одну из точек прямой b. Но существует только одна точка, которая одновременно лежит и на a и на b: это точка их пересечения — ab. Значит, точка пересечения двух двойных прямых преобразуется в самое себя; иначе говоря, *точка пересечения двойных прямых является двойной точкой.*

Точно так же легко понять, что прямая, проходящая через две двойные точки, является двойной прямой, т. е. *точка, инцидентная с двумя двойными прямыми, является двойной*; *прямая, инцидентная с двумя двойными точками, является двойной.*

45. Между двойными точками, лежащими на оси, и двойными точками, лежащими вне оси, имеется существенная разница. Именно: всякая прямая, проходящая через двойную точку, не лежащую на оси, является двойной прямой, так как на ней лежит еще и вторая двойная точка: точка ее пересечения с осью (рис. 22, *II*).

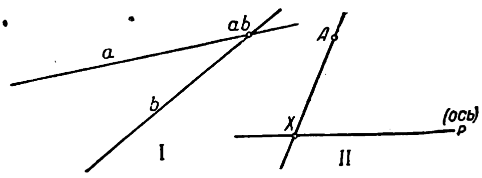


Рис. 22. *I*. Если a и b — двойные прямые, то ab — двойная точка. *II*. Если A — двойная точка, то AX — двойная прямая.

Если все прямые, проходящие через некоторую точку, оказываются двойными, то такую точку мы будем называть *неизменной*. Всякая двойная точка, лежащая вне оси, является неизменной (почему?).

Двойные, но не неизменные точки мы будем в дальнейшем называть *собственно-двойными*. Все собственно-двойные точки лежат на неизменной прямой, т. е. на оси коллинеации (почему?).

46. Сколько же может быть неизменных точек в коллинеации? Не более одной.

В самом деле, допустим, что существуют две неизменные точки X и Y (рис. 23). Тогда всякая прямая, проходящая через точку X или через точку Y, является двойной. Но в таком случае любая точка плоскости является двойной, так как через нее можно провести две двойные прямые: прямую, соединяющую ее с точкой X, и прямую, соединяющую ее с точкой Y. Значит, коллинеация с двумя неизменными точками преобразует каждую точку плоскости в самое себя, т. е. оставляет ее на месте. Такую коллинеацию называют *тождественной*. Она, разумеется, не представляет собой никакого интереса. Поэтому, всегда, если не оговорено противное, мы будем полагать, что речь идет не о тождественной коллинеации.

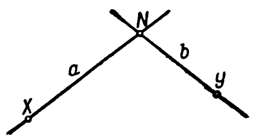


Рис. 23. Коллинеация с двумя неизменными точками есть тождественное преобразование.

47. Из доказанного можно сделать следующий очень важный вывод:

Все собственно-двойные прямые осевой коллинеации пересекаются в одной точке.

В самом деле, допустим, что три двойные прямые a, b и c пересекаются в точках ab, bc и ac, и эти три точки не лежат на одной прямой (рис. 24). В таком случае одна из них является неизменной, а две другие лежат на оси (почему?). Но если это так, то одна из наших двойных прямых совпадает с осью, т. е. не является собственно-двойной.

Предложим читателю опытным путем убедиться в том, что все прямые, соединяющие соответственные точки двух теней, изображенных на рис. 20, действительно пересекаются в одной точке.

48. Точку пересечения всех двойных прямых коллинеации называют ее *центром*. Легко показать, что центр осевой коллинеации является неизменной точкой ее, т. е. что всякая прямая, проходящая через центр, является двойной.

Действительно, пусть a — любая из прямых, проходящих через центр осевой коллинеации — точку P (рис. 25). Выберем на a произвольную точку A. Наша коллинеация преобразует ее в какую-то точку A', причем прямая AA' является двойной прямой этой коллинеации (почему?) и, стало быть, проходит через центр P. Значит,

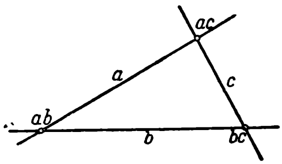


Рис. 24. Если двойная точка ac не лежит вне оси, то двойные точки ab и bc должны лежать на оси. Тогда прямая b является осью.

Рис. 25. Всякая прямая, проходящая через центр осевой коллинеации, является двойной.

прямая AA' совпадает с прямой PA, т. е. с прямой a. Таким образом, прямая a является двойной прямой рассматриваемой коллинеации.

49. Наше исследование свойств осевых коллинеаций можно резюмировать так:

Во всякой коллинеации, имеющей неизменную прямую (ось), *существует одна и только одна неизменная точка* (центр), *в которой пересекаются все собственно-двойные прямые.*

Предложим читателю доказать обратную теорему:

Во всякой коллинеации, имеющей неизменную точку (центр), *существует одна и только одна неизменная прямая* (ось), *на которой лежат все собственно-двойные точки.* [1]

Доказательство проведите так. Сперва ответьте на вопрос, в какую точку преобразует коллинеация, имеющая центр (короче — центральная коллинеация), точку пересечения соответственных прямых.

Ответ: В самое себя. Затем, для рассматриваемой коллинеации остается в силе все сказанное в п. 44, т. е. прямая, инцидентная

[1] Предполагается, конечно, что коллинеация не является тождественной, т. е. не является преобразованием, оставляющим все точки на своих местах.

с двумя двойными точками центральной коллинеации, является двойной прямой ее. Равным образом, точка пересечения двух двойных прямых центральной коллинеации является двойной точкой ее. Далее покажите, что всякая двойная прямая центральной коллинеации, не проходящая через центр, является н е и з м е н н о й. Потом установите, что всякая центральная коллинеация с двумя неизменными прямыми представляет собой тождественную коллинеацию, так что в нетождественной центральной коллинеации может быть не более одной неизменной прямой. После этого вы докажете, что все собственно-двойные точки центральной коллинеации лежат на одной прямой, и наконец, что все точки этой прямой являются двойными.

50. Чтобы облегчить вам работу, открою простой секрет: если во всем, что сказано выше в пп. 42—48, заменить слова „точка" и „прямая" одно другим (т. е. вместо „точка" везде написать „прямая", а вместо „прямая" — „точка"), то все рассуждения останутся в силе и приведут к тому, что требуется доказать.

Для примера подвергнем такой „переработке" п. 42. Результат выпишем в два столбца: слева старый текст (дословное повторение), справа новый.

Предварительно напомним, что ц е н т р а л ь н о й мы назвали такую коллинеацию, которая преобразует в самих себя (т. е. оставляет на своих местах) все прямые, проходящие через одну точку (центр). Левый столбец относится к осевой коллинеации, правый — к центральной.

Пусть p о с ь какой-то коллинеации, преобразующей точку A в точку A'. В какую п р я м у ю преобразует эта коллинеация прямую AA'?

Обозначим через X т о ч к у п е р е с е ч е н и я прямой AA' с осью p (рис. 26, I).

Рассматриваемая коллинеация преобразует т о ч к у X в самое себя (почему?), а точку A в A':

$$\begin{pmatrix} X, & A \\ X, & A' \end{pmatrix}.$$

Стало быть, п р я м а я XA преобразуется в п р я м у ю XA'. Но XA и XA' — это одна п р я м а я AA'.

Таким образом, п р я м а я AA' преобразуется в самое себя.

Пусть P ц е н т р какой-то коллинеации, преобразующей прямую a в прямую a'. В какую т о ч к у преобразует эта коллинеация точку aa'?

Обозначим через x п р я м у ю, с о е д и н я ю щ у ю точку aa' с ц е н т р о м P (рис. 26, II).

Рассматриваемая коллинеация преобразует п р я м у ю x в самое себя (почему?), а прямую a в a':

$$\begin{pmatrix} x, & a \\ x, & a' \end{pmatrix}.$$

Стало быть, точка xa преобразуется в т о ч к у xa'. Но xa и xa' — это одна т о ч к а aa'.

Таким образом, т о ч к а aa' преобразуется в самое себя.

Оба столбца почти дословно совпадают: только то, что слева говорится о т о ч к а х, справа повторяется о п р я м ы х, и наоборот

Рассуждения правого столбца, хотя и получены путем механической переделки левого, вполне логичны; стало быть, теорема, которую они доказывают, верна.

„Переработав“ таким же образом все, что говорилось до сих пор об осевых коллинеациях, мы получим ряд новых теорем о центральных коллинеациях. При этом ни одна фраза не потеряет смысла, ни одна истина не станет ложью, логическая нить нигде не разорвется. Вообще из каждой теоремы проективной геометрии, если в ней идет речь о точках и прямых одной плоскости, можно, путем

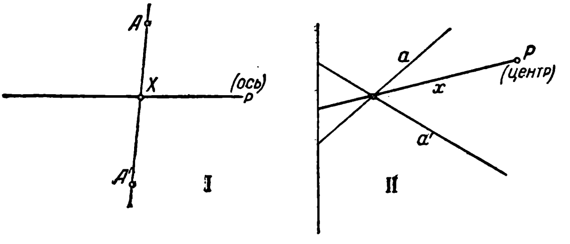


Рис. 26. Каждой точке одной фигуры соответствует прямая на другой фигуре, а каждой прямой — точка; при этом инцидентным элементам одной фигуры соответствуют инцидентные элементы другой.

простой подстановки слов „точка, прямая“ взамен слов „прямая, точка“, получить новую теорему. Это правило дублирования (удвоения) теорем называют малым принципом двойственности (напомним читателю пункт 32).

Применяя, например, указанную перестановку слов к теореме п. 49, которая подытожила наши исследования об осевых коллинеациях, получим теорему о центральных комбинациях, доказательство которой мы возложим на читателя. Принцип двойственности утверждает, что полученная таким путем новая теорема верна.

Почему теоремы проективной геометрии на плоскости допускают дублирование путем механической перестановки слов точка — прямая, прямая — точка? Этот в высшей степени интересный и важный вопрос заслуживает особого параграфа.

Малый принцип двойственности

51. Поставленный вопрос не является для нас совершенно новым. Мы уже познакомились с „большим“ принципом двойственности, имеющим место в геометрии проективного пространства. В пространстве точки двойственны плоскостям, плоскости — точкам, прямые — прямым.

В геометрии проективной плоскости приходится иметь дело только с точками и прямыми. Свойства их взаимных отношений, изучаемых проективной геометрией, мы и должны проанализировать.

52. Вдумаемся в то, как доказываются теоремы проективной геометрии, например, теорема п. 44. „Обозначим через X точку, пересечения прямой AA' с осью p“. Эта короткая фраза предполагает, 1) что через две точки A и A' можно провести одну и только одну прямую AA' и 2) что две прямые AA' и p непременно пересекаются в одной и только в одной точке. Если бы, например, точки A и A' и прямая p не лежали в одной плоскости, то нельзя было бы так просто заявить: „обозначим точку пересечения прямых AA' и p через X“, так как прямые разных плоскостей могут не пересечься. Мы вправе без дальнейших разговоров „обозначить точку пересечения прямой AA' и p через X“, потому что речь идет о точках и прямых одной плоскости, которые обладают такими свойствами: 1) через любые две точки можно провести одну и только одну прямую и 2) две прямые пересекаются в одной и только в одной точке.

Заменив в разобранной фразе слова „точка“ и „прямая“ одно другим, получим такую фразу: „Обозначим прямую, соединяющую точку aa' с точкой P, через x“. Эта фраза имеет смысл потому, что 1) прямые a и a' пересекаются в одной и только в одной точке aa' и 2) через точки aa' и P можно провести одну и только одну прямую. Если бы речь шла не о прямых, а, например, об окружностях a и a', то нельзя было бы говорить о „точке aa'“, так как две окружности могут вовсе не иметь общих точек и могут иметь две общие точки.

53. Мы уже близки к разгадке принципа двойственности. Суть дела в том, что основные свойства точек и прямых одной плоскости совершенно аналогичны. Сходство между ними выступает вполне отчетливо, если выразить их так:

1) Существует одна и только одна прямая, инцидентная с двумя точками (т. е. проходящая через две точки).

2) Существует одна и только одна точка, инцидентная с двумя прямыми (т. е. лежащая на двух прямых).

54. Теперь, когда стилистические различия уничтожены, ясно, что замена слов „точка“, „прямая“ словами „прямая“, „точка“ преобразует первое свойство во второе, а второе в первое. Поэтому, если мы сделаем какой-нибудь вывод из первого свойства, то указанная замена слов преобразует его в вывод, который может быть получен совершенно аналогичным образом из второго свойства. Наоборот, утверждение, основанное на втором свойстве, преобразуется в утверждение, основанное на первом свойстве. Всякое же рассуждение, которое исходит из наличия обоих этих свойств — первого и второго, — преобразуется в рассуждение, опирающееся на эти же два свойства — второе и первое.

Конечно, сказанное сейчас нельзя рассматривать как исчерпывающее доказательство малого принципа двойственности, потому что, кроме двух рассмотренных утверждений, для обоснования проективной геометрии на плоскости приходится привлекать еще и другие аксиомы.

55. Малый принцип двойственности можно вывести как следствие большого. Основную идею этого вывода мы сейчас поясним.

Рассмотрим в пространстве какую-нибудь плоскую фигуру A, т. е. некоторое собрание точек и прямых, принадлежащих одной плоскости. Возьмем вне этой плоскости точку O и проведем 1) через точку O и каждую точку фигуры A прямую, 2) через точку O и каждую прямую фигуры A плоскость.

Так получится пространственная фигура B, составленная из прямых и плоскостей, проходящих через точку O. Каждый элемент фигуры B мы будем называть соответствующим тому элементу фигуры A, через который он проходит. Очевидно, элементы фигуры A находятся в таких же отношениях инцидентности, как соответствующие им элементы фигуры B.

На основании большого принципа двойственности мы можем утверждать, что существует фигура A^*, двойственная в пространстве фигуре B. Прямым фигуры B в фигуре A^* соответствуют прямые же, плоскостям — точки. Так как все элементы фигуры B проходят через одну точку, то все элементы фигуры A^* лежат в одной плоскости; отношения инцидентности соответствующих элементов фигур B и A^* одинаковы.

Условимся считать элементы фигур A и A^* соответствующими, если они соответствуют одному элементу фигуры B. В таком случае точки фигуры A^* соответствуют прямым фигуры A, прямые фигуры A^* соответствуют точкам фигуры A и соответствующие элементы этих фигур находятся в одинаковых отношениях инцидентности.

Итак, существует фигура A^*, которая является двойственной данной фигуре A в смысле малого принципа двойственности. А этим, собственно говоря, и устанавливается малый принцип двойственности.

В самом деле, пусть доказана некоторая теорема,условие и заключение которой трактуют об инцидентности точек и прямых проективной плоскости. Будет ли верна двойственная теорема? Предположим, что двойственная теорема неверна. Это значит, что существует плоская фигура A такая, что отношения инцидентности ее точек и прямых удовлетворяют *условию* двойственной теоремы, но не удовлетворяют *заключению*.

Но в таком случае отношения инцидентности точек и прямых фигуры A^*, двойственной фигуре A, будут удовлетворять условию первоначальной теоремы и не будут удовлетворять ее заключению.

Таким образом, и первоначальная теорема неверна, что противоречит нашему предположению.

56. И большой и малый принцип двойственности установлены нами при помощи анализа аксиом инцидентности. В свое время было указано, что наш список аксиом не полон. Таким образом, проведенные рассуждения нельзя рассматривать как строгое доказательство принципа двойственности в проективной геометрии. Попытка достигнуть исчерпывающей точности в данном вопросе привела бы нас к необходимости аксиоматического обоснования всей проективной геометрии, а к этой цели мы здесь не стремимся.

Однако заметим, что в дальнейшем при доказательстве новых теорем мы до поры до времени будем опираться только на следующие четыре предпосылки:

1. Существует одна и только одна прямая, инцидентная с двумя точками.

2. Существует одна и только одна точка, инцидентная с двумя прямыми.

3. Существует осевая коллинеация с произвольно назначенными осью, центром и парой соответствующих точек, инцидентных вместе с центром одной прямой.

4. Существует центральная коллинеация с произвольно назначенными центром, осью и парой соответствующих прямых, инцидентных вместе с осью одной точке (предложения 3 и 4 доказываются далее в пунктах 61—71); так как первая и вторая пара этих предпосылок состоит из взаимно-двойственных утверждений, то и выводы из этих предпосылок будут попарно двойственны.

Таким образом, хотя принцип двойственности и не обоснован нами в полной мере, но пока в наше исследование не войдут новые предпосылки, мы имеем обоснованное право дублировать все доказываемые теоремы. [1]

Осевая и центральная коллинеация

57. В пункте 49 формулированы две важные теоремы, резюмирующие наше исследование об осевых коллинеациях. Первую теорему можно коротко выразить так:

Всякая осевая коллинеация является в то же время и центральной.

Вторая (двойственная ей) теорема гласит:

Всякая центральная коллинеация является в то же время и осевой.

58. Таким образом, рассматриваемое преобразование следует назвать *центрально-осевой коллинеацией*. Но это слишком длинный титул. Поэтому мы заменим его менее выразительным, но более кратким, и в дальнейшем центральную (она же осевая) коллинеацию будем большей частью именовать *гомологией* (реже — *перспективным преобразованием*).

59. Подытожим все известное нам о гомологиях.

Во всякой гомологии существует одна и только одна неизменная точка (центр), в которой пересекаются все собственно двойные

[1] Впрочем, нам придется еще предполагать, что плоскость достаточно богата точками и прямыми. Это несколько туманное замечание разъяснится впоследствии. Но как бы оно ни было истолковано, — предположение о том, что точки и прямые не принадлежат к числу „дефицитных“ объектов, не может отразиться на применении принципа двойственности, так как эта новая предпосылка в одинаковой степени относится к точкам и прямым.

прямые, и одна и только одна неизменная прямая (ось), на которой лежат все собственно двойные точки. Прямая, соединяющая пару соответственных (гомологичных) точек, является собственно двойной прямой (стало быть, проходит через центр). Точка пересечения соответственных (гомологичных) прямых является собственно двойной точкой (стало быть, лежит на оси).

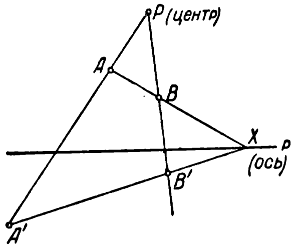


Рис. 27. Точка, гомологичная точке B, лежит: 1) на PB и 2) на $A'X$, т. е. на их пересечении.

Этих сведений достаточно, чтобы выполнить гомологичные преобразования.

60. Пусть, например, некоторая гомология, осью которой является прямая p, центром — точка P, преобразует точку A в A' (рис. 27). Требуется построить точку B', гомологичную произвольной точке B. Проведем прямую PB. Она является двойной прямой рассматриваемой гомологии (почему?). Значит, точка, гомологичная B, лежит на PB. Далее проведем прямую AB. Очевидно, точка, гомологичная B, лежит на прямой, гомологичной AB. Пусть прямая AB пересекает ось в точке X.

Рассматриваемая гомология преобразует

$$\begin{pmatrix} X, A \\ X, A' \end{pmatrix},$$

т. е. прямую XA в прямую XA'. Стало быть, точка B', гомологичная B, лежит на XA' и на PB, т. е. на их пересечении.

61. Указанное построение невыполнимо в одном случае, именно — если точка B лежит на прямой AA' (как на рис. 28). Это затруднение легко обойти. Возьмем произвольную точку C, лежащую вне прямой AA' и построим гомологичную ей точку C' (рис. 28, *I*). Затем, пользуясь тем, что точка C преобразуется в C', найдем точку, гомологичную B, совершенно так, как раньше (рис. 28, *II*). Предложим читателю выполнить построение.

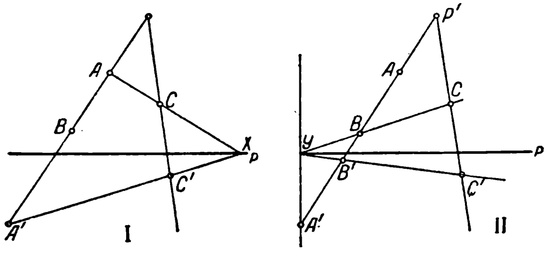


Рис. 28. Для построения точки, гомологичной точке B, предварительно построена вспомогательная пара гомологичных точек C, C'.

62. Легко также построить прямую k', гомологичную данной прямой k. Для этого достаточно выбрать на k две произвольные точки A и B и построить гомологичные им точки A' и B' (рис. 29). Построение упростится, если за одну из вспомогательных точек на прямой k взять точку ее пересечения с осью гомологии.

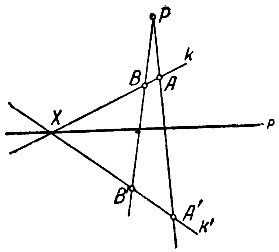


Рис. 29. Прямая k' гомологичная прямой k.

63. Предложим читателю выполнить и это построение, а также произвести следующие гомологичные преобразования:

1) Гомология с осью p и центром P преобразует прямую a в a'. Найдите точку, гомологичную произвольной точке A, и прямую, гомологичную произвольной прямой b.

2) Гомология с осью p и центром, лежащим на оси, преобразует A в A'. Построить: 1) точку B', гомологичную точке B, если B лежит вне прямой AA'; 2) точку C', гомологичную точке C, если C лежит на AA'; 3) прямую, гомологичную прямой k.

Теорема о свободе выбора элементов, определяющих гомологию

64. Из предыдущего видно, что гомология вполне определена, если задана ее ось, центр и пара гомологичных точек. Естественно являются вопросы:

1) Можно ли любую прямую плоскости выбрать в качестве оси гомологии?

2) Выбрав ось, можно ли еще любую точку назначить центром гомологии?

3) Выбрав ось и центр, можно ли еще любые две точки, лежащие на прямой, которая проходит через центр, считать гомологичными?

Чтобы ответить на эти вопросы, вернемся к тем пространственным соображениям, с которых мы начали эту книжку.

65. Будем снова рассматривать гомологичное преобразование плоскости α в самое себя как результат проектирования плоскости α на другую плоскость α' и последующего проектирования α' снова на α. Осью гомологии, которая устанавливается таким образом в плоскости α, является прямая пересечения плоскостей α и α'. Так как плоскость α' можно провести через любую прямую плоскости α, то на первый вопрос получается утвердительный ответ.

66. Чтобы ответить на второй вопрос, нужно выяснить, что представляет собой центр гомологии с пространственной точки зрения.

Если мы спроектируем плоскость α на α' из центра O_1, а затем обратно спроектируем α' на α из другого центра O_2 (рис. 30), то, очевидно, точка P, в которой прямая O_1O_2 пересекает плоскость α, в результате такого двойного проектирования, преобразуется сама в себя. Мало того, всякая прямая a плоскости α, проходящая через P, преобразуется сама в себя, так как проектирующая плоскость O_1a первого преобразования совпадает с проектирующей плоскостью O_2a второго преобразования. Таким образом, точка P является центром гомологии, полученной в плоскости α в результате двойного проектирования.

Итак, центр гомологии лежит на прямой, соединяющей оба центра проекций.

А так как центры проекций выбираются произвольно, то и на второй наш вопрос получаем утвердительный ответ.

67. Допустим наконец, что, выбрав плоскость проекции α' и прямую, соединяющую центры проекций PO, мы хотим спроектировать плоскость α на α' и затем обратно α' на α так, чтобы точка A в конечном счете была преобразована в точку A', произвольно взятую на PA (рис. 30). Для этого достаточно поступить так. Первый центр проекции выбираем произвольно на PO и проектируем из него точку A на плоскость α'. Получим точку A_1.

Второй центр проекции выберем так, чтобы точка A_1 проектировалась из него в точку A'. Это всегда возможно, если точка A' лежит на прямой PA. Значит, и на третий вопрос приходится ответить утвердительно.

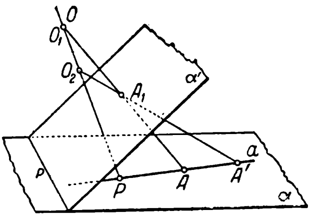


Рис. 30. Центр гомологии P лежит на прямой, соединяющей оба центра проекции O_1 и O_2.

68. Итак, можно произвольно выбрать ось гомологии; выбрав ось, можно еще произвольно выбрать центр; выбрав ось и центр, можно еще на любой прямой, проходящей через центр, произвольно выбрать пару гомологичных точек (лишь бы ни одна из них не совпадала с центром и не лежала на оси). На этом свобода выбора элементов, определяющих гомологию, заканчивается: ось, центр и пара гомологичных точек вполне определяют гомологичное преобразование, т. е. по этим данным можно построить точку, гомологичную любой точке, и прямую, гомологичную любой прямой плоскости.

69. Теорема, двойственная доказанной теореме о свободе выбора элементов, определяющих гомологию, гласит:

Можно произвольно выбрать центр гомологии; выбрав центр, можно еще произвольно выбрать ось; выбрав центр и ось, можно еще любые две прямые, пересекающиеся на оси, считать гомологичными (лишь бы ни одна из этих прямых не совпадала с осью и не проходила через центр).

Читатель, не применяя принципа двойственности, без труда убедится в том, что эта теорема является простым следствием только что доказанной теоремы.

70. Итак, если даны центр и ось гомологии, то вместо пары гомологичных точек, можно задать пару гомологичных прямых. Можно, конечно, определить гомологию другими элементами. Вместо оси, если известен центр и пара гомологичных прямых, можно задать пару гомологичных точек (не лежащих на заданных гомологичных прямых). Вместо центра, если известна ось и пара гомологичных точек, можно задать пару гомологичных прямых (не проходящих через заданные гомологичные точки), и т. д. Предлагаем читателю поупражняться в выполнении гомологичных преобразований, определенных теми или иными элементами.

71. Так как выбор центра, после того как ось уже выбрана, еще совершенно произволен, можно назначить центром какую-либо точку, лежащую на оси. Такие гомологии, у которых ось и центр инцидентны, мы будем называть *параболическими*, а гомологии, у которых центр и ось не инцидентны — *гиперболическими*.

Теорема Дезарга

72. Коль скоро заданы ось гомологии, центр и пара гомологичных точек, гомология, как мы видели, вполне определена, т. е. по этим данным легко построить точку, в которую данная гомология преобразует любую заранее назначенную точку плоскости. Если построена еще и в т о р а я пара гомологичных точек, то точка, гомологичная т р е т ь е й точке, может быть найдена двумя способами: 1) с помощью оси, центра и п е р в о й пары гомологичных точек и 2) с помощью оси, центра и в т о р о й пары гомологичных точек. Но так как точка, гомологичная данной, может быть только одна, то оба построения должны привести к одной и той же точке. Стало быть, искомая точка будет определена пересечением трех прямых.

Читатель должен выполнить оба построения и на опыте убедиться в справедливости сказанного.

73. Совокупность точек и прямых, возникающих в процессе такого построения, в котором точка с и з б ы т к о м определена как точка пересечения нескольких (более двух) прямых, или прямая с избытком определена как прямая, проходящая через несколько (более чем через две) точек, — называется к о н ф и г у р а ц и е й. (Заметим, что это определение конфигурации не совпадает с общепринятым.) Построение третьей пары гомологичных точек, как выше описано, приводит к интересной конфигурации о 10 точках и 10 прямых, расположенных таким образом, что на каждой прямой находятся три точки и через каждую точку проходят три прямые.[1]

74. Построение четвертой пары гомологичных точек может быть выполнено тремя способами, так что искомая точка будет определена пересечением 4 прямых. Предложим читателю выполнить построение и рассмотреть полученную конфигурацию. При еще большем числе точек получатся еще более сложные конфигурации. Однако, все они родственны простейшей из них — вышеупомянутой конфигурации о 10 точках и 10 прямых. Рассмотрим поэтому последнюю конфигурацию подробнее.

75. Обратим внимание на два гомологичных треугольника этой конфигурации: ABC и $A'B'C'$ (рис. 31). Можно доказать, что любые два треугольника ABC и $A'B'C'$, вершины которых лежат на трех

[1] Разумеется, речь идет только о точках и прямых, участвующих в построении.

прямых AA', BB' и CC', пересекающихся в одной точке P, гомологичны, т. е., что существует гомология, преобразующая

$$\begin{pmatrix} A, B, C \\ A', B', C' \end{pmatrix}.$$

Действительно, если такая гомология существует, то P ее центр, а точка пересечения прямых AB и $A'B'$ (назовем ее через X) лежит на оси; равным образом, и точка пересечения AC и $A'C'$ (назовем ее через Y) тоже лежит на оси. Зададим теперь гомологию с центром P и осью XY, преобразующую A в A'. Очевидно, AA' BB' и CC' — двойные прямые этой гомологии.

Таким образом, рассматриваемая гомология преобразует

$$YA \text{ в } YA' \text{ и } CC' \text{ в } CC',$$
$$\text{стало быть, } C \text{ в } C'.$$

С другой стороны, она преобразует

$$XA \text{ в } XA' \text{ и } BB' \text{ в } BB',$$
$$\text{стало быть, } B \text{ в } B',$$

т. е. точки A, A'; B, B' и C, C' действительно попарно гомологичны.

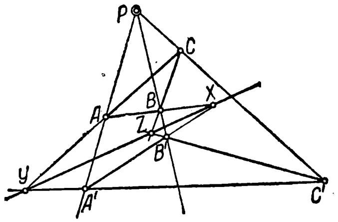


Рис. 31. Конфигурация 10 точек — P; A, B, C; A', B', C'; X, Y, Z — 10 прямых — XYZ; AB, BC, AC; $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$; AA', BB', CC'.

Но соответственные прямые гомологичных фигур попарно пересекаются на оси гомологии. Отсюда заключаем, что точка пересечения прямых BC и $B'C'$ (назовем ее через Z) лежит на одной прямой с точками X и Y, в которых попарно пересекаются другие две стороны рассматриваемых треугольников.

Мы пришли к новому взгляду на конфигурацию о десяти точках и десяти прямых:

Если вершины двух треугольников попарно расположены на трех прямых, пересекающихся в одной точке, то стороны их попарно пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой.

Это знаменитая теорема Дезарга, — одна из самых интересных теорем проективной геометрии. Применяя к ней принцип двойственности, получим обратную теорему:

Если стороны двух треугольников попарно пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой, то вершины их попарно расположены на трех прямых, пересекающихся в одной точке.

Сделав чертеж, читатель без труда убедится в том, что конфигурации, существование которых утверждают прямая и обратная теоремы Дезарга, представляют собой одну и ту же, уже знакомую нам конфигурацию о 10 точках и 10 прямых.

Построения с недоступными элементами

76. Выполняя гомологичные преобразования, иногда встречаешься с таким затруднением: прямые, пересечение которых ищется, не пересекаются в пределах чертежа. Это затруднение можно обойти, пользуясь большой долей произвола, которая имеется во всех наших построениях. Разберем вопрос систематически.

Две прямые одной плоскости пересекаются всегда, но точка их пересечения может оказаться практически „недоступной“; если прямые параллельны, точка их пересечения даже принципиально недоступна. Возникает вопрос, как провести прямую через недоступную точку и точку, лежащую в пределах чертежа (доступную), или как провести прямую через две недоступные точки. Задачи эти легко решаются метрическими средствами построения (т. е. если допустить построение р а в н ы х отрезков или углов). Но мы запрещаем себе пользоваться ими. Как решить поставленные задачи с помощью одной только линейки?

77. Займемся первой задачей: п р о в е с т и п р я м у ю ч е р е з о д н у н е д о с т у п н у ю и о д н у д о с т у п н у ю т о ч к у. Недоступную точку будем считать заданной парой пересекающихся в ней прямых a и b (рис. 32,I).

Итак, требуется провести прямую через доступную точку N и недоступную точку ab.

Задачу можно решить различными методами, например, так. Будем рассматривать одну из заданных прямых (скажем, a) как ось гомологии, а искомую прямую x — как гомологичную другой из заданных прямых (прямой b).

Итак, имеем ось a и пару гомологичных прямых $\begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix}$; можно еще произвольно выбрать центр; назовем его P. Проведем прямую PN. Она пересечет b в точке M, гомологичной точке N (почему?). Имеем, стало быть, ось a, центр P и пару гомологичных точек $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$. Возьмем на b произвольную точку L и построим гомологичную ей точку L'. Тогда, очевидно, задача будет решена, так как точка L' должна лежать на искомой прямой x. Но непосредственно построить точку, гомологичную L с помощью пары гомологичных точек $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ нельзя, так как точка пересечения прямой ML с осью a считается недоступной. Это затруднение обойдем, как всегда, построив предварительно вспомогательную пару гомологичных точек.

Итак, возьмем произвольную точку A (вне прямой b) и обычным путем построим гомологичную ей точку A' $\left[\text{с помощью пары гомологичных точек } \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}\right]$. Затем, с помощью пары гомологичных точек $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ найдем точку L', гомологичную L. Построение показано на рис 32,I. Прямая NL' является искомой.

Действительно, рассматриваемая гомология преобразует $\begin{pmatrix} M, & L \\ N, & L' \end{pmatrix}$, стало быть, она преобразует прямую ML в NL', а так как гомологичные прямые пересекаются на оси, то NL' проходит через точку ab.

78. Можно решить задачу и другим путем. Например, можно рассматривать данные прямые как гомологичные, а искомую прямую принять за ось. Тогда центр гомологии можно еще выбрать произвольно. Задача будет решена, если удастся построить еще одну точку оси, т. е. еще одну пару гомологичных прямых, не проходящих через N. Предлагаем читателю выполнить построение. Можно найти и другие пути решения, например, недоступную точку ab принять за центр гомологии.

Заметим, что решение ничуть не изменится, если недоступная точка ab будет бесконечно удаленной. Таким образом, мы умеем с помощью одной только линейки провести через заданную точку N прямую, параллельную паре параллельных прямых a, b (рис. 32, II).

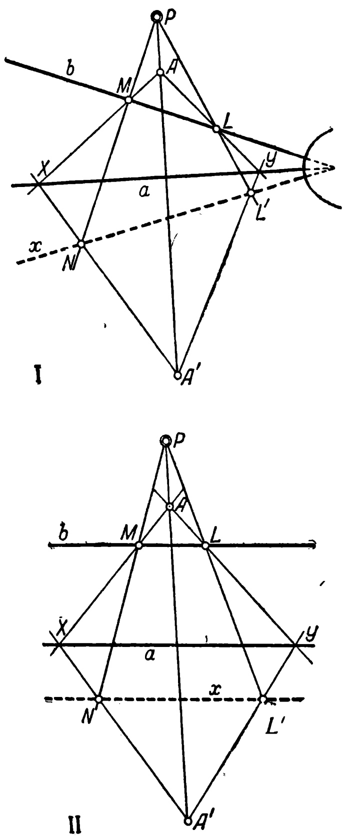


Рис. 32. I. Прямая x проходит через недоступную точку пересечения прямых a и b. II. Прямые a и b параллельны; прямая x проходит через точку их пересечения (бесконечно удаленную), т. е. параллельна им.

79. Перейдем ко второй задаче: п р о в е с т и п р я м у ю ч е р е з д в е н е д о с т у п н ы е т о ч к и.

Каждую недоступную точку будем, как раньше, считать заданной парой пересекающихся в ней прямых: a, b и c, d (рис. 33). Рассматриваем прямые a и b, а также c и d как гомологичные. Тогда искомая прямая x будет осью гомологии. Очевидно, точка ac преобразуется в bd. Таким образом, имеем ось x (недоступную) и пару гомологичных точек $\begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$. Центр можно еще выбрать произвольно на прямой $ac \cdot bd$. Назовём его через P. Если удастся построить еще одну пару гомологичных прямых, задача будет сведена к предыдущей, так как гомологичные прямые пересекаются на оси, и, стало быть, в нашем распоряжении окажется одна (доступная) точка искомой прямой. Если удастся построить две пары гомологичных прямых, задача будет полностью решена. Чтобы построить пару гомологичных прямых, достаточно построить две пары гомологичных точек. Возьмем произвольную точку A на прямой a; она преобразуется в точку A' (на b). Затем возьмем произвольную точку C на прямой c и построим гомологичную ей точку C' (на d). Прямая AC преобразуется в $A'C'$. Стало быть, точка их пересечения X лежит на оси.

Чтобы построить вторую пару гомологичных прямых, возьмем на a вторую произвольную точку B и преобразуем ее в B'. Прямая BC преобразуется в $B'C'$, и, стало быть, точка их пересечения Y лежит на оси. Прямая XY является искомой.

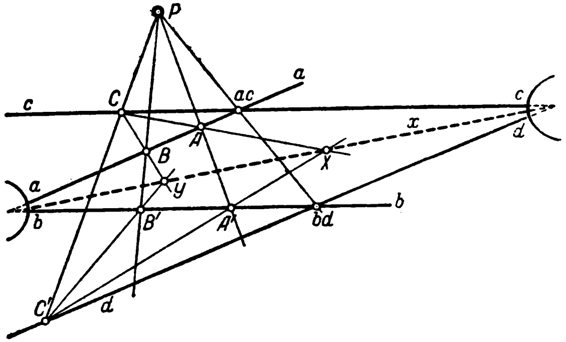


Рис. 33. Прямая x проходит через две недоступные точки ab и cd.

80. Усложним несколько предыдущую задачу: допустим, что точки ac и bd тоже недоступны. Перед нами задача: провести диагонали четырехугольника с недоступными вершинами. Предыдущее построение при этом отпадает, так как нельзя провести прямую $ac \cdot bd$, на которой выбран центр P. Однако задачу нетрудно свести к двум предыдущим.

Возьмем произвольную точку M (рис. 34) вне заданных прямых и соединим ее с недоступными точками ab и cd (первая) задача. Затем возьмем вторую произвольную точку N (тоже вне заданных прямых) и тоже соединим ее с ab и cd. Назовем прямую $M \cdot ab$ через a'; $M \cdot cd$ через c'; $N \cdot ab$ через b' и $N \cdot cd$ через d'. Недоступные точки ab и cd теперь определены прямыми a', b' и c', d', причем точки пересечения $a'c'$ и $b'd'$ доступны:

$$a'c' \equiv M \text{ и } b'd' \equiv N.$$

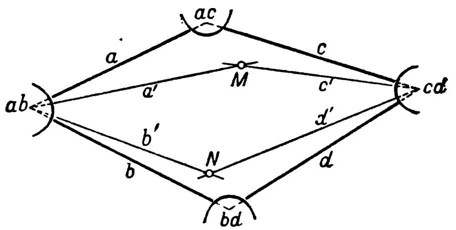


Рис. 34. Как провести диагональ четырехугольника с недоступными вершинами.

Задача сведена к предыдущей. Когда диагональ $ab \cdot cd$ (она же $a'b' \cdot c'd'$) будет проведена, вторую диагональ $ac \cdot bd$ легко построить по способу предыдущей задачи.

Итак, для решения нам пришлось четыре раза провести прямую через одну доступную и одну недоступную точку (первая задача) и два раза провести прямую через две недоступные точки (вторая задача).

81. Можно рассматривать также построения с недоступной прямой. Такие построения представляют особый интерес, так как одна прямая плоскости нам принципиально недоступна: мы говорим о бесконечно удаленной прямой.

Поставим себе задачу: построить точку пересечения недоступной и доступной прямой. Недоступную прямую будем считать заданной двумя доступными точками A и B (рис. 35).

Итак, требуется найти точку пересечения доступной прямой n и недоступной прямой AB. Задачу будем считать решенной, если удастся провести через искомую точку еще одну прямую x (кроме прямой n). Очевидно, эта задача двойственна задаче п. 77 и разрешима простым применением принципа двойственности к высказанным там соображениям.

Не усложняя решения по существу, можно потребовать еще, чтобы прямая x прошла через заранее заданную точку L. Таким образом приходим к задаче: провести прямую через доступную точку L и точку пересечения двух прямых n и AB, из которых одна (AB) недоступна.

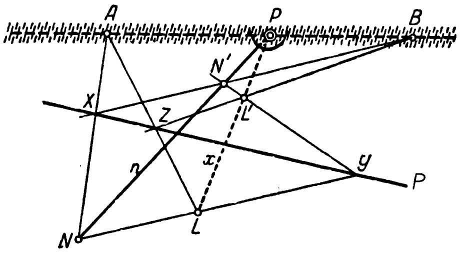


Рис. 35. Прямая x проведена через точку L и точку пересечения прямой n с недоступной прямой AB; точки A и B доступны.

Решение можно найти несколькими способами:

1) Можно рассматривать недоступную прямую AB как ось гомологии, а искомую прямую x как гомологичную прямой n; в этом случае центр гомологии еще может быть выбран произвольно.

2) Можно принять точку $n \cdot AB$ за центр гомологии, преобразующей $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$; в этом случае ось гомологии выбирается произвольно.

3) Можно принять прямую n за ось гомологии, преобразующей $\begin{pmatrix} L \\ A \end{pmatrix}$, а центр гомологии выбрать произвольно на прямой LA.

Решим задачу вторым способом, предоставив остальные два читателю. Итак, пусть точка $n \cdot AB \equiv P$ будет центром гомологии, преобразующей $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Произвольную прямую p назначим осью этой гомологии. Задача будет решена, если найдем точку L', гомологичную точке L, ибо прямая LL' пройдет через центр P.

Предварительно построим пару гомологичных точек на двойной прямой n. Для этого, выбрав на n произвольную точку N, проведем прямую ANX, где $X \equiv AN \cdot p$. Очевидно, прямая AX преобразуется в BX, стало быть, точка $N (\equiv AX \cdot n)$ преобразуется в точку $BX \cdot n$, которую мы назовем точкой N'. Теперь с помощью двух пар гомологичных точек $\begin{pmatrix} N \\ N' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ построим точку L', гомологичную L. Для этого, как всегда, проводим прямую LN до пересечения с осью в точке Y. Прямая NY преобразуется в $N'Y$, и точка L, лежащая на NY, — в какую-то точку, лежащую на $N'Y$. Аналогичное построение выполняем с парой гомологичных точек $\binom{A}{B}$: проведем прямую LA до пересечения с осью p в точке Z; прямая AZ преобразуется в BZ, а точка L, лежащая на AZ, — в какую-то точку на BZ.

Итак, L преобразуется в точку, лежащую на $N'Y$ и на BZ, стало быть, в точку их пересечения: $L' \equiv N'Y \cdot BZ$.

Задача решена, так как LL' есть искомая прямая.

82. Усложним нашу задачу: допустим, что точки A и B тоже недоступны и заданы каждая парой доступных прямых:

$$A \equiv a \cdot a' \text{ и } B \equiv b \cdot b' \qquad \text{(рис. 36, } I\text{).}$$

В этом случае предыдущее решение сохраняется полностью, но осложняется тем, что все прямые через A и B (AN, BX, LA, BZ) придется проводить как прямые, соединяющие недоступную точку с доступной, т. е. по способу задачи первой (п. 77).

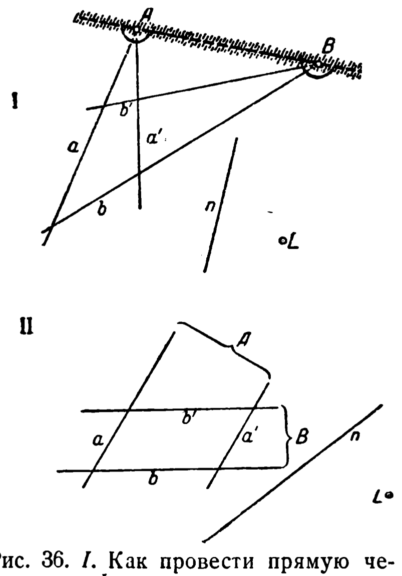


Рис. 36. *I*. Как провести прямую через точку L и точку пересечения прямой n с недоступной прямой AB; точки A и B недоступны. *II*. То же в частном случае, если прямая AB бесконечно удалена.

Важно отметить, что задача разрешима и в этом случае.

83. Пусть, в частности, недоступная прямая AB является бесконечно удаленной, так что точки ее A и B тоже бесконечно удалены, т. е. определяющие их пары прямых a, a' и b, b' — параллельны. Предыдущая задача примет такой вид:

Начерчен произвольный параллелограм (рис. 36, *II*); *через данную точку L провести прямую, параллельную данной прямой n*. На основании предыдущего можем утверждать, что построение выполнимо с помощью одной только линейки.

84. Мы занялись построениями с недоступными элементами, главным образом, для того, чтобы доставить читателю полезные упражнения в применении и выполнении гомологичных преобразований. Однако из нашего рассмотрения вытекает один вывод, представляющий и принципиальный интерес. В главе I мы ввели бесконечно удаленные элементы и указали на то, что в круге рассматриваемых нами идей *формально* нет разницы между бесконечно удаленными точками и обыкновенными точками плоскости. Сейчас выяснено, что не только формально, но даже в практических построениях бесконечно удаленные элементы ничем не отличаются от просто недоступных элементов, и что недоступность точки или прямой, участвующей в построении, не представляет собой принципиального затруднения для выполнения построения. Все построения, которыми мы занимаемся, сводятся к двум элементарным: 1) провести прямую через две заданные точки и 2) построить точку пересечения двух заданных прямых. Оба построения выполнимы с помощью единственного инструмента — линейки. Это очевидно, если заданные элементы (точки и прямые) доступны. Оказывается, что дело не изменяется, если некоторые из них недоступны, в частности, бесконечно удалены.

Равноправие бесконечно удаленных элементов со всеми прочими элементами в проективной геометрии идет глубже формального отождествления тех и других. Особая роль бесконечно удаленных элементов обнаруживается только с метрической точки зрения; это выяснится подробнее в следующем параграфе.

Некоторые частные виды гомологий

85. Рассмотрим несколько частных видов гомологий. В некоторых из них читатель, вероятно не без удовольствия, узнает добрых старых знакомых.

Начнем с гомологии, осью которой является бесконечно удаленная прямая. На первый взгляд задача исследовать такую гомологию может испугать: поди, достань ее — эту бесконечно удаленную ось, которая не то существует только в воображении, не то лежит где-то за пределами досягаемости... В действительности же ничего сложного здесь нет.

Гомологические прямые пересекаются на оси гомологии — в данном случае на бесконечно удаленной прямой. В переводе на обычный язык это значит, что они параллельны, — в этом и заключается характерная особенность рассматриваемых гомологий. Таким образом, гомология с бесконечно удаленной осью, — это простонапросто гомология, преобразующая любую прямую плоскости в параллельную ей прямую.

86. Коль скоро задана ось гомологии, центр может быть еще выбран произвольно. Пусть центром гомологии с бесконечно удаленной осью будет какая-либо точка, не лежащая на оси, т. е. не бесконечно удаленная, например P. Выбрав ось и центр, можно еще любую пару параллельных (почему?) прямых, например a и a', считать гомологичными (рис. 37). Предлагаем читателю подвергнуть рассматриваемому преобразованию какую-либо фигуру, например треугольник. Узнаете ли вы это преобразование? Оно превращает каждую фигуру в подобную ей (и подобно расположенную) фигуру. *Значит, гиперболическая гомология с бесконечно удаленной осью* оказывается хорошо известным из метрической геометрии *преобразованием подобия.*

87. Рассмотрим еще *параболические гомологии с бесконечно удаленной осью,* т. е. такие, у которых и центр является бесконечно удаленным. Эти гомологии тоже преобразуют каждую прямую плоскости в параллельную ей прямую, но кроме того собственно-двойные прямые в данном случае пересекаются в бесконечно удаленной точке (центре гомологии), т. е. параллельны между собой. Каждая

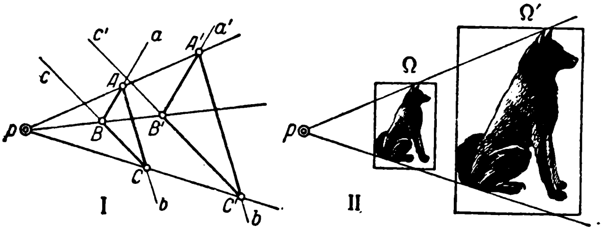


Рис. 37. Гиперболическая гомология с бесконечно удаленной осью есть преобразование подобия. Треугольники ABC и $A'\ B'\ C'$ подобны, так как соответственные стороны их параллельны.

фигура преобразуется в равную ей фигуру: фигура как бы переносится вдоль двойных прямых в новое положение (рис. 38). Таким образом, параболическая гомология с бесконечно удаленной осью есть *прямолинейное перенесение.*

88. Обе рассмотренные нами гомологии преобразуют параллельные прямые в параллельные же прямые. Нет ли еще и других видов гомо-

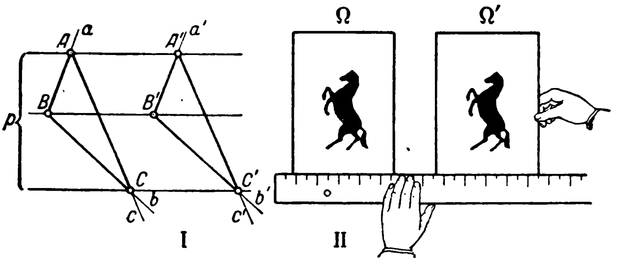


Рис. 38. Параболическая гомология с бесконечно удаленной осью есть прямолинейное перенесение: $AB \parallel A'B'$; $AA' \parallel BB'$; стало быть, отрезки AB и $A'B'$, а также AA' и BB' равны.

логий, сохраняющих параллельность прямых? Нетрудно найти ответ на этот вопрос. Гомологии, сохраняющие параллельность, — это, в переводе на язык проективной геометрии, такие гомологии, которые преобразуют бесконечно удаленные точки снова в бесконечно удаленные точки. Но все бесконечно удаленные точки плоскости лежат на одной бесконечно удаленной прямой. Значит, в интересующих нас гомологиях бесконечно удаленная прямая должна быть двойной прямой. Это условие является необходимым и достаточным. Оно распадается на два:

1) бесконечно удаленная прямая представляет собой неизменную прямую гомологии, т. е. является ее осью, или

2) бесконечно удаленная прямая представляет собой собственно-двойную прямую, т. е. центр гомологии является бесконечно удаленной точкой.

Мы уже рассмотрели гомологии первого типа, т. е. с бесконечно удаленной осью, — и притом двух видов: 1) гиперболические, — когда центр лежит вне оси (гомологии оказались преобразованиями подобия) и 2) параболические, т. е. когда центр лежит на оси (гомологии оказались прямолинейными перенесениями). Рассмотрим таким же образом гомологии второго типа, т. е. с бесконечно удаленным центром.

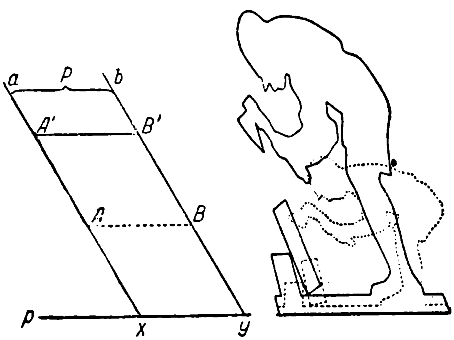


Рис. 39. Гиперболическая гомология с бесконечно удаленным центром есть растяжение.

Все собственно-двойные прямые гомологии проходят через центр. Если центр бесконечно удален, все собственно-двойные прямые параллельны, — это характерная особенность рассматриваемых гомологий.

89. Начнем с гиперболических гомологий этого типа. Пусть p — ось, а параллельные прямые a и b двойные прямые гомологии (рис. 39). Двойные прямые определяют собой центр — в данном случае он является их общей бесконечно удаленной точкой. Выбрав ось и центр, можно еще произвольную пару точек двойной прямой считать гомологичными. Пусть гомология преобразует точку A и A'. Мы умышленно выбираем обе гомологичные точки по одну сторону оси. Ясно, что наша гомология преобразует параллелограм $XABY$ в параллелограм $XA'B'Y$ (параллельность сохраняется!). Параллелограм $XABY$ как бы растянут вдоль двойных прямых, так что каждый отрезок, параллельный двойным прямым, удлинен в одинаковое число раз (на нашем рисунке вдвое), а отрезки, параллельные оси, не изменили своей длины. Рассматриваемое преобразование есть растяжение плоскости вдоль двойных прямых. Если представить себе, что плоскость сделана из тонкой резины, прикрепленной к неподвижному стержню p — оси гомологии, — и растягивается равномерно вдоль двойных прямых, то получится как раз такое преобразование плоскости, какое производит интересующая нас гомология (рис. 40). Поэтому такая гомология называется *растяжением*.

90. Перейдем к последнему виду гомологий, сохраняющих параллельность, — к параболическим гомологиям с бесконечно удаленным центром. В этом случае не только все собственно двойные прямые параллельны, но и ось p параллельна им (имеет общую с ними бесконечно удаленную точку — именно центр). Пусть рассматриваемая

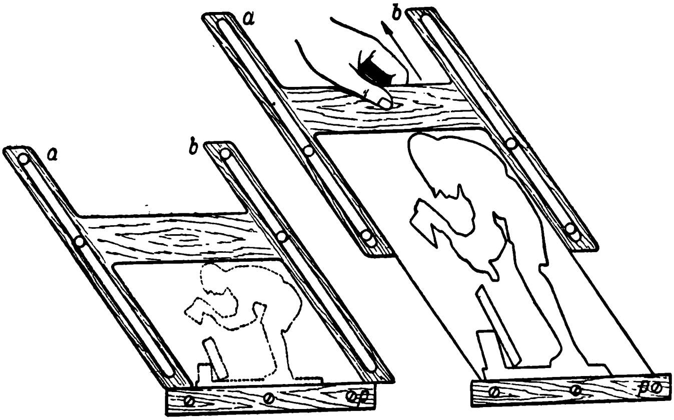


Рис. 40. Растяжение.

гомология преобразует точку A в A' (рис. 41). Тогда она преобразует параллелограм $XABY$ в параллелограм $XA'B'Y$. Представим себе попрежнему, что плоскость сделана из тонкой резины, прикрепленной к неподвижной оси p, и что эта резина приколочена еще к стержню a, параллельному оси (рис. 42). Если теперь передвигать стержень a вдоль самого себя (так что его расстояние от оси не будет изменяться),

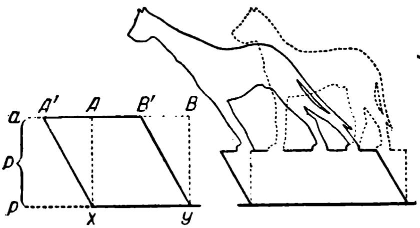


Рис. 41. Параболическая гомология с бесконечно удаленным центром есть сдвиг.

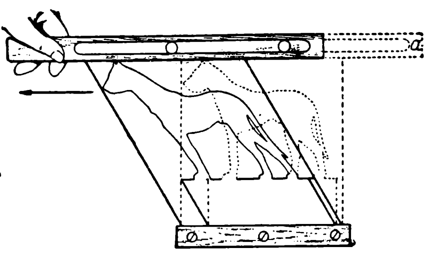


Рис. 42. Сдвиг.

то получится как раз такое преобразование плоскости, которое производит интересующая нас гомология. Это преобразование называют *сдвигом*. Итак, *параболическая гомология с бесконечно удаленным центром является сдвигом*.

Всего, стало быть, мы обнаружили четыре вида гомологий, сохраняющих параллельность: прямолинейное перенесение, преобразование подобия, растяжение и сдвиг. Не рассмотренным оказался пятый вид, отличающийся от растяжения тем, что гомологичные точки лежат по разные стороны оси.

91. В п. 38 был указан простой способ, как осуществить гомологичное преобразование тени какой-либо плоской фигуры. Предлагается читателю указать, как следует передвигать источник света, чтобы тень была подвергнута: 1) растяжению, 2) сдвигу. Как следует расположить картонную фигуру и как передвигать источник света, чтобы тень этой фигуры подвергалась: 1) преобразованию подобия, 2) прямолинейному перенесению? Почему сдвиг и растяжение тени можно получить при любом положении отбрасывающей тень фигуры, а прямолинейное перенесение и преобразование подобия не при любом? Чтобы ответить на последний вопрос, вспомните, что два последних преобразования представляют собой гомологии с бесконечно удаленной осью.

92. *Гомологии, сохраняющие параллельность, называют аффинными.* Мы выяснили, что они имеют либо бесконечно удаленную ось (преобразование подобия), либо бесконечно удаленный центр (растяжения и сдвиги), либо и ось и центр бесконечно удаленные (прямолинейные перенесения). Таким образом, аффинная гомология есть гомология с недоступным центром или с недоступной осью, или с недоступным центром и осью.

93. Мы умеем выполнять построения с недоступными элементами с помощью одной только линейки. Значит, все аффинные гомологии могут быть выполнены с помощью одной только линейки, если задана бесконечно удаленная прямая плоскости, т е. если в плоскости чертежа начерчен параллелограм (п. 83). В частности, с помощью одной только линейки и начерченного параллелограма можно перенести фигуру параллельно самой себе или построить фигуру, подобную и подобно ей расположенную.

Мы вынуждены ограничиться здесь приведенным доказательством выполнимости построения, отсылая читателя за дальнейшими подробностями к книге Н. Ф. Четвертухина „Методы геометрических построений“ (Москва, 1938 г.), или к книге А. Адлера „Теория геометрических построений“ (Одесса, 1909 г.).

Построения с помощью одной только линейки называют построениями Штейнера по имени известного геометра, систематически изучившего их. Мы еще вернемся к ним в последней главе.

Измерение расстояний по картине

94. Сейчас мы извлечем практическую пользу из установленного выше проективного взгляда на прямолинейные перенесения. Именно, мы научимся производить некоторые измерения на картинах.

Если спроектировать плоскость α на плоскость α', то равные фигуры плоскости α изобразятся в плоскости α', вообще говоря, неравными фигурами: при проектировании равенство не сохраняется. Точно так же не сохраняется и подобие: проекции подобных фигур не подобны. Но гомологичные фигуры, как легко понять, преобразуются проектированием в гомологичные же фигуры. Действительно, две фигуры Ω и Ω' гомологичны, если соответственные прямые их пересекаются на одной прямой (оси гомологии), а прямые, соединяю-

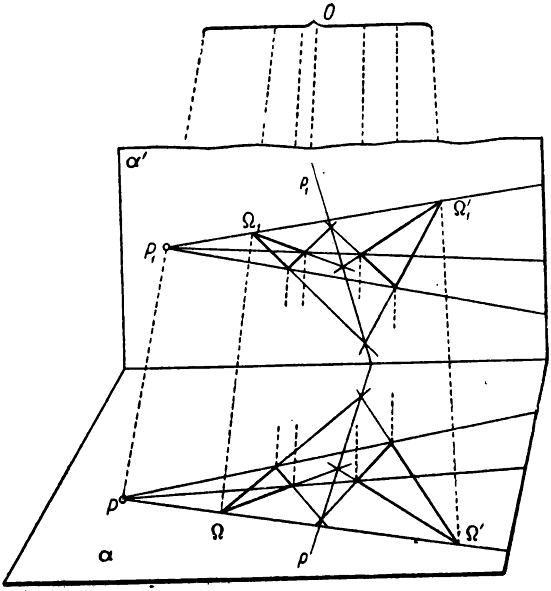


Рис. 43. При проектировании гомологичность сохраняется. Подробно об этом см. пп. 133—135.

щие соответственные точки, проходят через одну точку (центр гомологии). Проекции таких фигур, очевидно, обладают теми же свойствами (рис. 43). Значит, гомологичность при проектировании сохраняется. Можно сказать, что при проектировании плоскости α на плоскость α' всякая гомология на плоскости α преобразуется в гомологию на плоскости α'; ось первой гомологии преобразуется в ось второй гомологии, центр первой — в центр второй, соответственные элементы первой — в соответственные элементы второй. В частности, прямолинейное перенесение в плоскости α изобразится на плоскости α' в виде параболической гомологии, осью которой является проекция на плоскость α' бесконечно удаленной прямой плоскости α.

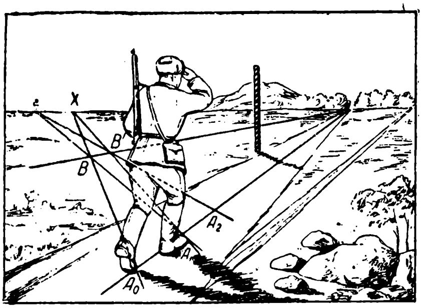


Рис. 44. Для построения точки A_2 применена произвольная точка B (см. п. 60).

95. Взгляните теперь на рис. 44, где изображена равнина, пересеченная несколькими дорожками. Линия горизонта на рисунке есть изображение бесконечно удаленной прямой равнины. Значит, всякое прямолинейное перенесение на равнине должно быть изображено на нашем рисунке в виде параболической гомологии, осью которой является линия горизонта. Зная это, легко найти на рисунке точку, в которую придет человек, шагающий по дороге, сделав 1, 2, 3 и т. д. шагов. Первый шаг перемещает его из точки A_0 в точку A_1. Второй шаг перенесет пешехода в такую точку A_2, в которую параболическая гомология, имеющая осью линию горизонта и преобразующая A_0 в A_1, преобразует точку A_1. Построение точки A_2 показано на рис. 44. Предложим читателю найти точки A_3, A_4 и т. д., в которые придет человек, сделав три, четыре и т. д. шагов. Нетрудно также узнать, через сколько шагов дойдет он до верстового столба, или вообще измерить в шагах любое расстояние вдоль его дороги. Но сейчас мы не можем повернуть нашу меру длины (шаг) для того, чтобы производить измерения в другом направлении, например, вдоль боковой тропинки, показанной на рисунке. Когда нам удастся разгадать, что́ такое вращение с проективной точки зрения, это затруднение будет преодолено.

Воображаемый мир

96. Интересно взглянуть на рис. 44 с такой точки зрения: вообразим, что это не рисунок равнины, а настоящая равнина. Дело сводится к тому, что линию горизонта мы примем за настоящую бесконечно удаленную прямую, а не за изображение такой прямой.

Иначе говоря, совершенно произвольную прямую плоскости будем считать (или по крайней мере — называть) бесконечно удаленной прямой.

Читатель, если вам кажется странным это предложение, вспомните прекрасное детское слово „нарочно“. Любая палка может быть „нарочной“ лошадью, любой пень — „нарочным“ зверем. Наша „нарочная“ „бесконечно удаленная прямая“ сыграет роль настоящей бесконечно удаленной прямой. Точки, лежащие на воображаемой „бесконечно удаленной“ прямой, мы должны считать „бесконечно удаленными“, а прямые, которые пересекаются в „бесконечно удаленной“ точке, — „параллельными“ (рис. 45). Очевидно через любую точку нашей воображаемой равнины можно провести одну, и только одну, прямую, „параллельную“ данной, — совсем, как на настоящей равнине.

Параболические гомологии, осью которых является воображаемая „бесконечно удаленная“ прямая, следует назвать „прямолинейными перенесениями“.

Представим себе некое подвижное двуногое существо, живущее в плоскости чертежа, которое передвигается посредством таких „прямолинейных перенесений“. Это существо (человечек) может перейти из любой точки плоскости в любую другую точку ее (не считая „бесконечно удаленных“ — о них речь впереди).

Рассмотрим путешествие нашего человечка вдоль прямой a (рис. 45, *II*). Точка отправления — A_0. Допустим, что один шаг переносит человечка из точки A_0 в точку A_1, т. е., что каждый шаг перемещает его так, как параболическая гомология с „бесконечно удаленной осью“, преобразующая A_0 в A_1. Куда попадает наш путник, шагнув вторично? Очевидно, в ту точку A_2, в которую только что упомянутая гомология преобразует точку A_1.

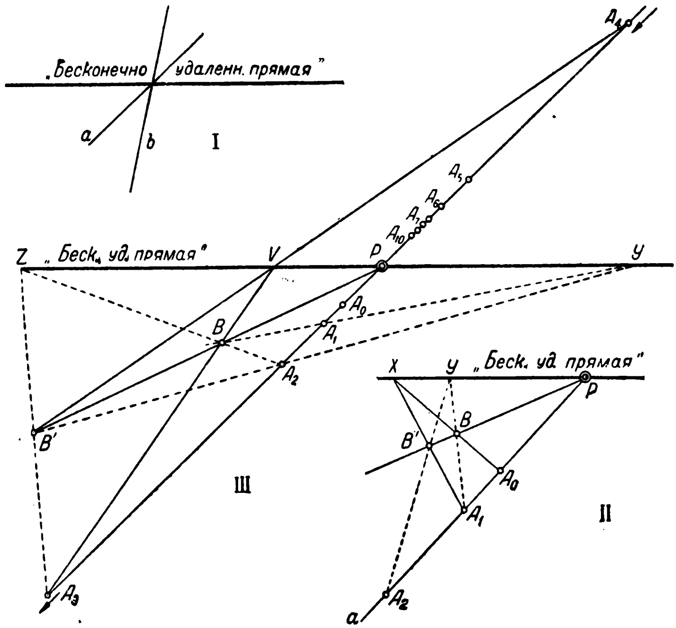


Рис. 45. *I*. Прямые a и b „параллельны“. *II*. Для построения точки A_2 применена произвольная точка *B*. *III*. Частью применена фигура *II* в уменьшенном масштабе.

97. Третий шаг приводит человечка в A_3 (рис. 45, *III*), но на четвертом шаге происходит катастрофа: путник разрывается. Как видно из чертежа, он должен поставить ногу в точку A_4. И вот, представьте себе положение существа, которое еще не успело принять одну ногу из точки A_3, а другую уже ставит в A_4, перешагнув буквально через весь мир.

Однако наш человечек не обращает внимания на это затруднение и продолжает шагать дальше: A_5, A_6... Он уже почти совершил кругосветное путешествие и как будто приближается к исходной точке. Пожалуй, еще несколько шагов и путник дома... Но нет, шаги делаются все меньше и меньше, вот он в A_7, A_8, A_9..., и вы уже начинаете понимать, что путешественник никогда не вернется домой, если будет шагать все вперед и вперед, что на пути его лежит „бесконечно удаленная“ прямая, до которой ему **н и к о г д а** не добраться.

Как видите, „нарочная“ „бесконечно удаленная“ прямая прекрасно играет свою роль: она недостижима, — никаким числом „равных“ шагов невозможно подойти к ней.

Теперь понятно также, почему наш человечек так легко перешагнул через настоящую бесконечно удаленную прямую: с того момента, как роль бесконечно удаленной прямой возложена на другую прямую, прежняя бесконечно-удаленная прямая перестала быть недосягаемой; для нашего человечка она ничем не отличается от всякой иной прямой.

98. Итак, кругосветное путешествие в плоскости с воображаемой бесконечно удаленной прямой невозможно. Чтобы вернуться домой, путешественник должен шагать назад: из A_{10} в A_9, из A_9 в A_8 и т. д.

Можно попытаться подойти к „бесконечно удаленной“ прямой с другой стороны, двигаясь вправо от A_0. Предоставим читателю убедиться в том, что и эта попытка осуждена на неудачу.

99. Человечек наш, конечно, глубоко убежден, что все шаги его равны. Он измеряет ими расстояния на своем пути. От A_0 до A_3 — три шага; от A_3 до A_4 совсем близко, — всего один шаг. От A_4 до A_{10} — 6 шагов.

Человечек может взять землемерную цепь и, волоча ее за собой, произвести любые измерения на прямой a.

100. Но вот он переходит на другую прямую, не параллельную a. Надо бы, повернув цепь, положить ее вдоль нового пути. Но увы, в нашем мире нет вращения. Здесь возможен только один вид движений: прямолинейные перенесения, т. е. параболические гомологии с бесконечно удаленной осью. Такие гомологии преобразуют любую прямую с той же „бесконечно удаленной“ точкой, т. е. переносят ее „параллельно“ самой себе (рис. 46). Поэтому наш человечек, двигаясь по новой прямой, не волочит цепь за собой, как раньше, а несет ее поперек дороги. В таком виде она, конечно, совершенно непригодна для того, чтобы измерять пройденные расстояния, и человечек вынужден взять новую цепь. Но он не может сравнить ее со старой, чтобы новые измерения делать в прежних мерах. Для каждой прямой ему придется устанавливать единицу длины заново и совершенно произвольно. А шаги? — спросит читатель. Да и шаги вдоль новой дороги несравнимы со старыми. Человечек и сам не может повернуться и стать лицом в ту сторону, куда он идет, а вынужден, глядя в направлении, параллельном прежнему, шагать по дороге бочком. Мы забыли сказать, что ранее, на обратном пути от A_{10} в A_0, он тоже передвигался не совсем обычно — пятясь задом наперед.

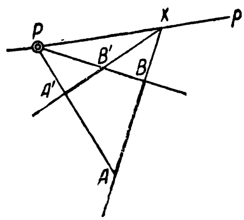


Рис. 46. Гомология с центром P и „бесконечно удаленной“ осью p преобразует отрезок AB в $A'B'$. Эти отрезки „равны“ и „параллельны“.

101. Все эти неудобства, связанные с жизнью в нашем воображаемом мире, вовсе не неизбежны. Они являются следствием не основных дефектов конструкции его, а представляют собой результат того, что построение этого мира еще не закончено: ему нехватает вращения. Чтобы восполнить этот пробел, мы должны прежде всего выяснить, что такое вращение с проективной точки зрения, т. е. каковы характерные особенности коллинеации, называемой вращением. Это одна из главных задач последующего изложения.

102. Как ни необычен мир с „нарочной“, „бесконечно удаленной“ прямой, вам не раз, вероятно, приходилось видеть его собственными глазами. Когда на экране кино появляется широкая равнина, по которой мчатся автомобили или скачут всадники — перед вами наш воображаемый мир. Линия горизонта — его бесконечно удаленная прямая. Скачущие всадники передвигаются по экрану посредством параболических гомологий, осью которых является линия горизонта. Но всадники не только перемещаются прямолинейно: они умеют и поворачиваться. Секрет этого движения нам еще предстоит разгадать.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

УМНОЖЕНИЕ ГОМОЛОГИЙ

Произведение преобразований

103. Фигуру можно подвергнуть гомологичным (или каким-либо иным) преобразованиям несколько раз подряд: преобразовав фигуру Ω в Ω', можно затем преобразовать Ω' в Ω'', потом Ω'' в Ω''' и т. д. В предыдущей главе точка A_0 была подвергнута 10 раз подряд одной и той же параболической гомологии. Изучению таких цепей преобразований (главным образом гомологий) будет посвящена настоящая глава.

104. Чтобы отличать преобразования одно от другого, будем обозначать их буквами греческого алфавита: π (пи), ρ (ро), σ (сигма) и т. д.

Если некоторое преобразование π преобразует фигуру Ω в Ω', а другое преобразование ρ преобразует Ω' в Ω'', то последовательно выполнив эти преобразования одно за другим — сперва π, затем ρ, мы тем самым преобразуем Ω сперва в Ω', а затем в Ω''. Полученное таким путем преобразование фигуры Ω в Ω'' называют *произведением* преобразований π и ρ и обозначают через $\pi\rho$. Итак, если

$$\pi \text{ преобразует } \Omega \text{ в } \Omega'$$

и

$$\rho \text{ преобразует } \Omega' \text{ в } \Omega'',$$

то

$$\pi\rho \text{ преобразует } \Omega \text{ в } \Omega''.$$

105. Сказанное относится не только к гомологиям, но к любым одно-однозначным преобразованиям. Если, например, π и ρ — два движения, причем π преобразует фигуру Ω в Ω', а ρ преобразует Ω' в Ω'', то произведением обоих движений называют такое преобразование, которое преобразует фигуру Ω в Ω''.

Из повседневного опыта вы знаете, что два последовательных передвижения можно заменить одним передвижением: если одно движение преобразует $\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)$, а другое преобразует $\left(\frac{\Omega'}{\Omega''}\right)$, то существует движение, преобразующее $\left(\frac{\Omega}{\Omega''}\right)$.

Значит, произведение двух движений есть движение.

Это одна из характерных особенностей движения.

Если рассмотреть частный случай движения — прямолинейные перенесения, то окажется, что и эти преобразования обладают подобным же свойством: произведение двух прямолинейных перенесений есть прямолинейное перенесение (рис. 47, *I*). Иначе обстоит дело с вращениями: произведение двух вращений вокруг разных центров не всегда является вращением (рис. 47, *II*). Подробнее об этом будет речь впереди.

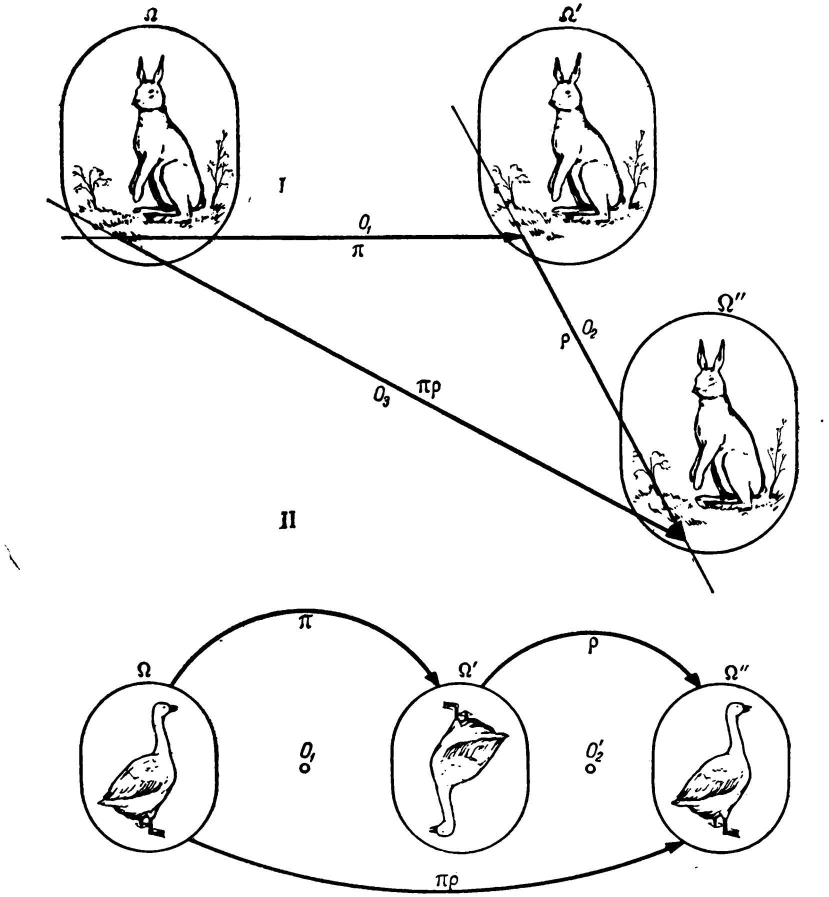


Рис. 47. *I*. Прямолинейное перенесение π вдоль прямой O_1 преобразует рисунок Ω в Ω'; затем прямолинейное перенесение ρ вдоль прямой O_2 преобразует Ω' в Ω''. Значит, произведение обоих прямолинейных перенесений $\pi\rho$ преобразует Ω в Ω''. Такое преобразование можно получить посредством одного прямолинейного перенесения вдоль прямой O_3. *II*. Полуоборот π вокруг центра O_1 преобразует рисунок Ω в Ω'; затем полуоборот ρ вокруг центра O_2 преобразует Ω' в Ω''. Такое преобразование нельзя получить посредством одного полуоборота. Значит, произведение обоих полуоборотов $\pi\rho$ преобразует Ω в Ω''.

106. Умножение двух преобразований по существу не имеет, конечно, ничего общего с умножением чисел. Но в математике иногда бывает полезно давать разным вещам одно имя и одной вещи разные имена. Пример тому, как одинаковые вещи получают разные имена, мы имели в предыдущей главе: преобразование, именуемое обычно прямолинейным перенесением, в результате наших исследований получило второе имя: „параболическая гомология с бесконечно удаленной осью". Два математических имени у одной и той же вещи свидетельствуют о том, что данная вещь может трактоваться двояко, что она, так сказать, лежит на пересечении двух рядов математических идей. Примеры того, как разные вещи получают одно имя, вы встречали в начальном курсе арифметики. Вспомните, чтó такое умножение на целое число и чтó представляет собой умножение на дробь. Это — разные вещи: в одном случае множимое берется слагаемым несколько раз, во втором случае определяется некоторая часть множимого. Обе операции получили одно и то же название потому, что обе они обладают сходными свойствами:

1) для обеих имеет силу закон сочетательный (ассоциативность), именно:

вместо того чтобы умножить a на b и полученное произведение умножить на c, можно умножить a на произведение bc:

$$(ab)\,c = a\,(bc);$$

2) для обеих имеет силу переместительный закон (коммутативность):

от изменения порядка сомножителей, произведение не изменяется:

$$ab = ba;$$

и т. д.

Вообще, одинаковые имена даются в математике разным вещам для того, чтобы подчеркнуть их сходство.

107. Какое же сходство существует между умножением чисел и умножением преобразований? Произведение двух чисел есть число. Произведение двух преобразований есть преобразование. Произведение чисел ассоциативно, т. е. подчиняется сочетательному закону

$$(ab)\,c = a(bc).$$

Тот же закон имеет силу и для произведения преобразований. В самом деле, пусть π, ρ, σ—три произвольных преобразования, причем

$$\pi \text{ преобразует } \left(\frac{A}{A'}\right),$$

$$\rho \text{ преобразует } \left(\frac{A'}{A''}\right)$$

и

$$\sigma \text{ преобразует } \left(\frac{A''}{A'''}\right).$$

Построим произведения $(\pi\rho)\,\sigma$ и $\pi\,(\rho\sigma)$ и сравним их между собой. Очевидно,

$$\pi\rho \text{ преобразует} \left(\frac{A}{A''}\right),$$

поэтому

$$(\pi\rho)\sigma \text{ преобразует } \left(\frac{A}{A'''}\right).$$

С другой стороны,

$$\rho\sigma \text{ преобразует } \left(\frac{A'}{A'''}\right).$$

Значит,

$$\pi(\rho\sigma) \text{ преобразует } \left(\frac{A}{A'''}\right).$$

Таким образом, оба произведения $[(\pi\rho)\,\sigma$ и $\pi\,(\rho\sigma)]$ преобразуют любую точку A в одну и ту же точку A''', т. е. оба преобразования совпадают:

$$(\pi\rho)\sigma = \pi(\rho\sigma).$$

Значит, произведение преобразований, подобно произведению чисел, ассоциативно.

В дальнейшем мы не раз будем иметь случай подчеркнуть черты сходства (и различия) между умножением интересующих нас преобразований и чисел.

Умножение коллинеаций

108. Произведение двух, а, стало быть, и нескольких, гомологий обладает такими свойствами: 1) оно преобразует точку в точку, 2) прямую в прямую, 3) сохраняет инцидентность точек с прямыми. Короче говоря, произведение гомологий есть одно-однозначное точечное преобразование плоскости в самое себя, сохраняющее коллинейность точек. Еще короче: произведение гомологий есть коллинеация.

Совершенно очевидно, что произведение двух коллинеаций есть коллинеация. Далее, произведение коллинеаций ассоциативно.

Этим, как сейчас будет показано, не исчерпывается сходство умножения коллинеаций с умножением чисел.

109. Если коллинеация π преобразует A в A', B в B' и т. д., то преобразование π', которое возвращает обратно A' в A, B' в B и вообще уничтожает действие коллинеации π, снова водворяя на прежнее место каждую точку, — тоже, как легко понять, представляет собой коллинеацию. Ее называют коллинеацией обратной π. Ясно, что π, в свою очередь, есть коллинеация, обратная π'. Произведение двух взаимно обратных коллинеаций преобразует каждую точку плоскости в самое себя, ибо, если одна из них преобразует X в X', то другая снова возвращает X' в X.

Преобразование, которое оставляет каждую точку плоскости на своем месте, т. е. преобразует каждую точку в самое себя, тоже является коллинеацией (почему?), именно тождественной коллинеацией. Обозначив ее через I, можем записать:

$$\pi \cdot \pi' = I.$$

110. Тождественная коллинеация, как легко понять, удовлетворяет соотношению

$$\rho \cdot I = \rho, \tag{1}$$

где ρ — произвольная коллинеация, так как преобразование I ничего не изменяет в перемещении точек и прямых, произведенном коллинеацией ρ.

Точно так же

$$I \cdot \rho = \rho. \tag{1'}$$

Обратите внимание на то, что тождественное преобразование I играет при умножении преобразований такую же роль, как единица при умножении чисел.

Действительно, для чисел имеем

$$a \cdot 1 = a \text{ и } 1 \cdot a = a,$$

что совершенно аналогично равенствам (1) и (1′). Поэтому тождественное преобразование часто обозначается тем же знаком, как единица в арифметике. Именно, вместо I пишут 1. Здесь снова разные вещи (единица и тождественное преобразование) обозначаются одним именем (символом).

Итак, произведение двух взаимно обратных коллинеаций равно 1:

$$\pi \cdot \pi' = 1.$$

В арифметике два числа, произведение которых равно 1, тоже называют взаимно обратными. Число, обратное числу a, обозначают через $\frac{1}{a}$ или a^{-1}. Совершенно так же коллинеацию, обратную коллинеации π, обозначают через $\frac{1}{\pi}$ или π^{-1}.

Значит, для коллинеаций, как и для чисел,

$$\pi \cdot \pi^{-1} = 1.$$

Коллинеация, обратная данной, может быть только одна. Это вытекает из ее определения.

111. Произведение коллинеации на самое себя называют второй степенью или квадратом ее (как в арифметике):

$$\pi \cdot \pi = \pi^2.$$

Точно так же

$$\pi \cdot \pi \cdot \pi = \pi^3,$$

и вообще

$$\underbrace{\pi \cdot \pi \cdot \pi \ldots \pi}_{n \text{ раз}} = \pi^n.$$

Разумеется, любая степень коллинеации представляет собой коллинеацию.

112. Укажем сейчас на одно существенное различие между умножением коллинеаций и умножением чисел. Произведение чисел коммутативно: от изменения порядка сомножителей произведение не меняется. Произведение коллинеаций не всегда коммутативно, т. е. не всегда

$$\pi\rho = \rho\pi.$$

Вот что это значит. Если сперва произвести преобразование π, а затем ρ, то результат часто будет не тот, который получился бы, если бы эти же преобразования были выполнены в обратном порядке: сперва ρ, потом π (рис. 48).

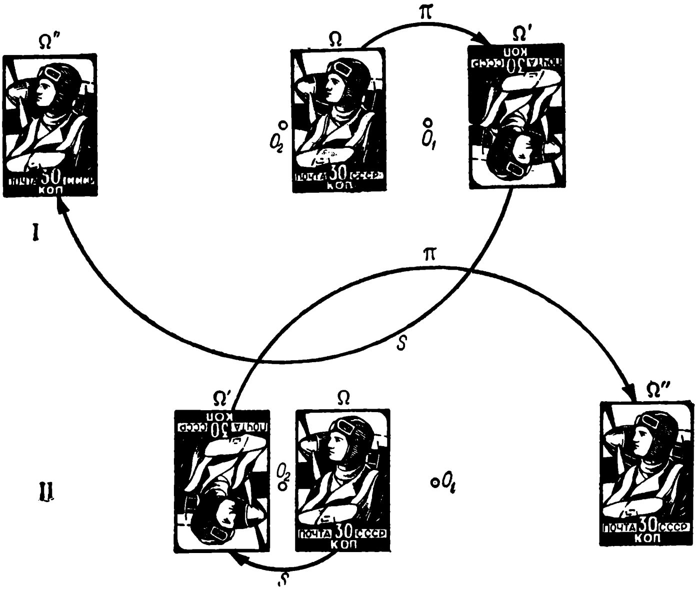


Рис. 48. *I*. Полуоборот π вокруг центра O_1 преобразует рисунок Ω в Ω', затем полуоборот ρ вокруг центра O_2 преобразует Ω' в Ω''; значит, $\pi\rho$ преобразует Ω в Ω''. *II*. Фигура Ω подвергнута тем же преобразованиям, но в другом порядке: сперва полуоборот ρ вокруг центра O_2, затем полуоборот π вокруг центра O_1. Сравнивая *II* с *I*, видим, что преобразование $\rho\pi$ переместило Ω вправо, а $\pi\rho$ — влево, т. е. $\pi\rho$ и $\rho\pi$ равные преобразования.

Поэтому необходимо различать умножение π на ρ ($\pi\rho$) от умножения ρ на π ($\rho\pi$). Умножение π на ρ

$$\pi\rho$$

называют *правосторонним* умножением π на ρ, а умножение ρ на π

$$\rho\pi$$

— *левосторонним* умножением π на ρ.

Если

$$\rho = \sigma,$$

то, каково бы ни было преобразование π,

$$\rho\pi = \sigma\pi,$$

и равным образом

$$\pi\rho = \pi\sigma,$$

т. е. от правостороннего умножения обеих частей равенства на одно и то же преобразование — равным образом и от левостороннего умножения их на одно и то же преобразование — равенство не нарушается. Но нельзя умножить одну часть слева, а другую справа: такое умножение, вообще говоря, нарушает равенство.

Понятие о группе

113. Сейчас уместно будет подытожить черты сходства умножения чисел и умножения коллинеаций.

Умножение в области чисел всегда выполнимо. Смысл этого утверждения уяснится, если мы сопоставим умножение, например, с извлечением квадратного корня или с делением. Извлечение квадратного корня в области вещественных чисел не всегда выполнимо, так как нельзя извлечь такой корень из отрицательного числа. Точно так же деление не всегда выполнимо в области *целых* чисел, так как среди целых чисел нет, например, частного 7 : 4. Вообще, говорят, что арифметическое действие всегда выполнимо в определенной области чисел, если, произведя это действие над числами *рассматриваемой области*, мы всегда получим число, принадлежащее *к той же области*. Сложение, например, всегда выполнимо в области положительных чисел, а вычитание всегда выполнимо в области положительных и отрицательных чисел, но в области одних только положительных чисел оно не всегда выполнимо. Когда в младших классах школы вы говорили, что нельзя от меньшего числа отнять большее, вы были совершенно правы; нужно было только добавить, что это невозможно в области *положительных* чисел.

Точно так же, когда говорят: нельзя извлечь корень четной степени из отрицательного числа, нужно добавить, что этого нельзя сделать в области вещественных чисел. В области всех чисел (включая мнимые) извлечение корня (любой степени) всегда выполнимо.

Итак, умножение в области всех чисел *всегда выполнимо*.

Умножение в области коллинеаций тоже всегда выполнимо, т. е. произведение любых двух коллинеаций есть коллинеация. Но, например, умножение в области гомологий *не всегда* выполнимо, так как произведение двух гомологий, как выяснится в дальнейшем, не всегда является гомологией.

114. Далее, умножение в области всех чисел о д н о з н а ч н о, т. е. произведение имеет только одно значение, в отличие, например, от квадратного корня, который, как известно, имеет два значения.

Умножение в области коллинеаций тоже однозначно.

Сказать, что арифметическое действие всегда выполнимо и однозначно в некоторой области, значит утверждать, что результат этого действия имеет о д н о и т о л ь к о о д н о значение, п р и н а д л е ж а щ е е к р а с с м а т р и в а е м о й о б л а с т и.

Подобный же смысл вкладывается в утверждение, что умножение в области коллинеаций всегда выполнимо и однозначно.

115. Умножение чисел и коллинеаций *а с с о ц и а т и в н о*, т. е. для них имеет силу сочетательный (*а с с о ц и а т и в н ы й*) закон:

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{(для чисел)},$$
$$(\pi\rho)\sigma = \pi(\rho\sigma) \quad \text{(для коллинеаций)}.$$

116. Далее, существует такое число —его называют *е д и н и ц е й* — и такая коллинеация — ее называют *т о ж д е с т в е н н о й к о л л и н е а ц и е й*, от право- и левостороннего умножения на которые множимое не изменяется, т. е.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{(для чисел)}$$
$$\pi \cdot 1 = 1 \cdot \pi = \pi \quad \text{(для коллинеаций)}.$$

117. В области всех чисел за вычетом нуля для любого числа a (а в области всех коллинеаций для любой коллинеации π) существует обратное число a^{-1} (соответственно обратная коллинеация π^{-1}), удовлетворяющие условиям

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \text{ и } \pi \cdot \pi^{-1} = \pi^{-1} \cdot \pi = 1.$$

Для нуля нет обратного числа, т. е. нет такого числа, которое, будучи умножено на нуль, дает в произведении единицу, так как произведение любого числа на нуль равно нулю. Поэтому в области всех чисел (включая нуль) указанное сейчас свойство не имеет места.

118. Существует много других совокупностей вещей, для которых можно установить операцию, аналогичную умножению чисел или умножению коллинеаций. Например, сложение целых чисел (включая 0) обладает всеми перечисленными свойствами.

В области целых чисел: 1) сложение всегда выполнимо, 2) однозначно, 3) ассоциативно: $(a+b)+c=a+(b+c)$; 4) существует число, от право- и левостороннего прибавления которого слагаемое не изменяется; это число называют нулем: $a+0=0+a=a$; 5) для каждого числа a существует противоположное число $-a$, удовлетворяющее условиям: $a+(-a)=(-a)+a=0$.

Роль единицы играет здесь нуль — вот и все отличие перечисленных свойств сложения и умножения чисел.

Точно так же всеми указанными свойствами обладает умножение хорошо знакомых нам преобразований — движений. Роль единицы выполняет здесь тождественное преобразование — покой, т. е. преобразование, которое оставляет каждую точку на своем месте.

119. Совокупность вещей, для которых можно установить операцию аналогичную умножению (или сложению) чисел, т. е. операцию, по отношению к которой эта совокупность обладает перечисленными выше свойствами, называют *группой*. Совокупность всех чисел за вычетом нуля образует группу относительно умножения. Совокупность всех чисел (или только целых чисел, включая нуль) образует группу относительно сложения. Совокупность всех коллинеаций тоже образует группу относительно их умножения. Совокупность всех движений тоже представляет собой группу. Но, например, совокупность целых чисел не образует группы относительно умножения, ибо в этой совокупности нет чисел, обратных целым числам. Точно так же совокупность положительных чисел не образует группы относительно сложения (почему?).

Совокупность всех гомологий тоже не образует группы, потому что произведение двух гомологий не всегда является гомологией (это будет доказано в п. 126).

120. Каждую вещь какой-либо совокупности принято называть элементом ее. Элемент группы, выполняющий ту роль, которая падает на долю единицы при умножении (или нуля при сложении) чисел, иногда называют модулем. Единица — есть модуль умножения чисел, нуль — модуль сложения их, тождественное преобразование (покой) — модуль умножения коллинеаций.

121. Резюмируем.

Если для некоторой совокупности вещей (безразлично каких), *установлена какая-либо операция* (безразлично какая), *которая в пределах данной совокупности:* 1) *всегда выполнима,* 2) *однозначна,* 3) *ассоциативна,* 4) *имеет модуль и* 5) *определяет для каждого элемента обратный элемент, — то данная совокупность образует группу относительно рассматриваемой операции.*

Группа гомологий с общими неизменными элементами

122. Общие двойные элементы двух преобразований являются двойными элементами их произведения. Действительно, если π преобразует точку A в самое себя, а затем ρ снова преобразует ее в самое себя, то точка A является двойной точкой преобразования $\pi\rho$.

Поэтому, если две гомологии имеют общую неизменную прямую (ось), то в их произведении та же прямая явится неизменной, ибо каждая точка ее, будучи двойной в гомологиях-сомножителях, окажется в силу этого двойной и в их произведении.

Точно так же общая неизменная точка (центр) двух гомологий является неизменной точкой их произведения.

Но если в коллинеации имеется центр, то есть в ней и ось; если имеется ось, то есть и центр.

Словом, *если две гомологии имеют общие неизменные элементы* (общую ось, или общий центр, или и то и другое вместе), *— то произведение их есть гомология с теми же неизменными элементами.*

Рекомендуем читателю, задав две гомологии с общей осью, найти центр их произведения или найти ось произведения двух гомологий, имеющих общий центр.

123. В частности, произведение гомологии на самое себя, а стало быть и любая степень гомологии, есть гомология (почему?). Точно так же коллинеация, обратная гомологии, есть гомология с тем же центром и той же осью, потому что прямая и обратная коллинеации имеют все двойные элементы общими.

124. Итак: 1) произведение двух гомологий с общим центром есть гомология с тем же центром, т. е. в совокупности всех гомологий с общим центром умножение всегда выполнимо. Кроме того, оно: 2) однозначно, 3) ассоциативно, 4) имеет модуль, принадлежащий к рассматриваемой совокупности гомологий (так как тождественное преобразование можно считать гомологией, за центр которой допустимо принять любую точку); 5) определяет для каждой гомологии, принадлежащей к рассматриваемой совокупности, обратную гомологию, принадлежащую к той же совокупности. Значит, совокупность всех гомологий с общим центром образует группу.

Читателя не затруднит доказать, что совокупность всех гомологий с общей осью тоже образует группу.

Точно так же образует группу совокупность всех гомологий, имеющих оба неизменных элемента общими (общую ось и общий центр).

Произведение гомологий без общих неизменных элементов

125. Не всегда, однако, далеко не всегда, произведение двух гомологий есть гомология. Мы убедимся в этом, рассмотрев происхождение двойных элементов произведения.

Любые две гомологии имеют общие двойные элементы: сюда наверное относится точка пересечения их осей и прямая, соединяющая их центры.

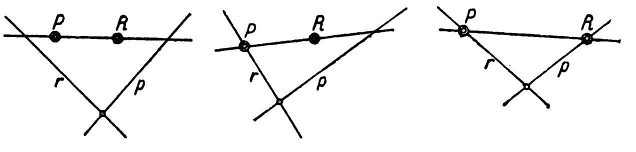


Рис. 49. Здесь и на других чертежах дальше P и p — центр и ось гомологии π; R и r — центр и ось гомологии ρ.

Кроме того, если центр одной гомологии является двойной точкой другой (т. е. лежит на ее оси или является ее центром), то и он представляет собой их общую двойную точку.

Если исключить случай, когда гомологии имеют общие неизменные элементы, то общих двойных точек у двух гомологий оказывается не более трех: точка пересечения осей и еще, быть может, один или оба центра (рис. 49).

126. Займемся теперь теми двойными точками произведения двух гомологий, которые не являются двойными в обоих сомножителях.

Ясно, что точки двойные в одном преобразовании, но не двойные в другом, не могут быть двойными точками их произведения (почему?). Далее, если гомология π преобразует $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$, то A окажется двойной точкой произведения $\pi\rho$, тогда и только тогда, если гомология ρ возвратит A' на прежнее место, т. е. преобразует $\begin{pmatrix} A' \\ A \end{pmatrix}$. Но в таком случае прямая AA' (рис. 50) проходит через центры обеих гомологий π и ρ (почему?). Значит, *все двойные точки произведения двух гомологий, кроме, быть может, общих двойных точек гомологий-сомножителей, лежат на прямой, проходящей через их центры.*

Если перемножаются две гомологии π и ρ без общих неизменных элементов, то из сказанного следует, что все двойные точки произведения $\pi\rho$, кроме, быть может, точки пересечения осей гомологий-сомножителей, лежат на прямой, соединяющей их центры. Эта прямая является, таким образом, единственной кандидаткой на роль неизменной прямой произведения. Но если центр одной из перемножаемых гомологий не является двойной точкой другой, то он не может быть двойной точкой их произведения (почему?). В этом случае на прямой, проходящей через центры гомологий-сомножителей, оказывается по меньшей мере одна не двойная в преобразовании $\pi\rho$ точка, т. е. эта прямая не неизменная в $\pi\rho$, и, стало быть, $\pi\rho$ не гомология.

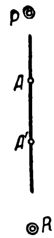


Рис. 50. Гомология π преобразует A в A', а гомология ρ возвращает A' в A; прямая AA' должна пройти через центры обеих гомологий.

Итак, произведение двух гомологий без общих неизменных элементов не может быть гомологией, если неизменные элементы одной из них не являются двойными элементами другой. Значит, совокупность всех гомологий не образует группы.

127. Для случая, когда две гомологии имеют общие неизменные элементы, из наших рассуждений следует, что 1) центр произведения двух гомологий с общей осью лежит на прямой, соединяющей их центры, 2) ось произведения двух гомологий с общим центром проходит через точку пересечения их осей.

Читатель без труда оправдает эти утверждения и выведет отсюда, что произведение двух параболических гомологий с общей осью или общим центром есть параболическая гомология и что, стало быть, совокупность всех параболических гомологий с общим центром образует группу. То же, разумеется, относится к совокупности всех параболических гомологий с общей осью.

128. Для гиперболических гомологий аналогичное утверждение не оправдывается: произведение двух гиперболических гомологий с общим центром (равным образом с общей осью) может быть параболической гомологией, и, стало быть, такая совокупность гиперболических гомологий не образует группы. Убедиться в этом предоставим читателю.

Группа прямолинейных перенесений и преобразований подобия

129. Совокупность всех гомологий с бесконечно удаленной осью образует группу (почему?). В эту группу входят гомологии двух типов: параболические — они представляют собой прямолинейные перенесения — и гиперболические — преобразования подобия (см. пп. 86 и 87).

Параболические гомологии с бесконечно удаленной осью, т. е. прямолинейные перенесения, сами по себе образуют группу (п. 127). Это значит, что два последовательных прямолинейных перенесения можно заменить одним прямолинейным перенесением (рис. 47).

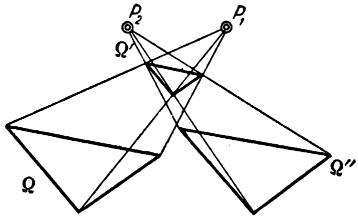


Рис. 51. Произведение двух преобразований подобия в данном случае представляет собой прямолинейное перенесение.

130. Гиперболические гомологии с бесконечно удаленной осью (т. е. преобразования подобия) не образуют группы, так как произведение двух таких гомологий может быть параболической гомологией (п. 128). Иначе говоря, произведение двух преобразований подобия не всегда является преобразованием подобия. Еще иначе: если фигура Ω подобна фигуре Ω', а фигура Ω' подобна фигуре Ω'', то не всегда фигура Ω подобна Ω''. На первый взгляд это противоречит известным из элементарной геометрии свойствам подобия. Но противоречие здесь только кажущееся и сейчас разъяснится.

Если произведение двух преобразований подобия является не преобразованием подобия, оно представляет собой прямолинейное перенесение (почему?), так что если фигура Ω подобна фигуре Ω' и Ω' подобна Ω'', то фигура Ω либо подобна фигуре Ω'', либо равна ей и может быть получена из нее прямолинейным перенесением. Последний случай изображен на рис. 51.

131. Целесообразно несколько расширить понятие о подобии, рассматривая прямолинейное перенесение как частный случай подобия. Таким образом, под подобием в широком смысле мы будем понимать гомологию с бесконечно удаленной осью (гиперболическую или параболическую — все равно). Совокупность преобразований подобия в широком смысле образует группу, т. е. если фигура Ω подобна Ω', а Ω' подобна Ω'', то Ω подобна Ω''.

Пусть преобразование подобия π с центром P преобразует $\begin{pmatrix}\Omega \\ \Omega'\end{pmatrix}$, и подобие ρ с центром R преобразует $\begin{pmatrix}\Omega' \\ \Omega''\end{pmatrix}$.

Тогда преобразование $\pi\rho$, преобразующее $\begin{pmatrix}\Omega \\ \Omega''\end{pmatrix}$, тоже представляет собой подобие. Центр его S лежит на прямой PR (п. 127). Стало быть, три центра подобия трех попарно подобных фигур лежат на одной прямой. В частности, любые две окружности подобны; значит три центра подобия трех окружностей лежат на одной прямой (рис. 52). Заметим, однако, что две подобные фигуры могут иметь более одного (именно два) центра подобия, так что три попарно подобные фигуры имеют шесть центров подобия. Наше утверждение нужно понимать так: если P и R центры подобий, преобразующих $\begin{pmatrix}\Omega \\ \Omega'\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\Omega' \\ \Omega''\end{pmatrix}$, то на прямой PR лежит центр подобия, преобразующего $\begin{pmatrix}\Omega \\ \Omega''\end{pmatrix}$. Но не нужно думать, что всякий центр подобия, преобразующего $\begin{pmatrix}\Omega \\ \Omega''\end{pmatrix}$, лежит на PR.

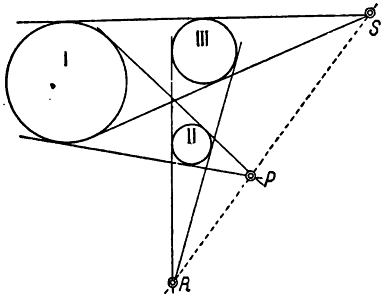


Рис. 52. Три внешних центра подобия трех окружностей лежат на одной прямой.

132. Предлагаем читателю выполнить следующие упражнения:

1) Преобразование подобия с центром P преобразует $\begin{pmatrix}A \\ A'\end{pmatrix}$; другое преобразование подобия с центром R преобразует $\begin{pmatrix}A' \\ A''\end{pmatrix}$. Найти центр их произведения.

2) Задать два преобразования подобия так, чтобы произведение их было прямолинейным перенесением.

Преобразование преобразований

133. Мы уже говорили (п. 112), что на умножение коллинеаций не распространяется переместительный закон, т. е. не всегда

$$\pi\rho = \rho\pi.$$

Займемся сейчас этим вопросом подробнее. Для этого нам понадобится одна новая идея: преобразование преобразований.

134. Пусть коллинеация π преобразует фигуру Ω в Ω', а коллинеация ρ преобразует предыдущую фигуру Ω преобразования π в Ω_1, а последующую Ω' в Ω_1':

$$\pi \text{ преобразует } \begin{pmatrix}\Omega \\ \Omega'\end{pmatrix},$$

$$\rho \text{ преобразует } \begin{pmatrix}\Omega, & \Omega' \\ \Omega_1, & \Omega_1'\end{pmatrix}.$$

Обозначим, наконец, через σ преобразование, которое относит фигуре Ω_1 фигуру Ω_1':

$$\sigma \text{ преобразует } \binom{\Omega_1}{\Omega_1'}.$$

Итак, исходные фигуры Ω и Ω' были связаны преобразованием π; ρ преобразует их в фигуры Ω_1 и Ω'_1, связанные между собой преобразованием σ:

$$\begin{array}{c} \underbrace{\underset{\pi}{\Omega \rightarrow \Omega'}} \\ \downarrow \\ \overbrace{\underset{\sigma}{\Omega_1 \rightarrow \Omega_1'}} \end{array}$$

В таком случае говорят, что коллинеация ρ преобразует коллинеацию π в σ.

Точнее: *если ρ преобразует соответственные элементы преобразования π в соответственные элементы преобразования σ (прообразы — в прообразы, а образы — в образы), то говорят, что ρ преобразует π в σ.*

135. Найдем, как выражается σ через π и ρ. Фигуру Ω_1 можно преобразовать в Ω_1' таким путем: сперва преобразуем Ω_1 в Ω (это выполняет преобразование, обратное ρ, т. е. ρ^{-1}); затем преобразуем Ω в Ω' (это выполняет π); наконец, преобразуем Ω' в Ω_1' (посредством преобразования ρ). Таким образом, произведение $\rho^{-1}\pi\rho$ преобразует $\binom{\Omega_1}{\Omega_1'}$, т. е.

$$\rho^{-1}\pi\rho \equiv \sigma.$$

Отсюда заключаем, что σ — тоже коллинеация. Итак, коллинеация ρ преобразует коллинеацию π в коллинеацию σ, равную $\rho^{-1}\pi\rho$.

136. Если коллинеация π и ρ коммутативны, т. е. если

$$\pi\rho = \rho\pi, \tag{1}$$

то

$$\rho^{-1}\pi\rho = \pi, \tag{2}$$

т. е. ρ преобразует π в самое себя: ρ преобразует $\binom{\pi}{\pi}$.

В самом деле, умножив обе части равенства (1) слева на ρ^{-1}, получим

$$\rho^{-1}(\pi\rho) = \rho^{-1}(\rho\pi) = \rho^{-1}\rho\pi = \pi,$$

так как

$$\rho^{-1}\rho = 1.$$

Точно так же из (1) следует, что $\pi^{-1}\rho\pi = \rho$, т. е. π преобразует $\binom{\rho}{\rho}$.

Стало быть, если две коллинеации коммутативны, то они преобразуют друг друга в самих себя.

137. Обратно, если ρ преобразует π в самое себя, то эти коллинеации коммутативны.

В самом деле, по условию

$$\rho^{-1}\pi\rho = \pi.$$

Умножив обе части этого равенства слева на ρ, получим:

$$\pi\rho = \rho\pi.$$

138. Двойные элементы коллинеации π преобразуются коллинеацией ρ в двойные элементы σ.

Действительно, пусть π преобразует $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$ и ρ преобразует $\begin{pmatrix} A \\ A_1 \end{pmatrix}$.

В таком случае ρ^{-1} преобразует $\begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix}$.

Стало быть, $\rho^{-1}\pi\rho$ преобразует $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$, т. е. A_1 есть двойной элемент преобразования $\rho^{-1}\pi\rho\ (\equiv \sigma)$.

Отсюда следует, что любая коллинеация преобразует гомологию в гомологию же, причем ось и центр первой гомологии преобразуются в ось и центр второй. Параболическая гомология преобразуется в параболическую, а гиперболическая — в гиперболическую.

139. Почти очевидно, что если ρ преобразует π в σ, то ρ^{-1} преобразует σ в π.

В самом деле, ρ^{-1} преобразует σ в $\rho\sigma\rho^{-1}$.

Подставляя вместо σ его значение $\sigma \equiv \rho^{-1}\pi\rho$, получим требуемое.

140. Доказанное в пп. 136 и 137 проливает свет на вопрос о коммутативности двух гомологий. Можно, например, утверждать, что если две гомологии имеют разные центры или разные оси, причем центр и ось одной не инцидентны с осью и центром другой, то такие гомологии не коммутативны, ибо одна из них преобразует другую не в самое себя.

141. Два преобразования, которые преобразуются одно в другое посредством коллинеации, будем называть *коллинеарными*. Точно также *гомологичными* будем называть такие преобразования, которые могут быть преобразованы одно в другое посредством гомологии.

Ниже мы докажем, что посредством подходящим образом подобранной коллинеации можно преобразовать любые четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, в любые другие четыре точки, тоже разумеется, неколлинейные по три. Основываясь на этом, легко показать, что *все параболические гомологии коллинеарны.*

В самом деле, пусть параболическая гомология π преобразует $\begin{pmatrix} A, & B \\ A', & B' \end{pmatrix}$ и другая параболическая гомология σ преобразует $\begin{pmatrix} C, & D, \\ C', & D' \end{pmatrix}$. Обе гомологии этим вполне определены[1] (почему?).

---

[1] Мы полагаем, что точка B, а стало быть и B', лежит вне прямой AA'; равным образом D и D' — вне прямой CC'.

Рассмотрим коллинеацию ρ, преобразующую прообразы A и B гомологии π в прообразы C и D гомологии σ, а образы π (A' и B') в образы σ (в C' и D'):

$$\rho \text{ преобразует } \begin{pmatrix} A, & B, & A', & B' \\ C, & D, & C', & D' \end{pmatrix}.$$

Коллинеация ρ преобразует π в такую параболическую гомологию, которая относит точкам C и D точки C' и D'. Но такая гомология есть только одна. Это σ.

Значит ρ преобразует $\begin{pmatrix} \pi \\ \sigma \end{pmatrix}$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

О ГОМОЛОГИЯХ, КОТОРЫЕ САМИ СЕБЕ ОБРАТНЫ, И О ПРОСТРАНСТВАХ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТОЧЕК

Инволюционные гомологии

142. Особого внимания заслуживают гомологии, *которые сами себе обратны*. Им будет посвящена настоящая глава.

Если такая гомология π преобразует какую-либо точку A в A', то она же затем обратно преобразует A' в A, так что, выполнив это преобразование два раза подряд, мы вернем все точки плоскости в исходное положение. Иначе говоря, произведение гомологии рассматриваемого типа на самое себя есть тождественное преобразование:

$$\pi^2 = 1.$$

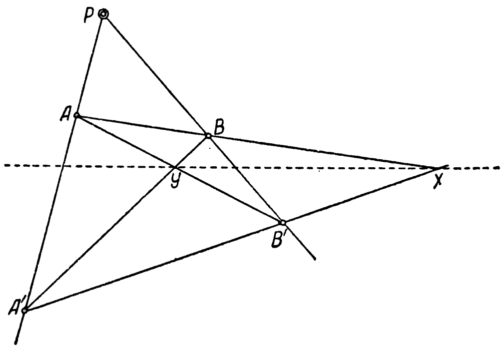


Рис. 53. Инволюционная гомология.

Тождественное преобразование, очевидно, принадлежит к числу гомологий, которые сами себе обратны. Но, разумеется, не оно нас интересует. Существуют нетождественные гомологии, которые обладают этим свойством. Их-то мы и собираемся изучить.

143. Прежде всего докажем, что такие гомологии действительно существуют.

Зададим гомологию π, которая преобразует $\begin{pmatrix} A, & A', & B \\ A', & A, & B' \end{pmatrix}$, и докажем, что она сама себе обратна (рис. 53).

Гомология π преобразует прямую AB в $A'B'$, так что точка пересечения этих прямых (обозначим ее через X) лежит на оси π. Далее, прямая BA' преобразуется в прямую $B'A$, так что точка пересечения этих прямых (обозначим ее через Y) тоже лежит на оси π. Итак, ось определена.

Нахождение центра не представляет никаких затруднений: он, очевидно, лежит на пересечении двойных прямых AA' и BB'.

Построение гомологии π можно считать законченным.

Выполним теперь преобразование π два раза подряд, т. е. произведем преобразование π^2. Очевидно, π^2 есть гомология с тем же центром и той же осью, как π. Кроме того, π^2 преобразует точку A в самое себя (сперва A преобразуется в A', а затем A' возвращается в A). Таким образом, A двойная точка гомологии π^2. А так как эта двойная точка не совпадает с центром и не лежит на оси, то π^2 есть тождественное преобразование (см. пп. 45 и 46), т. е.

$$\pi^2 = 1.$$

Отсюда следует, что π преобразует B' в B, и вообще, если эта гомология преобразует какую-либо точку C в C', то она же возвращает C' в C, т. е. гомология π сама себе обратна:

$$\pi = \pi^{-1}.$$

Такие гомологии называют *инволюционными.*

144. Если какая-либо точка A преобразуется в A', причем то же преобразование возвращает A' обратно в A, то говорят, что точка A преобразуется *инволюционно*. С помощью этого термина

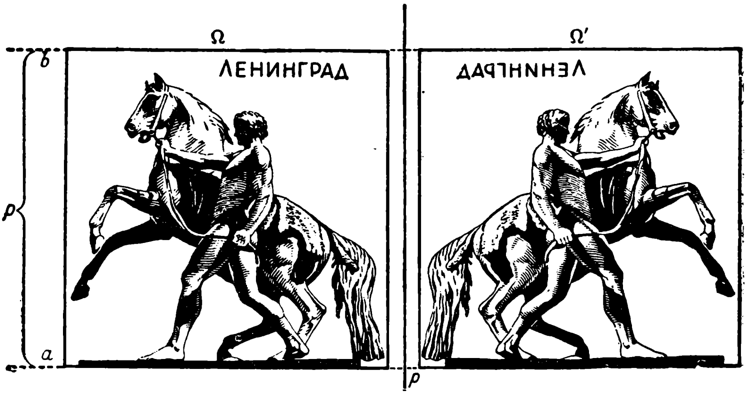


Рис. 54.

доказанную только что теорему можно формулировать так: *гомология, преобразующая инволюционно одну какую-либо точку, является инволюционной гомологией, т. е. преобразует инволюционно все точки.*

145. Общеизвестным примером инволюционной гомологии может служить *осевая симметрия* или *отражение* (рис. 54).

Отражение относительно прямой p преобразует каждую фигуру плоскости в ее зеркальное изображение. При этом каждая точка преобразуется в точку, прямая в прямую, сохраняется инцидентность точек с прямыми, и, кроме того, каждая точка прямой p преобразуется в самое себя. Стало быть, отражение относительно прямой p, или, как говорят, симметрия с осью p, представляет собой гомологию; прямая p — ось отражения или симметрии —

является осью гомологии. Если какое-либо отражение преобразует фигуру Ω в Ω', то оно же преобразует обратно фигуру Ω' в Ω, так что мы действительно имеем здесь дело с инволюционным преобразованием. Подробнее об этом будет речь впереди.

146. Из предыдущего (п. 143) видно, что существует одна и только одна инволюционная гомология с заданной осью и заданной парой соответственных точек; иными словами *инволюционная гомология вполне определена осью и парой соответственных точек.*

Разумеется, можно задать инволюционную гомологию и иначе. Пусть, например, A, B, C, D четыре точки плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сгруппируем их как-нибудь попарно, например, так: A с B и C с D. Существует одна и только одна гомология, преобразующая каждую пару инволюционно: $\begin{pmatrix} A, & B \\ B, & A \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} C, & D \\ D, & C \end{pmatrix}$. Действительно, если такая гомология существует, то ось ее должна проходить через точки

$$AC \cdot BD \equiv X$$

и

$$AD \cdot BC \equiv Y.$$

Рассмотрим теперь гомологию π с осью XY, преобразующую $\begin{pmatrix} A, & B \\ B, & A \end{pmatrix}$; очевидно, эта гомология преобразует прямую AX в BX и BY в AY, стало быть, точку $AX \cdot BY$, т. е. точку C, в точку $BX \cdot AY$, т. е. в D, а так как гомология π является инволюционной, то она же преобразует $\begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$.

147. *Точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, условимся называть независимыми.* Мы доказали, что инволюционная гомология вполне определена двумя парами соответственных точек, если все четыре точки независимы.

148. *Фигура, состоящая из четырех независимых точек* (вершин) и *шести прямых* (сторон), *соединяющих их попарно, называется полным четырехугольником* (лучше было бы сказать четырехвершинником).

Не нужно удивляться тому, что у полного четырехугольника шесть сторон: соединяя попарно четыре независимые точки всеми возможными способами, получим столько прямых, сколько возможно сочетаний из 4 элементов по 2, т. е. 6 ($C_4^2 = 6$).

Через каждую вершину полного четырехугольника проходят три стороны, соединяющие эту вершину с остальными тремя вершинами. На каждой стороне лежат две вершины. *Две стороны, не проходящие через одну вершину, называются взаимно противоположными, а точки пересечения каждой пары противоположных сторон — диагональными точками.* Таким образом, шесть сторон полного четырехугольника распадаются на три пары взаимно противоположных сторон. Пересечение их дает три диагональные точки — X, Y, Z (рис. 55).

$$AB \cdot CD \equiv X,$$
$$BC \cdot DA \equiv Y,$$
$$CA \cdot DB \equiv Z.$$

Наконец, *три прямые, соединяющие попарно диагональные точки, называются диагоналями четырехугольника.*

149. Мы доказали, что существует одна и только одна инволюционная гомология, преобразующая две пары независимых точек инволюционно.

Значит, существуют три и только три инволюционные гомологии, преобразующие полный четырехугольник в самого себя: одна гомология преобразует $\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ B, & A, & D, & C \end{pmatrix}$, другая $\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ C, D, A, B \end{pmatrix}$ и третья $\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ D, C, B, A \end{pmatrix}$. Центром каждой из этих гомологий является диагональная точка, а ось проходит через две другие диагональные точки.

150. Из предыдущего видно, что инволюционная гомология вполне определена двумя парами соответственных точек, причем обе пары точек могут быть заданы совершенно произвольно (лишь бы никакие три точки не лежали на одной прямой).

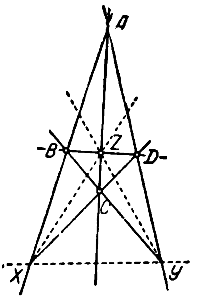


Рис. 55. Полный четырехвершинник $ABCD$ с диагональными точками X, Y, Z.

Отсюда следует, что *все инволюционные гомологии коллинеарны* (см. п. 141).

Разумеется, можно задать инволюционную гомологию и иначе. Предложим читателю решить следующие задачи.

1. Показать, что ось и пара соответственных точек позволяют найти центр инволюционной гомологии и, стало быть, вполне определяют ее.

2. Построить инволюционную гомологию, если даны центр, пара гомологических точек и одна из точек оси.

3. Применяя малый принцип двойственности, найти еще три способа, какими могут быть заданы инволюционные гомологии.

151. Нам остается еще научиться строить инволюционные гомологии с заданными неизменными элементами (осью и центром). Но прежде нужно решить вопрос, лежит ли центр инволюционной гомологии на оси или вне ее. Иначе говоря, являются ли инволюционные гомологии гиперболическими или параболическими.[1]

С виду это очень простой вопрос. Но ответить на него совсем не просто.

152. Все параболические гомологии коллинеарны (п. 141). Поэтому если одна из них инволюционна, то все они инволюционны.

[1] Так как все инволюционные гомологии коллинеарны, то либо все они принадлежат к первому типу, либо все ко второму.

Значит, поставленный выше вопрос равносилен такому: является ли одна какая-либо параболическая гомология инволюционной?

153. Мы видели, что центром инволюционной гомологии, преобразующей полный четырехугольник в самое себя, является диагональная точка, а ось проходит через две другие диагональные точки. Вопрос — лежит ли центр инволюционной гомологии на оси — равносилен вопросу: *лежат ли три диагональные точки полного четырехугольника на одной прямой?* Рис. 55 с полной убедительностью говорит, что нет: по крайней мере в одном полном четырехугольнике — именно в том, который изображен на чертеже, три диагональные точки X, Y, Z не коллинейны. Этот частный случай немедленно может быть обобщен: посредством подходящей коллинеации любой полный четырехугольник можно преобразовать в любой другой. Поэтому, если в одном диагональные точки не коллинейны, то так же обстоит дело во всех.

154. Однако давно прошли те времена, когда математики основывались на доверии своим глазам. Древний геометр делал чертеж и писал на нем одно только слово: „Смотри". Сейчас мы требуем логических доводов, вместо наглядного показа.

Нужно д о к а з а т ь, что хотя бы одна параболическая гомология неинволюционна. Как ни проста эта задача на первый взгляд, решить ее, оставаясь в кругу тех идей, которыми мы оперировали до сих пор, н е в о з м о ж н о. Подобно тому, как в элементарной геометрии принимается без доказательства, что через некоторую точку можно провести только одну прямую, параллельную данной (постулат Евклида), так и мы вынуждены без доказательства принять, что существуют неинволюционные параболические гомологии.

Чрезвычайно интересно и поучительно выяснить, почему утверждение о существовании неинволюционных параболических гомологий не может быть доказано. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

Пространства с конечным числом точек

155. Взгляните на следующую табличку:

1, 2, 3
1, 4, 5
1, 6, 7
2, 4, 6
2, 5, 7
3, 5, 6
3, 4, 7.

Каждое число в ней условимся называть точкой. Я предвижу возражение: число есть число, а вовсе не точка. Это, конечно, верно. Точка рисуется нам в виде пятнышка, крупинки, песчинки, значка, который оставляет на бумаге острие карандаша, и т. д. Но для доказательства геометрических теорем имеют ли значение цвет пятнышка или материал крупинки — вообще физические свойства вещей, которые изображают точку? Нет, не имеют. А имеет ли значение общее наглядное представление, которое существует у нас о точке? Напомню, что точка вовсе не похожа на прямую; между тем выяснилось, что геометрически эти два понятия — точка и прямая — совершенно равнозначащи, до такой степени равнозначащи, что слова „точка“ и „прямая“ оказалось возможным заменить одно другим.

Значит, весьма различные вещи могут обладать тождественными геометрическими свойствами.

Основные геометрические свойства точек и прямых выражаются аксиомами. А так как для доказательства теорем имеют значение т о л ь к о эти свойства, то допустимо пожаловать званием точек и прямых все, что подчиняется определенным аксиомам.

Итак, не спешите, читатель, отказывать числам нашей таблицы в праве называться „точками“. Они, быть может, заслужат эту честь. Разрешите также считать каждую строчку таблицы „прямой“ линией. Числа каждой „прямой“ (т. е. строки) будем рассматривать как „точки“, „лежащие“ на ней. Теперь выясним, как обстоит дело с аксиомами.

156. Первая аксиома гласит: через любые две точки можно провести одну, и только одну, прямую. Возьмем наудачу пару „точек“, например 3 и 5. Ищем в таблице и находим их в шестой строке: они лежат на „прямой“ (3, 5, 6). Другой „прямой“, которая одновременно „проходила“ бы через обе эти „точки“ в таблице нет. Значит, через „точки“ 3 и 5 можно „провести“ одну, и только одну, „прямую“, именно „прямую“ (3, 5, 6). Возьмем наудачу другую пару „точек“, например 6 и 2. Через них проходит „прямая“ (2, 4, 6) (четвертая строка) и только она. Переберите все комбинации „точек“ по две — результат будет тот же: первая аксиома удовлетворена.

157. Возьмем теперь наудачу две „прямые“, например (1, 4) и (2, 7). На первой лежит еще „точка“ 5 (вторая строка), на второй — та же „точка“ 5 (пятая строка). Обе „прямые“ имеют одну, и только одну, общую „точку“: можно сказать, что они „пересекаются“ в „точке“ 5. Предоставим читателю убедиться в том, что л ю б ы е две „прямые“ нашей таблицы „пересекаются“ в одной, и только в одной, „точке“.

158. Итак, числа и строчки таблицы обладают теми свойствами точек и прямых одной плоскости, которые выражаются известными нам двумя аксиомами.

Этим до некоторой степени оправдано присвоение им наименования точек и прямых. Но отсюда вовсе не следует, что эти лжеточки и лжепрямые можно изобразить действительными точками и действительными прямыми. На рис. 56 сделана такая попытка.

Согласно таблице п. 155 „точки“ 1, 2, 3 „коллинейны“; поэтому они представлены в виде точек, расположенных на одной прямой. То же относится к „точкам“ 4, 5, 1; 4, 7, 3 и т. д. Размещение

„лжеточек“ на действительных прямых протекает благополучно, пока не доходит до „точек“ 2, 4, 6: они, если верить таблице, „коллинейны“, но на чертеже это никак не получается.

159. В предыдущем изложении — именно в I и II главе — нам приходилось выходить за пределы плоскости, например для доказательства теоремы о существовании осевой коллинеации. Поэтому имеет существенное значение вопрос, может ли таблица п. 155 быть дополнена пространственными „точками“ и „прямыми“. Сейчас мы увидим, что это вполне возможно.

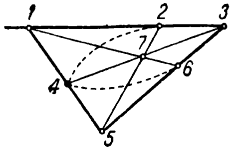


Рис. 56. Точки 2, *4, 6* согласно таблице п. 131 должны лежать на одной прямой.

Возьмем новую „точку“ 8 и соединим ее с точками 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 „прямыми“ (8, 1), (8, 2), (8, 3) и т. д. На каждой такой прямой пусть лежит еще одна новая точка: на (8, 1) точка 9, на (8, 2) точка 10 и т. д. Затем будем соединять все новые точки между собой и на каждой такой прямой поместим еще одну из точек основной плоскости (т. е. одну из точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Результат представлен в следующей табличке:

1, 2, 3	8, 1, 9	9, 2, 11	10, 1, 11	11, 4, 15	12, 1, 13	13, 2, 15
1, 4, 5	8, 2, 10	9, 3, 10	10, 4, 14	11, 5, 14	12, 2, 14	13, 3, 14
1, 6, 7	8, 3, 11	9, 4, 13	10, 5, 15	11, 6, 13	12, 3, 15	14, 1, 15
2, 4, 6	8, 4, 12	9, 5, 12	10, 6, 12	11, 7, 12		
2, 5, 7	8, 5, 13	9, 6, 15	10, 7, 13			
3, 5, 6	8, 6, 14	9, 7, 14				
3, 4, 7	8, 7, 15					

Слева находится знакомая уже нам „плоскость“. Правее — „прямые“, соединяющие „точку“ 8 с „точками“ этой „плоскости“. Еще правее — „прямые“, соединяющие новые „точки“ между собой. Словом, перед нами „пространство“ — все, целиком, со всеми своими „точками“ и „прямыми“.

Через любые две „точки“ этого „пространства“ проходит одна, и только одна, „прямая“. Например, через „точки“ 13 и 3 — „прямая“ (13, 3, 14) (7-й столбец, 2-я строка). Через „точки“ 9 и 5 — „прямая“ (9, 5, 12) (3-й столбец, 4-я строка) и т. д. Но не всякие две „прямые“ этого „пространства“ пересекаются. Например, „прямые“ (10, 6, 12) (4-й столбец, 4-я строка) и (9, 7, 14) (3-й столбец, 6-я строка) не пересекаются. Повидимому, они лежат в разных „плоскостях“.

Но мы еще не установили, что̀ считать „плоскостью“ нашего „пространства“.

160. В действительном пространстве через любую точку A и не инцидентную с ней прямую a можно проложить одну, и только одну, плоскость. Все прямые, соединяющие точку A с точками A_1, A_2, A_3 прямой a, лежат в одной плоскости — именно в той, которую мы хотим проложить. Можно сказать, что совокупность точек прямых AA_1, AA_2, AA_3, и т. д. представляет собой плоскость (рис. 57).

Применим это определение к „точкам“ и „прямым“ таблицы. Проведем, например, „плоскость“ через „точку“ 4 и „прямую“ (9, 3, 10) (3-й столбец, 2-я строка). Для этого соединим „прямыми“ „точку“ 4 с „точками“ 9, 3 и 10. Разыскав эти „прямые“ в таблице, установим, что

на „прямой“ (4, 9) лежит еще „точка“ 13 (3-я строка, 3-й столбец),

на „прямой“ (4, 3) лежит еще „точка“ 7 (7-я строка, 1-й столбец),

на прямой“ (4, 10) лежит еще „точка“ 14 (2-я строка, 4-й столбец).

Совокупность „точек“ 9, 3, 10, 4, 14, 7, 13 составляет „плоскость“. В этой „плоскости“ лежат такие „прямые“:

9, 3, 10	4, 9, 13	7, 13, 10
4, 10, 14	7, 14, 9	3, 13, 14
4, 3, 7		

Легко усмотреть, что любые две из них „пересекаются“, т. е. имеют общую „точку“.

Предоставим читателю убедиться в том, что

1) через любые две „точки“ нашего „пространства“ „проходит“ одна, и только одна, „прямая“;

2) любые две „прямые“ одной „плоскости“ „пересекаются“.

161. Теперь наши „точки“ и „прямые“, повидимому, обладают всеми теми свойствами настоящих точек и прямых, которыми мы пользовались выше. Поэтому следует ожидать, что все теоремы, которые доказаны до сих пор и которые вообще могут быть доказаны без новых аксиом, сохранят силу и для курьезного „пространства“, представленного таблицей п. 155.

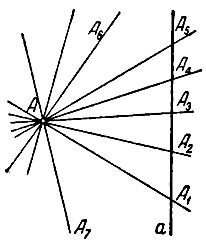


Рис. 57. Плоскость Aa.

Действительно, в этом „пространстве“ справедлива теорема о существовании осевой коллинеации и теорема о том, что всякая осевая коллинеация является в то же время центральной, и справедлив принцип двойственности.

Однако, некоторые теоремы все же не оправдываются. Например, конфигурация Дезарга не может найти здесь места, так как в нее входит 10 точек и 10 прямых, а на каждой „плоскости“ нашего „пространства“ помещается лишь 7 „точек“ и 7 „прямых“. Выходит, что это „пространство“ слишком бедно „точками“.

Мы уже намекали в свое время (см. п. 56) на то, что будем рассчитывать на наличие достаточного числа точек. Тогда мы, можно сказать, „купались в точечном изобилии“, а потому не обратили должного внимания на эту предпосылку. Но теперь, перед лицом „точечного голода“, необходимо учесть, как же велика наша потребность в точках.

162. Оказывается, что наши требования на этот счет очень скромны. Вовсе нет необходимости, чтобы в пространстве было бесконечное множество точек. Достаточно, если их будет четыре штуки на каждой прямой. Предположение, что на каждой прямой находится не менее четырех точек, фигурировало в доказательстве теоремы о свободе выбора элементов, определяющих гомологию (см. рис. 58).

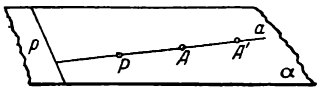


Рис. 58. Этот рисунок воспроизводит часть рис. 31. На прямой *a* лежат четыре точки: P, A, A' и ap.

Стало быть, справедливость этой теоремы в пространстве о трех точках на прямой сомнительна, и действительно, она здесь не оправдывается.

Просмотрев внимательно весь предыдущий текст — все доказательства и все чертежи — читатель убедится в том, что четыре точки на прямой нас вполне устраивают. Стало быть, список аксиом, которыми мы пользовались, нужно пополнить таким утверждением:

На каждой прямой существует по меньшей мере четыре точки.

Это утверждение называют *аксиомой существования.*

163. Строго говоря, мы применяли еще две аксиомы существования, именно такие:

Вне каждой прямой существует по меньшей мере одна точка.

Вне каждой плоскости существует по меньшей мере одна точка.

Первая из этих аксиом позволяет выйти за пределы прямой, что мы делаем непрерывно; вторая — разрешает покинуть плоскость, чем мы воспользовались дважды: при доказательстве теоремы о существовании осевой коллинеации и при решении вопроса о свободе выбора элементов, определяющих ее.

164. Первая из аксиом существования — и только она — не оправдывается в слишком „куцом“ „пространстве“ п. 155. Нетрудно, однако, по тому же образцу построить „пространство“, более богатое точками. Следующая таблица изображает собой одну „плоскость“ такого „пространства“, в котором на каждой „прямой“ лежат 4 „точки“:

1,	2,	3,	4	3,	5,	9,	13
1,	5,	6,	7	3,	6,	10,	11
1,	8,	9,	10	3,	7,	8,	12
1,	11,	12,	13	4,	5,	10,	12
2,	5,	8,	11	4,	6,	8,	13
2,	6,	9,	12	4,	7,	9,	11
2,	7,	10,	13				

Читатель легко убедится в том, что через любые две „точки“ этой „плоскости“ проходит одна, и только одна, „прямая“ и что любые две „прямые“ ее пересекаются. Далее, первые две „аксиомы существования“ тоже удовлетворены. Чтобы удовлетворить и последней аксиоме, необходимо дополнить таблицу точками и прямыми, лежащими вне данной плоскости. Это можно сделать совершенно так же, как сделано выше для пространства о трех точках на прямой.

Не приводя здесь соответствующей таблицы, укажем только, что в „пространстве“ оказывается всего 40 „точек“, расположенных на 130 „прямых“.

165. Таким же образом можно построить „пространство“, в котором на каждой прямой лежат 5, 6 и вообще любое число „точек“.

На случай, если кто-либо из читателей пожелает заняться составлением таких таблиц, укажем, что в „пространстве“, где на каждой „прямой“ лежит n „точек“, должно получиться $n[(n-1)^2+1]$ „точек“ и $[(n-1)^2+1]\cdot[n(n-1)+1]$ „прямых“. На каждой „плоскости“ окажется $n(n-1)+1$ „точек“ и столько же „прямых“.

Все аксиомы, которыми мы пользовались до сих пор, удовлетворены в таких „пространствах“ с конечным числом „точек“. Поэтому все без исключения теоремы, которые уже доказаны, и все теоремы, которые можно доказать без новых аксиом, должны оправдываться в этих „пространствах“. В частности, и теорема Дезарга и теорема о свободе выбора элементов, определяющих гомологию, остаются в силе и здесь.

166. Что касается вопроса о том, являются ли параболические гомологии инволюционными, то он решается р а з л и ч н о, в зависимости от числа „точек“ на „прямой“.

Пусть, например, на каждой „прямой“ лежат 4 „точки“. Рассмотрим какую-либо параболическую гомологию в одной из „плоскостей“ такого „пространства“. На каждой двойной прямой параболической гомологии одна (и только одна) точка является двойной. За вычетом ее остаются три точки на прямой. Если первая из них преобразуется во вторую, а вторая в первую, то третьей некуда „податься“.

Значит, в „пространстве“ о четырех точках на прямой параболические гомологии не могут быть инволюционными.

Наоборот, если на „прямой“ лежат 5 „точек“, то г и п е р б о л и ч е с к и е гомологии не могут быть инволюционными, так как на каждой двойной прямой в гиперболической гомологии имеются две двойные точки (центр и точка пересечения с осью); за вычетом этих двойных точек на прямой остаются три точки, которые никак не могут быть сгруппированы во взаимно гомологичные пары: если первая из них преобразуется во вторую, а вторая в первую, то третья остается „без партнера“. Значит, инволюционными являются здесь п а р а б о л и ч е с к и е гомологии.

Вообще, в пространствах с четным числом точек на прямой параболические гомологии не инволюционны, так как на каждой двойной прямой за вычетом одной двойной точки остается нечетное число точек, которые, разумеется, не могут быть сгруппированы во взаимно гомологичные пары. По той же причине в пространствах с нечетным числом точек на прямой г и п е р б о л и ч е с к и е гомологии не могут быть инволюционными, значит, параболические — инволюционны.

167. Итак, все аксиомы, которыми мы пользовались до сих пор, одинаково хорошо уживаются с двумя противоположными ответами на вопрос, являются ли инволюционные гомологии параболическими или гиперболическими.

Значит, на основании предыдущих аксиом этот вопрос неразрешим, и у нас нет другого исхода, как обратиться за ответом к опыту. Опыт в виде рис. 55 говорит, что *существует неинволюционная параболическая гомология. Мы примем это утверждение как новую аксиому.* Из нее немедленно следует, что все параболические гомологии неинволюционны, так что инволюционные гомологии являются гиперболическими.

168. Все выводы, которые мы сделаем на основании установленных до сих пор аксиом, включая новую, будут верны не только для действительного пространства, но также и для „пространств“ с конечным — именно четным — числом „точек“ на „прямой“.

Можно было бы принять за аксиому утверждение, противоположное новой аксиоме, и построить геометрию, в которой параболические гомологии инволюционны. Все теоремы этой геометрии оправдывались бы в пространствах с нечетным числом „точек“ на „прямой“, но находились бы в противоречии со свойствами действительных точек и прямых.

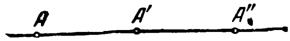


Рис. 59. Прямолинейное перенесение, преобразующее A в A', не возвращает A' обратно в A.

169. Параболическая гомология с бесконечно удаленной осью представляет собой прямолинейное перенесение. Из повседневного опыта читателю известно, что перенесение, которое передвигает точку A в A', не возвращает A' обратно в точку A, а перемещает ее дальше в ту же сторону — в точку A'' (рис. 59). Этот совершенно очевидный факт можно было бы принять за аксиому, взамен той, которую мы только что установили. Но оставаясь в кругу идей проективной геометрии, невозможно отличить прямолинейное перенесение от всякой иной параболической гомологии.

170. Установленная только что аксиома о параболической гомологии называется обычно аксиомой Фано, который впервые (1891 г.) формулировал ее и обосновал ее необходимость. Формулировка аксиомы нами изменена, но идеи Фано переданы довольно точно. В них есть что-то детское: игрушечные „пространства“, „нарочные“ „точки“ и „прямые“... Но эти простые, наивные, почти забавные рассуждения знакомят нас с одним из самых замечательных достижений геометрической мысли.

Оказывается, что геометрические понятия („прямая“, „точка“, „плоскость“, „пространство“) и аксиомы, а стало быть и теоремы, допускают различное толкование и что возможны различные геометрии: приняв некоторые аксиомы, — получим одну геометрию, заменив какую-либо аксиому противоположным утверждением, — получим другую геометрию. Только опыт может решить, какая из этих геометрий соответствует свойствам действительных точек, прямых, плоскостей.

171. Около 2000 лет математики всех стран и народов бились над доказательством известного постулата (допущения) о параллельных прямых (упомянутого в п. 154). Примерно сто двадцать лет назад профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский пришел к убеждению, что этот постулат недоказуем, т. е. не может быть выведен из других аксиом геометрии. Построив геометрию, в которой через каждую точку проходят две прямые, параллельные данной прямой, Лобачевский тем самым оправдал свое предположение. Очевидно, с аксиомой Фано дело обстоит так же, как с постулатом о параллельных прямых. В седьмой главе мы еще вернемся к этому вопросу и познакомим читателя с геометрией Лобачевского.

Умножение инволюционных гомологий

172. Основной вопрос, интересующий нас в этом параграфе, таков: когда произведение двух инволюционных гомологий является инволюционной же гомологией?

Если неизменные элементы одной гомологии не являются двойными в другой и обе гомологии не имеют общих неизменных элементов, то произведение их не гомология. Стало быть, необходимо рассмотреть только такие случаи умножения, когда

1) центр первой гомологии лежит на оси второй, а центр второй — на оси первой,

и 2) обе гомологии имеют либо общий центр, либо общую ось, либо и то и другое вместе.

Начнем с первого случая.

173. Докажем, что произведение двух инволюционных гомологий с взаимно инцидентными неизменными элементами есть гомология и притом инволюционная. Обозначим две такие гомологии через π и ρ (рис. 60, *I*). Прежде всего, установим, что их произведение есть инволюционное преобразование, т. е., что $(\pi\rho)^2 = 1$.

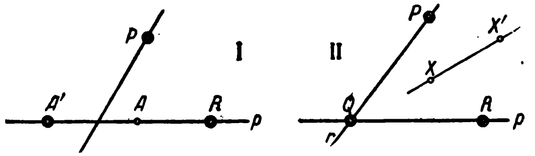


Рис 60. Произведение инволюционных гомологий π (центр P, ось p) и ρ (центр R, ось r) есть инволюционная гомология с центром pr и осью PR.

Выберем какую-либо точку A на оси одной из этих гомологий, например на оси π, и посмотрим, в какую точку она преобразуется коллинеацией $\pi\rho\pi\rho$. Для этого выполним над точкой A сперва преобразование π, затем ρ, потом снова π, наконец, опять ρ.

Очевидно, π преобразует $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$.

Пусть ρ преобразует $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$.

Точка A' тоже лежит на оси π (ибо ось π — двойная прямая гомологии ρ).

Поэтому π преобразует $\begin{pmatrix} A' \\ A' \end{pmatrix}$.

Наконец, ρ преобразует $\binom{A'}{A}$,
так как ρ, по условию, инволюционная гомология.

Значит, произведение $\pi\rho\pi\rho$ преобразует точку A в самое себя. Таким образом, все точки оси π являются двойными в коллинеации $\pi\rho\pi\rho$; стало быть, эта прямая — неизменная в коллинеации $\pi\rho\pi\rho$.

Следовательно, рассматриваемая коллинеация представляет собой гомологию.

Точно так же докажем, что и ось гомологии ρ является неизменной прямой в гомологии $\pi\rho\pi\rho$. Но гомология с двумя неизменными прямыми есть тождественное преобразование (п. 46):

$$\pi\rho\pi\rho = (\pi\rho)^2 = 1,$$

т. е. $\pi\rho$ — инволюционное преобразование.

Отсюда немедленно следует, что $\pi\rho$ является инволюционной гомологией. Если коллинеация $\pi\rho$ преобразует какую-либо точку X в X' (рис. 60, *II*), то она же преобразует X' в X так что прямая XX' преобразуется ею в прямую $X'X$, т. е. в самое себя.

Значит, через каждую точку плоскости проходит двойная прямая коллинеации $\pi\rho$. Но все двойные прямые произведения двух гомологий, кроме прямой, соединяющей их центры, проходят через точку пересечения их осей (см. п. 126).

Отсюда легко заключить, что все прямые, проходящие через точку пересечения осей π и ρ, являются двойными прямыми коллинеации $\pi\rho$, стало быть, эта точка оказывается неизменной в преобразовании $\pi\rho$, и, стало быть, $\pi\rho$ — гомология. Предложим читателю указать ее ось.

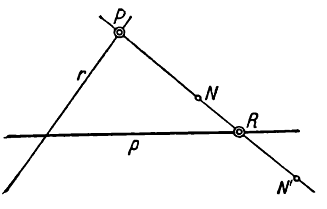


Рис. 61. Инволюционные гомологии π и ρ одинаковым образом преобразуют точки прямой PR.

174. Из доказанной теоремы вытекает такое следствие: *все инволюционные гомологии с взаимно инцидентными неизменными элементами одинаковым образом преобразуют точки прямой, соединяющей их центры,* т. е. если одна из них π преобразует точку N этой прямой в N' (рис. 61), то другая ρ тоже преобразует N в N'.

Действительно, гомология ρ непременно должна вернуть точку N' в N, иначе точка N не была бы двойной в гомологии $\pi\rho$, между тем, прямая PR единственная кандидатка на роль оси этой гомологии.

Итак, ρ преобразует $\binom{N'}{N}$. Но ρ — инволюционная гомология. Значит, она же преобразует $\binom{N}{N'}$ совершенно так же, как π.

175. Предыдущий результат легко обобщить.

Рассмотрим две инволюционные гомологии π и π' с общим центром P, оси которых пересекаются в точке R (рис. 62). Легко доказать, что обе они устанавливают на прямой PR одно и то же преобразование. Действительно, сопоставим гомологии π и π' с вспомогательной инволюционной гомологией ρ, ось которой проходит через P, а центр лежит в точке R. Согласно только что доказанному, π и π' преобразуют точки прямой PR так же, как ρ, т. е. одинаково.

176. Доказанное в пп. 174 и 175 можно резюмировать так:

Все инволюционные гомологии, для которых точки P и R являются двойными и оси которых отличны от прямой PR, устанавливают на этой прямой одно и то же преобразование.

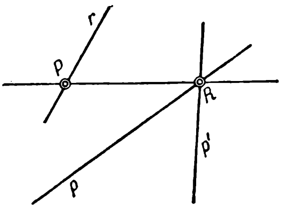


Рис. 62. Инволюционные гомологии π (центр P, ось p) и π' (центр P, ось p') одинаковым образом преобразуют точки прямой PR.

177. В частности (этот частный случай особенно важен), *все инволюционные гомологии с общим центром и общей осью устанавливают одно и то же преобразование во всей плоскости.*

Иначе говоря, *ось и центр вполне определяют инволюционную гомологию.*

178. Перейдем теперь к умножению гомологий с общими неизменными элементами.

Произведение двух инволюционных гомологий с общим центром и общей осью есть тождественное преобразование, так как „две“ такие гомологии в действительности, как только что доказано, представляют собой одну и ту же инволюционную гомологию. Если же две инволюционные гомологии π и ρ имеют общую ось, но разные центры, то произведение их $\pi\rho$ есть гомология с той же осью, причем центр ее лежит на прямой, соединяющей центры π и ρ (почему)?

Допустим, что центром $\pi\rho$ является некая точка X этой прямой (рис. 63). Если π преобразует $\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$, то ρ преобразует $\begin{pmatrix} X' \\ X \end{pmatrix}$ — иначе точка X не была бы двойной точкой гомологии $\pi\rho$. Но так как π и ρ — инволюционные гомологии, то обе они преобразуют $\begin{pmatrix} X, & X' \\ X', & X \end{pmatrix}$.

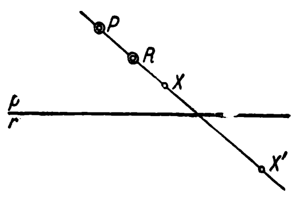


Рис. 63. Произведение двух инволюционных гомологий π и ρ с общей осью ($p \equiv r$) есть параболическая гомология с той же осью.

Таким образом, гомологии π и ρ имеют общую ось и общую пару соответственных точек. Стало быть, они с о в п а д а ю т, так как ось и пара соответственных точек вполне определяют инволюционную гомологию (п. 150). Однако это противоречит предположению о том, что π и ρ обладают р а з н ы м и ц е н т р а м и. В чем же дело? Очевидно в том, что ни одна из точек, лежащих вне общей оси π и ρ, не может быть двойной точкой их произведения.

Стало быть, произведение двух инволюционных гомологий с общей осью, но разными центрами, является п а р а б о л и ч е с к о й гомологией.

Принцип двойственности позволяет сейчас же распространить это заключение на произведение двух инволюционных гомологий с общим центром, но разными осями.

Гармоническая инволюция

179. Все инволюционные гомологии, для которых точки P и R являются двойными и оси которых не совпадают с прямой PR, устанавливают на этой прямой одно и то же преобразование (п. 176). Назовем это преобразование *гармонической инволюцией* и рассмотрим его подробнее.

Гармоническая инволюция преобразует инволюционно точки прямой в точки той же прямой. При этом две, и только две, точки преобразуются сами в себя, т. е. являются двойными точками преобразования. Две двойные точки вполне определяют гармоническую инволюцию, т. е. *все гармонические инволюции на прямой, которые оставляют две точки ее на своих местах, преобразуют все точки этой прямой одинаковым образом.* Это утверждение представляет собой простой пересказ доказанного в п. 176.

Если гармоническая инволюция π преобразует точку A в A', то она же возвращает A' обратно в A, так что π^2 есть тождественное преобразование: $\pi^2 = 1$.

180. *Пару точек, соответственных в гармонической инволюции, будем называть гармонически сопряженными друг с другом относительно пары двойных точек этой инволюции.*

Иначе говоря, если гармоническая инволюция на прямой a преобразует $\begin{pmatrix} P, & R, & A \\ P, & R, & A' \end{pmatrix}$, стало быть $\begin{pmatrix} A' \\ A \end{pmatrix}$, то будем говорить, что точки A и A' гармонически сопряжены относительно пары точек P и R.

181. Рассмотрим какой-либо полный четырехугольник с диагональными точками P и Q, т. е. полный четырехугольник, у которого две стороны проходят через точку P, две другие через Q. Остается еще одна пара противоположных сторон. Они пересекают диагональ PQ в точках, которые мы обозначим через M и N. Зададим инволюционную гомологию π с центром в диагональной точке P, преобразующую наш четырехугольник в самое себя. Ось этой гомологии, как мы знаем (см. п. 149), проходит через две другие диагональные точки, в том числе через точку N. Каждую из сторон, проходящих через P, и диагональ PQ гомология π преобразует в самих себя; стороны, проходящие через Q, — друг в друга, а стороны, проходящие через M и N, тоже друг в друга.

Таким образом, π преобразует $\begin{pmatrix} P, & Q, & M, & N \\ P, & Q, & N, & M \end{pmatrix}$, т. е. π устанавливает на диагонали PQ гармоническую инволюцию с двойными точками P и Q, преобразующую $\begin{pmatrix} M, & N \\ N, & M \end{pmatrix}$.

Иначе говоря, *пара противоположных сторон полного четырехугольника пересекает диагональ его в точках, гармонически со-*

пряженных относительно диагональных точек, лежащих на данной диагонали (рис. 64).

182. Теперь нас не затруднит задача „о построении четвертой гармонической“: построить точку, гармонически сопряженную с данной точкой M относительно заданной пары точек P и Q.

Решение тотчас вытекает из предыдущей теоремы. Строим полный четырехугольник, у которого одна пара противоположных сторон проходит через точку P, другая пара — через Q, пятая сторона — через M. Тогда шестая сторона пройдет через искомую точку N, гармонически сопряженную с M относительно пары точек P и Q.

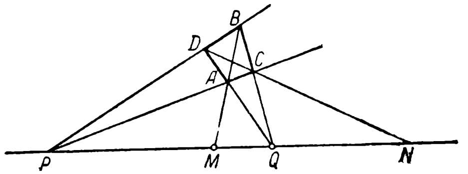


Рис. 64. Точки M и N гармонически сопряжены относительно пары точек P, Q.

Построение не представляет никаких трудностей: проводим сперва совершенно произвольную пару сторон через точку P, затем произвольную третью сторону через M; ее пересечение с уже построенными двумя сторонами даст две вершины четырехугольника — A и B. Далее проводим пару сторон, пересекающихся в диагональной точке Q; для этого соединяем вершины A и B с точкой Q. Пересечение сторон AQ и BQ со сторонами AP и BP определяет еще две вершины четырехугольника — C и D. Все четыре вершины и пять сторон четырехугольника построены. Проводим шестую сторону CD. Она пересекает диагональ PQ в искомой точке N, гармонически сопряженной с точкой M относительно пары точек P и Q.

Несмотря на то, что в построении очень много произвола, задача допускает только одно решение: в самом деле, гармоническая инволюция вполне определена двумя двойными точками, значит, существует только одна точка, гармонически сопряженная с данной точкой M относительно заданной пары точек P и Q.

183. Применим ко всему сказанному принцип двойственности. Чтобы найти преобразование, двойственное гармонической инволюции, нужно выяснить, какое понятие двойственно понятию „точки прямой“.

„Точки прямой“ — это точки инцидентные с одной прямой. Двойственный образ состоит из прямых, инцидентных с одной точкой.

Назовем совокупность прямых плоскости, инцидентных с одной точкой (т. е. проходящих через одну точку), ***пучком*** прямых; прямые пучка — его ***лучами***, а точку пересечения всех лучей пучка — ***вершиной*** его. Аналогично назовем совокупность точек, инцидентных с одной прямой, ***рядом точек***; прямую, на которой лежат все точки ряда — ***носителем*** его.

Очевидно, ряд точек и пучок прямых — двойственные образы. Их называют образами первой ступени.

184. В элементарной геометрии прямую, как и другие линии, часто называют геометрическим местом точек. Это выражение основано на представлении о прямой, как о совокупности точек. В проективной геометрии такое представление должно быть отброшено, так как оно противоречит принципу двойственности: прямую и точку следует рассматривать как основные равноправные образы: прямая не построена из точек, как точка не построена из прямых. Совокупность коллинейных точек — это не прямая, а ряд точек.

Ряд точек, лежащих на прямой a, мы будем обозначать через a (как и самую прямую). Точно так же и пучок прямых с вершиной A обозначается через A.

185. Преобразование, которое производит инволюционная гомология среди точек своей двойной прямой, мы назвали гармонической инволюцией на прямой.

Рассмотрим пучок, вершина которого лежит на оси инволюционной гомологии. Гомология преобразует прямые такого пучка в прямые того же пучка инволюционно, т. е. устанавливает инволюционное преобразование прямых пучка в прямые того же пучка. Это преобразование назовем гармонической инволюцией в пучке.

Очевидно, гармоническая инволюция в пучке есть преобразование, двойственное гармонической инволюции среди точек ряда.

186. Легко усмотреть, что гармоническая инволюция в пучке оставляет на месте две (и только две) прямые: ось инволюционной гомологии, устанавливающей эту инволюцию, и тот луч пучка, который проходит через центр гомологии. Эти два двойных луча вполне определяют гармоническую инволюцию.

187. Пара лучей соответственных в гармонической инволюции, называется гармонически сопряженной относительно двойных лучей пучка. Иными словами, если гармоническая инволюция преобразует лучи $\begin{pmatrix} p, q, m, n \\ p, q, n, m \end{pmatrix}$, то лучи m и n называются гармонически сопряженными относительно пары лучей p и q.

Пусть $(m, n;\ p, q)$ гармоническая четверка лучей пучка A (т. е. пара лучей m, n гармонически сопряжена относительно пары p, q).

Пересечем пучок A прямой a и обозначим точки пересечения (см. рис. 65)

$$\begin{aligned} ma &\equiv M \\ na &\equiv N \\ pa &\equiv P \\ qa &\equiv Q \end{aligned}$$

Покажем, что *точки M, N, P, Q образуют гармоническую четверку,* т. е. что *пара точек M, N гармонически сопряжена относительно пары лучей P, Q.*

188. В самом деле, рассмотрим инволюционную гомологию с центром P и осью q. Она оставляет лучи p и q на месте, стало быть, преобразует $\begin{pmatrix} m, n \\ n, m \end{pmatrix}$. Она же оставляет точки P и Q на месте, а точки M и N преобразует друг в друга. Значит пара точек M, N гармонически сопряжена с парой точек P, Q.

189. Обратно, *если $(M, N; P, Q)$ гармоническая четверка точек некоторого ряда a, а A произвольная точка вне a, то лучи (AM, AN, AP, AQ) тоже образуют гармоническую четверку.* Словом, при пересечении гармонической четверки лучей какой-либо прямой получаем гармоническую четверку точек. Наоборот, проектируя гармоническую четверку точек из какой-либо точки, получим гармоническую четверку лучей.

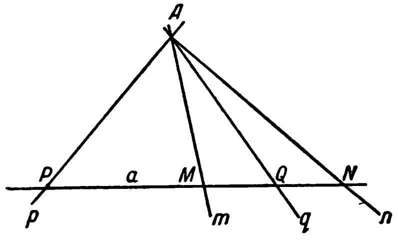


Рис. 65. Если m, n, p, q — гармоническая четверка лучей, то $M, N; P, Q$ — гармоническая четверка точек, и обратно.

Это важное свойство гармонических четверок точек и лучей можно выразить так: *при проектировании и сечении гармонизм сохраняется.*

Выражение „гармонизм сохраняется“ нужно понимать в том смысле, что любой гармонической четверке элементов соответствует гармоническая же четверка элементов.

190. Столь простая и тесная связь между гармоническими четверками точек и лучей позволяет свести построение четвертого гармонического луча к построению четвертой гармонической точки и наоборот.

Но свойство „гармонизма“ сохраняться при проектировании и сечении имеет гораздо бо́льшее значение.

191. Рассмотрим цепь проектирований и сечений. Пусть $a[X]$ обозначает ряд точек на прямой a. Спроектируем $a[X]$ из точки A и сопоставим с произвольной точкой X ряда $a[X]$ проектирующий ее луч x пучка A. В результате этой операции получим пучок $A[x]$ с вершиной A и переменным лучом x.

Соответствие, которое относит каждой точке ряда проектирующий ее луч пучка, назовем перспективным. Будем говорить, что *ряд точек $a[X]$ и пучок $A[x]$ перспективны.* Это записываем так:

$$a[X] \overset{=}{\wedge} A[x].$$

Пересечем пучок $A[x]$ какой-либо прямой b и сопоставим с произвольным лучом x точку Y его пересечения с этой прямой. Получим ряд точек $b[Y]$, перспективный пучку $A(x)$:

$$A[x] \overset{=}{\wedge} b[Y].$$

Можно сказать, что *проектирование преобразует ряд точек в перспективный ему пучок, а сечение преобразует пучок в перспективный ему ряд точек.*

192. Посредством более или менее длинной цепи проектирований и сечений ряд точек может быть преобразован в новый ряд точек или в пучок.

Если цепь состоит из одного проектирования и одного сечения, то исходный и конечный ряды точек тоже называются перспективными. Иначе говоря, *два ряда точек называются перспективными, если прямые, соединяющие соответственные точки обоих рядов, пересекаются в одной точке* (центре перспективы) (см. рис. 66).

193. Аналогичным образом обстоит дело с пучками: одно сечение и одно проектирование преобразуют пучок в перспективный ему пучок. Иными словами, *два пучка перспективны, если соответственные лучи их пересекаются на одной прямой* (оси перспективы).

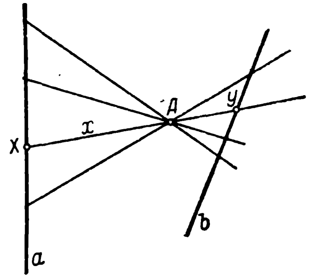


Рис. 66. Ряд точек a (X) перспективен ряду точек b (Y) и пучку A (x); точка A — центр перспективы.

194. Два образа первой ступени (два пучка, два ряда или пучок и ряд), связанные сколь угодно длинной цепью проектирований и сечений, называются *проективными*[1]. Перспективное соответствие есть частный случай проективного. Если

$a\,[X] \overline{\overline{\wedge}} A\,[x] \overline{\overline{\wedge}} b\,[Y] \overline{\overline{\wedge}} B\,[y] \overline{\overline{\wedge}} c\,[Z]$ и т. д.,

то ряд точек $a\,[X]$ перспективен пучку $A\,[x]$, а также ряду $b\,[Y]$, но не перспективен, а только *проективен* пучку $B\,[y]$ и ряду $c\,[Z]$ (см. рис. 67). Проективность обозначают знаком $\overline{\wedge}$: $a\,[X] \overline{\wedge} c\,[Z]$.

Очевидно, в проективном соответствии, как и в перспективном гармонизм сохраняется, т. е. *четыре элемента, проективно соответственные гармонической четверке, образуют гармоническую четверку.*

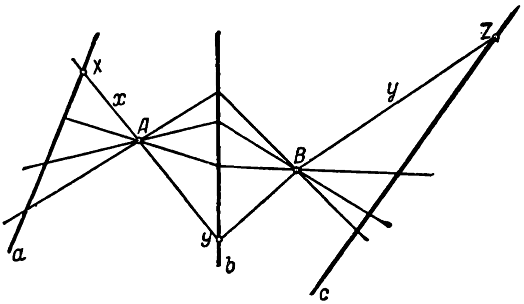


Рис. 67. Ряд точек a (X) проективен ряду точек c (Z).

195. Докажем такую лемму о проективном преобразовании четырех коллинейных точек: *любые две пары коллинейных точек можно преобразовать проективно так, что точки каждой пары преобразуются друг в друга* (стало быть инволюционно).

Иначе говоря, если A, B, C, D произвольные четыре точки одной прямой, то существует проективное преобразование, преобразующее $\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ B, & A, & D, & C \end{pmatrix}$.

---

[1] Позднее мы дадим другое определение проективных образов первой ступени.

Докажем это, построив нужную цепь проектирований и сечений (см. рис. 68).

Спроектируем сперва точки A, B, C, D из произвольного центра P на произвольную прямую, проходящую через точку D.

1-е проектирование (центр P) преобразует $\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ A', & B', & C', & D \end{pmatrix}$. Далее спроектируем полученные точки из центра A на прямую PC:

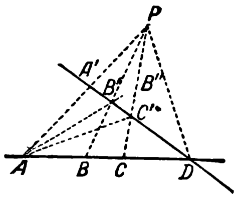


Рис. 68.

2-е проектирование (из центра A) преобразует $\begin{pmatrix} A', & B', & C', & D \\ P, & B', & C', & C \end{pmatrix}$.

Наконец, спроектируем полученные точки из центра B' на исходную прямую.

3-е проектирование (из центра B') преобразует $\begin{pmatrix} P, & B'', & C', & C \\ B, & A, & D, & C \end{pmatrix}$.

Очевидно, цепь из трех рассматриваемых проектирований преобразует $\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ B, & A, & D, & C \end{pmatrix}$, что и требовалось.

196. Из этой леммы вытекает важное следствие: *если пара точек M, N гармонически сопряжена относительно пары* точек P, Q, *то и наоборот,* пара точек P, Q *гармонически сопряжена относительно пары точек* M, N. Иначе говоря, если $(M, N; P, Q)$ гармоническая четверка, то $(P, Q; M, N)$ тоже гармоническая четверка.

Действительно, подвергнув гармоническую четверку точек $(M, N; P, Q)$ проективному преобразованию π, преобразующему $\begin{pmatrix} M, & N, & P, & Q \\ P, & Q, & M, & N \end{pmatrix}$, получим такую четверку точек: P, Q; M, N—тоже гармоническую, так как преобразование π является проективным, стало быть, сохраняет гармонизм.

Преобразование симметрии

197. Применим наши сведения об инволюционных гомологиях к некоторым частным случаям.

Мы уже упомянули о том, что осевая симметрия (отражение) представляет собой инволюционную гомологию. Ось симметрии является осью гомологии. Нетрудно найти и центр. Симметрия преобразует параллельные прямые в параллельные же прямые. Стало быть, центр осевой симметрии лежит на бесконечно удаленной прямой. Далее, прямые, перпендикулярные к оси симметрии, преобразуются ею сами в себя. Значит, они проходят через центр.

Иначе говоря, центр осевой симметрии лежит в бесконечно удаленной точке прямых, перпендикулярных к ее оси. Ось и центр вполне определяют инволюционную гомологию. Поэтому можно сказать, что *осевая симметрия есть инволюционная гомология, центром которой является бесконечно удаленная точка прямых, перпендикулярных к ее оси* (рис. 54).

198. Если оси двух симметрий π и ρ взаимно перпендикулярны (рис. 69), то ось π проходит через центр ρ, а ось ρ — через центр π. Произведение двух инволюционных гомологий с взаимноинцидентными неизменными элементами есть инволюционная гомология (п. 173). Центр ее лежит на пересечении осей гомологий

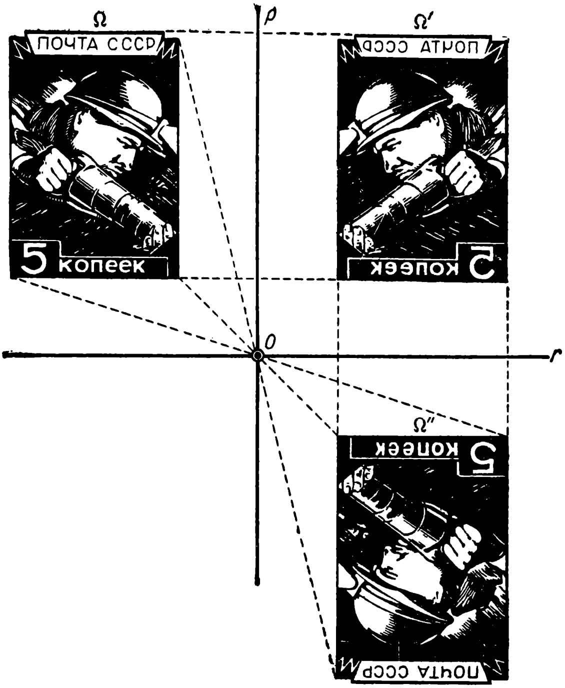


Рис. 69. Отражение в прямой p и затем второе отражение в прямой r, перпендикулярной к p, преобразуют рисунок Ω в симметричный ему относительно точки O рисунок Ω''.

сомножителей, а ось проходит через их центры. В данном случае осью инволюционной гомологии $\pi\rho$ является бесконечно удаленная прямая.

Инволюционная гомология с бесконечно удаленной осью представляет собой симметрию относительно центра — центральную симметрию, которая как бы поворачивает плоскость вокруг центра на полоборота. Выполнив это преобразование два раза подряд, получим полный оборот: каждая точка возвращается в исходное положение.

Итак, *произведение двух осевых симметрий* (отражений) *с взаимно перпендикулярными осями есть центральная симметрия, т. е. полуоборот вокруг точки пересечения осей.*

199. Теперь мы можем избавить человечка, о котором шла речь во второй главе, от необходимости возвращаться из путешествия, пятясь задом наперед. Желая из точки A повернуть в обратную сторону, путешественник производит инволюционную гомологию с бесконечно удаленной осью и с центром в точке A, — тем самым он совершает полуоборот, т. е. поворачивается лицом назад. Но попрежнему, сходя с дороги, на которой он сотворен нашей фантазией, человек вынужден продвигаться вперед бочком. Он только может, если хочет, выставить вперед вместо правого левое плечо и наоборот (почему?)

Рис. 70. Отражение рисунка Ω в прямой p и последующее отражение полученного рисунка Ω' в прямой r, параллельной p, преобразует Ω в Ω''. Такой же результат можно получить посредством прямолинейного перенесения.

200. Рассмотрим умножение двух осевых симметрий с параллельными осями (рис. 70). Такие симметрии имеют общий центр (почему?). Произведение двух инволюционных гомологий с общим центром, но разными осями, представляет собой параболическую гомологию с тем же центром (п. 178). Ось ее проходит через точку пересечения осей гомологий-сомножителей — в данном случае ось является бесконечно удаленной прямой (почему?). Значит, *произведение двух осевых симметрий с параллельными осями есть прямолинейное перенесение.*

201. В практической жизни иногда пользуются осевыми симметриями для выполнения прямолинейного перенесения. Например, чтобы переместить тяжелую плиту, просовывают под нее лом с одной стороны и переворачивают ее вокруг противоположного ребра (рис. 71). Это симметричное преобразование плиты. Осью его является ребро, вокруг которого совершен поворот. После первого поворота (отражения) плита лежит нижней стороной вверх — путем прямолинейного перенесения нельзя получить такой результат. Второй поворот вокруг другого ребра, параллельного первому, снова обращает плиту нижней стороной вниз. Результат этих двух поворотов (отражений) совершенно таков, как если бы плита была прямолинейно перенесена вдоль прямых, перпендикулярных к осям отражений (ребрам).

Рис. 71. Четное число переворачиваний плиты вокруг двух параллельных ребер равносильно прямолинейному перенесению ее.

202. Если перемножаются две осевые симметрии, оси которых не перпендикулярны и не параллельны, то произведение их не может быть инволюционной гомологией и вообще является не гомологией (почему?). Значит, перемножив две такие осевые симметрии, мы получаем коллинеацию без неизменных элементов, но с одной двойной точкой (таковой является точка пересечения осей гомологий-сомножителей) и одной двойной прямой (таковой является прямая, соединяющая центры гомологий-сомножителей — в данном случае это бесконечно удаленная прямая). Каждая из перемножаемых симметрий преобразует любую фигуру в равную ей, но перевернутую наизнанку фигуру. Выполнив это „переворачивание“ дважды, получим фигуру, просто равную исходной. Что же это за коллинеация, которая преобразует каждую фигуру в равную ей фигуру и удерживает неподвижной одну точку плоскости? Это *вращение* (рис. 72).

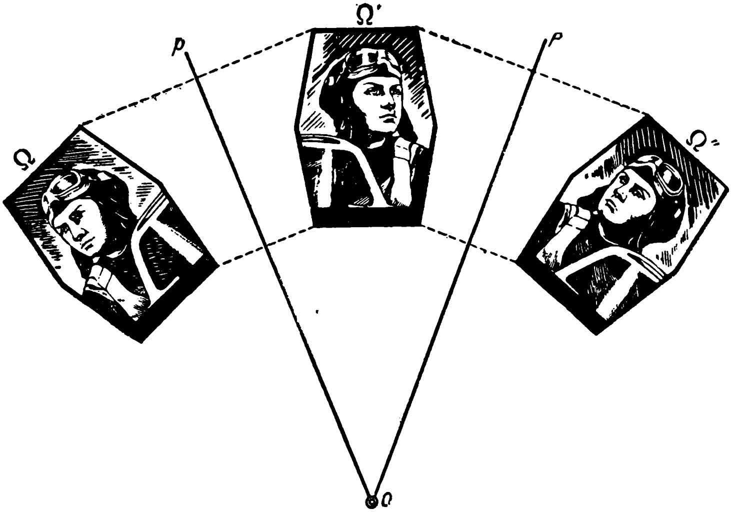


Рис. 72. Произведение отражения в прямой p и отражения в прямой r равносильно повороту вокруг точки O.

Итак, мы нашли второе имя для очень важного в практической жизни преобразования — вращения: *вращение есть коллинеация, которая может быть представлена в виде произведения двух отражений, т. е. инволюционных гомологий, центры коих лежат в бесконечно удаленных точках прямых, перпендикулярных к их осям.* В таком виде это определение еще непригодно для того, чтобы установить вращение в плоскости с произвольной „бесконечно удаленной“ прямой, потому что мы пока не можем указать, какие две прямые такой плоскости следует считать взаимно перпендикулярными.

203. Резюмируем. Произведение двух симметрий с непараллельными осями есть вращение (поворот) вокруг точки пересечения их осей. В частном случае, если оси взаимно перпендикулярны, в произведении получается особый вид вращения — полуоборот (п. 198). Если же оси перемножаемых симметрий параллельны, т. е. пересекаются в бесконечно удаленной точке, то произведение является прямолинейным перенесением (п. 200).

На этом основании иногда говорят, что прямолинейное перенесение представляет собой поворот вокруг бесконечно удаленной точки.

204. Произведение двух центральных симметрий (полуоборотов) с разными центрами есть тоже параболическая гомология с бесконечно удаленной осью (почему?), т. е. представляет собой прямолинейное перенесение вдоль прямой, соединяющей центры перемножаемых симметрий. (Рекомендуем читателю самому сделать рисунок и сравнить его с 47). Получается весьма стройная картина: *произведение двух осевых симметрий есть вращение; произведение двух центральных симметрий — прямолинейное перенесение.*

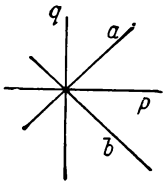


Рис. 73. Симметрия с осью p переводит прямую a в прямую b, а прямую q — в самое себя; a, b, p, q — гармоническая четверка лучей.

Необходимо тут же указать на существенное различие между вращениями и прямолинейными перенесениями. Прямолинейные перенесения образуют группу, между тем как вращения не образуют группы, потому что произведение двух вращений может быть не вращением, а, как мы это только что видели на примере полуоборотов, прямолинейным перенесением.

Метрические свойства гармонического сопряжения

205. Пусть симметрия с осью p преобразует прямую a в b (рис. 73). Прямая p является биссектрисой одного из двух углов, образованного прямыми a и b. Биссектриса смежного угла (обозначим ее через q) перпендикулярна к p, стало быть, тоже преобразуется симметрией в самое себя. Значит, пара прямых a и b гармонически сопряжены относительно пары прямых p и q. Наоборот, пара p, q гармонически сопряжена относительно пары a, b, т. е. *биссектрисы двух смежных углов гармонически сопряжены относительно сторон этих углов.*

206. Пусть p и q биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине $C \triangle ABC$ (рис. 74). На пересечении гармонической четверки лучей (p, q; a, b) с основанием треугольника получаем гармоническую четверку точек: (P, Q; A; B).

Согласно известной теореме элементарной геометрии о биссектрисах внутреннего и внешнего углов треугольника заключаем, что

$$\frac{AP}{BP} = -\frac{AQ}{BQ}.$$

Знак „—" указывает, что если отрезки AQ и BQ одинаково направлены, то AP и BP направлены в противоположные стороны.

Иными словами, *две точки, гармонически сопряженные относительно концов отрезка, делят отрезок в одном и том же отношении, — но одна внешним, а другая внутренним образом.*

207. На основании этого свойства можно дать новое (метрическое) решение задачи о построении четвертой гармонической точки или прямой. Чтобы найти точку, гармонически сопряженную с точкой M относительно пары точек P и Q, достаточно построить треугольник с основанием PQ так, чтобы биссектриса внутреннего (или внешнего — если M лежит вне отрезка PQ) угла при вершине C треугольника проходила через точку M. Тогда другая биссектриса угла при вершине C пересечет основание его (или продолжение) в искомой точке N, гармонически сопряженной с точкой M относительно пары точек P, Q.

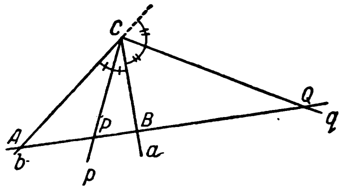


Рис. 74. p и q — биссектрисы внутреннего и внешнего угла треугольника ABC; A, B, P, Q — гармоническая четверка точек.

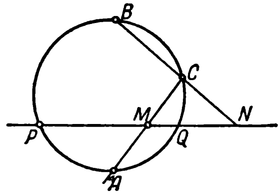


Рис. 75. Построение точки N, гармонически сопряженной с точкой M относительно PQ.

208. Построение можно выполнить так. Начертим окружность, проходящую через точки P и Q; разделим обе дуги окружности с концами P и Q пополам; обозначим их середины через A и B. Соединим одну из этих точек, например, A с M и обозначим точку пересечения прямой AM с окружностью через C. Прямая BC пересечет прямую PQ в искомой точке N, так как AC есть биссектриса одного из углов при вершине C $\triangle PCQ$, а перпендикулярная к ней прямая BC является биссектрисой смежного с ним угла (см. рис. 75).

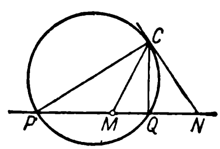


Рис. 76. Новый вариант построения гармонической четверки точек.

209. Мы получим другой способ решения, если построим треугольник, биссектрисы углов при вершине которого проходят через точки P и Q, а боковые стороны через данную точку M и искомую точку N. Так как биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, то вершина C $\triangle CMN$ должна лежать на окружности, построенной на отрезке PQ, как на диаметре. Взяв точку C произвольно на этой окружности, проведем боковую сторону CM $\triangle CMN$; затем проводим вторую сторону CN так, чтобы прямая CQ была биссектрисой внутреннего или внешнего угла при вершине C $\triangle CMN$. Если, в частности, выбрать точку C на перпендикуляре к PQ, восставленном из точки M, то прямая CN, как легко показать, будет касаться окружности (см. рис. 76).

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРОЕКТИВНОЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ОБРАЗАМИ ПЕРВОЙ СТУПЕНИ

Элементы, определяющие коллинеацию

210. В предыдущей главе мы обнаружили, что вращение принадлежит к числу коллинеаций без неизменных элементов. Это заставляет нас приступить сейчас к изучению таких преобразований.

Коллинеация представляет собой преобразование более сильное, чем гомология. С помощью гомологии, например, не всякие три точки можно преобразовать в определенные три точки, а с помощью коллинеации это всегда возможно. Более того, посредством коллинеации можно даже любые четыре точки преобразовать в любые четыре точки, если каждые три точки первой четверки (а равно и второй) не коллинейны. В этом, конечно, нет ничего странного: то, что недостижимо посредством одной гомологии, вполне достижимо с помощью нескольких последовательных гомологий.

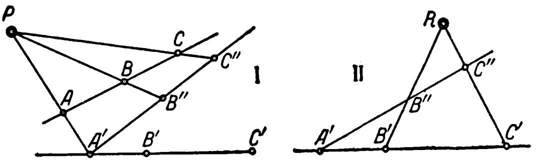


Рис. 77. Произведение двух гомологий преобразует точки A, B, C в точки A', B', C'.

Докажем сейчас высказанные утверждения.

211. Прежде всего покажем, что любые три коллинейные точки (например A, B, C) можно преобразовать в три произвольные коллинейные точки A', B', C' (рис. 77, *I*). Посредством одной гомологии это неосуществимо, но может быть выполнено с помощью двух последовательных гомологичных преобразований. Первую гомологию π зададим так, чтобы она преобразовала $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$, что всегда выполнимо. Эта гомология водворяет точку A на полагающееся ей место, а точки B и C преобразует в какие-то точки B'' и C'', коллинейные с точкой A' (почему?). Остается задать вторую гомологию ρ, которая, удерживая точку A' на месте, преобразует $\begin{pmatrix} B'', C'' \\ B', C' \end{pmatrix}$. Это тоже всегда выполнимо (рис. 77, *II*): центром ρ следует выбрать точку пересечения прямых $B''B'$ и $C''C'$, а ось провести через A'. Очевидно, произведение $\pi\rho$ преобразует $\begin{pmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \end{pmatrix}$. Это и есть искомая коллинеация.

212. Теперь докажем, что *любые 4 точки A, B, C, D, неколлинейные по три, могут быть преобразованы в 4 произвольные, но, разумеется, тоже неколлинейные по три точки A', B', C', D'*, (рис. 78, *I*). Прежде всего зададим коллинеацию π, которая преобразует A в A', B в B' и, кроме того, точку пересечения прямых AB и CD (обозначим ее через X) в точку пересечения прямых $A'B'$ и $C'D'$ (обозначим ее через X'). Согласно только что доказанному,

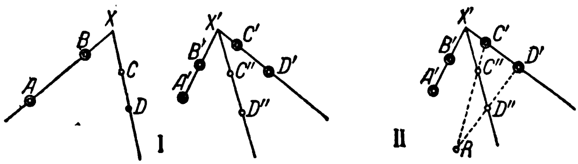


Рис. 78. Произведение трех гомологий преобразует четыре точки A, B, C, D, в A', B', C', D'.

это всегда возможно. Коллинеация π водворяет точки A и B на полагающиеся им места (A в A', B в B'), а точки C и D преобразует в какие-то точки C'' и D'', коллинейные с точкой X' (почему?). Теперь зададим гомологию ρ, удерживающую A' и B' на своих местах и преобразующую $\begin{pmatrix} C'', & D'' \\ C', & D' \end{pmatrix}$; это тоже всегда выполнимо (рис. 78, *II*): осью ρ следует назначить прямую $A'B'$, а центр выбрать на пересечении прямых $C''C'$ и $D''D'$. Очевидно, произведение $\pi\rho$ преобразует

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D, \\ A', & B', & C', & D' \end{pmatrix}.$$

Это и есть искомая коллинеация.

213. Точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, мы условились называть *независимыми*. Точно так же назовем *независимыми* прямые, из которых никакие три не пересекаются в одной точке. Вполне ли определена коллинеация четырьмя парами независимых соответственных точек?

На этот вопрос мы пока ответим несколько уклончиво: во всяком случае пятая пара соответственных точек не вполне произвольна.

Действительно, если коллинеация π преобразует

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ A', & B', & C', & D' \end{pmatrix},$$

то прямым AB и CD она относит прямые $A'B'$ и $C'D'$ (рис. 79); стало быть, точка пересечения первой пары прямых (обозначим ее через X) преобразуется ею в точку пересечения второй пары прямых (обозначим ее через X'). Точно так же точка пересечения прямых AC и BD (обозначим ее через Y) преобразуется в точку пересечения прямых $A'C'$ и $B'D'$ (обозначим ее через Y').

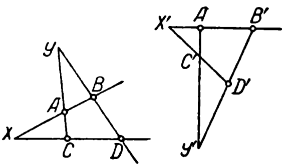


Рис. 79. Всякая коллинеация, преобразующая A, B, C, D в A', B', C', D', преобразует точки X в X' и Y в Y'.

Подчеркиваем, что точки X и Y преобразуются не в произвольные точки, а непременно в те точки, которые могут быть построены по точкам A', B', C', D' совершенно так, как точки X и Y построены по точкам A, B, C, D.

Очевидно, этот результат можно распространить на множество других точек — именно на все точки, которые подобно точкам X и Y могут быть построены по точкам A, B, C, D посредством проведения прямых линий.

С помощью идеи непрерывности этот результат можно распространить на все точки плоскости. Но введение идеи непрерывности в проективную геометрию требует множества дополнительных соображений. Прежде всего нам придется заняться вопросом о расположении точек на прямой.

Расположение точек на прямой

214. Точка может перемещаться по прямой в одном из двух противоположных направлений. Читатель, Вы понимаете, что это значит? Конечно, понимаете. Тем лучше, так как я совершенно лишен возможности объяснить, что такое „направление“. Заметим только, что переход от точки A к точке B на проективной прямой возможен в двух взаимно противоположных направлениях: две точки не определяют направления. Но направление вполне определяется тремя точками: переход от A к B и затем к C имеет вполне определенное направление, которое мы будем обозначать так: напр. ABC.

Мы сейчас формулируем некоторые свойства нового понятия в виде третьей группы аксиом — аксиом порядка.

215. Аксиома III, 1. *Каждые три различные точки ABC на прямой, рассматриваемые в порядке их записи* (т. е. A считается первой точкой, B — второй, C — третьей), *определяют на этой прямой направление.*

216. Аксиома III, 2. *На прямой существуют два и только два различных направления.*

Различные направления на прямой называются взаимно противоположными. Тождество двух направлений обозначается знаком $\equiv$, а противоположность (различие) знаком $\not\equiv$.

217. Аксиома III, 3. *Перестановка двух точек в тройке, определяющей направление, изменяет направление на противоположное,* т. е. напр. $ABC \not\equiv$ напр. $ACB \not\equiv$ напр. CAB.

Легко доказать, что 1) если два направления противоположны третьему, то они тождественны; 2) перестановка двух точек не изменяет тождества или противоположности двух направлений; 3) круговая перестановка точек не изменяет направления.

218. Аксиома III, 4. Если напр. ABC *противоположно* напр. ADC, *то оно совпадает* с напр. DBC, *т. е.*,

если напр. $ABC \not\equiv$ напр. ADC, *то* напр. $ABC \equiv$ напр. DBC.

219. С помощью понятия „направление" можно установить понятие об „*отрезке*".

Совокупность точек X, *таких*, что

$$\text{напр. } ABX \not\equiv \text{ напр. } ABC \qquad (1)$$

называется отрезком $(AB)_C$.

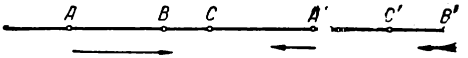


Рис. 80. Тройки ABC и $A'B'C'$ определяют на прямой противоположные направления.

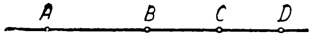


Рис. 81. Если напр. $ABC \not\equiv$ напр. ADC, то напр. $ABC \equiv$ напр. DBC.

Таким образом, отрезок есть множество точек, удовлетворяющих условию (1). Если точка X принадлежит отрезку $(AB)_C$, то пишут $X \in (AB)_C$. Если — не принадлежит, знак $\in$ заменяют знаком $\overline{\in}$ и пишут

$$X \overline{\in} (AB)_C.$$

220. Точки A и B называют концами отрезка $(AB)_C$; они не принадлежат отрезку. Про точку, принадлежащую отрезку, говорят, что она лежит на нем или что она является внутренней точкой отрезка. Про точку, не принадлежащую отрезку и не совпадающую с его концами, говорят, что она лежит вне отрезка; ее называют также внешней точкой отрезка.

Точка C лежит вне отрезка $(AB)_C$, так как не удовлетворяет условию (1).

221. Легко доказать, что если точка C' лежит вне отрезка $(AB)_C$, то отрезки $(AB)_C$ и $(AB)_{C'}$ совпадают.

В самом деле, пусть $X \in (AB)_C$. Это значит, что

$$\text{напр. } ABX \not\equiv \text{ напр. } ABC. \qquad (*)$$

По условию $C' \overline{\in} (AB)_C$.

Это значит, что

$$\text{напр. } ABC' \equiv \text{ напр. } ABC. \qquad (**)$$

Из (*) и (**) получаем

$$\text{напр. } ABX \not\equiv \text{ напр. } ABC', \text{ т. е.}$$

$$X \in (AB)_{C'}.$$

Иными словами, всякая точка отрезка $(AB)_C$ принадлежит отрезку $(AB)_{C'}$. Так же докажем, что и наоборот, всякая точка отрезка $(AB)_{C'}$ принадлежит отрезку $(AB)_C$. Значит, обе совокупности точек совпадают.

222. Теперь можно доказать, что две точки A и B разбивают ряд точек прямой AB на два отрезка, не имеющие общих точек.

Точнее: *если A и B две различные точки, то существуют два и только два отрезка с концами A и B; оба отрезка не имеют общих точек и всякая точка прямой AB* (кроме точек A и B) *принадлежит либо одному из этих отрезков, либо другому.* Такие два отрезка называются *взаимно дополнительными.*

223. Если из двух точек M и N одна принадлежит одному из двух взаимно дополнительных отрезков, с концами A и B, а другая — другому, то говорят, что пара точек A, B разделяет пару точек M, N; если же обе точки M и N принадлежат одному и тому же отрезку с концами A и B, то говорят, что пара точек A, B не разделяет пары точек M, N.

Можно доказать, что „разделение" и „неразделение" есть отношение взаимное.

Можно также доказать, что из четырех точек прямой одна и только одна пара разделяет другую пару, т. е. всегда либо A, B разделяет M, N, либо A, M разделяет B, N, либо A, N разделяет B, M.

224. Если пара точек A, B разделяет M, N, то направление ABM противоположно направлению ABN. Обратно, если направления ABM и ABN противоположны, то пара точек A, B разделяет пару точек M, N.

На доказательстве всех этих утверждений останавливаться не будем.

225. Рассмотрим, наконец, отрезок $(AB)_C$ и направление ABC. Пусть M и N две точки отрезка, причем

$$\text{напр. } AMN \equiv \text{напр. } ABC;$$

тогда говорят, что точка M предшествует точке N в направлении ABC.

Если на некотором отрезке в некотором направлении M предшествует N и N предшествует K, то можно доказать, что M предшествует K. Из двух точек отрезка одна всегда предшествует другой.

Упорядоченные преобразования

226. *Однозначное преобразование точек одной прямой* в *точки другой* (*или той же самой*) *прямой называется упорядоченным, если оно сохраняет тождество* (*а стало быть, и противоположность*) *направлений.* Иными словами, если упорядоченное преобразование π преобразует $\begin{pmatrix} A, B, C; & A_1, B_1, C_1 \\ A_1', B_1', C'; & A_1', B_1', C_1' \end{pmatrix}$, причем

$$\text{напр. } ABC \equiv \text{напр. } A_1B_1C_1,$$

то

$$\text{напр. } A'B'C' \equiv \text{напр. } A_1'B_1'C_1'.$$

227. Упорядоченное преобразование точек прямой в точки той же прямой либо *сохраняет направление* (т. е. преобразует любое направление в тождественное ему), либо *обращает* его (т. е. преобразует в противоположное). В первом случае оно называется преобразованием *прямого* типа, во втором — *обратного*.

228. Если упорядоченное преобразование точек прямой в точки той же прямой преобразует $\begin{pmatrix} A, M, N \\ A, N, M \end{pmatrix}$, то оно представляет собой преобразование обратного типа, так как напр. AMN противоположно напр. ANM (согласно аксиоме III_3).

229. Пусть в рассматриваемом преобразовании имеется еще вторая двойная точка B, так что оно преобразует $\begin{pmatrix} A, B, M, N \\ A, B, N, M \end{pmatrix}$.

Тогда напр. ABM противоположно напр. ABN (преобразование обратного типа). Значит, пара точек A, B разделяет пару точек M, N.

230. Введем теперь последнюю аксиому порядка.

Аксиома III_8. *Проектирование точек одной прямой на другую прямую есть упорядоченное преобразование.*

Иными словами, мы утверждаем, что если точка X пробегает какую-либо прямую в определенном направлении, то ее проекция X' тоже перемещается в определенном направлении.

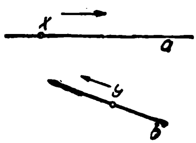


Рис. 82. При упорядочении отображения прямой a на прямую b устанавливается соответствие направлений этих прямых.

231. Отсюда тотчас следует, что гармоническая инволюция есть упорядоченное преобразование и притом обратного типа.

В самом деле, инволюционная гомология, как всякая гомология, может быть получена с помощью нескольких (именно двух) проектирований и, стало быть, устанавливает упорядоченное преобразование точек одной прямой в точки другой (или той же самой) прямой. Таким образом, гармоническая инволюция является упорядоченным преобразованием, и как всякое упорядочное преобразование с двойной точкой, преобразующей пару точек инволюционно, — обратного типа.

232. На основании сказанного в п. 229 можем также утверждать, что пара двойных в гармонической инволюции точек разделяег любую пару соответственных точек. Иными словами, *если две пары точек гармонически сопряжены, то они разделяют друг друга.*

233. Наоборот, *две пары соответственных в гармонической инволюции точек не разделяют друг друга.* В самом деле, если гармоническая инволюция преобразует $\begin{pmatrix} M, N, K, L \\ N, M, L, K \end{pmatrix}$, то направление MNK противоположно направлению NML и, стало быть, тождественно направлению MNL, а это значит, что пара точек M, N не разделяет пары точек K, L.

234. Отсюда такое важное следствие. *Если две пары точек* M, N и K, L *разделяют друг друга, то не существует пары точек, гармонически сопряженных одновременно* с M, N и с K, L.

В самом деле, если бы такая пара точек существовала, то M, N и K, L были бы парами точек, соответственных в гармонической инволюции и не разделяли бы друг друга.

Непрерывность

235. Строгая формулировка того, что мы понимаем под непрерывностью отрезка, принадлежит Дедекинду.

Представим себе, что все точки некоторого отрезка разбиты на два (не пустых) класса так, что 1) каждая точка отрезка принадлежит одному из этих классов и 2) каждая точка первого класса предшествует любой точке второго класса.

Такое разбиение будем называть дедекиндовым сечением. Непрерывность отрезка состоит в том, что либо в первом классе есть последняя точка (т. е. такая, что ни одна точка первого класса не следует за ней), либо во втором классе есть первая точка (т. е. предшествующая всем точкам второго класса).

Итак, примем следующую аксиому непрерывности Дедекинда.

Аксиома IV. *Если точки отрезка разбиты на два не пустых класса так, что*

1) каждая точка отрезка принадлежит одному из этих классов и

2) каждая точка первого класса предшествует любой точке второго класса, то существует одна и только одна точка отрезка, которая является либо последней точкой первого класса, либо первой точкой второго класса.

236. Докажем такую вспомогательную теорему.

Если все точки отрезка разбиты на два не пустых класса так, что:

1) *к первому классу относятся такие точки, которые вместе со всеми точками им предшествующими, обладают некоторым свойством* ω,

2) *ко второму классу относятся все остальные точки отрезка, то такое разбиение есть дедекиндово сечение.*

Доказательство. По условию каждая точка отрезка принадлежит либо к 1-му классу, либо ко 2-му. Докажем, что каждая точка 1-го класса предшествует любой точке 2-го класса. Допустим противное: пусть имеются точка N в 1-м классе и M во 2-м такие, что M предшествует N. Раз M — во 2-м классе, значит среди ее предшественниц есть точка M', не обладающая свойством ω (либо сама точка M не обладает этим свойством). Итак, M' предшествует M (или совпадает с ней) и не обладает свойством ω; M предшествует N; значит, M' предшествует N. Таким образом, среди точек предшествующих N имеется точка M', не обладающая свойством ω. Значит, N не имеет права находиться в 1-м классе, так как не удовлетворяет условиям приема в этот класс. Мы пришли к противоречию, что и доказывает теорему.

237. Докажем одно важное свойство упорядоченных соответствий прямого типа.

Если упорядоченное соответствие прямого типа преобразует замкнутый отрезок $[AB]$ в его часть $[A'B']$, то на замкнутом отрезке $[A'B']$ имеется двойная точка M и притом первая двойная точка, т. е. такая, что на замкнутом отрезке $[AM]$ нет другой двойной точки.[1]

Под $[A'B']$ мы понимаем тот из двух отрезков с концами A', B', который является частью $[AB]$. То же относится к отрезку $[AM]$ и к другим отрезкам, о которых речь впереди.

Образы точек мы будем отмечать штрихами.

Приступаем к доказательству.

238. Разобьем точки отрезка $[AB]$ на два класса: к первому классу отнесем все точки, которые сами вместе со всеми предшествующими им точками отрезка $[AB]$ предшествуют своим образам, а ко второму — все остальные точки. Оба класса не пусты, так как к 1-му классу относятся все точки отрезка $[AB']$ {все точки этого отрезка предшествуют точкам отрезка $[A'B']$}, а ко второму классу все точки отрезка $[B'B]$ {ибо все точки этого отрезка следуют за точками отрезка $[A'B']$}.

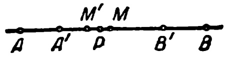


Рис. 83. Точка M' не может предшествовать точке M.

Если $B' \equiv B$, то точка B является двойной и, стало быть, не предшествует своему образу, т. е. принадлежит ко 2-му классу.

Согласно лемме, указанное разбиение есть дедекиндово сечение. Стало быть, на отрезке $[AB]$ имеется точка M — последняя в 1-м классе или первая во 2-м.

239. Докажем, что она является двойной, т. е. совпадает со своим образом M' (и, стало быть, принадлежит ко 2-му классу).

Допустим, что точка M' предшествует точке M (см. рис. 83). Возьмем на отрезке $(M'M)$ точку P:

$$M' \text{ предш. } P \text{ предш. } M.$$

Так как P предш. M, то P' предш. M'.

Итак,

$$P' \text{ предш. } M', \text{ предш. } P, \text{ предш. } M.$$

Значит, P' предш. P. Но это невозможно, так как P предш. M и, стало быть, принадлежит к 1-му классу; значит, точка P должна предшествовать своему образу P'.

Итак, M' не может предшествовать M.

240. Пусть теперь M предш. M'. Тогда точка M' принадлежит ко второму классу. Значит, она или одна из предшествующих ей точек не предшествует своему образу. Обозначим одну из этих точек через P. Итак, P предшествует M' (или совпадает с M') и не предшествует своему образу P'. Значит P принадлежит 2-му классу,

---

[1] Замкнутый отрезок $[AB]$ есть совокупность точек отрезка (AB) и точек A и B.

т. е. следует за M. Но раз M предшествует P, то M' предшествует P'.

Итак, P предшествует M', предшествует P', значит P предшествует P' вопреки предположению, что P не предшествует своему образу.

Это противоречие доказывает, что M' не может также следовать за M.

Значит $M' = M$.

241. На отрезке $[AM]$ нет другой двойной точки, так как все точки этого отрезка принадлежат к 1-му классу и, стало быть, предшествуют своим образам.

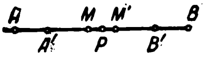


Рис. 84. Точка M не может предшествовать точке M'.

242. Точка M не может лежать на $[AA']$, ибо все точки отрезка $[AA']$ предшествуют своим образам, точно так же не может она лежать на $[BB']$, так как все точки отрезка $[B'B]$ следуют за своими образами. Стало быть, $M \in [A'B']$.

243. Ранее мы видели, что если пара точек A, B разделяет пару точек M, N, то нет пары точек, гармонически сопряженных с обеими парами A, B и M, N.

Докажем теперь такую *лемму о гармонических четверках*.

Если пара точек M, N не разделяет пары точек A, B, то существует пара точек, гармонически сопряженных с обеими парами.

Доказательство. Обозначим через π инволюционную гомологию с двойными точками A и B, а через ρ — гомологию с двойными точками M и N и рассмотрим тот из двух отрезков $[AB]$, на котором лежат точки M и N. Обозначим через $[MN]$ тот из двух отрезков с концами M и N, который является частью $[AB]$.

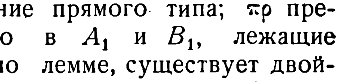


Рис. 85. Пара точек X_1Y гармонически сопряжена как с парой AB, так и с парой MN.

Составим произведение $\pi\rho$. Мы видели, что π и ρ — преобразования обратного типа. Поэтому $\pi\rho$ есть преобразование прямого типа; $\pi\rho$ преобразует точки A и B соответственно в A_1 и B_1, лежащие внутри отрезка $[MN]$. Поэтому, согласно лемме, существует двойная точка X, лежащая на отрезке $[A_1B_1]$. Пусть π преобразует X в Y, тогда ρ преобразует Y в X (иначе X не была бы двойной точкой в преобразовании $\pi\rho$). А так как π и ρ — инволюционные преобразования, то они преобразуют $\begin{pmatrix} X, & Y \\ Y, & X \end{pmatrix}$.

Значит, пара точек X, Y гармонически сопряжена с парой A, B и с парой M, N (рис 85).

244. С помощью этой леммы легко доказать следующую важную теорему.

Преобразование, сохраняющее гармонизм, является упорядоченным.

Достаточно показать, что преобразование, сохраняющее гармонизм, сохраняет разделение пар точек, т. е. если две пары точек не разделяют друг друга, то их образы тоже не разделяют друг друга.

Пусть A, B и M, N не разделяют друг друга. Тогда существует пара точек X и Y, гармонически сопряженных с A, B и M, N. Но в таком случае их образы X' и Y' гармонически сопряжены с A' B' и M', N' (гармонизм сохраняется) и, стало быть (см. пункт 234), A', B' и M', N' не разделяют друг друга.

Основная теорема проективной геометрии

245. Преобразования, сохраняющие гармонизм, играют исключительную роль в проективной геометрии.

Выше мы назвали преобразование одного образа первой ступени в другой, которое получается с помощью цепи проектирований и сечений, — проективным преобразованием. Это определение принадлежит Штейнеру.

Штаудт дал более общее определение: *проективным называется всякое преобразование одного образа первой степени в другой, сохраняющее гармонизм.*

Определение Штейнера проще и уже: оно прямо указывает, как строить проективные образы. В этом смысле его можно назвать *конструктивным.* Определение Штаудта не конструктивно: оно не дает никаких указаний, как строить проективные образы.

246. Оказывается, однако, что всякое преобразование одного образа первой степени в другой, сохраняющее гармонизм, можно построить с помощью цепи проектирований и сечений: образы проективные по Штаудту оказываются всегда проективными и по Штейнеру. Более того, оказывается, что конструкция преобразований, сохраняющих гармонизм, гораздо проще, чем можно было бы думать. Мы легко выясним это, доказав известную теорему Штаудта, которую ввиду ее важности, называют также основной теоремой проективной геометрии. Она гласит:

Если преобразование, сохраняющее гармонизм, оставляет на месте три различные точки прямой, то оно оставляет на месте все точки прямой.

247. Пусть преобразование π, сохраняющее гармонизм, преобразует $\begin{pmatrix} A, & B, & C \\ A, & B, & C \end{pmatrix}$. Оно является преобразованием прямого типа, так как сохраняет направление ABC. Рассмотрим тот из двух отрезков AB, который не содержит точки C. Обозначим его через $[AB]$. Все точки этого отрезка преобразуются в точки того же отрезка, ибо все они следуют за A и предшествуют B; стало быть, тем же свойством обладают и их образы, а значит, образы их принадлежат отрезку $[AB]$.

Пусть X одна из точек отрезка $[AB]$. Тогда, согласно сказанному, X' тоже принадлежит отрезку $[AB]$. Пусть X предшествует X', тогда $[X'B]$ составляет часть $[XB]$, т. е. $[XB]$ преобразуется в свою часть $[X'B]$. Значит, согласно лемме, на отрезке $[X'B]$ имеется двойная точка преобразования M и притом такая, что на $[XM]$ нет других двойных точек:

X предшествует X', предшествует M.

Рассмотрим теперь преобразование обратное π. Оно преобразует отрезок $[AX']$ и $[AX]$, который составляет часть $[AX']$. Поэтому, согласно лемме, на $[AX]$ имеется двойная точка N и притом такая, что на $[NX']$ нет других двойных точек преобразования π^{-1}, а значит и преобразования π.

Итак,

X предш. X', предш. M,

N предш. X, предш. X', предш. M.

Таким образом, на отрезке (NM) нет двойных точек. Но это невозможно, так как точка D, гармонически сопряженная с точкой C относительно пары точек N, M (см. рис. 87), принадлежит отрезку $[NM]$ и является двойной (поскольку двойными являются точки N, M, C). Это противоречие доказывает теорему.

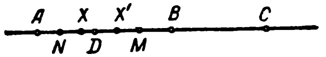


Рис. 86. Точка D, гармонически сопряженная с C относительно N_1M, должна быть двойной точкой; но это невозможно, так как между N и M двойных точек нет.

248. Из основной теоремы тотчас вытекает такое следствие:

Если два проективных (т. е. сохраняющих гармонизм) *преобразования одинаковым образом преобразуют три различные точки ряда, то они преобразуют все точки ряда одинаковым образом.*

Иными словами, если два проективных преобразования π и ρ преобразуют $\begin{pmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \end{pmatrix}$, и, кроме того, π преобразует точку первого ряда M в точку M' второго ряда, то ρ тоже преобразует M в M'.

В самом деле, допустим, что ρ преобразует M в M^*. Тогда преобразование $\rho^{-1}\pi$ оставляет три точки A', B', C' на месте и преобразует M^* в M'.

Согласно основной теореме, отсюда следует, что M^* совпадает с M.

Таким образом, π и ρ одинаковым образом преобразуют все точки ряда. Иными словами, проективность между двумя рядами точек вполне определена тремя парами соответственных точек.

249. Мы должны еще убедиться в том, что существует проективное преобразование, которое относит трем точкам одного ряда три произвольным образом выбранные точки другого ряда. Решим для этого задачу:

Установить проективное соответствие между двумя рядами точек так, чтобы трем различным заданным точкам первого ряда соответствовали три различные произвольным образом заданные точки второго ряда.

Мы будем считать проективное соответствие между двумя образами первой ступени установленным, если указан способ построения точки второго ряда, соответствующей в данной проективности любой заданной точке первого ряда. В частности, поставленная задача будет решена, если удастся указать конечную цепь проектирований и сечений, преобразующую три заданных точки первого ряда в три заданные точки второго ряда.

250. Р е ш е н и е. Чтобы посредством цепи проектирований и сечений преобразовать ряд точек P $(A,\ B,\ C, \ldots)$ в ряд P' $(A',\ B',\ C', \ldots)$, можно поступить так.

Соединим какую-либо пару соответственных точек обоих рядов, например, A и A' и на построенной таким образом прямой AA' выберем произвольно две точки — центры проектирований — S и T. Затем спроектируем ряд P из точки S и ряд P' из точки T. Отметим точки пересечения соответственных лучей обоих пучков SB, $TB' \equiv B''$, SC, $TC' \equiv C''$. Далее пересечем оба пучка прямой P'', проходящей через точки B'' и C'' и обозначим AA', $P'' \equiv A''$. Нужная цепь проектирований и сечений уже построена: проектирование из центра S преобразует $P(A,\ B,\ C, \ldots)$ в $P''(A'',\ B'',\ C'', \ldots)$. Второе проектирование из центра T преобразует $P''(A'',\ B'',\ C'', \ldots)$ в $P'(A',\ B',\ C', \ldots)$. Выполним эти преобразования одно за другим — сперва первое, потом второе, получим преобразование ряда точек P в ряд точек P', преобразующее $\begin{pmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \end{pmatrix}$ (см. рис. 87).

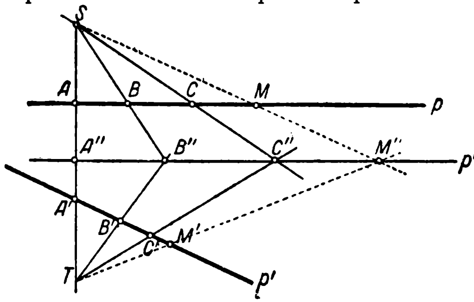


Рис. 87. Чтобы построить на прямой p' образ точки M, проектируем M из S на p'' и полученную точку M'' проектируем из T на p'.

Задача решена.

Несмотря на то, что в построении очень много произвольного, решение, согласно основной теореме, является единственным: если при одном способе построения точка M будет соответствовать точке M', то так оно будет и при любом другом способе построения.

251. Мы доказали, что проективное соответствие между двумя рядами точек вполне определено тремя парами соответственных точек.

Это положение можно обобщить: *проективное соответствие между двумя образами первой ступени вполне определено тремя парами соответственных элементов.*

В справедливости такого обобщения убедиться очень легко. Если бы, например, существовали два различных преобразования пучка $P(a,\ b,\ c, \ldots)$ в пучок $P'(a',\ b',\ c', \ldots)$, то, пересекая эти пучки произвольными прямыми p и p', мы получили бы два различных проективных преобразования, преобразующих три точки ряда P одинаковым образом, что противоречит основной теореме.

252. Итак, задача — установить проективное соответствие между двумя образами первой ступени так, чтобы трем элементам одного соответствовали три элемента другого, — допускает одно и только одно решение. Построение для случая двух рядов точек рассмотрено. Разберем его для случая двух пучков.

Задача. Установить проективное соответствие между двумя пучками так, чтобы трем заданным лучам одного пучка соответствовали три заданные луча другого пучка.

Решение. Пусть требуется установить проективное соответствие между пучками P и P' так, чтобы трем лучам a, b, c первого пучка соответствовали три луча второго — a', b', c'.

Укажем цепь сечений и проектирований, которая выполняет нужное преобразование. Это можно сделать совершенно так же, как в задаче о двух рядах точек.

Отметим точку пересечения пары соответственных лучей пучков P и P', например, точку aa'; проведем через нее две прямые s и t. Сечение пучка P прямой s даст ряд точек $s(A,\ B,\ C)$, а сечение пучка P' прямой t даст ряд точек $t(A',\ B',\ C',\ldots)$. Соединим соответственные точки обоих рядов и обозначим

$$sb \cdot tb' \equiv b'',$$

$$sc \cdot tc' \equiv c''.$$

Отметим, наконец, точку

$$b''c'' \equiv P''$$

и

$$aa' \cdot P'' \equiv a''.$$

Пучок $P(a,\ b,\ c,\ldots)$ перспективен пучку $P''(a'',\ b'',\ c'',\ldots)$, а последний перспективен пучку $P'(a',\ b',\ c',\ldots)$.

Таким образом, нужная цепь перспективных преобразований построена и задача решена:

$$P(a,\ b,\ c,\ldots) \overset{=}{\wedge} P''(a'',\ b'',\ c'',\ldots) \overset{=}{\wedge} P'(a',\ b',\ c',\ldots).$$

Значит,

$$P(a,\ b,\ c,\ldots) \overline{\wedge}\, P'(a',\ b',\ c',\ldots).$$

253. Чтобы найти луч m' пучка P', соответствующий в заданной проективности лучу m пучка P, подвергаем луч m сперва перспективному преобразованию с осью S, преобразующему пучок P в P'', получим луч m''; затем подвергаем m'' перспективному преобразованию с осью t, преобразующему пучок P'' в P'; получим m' (см. рис. 88).

В силу основной теоремы решение является единственным, т. е. результат не зависит от примененного способа построения.

254. Ранее мы указали, что определение проективного преобразования не конструктивно. Сейчас можем утверждать, что любое проективное преобразование одного образа первой ступени в другой можно получить посредством цепи из двух перспективных преобразований. Тем самым конструкция проективного преобразования выяснена. Она оказалась гораздо более простой, чем можно было предполагать.

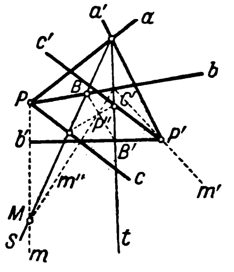


Рис. 88. На чертеже показано, как по данному лучу m пучка P построить соответствующий луч m' пучка P'.

255. Перспективное соответствие является частным случаем проективного. Пусть ряд точек p проективен ряду точек p', причем общая точка обоих рядов (точка pp') соответствует сама себе (рис. 89). Легко показать, что в таком случае ряды перспективны. В самом деле, обозначим точку pp' через A и возьмем на прямой p еще две точки B и C. Обозначим соответственные им в рассматриваемой проективности точки прямой p' через A', B' и C' (A' совпадает с A). Существует только одно проективное преобразование, которое относит точкам A, B, C соответственно точки A', B', C'. Но такое соответствие устанавливает перспективное преобразование с центром P на пересечении прямых BB' и CC'.

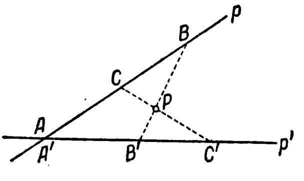


Рис. 89. Проективное соответствие $\begin{pmatrix} A,B,C\ldots \\ A'B'C'\ldots \end{pmatrix}$ является перспективным с центром перспективы P.

Таким образом, *если два ряда точек проективны, причем общая точка обоих рядов соответствует сама себе, то ряды перспективны.*

256. Аналогично обстоит дело с пучками: *если два пучка проективны, причем общий луч обоих пучков (т. е. луч, проходящий через вершины обоих пучков) соответствует сам себе, то пучки перспективны.*

257. Вернемся к коллинеациям. Определена ли коллинеация четырьмя парами соответственных точек? Теперь легко ответить на этот вопрос.

Заметим прежде всего, что коллинеация преобразует инволюционную гомологию в инволюционную же гомологию. В самом деле, если π преобразует $\begin{pmatrix} \rho \\ \rho' \end{pmatrix}$, то

$$\rho' = \pi^{-1}\rho\pi$$

и

$$\rho'^2 = \pi^{-1}\rho\pi \cdot \pi^{-1}\rho\pi = \pi^{-1}\rho^2\pi.$$

Если ρ инволюционная гомология, то $\rho^2 = 1$ и

$$\rho'^2 = \pi^{-1}\pi = 1,$$

т. е. ρ' инволюционная гомология.

258. Отсюда следует, что *коллинеация сохраняет гармонизм*. Значит, *преобразуя один образ первой ступени в другой, коллинеация устанавливает между ними проективное соответствие.*

259. Пусть теперь две коллинеации π и ρ преобразуют четыре независимые точки A, B, C, D в четыре точки A', B' C', D' (тоже, разумеется, независимые). Рассмотрим произведение $\pi\rho^{-1}$, оно оставляет точки A, B, C, D, а стало быть, и точку пересечения прямых AB и CD (обозначим ее через P) на месте. Таким образом, на прямой AB — три двойные точки: A, B и P; равным образом и на CD: C, D и P. Таким образом, все точки этих прямых являются двойными в коллинеации $\pi\rho^{-1}$: но коллинеация с двумя неизменными прямыми представляет собою тождественное преобразование $\pi\rho^{-1} = 1$.

Стало быть $\pi = \rho$.

Итак, *существует одна и только одна коллинеация, преобразующая четыре независимые точки в четыре независимые произвольным образом заданные точки.*

Инволюция

260. Особый интерес представляет проективное преобразование точек прямой в точки той же прямой или лучей пучка в лучи того же пучка. Такое преобразование можно получить с помощью замкнутой цепи проектирований и сечений.

Проективное преобразование точек ряда в точки того же ряда можно задать тремя парами соответственных точек. Чтобы конструктивно осуществить проективное преобразование ряда p в самое себя, при котором три заданные точки A, B, C ряда преобразуются в три заданные точки A', B', C' того же ряда, можно сперва спроектировать преобразуемые точки из произвольного центра, лежащего вне p на произвольную прямую q, отличную от p, а затем полученный ряд точек $q(A'', B'', C'', \dots)$ обычным путем преобразовать в ряд $p(A', B', C', \dots)$

261. В проективном преобразовании точек прямой в точки той же прямой может быть не более двух двойных точек: если такое преобразование оставляет на месте три точки, то, согласно основной теореме, эти точки остаются на месте. Такое преобразование (тождественное), разумеется, не представляет никакого интереса. В нетождественном проективном преобразовании имеется, стало быть, не более двух двойных точек.

Проективное преобразование с двумя двойными точками называется *гиперболическим*, с одной двойной точкой — *параболическим*, вовсе без двойных точек — *эллиптическим*.

262. Особый интерес представляют проективные преобразования, которые сами себе обратны. Они называются *инволюциями*. Существование инволюций доказывается теоремой:

Если проективное преобразование на прямой преобразует инволюционно одну точку прямой, то оно преобразует инволюционно все точки ее (т. е является инволюцией).

Действительно, пусть проективное преобразование π точек некоторой прямой в точки той же прямой преобразует $\begin{pmatrix} A, & B \\ B, & A \end{pmatrix}$. Обозначим точку, в которую оно преобразует некоторую точку C, через D:

$$\pi \text{ преобразует } \begin{pmatrix} A, & B, & C \\ B, & A, & D \end{pmatrix}.$$

Теперь вспомним лемму о четырех точках (см. п. 194), которая утверждает, что каковы бы ни были точки A, B, C, D на прямой, существует проективное преобразование ρ, преобразующее

$$\begin{pmatrix} A, & B, & D, & C \\ B, & A, & C, & D \end{pmatrix}.$$

Сравнивая π и ρ видим, что оба преобразования одинаковым образом преобразуют три точки: A, B и C ряда. Стало быть, по основной теореме, они одинаковым образом преобразуют все точки ряда; ρ преобразует точку D в C. Значит, и π преобразует $\begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$. Таким образом, π преобразует все точки прямой инволюционно.

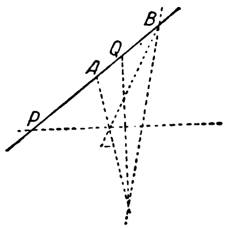


Рис. 90. Если P двойная точка инволюции $\begin{pmatrix} PAB\ldots \\ PAB\ldots \end{pmatrix}$, то Q также двойная точка этой инволюции.

263. Займемся вопросом о распределении двойных точек в инволюции. Разумеется, их может быть не более двух. Примером инволюции с двумя двойными точками является знакомая уже нам гармоническая инволюция. Возможна ли инволюция с одной только двойной точкой? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос:

Если в инволюции есть одна двойная точка, то есть и вторая двойная точка, отличная от первой.

В самом деле, пусть P двойная точка инволюции σ, преобразующей

$$\begin{pmatrix} P, & A, & B\ldots \\ P, & B, & A\ldots \end{pmatrix}.$$

Построим точку Q, гармонически сопряженную с P относительно пары точек A, B (рис. 90).

Так как инволюция сохраняет гармонизм, то σ преобразует точку Q в точку, гармонически сопряженную с P относительно пары точек B, A, т. е. снова в Q. Значит, Q является второй двойной точкой инволюции σ.

264. Перейдем к инволюции с двумя двойными точками (гиперболической). К ним относится знакомая нам гармоническая инволюция. Существуют ли еще и другие инволюции с двумя двойными точками? Оказывается, что нет: *всякая гиперболическая инволюция является гармонической*, т. е. *пара двойных в гиперболической инволюции точек гармонически разделяет любую пару соответственных точек.*

Иными словами, если инволюция σ преобразует

$$\begin{pmatrix} P, Q, A, B \\ P, Q, B, A \end{pmatrix},$$

то пара точек A, B гармонически сопряжена относительно пары точек P, Q.

Допустим, что с точкой A гармонически сопряжена относительно пары P, Q не точка B, а точка A', а с точкой B точка B'. Это значит, что гармоническая инволюция π с двойными точками P и Q преобразует

$$\begin{pmatrix} P, Q, A, A', B, B' \\ P, Q, A', A, B', B \end{pmatrix}.$$

Так как инволюция σ преобразует точки P, Q, A в P, Q, B и сохраняет гармонизм, то она преобразует точку A (четвертую гармоническую к тройке P, Q, A) в точку B' (четвертую гармоническую к тройке P, Q, B).

Итак, σ преобразует

$$\begin{pmatrix} P, Q, A, B, A', B' \\ P, Q, B, A, B', A' \end{pmatrix}.$$

Составим теперь произведение $\pi\sigma$. Оно преобразует

$$\begin{pmatrix} P, Q, A, A', B, B' \\ P, Q, B', B, A', A \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\pi\sigma$ тоже представляет собой гиперболическую инволюцию, т. е. преобразование *обратного* типа, как π и σ. Но это невозможно потому, что произведение двух преобразований *обратного* типа должно, очевидно, быть преобразованием *прямого* типа (если оба перемножаемых преобразования обращают направление, то их произведение, очевидно, не изменяет его).

Наше предположение, что пара точек A, B не сопряжена гармонически относительно пары точек P, Q, привело к противоречию. Значит, пары точек A, B и P, Q гармонически сопряжены, т. е. σ — гармоническая инволюция.

265. Итак, параболических инволюций нет, гиперболические существуют, все они обратного типа, а эллиптические? Легко показать, что и эллиптические инволюции существуют. Именно, *всякая инволюция прямого типа является эллиптической.* Действительно, пусть пары точек A, B и C, D разделяют друг друга; тогда инволюция, преобразующая $\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ B, A, D, C \end{pmatrix}$, является инволюцией прямого типа и не имеет двойных точек, так как нет пары точек, гармонически сопряженной с разделенными парами A, B и C, D (см. п. 234).

266. Наоборот, всякая инволюция обратного типа является гиперболической. Действительно, если σ — инволюция обратного типа, — преобразует

$$\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ B, A, D, C \end{pmatrix},$$

то пары точек A, B и C, D не разделяют друг друга. Когда существует пара точек X, Y, гармонически сопряженная с обеими парами A, B и C, D, т. е. существует гармоническая инволюция π, преобразующая

$$\begin{pmatrix} X, Y, A, B, C, D \\ X, Y, B, A, D, C \end{pmatrix},$$

то по основной теореме σ совпадает с π.

267. Итак, *инволюции обратного типа являются гиперболическими, а прямого — эллиптическими, и наоборот, всякая гиперболическая инволюция принадлежит обратному типу, а эллиптическая — прямому.*

Если инволюция задана двумя парами соответственных точек, легко определить, имеет ли она двойные точки или нет: достаточно выяснить, сохраняет ли она направление или обращает его.

Построение двойных точек гиперболической инволюции, заданной двумя парами соответственных точек, представляет собою весьма важную задачу, решение которой нам, однако, сейчас еще недоступно.

Разумеется, все, сказанное об инволюциях среди точек ряда, можно перенести на инволюцию среди лучей пучка.

Конические сечения

268. Посредством коллинеации можно преобразовать любой четырехугольник в любой другой четырехугольник (например, квадрат в параллелограм, в прямоугольник, в ромб, в неправильный четырехугольник). Коллинеация вполне определена, если заданы два четырехугольника, которые она преобразует один в другой.

Две фигуры, которые могут быть преобразованы одна в другую посредством гомологии, мы называем *гомологичными* или *перспективными.* Если же две фигуры могут быть преобразованы одна в другую посредством коллинеации, то говорят, что они *коллинеарны,* или *проективны.* Любой четырехугольник коллинеарен (проективен) любому другому четырехугольнику (например, квадрату). Но пятиугольники уже не все проективны.

269. Движение, как мы неоднократно указывали, есть частный случай коллинеации. Если две фигуры могут быть преобразованы одна в другую посредством движения („совмещены наложением“, как говорят в элементарных курсах геометрии), то их называют *равными* или *конгруэнтными.* Очевидно, конгруэнтность (равенство) есть частный случай проективности: все конгруэнтные фигуры проективны, но далеко не все проективные фигуры конгруэнтны(равны).

270. Рассмотрим два пучка прямых, вершины которых S и T лежат на окружности. Будем считать соответственными те прямые этих пучков, которые пересекаются на окружности. Например, прямой SA пучка S (рис. 91) соответствует прямая TA пучка T; прямой SB — прямая TB, и т. д. Угол между прямыми SA и SB равен углу между прямыми TA и TB, так как оба угла вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу AB. Вообще, угол между двумя прямыми пучка S равен углу между соответственными прямыми пучка T. Отсюда следует, что оба пучка можно совместить посредством движения. Для этого нужно перенести пучок S так, чтобы вершина его совпала с точкой T, а прямая SA пошла по прямой TA; тогда прямая SB пойдет по TB, SC по TC и т. д. Каждый луч пучка S совпадает с соответственным лучом пучка T.

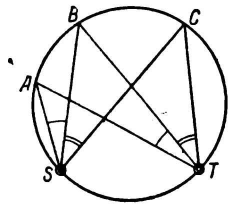


Рис. 91. Окружность есть геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух конгруэнтных пучков.

Итак, пучки S и T конгруэнтны. Окружность можно определить как геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух конгруэнтных пучков. Если подвергнуть окружность коллинеарному преобразованию, то пучки S и T преобразуются в пучки S' и T', уже не конгруэнтные между собой, но коллинеарные (проективные) друг другу.

Значит, фигура, в которую коллинеация преобразует окружность, представляет собой геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков.

271. Познакомимся с несколькими фигурами, проективными окружности.

Будем проектировать окружность, лежащую в плоскости α, на плоскость α'. Лучи, проектирующие точки окружности, представ-

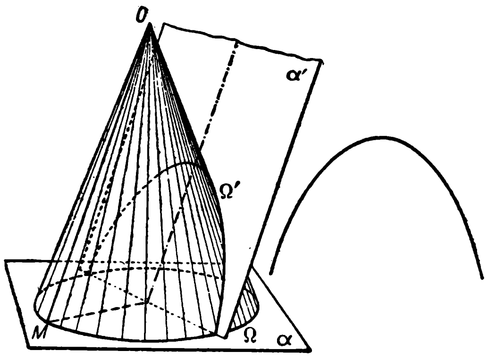


Рис. 92. Эллипс.

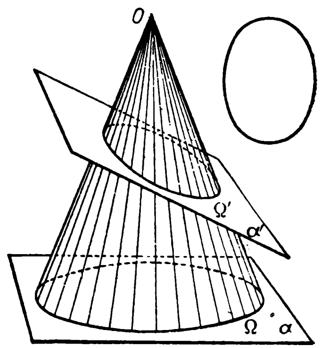


Рис. 93. Парабола.

ляют собой образующие конуса, вершиной которого является центр проекции. Проекция окружности на плоскость α' есть не что иное, как сечение этого конуса плоскостью α' (рис. 92).

Поэтому фигуры, проективные окружности, называют *коническими сечениями*.

272. Смотря по положению секущей плоскости, в сечении получается фигура одного из следующих трех типов

1) Если секущая плоскость пересекает все образующие конуса по одну сторону от вершины (рис. 92), коническое сечение имеет форму замкнутого овала. Это — *эллипс.*

2) Если секущая плоскость параллельна точно одной из образующих (рис. 93), коническое сечение имеет вид незамкнутой кривой. Это — *парабола.*

3) Если, наконец, секущая плоскость пересекает образующие по разные стороны от вершины (как на рис. 94), в сечении получается кривая, состоящая из двух незамкнутых ветвей. Это — *гипербола.*

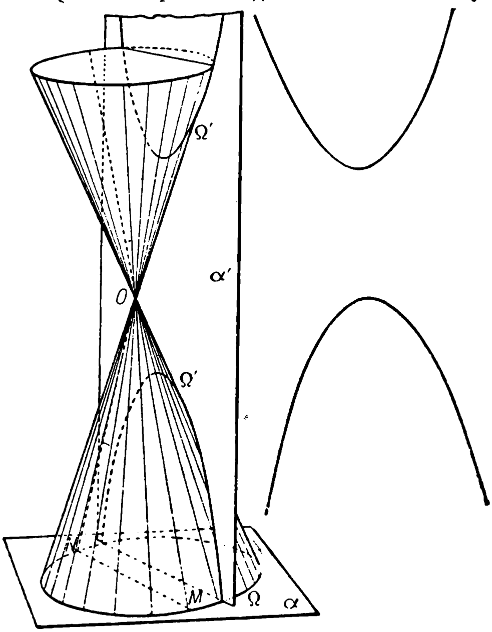


Рис. 94. Гипербола.

273. Различие между эллипсом, параболой и гиперболой можно охарактеризовать так. Коническое сечение оказывается *параболой*, если плоскость сечения α' пересекает о д н у из образующих конуса (именно ту, которая параллельна ей — OM на рис. 93) в бесконечно удаленной точке. *Гипербола* получается, если плоскость сечения α' пересекает д в е образующие (именно те, которые параллельны ей: OM и ON на рис. 94) в бесконечно удаленных точках. Если же плоскость α' пересекает все образующие в „конечных" точках, то коническое сечение представляет собой *эллипс.* Можно сказать, что эллипс не встречает бесконечно удаленной прямой, парабола имеет с ней о д н у общую точку (касается ее), а гипербола пересекает бесконечно удаленную прямую в д в у х точках.

274. Окружность есть частный случай эллипса: она тоже не встречает бесконечно удаленной прямой Дальнейшее уточнение проективного определения окружности имеет существенное значение, так как окружность—ключ к вращению. Это обязывает нас приступить к проективному изучению конических сечений.

Построение конических сечений

275. В предыдущем разделе мы определили коническое сечение как линию, проективную окружности (т. е. фигуру, которая получается из окружности при помощи некоторой коллинеации). Коническое сечение, вместе с тем, представляет собой геометрическое место точек пересечения соответственных лучей некоторых двух проективных пучков (см. п. 270). Далее, в п. п. 286, 287 будет доказано, что это сечение есть геометрическое место точек пересечения соответственных лучей любых двух проективных, но не перспективных пучков проективной окружности. Ввиду этого уже теперь представляется целесообразным принять определение: *коническое сечение есть геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков.* В этом определении мы не исключаем случай перспективности пучков. Геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух перспективных пучков называется *вырожденным* коническим сечением; оно представляет собой *пару прямых*, из которых одна — ось перспективы, другая — общий луч пучков (как элемент одного пучка он соответствует себе, как элементу другого). Пара прямых получается сечением конуса плоскостью, проходящей через вершину. Умея строить проективные пучки, мы тем самым умеем строить точки конического сечения.

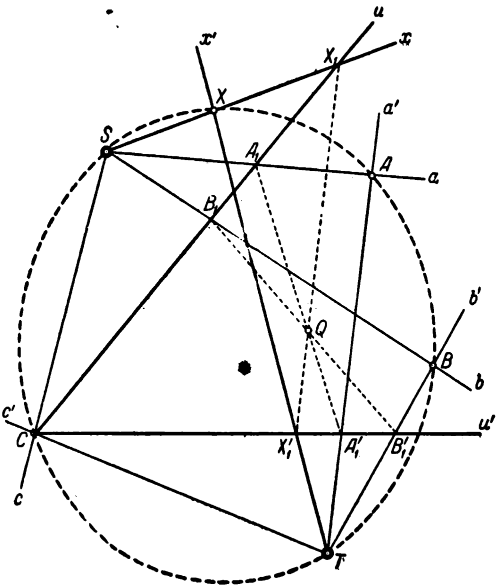


Рис. 95. Построение точки конического сечения, определенного пучками S и T.

Пусть, например, S и T вершины пучков, образующих невырожденное коническое сечение, которое проходит через точки A, B и C. Требуется пополнить это коническое сечение новыми точками. Задача всегда разрешима, если никакие три из заданных пяти точек не лежат на одной прямой. Действительно, соединив вершины пучков S и T с точками A, B и C, получим два пучка прямых с тремя лучами каждый. Существует одна, и только одна, проективность π между пучками S и T, в которой лучу SA соответствует луч TA, лучу SB—луч TB и лучу SC—луч TC.

Стало быть, существует одно, и только одно, коническое сечение, удовлетворяющее условиям задачи. Обозначим его через Ω. Построение новых точек этого конического сечения сводится к пополнению пучков S и T новыми соответственными в проективности π лучами, что мы умеем делать хотя бы по способу п. 253.

276. На рис. 95 показано построение луча x' пучка T, соответствующего произвольному лучу x пучка S. Через заданную точку C, в которой пересекается пара соответственных лучей, проведены произвольные прямые u и u'. Ряд точек, в которых прямая u пересекает лучи пучка S, перспективен ряду точек, в которых соответственные лучи пучка T пересекают прямую u'. Соединив соответственные точки этих рядов — A_1 и A_1', B_1 и B_1', — находим центр перспективности Q. Луч x пучка S пересекает прямую u в точке X_1, которой соответствует на прямой u' точка X_1'. Поэтому луч x' пучка T, проведенный через X_1', соответствует в рассматриваемой

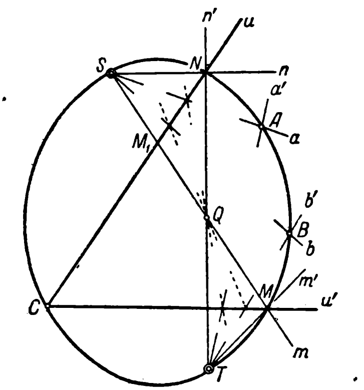


Рис. 96. Построение точек пересечения прямых u и u' с коническим сечением.

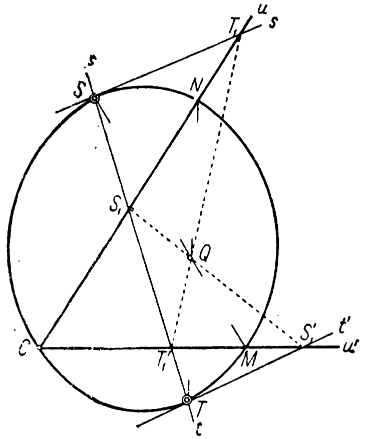


Рис. 97. Построение касательных к коническому сечению в точках S и T.

проективности лучу x пучка S. Стало быть, точка X, в которой пересекаются эти лучи, принадлежит коническому сечению Ω.

277. Рассмотрим тот луч пучка S, который проходит через центр перспективности Q. В пучке T ему соответствует луч TM (рис. 96). Значит, точка M лежит на коническом сечении Ω. Точно так же луч TQ пучка T соответствует лучу SN пучка S. Значит, и точка N лежит на Ω.

Тем самым найдены точки пересечения конического сечения Ω с произвольными прямыми u и u', проходящими через одну из его точек (через точку C).

278. Обратим еще внимание на общий луч обоих пучков, образующих невырожденное коническое сечение Ω, — прямую ST (рис. 97).

Если рассматривать ее как луч пучка S, ей соответствует в проективности π луч t' пучка T.[1] Лучи ST и t пересекаются в точке T. Выходит, что и точка T является точкой пересечения соответствен-

[1] Луч t' не может совпасть с лучом ST, так как пучки S и T — не перспективны (см. п. 256).

ных лучей пучков S и T. Поэтому и точка T принадлежит коническому сечению Ω.

Если же рассматривать прямую ST как луч пучка T, то она соответствует лучу s пучка S. Лучи TS и s пересекаются в точке S. Значит, и эта точка принадлежит коническому сечению Ω.

Итак, *коническое сечение проходит через вершины пучков, образующих его.*

279. На каждом луче пучка S лежат две точки конического сечения Ω: точка S и точка пересечения рассматриваемого луча с соответствующим ему лучом пучка T. Только на прямой s обе эти точки совпадают. Таким образом все прямые пучка S (кроме прямой s) имеют по две общие точки с коническим сечением Ω, говорят—*пересекают* его в двух точках, а прямая s встречает коническое сечение только в одной точке S, говорят—*касается* его в этой точке. Точно так же все прямые пучка T, кроме прямой t', *пересекают* коническое сечение Ω, и только прямая t' является *касательной* к нему в точке T.

280. Мы показали, что через любые пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, можно провести невырожденное коническое сечение: две из заданных пяти точек выбираются в качестве вершин пучков, образующих искомое коническое сечение, а остающиеся три определяют три пары соответственных лучей этих пучков. Возникает вопрос: зависит ли результат построения от того, какие точки назначены вершинами пучков?

Оказывается, что не зависит.

Это самая важная и самая трудная теорема учения о конических сечениях. Докажем ее так. Возьмем коническое сечение Ω, образованное пучками с вершинами S и T и проходящее кроме того через точки L, M и N. Построим еще одну точку X этого конического сечения (рис. 98, *I*). Затем возьмем другое коническое сечение Ω', образованное пучками с вершинами M и N и проходящее еще через три точки первого конического сечения, именно через точки S, T и X (рис. 98, *II*); докажем, что коническое сечение проходит также через точку L. Так как L совершенно произвольная точка конического сечения Ω, то тем самым будет доказано, что любая точка Ω лежит также на Ω'. После этого без всякого труда установим, что Ω и Ω' совпадают. Таков план доказательства.

На рис. 98, *I* показано знакомое уже нам построение точки X конического сечения Ω (образованного пучками S и T). Чтобы не загромождать чертеж лишними линиями, вспомогательные прямые u и u', пересекающие пучки S и T, проведены через заданные точки M и N. Центр перспективности Q двух рядов точек, которые пучки S и T отсекают на прямых u и u', лежит на пересечении прямых SM и TN. Луч x пучка S пересекает прямую u в точке X_1. Проектируя эту точку из точки Q на прямую u', получим точку X_1', в которой прямая u' пересекает искомый луч x' пучка T.

На рис. 98, *II* показано совершенно такое же построение точек конического сечения Ω' (образованного пучками M и N). Вспомогательными прямыми, пересекающими пучки M и N в перспективно расположенных точках, выбраны прямые x и x'. Центр перспективности между обоими рядами точек (на x и x') лежит на пересечении прямых MS и NT, т. е. совпадает с центром перспективности Q предыдущего построения. Ищем луч пучка M, соответствующий лучу u пучка N. Луч u пересекает прямую x в точке X_1. Проектируя эту точку на прямую x', получим на ней точку X_1', в которой ее пересекает искомый луч пучка M. Этим искомым лучом оказывается прямая u' предыдущего построения. Таким образом, точка пересечения прямых u и u' (точка L) лежит на коническом сече-

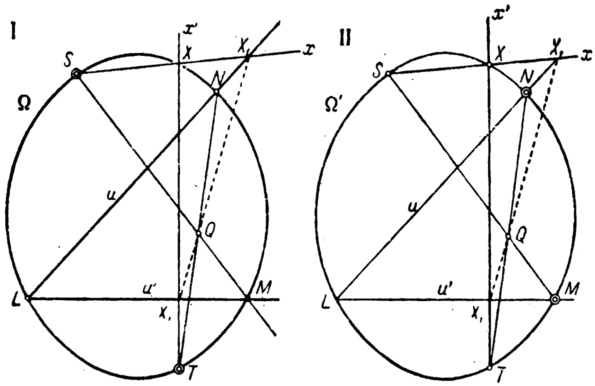


Рис. 98. *I*. Коническое сечение, образованное пучками S и T и проходящее через точки N_1M и L, проходит через точку X. *II*. Коническое сечение, образованное пучками N и M и проходящее через точки S_1T и X, проходит через точку L.

нии Ω'. А так как точка L есть совершенно произвольная точка конического сечения Ω, то полученный результат можно выразить так: если два конических сечения Ω и Ω' имеют 5 общих точек (S, T, M, N и X), но образованы разными пучками (первое пучками S и T, второе пучками M и N), то любая точка первого конического сечения принадлежит и второму. Прилагая это заключение к тем же коническим сечениям, но меняя порядок их рассмотрения, придем к выводу, что любая точка конического сечения Ω' принадлежит и коническому сечению Ω. Это значит, что Ω и Ω' имеют все точки общими, т. е. совпадают.

Итак, *через любые пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, можно провести одно* (это ранее доказано), *и только одно* (как доказано сейчас), *невырожденное коническое сечение.*

Или, короче:

невырожденное коническое сечение вполне определено своими пятью точками.

Эту теорему называют основной в проективной теории конических сечений.

281. Можно выразить только что доказанную теорему и так: *Коническое сечение проектируется из любых двух принадлежащих ему точек проективными пучками* (теорема Штейнера).

В такой форме теорема не должна казаться неожиданной, ибо из элементарной геометрии известно аналогичное свойство окружности: окружность проектируется из любых двух принадлежащих ей точек конгруэнтными (равными) пучками (см. п. 270).

На коническом сечении, как и на окружности, все точки, можно сказать, „равноправны“: ни одна пара их не занимает особого положения. В том числе и вершины пучков, которыми образовано коническое сечение, являются „рядовыми“ точками его. В этом сущность только что доказанной теоремы.

282. Вот несколько интересных и важных следствий, вытекающих из „уравнения в правах“ всех точек конического сечения с его вершинами.

Среди прямых, которые проходят через вершину пучка, участвующего в образовании невырожденного конического сечения, одна является касательной, а все остальные—секущими. Отсюда мы можем теперь заключить, что невырожденное коническое сечение имеет одну, и только одну, касательную в любой своей точке.

Построить касательную к коническому сечению в данной точке его не представляет никаких затруднений. Достаточно выбрать эту точку за вершину одного из пучков, образующих рассматриваемое коническое сечение, а вершиной другого пучка назначить любую точку того же конического сечения; тогда искомая касательная есть тот луч первого пучка, которому соответствует общий луч обоих пучков (см. п. 279).

283. Легко решить и такую задачу: построить невырожденное коническое сечение, проходящее через данные четыре неколлинейные по три точки (обозначим их через S, T, L, M) и касающееся в одной из них (например, S) данной прямой s (рис. 99, *I*). Точку касания назначим вершиной одного из пучков, образующих искомое коническое сечение. Вершиной второго пучка выбираем любую из трех других заданных точек, например T. Остаются в нашем распоряжении еще две точки L и M: в них пересекаются две пары соответственных лучей:

$$\begin{pmatrix} SL \\ TL \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} SM \\ TM \end{pmatrix}.$$

Третью пару соответственных лучей образует касательная s и общая прямая TS обоих пучков. Существует только одна проективность, которая относит

$$\begin{pmatrix} s, & SL, & SM \\ TS, & TL, & TM \end{pmatrix}.$$

Стало быть, существует одно, и только одно, коническое сечение, удовлетворяющее условиям задачи.

284. Можно также задать невырожденное коническое сечение тремя точками (например S, T, L) и касательными в двух из них (например в S и T) (рис. 99, *II*). Точки касания выбираем в качестве вершин пучков, образующих искомое коническое сечение. Касательной в вершине первого пучка (обозначим ее через s) соответствует во втором пучке общая прямая обоих пучков TS. Этой же прямой, если рассматривать ее как луч первого пучка, соответствует во втором пучке вторая заданная касательная (обозначим ее через t').

Таким образом, две касательные s и t' и прямая TS (которая считается дважды — раз за луч первого пучка, второй раз за луч второго пучка) составляют д в е пары соответственных лучей пучков, образующих искомое коническое сечение. Для определения третьей

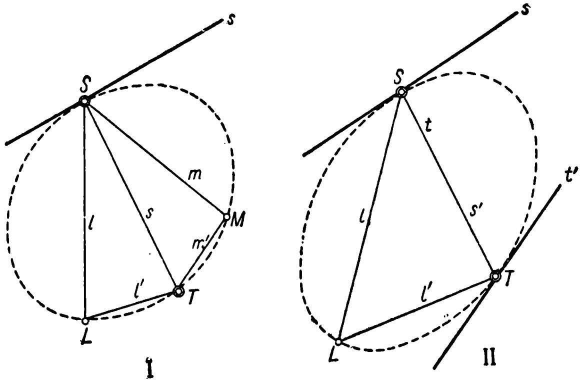


Рис. 99. Коническое сечение вполне определено четырьмя точками и касательной в одной из них (*I*) или тремя точками и касательными в двух из них (*II*).

пары соответственных лучей в нашем распоряжении остается еще одна точка конического сечения (точка L): лучи, пересекающиеся в ней, очевидно, являются соответственными. Тремя парами соответственных лучей проективность между пучками S и T, а вместе с тем и коническое сечение, образуемое ими, вполне определены. Значит, существует одно, и только одно, невырожденное коническое сечение, удовлетворяющее условиям задачи.

285. Резюмируем. Невырожденное коническое сечение вполне определено пятью элементами, каковыми могут быть, например, 5 точек, 4 точки + 1 касательная в одной из них, 3 точки + 2 касательные в двух из них.

Проективные преобразования конических сечений

286. Коллинеация преобразует проективные пучки S и T в п р о е к т и в н ы е же пучки S' и T'. Поэтому коническое сечение Ω, образованное первыми двумя пучками, преобразуется коллинеацией в коническое сечение Ω', образованное вторыми двумя пучками.

Далее ясно, что прямая, пересекающая коническое сечение Ω, преобразуется рассматриваемой коллинеацией в прямую, пересекающую проективное ему коническое сечение Ω' в соответственных точках. Точно так же касательная к Ω преобразуется в касательную к Ω' в соответственной точке.

Выберем на невырожденном коническом сечении Ω три точки A, B и C (рис. 100). Через первые две проведем касательные к Ω — обозначим их через a и b. На втором произвольном невырожденном коническом сечении Ω' тоже выберем какие-либо три точки A', B' и C'. Через первые две из них проведем касательные к Ω' — обозначим их через a' и b'. Теперь зададим коллинеацию, преобразующую точки A, B, C и ab в точки A', B', C' и $a'b'$. Коническое сечение Ω преобразуется этой коллинеацией в какое-то коническое сечение, которое проходит через точки A', B', C' и касается прямых a' и b'. Три точки и касательные в двух из них вполне определяют коническое сечение, т. е. существует только одно коническое сечение, которое проходит через точки A', B', C' и касается прямых a' и b': это Ω'. Значит, любое коническое невырожденное сечение можно преобразовать в любое другое невырожденное коническое сечение так, чтобы три произвольные точки первого были преобразованы в три произвольные точки второго. Предоставим читателю показать, что существует только одна коллинеация, которая выполняет такое преобразование.

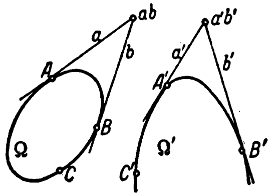


Рис. 100. Коллинеация преобразует коническое сечение Ω в коническое сечение Ω'.

287. В частности, ***посредством коллинеации любое невырожденное коническое сечение можно преобразовать в окружность.***

Можно также преобразовать коническое сечение в с а м о е с е б я. Такого рода преобразования представляют выдающийся интерес, во-первых, потому, что вращение относится к числу коллинеаций этого типа: оно преобразует в самое себя все окружности, центр которых совпадает с центром вращения; а во-вторых, потому, что такие коллинеации, как мы увидим в последней главе, являются ключом к движениям в неевклидовой геометрии Лобачевского.

Теорема Паскаля

288. Из теоремы Штейнера легко вывести замечательную теорему Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение.

Возьмем на плоскости шесть точек, занумеруем их в л ю б о м порядке номерами *1, 2, 3, 4, 5, 6* и соединим в порядке номеров прямыми *12, 23, 34, 45, 56* и, наконец, *61*. Полученную фигуру, состоящую из шести точек (вершин) и шести прямых (сторон) назовем шестиугольником (рис. 101).

Вершины *1* и *4*, *2* и *5*, *3* и *6* будем считать взаимно противоположными. Две стороны, соединяющие пары противоположных вершин, тоже считаются противоположными; так, стороне *12* противоположна сторона *45*; стороны *34* и *61*, *23* и *56* взаимно противоположны.

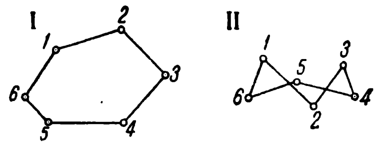


Рис. 101. Шестиугольники.

289. Если вершины шестиугольника лежат на одном коническом сечении, шестиугольник называется в п и с а н н ы м в это коническое сечение. Теорема Паскаля гласит: *противоположные стороны шестиугольника, вписанного в коническое сечение, пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой* (рис. 102).

Для доказательства рассмотрим пучки *1* (*2*, *3*, *4*, *6*) и *5* (*2*, *3*, *4*, *6*). Если отнести друг другу два таких луча обоих пучков, которые пересекаются на коническом сечении (например, лучу *13* отнести луч *53*, лучу *12* — луч *52* и т. д.), то тем самым между пучками (*1*) и (*5*) будет установлено проективное соответствие. Пересечем пучок (*1*) прямой *34* и пучок (*5*) прямой *32*. Получим два проективных ряда точек *3*, *II*, *4*, *VI* и *3*, *2*, *IV*, *VI'*. Но так как точке *3* первого ряда отвечает она же во втором ряду, эти ряды не только проективны, но и перспективны.

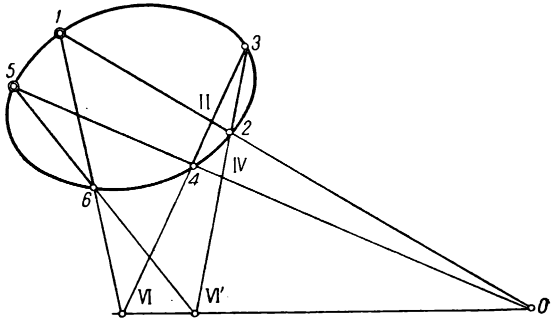


Рис. 102. Теорема Паскаля.

Стало быть, прямая *VI VI'* проходит через центр перспективности *O*, в котором пересекаются прямые *2 II* и *4 IV*.

Но $2\ II \equiv 12$, $4\ IV \equiv 54$, стало быть, $O \equiv 12 \cdot 45$. Итак, три точки: *VI* ($\equiv 16 \cdot 34$), *VI'* ($\equiv 56 \cdot 23$) и *O* ($\equiv 12 \cdot 45$) лежат на одной прямой. Прямые *16* и *34*, *56* и *23*, *12* и *45* являются попарно противоположными сторонами шестиугольника *1 2 3 4 5 6*. Теорема Паскаля доказана.

Шестиугольник, вписанный в коническое сечение, называют шестиугольником Паскаля, а прямую, на которой лежат три точки пересечения его противоположных сторон, — прямой Паскаля.

290. Можно дать простую схему, удобную для записи содержания теоремы Паскаля.

Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, вписанный в коническое сечение (рис. 103). Выпишем названия трех последовательных сторон: AB, BC, CD.

Им соответственно противоположны следующие три стороны: DE, EF, FA.

Обозначим точки пересечения противоположных сторон через X, Y и Z.

Согласно теореме Паскаля, точки X, Y, Z лежат на одной прямой; обозначим ее через p и запишем все в виде такой схемы:

$$\left.\begin{aligned} AB\cdot DE &\equiv X \\ BC\cdot EF &\equiv Y \\ CD\cdot FA &\equiv Z \end{aligned}\right\} p \qquad (1)$$

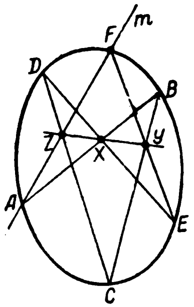


Рис. 103. Построение точки пересечения прямой m с коническим сечением, определенном точками A, B, C, D, E.

291. Схемой Паскаля удобно пользоваться для решения задач на построение элементов конического сечения, заданного пятью элементами.

Пусть, например, требуется найти точку пересечения конического сечения, заданного пятью точками A, B, C, D, E с прямой m, проходящей через точку A (рис. 103). Обозначим искомую точку через F и составим схему Паскаля для шестиугольника $ABCDEF$

$$\left.\begin{aligned} AB\cdot DE &\equiv X \\ BC\cdot EF &\equiv Y \\ CD\cdot FA &\equiv Z \end{aligned}\right\} \sim p.$$

В этой схеме точка F неизвестна, но прямая FA задана: это m. Поэтому последнюю строчку можно переписать так:

$$CD\cdot m \equiv z.$$

Этим определена точка z. Кроме того, первая строчка определяет точку x прямой Паскаля:

$$AB\cdot DE \equiv x.$$

Таким образом, прямая Паскаля найдена

$$p \equiv xz.$$

Теперь находим точку Y, как пересечение прямых p и BC.

Наконец, пересечением прямых m и EY определяем F.

292. Чтобы воспользоваться схемой Паскаля для проведения касательных и других задач, в которых фигурируют касательные, заметим, что теорема Паскаля остается справедливой, если пара соседних вершин вписанного шестиугольника совпадает, а сторона, соединяющая их, заменяется касательной. Пусть, например, вершина F совпадает с E. Имеем шестиугольник $ABCDEE$. Здесь „сторона“ EE

есть касательная к коническому сечению в точке E. Схема принимает такой вид:

$$\left.\begin{array}{r} AB\cdot DE\equiv X \\ BC\cdot EE\equiv Y \\ CD\cdot EA\equiv Z \end{array}\right\}\sim p.$$

С ее помощью можно построить касательную EE в точке E, если заданы остальные пять точек, или найти одну из точек, если заданы другие четыре точки (в их числе точка E) и касательная EE (черт. 104).

293. Теорема Паскаля верна и в том случае, если две или даже три соседних вершины совпадают (но не более чем по две в одной точке). Пусть, например, $D\equiv C$.

Имеем „шестиугольник" Паскаля: $ABCCEE$.

„Стороны" CC и EE — это касательные соответственно в вершинах C и E.

Схема Паскаля принимает вид

$$\left.\begin{array}{r} AB\cdot CE\equiv X \\ BC\cdot EE\equiv Y \\ CC\cdot EA\equiv Z \end{array}\right\}\sim p \text{ (см. рис. 105).}$$

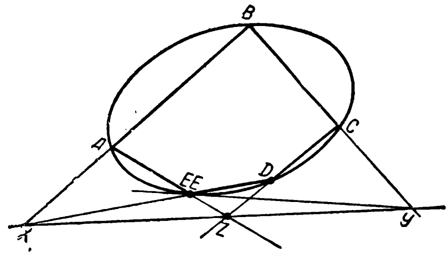


Рис. 104. Схема построения касательной конического сечения в точке E.

294. Наконец, пусть еще одна пара вершин совпадает (но не с „двойными" вершинами C и E), т. е. пусть $B\equiv A$. Получим „шестиугольник" $AACCEE$.

Схема Паскаля дает

$$\left.\begin{array}{r} AA\cdot CE\equiv X \\ AC\cdot EE\equiv Y \\ CC\cdot EA\equiv Z \end{array}\right\} p,$$

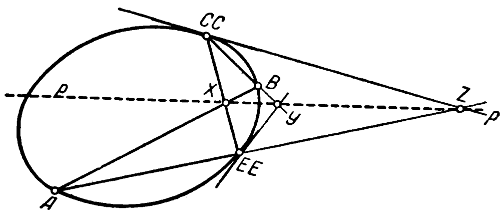


Рис. 105. Шестиугольник Паскаля, у которого две пары соседних вершин слились.

т. е. стороны вписанного в коническое сечение треугольника пересекаются с касательными, проведенными через противолежащие вершины этого треугольника, в трех точках одной прямой (рис. 106).

295. Все эти схемы полезны при решении разных задач. Рассмотрим, например, такую задачу:

Заданы три точки конического сечения и касательные в двух из них. Найти касательную в третьей точке.

Обозначим заданные точки через A, B и C, а касательные в этих точках соответственно через AA, BB (заданные) и CC (искомую).

Рассмотрим „шестиугольник“ Паскаля $AABBCC$. Имеем схему

$$\left.\begin{aligned} AA\cdot BC &\equiv X \\ AB\cdot CC &\equiv Y \\ BB\cdot CA &\equiv Z \end{aligned}\right\} \sim p.$$

Здесь неизвестна касательная CC — и только. Первая и третья строка определяют точки X и Z прямой Паскаля. Вторая строка позволяет найти Y, именно

$$Y \equiv p\cdot AB.$$

Искомая касательная CC проходит через C и через точку $AB\cdot Y$:

$$CC \equiv C\cdot(AB\cdot Y) \text{ (см. рис. 107).}$$

296. Схема Паскаля снова приводит нас к выводу, что коническое сечение вполне определено пятью неизвестными точками, которые могут частично совпадать друг с другом. При этом нужно считать, что пара совпавших точек определяет касательную к коническому сечению и ее точку касания. Если задана касательная AA

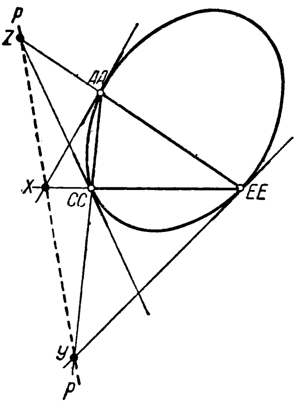


Рис. 106. Шестиугольник Паскаля, у которого три пары соседних вершин слились.

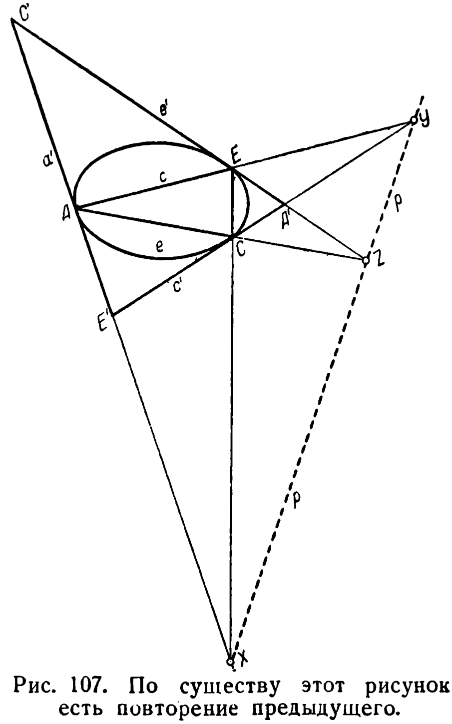


Рис. 107. По существу этот рисунок есть повторение предыдущего.

и точка B конического сечения, то точка B не должна лежать на прямой AA: иначе три точки A, A и B лежали бы на одной прямой, т. е. независимость была бы нарушена. Независимость следует считать нарушенной также в случае совпадения трех точек.

297. Если коническое сечение, в которое вписан шестиугольник, вырождается в пару прямых, теорема Паскаля все же остается справедливой. *Пусть вершины шестиугольника расположены на двух прямых так, что соседние вершины лежат на разных прямых; тогда противоположные стороны шестиугольника пересекаются в трех точках одной прямой.*

Получается замечательная конфигурация девяти точек и девяти прямых, так называемая *конфигурация Паскаля-Паппа.* На каждой прямой конфигурации лежат три точки, через каждую точку проходят три прямые (см. рис. 108).

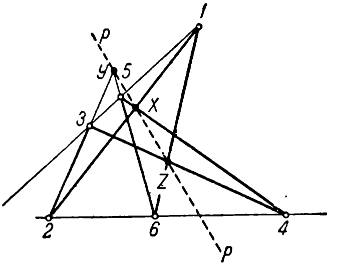


Рис. 108. Шестиугольник Паскаля, вписанный в пару прямых.

Если две соседние вершины шестиугольника лежат на одной из двух прямых, в которые он вписан, теорема тоже верна, но тривиальна.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

КОРРЕЛЯЦИИ И ПОЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Корреляции

298. Согласно принципу двойственности, каждой фигуре, состоящей из точек и прямых плоскости, соответствует двойственная фигура, состоящая из прямых и точек плоскости. Это соответствие относит каждой точке одной фигуры одно-однозначным образом прямую другой фигуры и наоборот, прямой — точку, причем инцидентным элементам соответствуют инцидентные же элементы. *Одно-однозначное преобразование точек и прямых плоскости в прямые и точки другой (или той же самой) плоскости, при котором: 1) каждая точка преобразуется в прямую, 2) прямая — в точку, 3) сохраняется инцидентность точек с прямыми, называется корреляцией.*

В дальнейшем мы будем заниматься корреляциями, которые преобразуют точки и прямые плоскости в прямые и точки той же плоскости.

Пример. Пусть дана плоскость α и на ней окружность k с центром O и радиусом r (далее рассматриваются только объекты, принадлежащие плоскости α).

Сопоставим с произвольной точкой P прямую p, определяя ее следующими условиями: прямая p перпендикулярна к лучу OP и пересекает его в точке P так, что $OP \cdot OP' = r^2$ (с бесконечно-удаленной точкой P_∞ сопоставим диаметр окружности K, перпендикулярный к OP_∞; с точкой O сопоставим бесконечно-удаленную прямую).

Сопоставим с произвольной прямой q точку Q, определяя ее следующими условиями: если Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую q, то Q лежит на луче OQ' и $OQ \cdot OQ' = r^2$ (с диаметром q окружности K сопоставим бесконечно-удаленную точку Q_∞, которая определяется прямыми, перпендикулярными к диаметру q; с бесконечно-удаленной прямой сопоставим точку O).

Итак, с каждой точкой плоскости α сопоставлена некоторая прямая этой плоскости, с каждой прямой — точка. Докажем, что это сопоставление является корреляцией.

Для доказательства нам нужно установить, что определенное нами преобразование сохраняет инцидентность точек с прямыми; точнее: если с точками P и Q сопоставлены прямые p и q (соответственно) и если точка P принадлежит прямой q, то точка Q принадлежит прямой p (см. рис. 110).

Обозначим через P' и Q' основания перпендикуляров, опущенных из точки O на прямые p и q. По определению рассматриваемого преобразования имеют место равенства:

$$OP\cdot OP'=r^2 \text{ и } OQ\cdot OQ^1=r^2.$$

Отсюда

$$\frac{OP}{OQ'}=\frac{OQ}{OP'}.$$

Следовательно, треугольники OPQ' и $OP'Q$ подобны. Но, по условию, точка P принадлежит прямой q; значит, в треугольнике OPQ' угол $PQ'O$ — прямой. В таком случае в треугольнике $OP'Q$ соответственный угол $OP'Q$ также прямой, откуда следует, что точка Q принадлежит прямой p. Тем самым требуемое доказано.

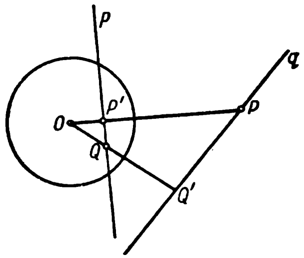


Рис. 109.

Прямая p, сопоставленная указанным образом с точкой P, называется полярой точки P относительно окружности K; точка P называется полюсом прямой p (в рассмотренной сейчас корреляции с произвольной прямой сопоставляется ее полюс).

Поляра p точки P обладает замечательным свойством, которое мы сообщим без доказательства: если некоторая прямая, проходящая через P, пересекает окружность K в точках M, N, а поляру p в точке R, то пара точек P, R гармонически сопряжена относительно пары точек M, N.

Иными словами, имеет место теорема: если через (произвольную) точку P провести всевозможные секущие к окружности K и на каждой из этих секущих отметить точку, гармонически сопряженную с точкой P относительно пары точек пересечения с окружностью K, то все отмеченные точки расположатся на одной прямой; эта прямая и является полярой точки P относительно K. По существу мы сейчас высказали новое определение поляры.

Так как гармоническая сопряженность точек сохраняется при любом проективном преобразовании, то приведенная только что теорема останется справедливой, если в ней подразумевать в качестве линии K не окружность, а любой проективный образ окружности, т. е. коническое сечение. Вместе с тем оказывается возможным определить по отношению к любому коническому сечению поляру произвольной точки и полюс произвольной прямой (называя точку P полюсом прямой p, если есть p поляра точки P).

Пусть K — коническое сечение; сопоставляя с произвольной точкой ее поляру относительно K, а с произвольной прямой — полюс, мы получим некоторую корреляцию, т. е. такое преобразование точек в прямые, прямых — в точки, при котором сохраняется инцидентность точек с прямыми. В дальнейших параграфах эта корреляция будет подробно изучена.

299. Разумеется, корреляция представляет собой преобразование совершенно отличное от коллинеации. Коллинеация преобразует любой образ первой ступени в одноименный образ первой ступени (ряд — в ряд, пучок — в пучок), а корреляция — в разноименный (ряд — в пучок, пучок — в ряд). Но между обоими преобразованиями имеется существенное сходство: оба они *сохраняют гармонизм* и, стало быть, преобразуют любой образ первой ступени в *проективный* ему образ первой ступени. В этом смысле оба преобразования можно назвать *проективными*. Что коллинеация сохраняет гармонизм — нам давно известно. Докажем, что и корреляция обладает этим свойством.

300. Прежде всего заметим, что *произведение двух корреляций (или коллинеаций) есть, очевидно, коллинеация, а произведение корреляции на коллинеацию или коллинеации на корреляцию — является корреляцией*. Эти соотношения несколько напоминают правило знаков при умножении чисел: минус на минус или плюс на плюс дают плюс, а минус на плюс или плюс на минус дают минус. Поэтому мы будем называть коллинеации *положительными*, а корреляции — *отрицательными* проективными преобразованиями.

Таким образом, произведение двух проективных преобразований одного знака есть положительное проективное преобразование (коллинеация), а разных знаков — отрицательное (корреляция).

Вообще, произведение нескольких проективных преобразований является положительным или отрицательным в зависимости от того, входит ли в его состав четное или нечетное число отрицательных сомножителей (корреляций).

Очевидно, *преобразование, обратное данному, есть преобразование того же знака*.

301. Отрицательные проективные преобразования мы будем обозначать греческими буквами с чертой наверху. Так, $\bar{\alpha}$ есть корреляция; $\bar{\pi}^{-1}\rho\bar{\pi}$ — коллинеация (четное число минусов), $\rho\bar{\pi}$ — корреляция. Вообще преобразование вида $\pi^{-1}\rho\pi$ всегда имеет знак преобразования ρ (каково бы ни было π — положительным или отрицательным), т. е. проективное преобразование преобразует проективное преобразование в проективное преобразование того же знака.

302. Итак, корреляция преобразует коллинеацию в коллинеацию. Далее ясно, что если корреляция преобразует коллинеацию ρ в ρ', то соответственные точки коллинеации ρ она преобразует в соответственные прямые коллинеации ρ', а соответственные прямые — в соответственные точки. Если, например, ρ преобразует $\left(\frac{A}{A'}\right)$, а $\bar{\sigma}$ преобразует $\begin{pmatrix} A, & A' \\ a, & a' \end{pmatrix}$, то ρ' преобразует $\left(\frac{a}{a'}\right)$.

В частности, если A двойная точка коллинеации ρ $|A \equiv A'|$, то a — двойная прямая коллинеации ρ $|a \equiv a'|$. Равным образом, $\bar{\sigma}$ преобразует двойные прямые коллинеации ρ в двойные точки коллинеации ρ'. Отсюда, в частности, следует, что корреляция преобразует гомологию в гомологию, причем центр первой гомологии — в ось второй, а ось первой — в центр второй.

303. Пусть ρ инволюционная гомология. Корреляция σ преобразует ее в гомологию ρ'

$$\rho = \bar{\sigma}^{-1}\rho\bar{\sigma}.$$

Отсюда $\rho'^2 = \bar{\sigma}^{-1}\rho\bar{\sigma}\cdot\sigma^{-1}\rho\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-1}\rho\rho\bar{\sigma}$.

А так как $\rho\rho = \rho^2 = 1$, то $\rho'^2 = \bar{\sigma}^{-1}\bar{\sigma} = 1$, т. е. ρ' —инволюционная гомология. Значит:

Корреляция преобразует инволюционную гомологию в инволюционную же гомологию и, стало быть, сохраняет гармонизм.

304. Мы знаем, что существует одна и только одна коллинеация, преобразующая четыре заданные независимые точки (или прямые) в четыре независимые произвольным образом заданные точки (соответственно прямые).

Докажем, что аналогичным свойством обладает и корреляция: *существует одна и только одна корреляция, преобразующая четыре заданные независимые точки (или прямые) в четыре независимые произвольным образом заданные прямые (соответственно — точки).*

В самом деле, пусть A, B, C, D — четыре независимые точки, а a, b, c, d — независимые прямые. Зададим какую-либо коррелляцию $\bar{\sigma}$ (например, рассмотренную в п. 297); она преобразует точки A, B, C, D в какие-то независимые прямые a', b', c', d':

$$\bar{\sigma} \text{ преобразует} \begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ a', & b', & c', & d' \end{pmatrix}.$$

Зададим теперь коллинеацию ρ, преобразующую $\begin{pmatrix} a', & b', & c', & d' \\ a, & b, & c, & d \end{pmatrix}$. Очевидно, произведение $\bar{\sigma}\rho$ есть корреляция, преобразующая

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ a, & b, & c, & d \end{pmatrix}.$$

Остается показать, что существует только одна такая корреляция.

Пусть имеются две корреляции $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, преобразующие $\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ a, & b, & c, & d \end{pmatrix}$. Тогда произведение $\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1}$ представляет собою коллинеацию, преобразующую $\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ A, & B, & C, & D \end{pmatrix}$. Стало быть, $\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1} = 1$, т. е. $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

Полярные преобразования

305. *Корреляция, которая сама себе обратна, называется полярным преобразованием или полярностью.* Полярность преобразует все фигуры инволюционно: если Ω преобразуется в ω, то и наоборот, ω преобразуется в Ω. Очевидно, квадрат полярности есть тождественное преобразование.

Образ точки в полярном преобразовании называется полярой этой точки, наоборот, образ прямой — полюсом ее.

Поляру точки мы будем обозначать той же буквой, что и самую точку, но строчной; полюс прямой — той же буквой, как самую прямую, но прописной.

В силу инволюционного характера полярного преобразования, *полюс и поляра соответствуют друг другу взаимно:* если a — поляра точки A, то A является полюсом прямой a.

306. Имеет место теорема: *корреляция, преобразующая вершины треугольника в противоположные стороны его, представляет собой полярное преобразование.*

Обозначим стороны треугольника, лежащие против вершин A, B, C соответственно через a, b, c.

По условию, корреляция $\overline{\pi}$ преобразует $\begin{pmatrix} A, & B, & C, \\ a, & b, & c \end{pmatrix}$.

Найдем, прежде всего образы сторон a, b и c. Имеем $a \equiv BC$. Стало быть $\overline{\pi}(a) \equiv \overline{\pi}(B)\,\overline{\pi}(C) \equiv bc \equiv A$, т. е. преобразует $\overline{\pi}$ $\begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix}$.

Точно так же докажем, что $\overline{\pi}$ преобразует $\begin{pmatrix} b, & c \\ B, & C \end{pmatrix}$: вершины и стороны треугольника преобразуются инволюционно.

Возьмем теперь на стороне a какую-либо точку X (см. рис. 110). Обозначим ее образ через x:

$$\overline{\pi}(X) \equiv x.$$

Так как $x \sim a$, то $x \sim A$.

Значит, когда точка X пробегает ряд точек a, ее образ x описывает пучок A: корреляция $\overline{\pi}$ преобразует ряд точек $a[X]$ в пучок $A[x]$. А так как корреляция есть преобразование проективное, то

$$A[x] \overline{\wedge}\, a[X]. \tag{1}$$

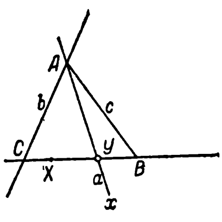


Рис. 110.

Рассмотрим сечение пучка $A[x]$ прямой a. Обозначим $xa \equiv Y$.

Когда прямая x описывает пучок $A[x]$, точка Y пробегает ряд точек $a[Y]$, причем

$$A[x] \overline{\wedge}\, a[Y]. \tag{2}$$

Из (1) и (2) заключаем, что $a[X] \overline{\wedge}\, a[Y]$.

Итак, если каждой точке X стороны a отнести точку Y той же стороны, лежащую на образе первой точки, то установленное таким образом соответствие между точками прямой a оказывается проективным.

Заметим теперь, что точке B в этой проективности соответствует точка C, а точке C — точка B.

Проективность на прямой, в которой одна точка преобразуется инволюционно, является инволюцией.

Значит, в проективности, преобразующей точки X в точки Y, все точки преобразуются инволюционно, т. е. точки Y преобразуются обратно в X. Иначе говоря, образ точки Y в корреляции $\bar{\pi}$ проходит через X. Обозначим его через y:

$$\bar{\pi}(Y) \equiv y \quad y \sim X.$$

Итак, если $Y \equiv ax$, то $y = AX$.

Отсюда следует, что $\bar{\pi}(x) \equiv \bar{\pi}(aY) \equiv \bar{\pi}(A)\bar{\pi}(Y) \equiv ay \equiv X$.

Итак, если $\bar{\pi}$ преобразует $\left(\frac{X}{x}\right)$, то $\bar{\pi}$ преобразует $\left(\frac{x}{X}\right)$.

Отсюда следует, что $\bar{\pi}^2$ оставляет все точки прямой a на месте. Точно так же докажем, что $\bar{\pi}^2$ оставляет на месте все точки прямой b. Значит $\bar{\pi}^2$ есть коллинеация с двумя неизменными прямыми, но в таком случае она является тождественным преобразованием (см. п. п. 57—59), т. е. $\bar{\pi}^2 \equiv 1$.

Стало быть $\bar{\pi}$ представляет собой полярное преобразование.

307. Треугольник, вершины которого преобразуются в противоположные стороны, называют *полярным треугольником.*

Из наших рассуждений следует: *существует одно и только одно полярное преобразование с заданным полярным треугольником, преобразующее любую заданную точку, лежащую вне сторон этого треугольника, в произвольным образом заданную прямую, не проходящую ни через одну из его вершин.*

Действительно, существует одна и только одна корреляция, преобразующая четыре независимые точки A, B, C, P в четыре независимые прямые a, b, c, p. Согласно доказанному, эта корреляция является полярным преобразованием. Иначе говоря, полярное преобразование вполне определено полярным треугольником и одной парой соответственных элементов.

308. Образ точки в полярном преобразовании мы назвали *полярой* ее, а образ прямой — *полюсом* этой прямой. *Все точки, лежащие на поляре данной точки A, называются сопряженными с точкой A. Равным образом, все прямые, проходящие через полюс прямой a* называются сопряженными с прямой a. Иначе говоря, с каждой точкой сопряжены в с е т о ч к и е е п о л я р ы, с каждой прямой — в с е п р я м ы е, п р о х о д я щ и е ч е р е з е е п о л ю с.

309. Пусть в полярности $\bar{\pi}$ точка A сопряжена с B; это значит, что поляра a точки A проходит через точку B:

$$a \sim B.$$

Но тогда $\bar{\pi}(a) \sim \bar{\pi}(B)$ (инцидентность сохраняется), т. е. $A \sim b$: поляра точки B проходит через A, иными словами, *если точка A сопряжена с B, то точка B сопряжена с A.*

Точно так же *если прямая a сопряжена с прямой b, то* и наоборот, *прямая b сопряжена с прямой a.* „Сопряженность“ есть отношение *взаимное.*

310. *Точка, лежащая на своей собственной поляре, называется самосопряженной.* Равным образом, *самосопряженной называется прямая, проходящая через свой собственный полюс.*

Двойных точек и прямых в полярном преобразовании, очевидно, быть не может. До некоторой степени их заменяют самосопряженные элементы.

Займемся ими подробней.

Самосопряженные элементы

311. *На самосопряженной прямой лежит одна, и только одна, самосопряженная точка — ее полюс.* Докажем это.

Пусть a — самосопряженная прямая. Это значит, что ее полюс A лежит на ней. Но, очевидно, точка A является самосопряженной, так как лежит на своей поляре a. Первая половина теоремы доказана. Докажем, что A является единственной самосопряженной точкой прямой a. Пусть B — вторая самосопряженная точка этой прямой. Обозначим ее поляру через b.

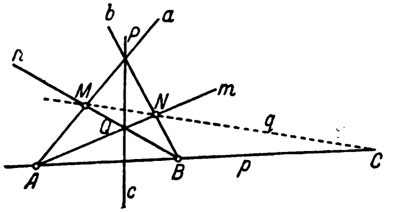


Рис. 111. Если A и B — самосопряженные точки на прямой p, которая не является самосопряженной, то точка C также не является самосопряженной точкой.

Так как $B \sim a$, то $b \sim A$.

Если B самосопряженная точка, то $b \sim B$, т. е. $b \equiv AB \equiv a$.

Выходит, что a является полярой двух различных точек: точки A и точки B. Но это невозможно, так как полярное преобразование является одно-однозначным.

312. Докажем, что все точки прямой не могут быть самосопряженными.

Пусть на прямой p лежат две самосопряженные точки A и B (рис. 111).

Обозначим их поляры через a и b. Так как

$$p \equiv AB,$$

то

$$P \equiv ab.$$

Прямая p с двумя самосопряженными точками не может быть самосопряженной; поэтому ее полюс P, т. е. точка ab, лежит вне p. Значит, прямые a и b обе отличны от p.

Возьмем на a произвольную точку M; так как $M \sim a$, то $m \sim A$. Обозначим точку пересечения прямых m и b через N; так как

$$N \equiv mb, \text{ то } n \equiv MB.$$

Рассмотрим точку пересечения прямых m и n. Обозначим ее через Q:

$$Q \equiv mn.$$

Поэтому

$$q \equiv MN.$$

Обозначим, наконец, точку пересечения прямой p с прямой q через C:

$$C = qp.$$

Поэтому

$$c = QP.$$

Итак, полярой точки c является прямая QP. Легко видеть, что точки P, Q и C являются диагональными точками полного четырехугольника $ABMN$. По аксиоме Фано, они не лежат на одной прямой. Таким образом, точка C прямой p не лежит на своей поляре, т. е. не является самосопряженной.

313. Мы доказали, что на каждой прямой имеется по крайней мере одна не самосопряженная точка. Сейчас будут установлены гораздо более сильные результаты.

Пусть точка X пробегает прямую a. Поляра точки X проходит через полюс прямой a:

$$X \sim a.$$

Следовательно $x \sim A$.

Так как полярность есть проективное преобразование, то ряд точек $a(X)$ проективен пучку $A[x]$:

$$a[X] \barwedge A[x].$$

Пересечем пучок $A[x]$ какой-либо прямой b, не проходящей через его вершину, т. е. не сопряженной с прямой a. Запишем $xb \equiv Y$. Очевидно

$$A[x] \overset{=}{\barwedge} b[Y].$$

Стало быть

$$a[X] \barwedge b[Y].$$

Имеем теорему: *Если две прямые не сопряжены, то каждой точке одной из этих прямых соответствует одна сопряженная с ней точка другой прямой; это соответствие является проективным.* Его называют *проективным соответствием сопряженных точек.*

314. В частности рассмотрим проективное соответствие между сопряженными точками одной и той же прямой. Пусть a не самосопряженная прямая. Каждой ее точке X отнесем сопряженную с X точку Y, лежащую на ней же. Получим два проективных ряда точек на прямой a:

$$a[X] \barwedge a[Y].$$

Двойные точки проективности, преобразующей ряд точек $a[X]$ в ряд точек $a[Y]$ (если они имеются), являются самосопряженными. А так как все точки прямой не могут быть самосопряженными, то проективность, о которой идет речь, не является тождественной.

Если эта проективность преобразует точку X в Y, то она же преобразует Y в X, так как сопряженность есть свойство взаимное.

Таким образом, проективность сопряженных точек на самосопряженной прямой является инволюцией.

Имеем теорему: *соответствие, относящее каждой точке не-*

самосопряженной прямой сопряженную с ней точку той же прямой, является инволюцией.

Эту инволюцию называют *инволюцией сопряженных точек.* Говорят, что полярность *устанавливает на каждой несамосопряженной прямой инволюцию сопряженных точек.*

315. Самосопряженные точки являются двойными в инволюции сопряженных точек. Поэтому, если инволюция сопряженных точек на некоторой прямой оказывается эллиптической, то на прямой вовсе нет самосопряженных точек; если — гиперболической, — то имеются две самосопряженных точки. Отсюда следствие: *на прямой имеется не более двух самосопряженных точек.*

Проективные преобразования полярного преобразования

316. Легко показать, что коллинеация и корреляция преобразуют полярность в полярность.

В самом деле, коллинеация π преобразует полярность $\bar{\sigma}$ в корреляцию $\pi^{-1}\bar{\sigma}\pi$, которая является полярностью, так как

$$(\pi^{-1}\bar{\sigma}\pi)^2 = \pi^{-1}\bar{\sigma}\pi.\ \pi^{-1}\bar{\sigma}\pi = \pi^{-1}\bar{\sigma}^2\pi = \pi^{-1}\pi = 1.$$

То же справедливо, если вместо коллинеации π рассматривать корреляцию π.

317. Пусть полярность $\bar{\sigma}$ относит точке A поляру a. Если точка A и ее поляра a не инцидентны (т. е. не самосопряжены), то существует инволюционная гомология α с центром A и осью a. Полярность $\bar{\sigma}$ преобразует ее в инволюционную гомологию с осью a и центром A, т. е. в самое себя:

$$\bar{\sigma} \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что и наоборот,

$$\alpha \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Гомология α и полярность $\bar{\sigma}$ коммутативны, т. е.

$$\alpha\ddot{\sigma} = \bar{\sigma}\alpha.$$

Имеем т е о р е м у: *Если центр и ось инволюционной гомологии являются соответственными в некоторой полярности, то эта гомология преобразует данную полярность в самое себя.*

Гомологию, которая преобразует полярность в самое себя, и которая, стало быть, в свою очередь, преобразуется полярностью в самое себя, мы будем называть двойной гомологией данной полярности.

318. Совершенно очевидно, что если полярность $\bar{\sigma}$ преобразуется в полярность $\bar{\sigma}^{-1}$, то сопряженные в $\bar{\sigma}$ элементы преобразуются в элементы, сопряженные в $\bar{\sigma}'$, инволюция сопряженных элементов, установленная полярностью σ, преобразуется в инволюцию сопряженных элементов, установленную полярностью $\bar{\sigma}'$, самосопряженные элементы полярности $\bar{\sigma}$ — в самосопряженные элементы полярности $\bar{\sigma}'$.

Классификация полярных преобразований

319. Мы установили несколько важных теорем относительно самосопряженных точек и прямых полярного преобразования. Но до сих пор не выяснено, имеются ли вообще в полярном преобразовании самосопряженные элементы.

Рассмотрим полярность $\bar{\pi}$ с полярным треугольником ABC, которая преобразует точку P, не лежащую на сторонах этого треугольника, в прямую p, не проходящую ни через одну из его вершин.

320. Обозначим через $P_a\, P_b\, P_c$ проекции точки P из вершин A, B, C треугольника на противоположные стороны его. Далее, обозначим тот из двух отрезков с концами B и C, который содержит точку P_a, через $(BC)\,P_a$ или одной буквой α:

$$(BC)\,P_a \equiv \alpha,$$

и точно так же

$$(AC)\,P_b \equiv \beta,$$
$$(AB)\,P_c \equiv \gamma.$$

Совокупность всех точек X, таких, что их проекции удовлетворяют условиям:

$$X_a \in \alpha,$$
$$X_b \in \beta,$$
$$X_c \in \gamma,$$

будем называть треугольной областью $(ABC)P$; а отрезки α, β, γ — сторонами этой области (см. рис. 112а).

Нетрудно усмотреть, что треугольник разбивает точки плоскости на четыре треугольные области, так что каждая точка, не лежащая на

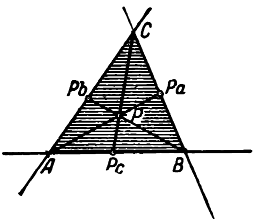


Рис. 112а. Штриховкой показана область (ABC) P в двух случаях расположения точки P.

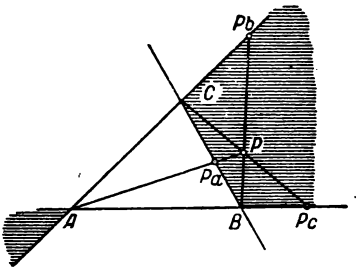


Рис. 112б.

сторонах треугольника, принадлежит одной и только одной из этих областей. Обозначая отрезок, дополнительный к отрезку α, через $\bar{\alpha}$, дополнительный к β — через $\bar{\beta}$, дополнительный к γ — через $\bar{\gamma}$, легко усмотреть, что эти четыре области ограничены сторонами:

1) $\alpha\beta\gamma$, 3) $\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}$,
2) $\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}$, 4) $\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma$.

321. Далее из рис. 112в непосредственно видно, что всякая прямая либо вовсе не пересекает сторон данной области, либо пересекает две и только две стороны. В первом случае прямая целиком лежит вне рассматриваемой области, т. е. не проходит ни через одну точку области.

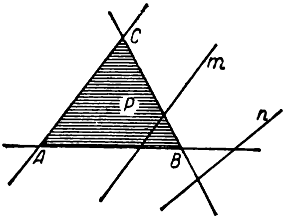


Рис. 112в. Прямая m пересекает две стороны области $(ABC)\ P$; прямая n не пересекает сторон области $(ABC)\ P$.

322. Возвращаясь к полярности $\bar{\pi}$, рассмотрим инволюции сопряженных точек, которые она устанавливает на сторонах полярного треугольника.

Обозначим точки

$$pa \equiv A',$$
$$pb \equiv B',$$
$$pc \equiv C'.$$

Очевидно, с точкой B на стороне a сопряжена точка C, а с точкой P_a точка A' (так как $P_a \equiv PA \cdot a$) и, стало быть,

$$\bar{\pi}(P_a) \equiv pa \cdot A \equiv A'A.$$

Итак, полярность $\bar{\pi}$ устанавливает на стороне a инволюцию π_a, преобразующую

$$\begin{pmatrix} B, C, P_a, A' \\ C, B, A', P_a \end{pmatrix}.$$

Точно так же на сторонах b и c полярность $\bar{\pi}$ устанавливает инволюции π_b и π_c, причем

$$\pi_b \text{ преобразует } \begin{pmatrix} A, C, P_b, B' \\ C, A, B', P_b \end{pmatrix},$$
$$\pi_c \text{ преобразует } \begin{pmatrix} A, B, P_c, C' \\ B, A, C', P_c \end{pmatrix}.$$

323. Возможны два случая:

1) прямая p целиком лежит вне треугольной области $(ABC)\,P$, содержащей точку P и 2) прямая p пересекает две стороны области $(ABC)\,P$.

В первом случае точки A', B', C' принадлежат соответственно отрезкам $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, тогда как точки P_a, P_b, P_c — отрезкам α, β, γ.

Значит,

пара P_a, A' разделяет пару B, C,
пара P_b, B' разделяет пару A, C,
пара P_c, C' разделяет пару A, B.

Поэтому все три инволюции π_a, π_b, π_c оказываются эллиптическими.

Во втором случае, пусть p пересекает стороны α и β, и стало быть, не пересекает стороны γ треугольной области $(ABC)\,P$. Тогда

пара P_a, A' не разделяет пары B,C,
пара P_b, B' не разделяет пары A,C,
а пара P_c, C' разделяет пару A,B.

Значит, инволюции π_a и π_b являются гиперболическими, а π_c — эллиптической.

Имеем теорему: *Если поляра точки, лежащей внутри некоторой треугольной области полярного треугольника, целиком лежит вне этой области, то полярность устанавливает на всех трех сторонах данного полярного треугольника эллиптические инволюции сопряженных точек. Если же поляра точки, лежащей внутри треугольной области полярного треугольника, пересекает эту область, то полярность устанавливает на двух сторонах треугольника гиперболические инволюции и на одной стороне — эллиптическую.*

324. Очевидно, во втором случае в полярности имеются самосопряженные точки — таковыми являются, например, двойные точки гиперболических инволюций, установленных полярностью на двух сторонах полярного треугольника.

325. Покажем, что в первом случае в полярности нет ни одной самосопряженной точки.

На сторонах полярного треугольника их, разумеется, нет. Пусть Q — произвольная точка плоскости, лежащая вне сторон полярного треугольника ABC. Если бы ее поляра q пересекала треугольную область $(ABC)Q$, то полярность устанавливала бы на двух сторонах треугольника ABC гиперболические инволюции, вопреки доказанному. Значит, q целиком лежит вне области $(ABC)Q$ и не проходит через точку Q. Иначе говоря, Q — не самосопряженная точка в полярности π. А так как Q — произвольная точка, лежащая вне сторон полярного треугольника, то выходит, что и вне сторон этого треугольника нет самосопряженных точек.

Имеем теорему: *В полярности, устанавливающей на всех трех сторонах полярного треугольника эллиптические инволюции, нет самосопряженных точек.*

326. Итак, существуют полярности двух родов: полярности с самосопряженными точками и полярности без самосопряженных точек. Первые иногда называют полярностями *обратного* типа, а вторые — *прямого* типа.

Ряды точек второго порядка

327. Займемся изучением полярных преобразований обратного типа, т. е. обладающих самосопряженными точками.

Пусть A — самосопряженная точка. Значит, через нее проходит ее поляра a. На прямой a нет других самосопряженных точек, но на всякой другой прямой b, проходящей через A, имеется еще одна самосопряженная точка, отличная от A. Действительно, полярность устанавливает на несамосопряженной прямой b инволюцию сопряженных точек с двойной точкой A. А раз в инволюции имеется одна двойная точка, то есть и вторая двойная точка, отличная от первой. Значит: если на несамосопряженной прямой имеется одна самосопряженная точка, то на ней имеется и другая самосопряженная точка, отличная от первой.

Отсюда следствие: *если полярность обладает одной самосопряженной точкой, то она обладает бесконечным множеством самосопряженных точек и, стало быть, бесконечным множеством самосопряженных прямых.*

328. *Совокупность всех точек, самосопряженных в некоторой полярности, назовем самосопряженным в этой полярности рядом точек второго порядка, а совокупность всех самосопряженных прямых — самосопряженным пучком прямых второго класса; наконец, совокупность всех самосопряженных точек и самосопряженных прямых — самосопряженной в данной полярности кривой второго порядка и второго класса.*

Таким образом, самосопряженная кривая рассматривается как совокупность точек и прямых.

329. Ряд точек, лежащих на одной прямой, мы будем отныне называть рядом точек первого порядка, а пучок прямых, проходящих через одну точку, — пучком прямых первого класса, в отличие от рядов точек второго порядка и пучков прямых второго класса.

330. Кривую второго порядка и класса, самосопряженную в некоторой полярности, мы будем обозначать той же буквой, которою обозначена сама полярность, но прописной; та же буква будет обозначать и ряд точек, и пучок прямых, самосопряженных в этой полярности. Из контекста всегда легко узнать, имеем ли мы дело с пучком прямых, с рядом точек, с кривой или с преобразованием.

Если точка A принадлежит самосопряженной кривой второго порядка и класса π (т. е. является самосопряженной в полярности π), то говорят также, что она *лежит* на этой кривой или *инцидентна* с ней, и вместо $A \in \pi$ пишут также $A \sim \pi$.

Равным образом, если прямая a принадлежит самосопряженной кривой π (т. е. является самосопряженной в полярности π), то говорят также, что данная прямая *инцидентна* с этой кривой и вместо $a \in \pi$ пишут $a \sim \pi$.

331. Точку, лежащую одновременно на прямой и на самосопряженной кривой, называют их общей точкой.

Очевидно, прямая либо вовсе не имеет общих точек с кривой, самосопряженной в некоторой полярности (если полярность устанавливает на прямой эллиптическую инволюцию), либо имеет с кривой общую одну точку (самосопряженная прямая), либо две (если полярность устанавливает на прямой гиперболическую инволюцию сопряженных точек).

Если прямая и самосопряженная кривая имеют только одну общую точку, то говорят, что они касаются, если две, — пересекаются. В первом случае прямая называется *касательной*, во втором — *секущей*. Общая точка касательной к самосопряженной кривой называется их точкой касания; общие точки секущей и самосопряженной кривой — точками их пересечения. Если прямая a является самосопряженной, то на ней лежит только одна самосопряженная точка — ее полюс A. Иными словами, самосопряженная прямая имеет с самосопряженной кривой одну, и только одну, общую точку — свой полюс, т. е. является касательной. *Полюс касательной есть ее точка касания.*

Таким образом, прямая, принадлежащая самосопряженной кривой, касается ее.

332. Через каждую самосопряженную точку проходит одна самосопряженная прямая — поляра этой точки. Значит, через каждую точку самосопряженной кривой проходит одна и только одна касательная — поляра точки касания; все остальные прямые, проходящие через эту точку, являются секущими.

Внутренние и внешние точки

333. Пусть теперь точка A не принадлежит самосопряженной кривой П. Полярность π устанавливает в пучке первого класса A либо гиперболическую, либо эллиптическую инволюцию сопряженных точек. В первом случае через точку A проходят две самосопряженные прямые, т. е. две касательные к самосопряженной кривой П. Во втором — ни одной.

Если через точку можно провести две касательные к самосопряженной кривой, то говорят, что точка *лежит вне* этой кривой, если — ни одной касательной, то говорят, что точка лежит *внутри* самосопряженной кривой. Таким образом, самосопряженная кривая разбивает все точки плоскости, не лежащие на ней, на два класса: *внутренних и внешних* точек.

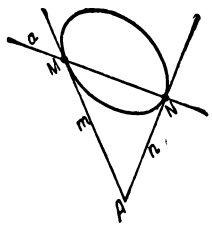


Рис. 113. Поляра точки пересечения двух касательных проходит через их точки касания.

334. Пусть точка A лежит вне самосопряженной кривой (рис. 113). Проведем через нее две касательные к этой кривой m и n и обозначим их точки касания, т. е. полюса, соответственно через M и N; обозначим также поляру точки A через a. Имеем

$$A \equiv mn.$$

Значит,

$$a \equiv MN.$$

Имеем теорему: *Поляра точки пересечения двух касательных проходит через их точки касания.*

335. Отсюда:

Следствие 1. *Поляра внешней точки пересекает самосопряженную кривую, и наоборот, полюс секущей лежит вне самосопряженной кривой.*

Следствие 2. *Поляра внутренней точки не имеет общих точек с самосопряженной кривой, и наоборот, полюса прямых,* *не имеющих общих точек с самосопряженной кривой, лежат внутри нее.*

336. Пусть A внутренняя точка. Построим полярный треугольник с вершиной b в точке A. Одной стороной этого треугольника является поляра a точки A. Проведем через A произвольную прямую b; обозначим ее полюс через B (рис. 114). Так как $b \sim A$, то $B \sim a$. Обозначим наконец, точку пересечения a и b через C, а ее поляру через c.

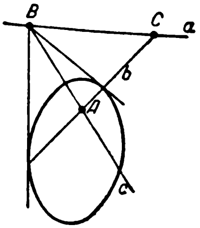


Рис. 114.

Так как

$$C \equiv ab, \text{ то } c \equiv AB.$$

Треугольник ABC является полярным.

Полярность устанавливает на стороне a этого треугольника эллиптическую инволюцию сопряженных точек, значит, на двух других сторонах — гиперболическую инволюцию. Но b совершенно произвольная прямая, проходящая через A. Значит, *всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку, пересекает самосопряженную кривую.*

337. Отсюда следствие:

Если прямая не имеет общих точек с самосопряженной кривой, то все точки прямой лежат вне этой кривой. Все точки касательной, кроме точки касания, тоже лежат вне самосопряженной кривой.

Поэтому про прямую, не имеющую общих точек с самосопряженной кривой, говорят, что она *целиком лежит* вне этой кривой.

338. Одна вершина полярного треугольника всегда лежит внутри самосопряженного ряда точек второго порядка, а две другие — вне его.

Действительно — одна сторона полярного треугольника целиком лежит вне самосопряженного ряда точек второго порядка. Стало быть, противоположная ей вершина (ее полюс) является внутренней точкой. Две другие стороны пересекают самосопряженный ряд точек; стало быть, противолежащие им вершины (их полюса) являются внешними точками.

339. Существуют прямые, на которых вовсе нет внутренних точек — прямые, целиком лежащие вне данного ряда точек второго порядка. Наоборот, внешние точки имеются, очевидно, на всех прямых: точка пересечения данной прямой с прямой, которая целиком лежит вне ряда точек второго порядка, является внешней.

340. Внутренние точки могут быть только на секущих. Докажем теорему. *На всякой секущей имеется по крайней мере одна внутренняя точка.*

В самом деле, возьмем на секущей a какую-либо внешнюю точку B. Построим полярный треугольник со стороной a и вершиной B. Обозначим через A полюс прямой a, через b — поляру точки B, а через C — полюс прямой AB. Очевидно, $C \equiv ab$. Треугольник ABC является полярным.

Из трех вершин полярного треугольника одна должна быть внутренней. Вершина B по условию является внешней. Вершина A тоже — внешней (полюс секущей). Значит, C — внутренняя точка. Но она лежит на a.

341. Коллинеация, преобразующая самосопряженную кривую в самое себя, очевидно, преобразует касательные к этой кривой в касательные к ней же, секущие — в секущие, внутренние точки во внутренние, а внешние — во внешние. Пользуясь этим, легко доказать, что из двух отрезков, на которые точки пересечения секущей с самосопряженной кривой разбивают секущую, один лежит целиком внутри кривой, а другой — вне ее.

В самом деле, пусть секущая пересекает самосопряженную кривую в точках M и N. Пусть P — одна из наружных точек, лежащих на MN. Докажем, что всякая точка отрезка $(MN)P$[1] является внешней, а всякая точка отрезка $(MN)_P$ — внутренней. Пусть, например, Q точка первого отрезка

$$Q \in (MN)\,P.$$

Тогда пара точек Q, P не разделяет пары точек M, N. Значит, существует пара точек X и Y, гармонически сопряженная относительно обеих пар.

Зададим инволюционную гомологию с центром X, преобразующую кривую π в самое себя. Эта гомология преобразует M в N и N в M. Стало быть, ось ее пройдет через точку, гармонически сопряженную с X относительно пары M, N, т. е. через Y. Но в таком случае она преобразует также P в Q. А так как P — внешняя точка, то и Q внешняя. Совершенно так же докажем, что если P внутренняя точка, то и Q внутренняя.

342. Итак, точки пересечения самосопряженной кривой с прямой разбивают точки прямой на два отрезка, из которых один целиком лежит внутри кривой, а другой — целиком вне ее.

Внутренний отрезок секущей называют *хордой*.

Если секущая MN сопряжена с какой-либо прямой p (т. е. проходит через полюс P этой прямой), то говорят также, что хорда MN сопряжена с прямой p (хотя бы полюс прямой p не принадлежал хорде MN, а лежал на ее продолжении).

Построение поляр и полюсов

343. Мы умеем строить полюсы секущих и поляры внешних точек с помощью касательных. Такое построение предполагает, что задана полностью вся самосопряженная кривая второго порядка и второго класса, т. е., что заданы все самосопряженные прямые и точки. Однако, как мы сейчас покажем, полярное преобразование

---

[1] Здесь, как и ранее, $(MN)\,P$ обозначает тот отрезок, определяемый точками M, N, который содержит внутри себя точку P; $(MN)_P$ — дополнительный отрезок, т. е. не содержащий точки P.

может быть выполнено, если задан только самосопряженный ряд точек без касательных. При этом мы будем считать, что заданием ряда точек второго порядка определены точки его пересечения с любой заданной или построенной прямой (если точки пересечения имеются). Такой ряд точек, заданием которого определяются точки его пересечения с любой заданной или построенной секущей, мы будем называть сплошным.

Итак, займемся построением поляр и полюсов с помощью сплошного ряда точек второго порядка.

344. Пусть точка A не принадлежит самосопряженному относительно полярности $\bar{\gamma}$ ряду точек Г. Тогда поляра a этой точки не проходит через нее. Инволюционная гомология α с центром A и осью a преобразует полярность $\bar{\gamma}$, а стало быть, и самосопряженную кривую Г в самое себя. Таким образом, ось гомологии, преобразующей самосопряженную кривую в самое себя, является полярой центра этой гомологии.

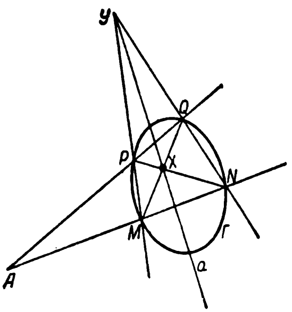


Рис. 115. Построение поляры точки A.

Отсюда простой способ построения поляр.

345. Проведем через A две секущие. Обозначим точки их пересечения с самосопряженным рядом Г соответственно через M, N и P, Q (рис. 115). Инволюционная гомология α преобразует прямую AM в самое себя; значит, точку M — в какую-то точку самосопряженного ряда Г, лежащую на AM, т. е. либо в N, либо в самое себя. Последнее, однако, невозможно: если точка M остается на месте, то и N преобразуется сама в себя. Но тогда прямая AM, проходящая через три двойные точки, была бы осью, что невозможно, так как ось инволюционной гомологии не проходит через ее центр. Значит, M преобразуется в N и N в M. Точно так же P преобразуется в Q и Q в P. Теперь легко построить ось гомологии α: α преобразует MQ в NP и MP в NQ. Значит, точка $MQ.NP$ (обозначим ее через X) и точка $MP{\cdot}NQ$ (обозначим ее через Y) лежат на оси.

Полярой точки A является прямая XY.

Этот способ построения поляр — с помощью двух секущих — пригоден во всех случаях, если преобразуемая точка не лежит на самосопряженной кривой.

346. Построение полюса заданной прямой a можно выполнить, построив предварительно поляры двух точек ее: если

$$a \equiv BC, \text{ то } A \equiv bc.$$

347. Наконец, чтобы построить поляру точки A, лежащей на самосопряженной кривой, достаточно построить полюс какой-либо секущей m, проходящей через преобразуемую точку: если A лежит на m, то ее поляра a проходит через полюс M прямой m: если

$$A \sim m, \text{ то } a \sim M.$$

С другой стороны, поляра самосопряженной точки проходит через эту точку:

$$a \sim A,$$

стало быть,

$$a \equiv AM.$$

348. Умея строить полюсы и поляры, мы можем строить также касательные к самосопряженному ряду точек. Чтобы провести касательную к самосопряженному ряду точек из точки A, лежащей вне ряда, достаточно построить поляру точки A: она пересечет самосопряженный ряд в точках касания искомых касательных.

Если точка A сама принадлежит самосопряженному ряду, касательная в ней есть ее поляра.

Ряд точек второго порядка есть коническое сечение

349. Мы видели, что заданием самосопряженного ряда точек полярность вполне определена. Поэтому ряд точек второго порядка, самосопряженный в некоторой полярности, называется *ядром* этой полярности. Про полярность говорят, что она установлена своим ядром.

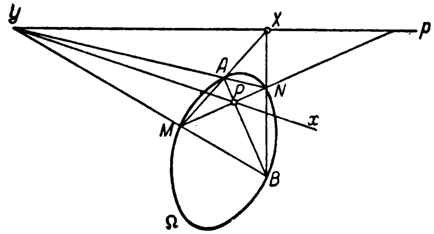


Рис. 116. Проекция точки A из точек M и N на поляру точки P суть сопряженные точки X и Y.

Точно так же про инволюцию сопряженных точек на прямой или сопряженных лучей в пучке, которые устанавливает полярность, говорят, что они *установлены ядром* этой полярности. Этим подчеркивается, что соответственные в инволюции элементы легко строить, если задано ядро полярности.

350. Докажем две леммы об инволюции, установленной рядом точек второго порядка на прямой.

Пусть P полюс прямой p в полярности $\overline{\omega}$ с ядром Ω. Проведем через P произвольную секущую и отметим на ней хорду MN. Иными словами, проведем произвольную хорду, сопряженную с прямой p (см. рис. 116).

Пусть далее A произвольная точка ряда Ω. Инволюционная гомология π с центром P и осью p преобразует Ω в самое себя; значит, она преобразует

$$\begin{pmatrix} M, & N, & A, & B \\ N, & M, & B, & A \end{pmatrix},$$

где B принадлежит ряду Ω.

Поскольку π преобразует

$$\begin{pmatrix} MA, & MB \\ NB, & NA \end{pmatrix},$$

точки

$$X \equiv MA \cdot NB$$

и

$$Y \equiv MB \cdot NA$$

лежат на оси гомологии — на прямой p.

Докажем, что они являются сопряженными в полярности $\bar{\omega}$.

Рассмотрим гомологию ρ с центром X, преобразующую ряд точек Ω в самое себя. Она преобразует

$$\begin{pmatrix} A, & M, & N, & B \\ M, & A, & B, & N \end{pmatrix}.$$

Значит, ρ преобразует MB в AN; стало быть, точка

$$MB \cdot AN \equiv Y$$

лежит на оси ρ, т. е. на поляре x точки X.

Значит, точка Y сопряжена с точкой X.

Имеем лемму 1: *Две проекции точки ряда второго порядка из концов какой-либо хорды его на прямую, сопряженную с этой хордой, являются сопряженными в полярности, установленной данным рядом.*

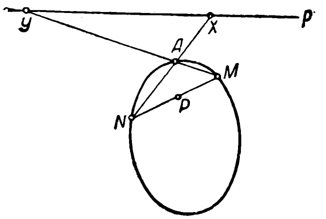


Рис. 117.

Эту же лемму можно выразить и так:

Лемма 2. *Проекция инволюции сопряженных точек из самосопряженной точки на секущую, сопряженную с прямой, несущей проектируемую инволюцию, есть инволюция, преобразующая самосопряженные точки секущей друг в друга.*

351. Лемма 1 дает простой способ построения точек, соответственных в инволюции сопряженных точек, которую полярность устанавливает на прямой.

Но не это нас сейчас интересует.

Пусть проектируемая точка A самосопряженной кривой описывает ряд точек второго порядка, принадлежащих этой кривой. Тогда проектирующие эту точку лучи MA и NA опишут пучки, которые мы обозначим так: $M[A]$ и $N[A]$. Сечение этих пучков прямой p дает инволюционно-проективные ряды точек первого порядка $P[Y]$ и $p[X]$ (рис. 117).

Имеем

$$M[A] \overset{=}{\bar{\wedge}} p[Y] \bar{\wedge} p[X] \overset{=}{\bar{\wedge}} N[A].$$

Значит,

$$M[A] \bar{\wedge} N[A].$$

Мы получили замечательную теорему: *Если соответственные лучи двух пучков первого класса, вершины которых расположены* *на самосопряженной кривой, пересекаются на той же кривой, то пучки проективны.*

Короче это можно выразить так:

Точки самосопряженного ряда второго порядка проектируются из двух точек того же ряда проективными пучками.

352. Геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков мы назвали ранее коническим сечением. Значит:

Всякий ряд точек второго порядка, самосопряженный в некоторой полярности, представляет собой невырожденное коническое сечение. [1]

353. Является вопрос: всякое ли невырожденное коническое сечение является ядром некоторой полярности?

Ответ получается очень легко. Вспомним, что все невырожденные конические сечения коллинеарны. Пусть Ω произвольное невырожденное коническое сечение, а Γ — ядро некоторой полярности. Зададим коллинеацию π, преобразующую Γ в Ω; она преобразует полярность с ядром Γ в полярность с ядром Ω. Отсюда следует утвердительный ответ на наш вопрос: всякое невырожденное коническое сечение является ядром некоторой полярности.

354. Словом, *ряд точек второго порядка и коническое сечение — это одно и то же.* Стало быть, все сказанное о рядах точек второго порядка относится ко всем коническим сечениям. Всякое коническое сечение разбивает плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю и устанавливает полярное преобразование точек и прямых плоскости в прямые и точки той же плоскости; при этом поляры внутренних точек целиком лежат вне конического сечения, поляры внешних точек пересекают его; точки самого конического сечения являются самосопряженными, т. е. лежат на своих полярах — касательных к коническому сечению. Инволюционная гомология, центр и ось которой являются соответственными в полярности, установленной коническим сечением, преобразуют это коническое сечение в самое себя. Отсюда простой способ построения поляр заданных точек, описанный ранее в п. 345.

355. До сих пор мы не применяли принципа двойственности к теории конических сечений. Сделаем это сейчас.

Перед нами две возможности. Можно исходить из первоначального определения конического сечения, как геометрического места точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков. С другой стороны, можно рассматривать коническое сечение как геометрическое место точек, самосопряженных в полярности обратного типа.

Начнем со второй точки зрения.

356. Образ двойственной совокупности самосопряженных точек есть совокупность самосопряженных прямых, т. е. пучок прямых

---

[1] Невырожденность следует из утверждения п. 331.

второго класса, он же — пучок касательных к коническому сечению.

357. Переключаемся на первую точку зрения. Образ двойственной совокупности точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков есть совокупность прямых, соединяющих соответственные точки двух проективных рядов точек первого порядка.

358. Сопоставляя обе точки зрения, приходим к выводу: *прямые, соединяющие соответственные точки двух проективных, но неперспективных рядов точек первого порядка, образуют пучок прямых второго класса.* Если два ряда точек первого порядка *перспективны,* то прямые, соединяющие соответственные их точки, разделяются на две категории:

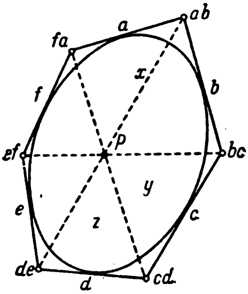


Рис. 118. Шестисторонник Брианшона.

1) Прямые, проходящие через точку пересечения носителей перспективных рядов, которая, как точка второго ряда, соответствует самой себе, как точке первого ряда. Эти прямые составляют пучок первого класса с центром в точке пересечения носителей перспективных рядов.

2) Прямые, соединяющие остальные пары соответствующих точек; они составляют пучок первого класса, центр которого совпадает с центром перспективы.

Условимся совокупность прямых, соединяющих соответственные точки двух перспективных рядов первого порядка, называть *вырожденным* пучком второго класса. Из того, что сейчас было сказано, видно, что *вырожденный пучок второго класса распадается на два пучка первого класса.*

Невырожденный пучок второго класса имеет в качестве огибающей невырожденное коническое сечение.

Теорема, двойственная теореме Штейнера, утверждает, что *лучи пучка второго класса „высекают" на двух лучах этого пучка проективные ряды точек первого порядка.*

359. Применим теперь принцип двойственности к теореме Паскаля. Вместо шестиугольника, состоящего из шести вершин *1, 2, 3, 4, 5, 6* и шести сторон *12, 23, 34, 45, 56, 61*, получим шестисторонник, состоящий из шести сторон *I, II, III, IV, V, VI* и шести вершин *I II, II III, III IV, IV V, V VI* и *VI I.* Шестиугольник, вписанный в коническое сечение, превратится в шестисторонник, описанный около него. Теорема Паскаля преобразуется в такую теорему, известную под названием теоремы Брианшона: *три прямые, соединяющие попарно противоположные вершины шестисторонника, описанного около конического сечения, пересекаются в одной точке* (рис. 118).

360. Обозначая стороны шестисторонника, описанного около конического сечения, через a, b, c, d, e, f, можем записать содержание теоремы Брианшона в виде такой схемы:

$$\left.\begin{array}{r} ab\cdot de\equiv x \\ bc\cdot ef\equiv y \\ cd\cdot fa\equiv z \end{array}\right\} P, \qquad (1)$$

двойственной схеме п. 290.

361. В частности, пусть две касательные, например, f и e, совпадают. Получим схему

$$\left.\begin{array}{r} ab\cdot de\equiv x \\ bc\cdot ee\equiv y \\ cd\cdot ea\equiv z \end{array}\right\} P. \qquad (2)$$

Схема (2) двойственна схеме п. 292; ee есть фигура, двойственная фигуре EE, т. е. касательной в точке E. Поэтому ee следует понимать, как точку касания прямой e. Схема иллюстрируется рис. 119.

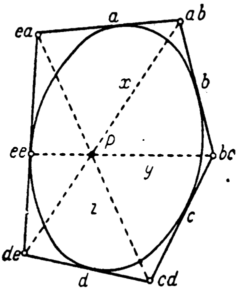


Рис. 119. Шестисторонник Брианшона, у которого две соседние стороны слились.

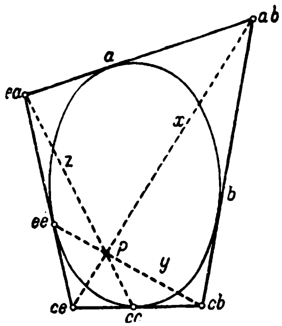


Рис. 120. Шестисторонник Брианшона, у которого две пары соседних сторон слились.

362. Если положить в схеме (2) $d\equiv c$, получим:

$$\left.\begin{array}{r} ab\cdot ce\equiv x \\ bc\cdot ee\equiv y \\ cc\cdot ea\equiv z \end{array}\right\} P. \qquad (3)$$

Эта схема иллюстрируется рис. 121.

363. Полагая еще $b\equiv a$, придем к такой схеме:

$$\left.\begin{array}{r} aa\cdot ce\equiv x \\ ac\cdot ee\equiv y \\ cc\cdot ea\equiv z \end{array}\right\} P, \qquad (4)$$

которая выражает следующую теорему: *три прямые, соединяющие вершины треугольника, описанного около конического сечения, с точками касания противолежащих сторон, пересекаются в одной точке* (рис. 121 и 122).

364. Схема (1) может быть использована для построения новых касательных к коническому сечению, заданному пятью касательными, схема (2) — либо для построения новых касательных, если заданы четыре касательные и точка касания одной из них, либо для построения точки касания, если заданы 5 касательных. Аналогичным образом могут быть использованы и другие схемы. Вообще приходим к такому выводу, двойственному положению п. 296: невырожденное коническое сечение вполне определено пятью касательными или четырьмя касательными и точкой касания одной из них, или тремя касательными и точками касания двух из них; короче, — пятью независимыми касательными, которые могут частично совпадать друг с другом. При этом нужно считать, что пара совпавших касательных определяет точку касания и касательную.

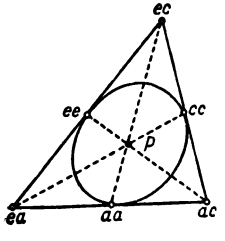


Рис. 121. Шестисторонник Брианшона, у которого три пары соседних сторон слились.

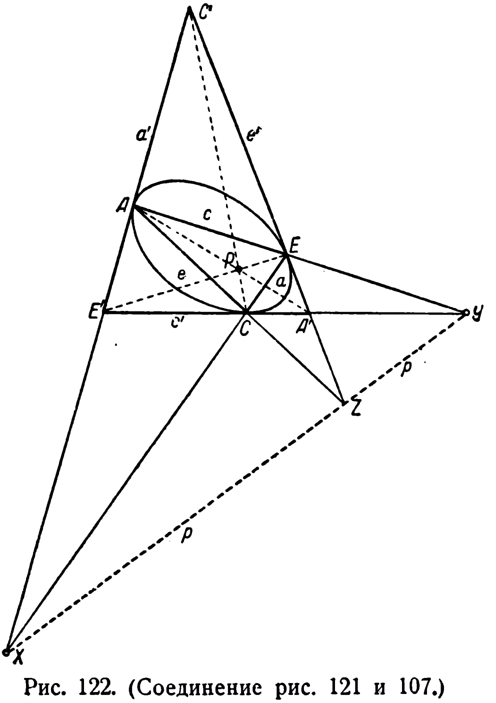


Рис. 122. (Соединение рис. 121 и 107.)

365. Если задана точка касания aa и касательная b, то прямая b не должна проходить через точку aa, иначе три прямые b, a и a проходили бы через одну точку, т. е. не были бы независимы. Независимость следует считать нарушенной также в случае совпадения трех касательных.

366. Итак, коническое сечение вполне определено пятью независимыми точками (п. 296) или касательными; учитывая все возможные частичные совпадения, получим такую таблицу элементов, определяющих коническое сечение:

5 точек + 0 касательных	2 точки + 3 касательные
4 точки + 1 касательная	1 точка + 4 касательных
3 точки + 2 касательные	0 точек + 5 касательных

В первой половине таблицы предполагается, что среди заданных точек находятся точки касания всех заданных касательных, а во второй половине, — что среди заданных прямых имеются касательные во всех заданных точках. Кроме того, касательные, разумеется, не должны проходить через иные заданные точки, кроме как через свои точки касания.

367. Теорема Брианшона остается в силе и в том случае, если пучок прямых II порядка вырождается в два пучка I порядка, т. е. если стороны шестисторонника проходят поочередно через две точки (рис. 123).

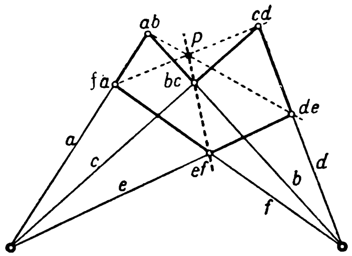


Рис. 123. Шестисторонник Брианшона „описанный около пары точек". (Ср. с рис. 108.)

Применение общей теории конических сечений к некоторым частным случаям

368. Полюс диаметра окружности лежит на пересечении касательных, проведенных через его концы (см. п. 334 и п. 297), т. е. в бесконечно удаленной точке прямых, перпендикулярных к диаметру (рис. 124).

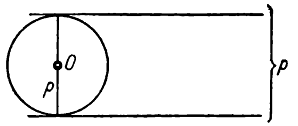


Рис. 124.

И в самом деле, инволюционная гомология, осью которой является диаметр окружности, а центром — бесконечно удаленная точка перпендикулярных к нему прямых, преобразует окружность в самое себя: ведь эта гомология представляет собой симметрию, осью которой служит диаметр, а такая симметрия как бы перегибает окружность по диаметру и накладывает одну половину ее на другую.

369. Диаметры окружности пересекаются в ее центре. Значит, полярой центра окружности является бесконечно удаленная прямая. И действительно, инволюционная гомология с бесконечно удаленной осью и с центром в центре окружности преобразует окружность в самое себя: ведь эта гомология есть центральная симметрия, т. е. полуоборот вокруг центра рассматриваемой окружности.

370. Эллипс тоже не имеет общих точек с бесконечно удаленной прямой. Поэтому полюс бесконечно удаленной прямой лежит в н у т р и эллипса (почему?). Инволюционная гомология с бесконечно удаленной осью и с центром в полюсе ее преобразует эллипс в самое себя. Но такая инволюционная гомология представляет собой центральную симметрию. Отсюда заключаем, что внутри эллипса должна существовать точка — полюс бесконечно удаленной прямой

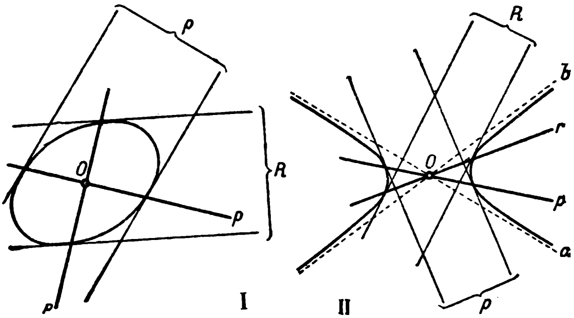


Рис. 125. Прямая p является полярой бесконечно удаленной точки P; r — поляра бесконечно удаленной точки R. Значит, O — полюс бесконечно удаленной прямой. В случае I (эллипс) точка O лежит внутри конического сечения. В случае II (гипербола) лежит вне конического сечения. Поэтому из центра гиперболы можно провести к ней две касательные a и b; эти прямые касаются гиперболы в бесконечно удаленных точках (почему?). Их называют асимптотами гиперболы.

(рис. 125, I), — полуоборот вокруг которой совмещает эллипс с самим собой. Эта точка называется центром симметрии эллипса.

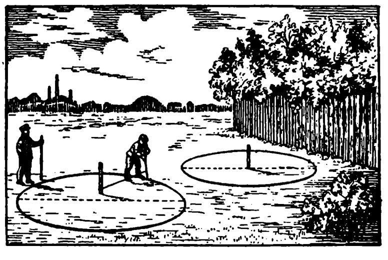


Рис. 126. Окружности, которые дети чертят на земле, изображены на этом рисунке в виде эллипсов. Центры окружностей отмечены колышками. Один из двух таких колышков, изображенных здесь, нарисован неправильно; какой? На этом рисунке есть и еще одна неточность, которая разъяснится впоследствии (см. рис. 134).

371. На основании таких же соображений приходим к выводу, что и у гиперболы существует центр симметрии — полюс бесконечно удаленной прямой (рис. 125, II), но он лежит вне гиперболы (потому что для гиперболы бесконечно удаленная прямая является секущей). Парабола же касается бесконечно удаленной прямой, а потому не имеет центра симметрии.

372. Так как центр гиперболы лежит вне кривой, из него можно провести к ней две касательные. Эти касательные касаются гиперболы в бесконечно удаленных точках. Их называют асимптотами гиперболы. Задание асимптот равносильно заданию пары касательных и их точек касания, т. е. четырех элементов. Поэтому гипербола вполне определена своими асимптотами и еще одним элементом — точкой или касательной. Предложим читателю построить новые точки гиперболы, заданной асимптотами и одной точкой, а также новые касательные к гиперболе, заданной асимптотами и одной касательной.

373. Для параболы бесконечно удаленная прямая является касательной, так что одна касательная к параболе всегда дана. Поэтому парабола вполне определена четырьмя элементами: четырьмя касательными, или тремя касательными и точкой касания одной из них, или двумя касательными и точками касания двух из них. Предложим читателю построить новые касательные к параболе, заданной одним из указанных способов.

374. Предложим читателю решить и такую задачу. На картинах окружность изображается либо эллипсом, либо параболой, либо гиперболой. Изображается ли центр окружности центром того конического сечения, которое служит ее изображением на картине (рис. 126)?

Инволюция, установленная коническим сечением на прямой и в пучке

375. Всякое невырожденное коническое сечение, как мы знаем, устанавливает в своей плоскости полярное преобразование (является ядром полярного преобразования) и, стало быть, определяет на каждой прямой, не касающейся его (т. е. несамосопряженной), инволюцию сопряженных точек, которая преобразует точки прямой так, что каждой точке оказывается отнесенной точка, лежащая на ее поляре. Поэтому, чтобы построить точку, соответственную точке A_1 в инволюции, которую коническое сечение устанавливает на прямой p, нужно построить поляру точки A_1: точка пересечения этой поляры с прямой p есть искомая.

376. Можно также воспользоваться леммой 1 (п. 350). Пусть MN хорда, сопряженная с прямой p (т. е. проходящая через полюс этой прямой). Будем проектировать точки конического сечения из точек M и N на прямую p; полученные, таким образом, две проекции одной точки, согласно лемме 1, соответствуют друг другу в инволюции, о которой идет речь.

Если прямая p пересекает коническое сечение, точки пересечения оказываются двойными в инволюции, которую коническое сечение устанавливает на этой прямой. Если же прямая целиком лежит вне конического сечения, оно устанавливает на ней инволюцию без двойных точек (эллиптическую).

377. В какой мере инволюция, установленная на некоторой прямой коническим сечением, может служить элементом, определяющим его?

Очевидно, задание гиперболической инволюции равносильно заданию двух точек конического сечения. Оказывается, однако, что и с эллиптической инволюцией дело обстоит так же. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим такую задачу.

Построить коническое сечение, проходящее через три заданные точки и устанавливающее на данной прямой заданную инволюцию.

Если заданная инволюция гиперболическая, двойные точки ее принадлежат искомому коническому сечению, так что мы располагаем всего пятью точками его. В этом случае имеется одно, и только одно, коническое сечение, удовлетворяющее условиям задачи (если все 5 точек независимы).

Покажем, что наша задача имеет одно, и только одно, решение, какова бы ни была заданная инволюция.

378. Обозначим заданные точки конического сечения через A, B и C, прямую, на которой задана инволюция, через p, самую инволюцию через σ_p. Допустим сперва, что искомое коническое сечение существует, и постараемся найти новые точки его.

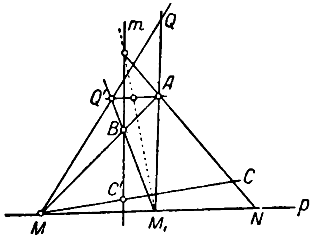


Рис. 127. A, B, C — три точки конического сечения, M и M_1 — сопряженные точки в заданной инволюции на прямой p. На чертеже показано построение новой точки конического сечения C'.

Проведем прямую AB до пересечения с p в точке M (см. рис. 127). Легко построить поляру точки M относительно искомого конического сечения. Пусть σ_p преобразует M в M_1. Очевидно, поляра точки M проходит через M_1. Иными словами, ось m инволюционной гомологии μ с центром M, преобразующей искомое коническое сечение в самое себя, проходит через точку M_1.

Очевидно, эта гомология преобразует $\begin{pmatrix} A, B \\ B, A \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} M \\ M_1 \end{pmatrix}$. Центр, пара соответственных точек и одна собственно двойная точка вполне определяют инволюционную гомологию. Чтобы построить ее ось, заметим, что μ преобразует прямую AM_1 в BM_1 (и BM_1 в AM_1).

Возьмем на AM_1 произвольную точку Q и найдем ее образ $\mu(Q)$. Очевидно,

$$\mu(Q) \sim BM_1$$

$$\mu(Q) \sim MQ,$$

т. е.

$$\mu(Q) \equiv BM_1 \cdot MQ.$$

Обозначим эту точку через Q'. Гомологичные прямые AQ' и BQ пересекаются на оси гомологии, т. е. ось m проходит через точку $AQ' \cdot BQ$ и через M_1.

Ось (т. е. поляра точки M) найдена.

Теперь построим образ точки C — точку $\mu(C)$: обозначим ее через C''. Так как C лежит на коническом сечении, которое гомология μ преобразует в самое себя, то и C' лежит на том же коническом сечении. Мы получили четвертую точку искомого конического сечения.

Совершенно так же, проведя прямую AC до пересечения с p в точке N, построим поляру n точки N. Затем, используя точку B и инволюционную гомологию с центром N и осью n, получим пятую точку B' искомого конического сечения. Пятью точками коническое сечение вполне определено.

Таким образом, если искомое коническое сечение существует, то только одно.

379. Остается показать, что оно существует. Для этого покажем, что коническое сечение, проходящее через точки A, B, C, C', B', действительно устанавливает на прямой p инволюцию σ_p, преобразующую $\begin{pmatrix} M, & N \\ M_1, & N_1 \end{pmatrix}$.

Всякое коническое сечение, проходящее через точки A, B, C, C', относит точке M в качестве ее поляры прямую m, так как инволюционная гомология с центром M и осью m преобразует $\begin{pmatrix} A, & B, & C, & C' \\ B, & A, & C' & C \end{pmatrix}$. Значит, все конические сечения, проходящие через точки A, B, C и C', устанавливают на прямой p инволюции, в которых точки M и M' являются соответственными. Точно так же все конические сечения, проходящие через A, B, C и B', устанавливают на p инволюции, в которых точки N и N_1 являются соответственными. Значит, инволюция, установленная коническим сечением A, B, C, B', C' на прямой p, преобразует $\begin{pmatrix} M, & N \\ M_1, & N_1 \end{pmatrix}$. Но такая инволюция есть только одна: это σ_p.

380. Условимся приписывать каждой эллиптической инволюции пару *мнимых* сопряженных двойных точек. Соответственно этому будем говорить, что прямая, целиком лежащая вне конического сечения, пересекает его в паре мнимых сопряженных точек.

Какая нам выгода от такого словоупотребления? Ранее мы видели, что коническое сечение вполне определено пятью независимыми элементами; при этом пара точек — различных или совпадающих — считалась за два элемента. Оказывается, что и задание пары мнимых точек равноценно заданию двух элементов. Мы уже видели, что заданием трех действительных и одной пары мнимых сопряженных точек коническое сечение вполне определено. Покажем, что одна действительная точка и две пары мнимых тоже определяют одно и только одно коническое сечение (если все 5 точек независимы, т. е. если действительная точка не коллинейна ни с одной из пар мнимых, и обе пары мнимых не лежат на одной прямой).

381. Рассмотрим задачу:

Построить коническое сечение, проходящее через 5 заданных точек, из которых одна действительная, а 4 мнимых, попарно сопряженных.

Иными словами, требуется построить коническое сечение, проходящее через заданную точку A и устанавливающее заданные инволюции (эллиптические) на двух прямых p и q. Обозначим эти инволюции через σ_p и σ_q.

Начнем решение с того, что построим поляру точки пересечения заданных прямых p и q — точки R (рис. 128). Пусть σ_p преобразует точку R в точку R_1 (на прямой p), а σ_q — в точку R_2 (на прямой q). Тогда поляра точки R должна пройти через R_1 и через R_2, т. е.

$$r \equiv R_1R_2.$$

Прямая r, очевидно, сопряжена с прямой p, а также с прямой q. Далее, очевидно, что r пересекает искомое коническое сечение, так как точка R лежит вне его.[1] Обозначим точки пересечения через X и Y. Теперь будем проектировать инволюцию σ_p из самосопряженной точки A на прямую r (сопряженную с p). Согласно лемме 2 (п. 350) получим на r инволюцию (обозначим ее через σ'_p), которая преобразует самосопряженные точки прямой r друг в друга:

$$\sigma'_p \text{ преобразует } \begin{pmatrix} X, & Y \\ Y, & X \end{pmatrix}.$$

Точно так же, проектируя σ_q на прямую r из точки A, получим на r инволюцию σ'_q, которая преобразует $\begin{pmatrix} X, & Y \\ Y, & X \end{pmatrix}$.

Значит, произведение $\sigma'_p\sigma'_q$ оставляет точки X и Y на своих местах. Иными словами, точки пересечения прямой r с искомым коническим сечением являются двойными точками проективности $\sigma'_p\sigma'_q$. Построив двойные точки этой проективности, будем иметь хорду XY, сопряженную с прямой p (а также с q). Согласно лемме 1, если M и N пара точек, соответственных в инволюции σ_p (или σ_q), то лучи XM и YN пересекаются на искомом коническом сечении. Таким образом, наша задача свелась к задаче: построить двойные точки заданной проективности. Мы ею скоро займемся.

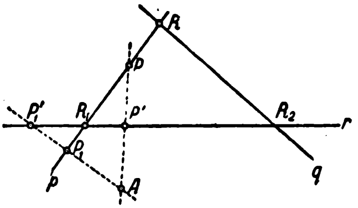


Рис. 128. Инволюция σ_p на прямой p проектируется из точки A на прямую r; получается инволюция σ'_p (точки P и P_1 соответствуют друг другу в инволюции σ_p, их проекции P' и P'_1 соответствуют в инволюции σ'_p).

382. Все сказанное об инволюции сопряженных точек на прямой можно с помощью принципа двойственности перенести на пучки. Коническое сечение устанавливает инволюцию сопряженных лучей в любом пучке, вершина которого не лежит на данном коническом сечении. Эта инволюция преобразует лучи пучка друг в друга так, что относит каждому лучу — луч, проходящий через его полюс.

Если вершина пучка лежит вне конического сечения, так что два луча пучка касаются конического сечения, эти лучи оказываются двойными в инволюции, которую коническое сечение устанавливает среди лучей пучка. Если же вершина пучка лежит внутри конического сечения, оно устанавливает в пучке инволюцию без двойных лучей (эллиптическую).

383. Условимся, однако, приписывать эллиптической инволюции в пучке пару *мнимых* двойных лучей и соответственно этому говорить, что из внутренней точки можно провести к коническому сечению две мнимых касательных.

---

[1] Так как инволюции σ_p и σ_q — эллиптические, то обе прямые p и q лежат вне конического сечения; поэтому и точка R лежит вне его.

Для задания конического сечения пара мнимых касательных равноценна двум элементам.

Например, коническое сечение вполне определено тремя действительными касательными и парой мнимых (т. е. инволюцией в пучке) или одной действительной касательной и двумя парами мнимых (т. е. двумя инволюциями в пучках).

384. Рассмотрим еще такую задачу.

Построить коническое сечение, устанавливающее на прямой p заданную инволюцию, если, кроме того, заданы: полюс P прямой p относительно искомого конического сечения и одна из точек его S.

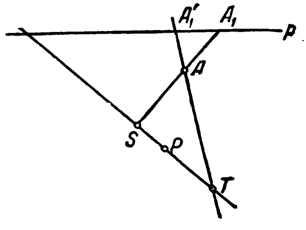


Рис. 129.

Подвергнув точку S инволюционной гомологии с центром P и осью p, получим точку T, которая, очевидно, тоже лежит на искомом коническом сечении (почему?). Теперь мы имеем хорду ST, сопряженную с прямой p. Поэтому лучи SA_1 и TA_1', пересекающие прямую p в соответственных точках заданной на ней инволюции, пересекаются в точке A на коническом сечении (рис. 129). Так можно построить сколько угодно точек его. Предложим читателю формулировать и решить двойственную задачу.

Элементы, определяющие полярное преобразование

385. Заданием невырожденного конического сечения полярное преобразование вполне определено. Таким образом, полярность может быть задана пятью самосопряженными точками или касательными.

Нам известен также другой способ задания полярного преобразования: с помощью полярного треугольника и поляры одной точки, лежащей вне его сторон (см. п. 307).

386. Пусть задан полярный треугольник ABC со сторонами a, b и c, и поляра p точки P. Построим полюс M заданной прямой m.

Обозначим точки пересечения прямой p со сторонами полярного треугольника так:

$$ap \equiv A'; \quad bp \equiv B'; \quad cp \equiv C'.$$

Далее, обозначим проекции точки P из вершин полярного треугольника на противолежащие стороны его соответственно через P_a, P_b и P_c (рис. 130). Легко убедиться в том, что точки P_a и A', P_b и B', P_c и C' — попарно сопряжены.

В самом деле, полюсом прямой AP является точка ap, т. е. точка A'; значит, с точкой A' сопряжены все точки прямой AP, в том числе и точка пересечения прямой AP со стороной a полярного треугольника, т. е. точка P_a. Также убедимся в том, что с точкой B' сопряжена точка P_b, с точкой C' — точка P_c.

Тем самым определены инволюции сопряженных точек на сторонах полярного треугольника: α на a, β на b, γ на c.

$$\alpha \text{ преобразует } \begin{pmatrix} B, & C, & P_a, & A' \\ C, & B, & A', & P_a \end{pmatrix}$$
$$\beta \quad \text{»} \quad \begin{pmatrix} A, & C, & P_b, & B' \\ C, & A, & B', & P_b \end{pmatrix}$$
$$\gamma \quad \text{»} \quad \begin{pmatrix} A, & B, & P_c, & C' \\ B, & A, & C', & P_c \end{pmatrix}$$

Инволюции α, β и γ вполне определены.

Пусть прямая m пересекает стороны полярного треугольника a, b и c соответственно в точках A_m, B_m и C_m. Найдем поляры двух из

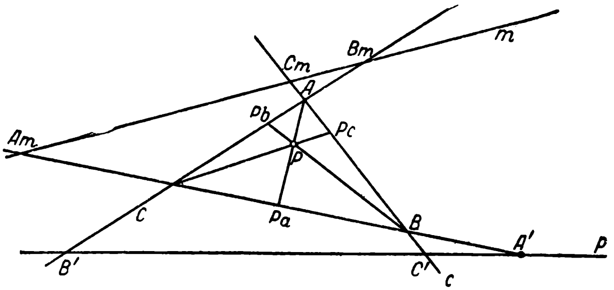


Рис. 130. Построение полюса произвольной прямой m, если задан полярный $\triangle$ ABC и поляра p точки P.

этих точек, например, A_m и B_m. Поляра точки A_m пройдет через точку $\alpha(A_m)$, сопряженную с A_m в инволюции α. Обозначим эту точку через A'_m. Кроме того, точка A_m лежит на стороне a, стало быть, поляра ее проходит через полюс A прямой a. Итак,

$$a_m = A'_m A.$$

Аналогично

$$b_m = B'_m B.$$

Имеем поляры двух точек прямой m — точки A_m и точки B_m. Полюс прямой m лежит на пересечении этих поляр:

$$m \equiv A_m B_m;$$

значит,

$$M \equiv a_m b_m.$$

387. Аналогично решается задача о нахождении поляры заданной точки. Чтобы построить поляру n точки N, спроектируем преобразуемую точку из вершин полярного треугольника на противоположные стороны его; получим точки N_a, N_b, N_c. Пусть α преобразует N_a в A_n, N_b в B_n. Тогда полюсом прямой AN_a является точка A_n, полюсом прямой BN_b — точка B_n.

Имеем полюсы двух прямых, проходящих через N, поляра точки N проходит через них, т. е. $n \equiv A_n B_n$.

388. Из других способов задания полярности отметим два:

I способ. Полярность вполне определена инволюцией сопряженных точек на некоторой прямой, полюсом этой прямой и парой сопряженных точек, лежащих вне ее.

Пусть имеем инволюцию сопряженных точек σ_p на прямой p и полюс P этой прямой. Пусть, кроме того, имеем пару сопряженных точек A и A' вне прямой p (рис. 131).

Прежде всего заметим, что имея инволюцию σ_p на прямой p и полюс P этой прямой, легко строить поляры всех точек, лежащих на p: все они проходят через P и, кроме того, поляра каждой точки X проходит через сопряженную точку $\sigma_p(X)$.

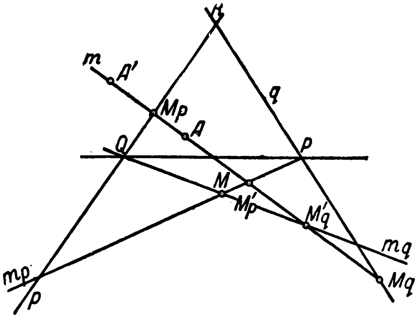


Рис. 131.

Возьмем на p точку Q и построим ее поляру q. Обозначим точку сопряженную с Q в инволюции σ_p через $Q: \sigma_p(Q) \equiv R$. Имеем $q \equiv PR$. Треугольник PQR является полярным.

389. Далее, имея инволюцию σ_p, легко строить полюсы всех лучей пучка P. Если луч x пучка P пересекает прямую p в точке Y, то его полюсом X является точка $\sigma_p(Y)$. Действительно, поляра точки $\sigma_p(Y)$ пройдет через P [так как $\sigma_p(Y) \sim p$] и через Y [так как точка Y сопряжена с точкой $\sigma_p(Y)$].

390. Обозначим прямую AA' через m и отметим точку ее пересечения с прямой p:

$$pm \equiv M_p.$$

Построим поляру m_p этой точки [она проходит через P и через точку $\sigma_p(M_p)$]. Пусть m_p пересекает прямую m в точке M'_p. Очевидно, точка M'_p сопряжена с точкой M_p. Таким образом, имеем на прямой M две пары точек, соответственных в инволюции сопряженных точек. Этим инволюция сопряженных точек на прямой Am (обозначим ее через σ_m) вполне определена.

391. Рассмотрим, наконец, точку пересечения прямой m с другой стороной полярного треугольника (например, q). Обозначим

$$mq \equiv M_q.$$

Поляра m_q этой точки пройдет через точку Q и через точку $\sigma_m(M_q)$. Построив ее, имеем поляры двух точек прямой m: точки M_p и точки M_q; их пересечение дает полюс M прямой m. Итак, имеем полярный треугольник PQR и полюс M прямой m, не проходящей через его вершины. Этим полярное преобразование вполне определено.

392. II способ. Полярность вполне определена инволюциями сопряженных точек на двух сопряженных прямых.

Пусть p и q две сопряженные прямые. Обозначим инволюции сопряженных точек на них соответственно через σ_p и σ_q. Обозначим точку pq через R и найдем ее поляру r. Очевидно, она проходит через $\sigma_p(R)$ и через $\sigma_q(R)$. Полюс P прямой p лежит на прямой q и на поляре точки R — прямой r, т. е. $P \equiv qr$.

Точно так же полюс Q прямой q лежит на p и на r, т. е. $Q \equiv pr$. Имеем полярный $\triangle\ PQR$ и инволюции сопряженных точек на двух сторонах его. Этого достаточно, чтобы построить полюс прямой или поляру любой точки.

393. Можно указать и другие способы задания полярного преобразования, но самым удобным остается все же задание с помощью ядра (т. е. самосопряженного конического сечения).

Приходится только пожалеть, что для полярностей прямого типа этот способ неприменим, так как у них нет самосопряженных точек, поскольку такие полярности устанавливают на всех прямых плоскости инволюции без двойных точек (с мнимыми двойными точками — можем мы сказать теперь).

Конечно, ничто не мешает нам назвать совокупность мнимых самосопряженных точек полярного преобразования прямого типа мнимым коническим сечением. Но от этого не легче: как использовать мнимое ядро для построения полюсов и поляр?

394. Использовать его нельзя. Однако, можно заменить мнимое самосопряженное коническое сечение некоторым действительным коническим сечением, с помощью которого полярное преобразование прямого типа может быть задано почти так же просто, как полярное преобразование обратного типа задается своим ядром.

Пусть $\overline{\pi}$ — полярность (прямого или обратного типа), а ρ — инволюционная гомология, которая преобразует $\overline{\pi}$ в самое себя:

$$\rho \text{ преобразует } \left(\frac{\overline{\pi}}{\overline{\pi}}\right).$$

В таком случае $\overline{\pi}$ и ρ коммутативны (п. 137):

$$\overline{\pi}\rho = \rho\overline{\pi}.$$

Основываясь на этом, легко показать, что произведения $\overline{\pi}\rho$ есть полярность. Действительно,

$$(\overline{\pi}\rho)^2 = \overline{\pi}\rho\overline{\pi}\rho = \overline{\pi}^2\rho^2 = 1.$$

Обозначим ее через $\overline{\pi}^*$:

$$\overline{\pi}^* = \overline{\pi}\rho, \tag{1}$$

и назовем полярностью, *сопряженной с* $\overline{\pi}$ *посредством гомологии* ρ.

395. Умножая (1) справа на ρ, получим

$$\overline{\pi} = \overline{\pi}^*\rho, \tag{2}$$

т. е. если полярность $\overline{\pi}^*$ сопряжена с $\overline{\pi}$ посредством гомологии ρ, то и полярность $\overline{\pi}$ сопряжена с $\overline{\pi}^*$ относительно той же гомологии. *Сопряженность есть свойство взаимное.*

396. Докажем теорему: *Полярность, сопряженная с полярностью прямого типа, принадлежит к обратному типу. Полярность, сопряженная с полярностью обратного типа, принадлежит к прямому типу, если центр сопрягающей их гомологии лежит внутри ядра сопрягаемой полярности, и принадлежит к обратному типу, если центр сопрягающей гомологии лежит вне ядра сопрягаемой полярности.*

Пусть $\bar{\pi}$ какая-либо полярность, а ρ — инволюционная гомология, преобразующая π в самое себя, т. е. такая, центр R и ось r кототой являются соответственными в $\bar{\pi}$. Далее обозначим через $\bar{\pi}^*$ полярность, сопряженную с $\bar{\pi}$ посредством гомологии ρ:

$$\bar{\pi}^* = \bar{\pi}\rho.$$

Проведем через центр ρ (точку R) произвольную прямую a и рассмотрим инволюции $\bar{\pi}_a$, $\bar{\pi}_a^*$ и ρ_a, которые полярности π, $\bar{\pi}^*$ и гомология ρ устанавливают на ней. Так как

$$\bar{\pi}^* = \bar{\pi}\rho,$$

то, очевидно,

$$\bar{\pi}_a^* = \bar{\pi}_a\rho_a.$$

Инволюция ρ_a является гиперболической, т. е. принадлежит обратному типу (см. п. 226, 267).

397. Если $\bar{\pi}$ — полярность прямого типа, то и инволюция $\bar{\pi}_a$ тоже принадлежит прямому типу: произведение преобразования прямого типа на преобразование обратного типа есть, очевидно, преобразование обратного типа (если одно преобразование не изменяет направления, а другое обращает его, то их произведение обращает направление). Значит, $\bar{\pi}_a^*$ есть инволюция обратного типа (гиперболическая). Значит, полярность $\bar{\pi}^*$ принадлежит обратному типу (имеет самосопряженные элементы).

398. Если $\bar{\pi}$ полярность обратного типа, а точка R лежит внутри ее ядра, то $\bar{\pi}_a$ есть инволюция обратного типа. В таком случае $\bar{\pi}_a^*$ как произведение двух преобразований обратного типа есть преобразование прямого типа. Таким образом, полярность $\bar{\pi}^*$ устанавливает на всех прямых, проходящих через точку R, эллиптические инволюции. Значит, $\bar{\pi}^*$ не имеет самосопряженных точек на этих прямых, а стало быть, и нигде: $\bar{\pi}^*$ есть полярность прямого типа.

399. Пусть, наконец, сопрягаемая полярность $\bar{\pi}$ принадлежит обратному типу, а центр сопрягающей гомологии ρ — лежит вне ее ядра. Тогда одни прямые пучка R целиком лежат вне ядра π, а другие пересекают его; если a — прямая первой категории, то инволюция $\bar{\pi}_a$ — прямого типа; тогда $\bar{\pi}_a^*$ есть инволюция обратного типа; стало быть, на ней имеются две точки, самосопряженные в полярности $\bar{\pi}^*$. Значит, $\bar{\pi}^*$ — полярность обратного типа. При этом, те прямые пучка R, которые не имеют общих точек с ядром полярности $\bar{\pi}$, пересекают ядро π^* полярности $\bar{\pi}^*$, а те, которые пересекают π, не имеют общих точек с $\bar{\pi}^*$.

400. Из доказанного следует, что всякую полярность прямого типа можно представить в виде произведения полярности обратного типа на инволюционную гомологию,

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}^* \rho.$$

При этом центр гомологии ρ должен лежать внутри ядра полярности $\bar{\pi}^*$. Ядро полярности $\bar{\pi}^*$, сопряженной с π, называют *вещественным заместителем мнимого ядра* полярности $\bar{\pi}$.

Таким образом, полярность без самосопряженности точек может быть задана вещественным заместителем ее ядра, т. е. ядром сопряженной с ней полярности, и центром сопрягающей гомологии, который всегда лежит внутри этого ядра.

401. Пусть, например, требуется построить образ точки A в полярности $\bar{\pi}$, заданной ядром π^* сопряженной полярности $\bar{\pi}$ и центром R сопрягающей гомологии ρ. Построение выполняется по формуле

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}^* \rho. \tag{3}$$

Сперва строим образ a^* точки A в полярности $\bar{\pi}^*$:

$$a^* = \bar{\pi}^*(A),$$

а затем строим образ $\rho(a^*)$ прямой a^*. Этот образ и есть искомая поляра точки A в полярности $\bar{\pi}$.

$$a = \bar{\pi}(A) = \rho(a^*).$$

402. Так как $\bar{\pi}^*$ и ρ коммутируют, то формулу (3) можно заменить такой

$$\bar{\pi} = \rho \bar{\pi}^*, \tag{4}$$

т. е. можно сперва подвергнуть преобразуемую точку A гомологичному преобразованию ρ, а затем полярному преобразованию $\bar{\pi}^*$:

$$A^* = \rho(A),$$
$$a = \bar{\pi}^*(A^*).$$

Чтобы выполнить преобразование ρ, полезно заметить, что ρ преобразует ядро π^* в самое себя.

403. Применение формулы (3) удобней, если преобразуемая точка лежит вне ядра π^*, а формулы (4) — если преобразуемая точка лежит внутри ядра. В первом случае поляра a^* пересекает ядро, и точки гомологичные точкам пересечения a^* с π^* находятся очень легко, так как тоже лежат на π^*.

404. Во втором случае легко построить ρ — образ преобразуемой точки: проведя через точку A произвольную прямую, легко находим прямую, соответственную ей в гомологии ρ (опять используя точки пересечения этой прямой с π^*), после чего строим точку A^*, соответственную в ρ точке A; затем обычным путем строим поляру a^* точки A^* в преобразовании $\bar{\pi}^*$.

Построение полюсов производится путем построения поляр двух произвольных точек преобразуемой прямой.

Абсолютная полярность

405. Мы поставили себе задачу осветить метрическую геометрию с проективной точки зрения. В этом отношении полярности с мнимыми ядрами представляют особый интерес.

Пусть плоскость α и прямая a взаимно перпендикулярны. Отнесем друг другу бесконечно удаленную прямую a_∞ плоскости α и бесконечно удаленную точку A_∞ прямой a. Вообще установим такое соответствие между бесконечно удаленными прямыми и точками: бесконечно удаленной прямой плоскости отнесем бесконечно удаленную точку прямых, перпендикулярных к этой плоскости и, наоборот, бесконечно удаленной точке любой прямой отнесем бесконечно удаленную прямую плоскостей, перпендикулярных к этой прямой. Таким образом, получим одно-однозначное преобразование прямых и точек бесконечно удаленной плоскости в точки и прямые той же плоскости.

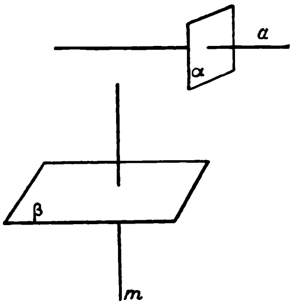


Рис. 132.

406. Нетрудно убедиться в том, что это преобразование сохраняет инцидентность.

Пусть точка M_∞ инцидентна с прямой a_∞. Это значит, что прямая m параллельна плоскости a (рис. 132). Точке M_∞ пусть соответствует прямая m_∞, а прямой a_∞ — точка A_∞; это значит, что прямая m перпендикулярна к плоскости β и плоскость α перпендикулярна к прямой a. В таком случае прямая a и плоскость μ параллельны, т. е. точка A_∞ и прямая m_∞ инцидентны:

$$\text{если } M_\infty \sim a_\infty, \text{ то } m_\infty \sim A_\infty.$$

Инцидентность сохраняется!

Итак, рассматриваемое преобразование представляет собой *корреляцию.*

407. Далее нетрудно усмотреть, что эта корреляция сама себе обратна, так как *перпендикулярность есть отношение взаимное. Значит, рассматриваемая корреляция представляет собой полярность.* Она называется *абсолютной полярностью.*

408. В абсолютной полярности нет самосопряженных элементов: если прямая и плоскость взаимно перпендикулярны, то они не параллельны. Значит, ни одна бесконечно удаленная точка не может лежать на своей абсолютной поляре, т. е. *абсолютная полярность есть полярность с мнимым ядром.* С проективной точки зрения она ничем не отличается от любой другой полярности прямого типа, но играет исключительную роль в геометрии Евклида.

409. Мы можем дать теперь такое определение перпендикулярности: *Прямая и плоскость взаимно перпендикулярны, если бесконечно удаленные элементы их* (точка и прямая) *являются соответ-*

стэенными в абсолютной полярности.. Две прямые взаимно перпендикулярны, если бесконечно удаленные точки их являются сопряженными в абсолютной полярности (т. е. одна лежит на абсолютной поляре другой). Равным образом, *две плоскости взаимно перпендикулярны, если бесконечно удаленные прямые их сопряжены в абсолютной полярности* (т. е. одна проходит через абсолютный полюс другой).

410. Оставим стереометрию и займемся планиметрией.

Абсолютная полярность устанавливает на каждой бесконечно удаленной прямой эллиптическую инволюцию сопряженных точек; ее называют *абсолютной инволюцией*. На каждой собственной плоскости имеется одна бесконечно удаленная прямая и на этой прямой — одна абсолютная инволюция. Бесконечно удаленные точки двух взаимно перпендикулярных прямых плоскости являются соответственными в абсолютной инволюции.

411. Рассмотрим пучок прямых. Каждому лучу пучка отнесем перпендикулярный ему луч того же пучка. Бесконечно удаленные точки двух соответственных лучей пучка являются соответственными в абсолютной инволюции. Поэтому соответствие между лучами пучка, которое мы установили, тоже является инволюцией. Эту инволюцию называют *ортогональной инволюцией* в пучке. Ортогональная инволюция в пучке относит каждому лучу пучка ортогональный ему луч того же пучка. Она является эллиптической инволюцией и „высекает" на бесконечно удаленной прямой плоскости абсолютную инволюцию.

412. Абсолютная инволюция, как всякая другая, вполне определена, если заданы две пары соответственных в ней точек, т. е. если на плоскости начерчены две пары взаимно перпендикулярных прямых, притом таких, что прямые одной пары не параллельны прямым другой пары; иначе говоря, если в плоскости заданы два прямых угла с непараллельными сторонами, например, если начерчен квадрат: стороны квадрата пересекаются в двух бесконечно удаленных точках и тем самым определяют бесконечно удаленную прямую и пару соответственных в абсолютной инволюции точек. Вторую пару соответственных в абсолютной инволюции точек задают диагонали квадрата. Поэтому, если на плоскости задан квадрат, задачи о проведении параллельных и перпендикулярных прямых можно трактовать как чисто проективные.

413. Например, чтобы из точки A опустить перпендикуляр m на прямую n, достаточно найти бесконечно удаленную точку M_∞ искомого перпендикуляра. Бесконечно удаленные точки M_∞ и N_∞ прямых m и n являются соответственными в абсолютной инволюции. Таким образом, задача сводится к построению точки M_∞, соответствующей в абсолютной инволюции заданной точке N_∞.

414. То обстоятельство, что бесконечно удаленная прямая лежит вне пределов чертежа, не создает принципиальных затруднений. Можно указать совершенно общий прием, устраняющий это препятствие.

Зададим какую-либо гомологию ρ, преобразующую бесконечно удаленную прямую в какую-либо собственную прямую p; эта гомология преобразует абсолютную инволюцию σ на бесконечно удаленной прямой в некоторую эллиптическую инволюцию σ' на прямой p. Таким образом, выполнив преобразование ρ над заданными элементами, мы можем решить поставленную задачу, оставаясь в собственной области. Затем, чтобы восстановить истинное положение вещей, достаточно выполнить обратное преобразование ρ^{-1}.

Впрочем, нет даже необходимости прибегать к преобразованию ρ, так как недоступность тех или иных заданных элементов не исключает возможности пользоваться ими при построении (см. п. 76 и далее).

415. Итак, если в плоскости чертежа начерчен квадрат, все метрические задачи в этой плоскости можно трактовать и решить как чисто проективные.

Окружность

416. Теперь мы можем определить окружность как коническое сечение, которое устанавливает на бесконечно удаленной прямой абсолютную инволюцию.

Мнимые двойные точки абсолютной инволюции назовем *циклическими точками.* Окружности пересекают бесконечно удаленную прямую в этих точках, т. е. все окружности проходят через мнимые циклические точки. Можно сказать, что *окружность есть коническое сечение, проходящее через пару мнимых циклических точек.* Понятно, почему окружность определяется тремя независимыми точками: три действительные и пара мнимых циклических точек — итого 5 элементов.

417. Окружность определяется также центром и одной действительной точкой, лежащей на ней. Центр — это полюс бесконечно удаленной прямой. Одна действительная точка, инволюция на заданной прямой (в данном случае абсолютная инволюция на бесконечно удаленной прямой) и полюс этой прямой вполне определяют коническое сечение.

418. Итак, если задан *„абсолют“ плоскости — бесконечно удаленная прямая и абсолютная инволюция на ней,* — окружность можно рассматривать с чисто проективной точки зрения.

Наоборот, абсолют плоскости задан, если в ней начерчена одна окружность с центром: поляра центра есть бесконечно удаленная прямая, а инволюция, установленная окружностью на ней, — абсолютная инволюция.

419. Все задачи, которые выше поставлены, теперь решены: мы знаем, чтó такое окружность и чтó такое перпендикулярность с проективной точки зрения.

Остается пожать плоды наших трудов — взглянуть на элементарную геометрию с той высоты, на которую мы взошли. Подобно тому, как хорошо знакомая, надоевшая местность выглядит по-новому интересной с высокой башни, так и элементарная геометрия с новой точки зрения развернется перед нами в виде неожиданно блестящей панорамы.

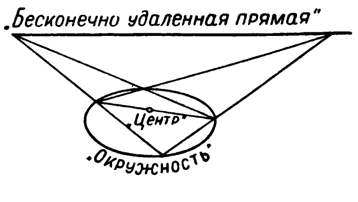
ГЛАВА СЕДЬМАЯ

МЕТРИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ С ПРОЕКТИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Проективное построение геометрии Евклида

420. Мы разложили основные понятия евклидовой геометрии на проективные элементы. Если наш анализ является исчерпывающим, то из этих элементов можно построить всю геометрию Евклида. Покажем сейчас на нескольких примерах, что это действительно выполнимо.

421. Назовем произвольное коническое сечение *окружностью*, а любую точку внутри его — *центром* этой „окружности“. Читатель, вероятно, уже настолько привык к таким маскарадам, что не удивится на этот раз.



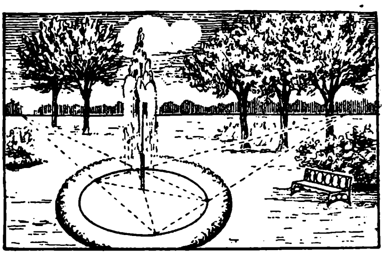


Рис. 133. Слева: произвольная прямая названа „бесконечно удаленной прямой“ и произвольное коническое сечение — „окружностью“; в таком случае полюс „бесконечно удаленной прямой должен быть назван „центром“ „окружности“. Справа: линия горизонта есть изображение (проекция) бесконечно удаленной прямой; коническое сечение — изображение окружности; в таком случае полюс линии горизонта представляет собой изображение центра окружности.

Если угодно, можно считать эту „окружность“ и ее „центр“ проекциями действительной окружности и ее настоящего центра.

422. Поляру „центра“ „окружности“ мы должны считать *бесконечно удаленной прямой* (рис. 133), а инволюцию, которую устанавливает на ней наша окружность, — *абсолютной* инволюцией.

Если считать „окружность“ и ее „центр“ проекциями действительной окружности и ее настоящего центра, то „бесконечно удаленную“

прямую придется рассматривать как проекцию подлинной бесконечно удаленной прямой проектируемой плоскости (рис. 133), а „абсолютную“ инволюцию как проекцию подлинной абсолютной инволюции.

423. Вообще на все последующее можно смотреть с такой точки зрения: под „перпендикулярами“, „параллелями“, „окружностями“ и „равными“ фигурами понимать изображения настоящих перпендикуляров, параллелей, окружностей и равных фигур, расположенных в одной плоскости.

При таком взгляде наше отвлеченное изложение было бы конкретизировано. Из него можно было бы даже сделать практические выводы о том, как изображать на рисунке окружности, перпендикуляры, равные фигуры и т. д. Но наша задача требует отвлеченного подхода; поэтому мы ограничимся тем, что подчеркнем конкретную точку зрения несколькими рисунками.

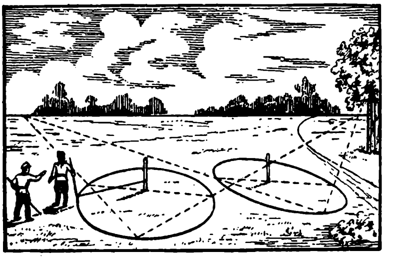


Рис. 134. Сравните этот рисунок с рис. 126. Два начерченных здесь конических сечения, представляющих собой изображения (проекции) двух окружностей, устанавливают на линии горизонта одну и ту же инволюцию, которая является проекцией абсолютной инволюции, установленной этими окружностями на бесконечно удаленной прямой. Изображенные на рис. 126 проекции окружностей устанавливают на линии горизонта разные инволюции. В этом и заключается вторая неправильность рис. 126, о которой упомянуто в подписи под ней.

424. В плоскости с „нарочной“ бесконечно удаленной прямой и „нарочной“ абсолютной инволюцией на ней можно развернуть всю планиметрию Евклида. Мы сейчас увидим, что эта „нарочная“ планиметрия как две капли воды похожа на настоящую.

Всякое коническое сечение, устанавливающее на „бесконечно удаленной“ прямой инволюцию, которую мы назвали абсолютной, приходится считать „окружностью“, а полюс „бесконечно удаленной“ прямой относительно „окружности“ — „центром“ этой окружности (рис. 134). Существует одно, и только одно, коническое сечение, которое устанавливает на данной прямой заданную инволюцию, относит ей в качестве полюса данную точку и проходит через другую заданную точку. Значит, существует одна, и только одна, „окружность“, которая имеет заданный „центр“ и сверх того проходит через заданную точку.

Вопрос об „окружностях“ в нашей „нарочной“ геометрии можно считать исчерпанным. О том, какие прямые следует здесь называть „параллельными“, мы уже говорили. Займемся „перпендикулярными“ прямыми.

425. Прямая m „перпендикулярна“ прямой n, если „абсолютная“ инволюция преобразует „бесконечно удаленную“ точку прямой m

в „бесконечно удаленную“ точку прямой n (рис. 135). Но „абсолютная“ инволюция — именно потому, что она **и н в о л ю ц и я** — преоб-

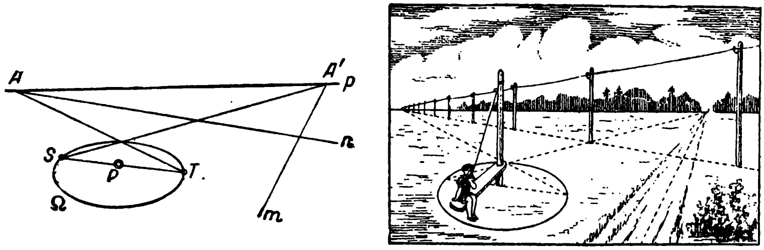


Рис. 135. Слева: прямые n и m пересекают поляру p точки P в точках A и A', которые являются соответственными в инволюции, установленной коническим сечением Ω на прямой p. Если Ω — „окружность“ и P — ее „центр“, то p „бесконечно удаленная“ прямая, а инволюция, установленная на ней „окружностью“ Ω, представляет собой „абсолютную“ инволюцию; тогда прямые m и n — взаимно „перпендикулярны“. Справа: тот же чертеж в конкретной форме; телеграфная линия, изображенная здесь, пересекает дорогу под прямым углом.

разует в таком случае „бесконечно удаленную“ точку прямой n обратно в „бесконечно удаленную“ точку прямой m. Значит, если первая прямая „перпендикулярна“ второй, то и вторая „перпендикулярна“ первой: две прямые „перпендикулярны“ **в з а и м н о**.

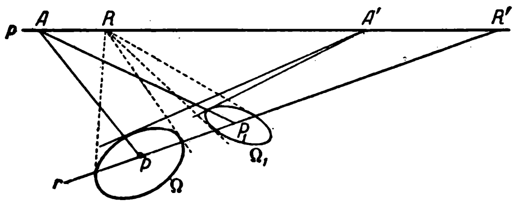


Рис. 136. Коническое сечение Ω относит прямой p в качестве ее полюса точку P и устанавливает на прямой p инволюцию, в которой точке A соответствует точка A', точке R — точка R'. R является полюсом прямой r относительно Ω. Коническое сечение Ω_1 относит прямой p в качестве ее полюса точку P_1 и устанавливает на p ту же инволюцию, которую устанавливает на ней Ω. Поэтому точка R является также полюсом прямой r относительно Ω_1. Иначе говоря, инволюционная гомология ρ с центром R и осью r преобразует Ω и Ω_1 в самих себя. Если Ω „окружность“ и P ее „центр“, то Ω_1 тоже „окружность“, P_1 ее „центр“, а гомология ρ — „симметрия“.

Все „перпендикуляры“ к одной прямой имеют общую „бесконечно удаленную“ точку, т. е. все они „параллельны“. Через не „бесконечно удаленную“ точку можно провести к данной прямой (опустить или восставить) один, и только один, „перпендикуляр“ (почему?).

426. Теперь можно определить „осевую симметрию“ („отражение“). Так следует назвать инволюционную гомологию, центр которой лежит в „бесконечно удаленной“ точке прямых, „перпендикулярных“ к ее оси (п. 197). Очевидно, центр „симметрии“, осью которой является „диаметр“ некоторой „окружности“ (рис. 136), представляет собой полюс этого „диаметра“, так что рассматриваемая „симметрия“ преобразует такую „окружность“ в самое себя. Отсюда следует (см. п. 416), что „осевая симметрия“ преобразует в самое себя „абсолютную“ инволюцию на „бесконечно удаленной“ прямой; стало быть, любую „окружность“ она преобразует в „окружность“ и притом так, что „центр“ первой „окружности“ преобразуется в „центр“ второй.

Посредством подходящим образом подобранной „осевой симметрии“ можно преобразовать любую „окружность“ и ее „центр“ в самих себя и притом так, чтобы любая точка этой „окружности“ была преобразована в любую другую, наперед заданную точку ее.

Доказательство возложим на читателя.

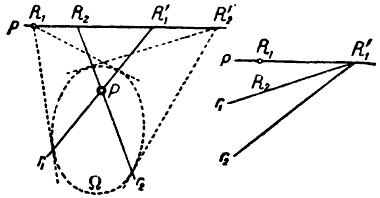


Рис. 137. Прямые r_1 и r_2 пересекают прямую p в точках R'_1 и R'_2; некоторая эллиптическая инволюция σ на прямой p преобразует эти точки в R_1 и R_2. Ω — одно из конических сечений, которые устанавливают на p инволюцию σ и относят прямой p в качестве ее полюса точку пересечения прямых r_1 и r_2. Инволюционные гомологии ρ_1 (центр — R_1, ось — r_1) и ρ_2 (центр — R_2, ось — r_2) преобразуют Ω в самое себя (рис. 136). Стало быть, произведение $\rho_1\rho_2$ тоже преобразует Ω в самое себя. В частном случае, если прямые r_1 и r_2 пересекаются на прямой p, то точки R'_1 и R'_2 совпадают; соответственные им в инволюции σ точки R_1 и R_2 тоже совпадают. Стало быть, инволюционные гомологии ρ_1 и ρ_2 имеют разные оси (r_1 и r_2) и общий центр ($R_1 = R_2$). Поэтому произведение их $\rho_1\rho_2$ представляет собой параболическую гомологию (см. п. 137) с осью p.

427. Произведение двух „симметрий“ преобразует в самих себя все „окружности“, „центры“ которых лежат одновременно на осях обеих „симметрий“ (почему?), т. е. „окружности“, описанные из точки пересечения их осей, как из „центра“ (рис. 137). Только в том случае, если оси перемножаемых „симметрий“ „параллельны“, не существует „окружностей“, имеющих „центром“ точку их пересечения. Тогда, и только тогда, обе „симметрии“ обладают общим центром, так что произведение их представляет собой параболическую гомологию (см. п. 178) с „бесконечно удаленной“ осью.

Произведение двух „осевых симметрий“ назовем „вращением“ вокруг точки пересечения их осей. В частности, „вращение“ вокруг „бесконечно удаленной“ точки (т. е. параболическую гомологию с „бесконечно удаленной“ осью) будем именовать „прямолинейным перенесением“. Точку, вокруг которой производится „вращение“, можно назвать „центром вращения“. Она же является „центром“ всех „окружностей“, которые преобразуются „вращением“ в самих себя.

Подобно „симметрии“, „вращение“ преобразует любую „окружность“ в „окружность“ же и притом так, что „центр“ первой „окружности“ преобразуется в „центр“ второй „окружности“ (почему?).

428. Всякая ли коллинеация, преобразующая некоторую „окружность“ и ее „центр“ в самих себя, представляет собой „вращение“? Нет, не всякая. Кроме „вращений“, тем же свойством обладают и „отражения“. Докажем сейчас, что любая такая коллинеация является либо „вращением“, либо „отражением“.

Пусть коллинеация π преобразует „окружность“ Ω и „центр“ ее P в самих себя (рис. 138), а некоторую точку A этой „окружности“ в точку A' (лежащую, разумеется, на ней же). Очевидно, π преобразует поляру „центра“ „окружности“ Ω, т. е. „бесконечно удаленную“ прямую, в самое себя; стало быть, „бесконечно удаленную“ точку N прямой PA — в „бесконечно удаленную“ точку N' прямой PA'.

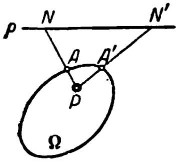


Рис. 138. Коллинеация, преобразующая Ω и P в самих себя и точку A в A', устанавливает между точками прямых PA и PA' вполне определенную перспективность.

Итак

$$\pi \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & P, & A, & N \\ \Omega, & P, & A', & N' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, π устанавливает между точками прямых PA и PA' вполне определенную проективность (даже перспективность, так как точка пересечения обеих прямых преобразуется в самое себя). Всякая иная коллинеация, преобразующая $\begin{pmatrix} \Omega, & P, & A \\ \Omega, & P, & A' \end{pmatrix}$, устанавливает между точками указанных прямых ту же проективность и, стало быть, может быть представлена в виде произведения коллинеации π на подходящим образом подобранную гомологию ρ с осью PA'.[1]

Так как π преобразует „окружность“ Ω в самое себя, то произведение $\pi\rho$ преобразует Ω в Ω только в том случае, если и ρ преобразует эту „окружность“ в самое себя. Но существует только одна гомология с осью PA', преобразующая „окружность“ Ω в самое себя: это отражение в прямой PA'. Таким образом существуют только две коллинеации, преобразующие $\begin{pmatrix} \Omega, & P, & A \\ \Omega, & P, & A' \end{pmatrix}$, именно π и $\pi\rho$. Одна из таких коллинеаций, как мы знаем, есть некоторая „осевая симметрия“ (см. п. 426), а другая, как сейчас доказано, представляет собой произведение этой „симметрии“ на „симметрию“ с осью PA'. Последняя коллинеация, будучи произведением двух „осевых симметрий“, является „вращением“.

Таким образом „вращение“ вполне определено, если задан „центр“ его и пара соответственных точек.

Теорема остается в силе и для того случая, когда „центр“ „вращения“ „бесконечно удален“ (почему?).

---

[1] Пусть σ — другая коллинеация, преобразующая $\begin{pmatrix} \Omega, & P, & A \\ \Omega, & P', & A' \end{pmatrix}$; очевидно $\pi^{-1}\sigma$ преобразует $\begin{pmatrix} \Omega, & P, & A' \\ \Omega, & P, & A' \end{pmatrix}$, следовательно, оставляет все точки прямой PA' на местах. Таким образом, $\pi^{-1}\sigma = \rho$ есть гомология с осью PA' и $\sigma = \pi\rho$.

429. „Вращение“ можно представить в виде произведения двух „отражений“ самым различным образом.

Пусть, например,

$$„\text{вращение}“\ \pi\ \text{преобразует}\ \begin{pmatrix}\Omega, & P, & A\\ \Omega, & P, & A'\end{pmatrix}.$$

Зададим „отражение“ ρ_1, осью которого является произвольный „диаметр“ r, „окружности“ Ω (рис. 139). Обозначим ту точку, в которую ρ_1 преобразует точку A, через A'':

$$\rho_1\ \text{преобразует}\ \begin{pmatrix}\Omega, & P, & A\\ \Omega, & P, & A''\end{pmatrix}.$$

Затем зададим „отражение“ ρ_2, преобразующее

$$\begin{pmatrix}\Omega, & P, & A''\\ \Omega, & P, & A'\end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\rho_1\rho_2$ есть „вращение“ (почему?), преобразующее $\begin{pmatrix}\Omega, & P, & A\\ \Omega, & P, & A'\end{pmatrix}$, а так как существует только одно такое „вращение“, то $\rho_1\rho_2 = \pi$.

Можно было бы, наоборот, осью второго „отражения“ ρ_2 назначить произвольный „диаметр“ „окружности“ Ω, а первое „отражение“ подобрать так, чтобы произведение $\rho_1\rho_2$ было равно заданному „вращению“ π.

Словом, „вращение“ можно представить в виде произведения двух „отражений“, причем осью одного из них допустимо выбрать *любую прямую*, проходящую через „центр“ „вращения“.

Теорема остается в силе и для „вращений“ с „бесконечно удаленной“ осью.

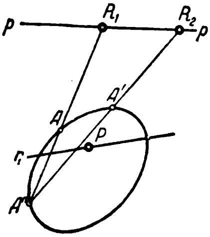


Рис. 139. Коллинеация, преобразующая изображенное здесь коническое сечение и прямую p в самих себя, а точку A в A', может быть представлена в виде произведения двух гомологий ρ_1 и ρ_2, преобразующих это коническое сечение и прямую p в самих себя. Центры ρ_1 и ρ_2 лежат на p, а оси пересекаются в полюсе прямой p (точка P), причем осью одной из этих гомологий можно назначить любую прямую, проходящую через P.

430. Из этой теоремы вытекает важное следствие: произведение любых двух „вращений“ есть „вращение“. Действительно, пусть центр одного „вращения“ π — точка O_1, а другого ρ — точка O_2. Представим первое „вращение“ в виде произведения подходящим образом подобранного „отражения“ π_1 на „отражение“ в прямой O_1O_2 (обозначим это „отражение“ через σ), а „вращение“ ρ — в виде произведения того же „отражения“ σ на подходящим образом подобранное „отражение“ ρ_1:

$$\pi = \pi_1\sigma,$$
$$\rho = \sigma\rho_1.$$

Очевидно

$$\pi\rho = \pi_1\sigma\cdot\sigma\rho_1 = \pi_1\sigma^2\rho_1.$$

Так как σ есть „отражение“, то $\sigma^2 = 1$. Стало быть,

$$\pi\rho = \pi_1\rho_1.$$

Но произведение двух „отражений“ π_1 и ρ_1 есть „вращение“. Стало быть, произведение двух „вращений“ (с действительными или „бесконечно удаленными“ „центрами“) есть „вращение“ (тоже с действительным или „бесконечно удаленным“ „центром“).

431. Отсюда следует, что совокупность всех „вращений“ (включая „вращения“ с „бесконечно удаленными „центрами“, т. е. „прямолинейные перенесения“) образуют группу. Ее называют группой „движений“. Каждый элемент группы „движений“ (т. е. каждое „движение“) представляет собой „вращение“ с действительным или „бесконечно удаленным“ центром. Эта теорема играет крупную роль в кинематике.

432. Посредством „движения“ можно любую прямую a преобразовать в любую другую прямую a' так, чтобы произвольная точка A первой прямой была преобразована в произвольную наперед заданную точку A' второй прямой. Для этого достаточно сперва „вращением“ вокруг точки пересечения обеих прямых совместить первую прямую со второй, а затем „прямолинейным перенесением“ вдоль второй прямой совместить заданные точки. Предоставим читателю показать, что одну прямую можно совместить с другой „поворотом“ около точки их пересечения двумя способами, так что существуют два „движения“, совмещающие прямую a и точку A на ней с прямой a' и точкой A' на ней, причем одно из этих „движений“ равно произведению другого на „полуоборот“ вокруг точки A'.

433. Разумное существо, которое обитало бы в плоскости с „нарочной“ „бесконечно удаленной“ прямой и нарочной „абсолютной“ инволюцией на ней, могло бы не только „передвигаться прямолинейно“, как человечек во второй главе, но было бы способно поворачиваться, как мы с вами. Перенося и поворачивая свою мерную цепь, оно в состоянии измерять любые расстояния. Ложная „бесконечно удаленная“ прямая казалась бы ему действительно бесконечно удаленной, „лжеокружность“ представлялась бы настоящей окружностью. Геометрия этого существа ничем не отличалась бы от евклидовой геометрии, которую мы изучаем в школе.

434. Быть может, у читателя явится сомнение: не находимся ли мы сами в положении такого человека? На это мы ответим так.

Можно истолковать понятия „окружность“, „движение“, „равенство“ совершенно отличным от обычного толкования способом. Но из всех возможных толкований одно, и только одно, имеет для нас исключительное практическое значение, ибо только при этом толковании геометрия дает точное описание нашего опыта и является, таким образом, одним из средств познания не воображаемого, а реального мира. Если с отвлеченно-логической точки зрения любую прямую плоскости можно назвать бесконечно удаленной, то для практики важно, чтобы это название не было присвоено досягаемой для нас совокупности точек. Поэтому „человечек“, о котором мы говорили, вовсе не заблуждается, полагая, что „нарочная“ бесконечно удаленная прямая на самом деле бесконечно удалена, так как для него она действительно недоступна.

435. Еще два слова по поводу евклидовой геометрии. Гомологии с бесконечно удаленной осью преобразуют абсолютную инволюцию на ней в самое себя. Стало быть, они преобразуют любую окружность в окружность, а центр первой в центр второй окружности. Параболические гомологии этого типа мы назвали прямолинейными перенесениями, а гиперболические — заслуживают наименования преобразований подобия. Произведения движений и преобразований подобия называют эквиформенными преобразованиями. Они преобразуют каждую фигуру в подобную ей фигуру (но, быть может, не подобно расположенную).

Иначе говоря, эквиформенное преобразование не изменяет формы фигуры — отсюда название (эквиформенный — значит „имеющий ту же форму").

436. Можно показать, что всякая коллинеация, преобразующая бесконечно удаленную прямую и абсолютную инволюцию на ней в самих себя, является эквиформенным преобразованием.

Поэтому совокупность эквиформенных преобразований образует группу.

437. Еще более обширную группу составляет совокупность всех коллинеаций, преобразующих бесконечно удаленную прямую в самое себя. Характерное свойство этих коллинеаций заключается в том, что они преобразуют параллельные прямые в параллельные же прямые. Их называют аффинными преобразованиями. Сдвиги и растяжения принадлежат к числу аффинных преобразований.

Наконец, самой обширной группой является группа всех коллинеаций.

438. Итак, мы познакомились с такими группами преобразований: 1) прямолинейные перенесения, 2) движения, 3) эквиформенные преобразования, 4) аффинные преобразования и 5) коллинеации.

В этом ряду каждая последующая группа включает все предыдущие. Первые три группы изучаются в метрической геометрии, четвертая — в так называемой аффинной геометрии, пятая — в проективной геометрии.

Теперь легко понять определение геометрии, которое дал известный математик Феликс Клейн: геометрия есть учение о преобразованиях, образующих группы.

Беглый взгляд на геометрию Лобачевского

439. После обозрения евклидовой геометрии с проективной точки зрения интересно бросить беглый взгляд на неевклидову геометрию, которую создал Лобачевский.

Среди основных положений (аксиом) геометрии Евклида есть одно, несколько более сложное, чем остальные. Это положение (его называют пятым постулатом Евклида) гласит: через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной. В течение двух тысячелетий существования евклидовой геометрии немало было попыток доказать этот постулат, но, как мы уже упоминали, ни одна из них не увенчалась успехом. Пятый постулат казался единственным пятном на прекрасном творении Евклида, пока исследования профессора Казанского университета Николая Ивановича Лобачевского не пролили совершенно новый свет на этот вопрос и не изменили коренным образом наше представление о геометрии.

440. После многократных попыток доказать пятый постулат, Лобачевский пришел к убеждению, что это невозможно. „Напрасное старание со времен Евклида в течение 2000 лет заставило меня подозревать, — пишет он, — что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения“. Чтобы проверить свою догадку о независимости пятого постулата от других аксиом, Лобачевский отверг этот постулат, принял, что в плоскости через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих ее, — и стал выводить следствия из этого допущения и других основных положений геометрии. Следствия получились весьма странные. Вот некоторые из них. Точки, равноудаленные от данной прямой, лежат не на прямой линии, а на кривой. Сумма углов треугольника, которая, как известно, в геометрии Евклида равна двум прямым углам (180°), в геометрии Лобачевского всегда меньше двух прямых. Поэтому сумма углов четырехугольника у Лобачевского меньше четырех прямых. Значит, невозможна фигура, имеющая форму этой страницы, у которой все 4 угла прямые. Более того, в геометрии Лобачевского вообще нельзя говорить о *форме* фигуры безотносительно к ее размерам: с изменением размеров меняется и форма. Иначе говоря, в геометрии Лобачевского нет подобия: если вы каким-нибудь способом, например, с помощью фотографического аппарата, увеличите или уменьшите чертеж, рисунок или картину, то ваша копия неминуемо будет искажена: взаимный наклон линий (углы) и пропорции частей на ней будут не те, что на оригинале.

441. Как ни удивительны на первый взгляд эти и многие другие свойства фигур, к которым пришел Лобачевский, они не являются логически абсурдными. Они противоречат нашим привычным представлениям, но не друг другу и не исходным положениям Лобачевского. Мало того: Лобачевский убедился, что в той своеобразной геометрии, которую он получил, внутреннее противоречие невозможно. Тогда он имел смелость признать, что обе геометрии — старая и новая, которую он назвал „воображаемой“, — *логически равноценны*. Так родилась неевклидова геометрия. В 1829 г. была напечатана первая статья Лобачевского на эту тему. За три года до того он сделал устный доклад о том же. Так что 1826 г. можно считать датой появления новой геометрии, равноправной с геометрией Евклида.

442. Но как могут быть равноправны взаимно противоположные утверждения об одних и тех же вещах? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно уяснить себе, о каких „вещах“ идет речь в геометрии.

Мы привыкли связывать основные геометрические понятия с определенными вещами, например, прямую с натянутой нитью, лучом света, ребром линейки и пр. Однако, как мы уже говорили, геометрия оперирует только теми свойствами точек, прямых и других геометрических понятий, которые выражены в аксиомах. Значит, например, прямая Евклида это не то же самое, что прямая Лобачевского, так как среди свойств первой есть одно, выраженное постулатом Евклида, которое отлично от аналогичного свойства второй, выраженного постулатом Лобачевского. Геометрии Евклида и Лобачевского потому не противоречат друг другу, что они касаются разных (хотя и сходны в некоторых отношениях) вещей.

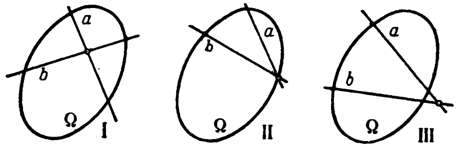


Рис. 140. *I*. Прямые *a* и *b* пересекаются. *II*. Прямые *a* и *b* параллельны. *III*. Прямые *a* и *b* не пересекаются и не параллельны.

443. О каких же „вещах“ трактует геометрия Лобачевского? Возможны различные интерпретации этой, как и всякой другой, геометрии. Приведем одну из них, основанную на идеях проективной геометрии.

Будем называть действительными (настоящими) точками точки, расположенные внутри некоторого конического сечения. Точки же, лежащие вне этого конического сечения, вычеркнем из поля нашего зрения, будем считать как бы несуществующими и называть идеальными. Точки, лежащие на границе между действительными и идеальными, т. е. на самом коническом сечении, назовем бесконечно удаленными.

Прямые, проходящие через действительные точки (т. е. пересекающие коническое сечение), будем считать действительными прямыми, а все остальные прямые признаем как бы несуществующими и назовем идеальными.

Через любые две действительные точки можно провести одну, и только одну, действительную прямую.

Две прямые могут пересечься в действительной точке (рис. 140, *I*), — тогда будем говорить просто, что они пересекаются; или в бесконечно удаленной точке (рис. 140, *II*), — тогда назовем их параллельными; или, наконец, в идеальной точке (рис. 140, *III*), — тогда скажем, что они не пересекаются (и не параллельны). Таким образом, через каждую действительную точку можно провести к данной действительной прямой две параллельные прямые и множество прямых, не параллельных ей и не пересекающих ее. Значит, известная аксиома о параллельных (постулат Евклида) не оправдывается здесь. В этом характерная особенность геометрии Лобачевского.

444. Коническое сечение, положенное в основу разделения точек на действительные, бесконечно удаленные и идеальные, называют а б с о л ю т о м.

Подчеркиваю еще раз, что только точки, расположенные внутри абсолюта, — являются „настоящими“ точками для обитателей того воображаемого мира, который мы строим. Законы, которые мы собираемся навязать этому миру, таковы, что существо, живущее внутри абсолюта, никак не сможет выбраться за его пределы, не сможет даже подойти к абсолюту, т. е. к границе, отделяющей действительные точки от идеальных.

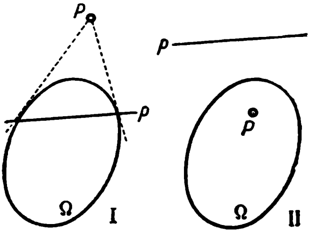


Рис. 141. Инволюционная гомология с осью p и центром P является в случае I осевой, а в случае II — центральной симметрией.

Но прежде чем говорить о движении, укажем, что следует здесь считать симметрией.

445. Преобразованиями симметрии назовем гомологии, преобразующие абсолют в самое себя. Если ось такой гомологии — действительная прямая (рис. 141, I), то симметрия будет называться о с е в о й. Если же центр гомологии — действительная точка (рис. 141, II), — симметрия будет именоваться ц е н т р а л ь н о й. Полюс оси осевой симметрии относительно абсолюта является ее центром, очевидно идеальным. Поляра центра центральной симметрии является ее осью (тоже, разумеется, идеальной).

446. Прямые, проходящие через полюс данной прямой, будем считать перпендикулярными к ней. Если прямая p проходит через полюс прямой q (рис. 142), то обратно, прямая q проходит через полюс прямой p, так что две прямые здесь, как и в геометрии Евклида, перпендикулярны в з а и м н о. Двойные прямые осевой симметрии перпендикулярны к ее оси (опять как в евклидовой геометрии). Произведение двух осевых симметрий с взаимно перпендикулярными осями есть центральная симметрия (снова как у Евклида). Но два перпендикуляра к одной прямой здесь не параллельны: они пересекаются в идеальной точке, т. е. принадлежат к числу прямых, которые н е п а р а л л е л ь н ы и н е п е р е с е к а ю т с я.

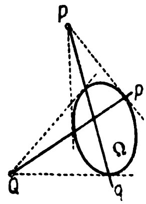


Рис. 142. Если поляра точки P проходит через Q, то поляра точки Q проходит через P.

447. Произведение двух симметрий назовем д в и ж е н и е м.[1] Прямая, соединяющая центры перемножаемых симметрий, и точка

[1] Так как любую симметрию можно рассматривать как произведение двух симметрий, то наше определение включает преобразования симметрий в число движений. Более удовлетворительной была бы иная точка зрения, которой мы придерживались в трактовке евклидовой геометрии, где движе-

пересечения их осей являются двойными элементами их произведения, т. е. движения. Эту прямую называют осью движения, а точку, о которой идет речь, **ц е н т р о м** движения. Очевидно, центр движения представляет собой полюс его оси относительно абсолюта.

Движения с действительным центром и идеальной осью (рис. 143, *I*) назовем вращениями вокруг центра, а движения с действительной осью и идеальным центром — прямолинейными перенесениями вдоль оси (рис. 143, *II*). Разумеется, прямолинейное перенесение можно рассматривать как вращение вокруг идеальной точки, а вращение — как прямолинейное перенесение вдоль идеальной прямой.

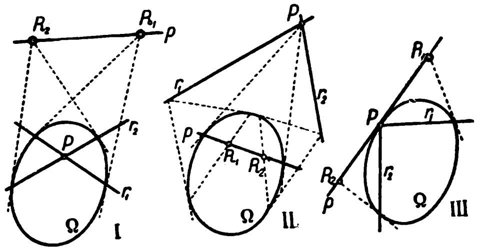


Рис. 143. R_1 и r_1 — центр и ось инволюционной гомологии ρ_1, преобразующей абсолют Ω в самое себя. R_2 и r_2 — центр и ось инволюционной гомологии ρ_2, преобразующей Ω в самое себя. Произведение $\rho_1\rho_2$ есть вращение с центром P и осью p. В случае *I* центр вращения — действительная точка, а ось — идеальная прямая; в случае *II* центр — идеальная точка, а ось — действительная прямая; в случае *III* центр — бесконечно удаленная точка, а ось — идеальная прямая.

Кроме вращений вокруг действительных и идеальных точек, возможны еще вращения вокруг бесконечно удаленных точек (предельные вращения, рис. 143, *III*). Таким образом, в геометрии Лобачевского существуют три вида движений.

448. Сказанное выше в п. п. 428 и 429 о вращениях в евклидовой геометрии остается в силе без всяких изменений и для движений в геометрии Лобачевского: всякое вращение и здесь можно представить в виде произведения двух симметрий, причем осью одной из них допустимо выбрать любую прямую, проходящую через центр вращения (действительный, идеальный или бесконечно удаленный).

Отсюда следует, что произведение двух движений в геометрии Лобачевского есть движение. Эта теорема доказывается совершенно так же, как аналогичная теорема для движений в евклидовой геометрии (см. п. 430). Словом, движения в геометрии Лобачевского тоже **о б р а з у ю т г р у п п у**.

449. В геометрии Лобачевского, как и в геометрии Евклида, любую действительную прямую можно совместить с любой другой действительной прямой посредством вращения вокруг точки их пересечения (действительной, идеальной или бесконечно удаленной). Для этого достаточно, удерживая точку пересечения указанных прямых на месте, совместить одну из бесконечно удаленных точек первой

ние было определено, как произведение двух *осевых* симметрий. При таком определении только *центральная* симметрия включается в число движений (полуоборот).

прямой с одной из бесконечно удаленных точек второй прямой, что всегда выполнимо даже с помощью преобразования симметрии (притом двумя способами). Помножив каждую из этих симметрий на симметрию, осью которой является вторая прямая, получим два вращения, выполняющие требуемое преобразование. Одно из них равно другому, умноженному на полуоборот вокруг их общего центра.

Точно так же любую действительную точку можно преобразовать в любую другую действительную точку посредством прямолинейного перенесения вдоль прямой, соединяющей их (притом двумя способами). [1] Доказательство предоставим читателю.

450. Далее, легко показать, что посредством движения можно любую прямую совместить с любой другой прямой (и притом двумя способами) так, чтобы произвольная действительная точка первой прямой была преобразована в произвольную наперед заданную точку второй прямой.

451. Умея переносить и поворачивать фигуры, можно приступить к измерению расстояний и углов в геометрии Лобачевского. Но мы этим здесь заниматься не будем.

Заметим только, что всякое движение преобразует абсолют в самое себя, так что все действительные точки передвигаются в действительные же точки. Поэтому точки самого абсолюта и тем более точки, лежащие вне его, недосягаемы для обитателя нашего мира: он не может подойти к ним никаким числом „равных“ шагов.

452. Мы подчеркивали до сих пор главным образом черты сходства геометрии Лобачевского с геометрией Евклида. Собственно говоря, пока обнаружено только одно существенное различие между обеими геометриями: в одной имеет место аксиома о параллельных прямых (постулат Евклида), которая не оправдывается в другой. Все прочие аксиомы, необходимые для того, чтобы развить геометрию Евклида, справедливы и для геометрии Лобачевского. Этим установлена независимость постулата Евклида от других аксиом. Теперь понятно, почему все попытки доказать этот постулат, не прекращавшиеся со времен Евклида в течение 2000 лет, были бесплодны.

453. Остановимся еще на некоторых чертах, отличающих геометрию Лобачевского от геометрии Евклида.

Прежде всего выясним, какую линию описывает точка при вращении вокруг: 1) действительного, 2) бесконечно удаленного и 3) идеального центра.

Пусть коническое сечение Ω относит прямой p в качестве полюса точку P и устанавливает на p инволюцию σ. Построим другое коническое сечение ω, которое относит прямой p в качестве полюса ту же точку P и устанавливает на p ту же инволюцию σ (рис. 144). Очевидно, через каждую точку плоскости можно провести одно, и только одно, коническое сечение, удовлетворяющее этим условиям (см. п. 384).

---

[1] Одно из этих преобразований представляет собой произведение другого на отражение относительно их общей оси.

Если инволюция σ преобразует некоторую точку R прямой p в точку R' (разумеется, лежащую тоже на p), то Ω и ω относят точке R в качестве поляры одну и ту же прямую, именно PR'. Иначе говоря, поляра точки R относительно Ω является вместе с тем полярой той же точки относительно ω.

Обратно, если коническое сечение ω относит любой точке некоторой прямой p в качестве поляры поляру той же точки относительно другого конического сечения Ω (т. е. если ω и Ω устанавливают совершенно одинаковое полярное преобразование одного ряда точек в пучок прямых), то оба этих конических сечения относят p в качестве полюса одну и ту же точку (почему?), и оба устанавливают на p одну и ту же инволюцию (почему?).

Итак, через каждую точку плоскости можно провести одно, и только одно, коническое сечение ω, которое любой точке прямой p относит в качестве поляры поляру той же точки относительно Ω. Очевидно, всякая гомология ρ, центр которой лежит на p и которая преобразует Ω в самое себя, преобразует также и ω в самое себя.

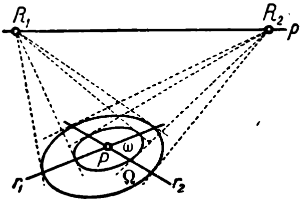


Рис. 144. Любой точке прямой p оба конических сечения (Ω и ω) относят в качестве поляры одну и ту же прямую пучка P. На рисунке точка P выбрана внутри Ω. Предлагается читателю сделать новые чертежи, выбрав P вне Ω и на Ω.

Если ρ_1 и ρ_2 две такие гомологии (рис. 144), то произведение их (коллинеация $\rho_1\rho_2$) тоже преобразует ω в самое себя.

Обратно, всякая коллинеация, преобразующая Ω и P в самих себя, может быть представлена в виде произведения двух инволюционных гомологий, оси которых проходят через точку P, а центры лежат на прямой p (см. п. 428); стало быть, всякая такая коллинеация преобразует коническое сечение ω в самое себя.

Положим теперь, что коническое сечение Ω, о котором шла речь, есть абсолют. Тогда гомологии ρ_1 и ρ_2 представляют собой симметрии, а их произведение $\rho_1\rho_2$ — в р а щ е н и е с центром P и осью p.

454. Из сказанного выше легко заключить, что через каждую точку плоскости проходит одно, и только одно, коническое сечение, которое преобразуется вращениями вокруг определенного центра в самое себя. Сообразно трем видам вращений получаются три типа таких конических сечений:

1) Если центр вращения — д е й с т в и т е л ь н а я точка (рис. 145, *I*), конические сечения, которые преобразуются в самих себя, представляют собой „окружности“ с общим действительным центром (он же — центр вращения). В этом случае вращение можно назвать э л л и п т и ч е с к и м, так как оно устанавливает на своей оси (идеальной) эллиптическую проективность (почему?). Очевидно, эллиптическое вращение есть действительное вращение, аналогичное тому, что мы называем этим именем в геометрии Евклида.

2) Если центр вращения — б е с к о н е ч н о у д а л е н н а я точка (рис. 145, *II*), конические сечения, которые преобразуются вращением в самих себя, проходят через его центр и касаются его оси. Их называют п р е д е л ь н ы м и о к р у ж н о с т я м и.

Каждая предельная окружность (подобно параболе в геометрии Евклида) имеет одну бесконечно удаленную точку (именно центр вращения).

В этом случае вращение можно назвать п а р а б о л и ч е с к и м, так как оно устанавливает на своей оси параболическую проективность (почему?).

3) Наконец, если центр вращения — и д е а л ь н а я точка (рис. 145, *III*), то конические сечения, которые преобразуются в самих себя, касаются абсолюта в двух точках (именно в точках пересечения абсолюта с осью вращения, которая является теперь действительной прямой). Каждое из этих конических сечений (подобно гиперболе в геометрии Евклида) имеет две бесконечно удаленные точки.

В этом случае вращение устанавливает на своей оси гиперболическую проективность и может быть названо г и п е р б о л и ч е с к и м. Очевидно, гиперболическое вращение есть не что иное, как прямолинейное перенесение.

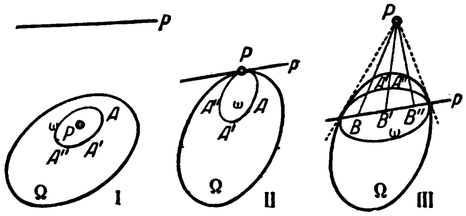


Рис. 145. Вращение с центром P и осью p преобразует точки конического сечения ω в точки того же конического сечения (например, A в A', A' в A'' и т. д.). Можно сказать, что точка A при вращении с центром P и осью p описывает кривую ω.

455. В то время как в евклидовой геометрии при прямолинейном перенесении вдоль какой-нибудь прямой все точки фигуры движутся по параллельным прямым, в геометрии Лобачевского все они передвигаются по только что описанным коническим сечениям. Если, например, поставить отрезок перпендикулярно к прямой p и затем переносить его вдоль этой прямой, то верхний конец его в геометрии Евклида опишет прямую, параллельную p, а в геометрии Лобачевского — коническое сечение, которое касается абсолюта в точках его пересечения с прямой p.

Выходит, что рассматриваемое коническое сечение есть геометрическое место точек, равноудаленных от прямой p. Поэтому его называют **л и н и е й р а в н ы х р а с с т о я н и й** от прямой p. В геометрии Евклида „линия равных расстояний“ есть п р я м а я, параллельная ей. В геометрии Лобачевского она не прямая, а представляет собой коническое сечение с двумя бесконечно удаленными точками.

456. Недостаток места мешает нам рассмотреть многие другие замечательные особенности этой геометрии. Заметим еще, что прямолинейные перенесения в геометрии Лобачевского не образуют группы. Доказательство возложим на читателя.

Единственный вопрос, который мы еще постараемся выяснить, таков: существуют ли в геометрии Лобачевского аффинные и эквиформенные преобразования? Именно, мы докажем, что в этой геометрии, как уже упоминалось, нет подобия.

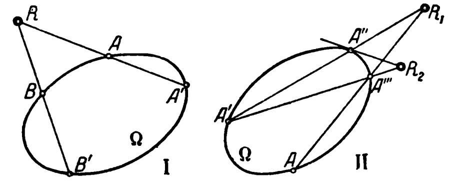


Рис. 146. Всякая коллинеация, преобразующая коническое сечение в самое себя, является либо инволюционной гомологией (*I*), либо может быть представлена в виде произведения двух инволюционных гомологий (*II*).

457. Аффинными преобразованиями здесь следует назвать коллинеации, преобразующие абсолют в самое себя. К ним относятся преобразования движения. Нет ли в геометрии Лобачевского еще и других аффинных преобразований?

Оказывается, что нет. Мы сейчас докажем, что всякая коллинеация, преобразующая абсолют в самое себя, есть движение.

Пусть π одна из коллинеаций, преобразующих абсолют Ω в самое себя. Обозначим через A' ту точку, в которую π преобразует некоторую точку абсолюта A:

$$\pi \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A \\ \Omega, & A' \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два случая: 1) π преобразует A' обратно в A и 2) π преобразует A' в точку A'', отличную от A.

1) В первом случае (рис. 146, *I*) назовем через $\begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix}$ еще одну пару соответственных в коллинеации π точек абсолюта:

$$\pi \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A, & A', & B \\ \Omega, & A', & A, & B' \end{pmatrix}.$$

Сравним коллинеацию π с инволюционной гомологией ρ, преобразующей $\begin{pmatrix} \Omega, & A, & B \\ \Omega, & A', & B' \end{pmatrix}$.

Очевидно,

$$\rho \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A, & A', & B, & B' \\ \Omega, & A', & A, & B', & B \end{pmatrix}.$$

Так как существует только одна коллинеация, преобразующая коническое сечение Ω в самое себя и три точки его A, A' и B в другие три точки его же A', A, B' (см. п. 286), то π совпадает с ρ:

$$\pi = \rho.$$

Таким образом, всякая аффинная коллинеация, преобразующая инволюционно одну бесконечно удаленную точку (т. е. одну точку абсолюта), является инволюционной гомологией, т. е. симметрией.

2) Переходя ко второму случаю (рис. 146, *II*), обозначим через A''' ту точку, в которую π преобразует точку A'':

$$\pi \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A, & A', & A'' \\ \Omega, & A', & A'', & A''' \end{pmatrix}.$$

Зададим две инволюционные гомологии ρ_1 и ρ таким образом, что

$$\rho_1 \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A, & A' \\ \Omega, & A''', & A'' \end{pmatrix},$$

а

$$\rho_2 \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A''', & A'' \\ \Omega, & A', & A'' \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$\rho_1 \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A, & A''', & A', & A'' \\ \Omega, & A''', & A, & A'', & A' \end{pmatrix}$$

и

$$\rho_2 \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A''', & A', & A'' \\ \Omega, & A', & A'', & A'' \end{pmatrix}.$$

Значит, произведение

$$\rho_1\rho_2 \text{ преобразует } \begin{pmatrix} \Omega, & A, & A', & A'' \\ \Omega, & A', & A'', & A''' \end{pmatrix}.$$

А так как существует только одна коллинеация, которая преобразует коническое сечение Ω в самое себя и три точки его A, A', A'' в другие три точки его же A', A'', A''', то

$$\rho_1\rho_2 = \pi.$$

Стало быть, всякая неинволюционная аффинная коллинеация может быть представлена в виде произведения двух симметрий, т. е. является движением.

Таким образом, помимо симметрий и движений в геометрии Лобачевского нет других аффинных преобразований. В частности, нет здесь ни растяжений, ни сдвигов, ни, что особенно важно, преобразований подобия.

В этом отношении геометрия Лобачевского проще евклидовой, так как в ней нет глав, посвященных подобию. Можно сказать, что вся геометрия Лобачевского ограничивается только изучением группы преобразований симметрии и движений.

458. Приведенная иллюстрация геометрии Лобачевского была предложена Ф. Клейном в 70-х годах прошлого века. Но еще до того, в 60-х годах геометрия Лобачевского получила весьма простое и интересное истолкование в работах итальянского математика Бельтрами.

459. Бельтрами занимался геометрией кривых поверхностей, основы которой были заложены Гауссом в первой половине прошлого века. Кратчайшая линия между двумя точками на кривой поверхности называется геодезической линией. Например, на шаре геодезическими линиями являются окружности больших кругов (т. е. кругов, по которым шар пересекается плоскостями, проходящими через центр). На плоскости геодезические линии, очевидно, представляют собой прямые. И вот оказывается, что на некоторых кривых поверхностях, если считать геодезические линии их „прямыми", имеет место геометрия Лобачевского. Это открытие Бельтрами впервые пробудило интерес к неевклидовой геометрии в широких геометрических кругах, которые до того, несмотря на все старания Лобачевского, не обращали на его творение никакого внимания, очевидно, будучи не в силах осознать всю глубину его идей.

460. Создание первой неевклидовой геометрии не только стерло „пятно" с геометрии Евклида, но, что гораздо важнее, совершенно изменило наше представление о геометрии. Выяснилось, что аксиомы могут быть выбраны более или менее произвольно. Мы уже говорили об этом по поводу аксиомы Фано (п. 170). Отбрасывая одни аксиомы евклидовой геометрии, изменяя другие, математики после Лобачевского построили множество геометрических систем, приспособленных к конкретным вопросам математики и соседних с нею дисциплин.

461. Какое непосредственное практическое значение имеет создание неевклидовых геометрий? Лобачевский сам перенес вопрос о своей геометрии из области умозрения в область практики. Он предложил опытным путем выяснить, какая геометрия соответствует свойствам реального пространства.

462. Прежде чем приступить к такому опыту, необходимо, конечно, условиться о том, какие реальные вещи подразумевать под основными понятиями геометрии — точка, прямая, движение и т. д. Когда это установлено, вопрос о свойствах пространства превращается в вопрос о свойствах этих вещей. Если остановиться на обычном истолковании геометрических понятий, то, как показывает повседневный опыт, геометрия Евклида удовлетворительно описывает свойства реального пространства. Более тонкие опыты привели Лобачевского к тому же результату: в пределах доступной нам точности эксперимента наше пространство евклидово.

463. Однако, это обстоятельство ни в какой мере не является решающим в оценке значения геометрии Лобачевского.

Она оказалась первой среди множества других геометрических систем, отличных от системы Евклида. *При надлежащем истолковании геометрических понятий* геометрия Лобачевского и построенные вслед за нею другие геометрии находят себе многообразные применения в математике и в смежных с нею дисциплинах (в теории функций комплексного переменного, в теоретической механике, в физике вообще). Заметим, что еще сам Лобачевский применил свою геометрию к вычислению некоторых интегралов.

464. Но помимо того значения, которое имеет геометрия Лобачевского благодаря ее связям с другими отделами математики и с другими физико-математическими дисциплинами, открытие Лобачевского сыграло в науке важнейшую историческую роль. Оно расширило и углубило наши взгляды на геометрию и, вместе с тем, расширило и углубило область приложения всей геометрии в целом.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

Задачи на построение с проективной точки зрения

465. Метрические задачи можно трактовать как проективные, если задан абсолют плоскости, т. е. бесконечно удаленная прямая и абсолютная инволюция на ней. Задавая абсолют произвольно („нарочно“), получим фантастическую („нарочную“) геометрию. Но выбрав абсолют в соответствии с действительностью, придем к согласной с действительностью („настоящей“) геометрии.

466. Абсолют евклидовой плоскости вполне определен, если в плоскости дан (начерчен) квадрат или окружность и ее центр. Действительно, противоположные стороны квадрата параллельны, т. е. пересекаются в двух бесконечно удаленных точках; этим бесконечно удаленная прямая вполне определена. Далее, две соседние стороны квадрата взаимно перпендикулярны, т. е. пересекают бесконечно удаленную прямую в соответственных точках абсолютной инволюции; вторую пару соответственных в абсолютной инволюции точек задают диагонали квадрата, так как и они взаимно перпендикулярны.

Двумя парами соответственных точек абсолютная инволюция вполне определена.

Если в плоскости начерчена окружность и ее центр, то поляра центра есть бесконечно удаленная прямая; окружность устанавливает на ней абсолютную инволюцию. Стало быть, и в этом случае абсолют определен.

Поэтому, если в плоскости начерчен квадрат или окружность с центром (обязательно с центром!), каждую метрическую задачу можно трактовать и решать как проективную.

467. Задачи на построение, которые могут быть решены с помощью линейки (только линейки), называют задачами первой степени; задачи, разрешаемые с помощью линейки и циркуля, — задачами второй степени.

Циркуль представляет собой типичный метрический инструмент: при проективном решении задач на построение мы должны запретить пользование им. В нашем распоряжении остается одна только линейка. Достаточно ли этого убогого инструмента для решения всех задач второй степени? На этот вопрос известный геометр Штейнер ответил так: если в плоскости чертежа начерчена одна окружность с центром, все задачи второй степени разрешимы при помощи одной только линейки. Мы намерены в настоящей главе доказать это утверждение Штейнера.

468. Разумеется, с помощью линейки нельзя начертить окружность в буквальном смысле этого слова. Поэтому задачу — построить окружность — мы будем понимать так: построить сколько угодно точек окружности. Последняя задача разрешима с помощью одной только линейки, если задан абсолют плоскости. В самом деле, построить окружность с центром P, проходящую через точку S, в переводе на проективный язык значит: построить коническое сечение, которое проходит через точку S, относит точке P в качестве поляры данную (именно — бесконечно удаленную) прямую p и устанавливает на этой прямой заданную (абсолютную) инволюцию. Эта задача решена в п. 384.

469. То обстоятельство, что прямая p в данном случае недосягаема, не представляет принципиального затруднения: придется только проводить прямые через недоступные точки по методу п. 77. Впрочем, можно раз навсегда избавиться от затруднений, связанных с недоступностью бесконечно удаленной прямой, посредством такого приема. Если требуется построить какую-либо фигуру Ξ[1], строим полярную ей фигуру ξ относительно окружности Ω, а затем преобразуем фигуру ξ в искомую фигуру Ξ. Иными словами, все заданные элементы преобразуем в полярные им относительно Ω и решаем задачу, двойственную той, которую требуется решить; затем полярно преобразуем построенную фигуру в искомую. Выгода этого приема заключается в том, что бесконечно удаленный ряд точек преобразуется в пучок лучей с вершиной в центре Ω, а абсолютная инволюция — в эллиптическую инволюцию среди лучей этого пучка; таким образом, фигура, полярная абсолюту плоскости, является д о с т у п н о й.

Итак, построив раз навсегда пучок, полярный абсолюту, и заменяя каждую задачу двойственной ей, мы избавимся от всех неприятностей, связанных с недоступностью бесконечно удаленной прямой. Правда, освобождение от бесконечно удаленных элементов покупается ценой усложнения построения: мы вынуждены дважды произвести полярное преобразование — один раз над заданными элементами, чтобы перейти от предложенной задачи к двойственной ей, а второй раз над построенными, чтобы получить искомые элементы.

Однако, принципиальных трудностей эти полярные преобразования не представляют: построение полюсов и поляр легко выполняется с помощью одной только линейки (см. п. 344).

470. Как же построить пучок, полярный абсолюту? Пусть бесконечно удаленной точке A в абсолютной инволюции соответствует точка A' (рис. 147, *I*). Точки A и A' являются проекциями одной и той же точки A_1 окружности Ω из точек T и S, лежащих на концах одного диаметра (п. 350). Проведем диаметр A_1A_2. Проекция точки S из A_1 на бесконечно удаленную прямую есть A'; проектируя

[1] Греческая буква кси, первая — прописная, вторая — строчная.

S из A_2 на бесконечно удаленную прямую, получим точку, соответственную A' в абсолютной инволюции, т. е. точку A. Таким образом прямая SA_2 параллельна TA_1 и на том же основании TA_2 параллельна SA_1. Чтобы построить поляру a точки A, заметим, что она должна пройти через полюс бесконечно удаленной прямой (центр Ω, точку O) и через точку A'. Перед нами задача: через точку O провести прямую, параллельную двум параллельным прямым SA_1 и TA_2. Решение этой задачи с помощью одной только линейки дано в пп. 77—78. Таким же образом построим поляру a' точки A. Полярно преобразуя другие пары соответственных в абсолютной инволюции точек, получим сколько угодно соответственных пар лучей пучка O (рис. 147, *II*). Впрочем, уже две пары соответственных лучей вполне определяют инволюцию *I*, полярную абсолютной инволюции

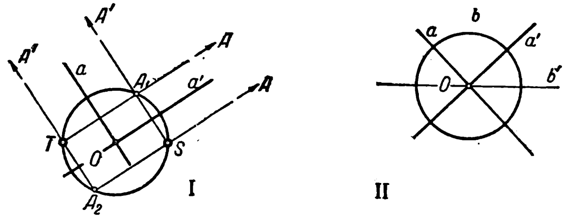


Рис. 147. Лучу a в абсолютной инволюции соответствует луч a', лучу b — b'; соответственные лучи взаимно перпендикулярны.

471. В частности, чтобы построить окружность с центром C, проходящую через точку N, строим поляры c и n заданных точек относительно Ω. Затем проводим пучок лучей II порядка, проходящий через луч n, который относит прямой c в качестве ее полюса точку O (центр Ω) и устанавливает среди лучей пучка O инволюцию *I*, полярную абсолютной инволюции. Эта задача может быть решена как двойственная задаче п. 384. Построив лучи p, q, r, s, t и т. д. указанного пучка II порядка, преобразуем их полярно в искомые точки P, Q, R, S, T и т. д. окружности.

Таким образом, построение окружности (т. е. точек, лежащих на окружности) возможно без циркуля.

472. Но с помощью циркуля выполняются еще две операции:

1) построение точек пересечения прямой с окружностью и

2) построение точек пересечения двух окружностей.

Если мы покажем, что эти две операции выполнимы с помощью одной только линейки и начерченной окружности с центром, утверждение Штейнера будет доказано.

473. Займемся первой задачей.

Она заключается в построении точек пересечения заданной прямой с коническим сечением, заданным, например, пятью точками.

Коническое сечение устанавливает на прямой проективность, двойные точки которой являются точками пересечения конического сечения с прямой.[1] Таким образом, дело сводится к построению двойных точек проективности, заданной тремя парами соответственных точек. Эта задача не может быть решена с помощью одной только линейки. Но она разрешима, если в плоскости чертежа задано одно сплошное коническое сечение, т. е. такое коническое сечение, точки пересечения которого с любой прямой считаются известными (построенными). Чтобы доказать это, нам придется рассмотреть подробно проективное соответствие между точками конического сечения.

Проективность на коническом сечении

474. Мы уже знаем, что любое коническое сечение можно преобразовать посредством коллинеации в любое другое коническое сечение так, чтобы трем точкам первого соответствовали три произвольные точки второго.

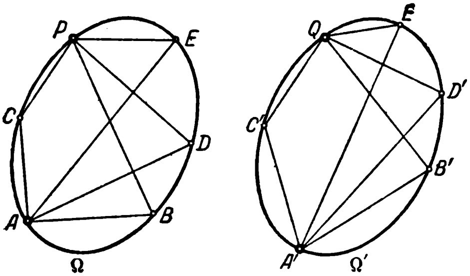


Рис. 148. Если ряд точек II порядка $A, B, C, D, E, \ldots$ проективен ряду точек $A', B', C', D', E', \ldots$, то пучки P и Q проективны.

Проективность между точками двух конических сечений (рядами точек II порядка) вполне определена тремя парами соответственных точек (п. 286).

Научимся строить проективные ряды точек II порядка, лежащие на заданных конических сечениях.

Пусть точки A, B, C, D, $E, \ldots$ конического сечения Ω проективны точкам A', B', C', D', $E', \ldots$ конического сечения Ω' (рис. 148). Существует, стало быть, коллинеация, преобразующая

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D, & E, \ldots \\ A', & B', & C', & D', & E', \ldots \end{pmatrix}.$$

Эта коллинеация преобразует пучок[2] $A(B, C, D, E, \ldots)$ в пучок $A'(B', C', D', E', \ldots)$. Стало быть, рассматриваемые пучки A и A' проективны.

Возьмем на Ω произвольную точку P, а на Ω' произвольную точку Q. Рассмотрим пучки $P(B, C, D, E, \ldots)$ и $Q(B', C', D', E' \ldots)$.

Пучок P проективен пучку A, так как соответственные лучи их пересекаются на Ω. Пучок A проективен пучку A', а A' проекти-

---

[1] Соответственные точки в этой проективности суть проекции одной (какой-нибудь) точки конического сечения из двух его фиксированных точек S_1 и S_2 (см. п. 281); проективность, о которой идет речь, зависит от выбора точек S_1 и S_2. (См. по этому поводу также п.п. 375 и 381.)

[2] Т. е. пучок с вершиной A и лучами AB, AC, AD, $AE, \ldots$

вен Q, так как соответственные лучи их пересекаются на коническом сечении Ω'.

Стало быть, пучки P и Q проективны.

Подчеркиваем, что вершины этих пучков P и Q совершенно произвольные точки конических сечений Ω и Ω', так что коллинеация, преобразующая

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D, & E, \ldots \\ A', & B', & C', & D', & E', \ldots \end{pmatrix},$$

вообще говоря, не преобразует $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

Итак, если два ряда точек II порядка проективны:

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D, & E, \ldots \text{ на } \Omega \\ A', & B', & C', & D', & E', \ldots \text{ на } \Omega' \end{pmatrix},$$

то проективны также пучки

$$P(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ \ldots)$$

и

$$Q(A',\ B',\ C',\ D',\ E',\ldots),$$

где P и Q произвольные точки, лежащие — P на Ω, а Q на Ω'.

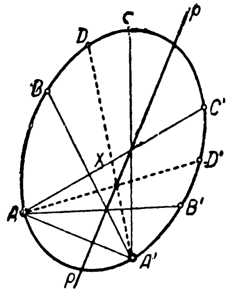


Рис. 149. Если ряд точек II порядка A, B, C, D,... проективен ряду точек A', B', C', D',..., то пучки A' и A перспективны.

475. Легко понять, что и наоборот, если пучки $P(A, B, C, D, E, \ldots)$ и $Q(A', B', C', D', E', \ldots)$, проектирующие точки A, B, C, D, E,... и A', B', C', D', E',... двух конических сечений из произвольных точек P и Q, лежащих тоже на этих сечениях, — P на первом, Q на втором, — проективны, то ряд точек второго порядка A, B, C, D, E,... проективен ряду точек второго порядка A', B', C', D', E',...

476. Допустим теперь, что конические сечения Ω и Ω' совпадают, так что рассматриваемые проективные ряды точек лежат на одном коническом сечении (рис. 149). Пусть, например, проективность π преобразует

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D, & E, \ldots \text{ на } \Omega \\ A', & B', & C', & D', & E', \ldots \text{ на } \Omega \end{pmatrix}.$$

Тогда пучок $A'(A, B, C, D, E, \ldots)$ проективен пучку $A(A', B', C', D', E', \ldots)$. А так как лучу $A'A$ первого пучка соответствует луч AA', т. е. он же, во втором пучке, то оба пучка не только проективны, но и перспективны, т. е. соответственные лучи их пересекаются на одной прямой (см. п. 256). Эту прямую называют *осью* проективности π, установленной на коническом сечении.

477. Ось является, так сказать, ключом к проективности на коническом сечении. Чтобы пополнить новыми соответственными точками π на Ω, преобразующую

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \end{pmatrix},$$

строим пучки $A'(B, C)$ и $A(B', C')$; соответственные лучи $A'B$ и AB', $A'C$ и AC' пересекают на оси. Тем самым ось определена.

Чтобы найти теперь точку, соответствующую точке D, проводим луч $A'D$, который пересечет ось в точке X (рис. 149); прямая AX пересечет коническое сечение в искомой точке D'.

Легко понять, что точки пересечения оси с коническим сечением соответствуют сами себе в проективности π, т. е. являются двойными точками ее. Если ось проходит вне конического сечения, то проективность не имеет двойных точек; если ось касается конического сечения, точка касания является единственной двойной точкой проективности. В первом случае (две двойные точки) проективность называют гиперболической, во втором — эллиптической, в третьем — параболической.

Вернемся к задаче о построении двойных точек проективности, заданной на прямой тремя парами соответственных точек.

Двойные точки проективности

478. Требуется построить двойные точки проективности преобразующей три точки A, B, C прямой в три точки A', B', C' той же прямой.

Пусть в плоскости рисунка начерчено сплошное коническое сечение Ω. Спроектируем проективность π, двойные точки которой требуется

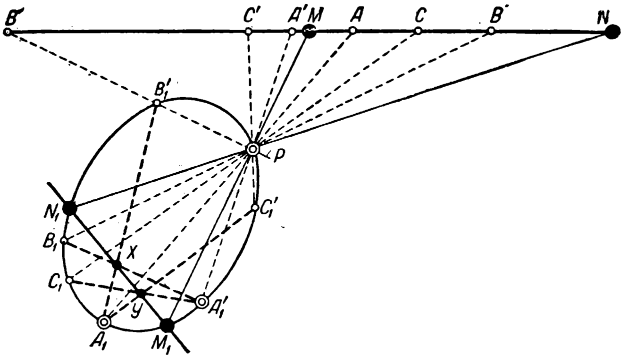


Рис. 150. Построение двойных точек проективности, преобразующей $\begin{pmatrix} A, B, C \\ A', B', C' \end{pmatrix}$.

определить, на это коническое сечение из произвольной точки P, лежащей на нем. Таким образом получим на Ω проективность π_1 (рис. 150). Найдем ее двойные точки M_1 и N_1 (с помощью оси) и спроектируем их обратно из P на прямую u. Таким образом, получим на u точки M и N, двойные в проективности π.

479. Если проективность π_1 на Ω окажется гиперболической, то, значит, и проективность π на прямой u была гиперболической;

в этом случае описанное построение даст нам две двойные точки ее. Если π_1 окажется параболической проективностью, то, значит, и проективность π была такою же; построение доставит нам одну (единственную) двойную точку ее. Наконец, если проективность π_1 окажется эллиптической, то, значит, и проективность π является эллиптической. Построение укажет, что двойных точек в проективности π нет.

480. Наша задача полностью решена. Вместе с тем решена первая задача п. 472 о построении точки пересечения окружности с прямой. В качестве сплошного конического сечения может быть использована окружность, которая, согласно условию, начерчена в плоскости чертежа. Таким образом, эта окружность играет двойную роль. С одной стороны, она (вместе с ее центром) определяет абсолют плоскости, а с другой — исполняет обязанности сплошного конического сечения.

Нам остается еще только рассмотреть вторую задачу п. 472 о пересечении двух окружностей.

Пересечение двух окружностей

481. В переводе на проективный язык задача — построить точки пересечения двух окружностей — сводится к такой задаче: построить точки пересечения двух конических сечений, устанавливающих на заданной прямой (бесконечно удаленной) одну и ту же (абсолютную, стало быть, эллиптическую) инволюцию.

482. Пусть коническое сечение Ω_1 относит прямой p в качестве полюса точку P_1, а Ω_2 — точку P_2 (рис. 151). Кроме того, дано, что Ω_1 с Ω_2 устанавливают на p одну и ту же эллиптическую инволюцию I.

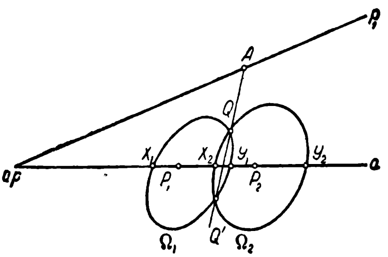


Рис. 151. К построению точек пересечения двух конических сечений, устанавливающих на прямой p одну и ту же эллиптическую инволюцию.

Назовем прямую P_1P_2 через a. Инволюция I преобразует точку ap в какую-то точку A, которая является полюсом прямой a относительно Ω_1, а также относительно Ω_2. Действительно, инволюция I преобразует точки прямой p таким образом, что каждой точке оказывается отнесенной точка, лежащая на ее поляре относительно Ω_1 и Ω_2 (п. 314). Стало быть, через ap пройдут поляры точки A относительно Ω_1 и Ω_2. С другой стороны, поляра точки A относительно Ω_1 должна пройти через P_1, а поляра ее относительно Ω_2 — через P_2 (п. 309). Стало быть, P_1P_2 есть общая поляра точки A относительно Ω_1 и Ω_2.

Таким образом, инволюционная гомология α с центром A и осью a преобразует Ω_1 и Ω_2 в самих себя.

Если Ω_1 и Ω_2 пересекаются в точке Q, то гомология α преобразует Q в какую-то точку Q', тоже лежащую на Ω_1 и на Ω_2, т. е. на их пересечении. Таким образом, обе искомые точки пересечения рассматриваемых конических сечений лежат на прямой, проходящей через A. Найдем эту прямую. Назовем точку ее пересечения с прямой a через B и займемся нахождением этой точки.

Если мы спроектируем какую-либо точку конического сечения Ω_1 из точек X_1 и Y_1, в которых Ω_1 пересекает прямую a, на p (рис. 152), то получим на p пару точек, соответственных в инволюции I (п. 350).

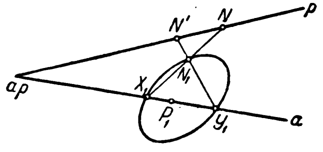


Рис. 152. К тому же вопросу. Проекция инволюции, установленной коническим сечением на прямой p, из точки N_1 на прямую a, преобразует друг в друга точки X_1 и Y_1.

Стало быть, и наоборот, проектируя инволюцию I из какой-либо точки конического сечения Ω_1 на a, получим на этой прямой инволюцию I'_1, в которой точки X_1 и Y_1 будут соответственными. Если же спроектировать I на a из точки Q, то получим на a инволюцию I', преобразующую $\begin{pmatrix} X_1, Y_1, X_2, Y_2 \\ Y_1, X_1, Y_2, X_2 \end{pmatrix}$. Этим инволюция I' вполне определена. При проектировании инволюции I в I' точка ap преобразуется в самое себя, а точка A в B. Так как точки ap и A были соответственными в I, то ap и B должны быть соответственными в I'.

Таким образом точка B может быть построена, как соответствующая точке ap в инволюции I'.

Построив прямую AB, находим затем точки Q и Q', как точки пересечения этой прямой с Ω_1 (или с Ω_2). Тем самым наша задача решена и, стало быть, теорема Штейнера доказана:

Всякая задача на построение второй степени может быть решена с помощью одной только линейки, если в плоскости чертежа начерчена окружность и ее центр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие редактора	2
Глава первая, **в которой читатель знакомится с основным преобразованием проективной геометрии**	3
Проектирование	
Бесконечно удаленные точки	4
Аксиомы соединения проективного пространства	10
Глава вторая, **в которой раскрываются главные особенности осевых коллинеаций**	18
Осевая коллинеация	—
Ось и центр	20
Малый принцип двойственности	25
Осевая и центральная коллинеация	28
Теорема о свободе выбора элементов, определяющих гомологию	30
Теорема Дезарга	32
Построения с недоступными элементами	33
Некоторые частные виды гомологий	39
Измерение расстояний по картине	43
Воображаемый мир	45
Глава третья. **Умножение гомологий.**	49
Произведение преобразований	—
Умножение коллинеаций	52
Понятие о группе	55
Группа гомологий с общими неизменными элементами	57
Произведение гомологий без общих неизменных элементов	58
Группа прямолинейных перенесений и преобразований подобия	60
Преобразование преобразований	61
Глава четвертая. **О гомологиях, которые сами себе обратны, и о пространствах с конечным числом точек**	65
Инволюционные гомологии	—
Пространства с конечным числом точек	69
Умножение инволюционных гомологий	76
Гармоническая инволюция	79
Преобразование симметрии	84
Метрические свойства гармонического сопряжения	88
Глава пятая. **Проективное соответствие между образами первой ступени**	90
Элементы, определяющие коллинеацию	—
Расположение точек на прямой	92
Упорядоченные преобразования	94
Непрерывность	96
Основная теорема проективной геометрии	99
Инволюция	104
Конические сечения	107

Построение конических сечений 109
Проективные преобразования конических сечений 115
Теорема Паскаля 116

Глава шестая. **Корреляции и полярные преобразования** 122

Корреляции . . . . —
Полярные преобразования 125
Самосопряженные элементы 128
Проективные преобразования полярного преобразования 130
Классификация полярных преобразований 131
Ряды точек второго порядка 133
Внутренние и внешние точки 135
Построение поляр и полюсов 137
Ряд точек второго порядка есть коническое сечение 139
Применение общей теории конических сечений к некоторым частным случаям 145
Инволюция, установленная коническим сечением на прямой и в пучке 147
Элементы, определяющие полярное преобразование 151
Абсолютная полярность 157
Окружность 159

Глава седьмая. **Метрические геометрии с проективной точки зрения** 160

Проективное построение геометрии Евклида . . . . —
Что такое геометрия 167
Беглый взгляд на геометрию Лобачевского . . . . —

Глава восьмая. **Построения одной линейкой** 179

Задачи на построение с проективной точки зрения . . . . —
Проективность на коническом сечении 182
Двойные точки проективности 184
Пересечение двух окружностей 185

Редактор *Б. И. Крельштейн.*
Технический редактор *М. Е. Зендель.*
Корректоры *М. Г. Дешалыт* и *А. А. Морозова.*

Подписано к печати 11/VII 1949 г. М-09498. Печ. л $11^{3}/_{4}$. Уч.-изд. л. 13.

Отпечатано в тип. Н-21 с матриц 2-ой типографии „Печатный Двор“ им. А. М. Горького Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград, Гатчинская, 26.