ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Победители конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России

М. Л. Краснов
А. И. Киселев
Г. И. Макаренко

Операционное исчисление
Теория устойчивости

ЗАДАЧИ и ПРИМЕРЫ С ПОДРОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

УРСС

ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ • ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

ЗАДАЧИ *и* примеры с подробными решениями

Издание третье,
исправленное и дополненное

Было допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

УРСС
Москва • 2003

ББК 22.161я73

Краснов Михаил Леонтьевич,
Киселев Александр Иванович,
Макаренко Григорий Иванович

Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 176 с. (Вся высшая математика в задачах.)

ISBN 5-354-00383-0

В настоящем учебном пособии авторы предлагают задачи по основным разделам операционного исчисления и теории устойчивости. В начале каждого параграфа приводятся необходимые теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), а также подробно разбирается около 100 типовых задач и примеров.

В книге содержится свыше 500 задач и примеров для самостоятельного решения. Почти все задачи снабжены ответами, а в ряде случаев даются указания к решению.

Книга предназначается в основном для студентов технических вузов с математической подготовкой, но может принести пользу и инженеру, желающему восстановить в памяти разделы математики, относящиеся к операционному исчислению и теории устойчивости.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 15.05.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 3000 экз. Печ. л. 11. Зак. № 265

Отпечатано в типографии ИПО «Профиздат». 109044, г. Москва, Крутицкий вал, 18.

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet:* http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00383-0

ГЛАВА 1

Операционное исчисление

§ 1. Нахождение изображений и оригиналов

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

1°. $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t (локально интегрируема).

2°. Для всех отрицательных t
$$f(t) = 0.$$

3°. $|f(t)|$ возрастает при $t \to +\infty$ не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $M > 0$ и s, что для всех t
$$|f(t)| \leqslant Me^{st}. \tag{1}$$

Нижняя грань s_0 всех чисел s, для которых справедливо неравенство (1), называется показателем роста функции $f(t)$.

Пример 1. Показать, что функция
$$f(t) = \begin{cases} e^{2t}\sin 3t, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$
является функцией-оригиналом.

Действительно, функция $f(t)$ локально интегрируема:
$$\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{2t}\sin 3t\,dt$$
существует для любых конечных t_1 и t_2.

Условие 2° выполнено в силу задания функции.

Наконец, для любых вещественных t
$$|e^{2t}\sin 3t| \leqslant e^{2t},$$
так что в качестве M в условии 3° можно взять любое число $\geqslant 1$; $s_0 = 2$. ▷

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая единичная функция Хевисайда
$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\varphi(t)\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

так что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1° и 3°, то $\varphi(t)\eta(t)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функции-оригиналы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, какие из указанных функций являются функциями-оригиналами:

а) $f(t) = b^t\eta(t), \quad b > 0, \quad b \neq 1$;

б) $f(t) = e^{(2+4i)t}\eta(t)$;

в) $f(t) = \dfrac{1}{t-3}\eta(t)$;

г) $f(t) = t^2\eta(t)$;

д) $f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t\,\eta(t)$;

е) $f(t) = \operatorname{tg} t\,\eta(t)$;

ж) $f(t) = t^t\eta(t)$;

з) $f(t) = e^{-t}\cos t\,\eta(t)$;

и) $f(t) = e^{t^2}\eta(t)$;

к) $f(t) = e^{-t^2}\eta(t)$;

л) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2}\eta(t)$;

м) $f(t) = \eta(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\eta(t-k)$.

В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать $f(t)$ вместо $f(t)\eta(t)$, считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных t.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt. \tag{2}$$

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение $f(t)$, будем символически записывать так:

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Функция $F(p)$ ***определена в полуплоскости*** $\operatorname{Re} p = s > s_0$ ***и является в этой полуплоскости аналитической функцией.***

Пример 2. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t) = e^{2t}.$$

Решение. Для функции $f(t) = e^{2t}$ имеем $s_0 = 2$. Поэтому изображение $F(p)$ будет во всяком случае определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 2$. Имеем

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{2t}e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-2)t}\,dt = \frac{1}{-(p-2)}e^{-(p-2)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-2} \quad (\operatorname{Re} p = s > 2).$$

Итак, $F(p) = \dfrac{1}{p-2}$. Эта функция аналитична при $\operatorname{Re} p > 2$, и, кроме того, она аналитична всюду, за исключением точки $p = 2$. Это не противоречит сформулированному выше утверждению, так как последнее *гарантирует* аналитичность $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$, но вовсе не утверждает, что если $\operatorname{Re} p < s_0$, то $F(p)$ всюду неаналитична. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

2. $f(t) = t$. **3.** $f(t) = \sin 3t$. **4.** $f(t) = te^t$. **5.** $f(t) = t^\alpha \quad (\alpha > -1)$.

6. Может ли функция $\varphi(p) = \dfrac{1}{\cos p}$ служить изображением некоторого оригинала?

Свойства преобразования Лапласа

Теорема единственности. *Преобразование Лапласа*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

единственно в том смысле, что две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают во всех точках непрерывности для всех $t > 0$.

Различные разрывные функции могут иметь одинаковое преобразование Лапласа (читателю предлагается построить пример такой функции).

I. Свойство линейности. *Для любых комплексных постоянных α и β*

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$$

(*здесь и всюду в дальнейшем считаем $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$*).

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения функций:

7. $1 + t$. **8.** $2\sin t - \cos t$. **9.** $t + \dfrac{1}{2}e^{-t}$.

II. Теорема подобия. *Для любого постоянного $\alpha > 0$*

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

10. $f(t) = e^{\alpha t}$. **11.** $f(t) = \sin 4t$. **12.** а) $f(t) = \cos\omega t$; б) $f(t) = \operatorname{sh} 3t$.

13. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Найти изображение функции $f(t/a)$ $(a > 0)$ непосредственно и с помощью теоремы подобия.

Пользуясь теоремами линейности и подобия, найти изображения следующих функций:

14. $f(t) = \sin^2 t$. **15.** $f(t) = \sin mt \cos nt$.

16. $f(t) = \cos^3 t$. **17.** $f(t) = \sin mt \sin nt$.

18. $f(t) = \sin^4 t$. **19.** $f(t) = \cos mt \cos nt$.

III. Дифференцирование оригинала. *Если функции*

$$f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$$

являются функциями-оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где под $f^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ *понимается* $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

Пример 3. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0).$$

Но $f(0)=0$, а $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}$. Следовательно, $\dfrac{2}{p^2+4} = pF(p)$, откуда

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} \risingdotseq \sin^2 t. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение следующих функций:

20. $f(t) = \cos^2 t$. **21.** $f(t) = \sin^3 t$.

22. $f(t) = t\sin\omega t$. **23.** $f(t) = \cos^4 t$.

24. $f(t) = t\cos\omega t$. **25.** $f(t) = te^t$.

IV. Дифференцирование изображения. *Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала*

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t)$$

или, вообще,

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t).$$

Пример 4. Найти изображение функции $f(t) = t^2e^t$.

Решение. Имеем $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$. По теореме о дифференцировании изображения $\left(\dfrac{1}{p-1}\right)' \risingdotseq -te^t$, откуда $\dfrac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq te^t$. Далее

$$\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)' \risingdotseq -t(te^t) \quad \text{или} \quad \frac{2!}{(p-1)^3} \risingdotseq t^2e^t. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

26. $f(t) = t^2\cos t$. **27.** $f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t)$.

28. $f(t) = (t+1)\sin 2t$. **29.** $f(t) = t\operatorname{sh} 3t$.

V. Интегрирование оригинала. *Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p, т. е. если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то*

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 5. Найти изображение функции

$$\int_0^t e^\tau\,d\tau.$$

Решение. Имеем $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$. По теореме об интегрировании оригинала

$$\int_0^t e^\tau\,d\tau \risingdotseq \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

30. $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau\,d\tau.$ **31.** $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau\,d\tau.$

32. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{sh}\,2\tau\,d\tau.$ **33.** $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau\,d\tau.$

34. $f(t)=\int\limits_0^t \mathrm{ch}\,\omega\tau\,d\tau.$ **35.** $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau}\,d\tau.$

VI. Интегрирование изображения. *Если интеграл* $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$ *сходится, то он служит изображением функции* $\dfrac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(p)\,dp.$$

Пример 6. Найти изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$.

<u>Решение</u>. Как известно, $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. Поэтому

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p$$

(для многозначных функций $\mathrm{Ln}\,z$, $\mathrm{Arctg}\,z$ и т. д. берем их главные ветви, для которых $\ln 1 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ и т. д.). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

36. а) $\dfrac{e^t-1}{t}$; б) $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$; в) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$. **37.** а) $\dfrac{1-\cos t}{t}$; б) $\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

38. а) $\dfrac{e^t-1-t}{t}$; б) $\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.

С помощью теоремы об интегрировании изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы.

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ и пусть сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int\limits_0^\infty F(p)\,dp, \tag{3}$$

где интеграл справа можно вычислять по положительной полуоси.

Пример 7. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Решение. Имеем $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$. По формуле (3)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

39. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt \quad (a>0,\ b>0).$ **40.** $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}\,dt \quad (\alpha>0,\ a>0).$

41. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\sin mt\,dt \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ m>0).$

42. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ce^{-\gamma t}+De^{-\delta t}}{t}\,dt$

$$(A+B+C+D=0,\quad \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \delta>0).$$

43. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}\,dt \quad (a>0,\ b>0).$ **44.** $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin at\sin bt}{t}\,dt \quad (a>0,\ b>0).$

VII. Теорема смещения. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то для любого комплексного* p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0). \tag{4}$$

Пример 8. Найти изображение функции $f(t) = e^{-t}\cos 2t$.

<u>*Решение.*</u> Имеем $\cos 2t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+4}$. По теореме смещения ($p_0 = -1$)

$$e^{-t}\cos 2t \risingdotseq \frac{p+1}{(p+1)^2+4}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

45. а) $e^{2t}\sin t$; б) $e^{t}\cos nt$. **46.** $e^{-t}\cdot t^3$.

47. $e^t \operatorname{sh} t$. **48.** $te^t\cos t$. **49.** $e^{3t}\sin^2 t$. **50.** $e^{-\alpha t}\cos^2\beta t$.

VIII. Теорема запаздывания. *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого положительного τ*

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p). \tag{5}$$

Теорему запаздывания удобно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Пример 9. Найти изображение функции

$$f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1).$$

<u>*Решение.*</u> Для функции $f(t) = t^2\eta(t)$ имеем

$$f(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3}.$$

По теореме запаздывания для функции $f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1)$ имеем

$$(t-1)^2\eta(t-1) \risingdotseq e^{-p}\frac{2}{p^3}.$$

Здесь существенно, что ищется изображение функции $f(t-1) = (t-1)^2\eta(t-1)$, т. е. функции, равной нулю при $t < 1$.

Если рассмотреть функцию $f_1(t) = (t-1)^2\eta(t)$, то для нее имели бы $f_1(t) = (t^2-2t+1)\eta(t)$ и по свойству линейности

$$(t-1)^2\eta(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображение функций:

51. $\sin(t-b)\eta(t-b)$. **52.** $\cos^2(t-b)\eta(t-b)$. **53.** $e^{t-2}\eta(t-2)$.

Пример 10. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, заданной следующим графиком (рис. 1):

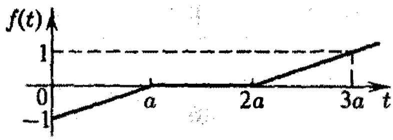


Рис. 1

Решение. Найдем аналитическое выражение для $f(t)$.

а) Для $t \in (0, a)$ функция $f(t)$ задается формулой

$$f(t) = \frac{t-a}{a}\eta(t). \tag{6}$$

б) Для $t \in (a, 2a)$ имеем $f(t) = 0$.

в) При $t \geqslant 2a$ получаем

$$f(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a). \tag{7}$$

Предполагая, что функция $f(t)$ задана формулой (6) для всех $t \geqslant 0$, выясним, какую функцию $\psi_1(t)$ надо к ней прибавить, чтобы получить функцию $f(t) = 0$ для всех $t \geqslant a$. Потребовав, чтобы при $t \geqslant a$

$$\frac{t-a}{a} + \psi_1(t) = 0,$$

найдем

$$\psi_1(t) = -\frac{t-a}{a}\eta(t-a).$$

Далее находим такую функцию $\psi_2(t)$, чтобы в сумме с $f(t) \equiv 0$ иметь функцию $\dfrac{t-2a}{a}$ для всех $t \geqslant 2a$. Это дает

$$0 + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a},$$

откуда

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a).$$

Таким образом, для всех $t \geqslant 0$ получим

$$f(t) = \frac{t-a}{a}\eta(t) - \frac{t-a}{a}\eta(t-a) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, находим искомое изображение $F(p)$ данной функции $f(t)$:

$$F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2}e^{-ap} - \frac{1}{ap^2}e^{-2ap}. \qquad \triangleright$$

Пример 11. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, которая задана следующим графиком (рис. 2):

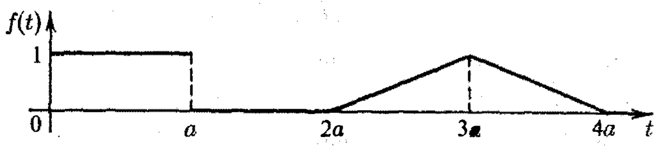


Рис. 2

Решение. Найдем аналитическое выражение для функции $f(t)$.

а) $f(t) = 1$ для $t \in (0, a)$,

б) $f(t) = 0$ для $t \in (a, 2a)$,

в) $f(t) = \dfrac{t-2a}{a}$ для $t \in (2a, 3a)$,

г) $f(t) = 1 - \dfrac{t-3a}{a}$ для $t \in (3a, 4a)$,

д) $f(t) = 0$ для $t \geqslant 4a$.

Для $t \in (0, a)$ имеем $f(t) = 1$.

Далее найдем функцию $\psi_1(t)$ такую, чтобы при $t \geqslant a$ выполнялось соотношение $1 + \psi_1(t) = 0$, откуда $\psi_1(t) = -1 \cdot \eta(t-a)$.

Теперь находим функцию $\psi_2(t)$ такую, чтобы при всех $t > 2a$ было справедливо равенство $0 + \psi_2(t) = \dfrac{t-2a}{a}$. Отсюда

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a).$$

Аналогично находим функции

$$\psi_3(t) = -2\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a), \quad \psi_4(t) = \frac{t-4a}{a}\eta(t-4a).$$

Таким образом,

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a) - 2\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a) + \frac{t-4a}{a}\eta(t-4a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, получим изображение

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-ap} + \frac{1}{ap^2}e^{-2ap} - \frac{2}{ap^2}e^{-3ap} + \frac{1}{ap^2}e^{-4ap}. \qquad \triangleright$$

Пример 12. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 1, \\ t^2 & \text{при} \quad 1 < t < 2, \\ 0 & \text{при} \quad t > 2. \end{cases}$$

<u>*Решение*</u>. Выразим $f(t)$ через степени разностей $t-1$ и $t-2$. Имеем

$$t^2 = [(t-1)+1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1,$$
$$t^2 = [(t-2)+2]^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4.$$

Следовательно, данная функция $f(t)$ запишется в виде

$$f(t) = [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1]\eta(t-1) - [(t-2)^2 + 4(t-2) + 4]\eta(t-2).$$

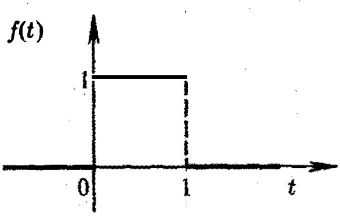
Переходя к изображениям, получим

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}\right)e^{-p} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p}\right)e^{-2p}. \qquad \triangleright$$

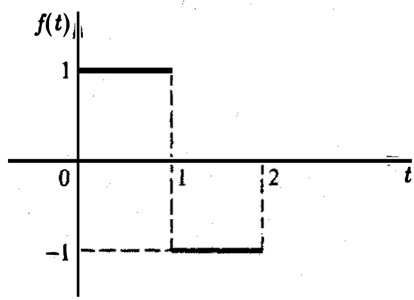
Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций, заданных графически:

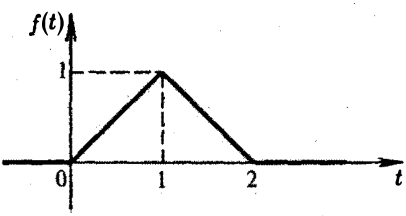
54.



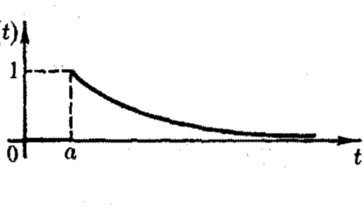
55.



56.

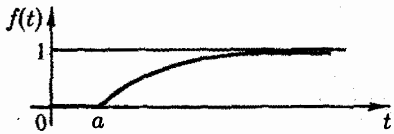


57.



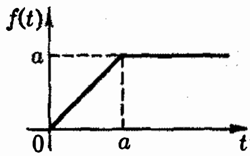
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \\ e^{-b(t-a)} & \text{при} \quad t > a. \end{cases}$$

58.

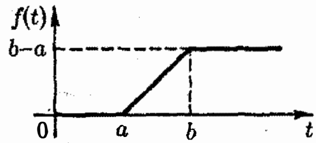


$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \\ 1 - e^{-b(t-a)} & \text{при} \quad t > a. \end{cases}$$

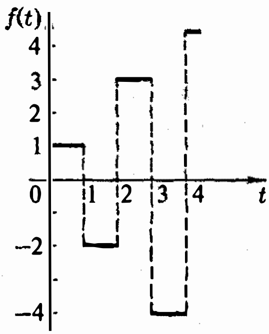
59.



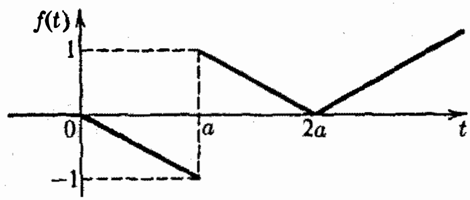
60.



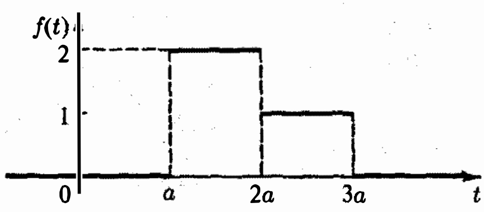
61.



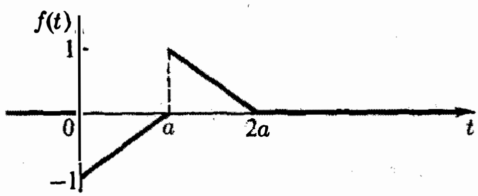
62.



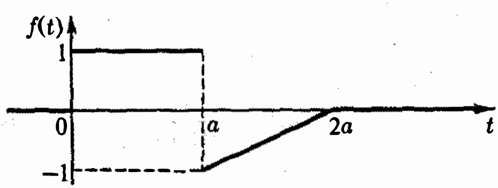
63.



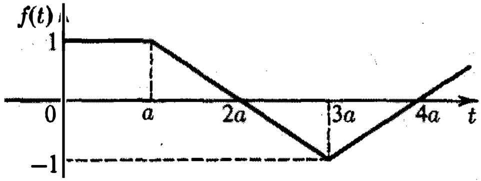
64.



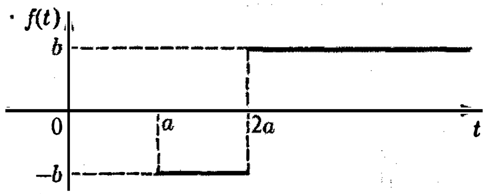
65.



66.



67.



68. Пусть функция $f(t)$, периодическая с периодом T, есть функция-оригинал. Показать, что ее изображение по Лапласу $F(p)$ дается формулой

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt$$

и определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > 0$.

Пример 13. Найти изображение периодической функции $f(t)$, заданной графически (рис. 3).

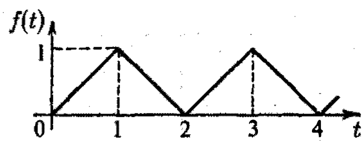


Рис. 3

Решение. Изображение находим по формуле

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt, \tag{8}$$

где $f(t)$ — периодическая с периодом T функция, $\operatorname{Re} p = s > 0$. Подставляя в (8) выражение

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2 - t & \text{при} \quad 1 < t \leqslant 2, \end{cases}$$

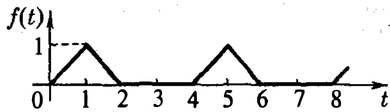
учитывая, что $T = 2$, получим

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left[\int_0^1 t e^{-pt}\, dt + \int_1^2 (2 - t) e^{-pt}\, dt \right] = \frac{1 - e^{-p}}{p^2 (1 + e^{-p})}. \qquad \triangleright$$

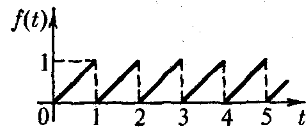
Задачи для самостоятельного решения

Найти изображение следующих периодических функций:

69.

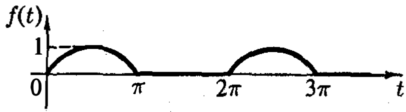


70.



71. $f(t) = |\sin t|$. **72.** $f(t) = |\cos t|$.

73.



$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при} \quad 2k\pi < t < (2k+1)\pi, \\ 0 & \text{при} \quad (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

74. Показать, что если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f(t)\eta(t-a) \risingdotseq F(p) - \int_0^a f(t)e^{-pt}\,dt.$$

В практике операционного исчисления приходится иногда сталкиваться с так называемыми обобщенными функциями[1)], играющими важную роль в современной математике.

Одним из представителей обобщенных функций является функция Дирака $\delta(t)$, которая определяется так:

$$1)\ \delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \neq 0, \\ \infty, & \text{если} \quad t = 0, \end{cases} \qquad 2)\ \int_\alpha^\beta \delta(t)f(t)\,dt = f(0),$$

где (α, β) — любой интервал, содержащий точку $t = 0$, а $f(t)$ — функция, непрерывная в точке $t = 0$.

Аналогично определяется функция $\delta(t-\tau)$, сосредоточенная в точке $t = \tau$.

В теории обобщенных функций $\delta(t)$ рассматривается как производная единичной функции $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$

$$\eta'(t) = \delta(t). \tag{9}$$

[1)] Строгое определение обобщенных функций см., например, в книге: *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

Аналогично, при любом τ
$$\eta'(t-\tau) = \delta(t-\tau).$$
Заметим, что производная функции $\eta(t)$ в обычном смысле равна нулю для всех $t \neq 0$, а при $t = 0$ не существует.

Справедливы формулы
$$\begin{aligned} &\delta(t) \risingdotseq 1; \\ &\delta^{(m)}(t) \risingdotseq p^m, \quad m \geqslant 0 \text{ — целое}; \\ &\delta(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}. \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $f(t)$, имеющую разрывы первого рода в точках t_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ со скачками
$$h_k = f(t_k+0) - f(t_k-0) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $f(t)$ непрерывно дифференцируема в интервалах (t_k, t_{k+1}) $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ и при $t < t_1$ и $t > t_n$. Тогда
$$f'(t) = f_1'(t) + \sum_{k=1}^{n} h_k \delta(t-t_k), \tag{11}$$
где $f_1(t) = f(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \eta(t-t_k)$ — «сомкнутая» функция. Таким образом, производная разрывной функции $f(t)$ составляется из ее обычной производной $f_1'(t)$ (в интервалах гладкости $f(t)$) и суммы δ-функций в точках разрыва с соответствующими скачками в качестве коэффициентов. Это правило важно для правильного применения теорем операционного исчисления к разрывным функциям.

Рассмотрим, например, функцию $f(t)$, определяемую так:
$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$
Применяя формулу (11), находим
$$f'(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2),$$
откуда согласно соотношениям (10)
$$f'(t) \risingdotseq 1 - 2e^{-p} + e^{-2p}.$$
Далее,
$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p},$$
что дает снова
$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$
Нестрогие рассуждения без учета формулы (11) привели бы к следующему. Производная $f(t)$ в обычном смысле равна нулю всюду, кроме точек $t = 0$,

$t = 1$, $t = 2$, где она не существует. Но тогда и интеграл Лапласа от $f'(t)$ тоже должен быть равен нулю, откуда и изображение $f(t)$ получается равным нулю, что явно неверно.

Задачи для самостоятельного решения

75. Решить задачу 70, найдя сначала изображение производной функции $f(t)$, а затем изображение самой функции $f(t)$.

76. Пусть a и b — два положительных числа, и пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Показать, что функция

$$g(t) = \begin{cases} f(at - b), & t > \dfrac{b}{a}, \\ 0, & t < \dfrac{b}{a}, \end{cases}$$

имеет изображение $\dfrac{1}{a} e^{-bp/a} F(p/a)$ (совместная теорема подобия и запаздывания).

77. Найти изображения функций:

а) $f(t) = \begin{cases} \sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right), & t > \dfrac{\pi}{8}, \\ 0, & t < \dfrac{\pi}{8}; \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} \cos\left(3t - \dfrac{\pi}{6}\right), & t > \dfrac{\pi}{18}, \\ 0, & t < \dfrac{\pi}{18}; \end{cases}$

в) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(3t - 6), & t > 2, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$

78. Найти изображение функции распределения масс m_k в точках $t = k$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} m_k \delta(t - k).$$

IX. Теорема умножения (теорема о свертке). *Произведение двух изображений $F(p)$ и $\Phi(p)$ также является изображением, причем*

$$F(p)\Phi(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\varphi(t - \tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Интеграл в правой части (12) называется *сверткой* функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ и обозначается символом $f(t) * \varphi(t)$.

Пример 14. Найти изображение функции

$$\psi(t) = \int_0^t (t - \tau)e^{\tau}\, d\tau.$$

Решение. Функция $\psi(t)$ есть свертка функций $f(t) = t$ и $\varphi(t) = e^t$. По теореме умножения

$$\psi(t) \risingdotseq \Psi(p) = F(p)\Phi(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}. \qquad \triangleright$$

Пример 15. Пусть $F_1(p) = \dfrac{1}{p^x}$, $F_2(p) = \dfrac{1}{p^y}$ ($x > 0$, $y > 0$ — действительные).

Тогда $f_1(t) = \dfrac{t^{x-1}}{\Gamma(x)}$, $f_2(t) = \dfrac{t^{y-1}}{\Gamma(y)}$. По теореме умножения

$$F_1(p)F_2(p) = \frac{1}{p^{x+y}} \risingdotseq \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^t (t-\tau)^{y-1}\tau^{x-1}\,d\tau. \tag{13}$$

С другой стороны,

$$F_1(p)F_2(p) = \frac{1}{p^{x+y}} \risingdotseq \frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) имеем

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)} = \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^t (t-\tau)^{y-1}\tau^{x-1}\,d\tau.$$

Положив $\tau = \lambda t$, из последнего равенства получим

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)} = \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^1 \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{y-1}\,d\lambda.$$

Интеграл в правой части есть B-функция Эйлера $B(x, y)$. Мы приходим к замечательной формуле, связывающей B- и Г-функции Эйлера.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \qquad \triangleright$$

Повторная свертка

Пусть имеем три функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. Тогда

$$F_1(p)F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_2(\tau_1)f_1(t-\tau_1)\,d\tau_1.$$

Далее,

$$\big(F_1(p)\cdot F_2(p)\big)\cdot F_3(p) \risingdotseq \int_0^t \left\{ \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1)f_1(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1 \right\} f_3(\tau_2)\,d\tau_2 =$$

$$= \int_0^t f_3(\tau_2)\,d\tau_2 \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1)f_1(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1.$$

Пусть

$$F_1(p) = \frac{1}{p} \fallingdotseq \eta(t).$$

Тогда

$$\frac{F_2(p)F_3(p)}{p} \fallingdotseq \int\limits_0^t f_3(\tau_2)\,d\tau_2 \int\limits_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1)\eta(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1.$$

Из определения функции $\eta(t)$ следует, что фактически интегрирование ведется по области $t > \tau_1 + \tau_2$, где $\eta(t-\tau_1-\tau_2) = 1$. Таким образом,

$$\frac{F_2(p)F_3(p)}{p} \fallingdotseq \iint\limits_{\tau_1+\tau_2<t} f_2(\tau_1)f_3(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Воспользуемся этим результатом для нахождения объема n-мерного шара. Введем прямоугольную декартову систему координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в n-мерном пространстве.

Объем $V_n(R)$ гипершара радиуса R определяется равенством

$$V_n(R) = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2} \ldots \int dx_1\,dx_2 \ldots dx_n.$$

В силу симметрии шара относительно его центра

$$V_n(R) = 2^n \int\limits_0 dx_1 \int\limits_0 dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2} dx_n.$$

Сделаем замену $x_k = \sqrt{\tau_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$V_n(R) = \iint\limits_{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n \leqslant R^2} \ldots \int \frac{d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n}{\sqrt{\tau_1}\sqrt{\tau_2}\ldots\sqrt{\tau_n}}.$$

Это есть повторная свертка n одинаковых функций

$$f_k(t) = \frac{\eta(t)}{\sqrt{t}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{где} \quad t = R^2.$$

Изображение каждой из таких функций

$$f_k(t) \fallingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \quad \text{(см. задачу 5).}$$

Поэтому

$$V_n(\sqrt{t}) \fallingdotseq \frac{(\sqrt{\pi})^n}{p^{1+n/2}} = \frac{\pi^{n/2}}{p^{1+n/2}},$$

откуда

$$V_n(\sqrt{t}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)} t^{n/2} = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)} = V_n(R).$$

Итак,

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)}.$$

В частности, при $n = 2$ находим

$$V_2(R) = \frac{\pi R^2}{\Gamma(2)} = \pi R^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

79. $\int\limits_0^t e^{t-\tau} \sin \tau \, d\tau$. **80.** $\int\limits_0^t \cos(t-\tau) e^{2\tau} \, d\tau$. **81.** $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch} \tau \, d\tau$.

82. $\int\limits_0^t (t-\tau)^n f(\tau) \, d\tau$. **83.** $\int\limits_0^t e^{2(\tau-t)} \tau^2 \, d\tau$.

Первая теорема разложения. *Если $F(p)$ — аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки и равна в ней нулю и если лорановское разложение $F(p)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{p^k}$, то оригиналом $F(p)$ служит функция*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1},$$

причем этот ряд сходится при всех t.

Пример 16. Рассмотрим функцию $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$.

Она аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, и ее лорановское разложение в окрестности этой точки имеет вид

$$F(p) = \frac{p}{p^2\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{p^{2n}} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

Тогда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos t,$$

что совпадает с известным результатом. ▷

Пример 17. Найти изображение функции $f(t) = J_0(t)$, где $J_0(t)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Решение. Известно, что

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Рассмотрим функцию $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. Эта функция однозначна в области $|p| > 1$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и обращается в этой точке в нуль. Найдем ее лорановское разложение в окрестности бесконечно удаленной точки по формуле разложения бинома:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 2^{2k} p^{2k+1}}.$$

Согласно первой теореме разложения оригиналом для $F(p)$ будет функция

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = J_0(t).$$

Таким образом,

$$J_0(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$ ▷

Пример 18. Вывести рекуррентное соотношение

$$J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t).$$

Решение. Известно (см. задачу 86), что

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{\left(\sqrt{p^2+1} - p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Используя теорему об интегрировании изображения, получаем

$$\frac{J_n(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \frac{\left(\sqrt{p^2+1} - p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}\, dp.$$

Положим $\sqrt{p^2+1}-p=v$. Тогда

$$\int \frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}\,dp = -\int v^{n-1}\,dv = -\frac{v^n}{n}+c,$$

так что

$$\frac{J_n(t)}{t} \risingdotseq -\frac{1}{n}\left[\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n\right]\Bigg|_{p=p}^{p=\infty} = \frac{1}{n}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n. \tag{15}$$

С другой стороны, из выражений

$$J_{n-1}(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{n-1},$$

$$J_{n+1}(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{n+1}$$

находим

$$J_{n-1}(t)+J_{n+1}(t) \risingdotseq 2\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n. \tag{16}$$

Из соотношений (15) и (16) устанавливаем

$$J_{n-1}(t)-\frac{2n}{t}J_n(t)+J_{n+1}(t)=0.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

84. Показать, что

$$J_n'(t)=\frac{J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)}{2} \quad (n=1,2,\ldots).$$

85. Найти изображение функции $f(t)=J_1(t)$.

86. Показать, что

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

87. Показать, что

$$t^{n/2}J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}e^{-1/p} \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

88. Функция Бесселя первого рода чисто мнимого аргумента $I_n(t)$ выражается через функцию Бесселя $J_n(t)$ соотношением $I_n(t)=(i)^{-n}J_n(it)$.
Показать, что

$$I_n(t) \risingdotseq \frac{\left(p-\sqrt{p^2-1}\right)^n}{\sqrt{p^2-1}}.$$

89. Полиномы Лагерра определяются формулой

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right) \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Показать, что

$$L_n(t) \doteqdot \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

90. Найти изображение функции $f(t) = \ln t$.

91. Показать, что

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p\sqrt{p+1}}, \quad \text{где} \quad \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}\,du.$$

Пусть требуется найти сумму функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)$, где $\varphi_n(t)$ — функции-оригиналы.

Заменив функции $\varphi_n(t)$ их изображениями, придем к ряду, составленному из изображений, суммировать который иногда бывает значительно проще, чем исходный ряд. Переходя от найденной суммы к функции-оригиналу, найдем сумму данного ряда.

Пример 19. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n(t)$, где $L_n(t)$ — полином Лагерра порядка n.

Решение. Для полиномов Лагерра $L_n(t)$ имеем

$$L_n(t) \doteqdot \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n.$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(t) \doteqdot \frac{1}{p}\left[1 - \left(1-\frac{1}{p}\right) + \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 - \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{2p-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-\frac{1}{2}} \doteqdot \frac{1}{2}e^{t/2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(t) = \frac{1}{2}e^{t/2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

92. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_{2n}(2t) = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t).$$

93. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} = eJ_0(2\sqrt{t}).$$

94. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(t) = \frac{1}{2}\sin t.$$

95. Показать, что

$$J_0(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) = 1,$$

где $J_k(t)$ — функция Бесселя порядка k.

96. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{2^{n+1}} = e^{-t}, \quad 0 < t < +\infty.$$

Пример 20. Вычислить интеграл $f(t) = \int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos tu}{a^2+u^2}\,du,\ t > 0.$

Решение. Для $\cos tu$, рассматриваемого как функция аргумента t, по теореме подобия имеем

$$\cos tu \risingdotseq \frac{p}{p^2+u^2}.$$

Поэтому

$$f(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty}\frac{p\,du}{(p^2+u^2)(a^2+u^2)}.$$

Подынтегральная функция, как функция аргумента u, допускает представление

$$\frac{p}{(p^2+u^2)(a^2+u^2)} = -\frac{p}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{p^2+u^2} + \frac{p}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{a^2+u^2}.$$

Следовательно,

$$f(t) \risingdotseq \left(-\frac{1}{p^2-a^2}\operatorname{arctg}\frac{u}{p} + \frac{p}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{p+a}.$$

Переходя к функциям-оригиналам, получим окончательно

$$f(t) = \frac{\pi}{2a}e^{-at}.$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

97. а) $f(t) = \int\limits_0^{\infty}\dfrac{u\sin tu}{1+u^2}\,du,\ t > 0;$ б) $f(t) = \int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin tu\cdot\cos u}{u}\,du,\ t > 0.$

98. Найти значения функции $f(t)$ и ее первых двух производных при $t \to +0$, если $f(t) \risingdotseq \dfrac{p+1}{p(p^2+p+1)}$ и $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t)$ — оригиналы.

Отыскание оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ применяются следующие приемы:

I. Если $F(p) = \dfrac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная рациональная дробь, то разлагают эту дробь на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства I–IX преобразования Лапласа.

Пример 21. Найти оригинал для функции $F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

Решение. Разлагаем $F(p)$ в сумму простых дробей:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Находя коэффициенты A, B, C, D, получаем

$$F(p) = -\frac{1}{4}\frac{1}{p} + \frac{1}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{20}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+4}. \tag{17}$$

Оригиналы для каждой из простых дробей в правой части (17) находятся просто. Используя свойство линейности, находим

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t. \qquad \triangleright$$

Пример 22. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$. Найти оригинал $f(t)$.

Решение. В данном случае $F(p)$ уже есть простая дробь. Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой умножения и тем, что

$$\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t.$$

Имеем

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \int_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\cos t - \cos(2\tau - t)]\,d\tau = \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{4}\sin(2\tau - t)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{2}\sin t. \qquad \triangleright$$

Пример 23. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p+1}$. Найти оригинал $f(t)$.

Решение. Наличие множителя e^{-p} указывает на необходимость применения теоремы запаздывания. Здесь $\tau = 1$, $\dfrac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-t}$, поэтому

$$\frac{e^{-p}}{p+1} \risingdotseq e^{-(t-1)}\eta(t-1). \qquad \triangleright$$

II. С помощью второй теоремы разложения, которая утверждает, что при определенных условиях, наложенных на $F(p)$, оригиналом для $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right],$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

В частности, если $F(p) = \dfrac{Q(p)}{R(p)}$ — правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left[F(p)e^{pt}(p-p_k)^{n_k}\right], \tag{18}$$

где p_k — полюсы $F(p)$ кратности n_k и сумма в формуле (18) берется по всем полюсам $F(p)$.

Если все полюсы $F(p)$ простые, то формула (18) упрощается и принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Пример 24. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2-1)^2}$. Найти оригинал $f(t)$.

Решение. Функция $F(p)$ имеет полюсы $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, каждый второго порядка. По формуле (18)

$$f(t) = \lim_{p\to 1}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right]'_p + \lim_{p\to -1}\left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right]'_p = \frac{1}{2}t\operatorname{sh}t. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Для данных изображений найти оригиналы и построить их графики:

99. $F(p) = \dfrac{2e^{-p}}{p^3}$. **100.** $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2}$.

101. $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$. **102.** $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p+3}$.

Найти оригиналы по заданному изображению:

103. $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4p + 5}$.

104. $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4p + 3}$.

105. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^2}$.

106. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

107. $F(p) = \dfrac{1}{p + 2p^2 + p^3}$.

108. $F(p) = \dfrac{1}{7 - p + p^2}$.

109. $F(p) = \dfrac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$.

110. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

111. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

112. $F(p) = \dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}$.

113. $F(p) = \dfrac{1}{p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$.

114. $F(p) = \dfrac{p^2 + 2p - 1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$.

115. $F(p) = \dfrac{p}{p^3 + 1}$.

116. $F(p) = \dfrac{2p+3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$.

117. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

118. $F(p) = \dfrac{p^2 + 2p - 1}{p^3 - 2p^2 + 2p - 1}$.

119. $F(p) = \dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

120. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2 - 2p + 5} + \dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

121. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

122. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

123. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}(e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p})$.

124. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2-1} + \dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

125. $F(p) = \dfrac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2+4)}$.

126. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2} + \dfrac{2e^{-2p}}{p^3} + \dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

127. $F(p) = \dfrac{e^{-p/3}}{p(p^2+1)}$.

Теорема Эфроса. *Пусть* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *и пусть* $\Phi(p)$ *и* $q(p)$ *— аналитические функции такие, что*

$$\Phi(p)e^{-\tau q(p)} \risingdotseq \varphi(t,\tau).$$

Тогда

$$F[q(p)]\Phi(p) \risingdotseq \int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau.$$

В частности, если $\Phi(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, то

$$\varphi(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/(4t)}.$$

Поэтому, если известно, что $F(p) \risingdotseq f(t)$, то по теореме Эфроса находим оригинал для $\dfrac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty f(\tau) e^{-\tau^2/(4t)}\, d\tau. \tag{19}$$

Задачи для самостоятельного решения

Используя теорему Эфроса, найти оригиналы следующих функций (a — вещественное число):

128. $F(p) = \dfrac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{p}$. **129.** $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}$. **130.** $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^2}$.

131. $F(p) = \dfrac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{\sqrt{p}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{a} + h\right)}$. **132.** $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p} + a)}$.

Используя теорему Эфроса, вычислить следующие интегралы:

133. $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int\limits_0^\infty \operatorname{ch} \tau\, e^{-\tau^2/(4t)}\, d\tau$. **134.** $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int\limits_0^\infty \cos \tau\, e^{-\tau^2/(4t)}\, d\tau$.

135. $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int\limits_0^\infty \tau \operatorname{sh} \tau\, e^{-\tau^2/(4t)}\, d\tau$. **136.** $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int\limits_0^\infty \tau \sin \tau\, e^{-\tau^2/(4t)}\, d\tau$.

§ 2. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеем дифференциальное уравнение (для простоты — второго порядка)

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t), \tag{1}$$

где a_0, a_1, $a_2 = \text{const}$, $a_0 \neq 0$, $f(t)$ — функция-оригинал.

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_1. \tag{2}$$

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Применяя к обеим частям (1) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, вместо дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2) получаем операторное уравнение

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)X(p) - (a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0) = F(p). \tag{3}$$

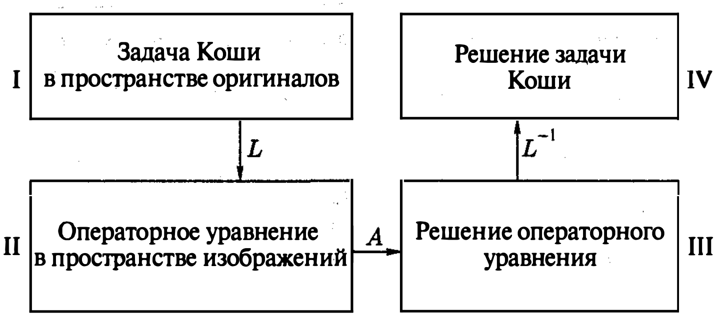
Из (3) находим

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

Это так называемое операторное решение. Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы тем самым найдем функцию $x(t)$ — решение задачи Коши (1)–(2).

Общий случай решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка принципиально ничем не отличается от случая $n = 2$.

Схема решения задачи Коши
с помощью преобразования Лапласа



Здесь L означает применение к I преобразования Лапласа, A — решение операторного уравнения II, L^{-1} — применение к III обратного преобразования Лапласа.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2\cos t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

<u>*Решение.*</u>

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \quad \cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},$$

так что операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p)+1+X(p)=\frac{2p}{p^2+1};$$

отсюда

$$X(p)=\frac{2p}{(p^2+1)^2}-\frac{1}{p^2+1}.$$

Находим оригинал для $X(p)$. Оригинал для функции $\dfrac{1}{p^2+1}$:

$$\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t.$$

Для нахождения оригинала для функции $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$ воспользуемся, например, теоремой о дифференцировании изображения (см. § 14):

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2}=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'_p\risingdotseq t\sin t.$$

Значит, $X(p)\risingdotseq t\sin t-\sin t=(t-1)\sin t$.
Итак $x(t)=(t-1)\sin t$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

137. $x'+x=e^{-t}$, $x(0)=1$.
138. $x'-x=1$, $x(0)=-1$.
139. $x'+2x=\sin t$, $x(0)=0$.
140. $x''=1$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
141. $x''+x'=1$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
142. $x''+x=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.
143. $x''+3x'=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.
144. $x''-2x'=e^{2t}$, $x(0)=x'(0)=0$.
145. $x''+2x'-3x=e^{-t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
146. $x'''+x'=1$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.
147. $x''+2x'=t\sin t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.
148. $x''+2x'+x=\sin t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.
149. $x'''-x''=\sin t$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.
150. $x'''+x'=t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$; $x''(0)=0$.
151. $x''-2x'+x=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
152. $x'''+2x''+5x'=0$, $x(0)=-1$, $x'(0)=2$, $x''(0)=0$.
153. $x''-2x'+2x=1$, $x(0)=x'(0)=0$.
154. $x''+x'=\cos t$, $x(0)=2$, $x'(0)=0$.

155. $x'' + 2x' + x = t^2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
156. $x''' + x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.
157. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
158. $x''' + x'' = t$, $x(0) = -3$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.
159. $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
160. $x^{\mathrm{IV}} - x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$.
161. $x'' + 2x' + 2x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.
162. $x'' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
163. $x'' + 4x = t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
164. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
165. $x''' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$.
166. $x''' + x'' = \cos t$, $x(0) = -2$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
167. $x''' + x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
168. $x^{\mathrm{IV}} - x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
169. $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
170. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
171. $x''' + x' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$.
172. $x'' + 2x' + x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
173. $x'' - x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
174. $x'' - x = \sin t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
175. $x''' + x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
176. $x'' + x = 2\sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
177. $x'' - 2x' + x = t - \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
178. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
179. $x'' + 4x = 2\cos t \cdot \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
180. $x'' + x = te^t + 4\sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
181. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
182. $x'' + x' = 4\sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
183. $x''' - 2x'' + x' = 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$.
184. $x'' - 3x' + 2x = e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
185. $x'' - x' = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
186. $x''' + x = \dfrac{1}{2}t^2e^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
187. $x'' + x = t\cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
188. $x'' + n^2x = a\sin(nt + \alpha)$, $x(0) = x'(0) = 0$.
189. $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
190. $x^{\mathrm{IV}} + 2x'' + x = t\sin t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
191. $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

192. $x'' + 4x = \sin t$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.

193. $x''' + x' = e^{2t}$, $\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

194. $x^{\mathrm{IV}} + x''' = \cos t$, $\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \quad x'''(0) = \gamma$.

195. $x'' - 4x = \sin \frac{3}{2}t \sin \frac{1}{2}t$, $\quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$.

196. $x^{\mathrm{IV}} - 5x'' + 10x' - 6x = 0$, $\quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 6, \quad x'''(0) = -14$.

197. $x'' + x' + x = te^t$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.

198. $x'' + x = t \cos t$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.

199. $x''' + 3x'' - 4x = 0$, $\quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2$.

200. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$, $\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

201. $x''' + x = 1$, $\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

202. $x'' + \omega^2 x = a[\eta(t) - \eta(t-b)]$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.

Требование, чтобы начальные условия были заданы в точке $t = 0$, несущественно, так как линейной заменой независимой переменной t задача Коши при $t = t_0 \neq 0$ сводится к задаче с начальными условиями в точке $t = 0$. Покажем это на примере дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \tag{4}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, где $t_0 \neq 0$.

Положим

$$t = \tau + t_0;$$
$$x(t) = x(\tau + t_0) = \widetilde{x}(\tau);$$
$$f(t) = f(\tau + t_0) = \widetilde{f}(\tau).$$

Тогда

$$x'(t) = x'(\tau + t_0) = \widetilde{x}'(\tau),$$
$$x''(t) = x''(\tau + t_0) = \widetilde{x}''(\tau),$$

и уравнение (4) и начальные условия примут вид

$$\begin{gathered} a_0 \widetilde{x}''(\tau) + a_1 \widetilde{x}'(\tau) + a_2 \widetilde{x}(\tau) = \widetilde{f}(\tau), \\ \widetilde{x}(0) = x_0, \quad \widetilde{x}'(0) = x_1. \end{gathered} \tag{5}$$

Мы получили задачу Коши для уравнения (5) с начальными условиями, заданными в точке $\tau = 0$.

Пример 2. Найти решение уравнения $x''(t) + x'(t) = t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

Решение. Положим $t = \tau + 1$ и $x(t) = x(\tau + 1) = \tilde{x}(\tau)$. Тогда данное уравнение и начальные условия примут вид

$$\tilde{x}''(\tau) + \tilde{x}'(\tau) = \tau + 1, \quad \tilde{x}(0) = 1, \quad \tilde{x}'(0) = 0, \tag{6}$$

так как значению $t = 1$ отвечает значение $\tau = 0$.

Составим операторное уравнение для дифференциального уравнения (6). Пусть $\tilde{x}(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда

$$\tilde{x}'(\tau) \risingdotseq pX(p) - 1,$$

$$\tilde{x}''(\tau) \risingdotseq p^2X(p) - p,$$

и операторным уравнением будет

$$p^2X(p) - p + pX(p) - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Решая его относительно $X(p)$, найдем

$$X(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

Переходя к оригиналам, получим

$$\tilde{x}(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2}.$$

Заменив здесь τ на $t - 1$, будем иметь искомое решение задачи Коши

$$x(t) = 1 + \frac{(t-1)^2}{2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями:

203. $x'' + x = 0,$ $\quad x(\pi) = 1, \quad x'(\pi) = 0.$

204. $x''(t) + x'(t) = 2t,$ $\quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -1.$

205. $x''(t) - x'(t) = -2t,$ $\quad x(2) = 8, \quad x'(2) = 6.$

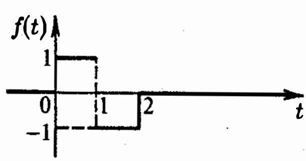
206. $x''(t) + x(t) = -2\sin t,$ $\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

207. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{1-t},$ $\quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -1.$

Пример 3. Решить задачу Коши

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

если функция $f(t)$ задана графически



Решение. Очевидно

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2),$$

поэтому, применяя формулу

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(\ ),$$

получим

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - 2\cdot\frac{e^{-p}}{p} + 1\cdot e^{-2p}\frac{1}{p} = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}.$$

Полагая $x(t) \risingdotseq X(p)$ и учитывая начальные условия, получим

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p).$$

Операторное уравнение

$$(p^2+1)X(\ ) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2+1)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2+1)}.$$

Так как

$$\frac{1}{p(p^2+1)} \risingdotseq (1-\cos t)\eta(t),$$

ибо

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1},$$

то

$$\frac{1}{p(p^2+1)}e^{-p} \risingdotseq [1-\cos(t-1)]\eta(t-1),$$

а

$$\frac{1}{p(p^2+1)}e^{-2p} \risingdotseq [1-\cos(t-2)]\eta(t-2).$$

Здесь применяем теорему запаздывания: если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(\ ).$$

Значит,

$$x(t) = (1-\cos t)\eta(t) - 2[1-\cos(t-1)]\eta(t-1) + [1-\cos(t-2)]\eta(t-2)$$

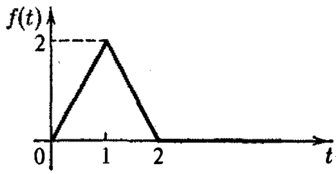
или

$$x(t) = 2\left[\sin^2\frac{t}{2}\eta(t) - 2\sin^2\frac{t-1}{2}\eta(t-1) + \sin^2\frac{t-2}{2}\eta(t-2)\right]. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

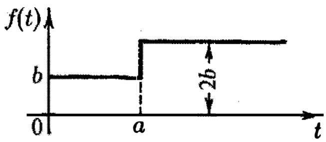
Решить следующие задачи Коши:

208.



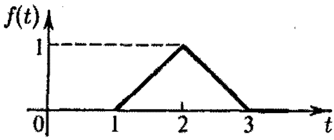
$$x'' + 4x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

209.



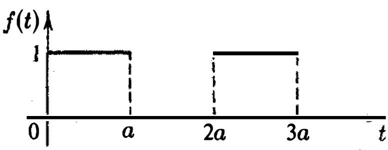
$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

210.



$$x'' + 9x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

211.



$$x'' - 2x' + x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

212. Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $m\lambda x$, пропорциональной смещению, и силы сопротивления $2m\mu v$, пропорциональной скорости. В момент времени $t = 0$ частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Показать, что если имеет место равенство $n^2 = \lambda^2 - \mu^2$, то смещение частицы определяется выражением

$$\frac{1}{n}e^{-\mu t}[nx_0 \cos nt + (v_0 + \mu x_0)\sin nt].$$

213. Частица массы m может совершать малые колебания относительно положения равновесия и находится под воздействием восстанавливающей силы mn^2x, пропорциональной смещению. Она выводится из состояния покоя постоянной силой F, действующей в течение времени T. Показать, что амплитуда колебания равна

$$\frac{2F}{mn^2}\sin\frac{nT}{2} \quad \text{при} \quad t > T.$$

214. Математический маятник длины l выводится из положения равновесия малыми отклонениями точки подвеса в горизонтальном направлении. Показать, что если точка подвеса переместилась на расстояние a, то отклонение маятника равно $a(1 - \cos nt)$, $n^2 = \dfrac{g}{l}$.

215. Частица брошена вертикально вверх со скоростью v_0. На нее действует сила тяжести и сила сопротивления $2kmv$. Показать, что в момент времени t она будет находиться на расстоянии

$$-\frac{gt}{2k} + \frac{g + 2kv_0}{4k^2}(1 - e^{-2kt})$$

от точки бросания.

216. Материальная точка массы 2 грамма движется прямолинейно под действием силы F, возрастающей на a дин в секунду. В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость $v_0 = 10$ см/с. Зная, что начальная величина силы $F_0 = 4$ дин и что на расстоянии 450 см от начала координат скорость $v = 105$ см/с, определить значение величины a.

217. Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат O с силой F, прямо пропорциональной расстоянию ($F = 4mx$). На точку действует сопротивление среды $R = 3mv$. В начальный момент расстояние от начала равно 1, а скорость равна нулю. Найти закон движения точки.

218. Тяжелая точка массы m падает в среде, сопротивление которой прямо пропорционально первой степени скорости. Определить наибольшую скорость точки, если при $v = 1$ м/с сила сопротивления равна одной трети веса точки и начальная скорость $v_0 = 0$.

219. Материальная точка массы m движется в среде, сопротивление которой прямо пропорционально первой степени скорости (коэффициент пропорциональности k). Какое расстояние пройдет точка до остановки, если ей сообщена начальная скорость v_0 и кроме силы сопротивления никаких других сил нет?

220. Тяжелая однородная цепочка массы m и длины $2l$ лежит на гладком горизонтальном столе так, что половина ее свешивается со стола. Определить закон движения цепочки во время ее соскальзывания со стола и найти время соскальзывания.

221. Точка массы m находится на прямой, проходящей через два центра A и B, расстояние между которыми $2d$. Центры притягивают точку с силами, прямо пропорциональными расстоянию до центра; коэффициент пропорциональности mk^2 одинаков для обоих центров. В начальный момент точка находится на расстоянии a от середины O отрезка AB, не имея начальной скорости. Определить закон движения точки.

222. Неподвижный центр O притягивает точку массы m с силой $F = \mu mr$, где r — расстояние до точки от этого центра и μ — постоянный коэффициент. В начальный момент $r = a$ и скорость $v = 0$. Через сколько времени точка достигнет центра O?

223. Лодке сообщена начальная скорость $v_0 = 6$ м/с. Через 69 с после начала движения эта скорость уменьшается вдвое. Найти закон движения лодки, если сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости лодки.

224. Материальная точка массы $m = 2$ совершает прямолинейные колебания по оси Ox под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию точки от начала координат (коэффициент пропорциональности равен 8), и возмущаюшей силы $F = 4\cos t$. Найти закон движения точки, если в начальный момент $x = 0$ и $v = 0$.

225. Определить движение материальной точки массы m, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию и равной k^2m на расстоянии, равном единице длины.
В начальный момент точка находилась на расстоянии a от центра O и имела скорость v_0, перпендикулярную к прямой, соединяющей начальное положение с центром O.

226. Решить задачу 225, предполагая, что точка M отталкивается от центра с силой, прямо пропорциональной расстоянию, при том же коэффициенте пропорциональности.

227. К цепи, состоящей из емкости C и индуктивности L, соединенных последовательно, в момент времени $t = 0$ приложена э. д. с. $E\cos(\omega t + \alpha)$. Начальные ток и заряд равны нулю. Показать, что ток в момент t равен

$$E\{\omega\sin(\omega t + \alpha) - n\cos\alpha\sin nt - \omega\sin\alpha\cos nt\}\frac{1}{L(\omega^2 - n^2)},$$

где $n^2 = \dfrac{1}{LC}$; предполагается, что $n^2 \neq \omega^2$.

228. К цепи предыдущего примера, с нулевыми начальными током и зарядом в момент времени $t = 0$, приложена э. д. с. $E\sin nt$ с резонансной частотой. Показать, что ток равен $\dfrac{E}{2L}t\sin nt$, где $n^2 = \dfrac{1}{LC}$.

229. К сопротивлению R, обладающему индуктивностью L, приложена э. д. с. $E\sin(\omega t + \alpha)$. Начальный ток равен нулю. Показать, что ток равен

$$E\{\sin(\gamma - \alpha)e^{-Rt/L} + \sin(\omega t + \alpha - \gamma)\}\left(R^2 + L^2\omega^2\right)^{-1/2},$$

где $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\omega L}{R}$.

230. К цепи, в которую последовательно включены L, R, C с начальными током и зарядом, равными нулю, приложена э.д.с., равная E_1 при $0 < t \leqslant T$ и E_2 при $t > T$; E_1, E_2 — постоянные. Показать, что при $t > T$ ток в цепи равен

$$\frac{E_1}{nL}e^{\mu t}\sin nt - \frac{E_1 - E_2}{nL}e^{-\mu(t-T)}\sin n(t - T),$$

где $\mu = \dfrac{R}{2L}$ и $n^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}$, причем предполагается, что $n^2 > 0$.

231. Цепь, состоящая из индуктивности L, сопротивления R и емкости C, соединенных последовательно, включается на постоянную э.д.с. E. Начальный заряд и ток равны нулю. Показать, что ток I в момент времени t равен

$$I = \begin{cases} \dfrac{E}{nL}e^{-\mu t}\sin nt & \text{при} \quad n^2 > 0, \\ \dfrac{E}{L}e^{-\mu t} & \text{при} \quad n^2 = 0, \end{cases}$$

где $n^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}$, $\mu = \dfrac{R}{2L}$.

Решение некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Пусть имеем уравнение

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = f(t), \tag{7}$$

где $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ — многочлены от t степени $\leqslant m$, а $f(t)$ — функция-оригинал. Будем предполагать, что задача Коши

$$x\big|_{t=0} = x_0, \quad x'\big|_{t=0} = x_0', \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}\big|_{t=0} = x_0^{(n-1)} \tag{8}$$

для уравнения (7) имеет решение.

Пусть

$$x(t) \risingdotseq X(p).$$

В силу теоремы о дифференцировании изображения

$$t^k x^{(s)}(t) \risingdotseq (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left[L(x^{(s)}(t))\right] = (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left[p^s X(p) - p^{s-1}x_0 - \ldots - x_0^{(s-1)}\right].$$

Здесь $L(x^{(s)}(t))$ — изображение функции $x^{(s)}(t)$.

Таким образом, применяя к обеим частям уравнения (7) преобразование Лапласа, мы превратим (7) в дифференциальное уравнение m-го порядка относительно изображения $X(p)$ функции $x(t)$. Если $m < n$, то задача интегрирования уравнения (7) упрощается.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$tx'' - 2x' = 0. \tag{9}$$

<u>*Решение*</u>. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0),$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0),$$

$$tx''(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left[p^2X(p) - px(0) - x'(0)\right] = -p^2\frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0).$$

Уравнение (9) принимает вид

$$-p^2\frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0) - 2pX(p) + 2x(0) = 0,$$

или

$$\frac{dX(p)}{dp} + \frac{4}{p}X(p) = \frac{3x(0)}{p^2}.$$

Интегрируя это уравнение как линейное неоднородное уравнение относительно $X(p)$, найдем

$$X(p) = \frac{x(0)}{p} + \frac{C_1}{p^4},$$

откуда

$$x(t) = x(0) + C_1\frac{t^3}{3!}$$

есть решение исходного уравнения. ▷

Пример 5. Рассмотрим уравнение Бесселя

$$t^2x''(t) + tx'(t) + (t^2 - n^2)x(t) = 0 \quad (t > 0,\ n \text{ — целое}) \tag{10}$$

и будем искать решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x_0, \qquad x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - x_1.$$

Далее,

$$t^2x''(t) \risingdotseq \frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p) - px_0 - x_1] = \frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p)],$$

$$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}[pX(p) - x_0] = -\frac{d}{dp}[pX(p)],$$

и уравнение (10) перейдет в следующее:

$$\frac{d^2}{dp^2}[p^2X(p)] - \frac{d}{dp}[pX(p)] + \frac{d^2X(p)}{dp^2} - n^2X(p) = 0,$$

или

$$(1 + p^2)\frac{d^2X(p)}{dp^2} + 3p\frac{dX(p)}{dp} + (1 - n^2)X(p) = 0. \tag{11}$$

Для решения уравнения (11) введем новую независимую переменную и новую искомую функцию формулами

$$p = \operatorname{sh} u, \quad X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u}.$$

Уравнение (11) перейдет при этом в следующее:

$$\frac{d^2z}{du^2} - n^2z = 0.$$

Его общее решение

$$z = C_1e^{nu} + C_2e^{-nu}.$$

Поскольку $p = \operatorname{sh} u$, получим $\operatorname{ch} u = \sqrt{p^2 + 1}$. Учитывая выражения для $\operatorname{sh} u$ и $\operatorname{ch} u$ через показательные функции, находим

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = p, \qquad \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \sqrt{p^2 + 1},$$

откуда

$$e^u = \sqrt{p^2 + 1} + p, \qquad e^{-u} = \sqrt{p^2 + 1} - p,$$

так что

$$z = C_1\left(\sqrt{p^2 + 1} + p\right)^n + C_2\left(\sqrt{p^2 + 1} - p\right)^n.$$

Для $X(p)$ получаем

$$X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u} = \frac{C_1\left(\sqrt{p^2 + 1} + p\right)^n + C_2\left(\sqrt{p^2 + 1} - p\right)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}. \tag{12}$$

При $n = 0$ из (12) найдем

$$X(p) = \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{p^2 + 1}} \risingdotseq (C_1 + C_2)J_0(t).$$

Выбирая $C_1 + C_2 = 1$, получим решение $x(t) = J_0(t)$ — бесселеву функцию первого рода порядка нуль.

Полагая $n = 1$ и выбирая $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, получим решение $x(t) = J_1(t)$ уравнения (10). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти решения уравнений:

232. $tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0$.

233. $tx'' + 2x' = 0$.

234. $x'' + (t + 1)x' + tx = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1$.

235. $x'' + (t + b)x' = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0$ (b — любое действительное число).

236. $x'' + tx' - (t + 1)x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 1$.

237. $x'' - tx' + nx = 0$, $n > 0$ — целое (уравнение Чебышёва—Эрмита):
а) $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $n = 2k$; б) $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $n = 2k + 1$.

§ 3. Интеграл Дюамеля

Если функция $f(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$ и

$$F(p) \risingdotseq f(t), \qquad \Phi(p) \risingdotseq \varphi(t),$$

то

$$F(p)\Phi(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\varphi(t - \tau)\, d\tau.$$

Отсюда по теореме о дифференцировании оригинала

$$pF(p)\Phi(p) \risingdotseq f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t - \tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Это — так называемая *формула Дюамеля*.

Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами n-го порядка

$$L[x] \equiv a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t), \qquad a_0 \neq 0, \tag{2}$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{3}$$

Допустим, что известно решение уравнения

$$L[x] = 1 \tag{4}$$

с той же левой частью и правой частью, равной единице, при условиях (3). Переходя к операторным уравнениям, будем иметь ($A(p)$ — известный многочлен от p)

$$A(p)X(p) = F(p) \tag{5}$$

для (2) и

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p} \tag{6}$$

для (4). Из (5) находим $X(p) = \dfrac{F(p)}{A(p)}$, а из (6) $A(p) = \dfrac{1}{pX_1(p)}$, откуда $X(p) = pX_1(p)F(p)$. Согласно формуле (1)

$$pX_1(p)F(p) \risingdotseq f(t)x_1(0) + \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Учитывая, что $x_1(0) = 0$, получаем

$$X(p) = pX_1(p)F(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Отсюда решение $x(t)$ уравнения (2) при нулевых начальных условиях (3) будет иметь вид

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

где $x_1(t)$ — решение задачи (4)–(3).

Пример 1. *Используя формулу Дюамеля, решить уравнение при заданных начальных условиях*

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1+e^t}, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x_1''(t) - x_1(t) = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Применяя операционный метод, находим

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2-1)},$$

откуда

$$x_1(t) = \int_0^t \operatorname{sh}\tau\,d\tau = \operatorname{ch} t - 1.$$

По формуле (9)

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} \operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}(e^t - te^t - 1) + \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1+e^t}{2}. \qquad \triangleright$$

Требование, чтобы начальные условия были нулевыми, является несущественным: простой заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями. Покажем это на примере дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пусть ищется решение уравнения

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \tag{10}$$

удовлетворяющее ненулевым начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Положим

$$y(t) = x(t) - x_0 - x_1 t. \tag{11}$$

Тогда

$$y'(t) = x'(t) - x_1, \quad y''(t) = x''(t),$$

и уравнение (10) преобразуется к виду

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t),$$

где

$$f_1(t) = f(t) - a_1 x_1 - a_2 x_0 - a_2 x_1 t.$$

Далее, в силу (11)

$$y(0) = x(0) - x_0 = 0, \quad y'(0) = x'(0) - x_1 = 0.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче Коши:

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_2(t),$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

с нулевыми начальными условиями.

Пример 2. С помощью формулы Дюамеля решить следующую задачу Коши:

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t, \tag{12}$$

$$x(0) = -2, \quad x'(0) = 1. \tag{13}$$

Решение. Сводим задачу (12)–(13) к задаче с нулевыми начальными условиями. Для этого полагаем

$$y(t) = x(t) + 2 - t.$$

Тогда

$$y'(t) = x'(t) - 1, \quad y''(t) = x''(t),$$

и уравнение (12) преобразуется в следующее:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2},$$

где

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Решая последнюю задачу с помощью формулы Дюамеля, найдем

$$y = e^{-t}[t - \ln(1+t)].$$

Решение исходной задачи (12)–(13)

$$x(t) = e^{-t}[t - \ln(1+t)] - 2 + t.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

С помощью формулы Дюамеля найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

238. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

239. $x'' + 2x' + x = \dfrac{e^{-t}}{1+t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

240. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

241. $x'' - x' = \dfrac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

242. $x'' + x = \dfrac{1}{2+\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

243. $x'' + x = \dfrac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

244. $x'' + x = \dfrac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

245. $x'' + x' = \dfrac{1}{1+\sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

246. $x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

247. $x''' + x' = \dfrac{1}{2+\sin t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

§ 4. Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом производится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения.

Пусть, например, нужно решить систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{ik}\frac{dx_k}{dt}+c_{ik}x_k\right)=f_i(t)\quad (i=1,2,\dots,n), \tag{1}$$

где a_{ik}, b_{ik}, $c_{ik}=\mathrm{const}$, при начальных условиях

$$x_k(0)=\alpha_k,\quad x_k'(0)=\beta_k. \tag{2}$$

Обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ изображения $x_k(t)$ и $f_i(t)$, от системы (1) с учетом (2) перейдем к операторной системе

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik})X_k(p)=$$

$$=F_i(p)+\sum_{k=1}^{n}\left[(a_{ik}p+b_{ik})\alpha_k+a_{ik}\beta_k\right]\quad (i=1,2,\dots,n). \tag{3}$$

Решая систему (3) как линейную алгебраическую систему уравнений относительно $X_k(p)$, найдем $X_k(p)$, а затем их оригиналы $x_k(t)$ $(k=1,2,\dots,n)$. Эти последние будут решениями задачи Коши для системы (1).

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x''=3(y-x+z),\\ y''=x-y,\\ z''=-z,\end{cases}$$

$$x(0)=x'(0)=0,$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=-1,$$

$$z(0)=1,\quad z'(0)=0.$$

Решение. Переходя к операторной системе, получим

$$\begin{cases} p^2X=3(Y-X+Z),\\ p^2Y+1=X-Y,\\ p^2Z-p=-Z,\end{cases}$$

где

$$X(p) \risingdotseq x(t), \quad Y(p) \risingdotseq y(t), \quad Z(p) \risingdotseq z(t).$$

Решая последнюю систему относительно $X(p), Y(p)$ и $Z(p)$, получим

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)},$$

$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1},$$

$$Z(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Находя оригиналы для $X(p), Y(p), Z(p)$, получаем

$$x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t,$$

$$z(t) = \cos t.$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений:

248. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

249. $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1.$

250. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$

251. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

252. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1.$

253. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

254. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 0.$

255. $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

256. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$

257. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$

258. $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^{at}, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

259. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$

260. $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 1.$

261. $\begin{cases} tx' = -x + y + z + t, \\ ty' = x - y + z + t^3, \\ tz' = x + y + z + 4, \end{cases}$ $x(1) = y(1) = z(1) = 0.$

262. $\begin{cases} x_0' = -cx_0, \\ x_1' = -cx_1 + cx_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = -cx_n + cx_{n-1}, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad x_1(0) = x_2(0) = \ldots = x_n(0) = 0.$

263. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

264. $\begin{cases} 3tx' = 2x + y - z, \\ 2ty' = x + 3y + z, \\ 6tz' = -x + 7y + 5z, \end{cases}$ $x(1) = y(1) = z(1) = 1.$

265. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

266. Электрон вылетает из начала координат с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, направленной по оси Ox. Найти закон движения электрона, предполагая, что напряжение магнитиого поля $\mathbf{H}$ постоянно и направлено перпендикулярно к плоскости xOy.

267. Снаряд вылетает из орудия со скоростью $\mathbf{v}_0$ м/с под углом 45° к горизонту. Найти, пренебрегая сопротивлением воздуха, наибольшую высоту, на которую поднимается снаряд, и место его падения.

268. Электрон движется в магнитном поле постоянного напряжения $\mathbf{H}$. Найти траекторию, если начальная скорость $\mathbf{v}_0$ образует угол α с направлением магнитного поля.

269. Определить движение тяжелой материальной точки, брошенной с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ под углом α к горизонту, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости ($\mathbf{F} = mk\mathbf{v}$).

270. Частица массы m с зарядом e вылетает из начала координат со скоростью $(u, 0, 0)$. На нее действует постоянное магнитное поле $\mathbf{H}$, параллельное оси Oz, и сопротивление среды $km\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Показать, что ее координаты в момент времени t равны

$$x = \frac{kue^{-kt}}{k^2+\lambda^2}\left(e^{kt} - \cos\lambda t + \frac{\lambda}{k}\sin\lambda t\right),$$

$$y = -\frac{\lambda u}{k^2+\lambda^2} + \frac{ue^{-kt}}{k^2+\lambda^2}(\lambda\cos\lambda t + k\sin\lambda t),$$

где $\lambda = \dfrac{eH}{mc}$, c — скорость света.

271. Частица движется в сопротивляющейся среде, действующей на нее с силой $\mathbf{F} = 2\lambda\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы, и притягивается к точке $(0, 0)$ с силой $\mu^2 \mathbf{r}$ $(m = 1)$. В точке $(a, 0)$ частица обладает скоростью v_0, параллельной оси Oy. Показать, что при $\mu > \lambda$ траектория частицы определяется уравнениями

$$x = ae^{-\lambda t}\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$y = \frac{v_0}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$, r — расстояние до движущейся точки от точки $(0, 0)$.

272. Материальная точка A с массой m, находившаяся на расстоянии a от оси Ox, получила начальную скорость $\mathbf{v}_0$, параллельную оси Ox. Точка A притягивается осью Ox с силой $\mathbf{F}$, прямо пропорциональной расстоянию от нее; коэффициент пропорциональности равен mk^2. Найти уравнения движения и траекторию точки.

§ 5. Решение интегральных уравнений Вольтерра с ядрами специального вида

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Например, решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

как известно, сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx + y_0.$$

Если искомая функция y входит в уравнение линейно, то интегральное уравнение называется *линейным.*

Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt \tag{1}$$

(a и b — постоянные) называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода.* Здесь $K(x,t)$, $f(x)$ — заданные функции, $y(x)$ — искомая функция. Функцию $K(x,t)$ называют *ядром уравнения* (1).

Уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)\,dt \tag{2}$$

называют *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.*

Если в уравнениях (1) и (2) $f(x) \equiv 0$, то уравнения называются *однородными.*

Если искомая функция $y(x)$ входит только под знак интеграла, то имеем соответственно *уравнения Фредгольма* или *Вольтерра первого рода*

$$\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x) \quad \text{или} \quad \int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x).$$

Уравнения вида

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{3}$$

с ядром $K(x-t)$, зависящим лишь от разности аргументов, представляют собой важный класс уравнений Вольтерра. Они иногда называются уравнениями *типа свертки.*

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра типа свертки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Будем предполагать, что $f(x)$ и $K(x)$ достаточно гладкие функции и имеют конечный порядок роста при $x \geqslant 0$. В этом случае и $\varphi(x)$ при $x \geqslant 0$ имеет конечный порядок роста, а значит, может быть найдено изображение функций f, K и φ (по Лапласу). Пусть $\Phi(p) \risingdotseq \varphi(x)$, $F(p) \risingdotseq f(x)$, $L(p) \risingdotseq K(x)$. Применяя к обеим частям (4) преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертки (см. § 14, IX), будем иметь

$$\Phi(p) = F(p) + L(p)\Phi(p), \tag{5}$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}, \quad L(p) \neq 1. \tag{6}$$

Для $\Phi(p)$ находим оригинал $\varphi(x)$ — решение интегрального уравнения (4).

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos x + \int\limits_0^x (x - t)\varphi(t)\,dt. \tag{7}$$

Решение. Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций, получим на основании правила изображения свертки

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2}\Phi(p), \tag{8}$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 1)}. \tag{9}$$

Находя оригинал для $\Phi(p)$, получим решение интегрального уравнения (7)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x). \quad \triangleright \tag{10}$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

273. $\varphi(x) = \sin x + \int\limits_0^x (x - t)\varphi(t)\,dt.$ **274.** $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x - t)^2\varphi(t)\,dt.$

275. $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x \sin(x - t)\varphi(t)\,dt.$ **276.** $\varphi(x) = \cos x + \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

277. $\varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x \cos(x - t)\varphi(t)\,dt.$

278. $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + \int\limits_0^x (x - t)e^{-(t-x)}\varphi(t)\,dt.$

279. $\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x - t)^2\varphi(t)\,dt.$

280. $\varphi(x) = x + 2\int\limits_0^x [(x - t) - \sin(x - t)]\varphi(t)\,dt.$

281. $\varphi(x) = \sin x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$.

282. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int\limits_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2]\varphi(t)\,dt$.

283. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \sin 2(x-t)\varphi(t)\,dt$. **284.** $\varphi(x) = e^x - 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$.

285. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{6}\int\limits_0^x (x-t)^3\varphi(t)\,dt$. **286.** $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt$.

287. $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt$.

Аналогично решаются интегральные уравнения Вольтерра первого рода с ядром $K(x,t)$, зависящим только от разности $x-t$, т. е. уравнения вида

$$\int\limits_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{11}$$

где $f(x)$ — известная функция, $\varphi(x)$ — искомая функция. При этом мы предполагаем $K(x,x) \neq 0$.

Пусть $F(p) \risingdotseq f(x)$, $L(p) \risingdotseq K(x)$, $\Phi(p) \risingdotseq \varphi(x)$. Применяя к обеим частям (11) преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, будем иметь

$$L(p)\cdot\Phi(p) = F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{L(p)}, \quad L(p) \neq 0.$$

Оригинал для $\Phi(p)$ будет решением $\varphi(x)$ интегрального уравнения (11).

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

288. $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x$. **289.** $\int\limits_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x$.

290. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x.$ **291.** $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

292. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = x + x^2.$ **293.** $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt = x^2 e^x.$

294. $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x.$ **295.** $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt = x.$

Указанный метод решения уравнений (4), (11) приложим также к системам интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{s} \int\limits_0^x K_{ik}(x-t)\varphi_k(t)\,dt \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{12}$$

Применяя к обеим частям (12) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^{s} L_{ik}(p)\Phi_k(p) \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Решая эту систему уравнений, линейную относительно $\Phi_i(p)$, найдем $\Phi_i(p)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (12).

Пример 2. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

Решение. Переходя к изображениям и используя теорему о свертке, получим ($\Phi_1(p) \risingdotseq \varphi_1(x)$, $\Phi_2(p) \risingdotseq \varphi_2(x)$)

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p^2}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2-1}\Phi_1(p) - \dfrac{1}{p-1}\Phi_2(p), \end{cases}$$

откуда

$$\Phi_1(p) = \frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)}, \quad \Phi_2(p) = \frac{p^3-p^2+1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)}.$$

Находим оригиналы для $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$:

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x) - \sin x.$$

Система функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ является решением исходной системы интегральных уравнений. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие системы интегральных уравнений:

296. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

297. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

298. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

299. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

300. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -2 - 4\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 3\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

301. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2 - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt - 4\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

§ 6. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

В ряде технических задач приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями, в которые неизвестная функция входит при различных значениях аргумента, например:

$$\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), x(t-\tau(t))\big), \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), x(t-\tau(t)), \dot{x}(t-\tau(t))\big), \tag{2}$$

$$\ddot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau_1(t)), \dot{x}(t-\tau_2(t))\big). \tag{3}$$

Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями с отклоняющимися аргументами*. Если $\tau_i(t)$ — постоянные, то мы имеем так называемое *дифференциально-разностное уравнение*. Если $\tau_i > 0$ и старшая производная входит в дифференциально-разностное уравнение только при одном значении аргумента, не меньшем всех других аргументов функций и производных, входящих в уравнение, то уравнение называется *дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом*.

Пусть дано дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t-\tau_k) + f(t), \tag{4}$$

где $a_k = \text{const}$, $\tau_k = \text{const} \geqslant 0$ $(0 < t < +\infty)$. Возьмем ради простоты нулевые начальные условия

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{5}$$

При этом мы полагаем

$$x(t) = x'(t) = \ldots = x^{(n-1)}(t) \equiv 0 \quad \text{для} \quad t < 0.$$

Применяя к обеим частям (4) преобразование Лапласа и пользуясь при этом теоремой запаздывания (см. § 14), получим операторное уравнение для $X(p) \risingdotseq x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-\tau_k p} + F(p), \quad \text{где} \quad F(p) \risingdotseq f(t), \tag{6}$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \tag{7}$$

Находя $x(t)$ — оригинал для $X(p)$, определяемого формулой (7), получаем решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям (5).

Пример 1. Решить уравнение

$$x'(t) = x(t-1) + 1, \quad x(0) = 0.$$

<u>Решение</u>. Переходя к изображениям, получим

$$pX(p) = X(p)e^{-p} + \frac{1}{p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2}\frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} = = \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \ldots + \frac{e^{-np}}{p^n} + \ldots\right).$$

Для $x(t)$ получаем

$$x(t) = t\eta(t) + \frac{1}{2!}(t-1)^2\eta(t-1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}(t-n)^{n+1}\eta(t-n) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k). \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следуюшие уравнения:

302. $x''(t) - x(t-1) = t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$

303. $x''(t) - 2x'(t-1) = t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$

304. $x''(t) = 2x'(t-1) - x(t-2) + 1, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$

305. $x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$

Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих процесс с последействием, часто встречаются задачи в следующей постановке:

найти решение уравнения $x(t)$ для $t \geqslant t_0$, причем для всех $t \leqslant t_0$, для которых значения $x(t)$ влияют на последующие значения решения при $t \geqslant t_0$, функция $x(t)$ задается.

Так, например, ставится задача: найти непрерывное решение $x(t)$ при $t \geqslant t_0$ уравнения

$$x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad \tau > 0 = \text{const},$$

если дано, что $x(t) = \varphi(t)$ для $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$.

Здесь $\varphi(t)$ — заданная непрерывная функция, называемая *начальной функцией*. Отрезок $[t_0 - \tau, t_0]$, на котором задается функция $\varphi(t)$, называется *начальным множеством*.

Решение линейного уравнения (4) с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием в случае, когда начальная функция отлична от тождественного нуля, также можно искать, используя преобразование Лапласа. Покажем это на примере.

Пример 2. Решить уравнение

$$x'(t) = x(t-1), \quad \varphi(t) \equiv 1, \quad -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

Решение.

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

Применяя к обеим частям исходного уравнения преобразование Лапласа, найдем

$$pX(p) - 1 = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-1)\,dt.$$

Делая замену переменных $t - 1 = z$, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-1)\,dt = \int_{-1}^{\infty} e^{-p(z+1)} x(z)\,dz =$$

$$= e^{-p} \int_{-1}^{0} e^{-pz} x(z)\,dz + e^{-p} \int_0^{\infty} e^{-pz} x(z)\,dz = e^{-p} \frac{e^{-pz}}{-p}\Bigg|_{z=-1}^{z=0} + e^{-p} X(p),$$

так как $x(z) \equiv 1$ для $-1 \leqslant z \leqslant 0$. Окончательно

$$pX(p) - 1 = \frac{1 - e^{-p}}{p} + e^{-p} X(p).$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{1}{p - e^{-p}} + \frac{1 - e^{-p}}{p(p - e^{-p})} = \frac{1}{p\left(1 - \dfrac{e^{-p}}{p}\right)} + \frac{1 - e^{-p}}{p^2\left(1 - \dfrac{e^{-p}}{p}\right)} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \ldots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \ldots\right) + \frac{(1 - e^{-p})}{p^2}\left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \ldots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^3} + \ldots + \frac{e^{-kp}}{p^{k+2}} + \ldots .$$

Находя оригинал для $X(p)$, получаем решение исходного уравнения

$$x(t) = (1+t)\eta(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(t-k+1)^k}{k!}\eta(t-k+1). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие уравнения:

306. $x'(t) = x(t-1)$, $\quad \varphi(t) = t, \quad -1 \leqslant t \leqslant 0.$

307. $x'(t) = x(t-1) + t$, $\quad \varphi(t) \equiv 1, \quad -1 \leqslant t \leqslant 0.$

308. $x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\quad \varphi(t) = \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 0.$

§ 7. Решение некоторых задач математической физики

Ограничимся случаем, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных x и t. Переменную x будем рассматривать как пространственную координату, переменную t — как время.

Рассмотрим, например, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1}$$

(a^2 — постоянная).

Разберем первую краевую задачу для уравнения (1): найти решение $u(x,t)$ дифференциального уравнения (1) для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t). \tag{3}$$

Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ и $f(x,t)$, рассматриваемые как функции t, являются оригиналами. Обозначим через

$$U(p,x) = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-pt}\,dt \tag{4}$$

изображение функции $u(x,t)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \risingdotseq \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt}\,dt = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{d^2 U}{dx^2}. \tag{5}$$

По правилу дифференцирования оригиналов получаем с учетом начального условия (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} \fallingdotseq pU - \varphi(x). \tag{6}$$

Предположим, что $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются оригиналами и

$$\psi_1(t) \fallingdotseq \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \fallingdotseq \Psi_2(p). \tag{7}$$

Тогда граничные условия (3) дают

$$U\big|_{x=0} = \Psi_1(p), \quad U\big|_{x=l} = \Psi_2(p). \tag{8}$$

Таким образом, операторный метод приводит решение задачи (1), (2), (3) к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x,p) = 0 \tag{9}$$

при граничных условиях (8), где $F(x,p) \fallingdotseq f(x,t)$. Решая задачу (9), (8) и обращая полученное решение, найдем функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи (1), (2), (3). Аналогично решаются и другие краевые задачи для уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{10}$$

телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0 \tag{11}$$

и некоторых других уравнений более общего вида.

Задача. Концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко. Начальное отклонение задано равенством $u(x,0) = A\sin\dfrac{\pi x}{l}$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$. Начальные скорости равны нулю. Найти отклонения $u(x,t)$ при $t > 0$.

<u>*Решение*</u>. Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = A\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

и краевых условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{14}$$

Переходя к изображениям, будем иметь

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2}U = -\frac{pA}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}, \tag{15}$$

$$U\big|_{x=0} = U\big|_{x=l} = 0. \tag{16}$$

Решая уравнение (15), найдем

$$U(x,p) = C_1 e^{px/a} + C_2 e^{-px/a} + \frac{Ap}{p^2 + \dfrac{a^2\pi^2}{l^2}}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Учитывая краевые условия (16), найдем

$$U(x,p) = \frac{Ap}{p^2 + \dfrac{a^2\pi^2}{l^2}}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Оригиналом для $U(x, p)$ является функция

$$u(x, t) = A\cos\frac{\pi a t}{l}\sin\frac{\pi x}{l},$$

которая будет решением поставленной задачи. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие задачи:

309. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x > 0,\ t > 0)$, $u(0,t) = u_0$, $u(x,0) = 0$.

310. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x > 0,\ t > 0)$, $u(0,t) = 0$, $u(x,0) = u_1$.

311. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x > 0,\ t > 0)$, $u(0,t) = a\cos\omega t$, $u(x,0) = 0$.

312. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x > 0,\ t > 0)$, $u(0,t) = a\sin\omega t$, $u(x,0) = 0$.

313. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x > 0,\ t > 0)$, $u(0,t) = \varphi(t)$, $u(x,0) = 0$.

314. Найти распределение температур в стержне $0 \leqslant x \leqslant l$ при условии, что поток тепла не проходит через границу $x = 0$; другая граница $x = l$ сохраняет постоянную температуру u_1; начальная температура стержня равна $u_0 = \text{const}$.

315. Найти распределение температур в полуограниченном стержне, если на левом конце стержня происходит теплоизлучение в среду с нулевой температурой. Начальная температура стержня $u_0 = \text{const}$.

316. Стержень длины l находится в состоянии покоя, его конец $x = 0$ закреплен. В момент времени $t = 0$ к свободному концу стержня приложена сила F (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти колебание стержня.

317. Стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени $t = 0$ стержень освобождается, оставаясь закрепленным в верхней точке. Найти закон колебания стержня.

318. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x - l)$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

319. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x = l/2$. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

§ 8. Дискретное преобразование Лапласа

Пусть имеем комплекснозначную функцию $f(t)$ действительного аргумента t, определенную для $t \geqslant 0$.

Рассмотрим последовательность $\{f(n)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, которую коротко будем обозначать просто $f(n)$ и называть *решетчатой функцией*. Функция $f(t)$ называется *порождающей функцией* для $f(n)$. Таким образом, аргумент решетчатой функции принимает только целые значения, причем для отрицательных значений аргумента решетчатая функция равна нулю.

Дискретным преобразованием Лапласа решетчатой функции $f(n)$ будем называть функцию $F^*(p)$ комплексного аргумента $p = s + i\sigma$, определяемую равенством

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} f(n); \tag{1}$$

предполагается, что ряд справа сходится.

Функцию $f(n)$ будем называть оригиналом, а $F^*(p)$ — ее изображением и писать

$$F^*(p) \risingdotseq f(n) \quad \text{или} \quad f(n) \risingdotseq F^*(p).$$

Значение $\operatorname{Re} p = s^*$, для которого при $\operatorname{Re} p = s > s^*$ ряд (1) сходится, а при $s < s^*$ расходится, называется *абсциссой сходимости*. Функция $F^*(p)$ есть периодическая функция с периодом $2\pi i$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s^*$.

Если решетчатая функция $f(n)$ удовлетворяет условию

$$|f(n)| \leqslant M e^{\lambda_0 n}, \tag{2}$$

то абсцисса сходимости $s^* > \lambda_0$, и, следовательно, изображение такой функции существует. Вообще, всякая функция $f(t)$, являющаяся оригиналом для обычного преобразования Лапласа, порождает решетчатую функцию $f(n)$, для которой определено дискретное преобразование Лапласа $F^*(p)$.

Пример 1. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(n) = e^{-n}.$$

Решение. Очевидно, эта функция удовлетворяет условию (2) с $\lambda_0 = 1$ и произвольным $M > 1$. Значит, ее изображение существует. По формуле (1) находим

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+p)n} = \frac{1}{1 - e^{-(1+p)}} \quad (\operatorname{Re} p > -1). \quad \triangleright \quad (3)$$

Отметим, что решетчатая функция $f(n) = e^{n^2}$ изображения не имеет, так как для нее абсцисса сходимости s^* равна бесконечности.

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

320. $f(n) = \eta(n)$, где $\eta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n > 0, \\ 0 & \text{при} \quad n < 0. \end{cases}$

321. $f(n) = n$. **322.** $f(n) = e^{an}$. **323.** $f(n) = a^n \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

Основные свойства дискретного преобразования Лапласа

I. Свойство линейности. *Для любых комплексных постоянных α и β*

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \risingdotseq \alpha F^*(p) + \beta G^*(p).$$

(Здесь и всюду в дальнейшем $f(n) \risingdotseq F^*(p)$, $g(n) \risingdotseq G^*(p)$.)

Пример 2. Найти изображение функции $f(n) = \sin n$.

Решение. По формулам Эйлера

$$\sin n = \frac{e^{in} - e^{-in}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{in} - \frac{1}{2i} e^{-in}.$$

Имеем

$$e^{in} \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} e^{in} = \frac{1}{1 - e^{-(p-i)}},$$

$$e^{-in} \risingdotseq \frac{1}{1 - e^{-(p+i)}}.$$

По свойству линейности

$$\sin n \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-e^{-(p-i)}} - \frac{1}{1-e^{-(p+i)}}\right) = \frac{e^p \sin 1}{e^{2p} - 2e^p \cos 1 + 1}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

324. $f(n) = \cos n$. **325.** $f(n) = \sin \alpha n$ ($\alpha = \text{const}$).

326. $f(p) = \operatorname{sh} n$. **327.** $f(n) = e^n - 2e^{n/2}$.

328. $f(n) = \cos^2 n$.

II. Теоремы опережения и запаздывания. *Пусть* $f(n) \risingdotseq F^*(p)$ *и пусть* k *— целое положительное число. Тогда*

$$f(n+k) \risingdotseq e^{kp}\left[F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mp} f(m)\right]. \tag{4}$$

В частности, если $f(0) = f(1) = \ldots = f(k-1) = 0$, то

$$f(n+k) \risingdotseq e^{kp} F^*(p). \tag{5}$$

Аналогично,

$$f(n-k) \risingdotseq e^{-kp} F^*(p) \quad (f(n-k) \equiv 0 \quad \text{для} \quad n < k). \tag{6}$$

Пример 3. Найти изображение функции $f(n) = e^{n-2}$ ($f(n) \equiv 0$ при $n < 2$).

<u>*Решение*</u>. Имеем

$$e^n \risingdotseq \frac{1}{1-e^{1-p}} = \frac{e^p}{e^p - e}.$$

По теореме запаздывания из (6) находим

$$e^{n-2} \risingdotseq e^{-2p}\frac{e^p}{e^p - e} = \frac{1}{e^p(e^p - e)}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

329. $f(n) = \eta(n-k)$. **330.** $f(n) = e^{\alpha(n+3)}$.

331. $f(n) = \operatorname{sh} 2(n-1) \cdot \eta(n-1)$. **332.** $f(n) = (n+2)^2$.

III. Теорема смещения. *Если $F^*(p) \risingdotseq f(n)$, то для любого комплексного p_0*

$$F^*(p-p_0) \risingdotseq e^{p_0 n} f(n). \tag{7}$$

Пример 4. Найти изображение функции $f(n) = ne^{2n}$.

Решение. Имеем

$$n \risingdotseq \frac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^2}.$$

По теореме смещения получаем ($p_0 = 2$)

$$e^{2n} n \risingdotseq \frac{e^{-(p-2)}}{[1-e^{-(p-2)}]^2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

333. $f(n) = e^{-n} \sin 2n$. **334.** $f(n) = n^2 e^{2n}$. **335.** $f(n) = e^{3n} \operatorname{ch} n$.

IV. Дифференцирование изображения. *Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $-n$:*

$$\frac{d}{dp}\{F^*(p)\} \risingdotseq -nf(n), \tag{8}$$

вообще,

$$\frac{d^k}{dp^k}\{F^*(p)\} \risingdotseq (-1)^k n^k f(n). \tag{9}$$

Пример 5. Найти изображение функции $f(n) = ne^n$.

Решение. Имеем

$$e^n \risingdotseq \frac{e^p}{e^p - e}.$$

По теореме о дифференцировании изображения получим

$$ne^n \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{e^p}{e^p-e}\right) = \frac{e^{p+1}}{(e^p-e)^2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

336. $f(n) = n^2 e^n$. **337.** $f(n) = n^2$. **338.** $f(n) = n \sin n\frac{\pi}{2}$.

V. Теорема об интегрировании изображения. *Пусть решетчатая функция $f(n)$ удовлетворяет условиям*

$$f(0) = 0, \qquad \left.\frac{f(t)}{t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to+0} \frac{f(t)}{t} = 0. \tag{10}$$

Тогда

$$\frac{f(n)}{n} \risingdotseq \int_p^\infty F^*(p)\,dp, \tag{11}$$

т. е. деление оригинала на n соответствует интегрированию изображения в пределах от p до ∞.

Замечания. а) При $f(0) \neq 0$ интеграл в правой части (11) будет расходящимся и, значит, теорема об интегрировании изображения не будет справедлива.

б) Если

$$\left.\frac{f(t)}{t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to+0} \frac{f(t)}{t} = a \neq 0,$$

то

$$\frac{f(n)}{n} \risingdotseq a + \int_p^\infty F^*(p)\,dp. \tag{12}$$

в) Если для $m = 1, 2, \ldots, k$ выполнены условия

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(t)}{t^m} = 0,$$

то

$$\frac{f(n)}{n^k} \risingdotseq \underbrace{\int_p^\infty \ldots \int_p^\infty}_{k} F^*(p)\,dp \ldots dp, \tag{13}$$

т. е. деление оригинала на n^k соответствует k-кратному интегрированию изображения от p до ∞.

Пример 6. Найти изображение решетчатой функции $\dfrac{e^n - 1 - n}{n}$.

Решение. Пусть $f(n) = e^n - 1 - n$.
Проверяем выполнимость условий (10). Имеем

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{e^t - 1 - t}{t} = \lim_{t\to+0} \left(\frac{e^t - 1}{t} - 1\right) = 1 - 1 = 0.$$

Находим изображение функции

$$e^n - 1 - n \risingdotseq \frac{e^p}{e^p - e} - \frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{e^p}{(e^p - 1)^2}.$$

Так как условия (10) выполнены, то

$$\frac{e^n-1-n}{n} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \left(\frac{e^p}{e^p-e}-\frac{e^p}{e^p-1}-\frac{e^p}{(e^p-1)^2}\right)dp =$$

$$=\left(\ln(e^p-e)-\ln(e^p-1)+\frac{1}{e^p+1}\right)\Bigg|_p^\infty =$$

$$=\left(\ln\frac{e^p-e}{e^p-1}+\frac{1}{e^p-1}\right)\Bigg|_p^\infty = \ln\frac{e^p-1}{e^p-e}-\frac{1}{e^p-1}. \qquad \triangleright$$

Пример 7. Найти изображение решетчатой функции $\dfrac{\operatorname{sh}\alpha n}{n}$ $(\alpha \neq 0)$.

Решение. Пусть $f(n)=\operatorname{sh}\alpha n$. Имеем

$$f(0)=0, \qquad \frac{f(t)}{t}\bigg|_{t=0}=\lim_{t\to+0}\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{t}=\alpha\neq 0.$$

Изображение функции $f(n)$

$$\operatorname{sh}\alpha n \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{e^p}{e^p-e^\alpha}-\frac{e^p}{e^p-e^{-\alpha}}\right).$$

Изображение данной функции найдем, используя соотношение (12):

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha n}{n} \risingdotseq \alpha+\frac{1}{2}\int\limits_p^\infty\left(\frac{e^p}{e^p-e^\alpha}-\frac{e^p}{e^p-e^{-\alpha}}\right)dp =$$

$$=\alpha+\frac{1}{2}\Big[\ln(e^p-e^\alpha)-\ln(e^p-e^{-\alpha})\Big]\Bigg|_p^\infty =$$

$$=\alpha+\frac{1}{2}\ln\frac{e^p-e^\alpha}{e^p-e^{-\alpha}}\Bigg|_p^\infty=\alpha+\frac{1}{2}\ln\frac{e^p-e^{-\alpha}}{e^p-e^\alpha}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

339. $\dfrac{a^n-1}{n}$ $(a>0,\ a\neq 1)$. **340.** $\dfrac{\sin\alpha n}{n}$ $(\alpha\neq 0)$.

341. $\dfrac{1-\cos\alpha n}{n}$. **342.** $\dfrac{n-\operatorname{sh} n}{n}$.

VI. Дифференцирование по параметру. *Пусть оригинал и изображение содержат параметр ε, не зависящий от n и p, и пусть*

$$F^*(p,\varepsilon)\risingdotseq f(n,\varepsilon).$$

Тогда

$$\frac{\partial F^*(p,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \risingdotseq \frac{\partial f(n,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \tag{14}$$

т. е. производная по ε от изображения есть изображение производной по ε от оригинала. Предполагаем, что все эти производные существуют и $\dfrac{\partial f(n,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$ есть оригинал.

Пример 8. Найти изображение $ne^{\alpha n}$ (α — вещественное).

<u>Решение</u>. Имеем $e^{\alpha n} \risingdotseq \dfrac{e^p}{e^p - e^\alpha}$. Примем α в качестве параметра. На основе теоремы о дифференцировании по параметру

$$\left(\frac{e^p}{e^p - e^\alpha}\right)'_\alpha \risingdotseq (e^{\alpha n})'_\alpha = ne^{\alpha n}.$$

Отсюда

$$ne^{\alpha n} \risingdotseq \frac{e^p e^\alpha}{(e^p - e^\alpha)^2}.$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

343. $f(n) = n\cos\alpha n$. **344.** $f(n) = n^2 \operatorname{sh}\alpha n$. **345.** $f(n) = (n+2)\operatorname{ch}\alpha n$.

VII. Интегрирование по параметру. *Если $f(n,\varepsilon) \risingdotseq F^*(p,\varepsilon)$, где параметр ε не зависит от n и p $(\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \lambda)$, то*

$$\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} f(n,\varepsilon)\,d\varepsilon \risingdotseq \int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F^*(p,\varepsilon)\,d\varepsilon, \tag{15}$$

т. е. интегрирование по параметру ε оригинала соответствует интегрированию изображения по параметру ε.

Пример 9. С помощью интегрирования по параметру найти изображение решетчатой функции $\dfrac{1-\cos\varepsilon n}{n}$.

<u>Решение</u>. Имеем

$$\sin\varepsilon n \risingdotseq \frac{e^p \sin\varepsilon}{e^{2p} - 2e^p\cos\varepsilon + 1}.$$

Интегрируем левую и правую части этого соотношения по параметру ε в пределах от $\varepsilon_0 = 0$ до ε:

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \sin\varepsilon n\,d\varepsilon \risingdotseq \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{e^p\sin\varepsilon\,d\varepsilon}{e^{2p} - 2e^p\cos\varepsilon + 1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1-\cos\varepsilon n}{n} \risingdotseq \frac{1}{2}\ln\left(e^{2p}-2e^{p}\cos\varepsilon+1\right)\Big|_0^{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{2p}-2e^{p}\cos\varepsilon+1\right)-\ln\left(e^{2p}-2e^{p}+1\right)\right].$$

Итак,

$$\frac{1-\cos\varepsilon n}{n} \risingdotseq \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2p}-2e^{p}\cos\varepsilon+1}{(e^{p}-1)^2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Применяя интегрирование по параметру, найти изображения следующих функций:

346. $\dfrac{e^{\varepsilon n}-e^{\varepsilon_0 n}}{n}$. **347.** $\dfrac{\operatorname{ch}\varepsilon n-\operatorname{ch} n}{n}$.

348. $\dfrac{\sin\varepsilon n}{n}$. **349.** $\dfrac{\sin(\varepsilon-1)n\cdot\cos(\varepsilon+1)n}{n}$.

Теорема умножения изображений. *Пусть*

$$f_1(n) \risingdotseq F_1^*(p), \qquad f_2(n) \risingdotseq F_2^*(p).$$

Тогда

$$F_1^*\cdot F_2^* \risingdotseq \sum_{m=0}^{n} f_1(n-m)f_2(m) = \sum_{m=0}^{n} f_1(m)f_2(n-m). \tag{16}$$

Пример 10. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^p-e)(e^p-e^{-1})}.$$

Решение. Изображение $F^*(p)$ можно представить в виде произведения двух изображений

$$F_1^*(p) = \frac{e^p}{e^p-e} \risingdotseq e^n, \qquad F_2^*(p) = \frac{e^p}{e^p-e^{-1}} \risingdotseq e^{-n}.$$

По теореме умножения

$$F^*(p) \risingdotseq \sum_{m=0}^{n} e^{-m}e^{n-m} = e^n\sum_{m=0}^{n} e^{-2m} = \frac{e^n\cdot e^2}{e^2-1}-\frac{e^{-n}}{e^2-1}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь теоремой умножения, найти оригиналы для следующих изображений:

350. $F^*(p) = \dfrac{e^p}{(e^p-1)(e^p-e)}$. **351.** $F^*(p) = \dfrac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^2}\cdot\dfrac{e^p}{e^p-1}$.

352. $F^*(p) = \dfrac{e^p}{(e^p-1)^2(e^p-e)}$. **353.** $F^*(p) = \dfrac{e^{2p}}{(e^p-e^2)(e^p-1)}$.

Изображение разностей

Разностью первого порядка решетчатой функции $f(n)$ называется величина, обозначаемая символом $\Delta f(n)$ и определяемая равенством

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n). \tag{17}$$

Разностью второго порядка $\Delta^2 f(n)$ называется величина, равная

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) \tag{18}$$

или, учитывая (17),

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n). \tag{19}$$

Вообще, разность k-го порядка $\Delta^k f(n)$ определяется соотношением

$$\Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n), \tag{20}$$

или

$$\Delta^k f(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f(n+k-j), \tag{21}$$

где $C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Пример 11. Найти разности для функции $f(n) = 2n^2$.

<u>*Решение.*</u> По определению первая разность

$$\Delta f(n) = 2(n+1)^2 - 2n^2 = 2(2n+1).$$

Вторая разность

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = 2[2(n+1)+1] - 2(2n+1) = 4.$$

Очевидно, все разности более высокого порядка равны нулю (сравните с производными функции $f(t) = 2t^2$). ▷

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах найти разности k-го порядка:

354. $f(n) = 3n+2$. **355.** $f(n) = e^{2n}$. **356.** $f(n) = n^2 - n$.

Пусть $f(n) \risingdotseq F^*(p)$. Тогда

$$\Delta f(n) \risingdotseq (e^p - 1)F^*(p) - e^p f(0),$$

$$\Delta^2 f(n) \risingdotseq (e^p - 1)^2 F^*(p) - e^p(e^p - 1)f(0) - e^p \Delta f(0)$$

и т. д.

Вообще,

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (e^p - 1)^k F^*(p) - e^p \sum_{\nu=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-\nu-1} \Delta^\nu f(0), \tag{22}$$

где положено $\Delta^0 f(0) = f(0)$. Из соотношения (22) находим

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\Delta^\nu f(0)}{(e^p - 1)^\nu} + \frac{1}{(e^p - 1)^k} L_D\{\Delta^k f(n)\}, \tag{23}$$

где $L_D\{\Delta^k f(n)\}$ — изображение $\Delta^k f(n)$ в смысле дискретного преобразования Лапласа.

Если, в частности, $\Delta^\nu f(0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k - 1)$ или, что эквивалентно, $f(0) = f(1) = \ldots = f(k - 1) = 0$, то формула (22) приобретает особенно простой вид

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (e^p - 1)^k F^*(p),$$

т. е. операции взятия разности k-го порядка от оригинала отвечает умножение изображения на $(e^p - 1)^k$.

Пример 12. Найти изображение функции $f(n) = n^2$.

<u>*Решение*</u>. Имеем

$$\Delta f(n) = 2n + 1,$$

$$\Delta^2 f(n) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2,$$

$$\Delta^k f(n) = 0 \quad (k > 2).$$

Далее $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = 1$, $\Delta^2 f(0) = 2$. Полагая в равенстве (23) $k = 3$, будем иметь

$$f(n) \risingdotseq F^*(p) =$$

$$= \frac{e^p}{e^p - 1} \sum_{\nu=0}^{2} \frac{\Delta^\nu f(0)}{(e^p - 1)^\nu} = \frac{e^p}{e^p - 1}\left(0 + \frac{1}{e^p - 1} + \frac{2}{(e^p - 1)^2}\right) = \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения функций:

357. $f(n) = n^3$. **358.** $f(n) = \dfrac{n(n-1)}{2!}$. **359.** $f(n) = (n-k)^2\eta(n-k)$.

Изображение суммы

Пусть $f(n)$ — решетчатая функция, имеющая изображение

$$f(n) \risingdotseq F^*(p).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m).$$

Тогда

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m) \risingdotseq \frac{F^*(p)}{e^p - 1},$$

т. е. суммированию оригиналов отвечает деление изображения на $e^p - 1$.

Вообще, k-кратное суммирование оригинала соответствует делению изображения на $(e^p - 1)^k$.

Пример 13. Пользуясь теоремой об изображении суммы, найти сумму

$$\sum_{m=0}^{n-1} me^m.$$

<u>*Решение*</u>. Изображение ne^n равно $\dfrac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2}$. Поэтому согласно теореме об изображении суммы

$$\sum_{m=0}^{n-1} me^m \risingdotseq \frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2(e^p - 1)} = \frac{e}{(e-1)^2}\left[\frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{e^p}{e^p - e} + \frac{e-1}{e}\cdot\frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2}\right] \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{e}{(e-1)^2}\left[1 - e^n + \frac{(e-1)ne^n}{e}\right].$$

Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{n-1} me^m = \frac{e(1 - e^n) + (e-1)ne^n}{(e-1)^2}.$$

▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти следующие суммы:

360. $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m^2$. **361.** $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m\cos m\alpha$.

362. $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m(m-1)$. **363.** $\sum\limits_{m=0}^{n-1} e^m \cos m\alpha \quad (n \geqslant 2)$.

Формула обращения

Пусть решетчатая функция $f(n)$ имеет своим изображением функцию $F^*(p)$ комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$, где $F^*(p)$ в силу своей периодичности $(F^*(p+2\pi i) = F^*(p))$ рассматривается в основной полосе $-\pi < \operatorname{Im} p \leqslant \pi$.

Если известно изображение $F^*(p)$, то оригинал $f(n)$ можно найти по формуле обращения

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(p) e^{np}\, dp, \tag{24}$$

где c — любое действительное число, большее, чем абсцисса сходимости s^*.

В случае, когда $F^*(p)$ есть правильная рациональная дробь относительно e^p, имеем

$$f(n) = \sum_{\nu} \operatorname*{res}_{p_\nu} \left[F^*(p) e^{(n-1)p}\right], \tag{25}$$

где сумма берется по всем полюсам функции $F^*(p)$, расположенным в полосе $-\pi < \operatorname{Im} p \leqslant \pi$, включая ее границу $\operatorname{Im} p = \pi$. Если p_ν — простой полюс, то

$$\operatorname*{res}_{p_\nu} \left[F^*(p) e^{p(n-1)}\right] = \lim_{p \to p_\nu} \left[F^*(p)\left(e^p - e^{p_\nu}\right) e^{p(n-1)}\right]; \tag{26}$$

если же p_ν — полюс порядка r_ν, то

$$\operatorname*{res}_{p_\nu} \left[F^*(p) e^{p(n-1)}\right] = \frac{1}{(r_\nu - 1)!} \lim_{p \to p_\nu} \frac{d^{r_\nu - 1}}{de^{p(r_\nu - 1)}} \left[F^*(p)\left(e^p - e^{p_\nu}\right)^{r_\nu} e^{p(n-1)}\right]. \tag{27}$$

Пример 14. Используя формулу (25), найти оригинал, соответствующий изображению

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 3e^p + 2}.$$

Решение. Находим нули знаменателя. Имеем $e^{2p} - 3e^p + 2 = 0$, откуда $e^p = 1$ и $e^p = 2$. Значит, $p_1 = 0$, $p_2 = \ln 2$ — простые нули знаменателя, а следовательно, они являются простыми полюсами функции $F^*(p)$ в основной полосе. Находим вычеты функции $F^*(p)e^{p(n-1)}$ относительно этих полюсов. Имеем

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left[F^*(p)e^{p(n-1)}\right] = \lim_{p\to0}\frac{e^p(e^p-1)}{(e^p-1)(e^p-2)}e^{p(n-1)} = \lim_{p\to0}\frac{e^{pn}}{e^p-2} = -1;$$

$$\operatorname*{res}_{p=\ln 2}\left[F^*(p)e^{p(n-1)}\right] = \lim_{p\to\ln 2}\frac{e^p(e^p-e^{\ln 2})e^{p(n-1)}}{(e^p-1)(e^p-2)} = \lim_{p\to\ln 2}\frac{e^{pn}}{e^p-1} = \frac{e^{n\ln 2}}{e^{\ln 2}-1} = \frac{e^{\ln 2^n}}{2-1} = 2^n.$$

Следовательно, по формуле (25) получаем

$$f(n) = -1 + 2^n. \qquad \triangleright$$

Пример 15. С помощью формулы обращения найти оригинал для функции

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p}-1}.$$

Решение. Функция

$$F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p-1)(e^p+1)}$$

имеет два простых полюса в следующих точках: $p_1 = 0$, $p_2 = i\pi$ основной полосы $-\pi < \operatorname{Im} p \leqslant \pi$. Находим

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left[F^*(p)e^{p(n-1)}\right] = \lim_{p\to0}\frac{e^p(e^p-1)e^{p(n-1)}}{(e^p-1)(e^p+1)} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{p=i\pi}\left[F^*(p)e^{p(n-1)}\right] = \lim_{p\to i\pi}\frac{e^p(e^p-e^{i\pi})e^{p(n-1)}}{(e^p-1)(e^p+1)} = \lim_{p\to i\pi}\frac{e^{pn}}{e^p-1} = \frac{e^{i\pi n}}{e^{i\pi}-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}.$$

Согласно формуле (25)

$$f(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{n-1}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти оригиналы для следующих изображений:

364. $F^*(p) = \dfrac{e^p}{(e^p-3)^2}$. **365.** $F^*(p) = \dfrac{e^p}{e^{2p}-7e^p+10}$.

366. $F^*(p) = \dfrac{e^p}{e^{2p}+1}$. **367.** $F^*(p) = \dfrac{e^{2p}}{e^{4p}-1}$.

368. $F^*(p) = \dfrac{e^p}{e^{2p}+2ae^p+2a^2}$ $(a > 0)$. **369.** $F^*(p) = \dfrac{e^p}{(e^p-e)^3}$.

Решение разностных уравнений с помощью дискретного преобразования Лапласа

Уравнение вида

$$F\big(n, f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k)\big) = 0 \tag{28}$$

или

$$F\big(n, f(n), \Delta f(n), \ldots, \Delta^k f(n)\big) = 0, \tag{29}$$

где $f(n)$ — искомая решетчатая функция, называется *разностным уравнением k-го порядка.*

Уравнение вида (28) сводится к уравнению вида (29) при помощи формулы

$$f(n+k) = f(n) + C_k^1 \Delta f(n) + C_k^2 \Delta^2 f(n) + \ldots + \Delta^k f(n), \tag{30}$$

а при помощи формулы

$$\Delta^k f(n) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \ldots + (-1)^k f(n) \tag{31}$$
$$(k=0,1,2,\ldots),$$

где $C_k^m = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{m!}$ — биномиальные коэффициенты, уравнение (29) сводится к уравнению (28).

Если уравнение (29) линейно относительно $f(n)$ и ее разностей, то оно называется *линейным разностным уравнением.* Линейное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами имеет вид

$$b_0 \Delta^k f(n) + b_1 \Delta^{k-1} f(n) + \ldots + b_k f(n) = \varphi(n), \tag{32}$$

где $\varphi(n)$ — заданная решетчатая функция, $f(n)$ — искомая решетчатая функция, $b_0, b_1, \ldots, b_k$ — постоянные, причем $b_0 \neq 0$, $b_k \neq 0$.

Заменяя в уравнении (32) разности $\Delta^m f(n)$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$ по формуле (31), получим другую форму разностного линейного уравнения:

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = \varphi(n). \tag{33}$$

Если $\varphi(n) \equiv 0$, то уравнения (32) и (33) называются *однородными,* если же $\varphi(n) \not\equiv 0$, то эти уравнения называются *неоднородными.*

Разностное уравнение, содержащее $f(n)$ и $f(n+k)$, называется разностным уравнением k-го порядка $(k > 0)$. Таким образом, уравнение (33) при $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ есть неоднородное линейное разностное уравнение k-го порядка.

Порядок разностного уравнения может не совпадать с порядком наивысшей разности, входящей в него, если разностное уравнение записано в виде (32).

Пример 16. Разностное уравнение

$$\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = 0$$

после замены в нём разностей по формуле (31) приводится к виду

$$f(n+3) + f(n+2) = 0$$

или

$$f(n+1) + f(n) = 0,$$

т. е. является разностным уравнением первого порядка.

Задачи для самостоятельного решения

Определить порядки следующих разностных уравнений

370. $\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - f(n) = 0.$

371. $\Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) + 3\Delta f(n) + f(n) = n^3 + 1.$

372. $\Delta^3 f(n) + 2\Delta^2 f(n) + \Delta f(n) = 2^n.$

373. $\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = \sin\dfrac{n\pi}{6}.$

Начальные условия для разностного уравнения k-го порядка задаются в виде значений решетчатой функции $f(n)$ и ее разностей до $(k-1)$-го порядка включительно при $n = 0$, если уравнение имеет форму (32), или в виде значений решетчатой функции $f(n)$ при $n = 0, 1, \ldots, k-1$, если уравнение имеет форму (33).

Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами методом дискретного преобразования Лапласа производится по той же схеме, что и в случае классического преобразования Лапласа. Применяя дискретное преобразование Лапласа к таким уравнениям и используя теоремы линейности, опережения или изображения разностей, мы приходим к простому линейному алгебраическому уравнению относительно изображения $F^*(p)$ искомой функции $f(n)$ (уже с учетом начальных условий). Разрешая это алгебраическое уравнение относительно $F^*(p)$, получим операторное решение разностного уравнения, оригинал для которого будет искомым решением исходного разностного уравнения, удовлетворяющим поставленным начальным условиям.

Пример 17. Найти решение уравнения

$$f(n+1) - ef(n) = 1, \quad f(0) = 0. \tag{34}$$

Решение. Пусть $f(n) \risingdotseq F^*(p)$. По теореме опережения

$$f(n+1) \risingdotseq e^p F^*(p).$$

Применяя к обеим частям (34) дискретное преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$e^p F^*(p) - eF^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 1},$$

откуда

$$F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - e)(e^p - 1)}.$$

Функция $F^*(p)$ имеет два простых полюса $p = 0$, $p = 1$:

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left[F^*(p)e^{(n-1)p}\right] = \lim_{p\to 0}\frac{e^p}{e^p - e}e^{(n-1)p} = \frac{1}{1-e},$$

$$\operatorname*{res}_{p=1}\left[F^*(p)e^{(n-1)p}\right] = \frac{e}{e-1}e^{n-1} = \frac{e^n}{e-1}.$$

Следовательно, по формуле (25)

$$f(n) = \frac{e^n - 1}{e - 1}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие линейные однородные разностные уравнения:

374. $f(n+1) - 2f(n) = 0$, $f(0) = 1$.

375. $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

376. $f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

377. $f(n+3) - 3f(n+2) + 4f(n+1) - 2f(n) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$.

378. $f(n+4) + f(n) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$.

379. $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$.

Решить следующие линейные неоднородные разностные уравнения:

380. $f(n+1) + 2f(n) = n$, $f(0) = 0$.

381. $f(n+2) - 4f(n) = 4^n$, $f(0) = f(1) = 1$.

382. $f(n+2) + f(n) = 1 - (-1)^n$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

383. $f(n+2) - 6f(n+1) + 9f(n) = n \cdot 3^n$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.

384. $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = \cos n\pi$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$.

385. $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = n^2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$.

§ 9. Преобразование Фурье

Допустим, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси Ox, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

и дифференцируема на любом конечном отрезке этой оси.

Определение. Функция

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\,dx \tag{1}$$

называется преобразованием Фурье (Фурье-образом) функции $f(x)$. Здесь ξ — действительная переменная.

В свою очередь, функция $f(x)$ может быть определена из формулы

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi, \tag{2}$$

называемой *обратным преобразованием Фурье*.

Множитель $\dfrac{1}{2\pi}$ можно поставить перед интегралом (2) вместо (1). Его положение произвольно. В дальнейшем будем использовать также симметричную форму преобразования Фурье:

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\,dx, \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi. \tag{4}$$

Если преобразование Фурье функции $f(x)$ задается формулой

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x}\,dx, \tag{3'}$$

то в этом случае обратное преобразование имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\xi x}\,d\xi. \tag{4'}$$

Пример 1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-x^2/\sigma^2} \quad (\sigma > 0 \text{ — константа}).$$

Решение. Функция $f(x)$ определена, непрерывно дифференцируема и положительна на всей числовой оси; интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/\sigma^2}\,dx$ сходится и равен $\sigma\sqrt{\pi}$.

По формуле (3)

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/\sigma^2} e^{-i\xi x}\,dx. \tag{5}$$

Равенство (5) допускает дифференцирование по ξ под знаком интеграла:

$$F'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/\sigma^2} e^{-i\xi x}(-ix)\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$F'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\sigma^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\, d\left(e^{-x^2/\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{i\sigma^2}{2} \left[e^{-i\xi x} e^{-x^2/\sigma^2}\right]\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{i\sigma^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/\sigma^2} e^{-i\xi x}(-i\xi)\,dx \right\}.$$

Слагаемое вне интеграла обращается в нуль, так что

$$F'(\xi) = -\frac{\sigma^2}{2}\xi F(\xi),$$

откуда

$$F(\xi) = Ce^{-\sigma^2\xi^2/4}, \tag{6}$$

где C — постоянная интегрирования.

Подставив в (6) $\xi = 0$, получим $C = F(0)$. В силу (5)

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/\sigma^2}\,dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, функция $F(\xi) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\sigma^2\xi^2/4}$ — Фурье-образ функции $f(x) = e^{-x^2/\sigma^2}$. ▷

Замечание. Условие абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ является весьма жестким. Оно исключает, например, функции типа $f(x) = C = \text{const}$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$, для которых преобразование Фурье (в рассматриваемой классической форме) не существует. Фурье-образ имеют только те функции, которые достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$.

Свойства преобразования Фурье

I. Линейность. *Если $F(\xi)$ и $G(\xi)$ — Фурье-образы функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то при любых постоянных α и β образом Фурье функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$ будет функция $\alpha F(\xi) + \beta G(\xi)$.*

Таким образом, преобразование Фурье есть линейный оператор. Обозначая его через $\mathscr{F}$, можно записать

$$f(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(\xi) \quad \text{или} \quad \mathscr{F}[f] = F(\xi).$$

II. *Если $F(\xi)$ есть Фурье-образ абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции $f(x)$, то $F(\xi)$ ограничена при всех $\xi \in (-\infty, +\infty)$:*

$$|F(\xi)| \leqslant M \quad \forall\, \xi, \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

III. *Дифференцированию функции $f(x)$ отвечает умножение ее образа $\mathscr{F}[f]$ на множитель $i\xi$:*

$$\mathscr{F}[f'] = i\xi\mathscr{F}[f].$$

В общем случае имеет место равенство

$$\mathscr{F}\left[f^{(k)}(x)\right] = (i\xi)^k \mathscr{F}[f] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

при условии, что $f(x)$ и $f^{(k)}(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси и стремятся к нулю при $|x| \to \infty$.

Таким образом, преобразование Фурье заменяет операцию дифференцирования операцией умножения на величину $i\xi$ и тем самым упрощает задачу интегрирования некоторых типов дифференциальных уравнений.

IV. Пусть $\mathscr{F}[f] = F(\xi)$. Тогда

$$i\frac{d}{d\xi}F(\xi) = \mathscr{F}[x \cdot f(x)],$$

т. е. *преобразование Фурье заменяет операцию умножения $f(x)$ на аргумент x операцией $i\dfrac{d}{d\xi}$.*

В общем случае имеет место формула

$$i^k \frac{d^k}{d\xi^k}\mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[x^k \cdot f(x)] \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

V. Преобразование Фурье свертки функций. *Сверткой* $f_1 * f_2$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называется функция

$$(f_1 * f_2)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x - \tau)\, d\tau.$$

Пусть $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ — Фурье-образы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}[f_1]\cdot\mathscr{F}[f_2],$$

т. е. образ Фурье свертки функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равен произведению образов Фурье свертываемых функций, домноженному на $\sqrt{2\pi}$.

Задачи для самостоятельного решения

386. Найти преобразование Фурье следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{-|x|}$; в) $f(x) = xe^{-|x|}$;

г) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ $(a > 0)$.

387. Доказать, что если $\mathscr{F}[f(x)] = F(\xi)$, то $\mathscr{F}[f(ax)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\xi}{a}\right)$, $a > 0$ — постоянная.

388. Доказать, что если $\mathscr{F}[f(x)] = F(\xi)$, то $\mathscr{F}[f(x-a)] = e^{-ia\xi}F(\xi)$, $a = \text{const}$.

389. Найти свертку функций $f_1(x) = e^{-x^2/2}$ и $f_2(x) = x$.

Приложения преобразования Фурье

Преобразование Фурье используется для нахождения решения $u(x,t)$ задачи с начальными условиями (задача Коши) на прямой $-\infty < x < +\infty$ для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Применяя преобразование Фурье к дифференциальному уравнению, сводим задачу к алгебраическому уравнению относительно Фурье-образа $v(\xi,t)$ искомой функции. Решив это алгебраическое уравнение, а затем применяя обратное преобразование Фурье, получаем решение $u(x,t)$ исходной задачи.

I. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}).$$

Задача Коши ставится так: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{7}$$

и начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{8}$$

Физический смысл этой задачи состоит в определении температуры однородного бесконечного стержня в любой момент времени $t > 0$, если известна его температура $\varphi(x)$ в момент времени $t = 0$. Считается, что боковая поверхность стержня теплоизолирована, так что через нее тепло из стержня не уходит.

Поскольку пространственная переменная x меняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, можно применить преобразование Фурье к уравнению (7) и начальному условию (8).

Предположим, что

1) функции $u(x,t)$ и $\varphi(x)$ достаточно гладкие и стремятся к нулю при $|x| \to +\infty$ $\forall t \geqslant 0$ достаточно быстро, так что существуют изображения Фурье

$$v(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\xi x}\, dx, \tag{9}$$

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x}\, dx; \tag{10}$$

2) законны операции дифференцирования

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\xi x}\, dx\right) = \frac{dv(\xi,t)}{dt},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\xi x}\, dx = (i\xi)^2 v(\xi,t) = -\xi^2 v(\xi,t).$$

Применяя преобразование Фурье относительно x к обеим частям уравнения (7) и условию (8), от задачи (7)–(8) перейдем к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} + \xi^2 a^2 v = 0, \tag{11}$$

$$v\big|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(\xi) \tag{12}$$

(величина ξ играет роль параметра).

Решение задачи (11)–(12) имеет вид

$$v(\xi,t) = \widetilde{\varphi}(\xi) e^{-\xi^2 a^2 t}. \tag{13}$$

Ранее мы установили, что

$$\mathscr{F}\left[e^{-x^2/\sigma^2}\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\, e^{-\sigma^2\xi^2/4},$$

где $\mathscr{F}[f]$ — преобразование Фурье функции $f(x)$. Полагая

$$t = \frac{\sigma^2}{4a^2},$$

мы получим

$$e^{-\xi^2a^2t} = \mathscr{F}\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4a^2t)}\right].$$

Таким образом, правая часть равенства (13) содержит произведение преобразований Фурье функций $\varphi(x)$ и $\dfrac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4a^2t)}$.

На основании теоремы о свертке функций

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}[f_1]\cdot\mathscr{F}[f_2],$$

равенство (13) можно представить в виде

$$v(\xi,t) = \widetilde{\varphi}(\xi)e^{-\xi^2a^2t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}\left[\varphi(\xi) * \frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4a^2t)}\right]. \tag{14}$$

Левая часть формулы (14) содержит преобразование Фурье (относительно x) искомой функции $u(x,t)$, и поэтому формулу (14) можно переписать в виде

$$\mathscr{F}[u(x,t)] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathscr{F}\left[\varphi(x) * e^{-x^2/(4a^2t)}\right],$$

откуда, пользуясь выражением для свертки функций $\varphi(x)$ и $e^{-x^2/(4a^2t)}$, получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}\right\}d\lambda, \quad t>0. \tag{15}$$

Формула (15) дает решение исходной задачи (7)–(8) и называется интегралом Пуассона.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{7'}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & x_1 < x < x_2,\\ 0, & x \notin (x_1, x_2),\end{cases} \tag{8'}$$

где $u_0 = \mathrm{const}$.

Решение. Пользуясь формулой (15), получим искомое решение

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}\right\}d\lambda. \tag{16}$$

Полученное решение выражается через функцию $\Phi(z)$, называемую обычно интегралом ошибок,

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2}\, d\mu. \tag{17}$$

Заменой переменных $\dfrac{x-\lambda}{2a\sqrt{t}} = \mu$, $d\lambda = -2a\sqrt{t}\, d\mu$ из (16) имеем

$$u(x,t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}\, d\mu = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}\, d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}\, d\mu =$$

$$= \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что функция $\Phi(z)$, определяемая формулой (17), является нечетной. При $z \to +\infty$ функция $\Phi(z)$ стремится к интегралу $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\mu^2}\, d\mu = 1$, так что $\Phi(+\infty) = 1$, $\Phi(-\infty) = -1$.

Исходя из свойств функции $\Phi(z)$, убеждаемся, что решение $u(x,t)$, определяемое формулой (7), удовлетворяет начальному условию (8). В самом деле, при $x < x_1$ обе величины $\dfrac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}$ и $\dfrac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}$ при $t \to +0$ стремятся к $-\infty$. При $x > x_2$ эти выражения стремятся к $+\infty$ при $t \to +0$. В обоих случаях значения функций, стоящие в квадратных скобках в правой части (18), имеют один и тот же предел (-1 или $+1$), а их разность имеет предел, равный нулю. Если же $x_1 < x < x_2$, то $\dfrac{x-x_1}{2a\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+0]{} +\infty$ и $\dfrac{x-x_2}{2a\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+0]{} -\infty$. Выражение в квадратных скобках в (18) стремится к 2, так что $u(x,0) = u_0$, $x_1 < x < x_2$. В точках $x = x_1$ и $x = x_2$ температура $u \xrightarrow[t\to+0]{} \dfrac{u_0}{2}$. ▷

В следующих задачах найти, пользуясь формулой Пуассона, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Задачи для самостоятельного решения

390. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, $u\big|_{t=0} = e^{-x^2}$, $-\infty < x < +\infty$.

391. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, $u\big|_{t=0} = e^{-2x^2}$, $-\infty < x < +\infty$.

II. Задача Коши для одномерного волнового уравнения.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}).$$

Рассмотрим следующую задачу Коши: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{19}$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{21}$$

Эту задачу можно интерпретировать как задачу о свободных колебаниях однородной бесконечной струны для $t > 0$, если известно начальное смещение $\varphi_0(x)$ струны от положения равновесия в момент $t = 0$, а начальная скорость равна нулю.

Так как пространственная переменная x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, можно применить преобразование Фурье по переменной x.

Допустим, что функции $u(x,t)$ и $\varphi_0(x)$ удовлетворяют условиям 1) и 2), приведенным в п. I. Тогда

$$v(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\xi x}\, dx,$$

$$v\big|_{t=0} = \widetilde{\varphi}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Применяя преобразование Фурье по x к обеим частям уравнения (19) и к начальным условиям (20)–(21), от задачи (19)–(21) мы приходим к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + a^2 \xi^2 v = 0, \tag{22}$$

$$v\big|_{t=0} = \widetilde{\varphi}_0(\xi), \tag{23}$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{24}$$

Общим решением уравнения (22) является функция

$$v(\xi, t) = C_1(\xi) \cos a\xi t + C_2(\xi) \sin a\xi t. \tag{25}$$

Требуя, чтобы она удовлетворяла начальным условиям (23)–(24), находим

$$C_1(\xi) = \widetilde{\varphi}_0(\xi), \quad C_2(\xi) = 0,$$

откуда

$$v(\xi, t) = \widetilde{\varphi}_0(\xi)\cos a\xi t = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\varphi}_0(\xi)e^{ia\xi t} + \widetilde{\varphi}_0(\xi)e^{-ia\xi t}\right].$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\varphi}_0(\xi)e^{i\xi(x+at)}\,d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\varphi}_0(\xi)e^{i\xi(x-at)}\,d\xi\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{\varphi_0(x+at) + \varphi_0(x-at)\}. \qquad (26)$$

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой (26), является решением задачи Коши (19)–(21) для любой дважды дифференцируемой функции $\varphi_0(x)$.

Задача для самостоятельного решения

392. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

и начальному условию

$$\left. u\right|_{t=0} = 0, \qquad\qquad -\infty < x < +\infty.$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

§ 10. Косинус- и синус-преобразования Фурье

Преобразование Фурье (по x) применяется в случае, когда переменная x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Если изучаемый процесс ограничен полупрямой $0 < x < +\infty$, то удобно рассматривать следующую пару преобразований.

Допустим, что некоторая функция $f(x)$ определена, непрерывно дифференцируема и абсолютно интегрируема на полупрямой $x > 0$.

Функция

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\xi x\,dx \qquad (1)$$

называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$.

Формула обратного преобразования имеет вид

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_c(\xi) \cos \xi x \, d\xi, \tag{2}$$

т. е. $f(x)$, в свою очередь, является косинус-преобразованием для $F_c(\xi)$.

Функция

$$F_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \xi x \, dx \tag{3}$$

называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$.

Формула обратного преобразования имеет вид

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_s(\xi) \sin \xi x \, d\xi, \tag{4}$$

т. е. $f(x)$ и $F_s(\xi)$ являются взаимными синус-преобразованиями.

Пример 1. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-x}$, $0 < x < +\infty$.

◁ *Решение*. Используя формулу (1) и интегрируя дважды по частям, получаем

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \xi x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(-e^{-x} \cos \xi x\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \xi \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin \xi x \, dx \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \xi \left\{ \left(e^{-x} \sin \xi x\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \xi \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \xi x \, dx \right\} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \xi^2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \xi x \, dx \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \xi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \xi x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \xi^2 F_c(\xi),$$

откуда следует

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}. \quad ▷$$

Задачи для самостоятельного решения

393. Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < +\infty$.

394. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

395. Положив $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$ и используя синус-преобразование Фурье функции $f(x)$, найти значение интеграла

$$J = \int_0^{+\infty} \sin \xi x \frac{1 - \cos \xi a}{\xi}\, d\xi.$$

396. Доказать, что косинус-преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}$ совпадает с самой функцией.

Применение синус- и косинус-преобразования Фурье для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных

Косинус- или синус-преобразование Фурье может быть использовано, когда независимая переменная изменяется в пределах от 0 до $+\infty$. Выбор синус- или косинус-преобразования зависит от типа граничных условий, заданных на нижнем пределе этой переменной.

Пусть $u(x, t)$ некоторая функция и $v_s(\xi, t)$ ее преобразование Фурье:

$$v_s(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(x, t) \sin \xi x\, dx.$$

Допустим, как обычно, что $u(x, t)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to +\infty\ \forall t$, и найдем синус-преобразование производной $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Интегрируя по частям, имеем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \xi x\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin \xi x \right) \Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} - \xi \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \xi x\, dx \right].$$

Внеинтегральное слагаемое обращается в нуль, и мы получаем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \xi x\, dx = -\xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \xi x\, dx.$$

Интегрируя еще раз по частям, получаем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \xi x\, dx = -\xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(u \cdot \cos \xi x) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \xi \int_0^{+\infty} u(x, t) \sin \xi x\, dx \right],$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\xi x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi u\Big|_{x=0}^{x=+\infty}-\xi^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}u(x,t)\sin\xi x\,dx. \qquad (5)$$

Левая часть последнего равенства содержит синус-преобразование производной $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Интеграл в правой части равен $-\xi^2 v_s(\xi,t)$. Таким образом, синус-преобразование Фурье производной $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ выражается через синус-преобразование самой функции $u(x,t)$ и значение $u(x,t)$ при $x=0$. Синус-преобразование вычисляется очень просто, если известно значение $u\big|_{x=0}$.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что косинус-преобразование Фурье вычисляется очень просто, если известно значение $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ при $x=0$.

Задача для самостоятельного решения

397. Доказать, что если

$$f=\frac{d^2 f}{dx^2}=0,$$

при $x=0$, то

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d^2 f}{dx^2}\sin\xi x\,dx=-\xi^2F_s(\xi),$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d^4 f}{dx^4}\sin\xi x\,dx=\xi^4F_s(\xi).$$

Если при $x=0$ выполняются условия

$$\frac{df}{dx}=\frac{d^3 f}{dx^3}=0,$$

тогда

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d^2 f}{dx^2}\cos\xi x\,dx=-\xi^2F_c(\xi),$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d^4 f}{dx^4}\cos\xi x\,dx=\xi^4F_c(\xi).$$

Пример 2. Рассмотрим задачу о распределении температуры в полуограниченном стержне $x>0$, если на его конце $x=0$ поддерживается нулевая температура и начальное распределение температуры стержня известно.

Задача сводится к нахождению решения $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{6}$$

при начальном условии

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x > 0, \tag{7}$$

и граничном условии

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{8}$$

Из физических соображений следует, что $u(x, t)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$. Пусть $v_s(\xi, t)$ — синус-преобразование Фурье функции $u(x, t)$:

$$v_s(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(x, t) \sin \xi x \, dx.$$

Умножим обе части (6) на $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin \xi x$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$. Используя равенство (5) и тот факт, что $u\big|_{x=0} = 0$, находим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \xi x \, dx = -\xi^2 v_s(\xi, t).$$

Таким образом, для функции $v_s(\xi, t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv_s}{dt} + a^2 \xi^2 v_s(\xi, t) = 0. \tag{9}$$

Из начального условия (7) имеем

$$v_s\big|_{t=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \sin \xi x \, dx = \Phi_s(\xi). \tag{10}$$

Решение уравнения (9) с начальным условием (10) имеет вид

$$v_s(\xi, t) = \Phi_s(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

По формуле обратного преобразования Фурье получим

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \Phi_s(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t} \sin \xi x \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(\eta) \, d\eta \int_0^{+\infty} \sin \xi \eta \cdot \sin \xi x \, e^{-a^2 \xi^2 t} \, d\xi. \tag{11}$$

Используя известную тригонометрическую формулу, равенство (11) можно переписать следующим образом:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(\eta) \, d\eta \int_0^{+\infty} [\cos \xi (x - \eta) - \cos \xi (x + \eta)] e^{-a^2 \xi^2 t} \, d\xi. \tag{12}$$

Имея в виду, что (см. задачу 407[2])

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\beta^2/(4\alpha)} \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0),$$

получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-a^2\xi^2 t}\cos\xi(x\pm\eta)\,d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x\pm\eta)^2}{4a^2t}\right\}.$$

Таким образом, равенство (12) принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\eta)\left[\exp\left\{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}\right\}\right]d\eta. \tag{13}$$

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой (13), является решением поставленной задачи. ▷

Задачи для самостоятельного решения

398. Рассмотреть задачу о распространении тепла в полуограниченном стержне $x > 0$, если на его конце $x = 0$ поддерживается постоянная температура u_0, а начальная температура равна нулю.

399. Используя синус- или косинус-преобразование Фурье, найти решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < +\infty,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Покажем применение косинус- и синус-преобразований Фурье при решении некоторых интегральных уравнений.

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^{+\infty}\varphi(x)\cos\xi x\,dx = \frac{1}{1+\xi^2}. \tag{14}$$

Решение. Умножим обе части (14) на $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\cos\xi x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}.$$

[2] *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Функции комплексного переменного. М.: УРСС, 2003.

Левая часть этого равенства является косинус-преобразованием $\Phi_c(\xi)$ функции $\varphi(x)$, отсюда

$$\Phi_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}.$$

Тогда по формуле обратного косинус-преобразования Фурье имеем

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\Phi_c(\xi)\cos\xi x\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\xi x}{1+\xi^2}\,d\xi. \tag{15}$$

Интеграл в правой части (15) вычисляется с помощью теории вычетов. Используя решение задачи 397[3] при $m = x$ и $a = 1$, получим

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\xi x}{1+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2}e^{-x}.$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = e^{-x} \quad (x \geqslant 0).$$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие интегральные уравнения:

400. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)\sin\xi x\,dx = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin\xi, & 0 \leqslant \xi \leqslant \pi,\\ 0, & \xi > \pi.\end{cases}$

401. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)\sin\xi x\,dx = e^{-\xi} \quad (\xi > 0).$

При решении некоторых задач математической физики можно воспользоваться интегральными преобразованиями Меллина или Ханкеля.

Преобразованием Меллина функции $f(x)$, определенной для $x \in (0, +\infty)$, называется функция $\widetilde{f}(p)$, определяемая равенством

$$\mathscr{M}[f] = \widetilde{f}(p) = \int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}f(x)\,dx,$$

Например, если $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < +\infty$, то

$$\widetilde{f}(p) = \int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(p),$$

[3] *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. М.: УРСС, 2003.

1. $\begin{cases} \mathscr{L}[f] = F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt, \\ \mathscr{L}^{-1}[F] = f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp \end{cases}$	Преобразование Лапласа Обратное преобразование Лапласа
2. $\begin{cases} \mathscr{F}[f] = F(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx, \\ \mathscr{F}^{-1}[F] = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi \end{cases}$	Преобразование Фурье Обратное преобразование Фурье
3. $\begin{cases} \mathscr{F}_c[f] = F_c(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\cos\xi x\,dx, \\ \mathscr{F}_c^{-1}[F_c] = f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} F_c(\xi)\cos\xi x\,d\xi \end{cases}$	Косинус-преобразование Фурье Обратное косинус-преобразование Фурье
4. $\begin{cases} \mathscr{F}_s[f] = F_s(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\sin\xi x\,dx, \\ \mathscr{F}_s^{-1}[F_s] = f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} F_s(\xi)\sin\xi x\,d\xi \end{cases}$	Синус-преобразование Фурье Обратное синус-преобразование Фурье
5. $\begin{cases} \mathscr{M}[f] = \widetilde{f}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1} f(x)\,dx, \\ \mathscr{M}^{-1}[\widetilde{f}\,] = f(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-p}\widetilde{f}(p)\,dp \end{cases}$	Преобразование Меллина Обратное преобразование Меллина
6. $\begin{cases} \mathscr{H}[f] = \widetilde{f}(\xi) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xJ_n(\xi x)f(x)\,dx, \\ \mathscr{H}^{-1}[\widetilde{f}\,] = f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \xi J_n(\xi x)\widetilde{f}(\xi)\,d\xi \end{cases}$	Преобразование Ханкеля Обратное преобразование Ханкеля

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция Эйлера аргумента p. Формула обратного преобразования Меллина имеет вид

$$\mathcal{M}^{-1}[\widetilde{f}] = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-p} \widetilde{f}(p)\, dp.$$

Преобразованием Ханкеля функции $f(x)$ называется функция $\widetilde{f}(\xi)$, определяемая равенством

$$\mathcal{H}[f] = \widetilde{f}(\xi) = \int\limits_0^{+\infty} x J_n(\xi x) f(x)\, dx,$$

где $J_n(\xi x)$ — функция Бесселя первого рода порядка n. Формула обратного преобразования Ханкеля

$$\mathcal{H}^{-1}[\widetilde{f}] = f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \xi J_n(\xi x) \widetilde{f}(\xi)\, d\xi.$$

Для удобства в таблице на стр. 91, интегральные преобразования сгруппированы по парам.

§ 11. Обобщенные функции. Преобразование Фурье обобщенных функций

Классическое преобразование Фурье требует, чтобы функция $f(x)$ стремилась к нулю при $|x| \to \infty$ достаточно быстро. Это условие исключает такие функции, как $f(x) = 1$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$ и т. д.

Вводя понятие обобщенной функции, мы снимаем указанное ограничение и тем самым можем находить преобразования Фурье возрастающих функций.

Цель этого параграфа — познакомиться с понятием обобщенной функции и дать определение преобразования Фурье некоторых важных функций, не имеющих обычных Фурье-образов.

Пространство основных функций

Функция $\varphi(x)$ называется ***финитной***, если она обращается в нуль вне некоторого конечного интервала. Носителем функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества точек, в которых $\varphi(x) \neq 0$. Носитель функции $\varphi(x)$ обозначается символом

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Обозначим $C_0^\infty(a, b)$ множество всех финитных функций, бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$.

В теории обобщенных функций очень важную роль играет следующая лемма (основная лемма вариационного исчисления).

Лемма. *Пусть $f(x) \in C[a, b]$ и для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(a, b)$ справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Тогда $f(x) \equiv 0$.

Из этой леммы вытекает следующий факт. Положим

$$(f, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Тогда тождественное равенство

$$f(x) \equiv g(x)$$

равносильно равенству

$$(f, \varphi) = (g, \varphi) \quad \forall\, \varphi(x) \in C_0^\infty(a, b).$$

Пространство основных функций $\mathscr{D}$

Обозначим через $\mathscr{D}$ линейное пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^1$ функций.

Сходимость в $\mathscr{D}$ определим следующим образом: последовательность $\varphi_\nu(x) \in \mathscr{D}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, сходится к нулю в $\mathscr{D}$, если выполняются следующие условия:

1) существует такой интервал (a, b), что $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset (a, b)$, $\nu = 1, 2, \ldots$;
2) при $\nu \to +\infty$ $\varphi_\nu(x)$ равномерно сходится к нулю на $[a, b]$, так же как и производные $\varphi_\nu^{(k)}(x)$ любого порядка k.

В этом случае будем писать $\varphi_\nu(x) \underset{\mathscr{D}}{\to} 0$.

Пространство $\mathscr{D}$ называется пространством основных функций.

Пусть, например,

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{a^2 - x^2}\right\}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geqslant a, \end{cases}$$

так что $\operatorname{supp}\varphi_a = [-a, a]$.

Последовательность $\varphi_{\nu,a}(x) = \frac{1}{\nu}\varphi_a(x)$ сходится к нулю в $\mathscr{D}$ при $\nu \to +\infty$. С другой стороны, последовательность $\varphi_{\nu,a}(x) = \frac{1}{\nu}\varphi_a\left(\frac{x}{\nu}\right)$ к нулю не сходится , т. к. $\operatorname{supp}\varphi_{\nu,a} = [-\nu a, \nu a]$ при $\nu \to +\infty$ «превосходит» любой конечный интервал (α, β).

Определение. Говорят, что последовательность $\varphi_\nu(x) \in \mathscr{D}$ *сходится* в $\mathscr{D}$ к функции $\varphi(x)$, если

$$\varphi(x) - \varphi_\nu(x) \underset{\mathscr{D}}{\to} 0.$$

Воспользовавшись определением сходимости в $\mathscr{D}$, нетрудно проверить, что:

1) операции сложения и умножения на число непрерывны в $\mathscr{D}$, то есть

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_\nu(x) \underset{\mathscr{D}}{\to} \varphi(x) \\ \psi_\nu(x) \underset{\mathscr{D}}{\to} \psi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\varphi_\nu(x) + \beta\psi_\nu(x) \underset{\mathscr{D}}{\to} \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x),$$

где α, β — произвольные действительные числа;

2) операция дифференцирования непрерывна в $\mathscr{D}$, то есть

$$\varphi_\nu(x) \underset{\mathscr{D}}{\to} \varphi(x) \Rightarrow \varphi_\nu^{(k)}(x) \underset{\mathscr{D}}{\to} \varphi^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Обобщенные функции

Говорят, что на множестве M определен функционал f, если любому элементу множества M сопоставляется по некоторым правилам определенное действительное число:

$$M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1.$$

Простым примером является обыкновенная числовая функция $f(x)$, определенная на некотором интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

Другой пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

где $f(x) \in C[a, b]$ — некоторая фиксированная функция, а $\varphi(x) \in C[a, b]$ — произвольная функция. Таким образом, каждой функции $\varphi(x)$ ставится в соответствие определенное число. Тем самым построен функционал, порождаемый функцией $f(x)$, где $\varphi(x)$ играет роль аргумента.

Пусть дан функционал f в пространстве $\mathscr{D}$ основных функций, который каждой основной функции $\varphi(x)$ ставит в соответствие действительное число (f, φ):

$$\mathscr{D} \ni \varphi(x) \xrightarrow{f} (f, \varphi) \in \mathbb{R}^1.$$

Определение. Функционал f называется *линейным*, если

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}.$$

Определение. Функционал f называется *непрерывным*, если для любой последовательности $\varphi_\nu(x)$ основных функций, сходящейся в $\mathscr{D}$ к $\varphi(x)$ при $\nu \to +\infty$, имеем

$$(f, \varphi_\nu) \underset{\mathbb{R}^1}{\to} (f, \varphi).$$

Сформулируем основное определение.

Определение. *Обобщенной функцией* называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1.$$

Пространство обобщенных функций обозначается через $\mathscr{D}'$.

Пример 1. Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция на произвольном конечном интервале числовой оси:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty \quad \forall (a, b).$$

Такие функции локально интегрируемы. С помощью этой функции любой основной функции $\varphi(x)$ можно поставить в соответствие число

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx; \tag{1}$$

здесь интегрирование производится, на самом деле, на конечном интервале, вне которого функция $\varphi(x)$ обращается в нуль. Нетрудно проверить, что функционал, определяемый формулой (1), является линейным и непрерывным. Обобщенная функция, определяемая формулой (1), называется регулярным функционалом или функционалом типа функции (функционал отождествляется с функцией f). Постоянная обобщенная функция определяется формулой

$$(f, \varphi) = C\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} C\varphi(x)\,dx.$$

Функционалы типа (1) не исчерпывают все линейные непрерывные функционалы на $\mathscr{D}$, как показывает следующий пример. ▷

Пример 2. Дельта-функция Дирака $\delta(x)$.

Положим по определению

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0),$$

т. е. этот функционал сопоставляет каждой функции $\varphi(x) \in \mathscr{D}$ ее значение в точке $x = 0$. Нетрудно видеть, что $\delta(x) \in \mathscr{D}'$, т. е. является обобщенной функцией. Действительно, имеем

$$(\delta(x), \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)) = \alpha_1\varphi_1(0) + \alpha_2\varphi_2(0) = \alpha_1(\delta(x), \varphi_1(x)) + \alpha_2(\delta(x), \varphi_2(x)),$$

т. е. функционал линеен.

Далее, если $\varphi_\nu(x) \underset{\mathscr{D}}{\to} \varphi(x)$, тогда

$$(\delta(x), \varphi_\nu(x)) = \varphi_\nu(0) \underset{\mathbb{R}^1}{\to} \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)) \quad (\nu \to +\infty),$$

т.е. данный функционал непрерывен. ▷

Можно доказать, что этот функционал нельзя представить в виде (1) ни для какой локально интегрируемой функции $f(x)$. Поэтому дельта-функция $\delta(x)$ не является регулярным функционалом. Такие обобщенные функции называются сингулярными. Часто встречается и «смещенная» дельта-функция $\delta(x - x_0)$, определяемая формулой

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

Дифференцирование обобщенных функций

Пусть $f(x)$ — дифференцируемая в обычном смысле функция и $f'(x)$ — локально интегрируемая функция. Для произвольной $\varphi(x) \in \mathscr{D}$, интегрируя по частям, имеем

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = [f(x)\varphi(x)]\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Слагаемое вне интеграла равно нулю, т. к. $\varphi(x)$ — финитная функция, которая обращается в нуль вне конечного интервала. Поэтому

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi').$$

Если f — обобщенная функция, то по определению полагаем

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'). \tag{2}$$

То есть, если $f \in \mathscr{D}'$, говорят, что обобщенная функция $f' \in \mathscr{D}'$, определяемая формулой (2), есть производная этой функции. Очевидно, что $\varphi' \in \mathscr{D}$ и формула (2) корректно определена.

Для обычной дифференцируемой функции производная $f'(x)$ в смысле $\mathscr{D}'$ является обычной производной.

Из определения $f' \in \mathscr{D}'$ следует, что любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема, причем

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пример 3. Рассмотрим функцию Хевисайда[4)]

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Это обычная функция.

Из формулы (1) имеем:

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)\, dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0).$$

Отсюда

$$(\theta', \varphi) = \varphi(0).$$

С другой стороны,

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$

Следовательно, θ' и $\delta(x)$ действуют одинаково на любую функцию $\varphi(x) \in \mathscr{D}$, то есть

$$\theta' = \delta(x). \tag{3}$$

Видно, что производная $\theta(x)$ равна, в обычном смысле, нулю при $x \neq 0$, и не существует при $x = 0$. Далее имеем

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Нетрудно доказать, что при

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x > x_0, \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

имеем $\theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$. ▷

Преобразование Фурье в смысле обобщенных функций

Допустим, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Пусть $g(\sigma)$ — ее преобразование Фурье.

$$\mathscr{F}[f] = g(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\sigma x}\, dx. \tag{4}$$

[4)] При рассмотрении преобразования Лапласа функции Хевисайда будем использовать обозначение $\eta(t)$.

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) e^{-i\sigma x}\, d\sigma. \tag{5}$$

Пусть $\varphi(x)$ — основная функция, преобразование Фурье которой

$$\mathscr{F}[\varphi] = \psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x}\, dx.$$

Имеет место соотношение

$$2\pi(f, \varphi) = (g, \psi), \tag{6}$$

которое называется *равенством Парсеваля*. Здесь $(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)\varphi(x)\, dx$, где $\bar{f}(x)$ — функция, сопряженная к $f(x)$.

Равенство (6) является основой для нахождения преобразования Фурье обобщенных функций. А именно, обобщенная функция $g(\sigma)$ является преобразованием Фурье обобщенной функции $f(x)$, если выполняется равенство Парсеваля

$$(g(\sigma), \psi(\sigma)) = 2\pi(f(x), \varphi(x)),$$

где $\psi(\sigma)$ — преобразование Фурье основной функции $\varphi(x)$.

Пример 4. Найти преобразование Фурье дельта-функции.

Решение. Обозначим $\mathscr{F}[\delta] = g(\sigma)$, $\mathscr{F}[\varphi] = \psi(\sigma)$. По определению

$$(g(\sigma), \psi(\sigma)) = 2\pi(\delta(x), \varphi(x)) = 2\pi\varphi(0), \tag{7}$$

так как для произвольной основной функции $\varphi(x)$

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$

В силу обратного преобразования Фурье, имеем

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma 0} \psi(\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}(1, \psi(\sigma)).$$

Поэтому равенство (7) можно переписать в виде

$$(g(\sigma), \psi(\sigma)) = (1, \psi(\sigma)),$$

откуда $g(\sigma) = 1$.

Таким образом,

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = 1. \quad \triangleright \tag{8}$$

Пример 5. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = 1$.

Решение. Обозначим $\mathscr{F}[1] = g(\sigma)$, $\mathscr{F}[\varphi(x)] = \psi(\sigma)$. По определению имеем

$$(g(\sigma), \psi(\sigma)) = 2\pi(1, \varphi(x)) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx. \tag{9}$$

Поскольку $\mathscr{F}[\varphi] = \psi(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x}\, dx$, отсюда следует

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \psi(0).$$

Тогда равенство (9) принимает вид

$$(g(\sigma), \psi(\sigma)) = 2\pi(1, \varphi(x)) = 2\pi\psi(0). \tag{10}$$

Следовательно $g(\sigma)$ действует на $\psi(\sigma)$ как $\delta(\sigma)$, поэтому из (10) получаем

$$(g(\sigma), \psi(\sigma)) = 2\pi(\delta(\sigma), \psi(\sigma)),$$

откуда

$$g(\sigma) = 2\pi\delta(\sigma).$$

Итак, мы получили вторую важную формулу

$$\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\sigma). \quad \triangleright \tag{11}$$

Для обычного преобразования Фурье, определяемого формулой (4), справедливы формулы

$$\mathscr{F}[x^k f(x)] = (-i)^k \frac{d^k}{d\sigma^k} \mathscr{F}[f], \tag{12}$$

$$\mathscr{F}[f^{(k)}(x)] = (-i\sigma)^k \mathscr{F}[f]. \tag{13}$$

Используя определение преобразования Фурье обобщенной функции, можно установить справедливость этой формулы и для обобщенной функции.

Пример 6. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = x$.

Решение. Очевидно, что $\mathscr{F}[x] = \mathscr{F}[x \cdot 1]$. Так как $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\sigma)$, то из формулы (12) получается для $k = 1$

$$\mathscr{F}[x] = -i \frac{d}{d\sigma} \mathscr{F}[1] = 2\pi(-i)\delta'(\sigma).$$

Вообще,

$$\mathscr{F}[x^m] = \mathscr{F}[x^m \cdot 1] = (-i)^m \frac{d^m}{d\sigma^m} \mathscr{F}[1] = 2\pi(-i)^m \delta^m(\sigma). \quad \triangleright \tag{14}$$

Пример 7. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{ax}$ ($a =$ const).

Решение. Для произвольного a функция e^{ax} не имеет обычного преобразования Фурье. Так как

$$e^{ax}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}x^k,$$

имеем

$$\mathscr{F}[e^{ax}]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\mathscr{F}[x^k]=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\left(-i\frac{d}{d\sigma}\right)^k\delta(\sigma)=2\pi\delta(\sigma-ia). \qquad (15)$$

Формула (15) позволяет легко получить преобразование Фурье функций $\sin ax$, $\cos ax$, $\operatorname{sh} ax$, $\operatorname{ch} ax$.

Например,

$$\mathscr{F}[\cos ax]=\mathscr{F}\left[\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\right]=\pi[\delta(\sigma+a)+\delta(\sigma-a)]. \qquad \triangleright$$

ГЛАВА 2 Теория устойчивости

§ 12. Понятие об устойчивости решения системы дифференциальных уравнений. Простейшие типы точек покоя

Пусть имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ существуют и непрерывны, и пусть $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть решение этой системы, удовлетворяющее при $t = t_0$ условиям

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Решение $\varphi_i(t)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову* при $t \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $y_i(t)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ той же системы (1), начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$\left|y_i(t_0) - \varphi_i^0\right| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

для всех $t \geqslant t_0$ справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

т. е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \geqslant t_0$.

Иными словами, решение $\varphi_i(t)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ устойчиво, если достаточно близкое к нему в начальный момент $t = t_0$ решение $y_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ для всех $t \geqslant t_0$ содержится в сколь угодно узкой ε-трубке, построенной вокруг решения $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y_i(t)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ неравенства (2) не выполняются, то решение $\varphi_i(t)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ называется *неустойчивым*.

Если решение $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ не только устойчиво, но, кроме того, удовлетворяет условиям

$$\lim_{t\to\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

если $\left|y_i(t_0) - \varphi_i^0\right| < \delta_1$, то решение $\varphi_i(t)$ называется *асимптотически устойчивым.*

Вопрос об устойчивости решения $\varphi_i(t)$ системы (1) может быть сведен к вопросу об устойчивости нулевого решения $x_i(t) \equiv 0$ некоторой новой системы уравнений, получающейся из (1) линейной заменой искомых функций

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где $x_i(t)$ — новые неизвестные функции, равные отклонениям прежних неизвестных функций $y_i(t)$ от функций $\varphi_i(t)$, определяющих исследуемое решение. Поэтому в дальнейшем будем считать, что на устойчивость исследуется именно нулевое решение $x_i(t) \equiv 0$ или, что то же самое, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Вместо термина «нулевое решение» будем употреблять термин *тривиальное решение.*

В применении к точке покоя $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ условие устойчивости выглядит так:

точка покоя $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *системы* (5) *устойчива по Ляпунову, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно подобрать* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из неравенства* $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *следует* $|x_i(t)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *при всех* $t \geqslant t_0$.

Пример 1. Каждое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 0 \tag{6}$$

устойчиво.

Действительно, решение $x_1(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x_1(t_0) = x_1^0$, есть $x_1(t) \equiv x_1^0 = \mathrm{const}$.

Рассмотрим другое решение $x_2(t)$ уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию

$$x_2(t_0) = x_2^0. \tag{7}$$

Для этих решений имеем $|x_2(t) - x_1(t)| = \left|x_2^0 - x_1^0\right|$ для всех t. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, например, $\delta = \varepsilon$ такое, что как только $\left|x_2^0 - x_1^0\right| < \delta$, то для решений $x_2(t)$ и $x_1(t)$ будет выполняться неравенство

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left|x_2^0 - x_1^0\right| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0.$$

Следовательно, любое решение уравнения (6) устойчиво. Однако асимптотической устойчивости нет:

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left|x_2^0 - x_1^0\right| \not\to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

▷

Пример 2. Каждое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad (8)$$

асимптотически устойчиво.

В самом деле, общее решение уравнения имеет вид

$$x(t) = Ce^{-t}. \qquad (9)$$

Решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ уравнения (8), удовлетворяющие начальным условиям $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, суть

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-(t-t_0)}, \quad x_2(t) = x_2^0 e^{-(t-t_0)}.$$

Отсюда

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left|x_2^0 - x_1^0\right| e^{-(t-t_0)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

что означает асимптотическую устойчивость любого решения уравнения (8). ▷

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2.$$

Решение $x(t) \equiv -1$ уравнения $\dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2$ неустойчиво, так как при $t \to +\infty$ все решения уравнения

$$x(t) = \frac{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} - (1-x_0)}{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)}$$

стремятся к $+1$. Решение $x(t) \equiv 1$ этого уравнения согласно определению асимптотически устойчиво. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь определением, исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем:

402. $\dfrac{dx}{dt} + x = 1, \qquad x(0) = 1.$

403. $\dfrac{dx}{dt} = -t(x-1), \quad x(0) = 1.$

404. $\dfrac{dx}{dt} - 2x = t, \qquad x\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}.$

405. $\dfrac{dx}{dt} = 2xt, \qquad x(0) = 0.$

406. $\dfrac{dx}{dt} = \cos t, \qquad x(0) = 1.$

407. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y - 2x, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

408. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 3x, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

Простейшие типы точек покоя

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \tag{A}$$

Точка (x_0, y_0) называется *точкой покоя* или *особой точкой системы* (A), если $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{10}$$

где a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — постоянные. Точка $(0, 0)$ является точкой покоя системы (10). Исследуем расположение траекторий системы (10) в окрестности этой точки. Ищем решение в виде

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}. \tag{11}$$

Для определения k получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим возможные случаи.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны. Подслучаи:

1) $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел).
2) $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел).
3) $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Точка покоя неустойчива (седло).

4) $k_1 = 0$, $k_2 > 0$. Точка покоя неустойчива.
5) $k_1 = 0$, $k_2 < 0$. Точка покоя устойчива, но не асимптотически.

II. Корни характеристического уравнения комплексные: $k_1 = p + qi$, $k_2 = p - qi$. Подслучаи:

1) $p < 0$, $q \neq 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус).
2) $p > 0$, $q \neq 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус).
3) $p = 0$, $q \neq 0$. Точка покоя устойчива (центр). Асимптотической устойчивости нет.

III. Корни кратные: $k_1 = k_2$. Подслучаи:

1) $k_1 = k_2 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел).
2) $k_1 = k_2 > 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел).
3) $k_1 = k_2 = 0$. Точка покоя неустойчива.

Возможен исключительный случай, когда все точки плоскости являются устойчивыми точками покоя.

Для системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{13}$$

характеристическим уравнением будет

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

1) Если действительные части всех корней характеристического уравнения (14) системы (13) отрицательны, то точка покоя $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ асимптотически устойчива.
2) Если действительная часть хотя бы одного корня характеристического уравнения (14) положительна, $\operatorname{Re} k_i = p_i > 0$, то точка покоя $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ системы (13) неустойчива.
3) Если характеристическое уравнение (14) имеет **простые** корни с нулевой действительной частью (т. е. нулевые или чисто мнимые корни), то точка покоя $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ системы (13) устойчива, но не асимптотически.

Пример 4. Установить характер точки покоя $(0, 0)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Решение. В данном случае

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad k^2 + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i$ — чисто мнимые. Точка покоя устойчива (центр). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Установить характер точки покоя $(0, 0)$ в следующих системах:

409. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$ **410.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$ **411.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

412. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases}$ **413.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ **414.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

415. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$ **416.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$

417. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

Для системы двух линейных уравнений с постоянными действительными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{15}$$

характеристическое уравнение (12) приводится к виду

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

1) Если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво.

2) Если $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ или $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

3) Во всех остальных случаях нулевое решение неустойчиво; однако при $a_1 = a_2 = 0$ возможен исключительный случай, когда нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

Пример 5. Определить значение параметра α, при котором устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x - \alpha y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение для данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ \alpha - 1 & -\alpha - k \end{vmatrix} = 0,$$

или $k^2 + \alpha k + 1 - \alpha = 0$. Здесь $a_1 = \alpha$, $a_2 = 1 - \alpha$.

Асимптотическая устойчивость нулевого решения будет иметь место при $\alpha > 0$, $1 - \alpha > 0$, т. е. при $0 < \alpha < 1$.

Устойчивость, но не асимптотическая, будет в двух случаях:

а) $\alpha > 0$, $1 - \alpha = 0$, т. е. при $\alpha = 1$;

б) $\alpha = 0$, $1 - \alpha > 0$, т. е. при $\alpha = 0$.

При всех других значениях α нулевое решение неустойчиво. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Определить значения параметра α, при которых нулевые решения следующих систем устойчивы:

418. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$ **419.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$ **420.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$

421. $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$ **422.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x. \end{cases}$

Пример 6. В плоскости параметров α и β найти области, в которых устойчиво нулевое решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)y, \\ \dot{y} = x - \beta y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - k \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$k^2 + (\beta - \alpha)k + 1 + \alpha\beta - \beta = 0.$$

Здесь

$$a_1 = \beta - \alpha, \quad a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta;$$

a_1 и a_2 являются непрерывными функциями от α и β, поэтому знаки a_1 и a_2 будут меняться там, где $a_1 = a_2 = 0$, т. е. на прямой $\beta - \alpha = 0$ и на гиперболе $1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Эти линии разбивают плоскость параметров α, β на четыре области I, II, III, IV (рис. 4), в каждой из которых знаки a_1 и a_2 постоянны. Возьмем по одной произвольной точке в каждой области и определим в этих точках знаки коэффициентов a_1 и a_2.

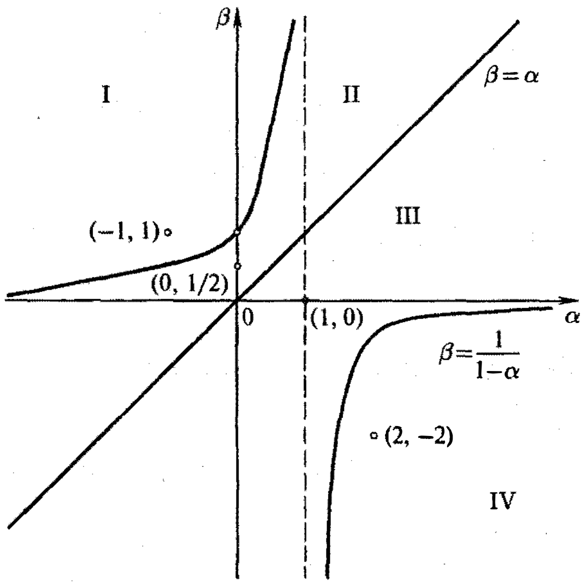


Рис. 4

Область I: в точке $(-1, 1)$ имеем $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -1 < 0$. Нулевое решение системы в этой области неустойчиво.

Область II: в точке $(0, 1/2)$ имеем $a_1 = 1/2 > 0$, $a_2 = 1/2 > 0$. Нулевое решение системы в области II асимптотически устойчиво.

Область III: в точке $(1, 0)$ имеем $a_1 = -1 < 0$, $a_2 = 1 > 0$. Нулевое решение в этой области неустойчиво.

Область IV: в точке $(2, -2)$ имеем $a_1 = -4 < 0$, $a_2 = -1 < 0$. Нулевое решение в этой области неустойчиво.

Исследуем на устойчивость нулевое решение на границах рассмотренных выше областей.

1) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha < 1$ (граница между областями I и II). На этой границе $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, так что нулевое решение на ней устойчиво, но не асимптотически.
2) $\beta = \alpha$ (граница между областями II и III. На этой границе $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, так что нулевое решение на ней устойчиво, но не асимптотически.
3) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ (граница между областями III и IV). На этой границе $a_1 < 0$, $a_2 = 0$, так что нулевое решение на ней неустойчиво.

Итак, нулевое решение асимптотически устойчиво в области II и устойчиво, но не асимптотически, на границе области II. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих систем в плоскости параметров α и β найти области, в которых нулевое решение устойчиво:

423. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y. \end{cases}$ **424.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$ **425.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2)y. \end{cases}$

426. $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - \beta^2 y, \\ \dot{y} = (\alpha^2 - 1)x + (\beta^2 + 1)y. \end{cases}$ **427.** $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta)x + (1 + \beta)y, \\ \dot{y} = -\beta^2 x + \beta^2 y. \end{cases}$

428. $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - (\beta + 1)y, \\ \dot{y} = (4\alpha + \beta + 1)x - 4y. \end{cases}$

§ 13. Второй метод Ляпунова

Функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно определенной в H-окрестности* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H\right)$ *начала координат*, если она положительна во всех точках этой окрестности, за исключением начала координат, где она равна нулю:

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, \quad v(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Например, функция $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ будет положительно определенной функцией в пространстве переменных x_1, x_2, x_3. Функция $u = x_1^2 + x_2^2$ будет лишь знакопостоянной в этом пространстве, но не положительно определенной, так как она обращается в нуль на всей оси Ox_3, а не только в точке $(0, 0, 0)$, и она же будет положительно определенной в пространстве x_1, x_2.

Если $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ и $v(0, 0, \ldots, 0) = 0$, то функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *отрицательно определенной.*

Функция $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно определенной в H-окрестности начала координат при $t \geqslant t_0$*, если существует такая не зависящая от t положительно определенная функция $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при всех указанных значениях аргументов и $v(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

и пусть

$$v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

есть непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Полная производная по t функции $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вычисленная в силу системы (1) (вдоль интегральных кривых), равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Если правые части системы (1) не содержат явно t, то такая система называется *автономной* или *стационарной.*

I. Теорема А. М. Ляпуноаа об устойчивости. *Если система дифференциальных уравнений (1) такова, что существует функция $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, положительно определенная при $t \geqslant t_0$ в некоторой H-окрестности начала координат, производная которой $\frac{dv}{dt}$, вычисленная в силу системы (1), неположительна, то тривиальное решение системы (1) устойчиво.*

II. Теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости (случай автономных систем). *Если автономная система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

такова, что существует функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, положительно определенная в некоторой H-окрестности начала координат, производная которой $\frac{dv}{dt}$, вычисленная в силу системы (3), отрицательно определена, то тривиальное решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ асимптотически устойчиво.

Функции $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, фигурирующие в приведенных выше теоремах, называются *функциями Ляпунова*.

Назовем областью $v > 0$ какую-нибудь область окрестности

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H$$

начала координат пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ограниченную поверхностью $v = 0$, в которой функция v принимает положительные значения.

Допустим, что функция v обладает следующими свойствами:

1) при сколь угодно больших значениях t в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $v > 0$;
2) в области $v > 0$ функция v ограничена;
3) в области $v > 0$ производная $\dfrac{dv}{dt}$, составленная в силу системы уравнений (2), положительно определена.

III. Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости. *Если для системы дифференциальных уравнений* (2) *можно найти функцию, удовлетворяющую условиям* 1), 2), 3), *то тривиальное решение этой системы неустойчиво.*

Замечание. Если в системе (2) все f_i не зависят явно от t, то функцию Ляпунова нужно искать как не зависящую явно от t.

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x-2y)(1-x^2-3y^2), \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -(y+x)(1-x^2-3y^2). \end{cases}$$

<u>*Решение*</u>. Возьмем в качестве v функцию $v = x^2 + 2y^2$. Она является, во-первых, положительно определенной, а, во-вторых, ее производная $\dfrac{dv}{dt}$, взятая в силу системы, равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(2y-x)(1-x^2-3y^2) - 4y(x+y)(1-x^2-3y^2) =$$
$$= -2(1-x^2-3y^2)(x^2+2y^2) \leqslant 0$$

при достаточно малых x и y.

Мы видим, что выполняются все условия теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости.

Следовательно, тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво. ▷

Пример 2. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Решение. Функция $v = x^2 + y^2$ удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

1) $v(x, y) \geqslant 0, \quad v(0, 0) = 0;$

2) $\dfrac{dv}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \leqslant 0,$

т. е. $\dfrac{dv}{dt} < 0$ и $\dfrac{dv}{dt} = 0$ только при $x = 0$, $y = 0$, и значит, есть отрицательно определенная функция. Следовательно, решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво. ▷

Пример 3. Исследовать на устойчивость тривиальное решение автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

Решение. Возьмем в качестве $v(x, y)$ функцию

$$v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Здесь областью $v > 0$ является, например, область $x > 0$, $y > 0$.

В области $v > 0$ имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

Согласно теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчиво. ▷

Покажем на примере один метод построения функции Ляпунова, называемый методом деления переменных.

Пример 4. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3. \end{cases} \tag{4}$$

Найти для системы (4) функцию Ляпунова в виде

$$v(x, y) = F_1(x) + F_2(y),$$

где $F_1(x)$, $F_2(x)$ — некоторые, пока неизвестные, дифференцируемые функции.

Решение. В силу системы (4) будем иметь

$$\dot{v} = F_1'(x)\dot{x} + F_2'(y)\dot{y} = F_1'(x)(ax^3 + by) - F_2'(y)(cx - dy^3).$$

Потребуем, чтобы функция $\dot{v}$ имела такой же вид, что и функция $v(x, y)$, т. е. чтобы и она представлялась в виде суммы двух функций — одной, зависящей только от x, другой — только от y. Для этого необходимо, чтобы имело место тождество

$$F_1'(x)by - F_2'(y)cx \equiv 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{by}{F_2'(y)},$$

и, следовательно, каждая из дробей должна быть постоянной величиной, например, равной $1/2$. Тогда будем иметь

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{by}{F_2'(y)} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$F_1(x) = cx^2, \quad F_2(y) = by^2,$$

так что

$$v(x, y) = cx^2 + by^2. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость тривиальное решение систем:

429. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3. \end{cases}$

430. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases}$

431. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3. \end{cases}$

432. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases}$

433. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$

434. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$

435. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$

436. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3. \end{cases}$

437. $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$

438. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

439. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\frac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \dot{z} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2 \end{cases}$ $(v = x^2 + 2y^2 + 3z^2)$. **440.** $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}y - x - \frac{7}{2}x^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y^3. \end{cases}$

§ 14. Исследование на устойчивость по первому приближению

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

где f_i — дифференцируемые в окрестности начала координат функции, $f_i(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$.

Исследуем на устойчивость точку покоя $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ системы (1). Представим систему (1) в окрестности начала координат в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

где R_i имеют порядок выше первого относительно $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ (т. е. фактически разложим правые части (1) по формуле Тейлора по степеням x в окрестности начала координат). Вместо точки покоя системы (1) исследуем на устойчивость точку покоя линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

называемой *системой уравнений первого приближения* или *линеаризованной системой для системы* (1).

Возникает вопрос, влечет ли устойчивость (неустойчивость) точки покоя системы (3) устойчивость (неустойчивость) точки покоя исходной системы (1). Вообще говоря, строгой связи между системами (1) и (3) нет.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2. \tag{4}$$

Здесь $f(t, x) \equiv x^2$. Линеаризованное уравнение для уравнения (4) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{5}$$

Решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (5) является устойчивым (см. с. 102). Оно же, будучи решением исходного уравнения (4), не является для него устойчивым. В самом деле, каждое действительное решение уравнения (4) имеет вид

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad x\big|_{t=0} = x_0,$$

и перестает существовать при $t = \dfrac{1}{x_0}$ (решение непродолжаемо). ▷

Пример 2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 e^t. \tag{6}$$

Линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = x. \tag{7}$$

Решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (7) неустойчиво, так как каждое решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = Ce^t,$$

и очевидно, что $|x(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$. С другой стороны, решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (6) является асимптотически устойчивым. В самом деле, общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = Ce^t \left[1 + \frac{2}{3}C^2(e^{3t} - 1)\right]^{-1/2}$$

и, очевидно, стремится к нулю при $t \to +\infty$. ▷

Однако при определенных условиях устойчивость (неустойчивость) решения системы первого приближения влечет устойчивость (неустойчивость) решения исходной системы (1).

Ограничимся для простоты случаем, когда коэффициенты $a_{ij}(t)$ в (3) постоянные. В этом случае говорят, что система (2) стационарна в первом приближении.

Теорема 1. *Если система уравнений* (2) *стационарна в первом приближении, все члены R_i ограничены по t и разлагаются в ряды по степеням $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой области $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H$, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка, а все корни характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (2) асимптотически устойчиво, т. е. в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Теорема 2. *Если система уравнений (2) стационарна в первом приближении, все функции R_i удовлетворяют условиям теоремы 1 и хотя бы один из корней характеристического уравнения (8) имеет положительную действительную часть, то точка покоя $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (2) неустойчива, т. е. и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.*

Замечание. Если действительные части всех корней характеристического уравнения (8) неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (в этом случае начинают влиять нелинейные члены R_i).

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4. \end{cases} \tag{9}$$

Решение. Нелинейные члены удовлетворяют условиям теорем 1 и 2. Исследуем на устойчивость точку покоя системы первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \tag{10}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

имеет отрицательные корни $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Следовательно, на основании теоремы 1 точка покоя $x = 0$, $y = 0$ систем (9) и (10) асимптотически устойчива. ▷

Пример 4. Рассмотрим уравнение колебания маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = 0. \tag{11}$$

Здесь x — угол отклонения маятника от вертикали.

Уравнению (11) соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b\sin x. \end{cases} \tag{12}$$

Точки покоя системы (12)

$$x = k\pi \quad (k \text{ — целое}), \qquad y = 0. \tag{13}$$

Исследуем на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$, получающуюся из (13) при $k = 0$. Используя разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

запишем систему первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay, \end{cases} \tag{14}$$

характеристическое уравнение которой

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{15}$$

Если $a > 0$, $b > 0$, то корни уравнения (15) имеют отрицательные вещественные части, и, следовательно, точка покоя $x = 0$, $y = 0$ устойчива по первому приближению.

Исследуем теперь на устойчивость точку $(\pi, 0)$, что соответствует $k = 1$. Используя разложение

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \ldots$$

и перенося начало координат в точку $x = \pi$, $y = 0$, придем к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay, \end{cases} \tag{16}$$

характеристическое уравнение которой

$$\lambda^2 + a\lambda - b = 0. \tag{17}$$

При $a > 0$, $b > 0$ корни этого уравнения будут действительными и разных знаков. Следовательно, точка покоя $(\pi, 0)$ является неустойчивой точкой для системы (16). ▷

Пример 5. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xf(x, y), \\ \dot{y} = -x - yf(x, y), \end{cases} \tag{18}$$

где функция $f(x, y)$ разлагается в сходящийся степенной ряд и $f(0, 0) = 0$.

Решение. Линеаризованная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{19}$$

Точка покоя системы (19) есть $(0, 0)$.

Характеристическое уравнение системы (19)

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad k^2 + 1 = 0 \tag{20}$$

имеет чисто мнимые корни $k_{1,2} = \pm i$. Точка покоя $(0, 0)$ системы первого приближения (19) устойчива (центр). Так как действительные части корней характеристического уравнения (20) равны нулю, то согласно замечанию на с. 116 вопрос об устойчивости точки покоя (0, 0) требует дополнительного исследования. Для исследования на устойчивость точки покоя (0, 0) системы (18) применим второй метод Ляпунова. Беря $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, находим

$$\frac{dv}{dt} = -(x^2 + y^2)f(x, y).$$

Отсюда: если $f(x, y) \geqslant 0$ в достаточно малой окрестности начала координат, то точка покоя (0, 0) устойчива; если $f(x, y)$ — положительно определенная функция в некоторой окрестности начала координат, то точка покоя (0, 0) асимптотически устойчива; если $f(x, y) < 0$ в достаточно малой окрестности начала координат, то точка покоя (0, 0) неустойчива. Этот пример иллюстрирует тот факт, что в некоторых случаях нельзя судить об устойчивости точки покоя по первому приближению. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = 0$, $y = 0$ в следующих системах:

441. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$

442. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3. \end{cases}$

443. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2. \end{cases}$

444. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$

445. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$

446. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$

447. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$

448. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{7}{2}\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$

449. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$

450. $\begin{cases} \dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + y^2. \end{cases}$

451. $\begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$

452. Исследовать на устойчивость точки покоя маятника, к которому приложен вращающий момент L:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = L, \quad \text{где} \quad |L| < b.$$

§ 15. Асимптотическая устойчивость в целом. Устойчивость по Лагранжу

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad f_i(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

и пусть эта система определена в полупространстве

$$\Omega: \left\{ a < t < +\infty, \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < +\infty \right\}.$$

Говорят, что тривиальное решение $x_i \equiv 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1) *асимптотически устойчиво в целом*, если оно

1) асимптотически устойчиво по Ляпунову;
2) всякое другое решение $x_i(t) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1) обладает свойством
$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Аналогично определяется асимптотическая устойчивость в целом нетривиального решения системы (1).

Ограничимся автономными системами, т.е. такими, правые части которых не зависят явно от времени t:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad f_i(0, \ldots, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Функцию Ляпунова $v(x_1, \ldots, x_n)$ назовем *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M существует положительное число R такое, что вне сферы $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$ имеет место неравенство $v > M$.

Теорема (об асимптотической устойчивости в целом). *Если существует бесконечно большая положительно определенная функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $\frac{dv}{dt} < 0$ вне E и $\frac{dv}{dt} \geqslant 0$ на E, где множество E не содержит целых траекторий (кроме нулевого положения равновесия), то тривиальное решение системы (2) будет асимптотически устойчиво в целом.*

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x^2\dot{x} + x^3 = 0. \tag{3}$$

Запишем уравнение (3) в виде эквивалентной ему системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - x^2 y. \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова $v(x, y)$ возьмем функцию

$$v(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Имеем

$$\frac{dv}{dt} = y\dot{y} + x^3\dot{x} = -x^3y - x^2y^2 + x^3y = -x^2y^2.$$

Очевидно, что $v(x, y) \to \infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$. Далее, $\dot{v}(x, y)$ обращается в нуль только на осях координат (множество E). Очевидно, что ни одно решение, за исключением точки покоя в начале координат, не остается на этих осях при всех $t \geqslant 0$. В самом деле, во всех точках оси OY, отличных от начала координат O, угловой коэффициент

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 - x^2y}{y}$$

имеет конечное значение, а потому на этой оси не может лежать дуга траектории. С другой стороны, при подходе к оси OX угловой коэффициент $\dfrac{dy}{dx} \to \infty$ и потому на оси OX не могут находиться дуги траекторий. Следовательно, множество E не содержит целых траекторий (кроме начала координат).

В силу теоремы точка покоя $(0, 0)$ обладает асимптотической устойчивостью в целом. ▷

Задачи для самостоятельного решения

453. Показать, что если тривиальное решение линейной автономной системы асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, то оно асимптотически устойчиво в целом.

Исследовать на асимптотическую устойчивость в целом нулевые решения уравнений:

454. $\ddot{x} + \dot{x}^3 + (\dot{x}^2 + 1)x = 0.$

455. $\ddot{x} + \dot{x} + (\dot{x}^2 + \dot{x} + 2)(2x + x^5) = 0.$

456. $\ddot{x} + x^2e^{-x}\dot{x} + x^3 + 2x = 0.$

Может оказаться, что система (2) не обладает полной устойчивостью, но тем не менее для нее может существовать область асимптотической устойчивости.

Под областью асимптотической устойчивости системы (2) понимается область, содержащая начало координат O и обладающая тем свойством, что все траектории, начинающиеся в этой области, стремятся при $t \to \infty$ к началу координат.

В линейных системах всегда бывает только полная устойчивость, тогда как в нелинейных системах она может не быть таковой.

Теорема. *Пусть $v(x_1,\ldots,x_n)$ — функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка для всех x_i. Обозначим через Ω_l множество всех точек, где $v(x_1,\ldots,x_n) < l$. Если множество Ω_l ограничено и в нем*

$$\begin{aligned} &1)\ v(x_1,\ldots,x_n) > 0 \quad \textit{при} \quad x_i \neq 0, \\ &2)\ \dot{v}(x_1,\ldots,x_n) < 0 \quad \textit{при} \quad x_i \neq 0 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то начало координат — асимптотически устойчивое положение равновесия системы (2), *а* Ω_l *— область асимптотической устойчивости.*

Пример 2. Указать область асимптотической устойчивости уравнения

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\varepsilon < 0)$$

(уравнение Ван-дер-Поля).

Решение. Перепишем уравнение в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Единственная точка покоя — начало координат. Возьмем $v(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$. Тогда

$$\dot{v}(x, y) = y\dot{y} + x\dot{x} = -\varepsilon x^2\left(\frac{x^2}{3} - 1\right).$$

Очевидно, $\dot{v} \leqslant 0$ при $x^2 \leqslant 3$ $(\varepsilon < 0)$. Таким образом, в круге $x^2 + y^2 < 3$ имеем: $v > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ и $\dot{v} < 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$, т. е. этот круг содержится в области асимптотической устойчивости. ▷

Устойчивость по Лагранжу

Пусть имеем систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения системы (5) для всех $t \in [t_0, +\infty)$ и любых $x_1, \ldots, x_n$.

Определение. Система (5) называется *устойчивой по Лагранжу*, если все решения этой системы определены и ограничены на $[t_0, +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

457. Показать, что все решения уравнения

$$\ddot{x}(t) + \left(a^2 + \frac{1}{1 + t^2}\right)x(t) = 0$$

ограничены на $[1, +\infty)$.

458. Показать, что все решения уравнения

$$\ddot{x}(t) + \left(1 + e^{-t^2} - \frac{1}{t+2}\right)x(t) = 0$$

ограничены на $[1, +\infty)$.

459. На примере уравнений

а) $\ddot{x}(t) - \frac{2}{t}\dot{x}(t) + x(t) = 0$; б) $\ddot{x}(t) + \frac{2}{t}\dot{x}(t) + x(t) = 0$

показать, что из ограниченности всех решений «предельного» уравнения $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ не следует ограниченность решений исходного уравнения.

---

§ 16. Критерий Рауса—Гурвица

Большое практическое значение имеют необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{1}$$

имели отрицательные вещественные части. Не нарушая общности, можно предположить, что $a_0 > 0$.

Положительность всех коэффициентов — необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения (1) были расположены слева от мнимой оси (в случае уравнений 1-й и 2-й степени это условие и достаточное). Необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (1) дали Раус и независимо от него Гурвиц.

Условия Рауса—Гурвица. *Для того чтобы все корни уравнения* (1) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Многочлен $f(\lambda)$ степени $n \geqslant 1$ называют *устойчивым многочленом*, если все его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ имеют отрицательные действительные части: $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. все корни устойчивого многочлена расположены в левой полуплоскости.

Матрица Гурвица составляется так. По главной диагонали располагаются коэффициенты многочлена (1), начиная с a_1 до a_n. Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, причем в число последних включается коэффициент a_0. Все недостающие элементы, т. е. коэффициенты с индексами, большими n или меньшими 0, заменяются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Таким образом, условие Гурвица выглядит так:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0. \tag{4}$$

Заметим, что так как $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$, то последнее из условий $\Delta_n > 0$ может быть заменено требованием $a_n > 0$.

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Здесь $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$, $a_5 = 3$.

Выписываем диагональные миноры Гурвица

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_1 = 1 > 0.$$

Итак, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$. Следовательно, тривиальное решение $y \equiv 0$ уравнения асимптотически устойчиво. ▷

Вычисления можно вести так. Сначала составляем минор Δ_n. Затем последовательно вычисляем миноры $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Если встретился отрицательный минор, то система неустойчива и дальнейшие вычисления излишни.

Если коэффициенты уравнения (1) заданы как числа, то условия (4) легко проверяются. Если же коэффициенты уравнения (2) содержат буквенные параметры, то вычисление определителей при больших k затруднительно.

Можно показать, что если условия (4) выполнены, то все коэффициенты многочлена (1) положительны

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \ldots, \quad a_n > 0. \tag{5}$$

Как уже отмечалось, условия (5) являются необходимыми, но не достаточными для того, чтобы все корни $f(\lambda)$ располагались в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Однако при выполнении условий (5) неравенства (4) уже не являются независимыми. Так, например, при $n = 5$ условия Рауса—Гурвица приводятся к двум неравенствам: $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Это позволило Льенару и Шипару установить другие условия устойчивости, в которых число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, чем в условиях (4).

Условия Льенара—Шипара. *Для того чтобы многочлен*

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{1'}$$

имел все корни с отрицательными действительными частями, необходимо и достаточно, чтобы:

1) *все коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ были положительны:*

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \ldots, \quad a_n > 0;$$

2) *имели место детерминантные неравенства*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \ldots \tag{6}$$

(здесь, как и раньше, Δ_k — определитель Гурвица k-го порядка).

Пример 2. Рассмотрим то же уравнение, что и на с. 123:

$$y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Здесь

$$a_0 = a_1 = 1 > 0, \quad a_2 = 7 > 0, \quad a_3 = 4 > 0, \quad a_4 = 10 > 0, \quad a_5 = 3 > 0,$$

т. е. условие 1) критерия Льенара—Шипара выполнено.

Далее,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

т.е. выполнено и условие 2).

Таким образом, тривиальное решение уравнения асимптотически устойчиво. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость тривиальные решения уравнений:

460. $y^{\text{IV}} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$

461. $y^{\text{IV}} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$

462. $y^{\text{IV}} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

463. $y^{\text{V}} + 2y^{\text{IV}} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

При каких значениях α будут устойчивы тривиальные решения следующих уравнений:

464. $y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0.$

465. $y^{\text{IV}} + 2y''' + y'' + \alpha y' + 3y = 0.$

466. $y^{\text{IV}} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0.$

При каких значениях α и β будут устойчивы тривиальные решения следующих уравнений:

467. $y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0.$

468. $y''' + \alpha y'' + \beta y' + 3y = 0.$

469. $y^{\text{IV}} + \alpha y''' + 2y'' + \beta y' + y = 0.$

470. Какой вид имеют условия Гурвица для возвратного уравнения

$$\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + p\lambda + 1 = 0$$

(p и q — действительные)?

§ 17. Геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова)

Пусть имеем дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{1}$$

Вопрос об устойчивости решения дифференциального уравнения (1) сводится к вопросу о расположении корней характеристического уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{2}$$

на комплексной плоскости. Последний решается с помощью нижеследующего критерия Михайлова.

Пусть дан характеристический многочлен

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{3}$$

Подставив в него $\lambda = i\omega$, получим

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots, \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \ldots. \end{aligned} \tag{5}$$

Величину $f(i\omega)$ согласно (4) и (5) при заданном параметре ω можно изобразить на комплексной плоскости uOv в виде вектора. Если изменять параметр ω в интервале $(-\infty, +\infty)$, то конец этого вектора опишет некоторую кривую, каждая точка которой соответствует определенному значению ω.

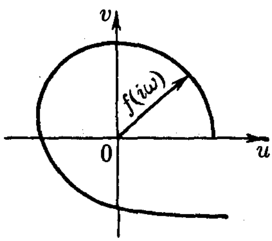


Рис. 5

Полученный таким образом годограф вектора $f(i\omega)$ называется *кривой Михайлова* для многочлена $f(\lambda)$ (рис. 5).

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $f(i\omega)$ повернется на некоторый угол φ. Если многочлен $f(\lambda)$ имеет m корней с положительными вещественными частями, а остальные $n-m$ корней с отрицательными, то

$$\varphi = (n-m)\pi + m(-\pi) = (n-2m)\pi. \tag{6}$$

Замечание. Так как функция $u(\omega)$ четная, то кривая Михайлова симметрична относительно оси Ou, и поэтому достаточно строить часть кривой Михайлова, отвечающую изменению параметра ω от 0 до $+\infty$. Тогда формула (6) примет вид

$$\varphi = (n-m)\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n-2m)\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Для устойчивости решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения $f(\lambda) = 0$ имели отрицательные вещественные части, т. е. в формуле (7) должно быть $m = 0$.

Отсюда вытекает следующая формулировка *критерия Михайлова*:

Критерий Михайлова. *Для устойчивости тривиального решения уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*:

1) *вектор* $f(i\omega)$ *при изменении* ω *от* 0 *до* $+\infty$ *совершил поворот на угол* $\varphi = n\frac{\pi}{2}$, *т. е. сделал* $\frac{n}{4}$ *оборотов против часовой стрелки*;
2) *годограф* $f(i\omega)$ *при изменении* ω *от* 0 *до* $+\infty$ *не проходил через нулевую точку.*

Иначе, для устойчивости решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова проходила поочередно n квадрантов против часовой стрелки, окружая все время начало координат.

Поочередное прохождение квадрантов означает, что кривая поочередно пересекает оси координат. Следовательно, координаты $u(\omega)$ и $v(\omega)$ точек кривой Михайлова для устойчивости решения должны поочередно обращаться в нуль. Отсюда вытекает вторая формулировка *критерия устойчивости Михайлова*:

Критерий Михайлова. *Для устойчивости решения уравнения* (1) *необходимо (а при условии, что кривая проходится против часовой стрелки — и достаточно), чтобы все корни уравнений* $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$ *были вещественными и перемежающимися друг с другом, т. е. чтобы между любыми двумя корнями одного из этих уравнений находился корень другого уравнения.*

Пример. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

<u>*Решение*</u>. Составляем характеристический многочлен

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} f(i\omega) &= \omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^2 + 2i\omega + 1, \\ u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1, \\ v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1-\omega^2) = 2\omega(1-\omega)(1+\omega). \end{aligned}$$

Будем изменять ω от 0 до $+\infty$ и построим кривую (рис. 6)

$$\begin{cases} u = u(\omega), \\ v = v(\omega), \end{cases}$$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \frac{v}{u} = 0.$$

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
u	1	0	-1	0
v	0	$+$	0	$-$

Угол поворота радиус-вектора

$$\varphi = 4\frac{\pi}{2} = (n-2m)\frac{\pi}{2}.$$

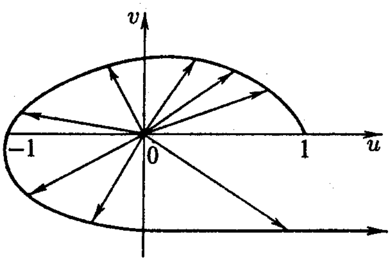


Рис. 6

Отсюда $n - 2m = 4$; $n = 4$; следовательно, $m = 0$. Таким образом, все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, т. е. тривиальное решение $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво. К этому же выводу можно было прийти, исходя из критерия Льенара—Шипара, поскольку все коэффициенты характеристического уравнения положительны и

$$\Delta_{n-1} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_{n-3} = \Delta_1 = 2 > 0. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость тривиальные решения уравнений:

471. $2y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

472. $3y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

473. $y^{\mathrm{V}} + 5y^{\mathrm{IV}} + 10y''' + 11y'' + 7y' + 2y = 0.$

474. $y^{\mathrm{IV}} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$

475. $y^{\mathrm{V}} + 2y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 46y'' + 89y' + 260y = 0.$

476. $y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$

477. $y^{\mathrm{VII}} + 7y^{\mathrm{VI}} + 23y^{\mathrm{V}} + 37y^{\mathrm{IV}} + 56y''' + 36y'' + 12y' + 4y = 0.$

478. $y^{\mathrm{IV}} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0.$

479. $y^{\mathrm{IV}} + 7y''' + 18y'' + 22y' + 12y = 0.$

480. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

481. $y^{\mathrm{IV}} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0.$

482. $y^{\mathrm{IV}} + 5y''' + 18y'' + 53y' + 60y = 0.$

483. $y^{\mathrm{IV}} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0.$

484. $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0.$

485. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$

486. $y^{\mathrm{IV}} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$

487. $y^{\mathrm{IV}} + 3y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0.$

488. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$

489. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + 8y' + 5y = 0.$

490. $y^{\mathrm{V}} + 4y^{\mathrm{IV}} + 5y''' + 2y' + 4y = 0.$

---

§ 18. D-разбиения

Пусть имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0. \tag{1}$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{2}$$

Для суждения об устойчивости решения уравнения (1) нет необходимости вычислять корни характеристического уравнения. Достаточно лишь установить, что все они лежат в левой полуплоскости. Обычно встречаются две постановки этой задачи.

Первая. Считая заданными все коэффициенты уравнения (1), установить, устойчиво ли решение при этих значениях коэффициентов.

Вторая. Считая заданными некоторые коэффициенты уравнения (1), определить, при каких значениях других коэффициентов решение уравнения устойчиво.

Построение областей устойчивости

Понятие о D-разбиении. Пусть имеем характеристическое уравнение

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{2}$$

Совокупность значений коэффициентов уравнения (1) можно рассматривать как точку $(n+1)$-мерного пространства R_{n+1}. Каждой точке пространства R_{n+1} соответствует определенное значение коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$, а следовательно, и определенное значение всех корней $z_1, z_2, \ldots, z_n$ характеристического уравнения (2). Если в R_{n+1} существует такая область, что каждой ее точке соответствует характеристическое уравнение, все корни которого лежат в левой полуплоскости, то эта область называется *областью устойчивости*, а гиперповерхность, ограничивающая ее, называется *границей области устойчивости*. Пусть, например, в характеристическом уравнении (2) все коэффициенты, кроме двух, скажем, a_1 и a_2, — конкретные числа.

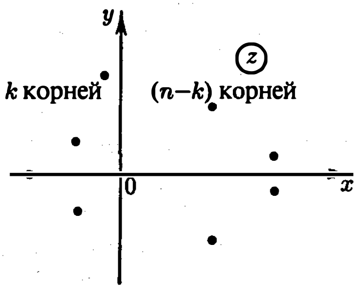


Рис. 7

Предположим, что при некоторых определенных значениях a_1 и a_2 данное уравнение в плоскости корней (т. е. в плоскости z) имеет k корней, лежащих слева, и $(n-k)$ корней, лежащих справа от мнимой оси (рис. 7).

На плоскости A (плоскость параметров a_1 и a_2) существует кривая, ограничивающая такую область (рис. 8), каждая точка которой определяет многочлен, также имеющий k корней, лежащих слева, и $n-k$ корней, лежащих справа от мнимой оси. Эту область обозначим через $D(k, n-k)$ (k — целое, $0 \leqslant k \leqslant n$).

Например, если характеристическое уравнение имеет третью степень, т. е. $n = 3$, то в общем случае в пространстве коэффициентов могут быть указаны области

$$D(0,3), \quad D(1,2), \quad D(2,1), \quad D(3,0).$$

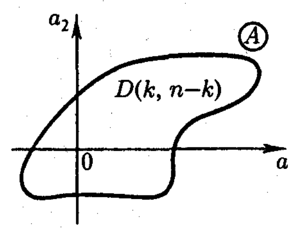


Рис. 8

Область $D(3,0)$ и будет областью устойчивости.

Заметим, что некоторые области, в частности $D(3,0)$, могут отсутствовать.

Разбиение пространства коэффициентов характеристического уравнения на области, соответствующие одному и тому же числу корней, расположенных в левой полуплоскости z, называется *D-разбиением пространства коэффициентов*.

Аналогично можно построить D-разбиение пространства любых параметров, от которых могут зависеть коэффициенты характеристического уравнения.

Положим, что в характеристическом уравнении (2) коэффициенты зависят от двух параметров ξ и η (этими параметрами могут быть, в частности, просто два коэффициента рассматриваемого уравнения).

Рассмотрим семейство многочленов

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z), \tag{3}$$

где (ξ, η) — вещественные параметры, а P, Q, R — известные многочлены от z с вещественными коэффициентами.

Задача ставится так:

в плоскости параметров (ξ, η) (плоскость w) найти область $D(n, 0)$ такую, что для любой точки $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$ многочлен (3) будет иметь все корни z в левой полуплоскости, или убедиться, что такой области нет.

Построение областей $D(k, n-k)$ основано на следующих соображениях:

1. Корни алгебраического уравнения непрерывно зависят от его коэффициентов, т. е. если коэффициенты многочлена $f(z, \xi, \eta)$ мало изменить, то и корни его изменятся мало.
2. Если точка (ξ, η) лежит на границе области $D(k, n-k)$, то хотя бы один корень многочлена (3) лежит на мнимой оси, т. е. граница D-разбиения является образом мнимой оси плоскости z.

Действительно, если, например, точка $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$, то многочлен (3) имеет при этом все корни в левой полуплоскости.

Если (ξ, η) лежит вне $D(n, 0)$, то многочлен (3) имеет хотя бы один корень в правой полуплоскости.

При непрерывном движении точки (ξ, η) из области $D(n, 0)$ в соседнюю непрерывно меняются корни многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Так как при этом появляется хотя бы один корень в правой полуплоскости, то в процессе изменения (ξ, η) он должен пересечь мнимую ось (ось Oy). Это будет, когда точка (ξ, η) пересечет границу области $D(n, 0)$.

Пусть $z = x + iy$ — корень многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Равенство $f(z, \xi, \eta) = 0$ равносильно равенствам

$$\begin{cases} \xi u_1(x, y) + \eta u_2(x, y) + u_3(x, y) = 0, \\ \xi v_1(x, y) + \eta v_2(x, y) + v_3(x, y) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 — вещественные и мнимые части многочленов P, Q и R соответственно.

Если определитель системы (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (4) однозначно разрешима относительно ξ и η:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения (5) в точках, где $\Delta \neq 0$, определяют однозначное отображение плоскости корней многочлена $f(z, \xi, \eta)$ на плоскость параметров (ξ, η).

Обратное отображение неоднозначно: фиксированной паре значений (ξ, η) отвечает, вообще говоря, n корней. Если определитель системы (4) в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ обращается в нуль, то система либо несовместна, либо одно уравнение является следствием другого.

В этом последнем случае на плоскости параметров w существует целая прямая, состоящая из точек (ξ, η), для которых $z_0 = x_0 + iy_0$ является корнем многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Такую точку (x_0, y_0), а также соответствующую ей прямую будем называть *исключительными*.

Найдем на плоскости параметров (ξ, η) те точки, для которых многочлен (3) имеет хотя бы один чисто мнимый корень $z = iy$.

Геометрическое место таких точек состоит из линии, параметрические уравнения которой есть

$$\begin{cases} \xi = \xi(0, y), \\ \eta = \eta(0, y) \end{cases} \qquad (-\infty < y < +\infty) \tag{6}$$

и которую можно получить, полагая $x = 0$ в уравнениях (5), а также из исключительных прямых, отвечающих исключительным точкам оси Oy (если таковые имеются).

Заметим, что уравнения (6) дают образ оси Oy при отображении (5). Это геометрическое место точек будем называть *линией* L.

Линия L разбивает плоскость параметров на некоторое число связных областей.

Каждая из таких областей обладает тем свойством, что для любой ее точки (ξ, η) многочлен $f(z, \xi, \eta)$ имеет одно и тоже число корней, расположенных в левой полуплоскости, т. е. является областью типа $D(k, n-k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Таким образом, линия L — граница искомого D-разбиения.

Рассмотрим отображение (5) плоскости корней на плоскость параметров

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases}$$

Проведем через точку (x_0, y_0) две линии: горизонтальную I и вертикальную II.

Определение. Если направление поворота от I к II сохраняется при отображении (5), то говорят, что отображение *сохраняет ориентацию* в точке (x_0, y_0); в противном случае — что оно *не сохраняет ориентацию* (рис. 9 и 10).

Если определитель

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} > 0$$

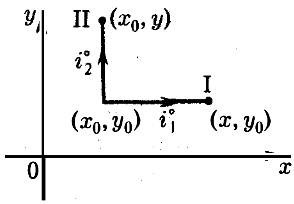


Рис. 9

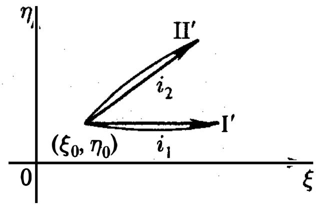


Рис. 10

в точке (x_0, y_0), то отображение (5) в точке (x_0, y_0) сохраняет ориентацию. При $I < 0$ ориентация нарушается. Если $I = 0$, то вопрос о сохранении или несохранении ориентации решают старшие производные. Можно показать, что знак определителя I совпадает со знаком определителя Δ, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

так что если $\Delta > 0$, то отображение с плоскости корней на плоскость параметров сохраняет ориентацию, если $\Delta < 0$, то ориентация меняется.

Рассмотрим опять разбиение плоскости w (плоскость параметров) на области $D(k, n-k)$ $(k \leqslant n)$ и обозначим через L границу этих областей. Положительным направлением на L будем считать то, которое соответствует возрастанию y (начиная с $y = -\infty$); при этом кривая L может состоять из нескольких ветвей, и при полном обходе оси Oy ее участки могут проходиться по нескольку раз (не более n, где n — степень многочлена $f(z, \xi, \eta)$).

Рассмотрим некоторый участок $w_1 w_2$ кривой L и предположим, что при полном обходе оси Oy он обходится r раз, т. е. что этому участку соответствует r участков $y_1^\mu y_2^\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, r)$ оси Oy. Положим $\varepsilon_\mu = 1$, если направление $y_1^\mu y_2^\mu$ совпадает с направлением оси Oy, и $\varepsilon_\mu = -1$ — в противном случае. Положим также $\delta_\mu = 1$, если на $y_1^\mu y_2^\mu$ определитель $\Delta > 0$, и $\delta_\mu = -1$ — в противном случае. Пусть точка w, двигаясь непрерывно по некоторому достаточно малому пути, пересекает дугу $w_1 w_2$ слева направо (рис. 11). Этому пути в плоскости z соответствует r путей, пресекающих отрезки $y_1^\mu y_2^\mu$ оси Oy. Если $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$, то соответствующий путь идет из левой полуплоскости в правую и многочлен

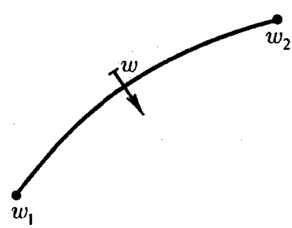


Рис. 11

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z)$$

приобретает на нем один корень с положительной действительной частью и теряет корень с отрицательной действительной частью; в случае $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$ — наоборот.

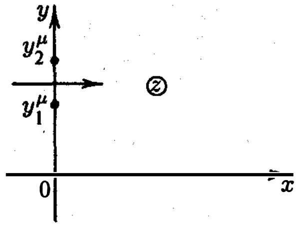


Рис. 12

Действительно, пусть $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$. Это может быть в двух случаях: 1) $\varepsilon_\mu = 1$, $\delta_\mu = 1$; 2) $\varepsilon_\mu = -1$, $\delta_\mu = -1$. В первом случае направление отрезка $y_1^\mu y_2^\mu$ оси Oy совпадает с положительным направлением этой оси ($\varepsilon_\mu = 1$) и сохраняется ориентация ($\delta_\mu = 1$), т.е. если в плоскости w мы переходим дугу w_1w_2 слева направо, то и в плоскости z мы переходим с левой полуплоскости в правую (т.е. ось Oy пересекаем тоже слева направо, рис. 12).

Во втором случае вектор $\overrightarrow{y_1^\mu y_2^\mu}$ направлен в сторону, противоположную направлению $\overrightarrow{Oy}$ ($\varepsilon_\mu = -1$). Так как $\delta_\mu = -1$, то ориентация в этом случае меняется, и при переходе слева направо в плоскости w мы опять получаем переход слева направо в плоскости z через ось Oy.

Аналогично рассматривается случай $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$.

Итак, при переходе с левой стороны дуги w_1w_2 кривой L на правую сторону многочлен $f(z, \xi, \eta)$ теряет

$$N = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \ldots + \varepsilon_r\delta_r$$

корней с отрицательной действительной частью.

Пример Вышеградского. Дан многочлен $f(z) = z^3 + \xi z^2 + \eta z + 1$. Найти область $D(3, 0)$.

Решение. Полагая $z = iy$ и разделяя действительную и мнимую части, найдем параметрические уравнения кривой L:

$$\xi = \frac{1}{y^2}, \quad \eta = y^2.$$

Это — лежащая в первом квадранте ветвь гиперболы $\xi\eta = 1$. При полном обходе оси Oy (y меняется от $-\infty$ до $+\infty$) гипербола описывается два раза, т. е. $r = 2$; при этом один раз гипербола проходится в одном направлении при изменении y от $-\infty$ до 0.

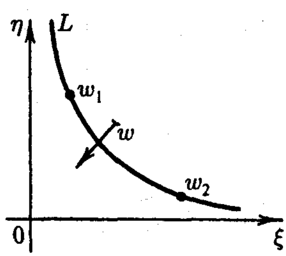


Рис. 13

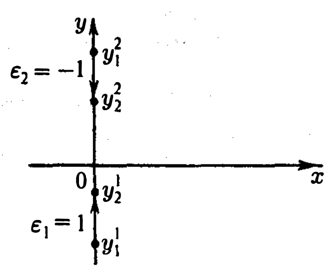


Рис. 14

При дальнейшем изменении y от 0 до $+\infty$ гипербола проходится второй раз, но уже в противоположном направлении. Таким образом, отрезку w_1w_2 кривой L

отвечают два отрезка оси Oy: $y_1^1y_2^1$ и $y_1^2y_2^2$ (рис. 13 и 14). Определитель Δ на оси Oy равен $\Delta = -y^3$. Следовательно, $\delta_1 = 1$ (ибо при $\mu = 1$ $y < 0$), а $\delta_2 = -1$ (ибо при $\mu = 2$ $y > 0$). При переходе точки w через w_1w_2 слева направо теряется N корней с отрицательной частью, где

$$N = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 = 2.$$

В начале координат $\xi = \eta = 0$ многочлен $f(z)$ принимает вид z^3+1 и имеет корни $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, следовательно, область под гиперболой есть $D(1,2)$. Область над гиперболой есть область $D(3,0)$. В самом деле, при переходе из этой области в $D(1,2)$ многочлен $f(z)$ потерял два корня с отрицательной вещественной частью и превратился в многочлен, имеющий один корень с отрицательной вещественной частью. Следовательно, в области над гиперболой было три корня с отрицательной вещественной частью (рис. 15). Для проверки можно взять точку $\xi = \eta = 3$, в которой многочлен принимает вид

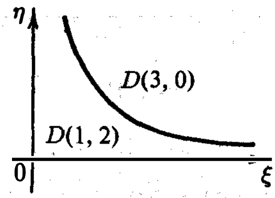


Рис. 15

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1$$

и имеет трехкратный корень $z = -1$.

Таким образом, для построения D-областей поступаем так:

1. В многочлене $f(z, \xi, \eta)$ полагаем $z = iy$, отделяем действительную и мнимую части и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \xi u_1(y) + \eta u_2(y) + u_3(y) = 0, \\ \xi v_1(y) + \eta v_2(y) + v_3(y) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решая (7) относительно ξ и η, получаем

$$\begin{cases} \xi = \xi(y), \\ \eta = \eta(y) \end{cases}$$

— параметрические уравнения линии L.

2. Строим кривую L на плоскости параметров, изменяя y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, причем если в уравнениях (7) ξ — первая по порядку написания переменная, а η — вторая, то при построении кривой L система координат $\xi O\eta$ должна быть правой.

Если при некотором значении y определитель системы (7) и определители

$$\Delta\xi = \begin{vmatrix} -u_3 & u_2 \\ -v_3 & v_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta\eta = \begin{vmatrix} u_1 & -u_3 \\ v_1 & -v_3 \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль, то при этом значении y одно из уравнений (7) является следствием другого, и для этого значения y получаем в плоскости $\xi O\eta$ не точку, а прямую линию (особая или исключительная прямая). Ее мы также включаем в границу D-разбиения.

Если коэффициент при старшем члене характеристического уравнения зависит от параметров ξ и η, то, приравнивая этот коэффициент нулю, получаем уравнение еще одной особой прямой, соответствующей $y = \infty$.

Если, наконец, определитель системы (7) $\Delta \equiv 0$, то границей D-разбиения служат только особые прямые.

3. Выделяем связные области, на которые L разбивают плоскость параметров. Это и будут области $D(k, n-k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

4. Определяем характер этих областей, т. е. находим k и $n-k$. Для этого выбираем в каждой из областей $D(k, n-k)$ по одной точке (ξ_0, η_0) и исследуем полученный многочлен $f(z, \xi_0, \eta_0)$ с числовыми коэффициентами на устойчивость с помощью изложенных выше критериев устойчивости Рауса—Гурвица или Михайлова (см. §§ 26, 27). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Построить D-области для следующих многочленов:

491. $z^3 + \xi z^2 + \eta z + 6$.

492. $z^4 + \xi z^3 + \eta z^2 + 4z + 1$.

493. $z^3 + \xi z^2 + 11z + \eta$.

494. $z^3 + (z^2 + 2)\xi + \eta z - 4$.

495. $z^4 + 2z^3 + \xi z^2 + z + \eta$.

496. $z^3 + 3z^2 + \xi z + \eta$.

497. $z^3 + \xi z^2 + (z+1)\eta + 1$.

498. $z^3 + \eta z^2 + \xi z + 6$.

499. $z^3 + 2z^2 + \xi(z-1) + \eta$.

500. $z^3 + \xi(z^2 + z) + z + 2\eta$.

501. $\xi z^3 + 3z^2 + \eta z + 1$.

502. $\xi(z^3 + z^2) + \eta(z^2 + 1) + 2z$.

503. $\xi(z^3 - z) + \eta(z^2 + z - 1) + 1$.

§ 19. Устойчивость решений разностных уравнений

1°. Решение однородных линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть имеем разностное уравнение порядка k:

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = 0, \tag{1}$$

где $a_k \neq 0$; $f(n)$ — искомая функция целочисленного аргумента; $a_1, \ldots, a_k$ — действительные постоянные.

Для нахождения нетривиальных (ненулевых) решений уравнения (1) составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \tag{2}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — корни уравнения (2).

Возможны следующие случаи:

1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — вещественные и различные.

Общим решением уравнения (1) будет

$$f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n, \tag{3}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные, которые могут быть определены, если заданы начальные условия

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \quad \ldots, \quad f(k-1) = f_{k-1}.$$

2) Корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные. Пусть, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_j = \widetilde{\lambda}$, т. е. λ является j-кратным корнем уравнения (2), а все остальные k корней различные.

Общим решением уравнения (1) будет

$$f(n) = C_1\widetilde{\lambda}^n + C_2 n\widetilde{\lambda}^n + \ldots + C_j n^{j-1}\widetilde{\lambda}^n + C_{j+1}\widetilde{\lambda}_{j+1}^n + \ldots + C_k\widetilde{\lambda}_k^n. \tag{4}$$

3) Среди корней характеристического уравнения (2) имеются простые комплексные корни. Пусть, например, для определенности

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \lambda_3 = \gamma + i\delta, \quad \lambda_4 = \gamma - i\delta,$$

остальные корни действительные и различные.

Общее решение (1) имеет тогда вид

$$\begin{aligned} f(n) = C_1|\lambda_1|^n \cos(n \arg\lambda_1) + C_2|\lambda_1|^n \sin(n\arg\lambda_1) + \\ + C_3|\lambda_3|^n \cos(n\arg\lambda_3) + C_4|\lambda_3|^n \sin(n\arg\lambda_3) + C_5\lambda_5^n + \ldots + C_k\lambda_k^n. \end{aligned} \tag{5}$$

4) В случае, если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ является j-кратным корнем уравнения (2) $\left(j \leqslant \dfrac{k}{2}\right)$, то $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ также будет j-кратным корнем и общее решение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} f(n) = \left(C_1 + C_2 n + \ldots + C_j n^{j-1}\right)|\lambda_1|^n \cos(n\arg\lambda_1) + \\ + \left(C_{j+1} + C_{j+2}n + \ldots + C_{2j}n^{j-1}\right)|\lambda_1|^n \sin(n\arg\lambda_1) + \\ + C_{2j+1}\lambda_{2j+1}^n + \ldots + C_k\lambda_k^n. \end{aligned} \tag{6}$$

Замечание. Корень $\lambda = 0$ соответствует тривиальному (нулевому) решению $f(n) \equiv 0$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) + 4f(n+1) + f(n) = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -2 - \sqrt{3}$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$ различные и действительные; следовательно,

$$f(n) = C_1(-2 - \sqrt{3})^n + C_2(-2 + \sqrt{3})^n.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Общим решением будет

$$f(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) \cdot 1^n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

имеет простые комплексные корни

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Находим

$$|1 \pm i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

Общее решение имеет вид

$$f(n) = C_1 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 2^{n/2} \sin\frac{n\pi}{4} = 2^{n/2}\left(C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$f(n+4) + 2f(n+3) + 4f(n+2) - 2f(n+1) - 5f(n) = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0.$$

Перепишем его в виде

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0.$$

Корнями этого уравнения будут

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1 + 2i, \quad \lambda_4 = -1 - 2i.$$

Здесь

$$|-1 \pm 2i| = \sqrt{5}, \quad \arg(-1 + 2i) = \pi - \operatorname{arctg} 2.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$f(n) = C_1 + C_2(-1)^n + [C_3 \cos n(\pi - \operatorname{arctg} 2) + C_4 \sin n(\pi - \operatorname{arctg} 2)]5^{n/2},$$

или

$$f(n) = C_1 + C_2(-1)^n + (-1)^n 5^{n/2}[C_3 \cos(n \operatorname{arctg} 2) - C_4 \sin(n \operatorname{arctg} 2)].$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие разностные уравнения:

504. $3f(n+2) - 2f(n+1) - 8f(n) = 0$.

505. $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = 0, \quad f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 3$.

506. $4f(n+2) - 8f(n+1) + 5f(n) = 0$.

507. $f(n+3) - 8f(n) = 0$.

508. $f(n+4) - f(n+2) + 2f(n+1) + 2f(n) = 0$.

2°. Решение неоднородных линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть имеем неоднородное линейное разностное уравнение k-го порядка

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = g(n) \tag{7}$$

с постоянными действительными коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$. Общее решение этого уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

1) Пусть правая часть $g(n)$ уравнения (7) имеет вид

$$g(n) = r^n u(n),$$

где $u(n)$ — многочлен от n степени m, а r — действительное число.

Если r не является корнем характеристического уравнения (2), то частное решение $\widetilde{f}(n)$ ищется в виде

$$\widetilde{f}(n) = r^n \widetilde{u}(n),$$

где $\widetilde{u}(n)$ — многочлен степени m; если же r является j-кратным корнем уравнения (2), то $\widetilde{u}(n)$ — многочлен степени $m + j$.

2) Если правая часть $g(n)$ уравнения имеет вид

$$g(n) = u(n)\sin\alpha n \quad \text{или} \quad g(n) = u(n)\cos\alpha n,$$

то частное решение ищется в виде

$$\widetilde{f}(n) = \widetilde{u}(n)\sin\alpha n + \widetilde{\widetilde{u}}(n)\cos\alpha n.$$

3) Если $g(n) = u(n)\,\mathrm{sh}\,\alpha n$ или $g(n) = u(n)\,\mathrm{ch}\,\alpha n$, то частное решение ищется в виде

$$\widetilde{f}(n) = \widetilde{u}(n)\,\mathrm{sh}\,\alpha n + \widetilde{\widetilde{u}}(n)\,\mathrm{ch}\,\alpha n.$$

Здесь и в п. 2) $\widetilde{u}(n)$ и $\widetilde{\widetilde{u}}(n)$ — многочлены, степень которых определяется по правилу, указанному в п. 1).

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 2^n(n+1). \tag{8}$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda+3=0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2.$$

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\tilde{f}(n) = 2^n(An + B), \tag{9}$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Подставляя (9) в (8), получим

$$2^{n+2}(An + 2A + B) - 4 \cdot 2^{n+1}(An + A + B) + 3 \cdot 2^n(An + B) = 2^n(n+1),$$

или

$$4(An + 2A + B) - 8(An + A + B) + 3(An + B) = n + 1.$$

Отсюда находим

$$4A - 8A + 3A = 1,$$
$$8A + 4B - 8A - 8B + 3B = 1,$$

так что $A = -1$, $B = -1$.

Таким образом, частное решение данного уравнения

$$\tilde{f}(n) = -2^n(n+1);$$

общее решение

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2 - 2^n(n+1). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах найти общие решения данных неоднородных линейных разностных уравнений:

509. $f(n+2) - 2f(n+1) - f(n) = n$.

510. $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 3^n \cdot 32, \quad f(0) = 0,\ f(1) = 0$.

511. $f(n+2) + f(n) = \sin 2n, \quad f(0) = 0,\ f(1) = 1$.

512. $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = e^n$.

513. $f(n+3) + 8f(n) = 2^n$.

3°. Устойчивость решений разностных уравнений. Решение $f^*(n)$ разностного уравнения порядка k, удовлетворяющее начальным условиям

$$f^*(0) = f_0^*, \quad f^*(1) = f_1^*, \quad \ldots, \quad f^*(k-1) = f_{k-1}^*,$$

называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $f(n)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \quad \ldots, \quad f(k-1) = f_{k-1},$$

из совокупности неравенств

$$|f_0 - f_0^*| < \delta, \quad |f_1 - f_1^*| < \delta, \quad \ldots, \quad |f_{k-1} - f_{k-1}^*| < \delta$$

следует неравенство $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ при любом $n \geqslant 0$.

Если при сколь угодно малом $\delta(\varepsilon) > 0$ неравенство $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ не выполняется для какого-либо решения $f(n)$, то решение $f^*(n)$ называется *неустойчивым.*

Если кроме выполнения неравенства $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ выполняется также условие

$$\lim_{n\to\infty} [f(n) - f^*(n)] = 0,$$

то решение $f^*(n)$ называется *асимптотически устойчивым.*

Исследование на устойчивость решения $f^*(n)$ неоднородного линейного разностного уравнения

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = g(n)$$

с помощью замены $\varphi = f(n) - f^*(n)$ сводится к исследованию устойчивости нулевого (тривиального) решения однородного уравнения

$$\varphi(n+k) + a_1\varphi(n+k-1) + \ldots + a_k\varphi(n) = 0.$$

В дальнейшем мы ограничимся исследованием устойчивости только тривиальных решений однородных уравнений.

Пример 6. Исходя из определения устойчивости разностного уравнения, исследовать на устойчивость решение уравнения

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0, \tag{10}$$

удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 0,\ f(1) = 0$.

Решение. Решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 0,\ f(1) = 0$, есть

$$f(n) \equiv 0,$$

ибо из (10)

$$f(n+2) = f(n+1) - \frac{1}{2}f(n).$$

Любое решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $f(0) = f_0$, $f(1) = f_1$, имеет вид

$$f^*(n) = \frac{1}{2^{n/2}}\left[f_0\cos\frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right].$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|f_0 - 0| < \delta$ и $|f_1 - 0| < \delta$ имеет место неравенство

$$|0 - f^*(n)| = \frac{1}{2^{n/2}}\left|f_0\cos\frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant 0$. Это и будет означать согласно определению, что нулевое решение $f^*(n) \equiv 0$ устойчиво.

Очевидно, что

$$\frac{\left|f_0\cos\left(\frac{1}{4}n\pi\right)+(f_1-f_0)\sin\left(\frac{1}{4}n\pi\right)\right|}{2^{n/2}} \leqslant \frac{|f_0|+|f_1-f_0|}{2^{n/2}} \leqslant$$

$$\leqslant |f_0|+|f_1-f_0| \leqslant |f_0|+|f_1|+|f_0| \leqslant 2(|f_0|+|f_1|)$$

для всех $n \geqslant 0$. Поэтому, если $|f_0|+|f_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, то и подавно $|0-f^*(n)| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant 0$. Следовательно, если, например, взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$, то при $|f_0| < \delta$ и $|f_1| < \delta$ будет выполняться неравенство $|0-f^*(n)| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant 0$, так что нулевое решение данного уравнения устойчиво. Эта устойчивость асимптотическая, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left[0-f^*(n)\right] = -\lim_{n\to\infty}\frac{f_0\cos\left(\frac{1}{4}n\pi\right)+(f_1-f_0)\sin\left(\frac{1}{4}n\pi\right)}{2^{n/2}} = 0. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Исходя из определения устойчивости, исследовать на устойчивость нулевые решения следующих разностных уравнений:

514. $8f(n+2)+2f(n+1)-f(n)=0.$

515. $f(n+2)+f(n)=0.$

516. $4f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0.$

517. $f(n+2)-6f(n+1)-7f(n)=0.$

Для исследования на устойчивость нулевого решения $f(n)\equiv 0$ уравнения (1) пользуются следующими общими правилами:

1. Если все корни характеристического уравнения (2) по модулю меньше единицы, то решение $f(n)\equiv 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.
2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения по модулю больше единицы, то решение $f(n)\equiv 0$ неустойчиво.
3. Если характеристическое уравнение имеет простые корни с модулями, равными единице, а остальные корни, если они есть, по модулю меньше единицы, то решение $f(n)\equiv 0$ устойчиво, но не асимптотически.
4. Если характеристическое уравнение имеет хотя бы один кратный корень с модулем, равным единице, то решение $f(n)\equiv 0$ неустойчиво.

Указанное правило сводит вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1) к выяснению того, каковы модули корней характеристического уравнения (2).

Пример 7. Исследовать на устойчивость нулевое решение $f(n) \equiv 0$ уравнения

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}$. Имеем

$$|\lambda_{1,2}| = \left|\frac{1 \pm i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Следовательно, решение $f(n) \equiv 0$ этого уравнения асимптотически устойчиво. ▷

Пример 8. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 5f(n) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Имеем

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 1.$$

Оба корня по модулю больше единицы, значит, решение $f(n) \equiv 0$ неустойчиво. ▷

Известно, что функция

$$\lambda = \frac{w+1}{w-1}$$

отображает внутренность единичного круга плоскости λ на левую полуплоскость плоскости w. Корням характеристического уравнения (2), лежащим внутри единичного круга $|\lambda| < 1$ (т. е. по модулю меньшим единицы), будут соответствовать корни преобразованного уравнения

$$(w+1)^k + a_1(w+1)^{k-1}(w-1) + \ldots + a_k(w-1)^k = 0,$$

или

$$b_0 w^k + b_1 w^{k-1} + \ldots + b_n = 0, \tag{11}$$

лежащие в левой полуплоскости плоскости w.

Вопрос о расположении корней уравнения (11) может быть решен с помощью критерия Рауса—Гурвица или критерия Михайлова.

Пример 9. Найти необходимые и достаточные условия того, что корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{12}$$

находятся в единичном круге $|\lambda| < 1$.

<u>*Решение*</u>. Полагаем $\lambda = \dfrac{w+1}{w-1}$. Тогда уравнение (12) примет вид

$$(w+1)^2 + a_1(w+1)(w-1) + a_2(w-1)^2 = 0,$$

или

$$(1 + a_1 + a_2)w^2 + (2 - 2a_2)w + (1 - a_1 + a_2) = 0. \tag{13}$$

К многочлену (13) применяем критерий Рауса—Гурвица (см. § 26). Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2-2a_2 & 1+a_1+a_2 \\ 0 & 1-a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = 2 - 2a_2, \quad \Delta_2 = (2 - 2a_2)(1 - a_1 + a_2).$$

В силу указанного критерия должно быть

$$1 + a_1 + a_2 > 0, \quad 1 - a_2 > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 > 0. \tag{14}$$

Итак, характеристическое уравнение (12) имеет в круге $|\lambda| < 1$ корни тогда и только тогда, когда выполняются условия (14). ▷

Следствие. *Линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*

$$f(n+2) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = 0$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение $f(n) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям* (14).

Пример 10. Исследовать на устойчивость нулевое решение $f(n) \equiv 0$ уравнения

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

<u>*Решение*</u>. Перепишем это уравнение в виде

$$f(n+2) - f(n+1) + \frac{1}{2}f(n) = 0.$$

Здесь $a_1 = -1$, $a_2 = 0{,}5$. Поэтому

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 &= 0{,}5 > 0, \\ 1 - a_2 &= 0{,}5 > 0, \\ 1 - a_1 + a_2 &= 2{,}5 > 0. \end{aligned}$$

Условия (14) критерия Рауса—Гурвица выполнены. Значит, решение $f(n) \equiv 0$ асимптотически устойчиво. ▷

Пример 11. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$f(n+2)+f(n+1)+2f(n)=0.$$

Решение. Здесь $a_1=1$, $a_2=2$. Имеем

$$1+a_1+a_2=4>0,$$
$$1-a_2=-1<0.$$

Нулевое решение неустойчиво. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих разностных уравнений найти необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения:

518. $a_0f(n+3)+a_1f(n+2)+a_2f(n+1)+a_3f(n)=0.$

519. $f(n+4)+pf(n+2)+qf(n)=0.$

520. $f(n+5)+pf(n)=0.$

521. $af(n+5)-bf(n)=0,\quad a\neq 0,\ b>0.$

Используя критерий Рауса—Гурвица, исследовать на устойчивость нулевое решение следующих разностных уравнений:

522. $11f(n+4)-8f(n+3)+8f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0.$

523. $f(n+4)+f(n+3)+f(n)=0.$

524. $12f(n+4)-3f(n+3)+2f(n+2)+2f(n+1)-2f(n)=0.$

525. $7f(n+4)-4f(n+3)+30f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=0.$

526. $f(n+5)-f(n+1)+f(n)=0.$

527. $f(n+5)-f(n+2)-f(n)=0.$

528. $f(n+5)+f(n+1)-f(n)=0.$

Ответы

1. а) да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) нет; ж) нет; з) да; и) нет; к) да; л) да; м) да.

2. $\frac{1}{p^2}$. **3.** $\frac{3}{p^2+9}$. **4.** $\frac{1}{(p-1)^2}$. **5.** $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$.

6. Нет. **7.** $\frac{p+1}{p^2}$. **8.** $\frac{2-p}{p^2+1}$. **9.** $\frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$.

10. $\frac{1}{p-a}$. **11.** $\frac{4}{p^2+16}$. **12.** а) $\frac{p}{p^2+\omega^2}$; б) $\frac{3}{p^2-9}$.

13. $aF(pa)$. **14.** $\frac{2}{p(p^2+4)}$. **15.** $\frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$.

16. $\frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$. **17.** $\frac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$.

18. $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}+\frac{p}{p^2+16}-\frac{4p}{p^2+1}\right)$. **19.** $\frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$.

20. $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. **21.** $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. **22.** $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.

23. $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. **24.** $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. **25.** $\frac{1}{(p-1)^2}$.

26. $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. **27.** $\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$. **28.** $\frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

29. $\frac{6p}{(p^2-9)^2}$. **30.** $\frac{1}{p(p^2+1)}$. **31.** $\frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$.

32. $\frac{4}{(p^2-4)^2}$. **33.** $\frac{p^2+2\omega^2}{p^2(p^2+4\omega^2)}$. **34.** $\frac{1}{p^2-\omega^2}$.

35. $\frac{2}{p(p+1)^3}$. **36.** а) $\ln\frac{p}{p-1}$; б) $\ln\frac{p+1}{p}$; в) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.

37. а) $\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$; б) $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+4}{p^2+1}$. **38.** а) $\ln\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p}$; б) $\ln\frac{p+1}{p-1}$.

39. $\ln\frac{b}{a}$. **40.** $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{a}$. **41.** $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$.

42. $A\ln\frac{\delta}{\alpha}+B\ln\frac{\delta}{\beta}+C\ln\frac{\delta}{\gamma}$. **43.** $\ln\frac{b}{a}$. **44.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.

45. а) $\dfrac{1}{(p-2)^2+1}$; б) $\dfrac{p-m}{(p-m)^2+n^2}$. **46.** $\dfrac{3!}{(p+1)^4}$. **47.** $\dfrac{1}{(p-1)^2-1}$.

48. $\dfrac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}$. **49.** $\dfrac{1}{2(p-3)}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}$.

50. $\dfrac{1}{2(p+\alpha)}+\dfrac{p+\alpha}{2[(p+\alpha)^2+4\beta^2]}$. **51.** $\dfrac{e^{-bp}}{p^2+1}$.

52. $\dfrac{e^{-bp}}{2p}+\dfrac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}$. **53.** $\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$. **54.** $\dfrac{1-e^{-p}}{p}$. **55.** $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$.

56. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. **57.** $\dfrac{e^{-ap}}{p+b}$. **58.** $\dfrac{be^{-ap}}{p(p+b)}$. **59.** $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

60. $\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$. **61.** $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(2k+1)}{e^{kp}}$.

62. $F(p)=\dfrac{1}{ap^2}(2e^{-2ap}-1)+\dfrac{2}{p}e^{-ap}$. **63.** $F(p)=\dfrac{e^{-ap}}{p}(2-e^{-ap}-e^{-2ap})$.

64. $F(p)=-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{ap^2}+\dfrac{ap-2}{ap^2}e^{-ap}+\dfrac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

65. $F(p)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1-2ap}{ap^2}e^{-ap}-\dfrac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

66. $F(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{ap^2}e^{-ap}+\dfrac{2}{ap^2}e^{-3ap}$.

67. $F(p)=-\dfrac{b}{p}e^{-ap}+\dfrac{2b}{p}e^{-2ap}$. **69.** $F(p)=\dfrac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}$.

70. $\dfrac{1+p-e^{-p}}{p^2(e^p-1)}$. **71.** $\dfrac{1}{p^2+1}\cdot\dfrac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}$.

72. $\dfrac{1}{p^2+1}\left(p+\dfrac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{1-e^{-\pi p}}\right)$.

73. $\dfrac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}$. **77.** а) $\dfrac{2e^{-\frac{\pi}{8}p}}{p^2+4}$; б) $\dfrac{pe^{-\frac{\pi}{18}p}}{p^2+9}$; в) $\dfrac{3e^{-2p}}{p^2-9}$.

78. $\sum\limits_{k=0}^{n}m_ke^{-kp}$. **79.** $\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$. **80.** $\dfrac{p}{(p-2)(p^2+1)}$.

81. $\dfrac{2}{p^2(p^2-1)}$. **82.** $\dfrac{n!F(p)}{p^{n+1}}$. **83.** $\dfrac{2}{p^3(p+2)}$.

85. _Решение_. Известно, что $J_1(t)=-J_0'(t)$. Используя результаты предыдущей задачи и теорему о дифференцировании оригинала, находим

$$J_1(t)\risingdotseq -p\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}+J_0(0)=-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}+1=\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

86. *Решение*. При $n = 0$ и $n = 1$ формула

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$$

верна. Применим метод математической индукции. Так как

$$2J_n'(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \quad \text{и} \quad J_{n-1}(0) = 0 \quad (n \geqslant 2),$$

то

$$J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J_{n-1}'(t) \risingdotseq$$
$$\risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}} - 2p\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

87. *Решение*. Рассмотрим функцию

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}}e^{-1/p} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!p^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!p^{n+k+1}}.$$

Следовательно, $f(t) \risingdotseq \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{n+k}}{k!(n+k)!}$. Замечая, что

$$J_n(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\frac{n}{2}+k}}{k!(n+k)!},$$

получаем $f(t) = t^{n/2}J_n(2\sqrt{t})$.

В частности, при $n = 0$ имеем $J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-1/p}$.

89. Положим $\varphi(t) = t^n e^{-t}$. По теореме смещения

$$t^n e^{-t} \risingdotseq \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$. Согласно теореме о дифференцировании оригиналов

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \risingdotseq \frac{p^n \cdot n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Используя теорему смещения, находим

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \risingdotseq \frac{(p-1)^n \cdot n!}{n!p^{n+1}} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

90. $-\frac{\ln p}{p} - \frac{C}{p}$, где $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ — постоянная Эйлера.

91. *Решение*. Рассмотрим функцию $f(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$, и пусть $F(p)$ есть изображение $f(t)$. Имеем $(\operatorname{erf} t)' = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$,

$$f'(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \qquad (1)$$

Переходя к изображениям и учитывая, что $f(0) = 0$, из (1) найдем $pF(p) = F(p) + \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, откуда $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$. Здесь мы использовали результат задачи 515 и то, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Итак,

$$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Применяя теорему смещения, окончательно находим

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

97. а) $\dfrac{\pi}{2}e^{-t}$; б) $\dfrac{\pi}{2}\eta(t-1)$. **98.** $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$,

99. $(t-1)^2\eta(t-1)$. **100.** $(t-2)\eta(t-2)$. **101.** $e^{t-2}\eta(t-2)$.

102. $e^{-3(t-3)}\eta(t-3)$. **103.** $e^{-2t}\sin t$. **104.** $\dfrac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3})$.

105. $(1-t)e^{-t}$. **106.** $\dfrac{1}{2}t\sin t$. **107.** $1 - e^{-t} - te^{-t}$.

108. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}e^{t/2}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t$. **109.** $\dfrac{t^2}{2} + 2e^{-t}\sin t$. **110.** $t - \sin t$.

111. $\dfrac{1}{6}e^{2t} - \dfrac{1}{15}e^{-t} - \dfrac{1}{10}\cos 2t - \dfrac{1}{5}\sin 2t$.

112. $1 - ne^{-t} + \dfrac{1}{2}n(n-1)e^{-2t} - \ldots + (-1)^n e^{-nt}$.

113. $\dfrac{2}{3}e^{-t/2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - t\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. **114.** $e^{-t}(1-t^2)$.

115. $\dfrac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{1}{3}e^{-t}$. **116.** $\dfrac{3}{5} + \dfrac{e^{-2t}}{5}(4\sin t - 3\cos t)$.

117. $\dfrac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t)$. **118.** $2e^t + e^{t/2}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

119. $\dfrac{1}{3}te^t - \dfrac{1}{3}te^{-t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

120. $\dfrac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\eta(t-1) + \cos 3(t-2)\eta(t-2)$.

121. $(t-3)e^{-(t-3)}\eta(t-3)$. **122.** $e^{t-1}\eta(t-1) - \eta(t-1)$.

123. $\sin(t-2)\eta(t-2)+2\sin(t-3)\eta(t-3)+3\sin(t-4)\eta(t-4)$.

124. $\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\eta(t-2)$.

125. $\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{20}\cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{10}\sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]$.

126. $(t-1)\eta(t-1)+(t-2)^2\eta(t-2)+(t-3)^3\eta(t-3)$.

127. $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)-\cos\left(t-\frac{1}{3}\right)\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$.

128. $1-\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

129. <u>*Решение*</u>. $\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}=\dfrac{1}{\sqrt{p}}\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$. Полагаем $\Phi(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $F(\sqrt{p})=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$. Отсюда $F(p)=\dfrac{e^{-ap}}{p^2}$, и по теореме запаздывания

$$F(p)\risingdotseq(t-a)\eta(t-a)=f(t).$$

По теореме Эфроса

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\risingdotseq\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty(\tau-a)\eta(t-a)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty(\tau-a)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau-\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=I_1(t)+I_2(t).$$

Здесь

$$I_1(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}(-2t)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big|_{\tau=a}^{\infty}=2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$I_2(t)=-\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_0^a e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau-\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=$$

$$=a\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}}e^{-s^2}\,ds-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds\right),\quad\text{где}\quad s=\frac{\tau}{2\sqrt{t}}.$$

Следовательно, $I_2(t)=a\left[\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)-1\right]=-a\operatorname{Erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ и окончательно

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\risingdotseq2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4t}}-a\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

130. $\left(t+\dfrac{\alpha^2}{2}\right)\operatorname{Erf}\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\alpha\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$. **131.** $ae^{hx+a^2h^2t}\operatorname{Erf}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)$.

132. Решение. $\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})}=\dfrac{1}{\sqrt{p}}\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}$. Полагаем

$$\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}},\quad F(\sqrt{p})=\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}.$$

Отсюда

$$F(p)=-\frac{e^{-\alpha p}}{p(a+p)}=\frac{1}{a}\left(\frac{e^{-\alpha p}}{p}-\frac{e^{-\alpha p}}{p+a}\right)\risingdotseq\frac{1}{a}\left[\eta(t-\alpha)-e^{-a(t-\alpha)}\eta(t-\alpha)\right]=f(t).$$

По теореме Эфроса имеем

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}\risingdotseq\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}[1-e^{-a(\tau-\alpha)}]e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-s^2}\,ds-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}e^{-\left(a\tau-a\alpha+\frac{\tau^2}{4t}\right)}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}e^{a\alpha+a^2t}e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)^2}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz,$$

где $z=\dfrac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}$.

Итак,

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}\risingdotseq\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right).$$

133. Решение. $I(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\operatorname{ch}\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau$. Сравнивая $I(t)$ с формулой (19) § 14, видим, что $f(t)=\operatorname{ch}t$, а значит, $F(p)=\dfrac{p}{p^2-1}$. Следовательно, $F(\sqrt{p})=\dfrac{\sqrt{p}}{p-1}$. Взяв $\Phi(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}$, получим $\Phi(p)F(p)=\dfrac{1}{p-1}\risingdotseq I(t)$, откуда $I(t)=e^t$.

134. $I(t)=e^{-t}$. **135.** $I(t)=2te^{t}$. **136.** $I(t)=2te^{-t}$.

137. $x(t)=(t+1)e^{-t}$. **138.** $x(t)=-1$. **139.** $x(t)=\dfrac{e^{-2t}-\cos t+2\sin t}{5}$.

140. $x(t)=t+\dfrac{1}{2}t^2$. **141.** $x(t)=t$. **142.** $x(t)=\cos t$.

143. $x(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}$. **144.** $x(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{2t} + 2te^{2t})$.

145. $x(t) = \frac{1}{8}(3e^t - e^{-3t} - 2e^{-t})$. **146.** $x(t) = t - \sin t$.

147. $x(t) = \frac{2}{25}e^{-2t} - \frac{2}{25}\cos t + \frac{14}{25}\sin t - \frac{1}{5}t\sin t - \frac{2}{5}t\cos t$.

148. $x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - te^{-t} - \cos t)$. **149.** $x(t) = \frac{1}{2}e^t - t - 1 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

150. $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t - \sin t$. **151.** $x(t) = \frac{1}{2}t^2e^t + te^t$.

152. $x(t) = \frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t - \frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{5}$.

153. $x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^t\cos t + e^t\sin t)$. **154.** $x(t) = 2 + \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)$.

155. $x(t) = t^2 - 4t + 6 - 5e^{-t} - te^{-t}$. **156.** $x(t) = 2t + \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - \sin t)$.

157. $x(t) = \frac{1}{2}t\sin t - \cos t + \sin t$. **158.** $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 4 + e^{-t}$.

159. $x(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$. **160.** $x(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t) - t - 1$.

161. $x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)$. **162.** $x(t) = 1 - 2\cos t$.

163. $x(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t$.

164. $x(t) = \frac{3}{25} - \frac{t}{5} - \frac{3}{25}e^t\cos 2t + \frac{4}{25}e^t\sin 2t$.

165. $x(t) = e^{-t} - e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

166. $x(t) = -1 - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t + e^{-t})$. **167.** $x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - 1$.

168. $x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{1}{2}t^2 - 1$. **169.** $x(t) = 2 + \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t)$.

170. $x(t) = e^t\left(1 - t + \frac{1}{2}t^2\right) - 1$. **171.** $x(t) = -\frac{3}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$.

172. $x(t) = 2e^{-t} + te^{-t} + t - 2$. **173.** $x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - 3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

174. $x(t) = -\frac{1}{4}e^t - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t$.

175. $x(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

176. $x(t) = \cos t - t\cos t.$ **177.** $x(t) = 2 + t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t.$

178. $x(t) = 1 - \frac{22}{25}e^{-t} - \frac{6}{5}te^{-t} - \frac{3}{25}\cos 2t + \frac{4}{25}\sin 2t.$

179. $x(t) = \frac{t}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}(\cos 2t - \cos 4t).$

180. $x(t) = \frac{1}{2}(t-1)e^t + \frac{1}{2}\cos t + 2\sin t - 2t\cos t.$

181. $x(t) = e^t\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right).$ **182.** $x(t) = 2t - 3 + 3e^{-t} - \frac{1}{5}(\sin 2t - 2\cos 2t + 2e^{-t}).$

183. $x(t) = 4t + 3 - 2e^t.$ **184.** $x(t) = e^{2t} - e^t - te^t.$

185. $x(t) = 3e^t - 3 - 2t - t^2 - \frac{t^3}{3}.$

186. $x(t) = \frac{1}{4}e^t\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}e^{t/2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{24}e^{-t}.$

187. $x(t) = \frac{4}{9}\sin 2t - \frac{5}{9}\sin t - \frac{1}{3}t\cos 2t.$

188. $x(t) = \frac{a}{2n^2}[\sin nt\cos\alpha - nt\cos(nt+\alpha)].$

189. $x(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{35}{54} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{4}{27}e^{-3t}.$

190. $x(t) = -\frac{t}{24}[3t\cos t + (t^2 - 3)\sin t].$

191. $x(t) = \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t.$ **192.** $x(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t.$

193. $x(t) = \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t.$

194. $x(t) = \frac{\gamma}{2}t^2 + (1-\gamma)t + (\gamma - 1) + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t).$

195. $x(t) = \frac{83}{80}\operatorname{ch} 2t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{16}\cos\ t.$

196. $x(t) = e^t\left(\cos t + \sin t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-3t}.$

197. $x(t) = \frac{1}{3}e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}(t-1)e^t.$

198. $x(t) = \frac{1}{4}(t^2\sin t + t\cos t - \sin t).$ **199.** $x(t) = \frac{2}{9}[e^t - e^{-2t}(3t+1)].$

200. $x(t) = 1 - e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right).$ **201.** $x(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

202. $x(t) = \frac{2a}{\omega^2}\left[\sin^2\frac{\omega t}{2}\eta(t) - \sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\eta(t-b)\right].$ **203.** $x(t) = -\cos t.$

204. $x(t) = (t-1)^2 + e^{1-t}$. **205.** $x(t) = t^2 + 2t$. **206.** $x(t) = \left(t - 1 - \frac{\pi}{2}\right)\cos t$.

207. $x(t) = (t^2 - 2t + 2)e^{1-t}$.

208. $x(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\eta(t) - \left[(t-1) - \frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\eta(t-1) + \frac{1}{2}\left[(t-2) - \right.$ $\left. - \frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\eta(t-2)$.

209. $x(t) = [b + (1-b)\cos t]\eta(t) + [b - b\cos(t-a)]\eta(t-a)$.

210. $x(t) = \frac{1}{3}\sin 3t\,\eta(t) + \frac{1}{9}\left[(t-1) - \frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\eta(t-1) - \frac{2}{9}\left[(t-2) - \right.$ $\left. - \frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\eta(t-2) + \frac{1}{9}\left[(t-3) - \frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right]\eta(t-3)$.

211. $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{3}(-1)^k[1 - e^{t-ka} + e^{t-ka}(t-ka)]\eta(t-ka)$.

212. *Решение*. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -m\lambda\dot{x} - 2m\mu x; \quad x(0) = x_0,$$

$\dot{x}(0) = v_0$. Операторное уравнение имеет вид

$$p^2X - px_0 - v_0 + 2\mu pX - 2\mu x_0 + \lambda X = 0,$$

откуда $X(p) = \dfrac{2\mu x_0 + v_0 + px_0}{p^2 + 2\mu p + \lambda}$ или

$$X(p) = \frac{x_0(p+\mu) + \mu x_0 + v_0}{(p+\mu)^2 + (\sqrt{\lambda - \mu^2})^2} = \frac{x_0(p+\mu)}{(p+\mu)^2 + n^2} + \frac{\mu x_0 + v_0}{(p+\mu)^2 + n^2},$$

где $n^2 = \lambda - \mu^2$.

Находя оригинал для $X(p)$, получим

$$x(t) = \frac{1}{n}e^{-\mu t}[nx_0\cos nt + (\mu x_0 + v_0)\sin nt].$$

213. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -mn^2x + F\eta(t) - F\eta(t-T), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

214. Уравнение движения

$$\ddot{x} = an^2 - n^2x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

215. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -mg - 2km\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

216. Решение. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = F. \qquad (1)$$

В нашем случае $m = 2$, $F = F_0 + at = 4 + at$, так что уравнение (1) приобретает вид

$$2\ddot{x} = 4 + at, \qquad (2)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 10. \qquad (3)$$

Операторное уравнение имеет вид $2(p^2X - 10) = \frac{4}{p} + \frac{a}{p^2}$, откуда

$$X = \frac{1}{p^2}\left(\frac{a}{2p^2} + \frac{2}{p} + 10\right).$$

Находя оригинал для $X(p)$, получаем

$$x(t) = \frac{a}{12}t^3 + t^2 + 10t.$$

Для определения величины a имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 450 = \dfrac{at_0^3}{12} + t_0^2 + 10t_0, \\ 105 = \dfrac{at_0^2}{4} + 2t_0 + 10, \end{cases}$$

откуда находим, что $t_0 = 10$, $a = 3$.

217. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = 4mx - 3m\dot{x},$$

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t}).$$

218. Уравнение движения $m\ddot{x} = mg - \lambda\dot{x}$.

В силу условия задачи $\lambda = \frac{1}{3}mg$ при $v = 1$ м/с, так что окончательно получаем уравнение

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{3}gv, \quad v(0) = 0,$$

откуда

$$v(t) = 3\left(1 - e^{-\frac{gt}{3}}\right), \quad v_{\max} = 3 \quad \text{при} \quad t = \infty.$$

219. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \quad x_{\max} = \frac{mv_0}{k} \quad \text{при} \quad t = \infty.$$

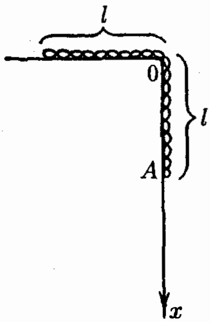


Рис. к ответу 220

220. Решение. Опишем движение нижнего конца цепочки. Выберем начало координат в точке O (см. рисунок) и направим ось Ox вниз. Тогда начальные условия будут

$$x(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \text{(цепочка неподвижна)}.$$

Если абсцисса конца есть x, то движущая сила равна весу части цепочки, свисающей со стола, т. е.

$$F = \frac{mg}{2l}x.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения таково:

$$m\ddot{x} = \frac{mg}{2l}x, \quad x(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

$$x(t) = \frac{l}{2}\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{2l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{2l}}}\right).$$

По этому закону движение будет происходить до того момента T, когда цепочка целиком соскользнет со стола. Мы найдем этот момент, положив $x = 2l$:

$$4 = e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}} + e^{-T\sqrt{\frac{g}{2l}}}.$$

Обозначив $z = e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}}$, получим уравнение

$$z^2 - 4z + 1 = 0,$$

откуда $z_1 = 2 - \sqrt{3} < 1$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}$. z_1 отбрасываем, так как ему соответствует отрицательное значение T. Итак, для определения T получили уравнение

$$e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}} = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{откуда} \quad T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\ln(2 + \sqrt{3}).$$

221. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -2mxk^2, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = a\cos(\sqrt{2}kt).$$

222. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\mu m x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}.$$

223. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 6, \quad x(t) = 600(1 - e^{-0,01t}).$$

224. Уравнение движения

$$\ddot{x} + 4x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

225. Уравнение движения $m\ddot{r} = -mk^2 r$ или

$$\ddot{x} = -k^2 x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$\ddot{y} = -k^2 y, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Траектория точки — эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{v_0^2/k^2} = 1$.

226. Уравнения движения

$$\ddot{x} = k^2 x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0;$$
$$\ddot{y} = k^2 y, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Траектория точки — гипербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{v_0^2/k^2} = 1$.

227. Д. у. $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + \dfrac{1}{C}Q = E\cos(\omega t + \alpha)$, $\quad Q\big|_{t=0} = 0$, $\quad \dfrac{dQ}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

228. Д. у. $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + \dfrac{1}{C}Q = E\sin nt$, $\quad Q\big|_{t=0} = 0$, $\quad \dfrac{dQ}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

229. Д. у. $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E\sin(\omega t + \alpha)$, $\quad I\big|_{t=0} = 0$.

230. Д. у. $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = E_1\eta(t) + (E_2 - E_1)\eta(t - T)$, $\quad Q\big|_{t=0} = 0$, $\dfrac{dQ}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

231. Д. у. $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = E$, $\quad Q\big|_{t=0} = 0$, $\quad \dfrac{dQ}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

232. $x(t) = (C_1 + C_2t^2)e^{-t}$. **233.** $x(t) = C_1$. **234.** $x(t) = e^{-t}$.

235. $x(t) \equiv -1$. **236.** $x(t) = e^t$.

237. а) $x(t) = \sum\limits_{s=0}^{k} (-1)^s 2^s s! C_k^s \dfrac{t^{2s}}{(2s)!}$; б) $x(t) = \sum\limits_{s=0}^{k} (-1)^s 2^s s! C_k^s \dfrac{t^{2s+1}}{(2s+1)!}$.

238. $x(t) = \dfrac{1}{2}(e^t - 1) - \ln\dfrac{1 + e^t}{2}$. **239.** $x(t) = e^{-t}[(t+1)\ln(t+1) - t]$.

240. $x(t) = (e^t + 2)\ln\dfrac{e^t + 2}{3} - e^t + 1$.

241. $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1)\ln(e^t + 1)$.

242. $x(t) = \sin t\left(t - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \cos t\ln(2 + \cos t) - \ln 3\cos t$.

243. $x(t) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{9 - \pi\sqrt{3}}{27}\cos t + \dfrac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}\sin t - 2}{\sqrt{3}\sin t + 2}\right| - \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos t\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos t)$.

244. $x(t) = \cos t\operatorname{arctg}(\cos t) - \dfrac{\pi}{4}\cos t - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cdot\ln\left|\dfrac{\sin t - \sqrt{2}}{\sin t + \sqrt{2}}\right|$.

245. $x(t) = \sin t\operatorname{arctg}(\sin t) + \cos t\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\left|\dfrac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t}\right| - \ln(3 + 2\sqrt{2})\right\}$.

246. $x(t) = -\operatorname{sh} t + 2\operatorname{ch} t\left(\operatorname{arctg} e^t - \dfrac{\pi}{4}\right).$

247. $x(t) = \ln 2\cos t - \cos t \ln(2+\sin t) - t\sin t +$
$$+\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t + 1)\left(\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right).$$

248. $x(t) = e^t,\ y(t) = -e^t.$

249. $x(t) = e^t,\ y(t) = e^t.$

250. $x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}),\ y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}.$

251. $x(t) = \dfrac{1}{4}(e^t - e^{3t} + 2te^{3t}),\ y(t) = \dfrac{1}{4}(5e^t - e^{3t} - 2te^{3t}).$

252. $x(t) = e^t(\cos t - 2\sin t),\ y(t) = e^t(\cos t + 3\sin t).$

253. $x(t) = \dfrac{1}{3}(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t),\ y(t) = \dfrac{2}{3}\left(e^t - \cos 2t - \dfrac{1}{2}\sin 2t\right).$

254. $x(t) = e^t - \dfrac{11}{34}e^{4t} - \dfrac{3}{17}\cos t + \dfrac{5}{17}\sin t - \dfrac{1}{2},$

$y(t) = -\dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{22}{51}e^{4t} + \dfrac{4}{17}\cos t - \dfrac{1}{17}\sin t.$

255. $x(t) = -\dfrac{1}{15}e^{-2t} + \dfrac{13}{12}e^{-t} - 2 + \dfrac{1}{6}e^t + \dfrac{2}{3}e^{2t} + \dfrac{3}{20}e^{3t},$

$y(t) = \dfrac{1}{15}e^{-2t} + \dfrac{13}{12}e^{-t} - 2 - \dfrac{1}{6}e^t + \dfrac{2}{3}e^{2t} + \dfrac{7}{20}e^{3t},$

$z(t) = -\dfrac{13}{12}e^{-t} - \dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{4}{3}e^{2t} + \dfrac{1}{4}e^{3t}.$

256. $x(t) = -e^t,\ y(t) = 0,\ z(t) = e^t.$

257. $x(t) = \dfrac{2}{5}(e^{3t} - e^{-2t}),\ y(t) = \dfrac{1}{5}(3e^{3t} + 2e^{-2t}),\ z(t) = \dfrac{1}{5}(3e^{3t} + 2e^{-2t}).$

258. $x(t) = \dfrac{3e^{-2t}}{4(2+a)} + \dfrac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \dfrac{3e^{at}}{a^2-4},$

$y(t) = -\dfrac{e^{-2t}}{4(2+a)} + \dfrac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \dfrac{(a+1)e^{at}}{a^2-4}.$

259. $x(t) = 2 - e^{-t},\ y(t) = 2 - e^{-t},\ z(t) = 2e^{-t} - 2.$

260. $x(t) = 6e^t - e^{2t} - 4e^{3t},\ y(t) = 3e^t - 2e^{3t},\ z(t) = 6e^{3t} + e^{2t} - 6e^t.$

261. $x(t) = -\dfrac{1}{15t^2} + \dfrac{13}{12t} - 2 + \dfrac{1}{6}t + \dfrac{2}{3}t^2 + \dfrac{3}{20}t^3,$

$y(t) = \dfrac{1}{15t^2} + \dfrac{13}{12t} - 2 - \dfrac{1}{6}t + \dfrac{2}{3}t^2 + \dfrac{7}{20}t^3,$

$z(t) = -\dfrac{13}{12t} - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{4}{3}t^2 + \dfrac{1}{4}t^3.$

262. $x_m(t) = e^{-ct}\dfrac{(ct)^m}{m!}\quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n).$

263. $x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-6t/11},\ y(t)=\frac{1}{5}(e^{-t}-e^{-6t/11}).$

264. $x(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t,\ y(t)=\frac{5}{4}t^2-\frac{1}{4},\ z(t)=\frac{5}{4}t^2-\frac{2}{3}t+\frac{5}{12}.$

265. $x(t)=\frac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9},\ y(t)=\frac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}.$

266. Уравнения движения электрона

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-\frac{eH}{c}\dot{y}, & x(0)=0, & \dot{x}(0)=v_0,\\ m\ddot{y}=\frac{eH}{c}\dot{x}, & y(0)=0, & \dot{y}(0)=0,\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{v_0mc}{eH}\sin\frac{eHt}{mc},\quad y(t)=\frac{mcv_0}{eH}\left(1-\cos\frac{eHt}{mc}\right).$$

Траектория электрона $x^2+y^2-\frac{2mcv_0}{eH}y=0.$

267. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0, & x(0)=0, & \dot{x}(0)=\frac{v_0}{\sqrt{2}},\\ m\ddot{y}=-gm, & y(0)=0, & \dot{y}(0)=\frac{v_0}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Наибольшая высота $H=\frac{v_0^2}{4g}$; точка падения $x=\frac{v_0^2}{g}.$

268. Пусть электрон вылетает из начала координат. Выберем ось Ox параллельно направлению магнитного поля $\mathbf{H}$, а ось Oy выберем так, чтобы вектор v_0 лежал в координатной плоскости xOy.

Тогда уравнения движения будут

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0, & x(0)=0, & \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha,\\ m\ddot{y}=-\frac{eH}{c}\dot{z}, & y(0)=0, & \dot{y}(0)=v_0\sin\alpha,\\ m\ddot{z}=\frac{eH}{c}\dot{y}, & z(0)=0, & \dot{z}(0)=0.\end{cases}$$

Траектория электрона

$$\begin{cases} y^2+z^2-\frac{2v_0cm\sin\alpha}{eH}z=0,\\ x=tv_0\cos\alpha.\end{cases}$$

269. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-km\dot{x}, & x(0)=0, & \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha,\\ m\ddot{y}=-mg-km\dot{y}, & y(0)=0, & \dot{y}(0)=v_0\sin\alpha,\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{v_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt}),\quad y(t)=\frac{v_0k\sin\alpha+g}{k^2}(1-e^{-kt})-\frac{gt}{k}.$$

270. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{eH}{c}\dot{y} - km\dot{x}, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = u, \\ m\ddot{y} = \dfrac{eH}{c}\dot{x} - km\dot{y}, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \\ m\ddot{z} = -kmz, & z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

271. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2\lambda\dot{x} - \mu^2 x, & x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ m\ddot{y} = -2\lambda\dot{y} - \mu^2 y, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0. \end{cases}$$

272. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \\ m\ddot{y} = -mk^2\dot{y}, & y(0) = a, \quad \dot{y}(0) = 0, \end{cases}$$

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = a\cos kt.$$

Траектория точки $y = a\cos\left(\dfrac{kx}{v_0}\right)$.

273. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} x + \dfrac{1}{2}\sin x$.

274. $\varphi(x) = \dfrac{1}{3}\left(e^x - e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}e^{-x/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

275. $\varphi(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3$. **276.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{5}e^{2x} + \dfrac{3}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$.

277. $\varphi(x) = 2 + x - e^{x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

278. $\varphi(x) = -\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{8}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}e^{2x} - \dfrac{1}{12}x^3$.

279. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{6}e^x + \dfrac{1}{3}e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

280. $\varphi(x) = \dfrac{1}{3}\left(e^x - e^{-x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right)$.

281. $\varphi(x) = xe^x$. **282.** $\varphi(x) = e^x$. **283.** $\varphi(x) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$.

284. $\varphi(x) = \operatorname{ch} x - xe^{-x}$. **285.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x)$.

286. $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{6}x^3$. **287.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$. **288.** $\varphi(x) = 1 - x$.

289. $\varphi(x) = J_0(x)$, так что $\displaystyle\int_0^x J_0(x-t)J_0(t)\,dt = \sin x$.

290. $\varphi(x) \equiv 1.$ **291.** $\varphi(x) = e^{-x}.$ **292.** $\varphi(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$

293. $\varphi(x) = 2xe^x - x^2e^x.$ **294.** $\varphi(x) \equiv 1.$ **295.** $\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$

296. $\varphi_1(x) = e^{-x}(1-x),\ \varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}.$

297. $\varphi_1(x) = e^{2x},\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}.$

298. $\varphi_1(x) = \frac{1}{3}e^{3/2x}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{3},$

$\varphi_2(x) = e^{3/2x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

299. $\varphi_1(x) = (x+2)\sin x + (2x+1)\cos x,\ \varphi_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\cos x - \left(\frac{1}{2} + x\right)\sin x.$

300. $\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}x - \frac{3}{2}\operatorname{sh} x,\quad \varphi_2(x) = \cos\sqrt{3}x - 3\operatorname{ch} x.$

301. $\varphi_1(x) = 2(1-x)e^{-x},\quad \varphi_2(x) = (1-x)e^{-x}.$

302. $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!}\eta(t-k).$ **303.** $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k(t-k)^{k+3}}{(k+3)!}\eta(t-k).$

304. $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta(t-k).$

305. $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t-2k)^{k+3}(k+1)}{(k+3)!}\eta(t-2k).$

306. $x(t) = \left(-t + \frac{1}{2}t^2\right)\eta(t) + \sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{(t-k+2)^{k-1}}{k!}(t-3k+2)\eta(t-k+2).$

307. $x(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\eta(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta(t-k).$

308. $x(t) = \cos t.$ **309.** $u(x,t) = u_0\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\,dz\right).$

310. $u(x,t) = u_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\,dz.$

311. $u(x,t) = ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) - \frac{a}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\sin x\sqrt{\frac{\rho}{k}}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^2+\omega^2}.$

312. $u(x,t) = a\left[e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) + \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\sin x\sqrt{\frac{\rho}{k}}\frac{d\rho}{\rho^2+\omega^2}\right].$

313. $u(x,t)=\dfrac{x}{2\sqrt{\pi k}}\displaystyle\int_0^t \varphi(\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau.$

314. Д. у. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\leqslant x\leqslant l,\ t>0$, $u\big|_{t=0}=u_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$, $u\big|_{x=l}=u_1$,

$$u(x,t)=u_1+\frac{4(u_1-u_0)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-a^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

315. Д. у. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x>0,\ t>0$, $u\big|_{t=0}=u_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=hu\big|_{x=0}$, $h=\text{const}$,

$$u(x,t)=u_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+e^{hx+h^2a^2t}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ha\sqrt{t}\right)\right].$$

При решении задачи воспользоваться теоремой Эфроса (см. § 14).

316. Д. у. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $0\leqslant x\leqslant l,\ t>0$, $u\big|_{t=0}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$, $u(0,t)=0$, $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\dfrac{F}{E}$,

$$u(x,t)=\frac{Fx}{E}-\frac{8Fl}{\pi^2E}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^2}.$$

317. Д. у. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{g}{c^2}$, $0\leqslant x\leqslant l,\ t>0$, $u\big|_{t=0}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$, $u(0,t)=0$, $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0$,

$$u(x,t)=\frac{gx(2l-x)}{2c^2}-\frac{16gl^2}{\pi^3c^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\frac{(2k+1)(x-l)\pi}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^3}.$$

318. $u(x,t)=-\dfrac{bx}{12}(x^3-2lx^2+l^3)+\dfrac{8bl^4}{\pi^5}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)^5}.$

319. Д. у. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\leqslant x\leqslant l,\ t>0$, $u(x,0)=\dfrac{4hx(l-x)}{l^2}$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $u(0,t)=u(l,t)=0$,

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^3}.$$

320. $\dfrac{1}{1-e^{-p}}$. **321.** $\dfrac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^2}$. **322.** $\dfrac{1}{1-e^{\alpha-p}}$. **323.** $\dfrac{e^p}{e^p-\alpha}$.

324. $\dfrac{e^p(e^p-\cos 1)}{e^{2p}+2e^p\cos 1+1}$. **325.** $\dfrac{e^p\sin\alpha}{e^{2p}-2e^p\cos\alpha+1}$. **326.** $\dfrac{e^p\,\mathrm{sh}\,1}{e^{2p}-2e^p\,\mathrm{ch}\,1+1}$.

327. $\dfrac{e^p}{e^p-e}-\dfrac{2e^p}{e^p-\sqrt{e}}$. **328.** $\dfrac{1}{2}\dfrac{e^p}{e^p-1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{e^p(e^p-\cos 2)}{e^{2p}-2e^p\cos 2+1}$.

329. $\dfrac{e^{(1-k)p}}{e^p-1}$. **330.** $\left(\dfrac{e^p}{e^p-e^3}-1-e^{\alpha-p}-e^{2\alpha-2p}\right)e^{3p}$.

331. $\dfrac{e^p(2\,\mathrm{ch}\,2-e^p)\,\mathrm{sh}\,2}{e^{2p}-2e^p\,\mathrm{ch}\,2+1}$. **332.** $\dfrac{e^p(4e^{2p}-3e^p+1)}{(e^p-1)^3}$. **333.** $\dfrac{e^{p-1}\sin 2}{e^{2p}-2e^{p-1}\cos 2+e^{-2}}$.

334. $\dfrac{e^{p+2}(e^p+e^2)}{(e^p-e^2)^3}$. **335.** $\dfrac{e^p(e^p-e^3\,\mathrm{ch}\,1)}{e^{2p}-2e^{p+3}\,\mathrm{ch}\,1+e^6}$.

336. $\dfrac{e^{p+1}(e^p+e)}{(e^p-e)^3}$. **337.** $\dfrac{e^p(e^p+1)}{(e^p-1)^3}$. **338.** $\dfrac{(e^{2p}-1)e^p}{(e^{2p}+1)^2}$. **339.** $\ln a+\ln\dfrac{e^p-1}{e^p-a}$.

340. $\alpha+\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sin\alpha}{e^p-\cos\alpha}$. **341.** $\ln\dfrac{\sqrt{e^{2p}-2e^p\cos\alpha+1}}{e^p-1}$.

342. $\dfrac{1}{e^p-1}-\ln\sqrt{\dfrac{e^p-e^{-1}}{e^p-e}}$. **343.** $\dfrac{e^p[(1+e^{2p})\cos\alpha-2e^p]}{(e^{2p}-2e^p\cos\alpha+1)^2}$.

344. $\dfrac{e^p(e^{4p}+2e^{3p}\,\mathrm{ch}\,\alpha-6e^{2p}+2e^p\,\mathrm{ch}\,\alpha+1)\,\mathrm{sh}\,\alpha}{(e^{2p}-2e^p\,\mathrm{ch}\,\alpha+1)^3}$.

345. $\dfrac{e^p(2e^{3p}-5e^{2p}\,\mathrm{ch}\,\alpha+4e^p\,\mathrm{ch}^2\alpha-\mathrm{ch}\,\alpha)}{(e^{2p}-2e^p\,\mathrm{ch}\,\alpha+1)^2}$. **346.** $\varepsilon-\varepsilon_0+\ln\dfrac{e^p-e^{\varepsilon_0}}{e^p-e^{\varepsilon}}$.

347. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e^{2p}-2e^p\,\mathrm{ch}\,1+1}{e^{2p}-2e^p\,\mathrm{ch}\,\varepsilon+1}$. **348.** $\varepsilon+\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sin\varepsilon}{e^p-\cos\varepsilon}$.

349. $\varepsilon-1+\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sin 2\varepsilon}{e^p-\cos 2\varepsilon}-\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sin 2}{e^p-\cos 2}\right)$. **350.** $\dfrac{1-e^n}{1-e}$.

351. $\dfrac{n(n+1)}{2}$. **352.** $\dfrac{n}{1-e}-\dfrac{1-e^n}{(1-e)^2}$. **353.** $\dfrac{1-e^{2(n-1)}}{1-e^2}$.

354. $\Delta f(n)=3,\ \Delta^k f(n)=0\ \ (k=2,3,4,\ldots)$.

355. $\Delta^k f(n)=(e^4-e^2)^k\ \ (k=1,2,3,\ldots)$.

356. $\Delta f(n)=2n,\ \Delta^2 f(n)=2,\ \Delta^k f(n)=0\ \ (k=3,4,\ldots)$.

357. $\dfrac{e^p(e^{2p}+4e^p+1)}{(e^p-1)^4}$. **358.** $\dfrac{e^p}{(e^p-1)^3}$. **359.** $\dfrac{2e^{(1-k)p}}{(e^p-1)^3}$.

360. $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **361.** $\dfrac{(n-1)\sin\dfrac{2n-1}{2}\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin^2\dfrac{n-1}{2}\alpha}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

362. $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$. **363.** $\dfrac{(1-e\cos\alpha)(1-e^n\cos n\alpha)+e^{n+1}\sin\alpha\sin n\alpha}{e^2-2e\cos\alpha+1}$.

364. $n3^{n-1}$. **365.** $\dfrac{5^n - 3^n}{3}$. **366.** $\sin\dfrac{n\pi}{2}$. **367.** $\dfrac{1+(-1)^n}{4} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}\pi$.

368. $a^{n-1}2^{n/2}\sin\dfrac{3n\pi}{4}$. **369.** $\dfrac{n(n-1)}{2}e^{n-2}$.

370. Второго порядка. **371.** Нулевого порядка.

372. Первого порядка. **373.** Третьего порядка.

374. 2^n. **375.** $(-1)^n(1-n)$. **376.** $2^{n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

377. $1 - 2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4}$. **378.** $\sin\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{(n-1)\pi}{4}$. **379.** $(-1)^n\dfrac{n^2-n}{2}$.

380. $\dfrac{3n-1+(-2)^n}{9}$. **381.** $\dfrac{4^{n-1}+15\cdot 2^{n-3} - 7(-2)^{n-3}}{3}$. **382.** $\dfrac{1-(-1)^n}{2}$.

383. $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}\cdot 3^{n-3}$. **384.** $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot(-1)^{n-1}$.

385. $\dfrac{n^5}{60} - \dfrac{n^4}{8} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{3n^2}{8} + \dfrac{3n}{20}$.

386. a) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{1+i\xi}$; b) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+\xi^2}$; c) $-i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}$; d) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin a\xi}{\xi}$.

389. $x\sqrt{2\pi}$. **390.** $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+16t}}e^{-\frac{x^2}{1+16t}}$. **391.** $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+72t}}e^{-\frac{2x^2}{1+72t}}$.

392. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi_1(\alpha)\,d\alpha$. **393.** $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\xi}{1+\xi^2}$.

394. $\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}\left(\dfrac{\sin a(1+\xi)}{1+\xi} + \dfrac{\sin a(1-\xi)}{1-\xi}\right)$. **395.** $J = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$

398. $u(x,t) = \dfrac{2u_0}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\left(1 - e^{a^2\xi^2 t}\right)\dfrac{\sin x\xi}{\xi}\,d\xi,\ t > 0.$

Указание. Использовать синус-преобразование Фурье, положив u и $\dfrac{\partial u}{\partial x} \to 0$ при $x \to +\infty$. Так как $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\xi x}{\xi}\,d\xi = \dfrac{\pi}{2}$ и $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}e^{-\xi^2}\dfrac{\sin(2\xi\tau)}{\xi}\,d\xi = \sqrt{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\tau}e^{-\eta^2}\,d\eta$, то решение $u(x,t)$ можно представить в виде

$$u(x,t) = u_0 - \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\eta^2}\,d\eta = u_0\operatorname{erf}c\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

где $\operatorname{erf} c(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta$ (другое обозначение — $\operatorname{Erf}(x)$).

399. $u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{a^2\xi^2 t} \frac{\sin\xi}{\xi} \cos\xi x\, d\xi$ или

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{1+x}{2a\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right],$$

где $\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{y} e^{-\eta^2}\, d\eta$.

400. $\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{1-x^2}$. **401.** $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\frac{x}{1+x^2}$, $x \geqslant 0$.

402. Асимптотически устойчиво. **403.** Асимптотически устойчиво.

404. Неустойчиво. **405.** Неустойчиво.

406. Устойчиво, но не асимптотически. **407.** Асимптотически устойчиво.

408. Неустойчиво. **409.** Неустойчивый фокус.

410. Центр. **411.** Устойчивый фокус.

412. Седло. **413.** Неустойчивый узел.

414. Неустойчивый узел. **415.** Устойчивый узел.

416. Точка $(0,0,0)$ устойчива. **417.** Точка $(0,0,0)$ неустойчива.

418. Асимптотически устойчиво при $\alpha < 0$. Во всех остальных случаях неустойчиво. **419.** Асимптотически устойчиво при $\alpha < 0$ и $\alpha > 1$; устойчиво, но не асимптотически при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$; неустойчиво при $0 < \alpha < 1$. **420.** Неустойчиво при всех α. **421.** $\alpha \leqslant 0$. **422.** $\alpha \leqslant -1/2$. **423.** Асимптотически устойчиво при $\alpha\beta < 1$; устойчиво, но не асимптотически при $\alpha\beta = 1$. **424.** Асимптотически устойчиво при $\beta < \alpha^2$ $(\alpha < 0)$; устойчиво, но не асимптотически при: 1) $\alpha = 0$ $(\beta < 0)$; 2) $\beta = \alpha^2$ $(\alpha < 0)$. **425.** Асимптотически устойчиво при $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha > 0$ $(\alpha < 1)$; устойчиво, но не асимптотически при: 1) $\alpha = 1$ $(|\beta| > 1)$; 2) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha = 0$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$. **426.** Неустойчиво при всех значениях α и β. **427.** Асимптотически устойчиво при $\alpha^2 + \beta^2 - \beta < 0$; устойчиво, но не асимптотически при $\alpha^2 + \beta^2 - \beta = 0$ $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$. **428.** Устойчиво, но не асимптотически при $\beta + 2\alpha + 1 = 0$; асимптотически устойчиво при всех остальных значениях α и β.

429. Асимптотически устойчиво. **430.** Асимптотически устойчиво.

431. Асимптотически устойчиво. **432.** Устойчиво.

433. Асимптотически устойчиво. **434.** Асимптотически устойчиво.

435. Асимптотически устойчиво. **436.** Неустойчиво.

437. Неустойчиво. **438.** Асимптотически устойчиво.

439. Асимптотически устойчиво.

440. Асимптотически устойчиво.

441. Неустойчива.

442. Устойчива.

443. Неустойчива.

444. Устойчива.

445. Неустойчива.

446. Неустойчива.

447. Асимптотически устойчива.

448. Устойчива.

449. Исследование по первому приближению невозможно. С помощью функции Ляпунова устанавливаем, что точка (0, 0) асимптотически устойчива. **450.** Точка покоя устойчива. **451.** Нулевое решение системы первого приближения неустойчиво, а для полной системы оно асимптотически устойчиво.

452. Если $a > 0$, $b > 0$, то условие устойчивости имеет вид $\cos T > 0$, где $T = (-1)^k x_0 + k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $x_0 = \arcsin \frac{L}{b}$.

460. Устойчиво. **461.** Неустойчиво. **462.** Устойчиво. **463.** Неустойчиво.

464. При $\alpha > \frac{1}{2}$. **465.** Решение неустойчиво при любом α.

466. При $\alpha > \frac{13}{6}$.

467. При любых (α, β) из области G (см. рис.).

468. При любых (α, β) из области G: $\alpha\beta > 3$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (см. рис.).

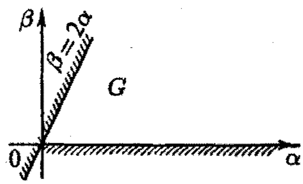


Рис. к ответу 467

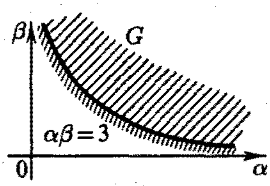


Рис. к ответу 468

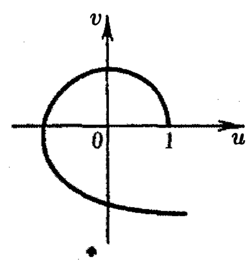


Рис. к ответу 471

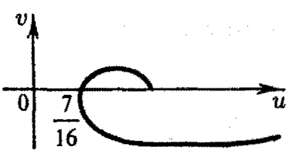


Рис. к ответу 472

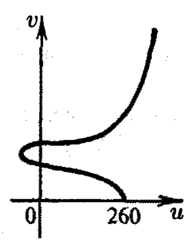


Рис. к ответу 475

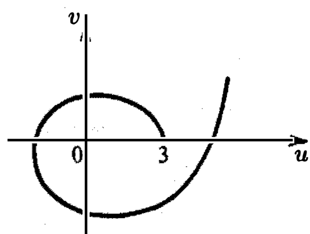


Рис. к ответу 476

469. Решение неустойчиво при любых (α, β). **470.** $p > 0$, $q > 2$.

471. Все корни в левой полуплоскости; решение устойчиво (см. рис.).

472. Два корня в левой полуплоскости, два корня в правой; решение неустойчиво (см. рис.).

473. Устойчиво. **474.** Устойчиво.

475. Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво (см. рис.).

476. Устойчиво (см. рис.). **477.** Устойчиво. **478.** Устойчиво.

479. Устойчиво. **480.** Решение устойчиво. **481.** Устойчиво.

482. Устойчиво. **483.** Устойчиво. **484.** Устойчиво.

485. Устойчиво (см. рис.). **486.** Устойчиво.

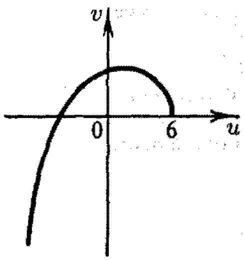


Рис. к ответу 485

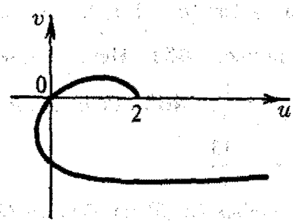


Рис. к ответу 487

487. Чисто мнимые корни; решение неустойчиво (см. рис.).

488. Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво.

489. Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво (см. рис.).

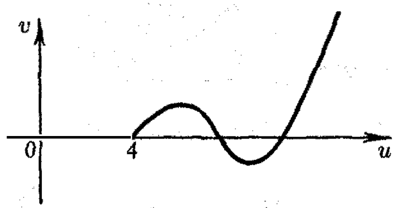


Рис. к ответу 489

490. Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво.

491.

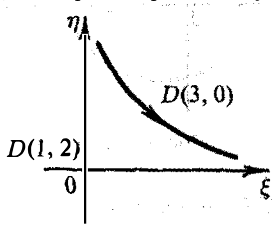


Рис. к ответу 491

492.

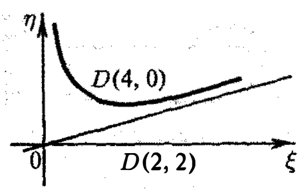


Рис. к ответу 492

493.

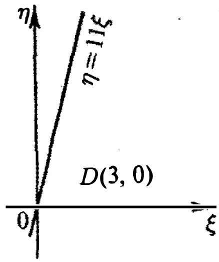


Рис. к ответу 493

494.

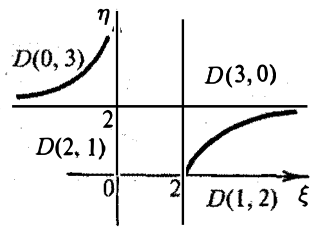


Рис. к ответу 494

495.

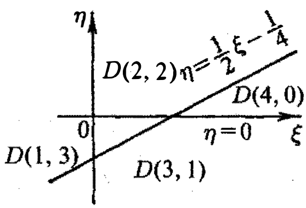


Рис. к ответу 495

496.

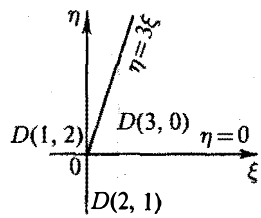


Рис. к ответу 496

497.

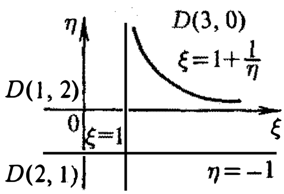


Рис. к ответу 497

498.

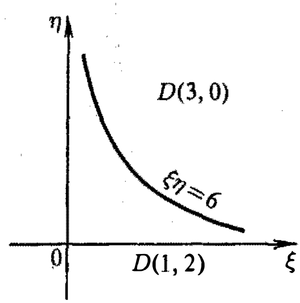


Рис. к ответу 498

499.

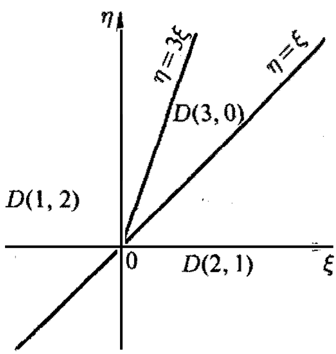


Рис. к ответу 499

500.

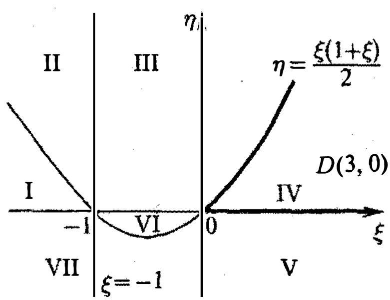


Рис. к ответу 500

501.

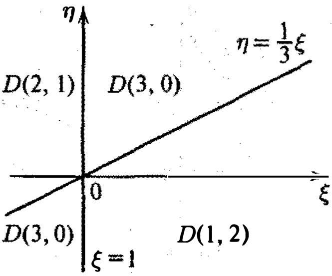


Рис. к ответу 501

502.

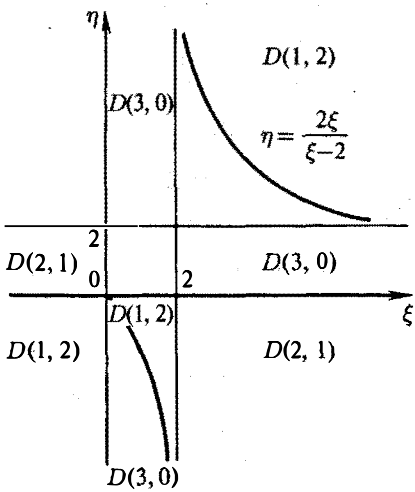


Рис. к ответу 502

503.

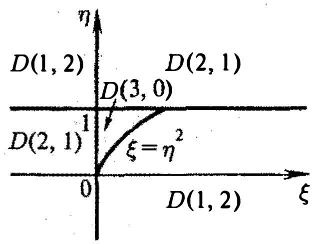


Рис. к ответу 503

504. $f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2\left(-\frac{4}{5}\right)^n$.

505. $f(n) = (-1)^n(4n^2 - 7n + 1)$.

506. $f(n) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\left[C_1 \cos\left(n \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + C_2 \sin\left(n \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right]$.

507. $f(n) = 2^n\left(C_1 + C_2 \cos\frac{2n\pi}{3} + C_3 \sin\frac{2n\pi}{3}\right)$.

508. $f(n) = (-1)^n(C_1 + C_2 n) + 2^{n/2}\left(C_3 \cos\frac{n\pi}{4} + C_4 \sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

509. $f(n) = C_1(1-\sqrt{2})^n + C_2(1+\sqrt{2})^n - \frac{n}{2}$.

510. $f(n) = 2 \cdot 3^n + (-1)^n(8n - 2)$.

511. $f(n) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2 \cdot \cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\sin 2(n-1)}{2\cos 2}$.

512. $f(n) = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dfrac{e^n}{(e-1)^3}$.

513. $f(n) = 2^n \left(\dfrac{1}{16} + C_1 \cos \dfrac{n\pi}{3} + C_2 \sin \dfrac{n\pi}{3} \right) + C_3(-2)^n$.

514. Асимптотически устойчиво. **515.** Устойчиво, но не асимптотически.

516. Асимптотически устойчиво. **517.** Неустойчиво.

518. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0$, $3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0$, $3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0$, $a_0^2 - a_3^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 > 0$.

519. $1 - q > 0$, $1 + p + q > 0$, $1 - p + q > 0$. **520.** $-1 < p < 1$. **521.** $|a| > b$.

522. Асимптотически устойчиво. **523.** Неустойчиво.

524. Асимптотически устойчиво. **525.** Неустойчиво.

526. Неустойчиво. **527.** Неустойчиво.

528. Неустойчиво.

Приложение

Основные оригиналы и их изображения

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$
1.	1	$\dfrac{a1}{p}$
2.	$t^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$t^\alpha \quad (\alpha > -1)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4.	$e^{\lambda t} \quad (\lambda = a + bi)$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$
5.	$t^n e^{\lambda t}$	$\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
6.	$t^\alpha e^{\lambda t} \quad (\alpha > -1)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
7.	$\sin\omega t \quad (\omega > 0)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8.	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
9.	$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
10.	$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
11.	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

Продолжение таблицы

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
12.	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
13.	$e^{\lambda t}\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
14.	$e^{\lambda t}\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
15.	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
16.	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
17.	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
18.	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
19.	$\sin(t-\tau)\quad(\tau>0)$	$\dfrac{e^{-\tau p}}{p^2+1}$
20.	$\cos(t-\tau)$	$\dfrac{pe^{-\tau p}}{p^2+1}$
21.	$t^n\sin\omega t$	$\dfrac{\mathrm{Im}\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}n!$
22.	$t^n\cos\omega t$	$\dfrac{\mathrm{Re}\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}n!$
23.	$J_n(t)\quad(n=1,2,\ldots)$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
24.	$\mathrm{Erf}\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$	$\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$

Продолжение таблицы

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
25.	$\operatorname{Si} t = \int\limits_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$
26.	$\operatorname{Ci} t = -\int\limits_t^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
27.	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
28.	$\frac{I_n(\alpha t)}{t}\quad(\alpha > 0)$	$\frac{1}{n\alpha^n}(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^n$
29.	$\ln t$	$\frac{1}{p}\left(\ln\frac{1}{p}-\gamma\right),\quad \gamma = 0{,}57722\ldots$

Оглавление

Дифференциальные уравнения

Векторный анализ

Вариационное исчисление

Интегральные уравнения

Функции комплексного переменного

Операционное исчисление

Теория устойчивости

В настоящем учебном пособии авторы предлагают задачи по основным разделам операционного исчисления и теории устойчивости.

В начале каждого параграфа приведятся необходимые теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), а также подробно разбирается около **100** типовых задач и примеров.

В книге содержится свыше **500** задач и примеров для самостоятельного решения. Почти все задачи снабжены ответами, а в ряде случаев даются указания к решению.

Книга предназначается в основном для студентов технических вузов с математической подготовкой, но может принести пользу и инженеру, желающему восстановить в памяти разделы математики, относящиеся к операционному исчислению и теории устойчивости.

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в *Internet:* http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135–44–23, 135–42–46

1909 ID 13423
9785354003839 >

ВСЕ
ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ