А.Г. Курош

Общая алгебра

Александр Геннадьевич Курош

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Имя выдающегося советского алгебраиста Александра Геннадиевича Куроша широко известно математикам всего мира. Его монографии «Теория групп» и «Лекции по общей алгебре» *), переведенные на многие языки, стали настольными книгами каждого алгебраиста.

В 1969 году А. Г. Курош начал читать на механико-математическом факультете Московского университета специальный курс «Общая алгебра». Цель этого курса состояла в том, чтобы обоснованно предложить один из возможных путей дальнейшего развития общей алгебры — заполнение имеющегося разрыва между классическими разделами (теория групп, теория колец и др.) и новыми (теория универсальных алгебр, теория категорий). Тяжелая болезнь прервала чтение курса задолго до его окончания. Однако автор написал больше, чем прочел, и написанный материал был издан в 1970 году ротапринтным способом в МГУ **).

В настоящей книге по существу повторяется это издание с незначительной редакционной правкой. Добавлена лишь библиография, посвященная таким алгебраическим образованиям, которые упоминаются в книге, но которые пока не принято называть классическими (например, полугруды, кольцоиды, почти-кольца, полукольца, мультиоператорные группы и кольца и др.). Список работ, относящихся к 1953—1970 гг., был составлен автором и дополнен мною работами 1971—1972 гг. Библиография помещена в конце книги, но распределена по параграфам.

---

*) А. Г. Курош Теория групп, 1-е изд., М.— Л., 1944; 2-е изд., М., 1953; 3-е изд., М., 1967. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, 1-е изд., М., 1962; 2-е изд., М., 1973.

**) А. Г. Курош, Общая алгебра (лекции 1969—70 учебного года), М., МГУ, 1970.

Книга написана так легко и прозрачно, что ее может читать всякий, владеющий обычным университетским курсом высшей алгебры.

По духу эта книга очень близка упомянутым «Лекциям по общей алгебре», но не опирается на них и имеет с ними весьма небольшое пересечение. В будущем автор собирался объединить материал этих двух книг в одну новую книгу. Этим планам не суждено было осуществиться — Александр Геннадиевич Курош скончался 18 мая 1971 года.

Апрель 1973 г. *Т. М. Баранович*

ВВЕДЕНИЕ

Появление и бурное развитие общей алгебры, продолжающееся, непрерывно нарастая, уже около пятидесяти лет, представляет собою одну из самых ярких страниц математики двадцатого века. Желая дать некоторое представление о том, что такое общая алгебра и какие цели преследует настоящий курс, начнем с весьма схематичного исторического обзора.

На протяжении столетий алгебра была наукой об уравнениях. В девятнадцатом веке поняли, что вместо уравнений (и систем уравнений) можно говорить об их левых частях, т. е. о функциях специального вида (и о системах таких функций), а это привело к тому, что алгебра стала считаться частью математического анализа, частью теории функций. Даже не в очень удаленные от нас времена можно было встретить в некоторых книгах слова «алгебра или алгебраический анализ». Одновременно, однако, в недрах тогдашней алгебры и в связи с ее потребностями возникали некоторые новые теории, в математический анализ никак не укладывавшиеся. Именно, в связи с теорией Галуа возникла теория групп, медленно развивающаяся в девятнадцатом веке в виде теории конечных групп подстановок. Во второй половине девятнадцатого века стала разрабатываться примыкавшая к теории чисел теория полей, а именно — теория полей алгебраических чисел. В это же время в связи с появлением кватернионов начинают изучаться различные гиперкомплексные числовые системы, т. е., на современном языке, конечномерные линейные алгебры, причем с некоммутативным, а иногда и неассоциативным умножением.

Важным этапом был переход от девятнадцатого к двадцатому веку. Именно в это время было понято, что при изучении перечисленных выше математических объектов на самом деле изучаются свойства заданных в них алгебраических операций и что эти объекты следует определять аксиоматически, указывая исходные свойства операций и игнорируя природу элементов, над которыми операции производятся. Иными словами, появилось понятие изоморфизма. В результате в первые два десятилетия нашего века теория конечных групп развивалась уже как абстрактная теория, было положено начало общей теории бесконечных групп, теории полей, а также теории коммутативно-ассоциативных колец.

Это была пока предыстория общей алгебры. Ее история начинается в двадцатые годы, когда впервые было понято, что именно изучение алгебраических операций, т. е. изучение таких образований, как группы, поля, кольца, линейные алгебры, является истинной задачей алгебры. В эти годы в центре внимания была теория колец, как ассоциативно-коммутативных, так и любых ассоциативных; в первом случае развитие шло от теории идеалов колец целых алгебраических чисел, во втором — от теории конечномерных линейных алгебр. Теория бесконечных групп стала разрабатываться как теория групп с операторами, в частности, абелевых групп с операторами, т. е. модулей, как стали говорить позже.

Появление в 1930 и 1931 гг. двухтомной «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена показало широким кругам математиков, что алгебра, одна из старейших ветвей математики, радикально перестроилась, что она стала наукой теоретико-множественной, аксиоматической. Эта новая наука долго так и называлась «современной алгеброй», хотя неудобства этого названия выявились довольно скоро, и сейчас с моей легкой руки утвердилось название «общая алгебра». Результаты этой перестройки можно назвать взрывом; это относится и к развитию самой алгебры, и к влиянию ее на всю математику. Если начать с последнего, то можно отметить хотя бы влияние общей алгебры на развитие топологии, в частности, ее роль в создании алгебраической топологии; многостороннее влияние на развитие функционального анализа; поглощение проективной геометрии; определяющую роль при возрождении алгебраической геометрии; стимулирование появления ряда новых разделов математической логики, а также многое другое.

Развитие самой общей алгебры шло исключительно бурно. Все перечисленные выше ветви алгебры продолжали глубоко и всесторонне разрабатываться и вместе с тем возникали новые направления, новые области. В тридцатых годах появилась топологическая алгебра и началась активная деятельность в теории структур, т. е. области, истоки которой можно найти в работах, относящихся еще к началу нашего века. В сороковых годах развилась теория неассоциативных колец и бесконечномерных неассоциативных линейных алгебр, теория полугрупп, истоки которой можно найти еще в двадцатых годах, теория упорядоченных алгебраических образований, идущая от относящихся к началу века исследований по основаниям геометрии. В пятидесятых годах утвердилась в качестве самостоятельной области теория квазигрупп и началось бурное развитие теории категорий.

Эти же годы явились годами начала систематического изучения универсальных алгебр, хотя основы их теории были заложены еще в тридцатые годы, а в математической логике они появились даже много раньше. Понятие универсальной алгебры долго вызывало у математиков настороженность — казалось, что понятие множества, в котором задана произвольная система произвольных алгебраических операций, произвольным образом между собою связанных, слишком широко и поэтому слишком бедно содержанием для того, чтобы стать объектом глубокой теории. Развитие теории за последние два десятилетия показало неосновательность этих опасений. Теория универсальных алгебр сейчас не только объединяет то немногое общее, с чего начинаются различные конкретные разделы общей алгебры, но и нашла собственную проблематику и сложилась как самостоятельная ветвь алгебры. При этом ее появление никак не отменяет более конкретных разделов общей алгебры, так же как появление теории колец не отменило теории полей, а появление теории полугрупп не ликвидировало теории групп.

Замечу, что существует более общее понятие, чем понятие универсальной алгебры, а именно — понятие модели. Теория моделей также развивается, не ликвидируя теории универсальных алгебр. Математики пока не договорились, относится ли она к алгебре или же к математической логике.

Теория универсальных алгебр уже оказывает и, нужно ожидать, в ближайшие десятилетия будет оказывать все возрастающее влияние на развитие всей общей алгебры. Вообще, сейчас ученые всех специальностей занимаются прогнозами на конец нашего века, появляются даже книги о науке в 2000 году. Попытаемся и мы сформулировать некоторые прогнозы развития общей алгебры в ближайшие десятилетия.

Трудно ожидать, что те классические разделы, которые разрабатываются уже несколько десятилетий, так и будут оставаться основным источником новых идей общематематического значения. Более вероятно (и признаки этого уже наблюдаются), что они, продолжая привлекать многих исследователей, будут переходить в этап завершения. Главные интересы будут концентрироваться в них на решении давно поставленных проблем, а это всегда означает исчерпание области, хотя решать открытые проблемы необходимо, конечно, всегда. Вместе с тем с позиций теории универсальных алгебр оказывается, что те понятия, которые исторически оказались первыми объектами изучения и поэтому стали носителями наиболее разработанных теорий и чаще всего используются соседями,— неалгебраистам трудно применять те алгебраические теории, которые алгебраистами еще не созданы,— логически эту свою первоочередность, избранность уже утрачивают.

С другой стороны, между теорией универсальных алгебр и классическими разделами общей алгебры существует большое необработанное пространство. Исследования начались лишь в немногих местах, изолированные, иногда случайные, хотя среди этих мест есть такие, разработка которых безусловно необходима. Нужно ожидать, что именно в это «ничейное» пространство будут передвигаться в ближайшие десятилетия основные интересы общей алгебры.

В соответствии с общими тенденциями современной науки (например, физики) новые объекты изучения, новые теории будут появляться здесь не с перерывами в десятилетия, а все чаще и чаще. Остановить этот процесс невозможно, пытаться это делать — неразумно. Можно лишь направлять этот процесс. Именно в такой аксиоматической науке, как общая алгебра, не нужно большого ума для того, чтобы создавать новые объекты изучения. Труднее их оправдать. Для этого мало указать примеры, даже важные, вводимых понятий. Понятие группы оправдывается не тем, что существуют симметрические группы на произвольных множествах, а тем, что симметрическими группами и их подгруппами с точностью до изоморфизма исчерпываются все группы. Понятие ассоциативного кольца оправдывается не тем, что существуют кольца линейных преобразований, а лишь тем, что кольцами эндоморфизмов абелевых групп и их подкольцами исчерпываются все ассоциативные кольца. Возможны и другие способы оправдания вводимых новых понятий, но они должны быть столь же убедительными.

В нашем курсе мы хотим дать, опираясь на основы теории универсальных алгебр, обзор основных типов алгебр, как классических, т. е. изучаемых уже давно, так и ожидающих еще детального изучения, но уже вполне хорошо оправданных. Мы не пытаемся ни в одном случае излагать теорию соответствующего класса алгебр и ограничиваемся, помимо результатов, необходимых для оправдания выбора этого класса как объекта самостоятельного изучения, лишь результатами, позволяющими рассматривать этот класс как многообразие алгебр. Этим определяется и своеобразный характер курса, разные разделы которого между собою почти не связаны.

В 1962 г. вышла из печати моя книга «Лекции по общей алгебре», позже появились ее переводы на английский, немецкий, французский, польский, чешский, японский и китайский языки. Настоящий курс не опирается на эту книгу и имеет с нею сравнительно немного перекрытий, хотя идейно к ней весьма близок. Надеюсь, что в будущем я смогу объединить материал этой книги и этого курса в одну новую книгу.

К сожалению, чтение курса было прервано задолго до его окончания. Хотя написано было больше, чем я успел прочесть, однако некоторые параграфы так и остались ненаписанными. В частности, в курс должны были войти сведения о свободных алгебрах многообразий, теорема Биркгофа о многообразиях, вопрос об эквивалентности многообразий и т. д. Некоторые из этих вопросов уже изложены, впрочем, в имеющихся на русском языке книгах по теории универсальных алгебр *).

---

*) Обширный список имеющихся книг и обзоров по общей алгебре можно найти во втором издании книги А. Г. Куроша «Лекции по общей алгебре».— *Прим. ред.*

§ 1. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Начнем с понятия алгебраической операции. *n-арная операция* ω в множестве G, $n \geqslant 1$, сопоставляет всякой упорядоченной системе из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ однозначно определенный элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in G$. Иными словами, это любое отображение n-й декартовой степени G^n в G. В случае $n = 1$ это будет любое преобразование множества G (отображение G в себя).

0-*арная операция* фиксирует в множестве G некоторый определенный элемент.

Хотя у нас будут встречаться также операции частичные, или многозначные, или бесконечноместные *), однако они будут играть лишь служебную роль. Предметом изучения будет понятие операции в указанном выше смысле. Точнее, предметом изучения будут *универсальные алгебры* (или *алгебры*), т. е. множества, в которых задана некоторая система операций Ω, конечная или бесконечная. Множество символов операций Ω, для которых указаны их арности, будем называть *сигнатурой* рассматриваемых алгебр. Для записи того, что операция $\omega \in \Omega$ n-арна, будет использоваться символ $\omega \in \Omega_n$.

Примеры алгебр хорошо известны — группы, кольца, модули. Однако понятие универсальной алгебры неизбежно кажется пока слишком широким. Мы начнем поэтому с рассмотрения многочисленных примеров, притом весьма естественных, желая показать, что никакие дополнительные ограничения при определении понятия универсальной алгебры сверх тех, которые сделаны при определении понятия операции, не были бы оправданными. Одновременно мы хотим показать, что те типы алгебр, которые исторически стали первыми объектами изучения и являются поэтому носителями наиболее разработанных теорий, логически, в рамках всей современной общей алгебры, уже утеряли свой характер исключительности, первоочередности.

---

*) Т. е. соответственно отображения подмножеств G^n в G, отображения множества G^n в множество подмножеств G и отображения G^n в G, где n — произвольное кардинальное число.— *Прим. ред.*

Мы не будем доказывать об универсальных алгебрах каких-либо общих теорем до тех пор, пока естественность этого понятия не станет убедительной. Введем, однако, уже теперь несколько понятий для сокращения речи.

Если дана алгебра G сигнатуры Ω, то подмножество $A \subseteq G$ называется *подалгеброй*, если оно замкнуто относительно всех операций из Ω. Иными словами, для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ должно быть

$$a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in A.$$

С другой стороны, элементы, отмечаемые в G всеми нульарными операциями из Ω (если такие существуют), должны содержаться в A.

Пересечение любой системы подалгебр алгебры G, если оно не пусто, будет подалгеброй этой алгебры.

Действительно, если в G взята система подалгебр A_i, $i \in I$, с непустым пересечением D и если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, а $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — любые элементы из D, то элемент $d_1 d_2 \ldots d_n \omega$ содержится в каждой из подалгебр A_i, а поэтому содержится в D. С другой стороны, в каждой из подалгебр A_i, а поэтому и в D, содержатся и элементы, отмечаемые в G всеми нульарными операциями из Ω.

Отсюда следует, что если M — непустое подмножество алгебры G, то в G существует минимальная среди подалгебр, содержащих целиком множество M, а именно пересечение всех таких подалгебр; одной из них является сама алгебра G. Эта подалгебра обозначается через $\{M\}$ и называется подалгеброй, *порожденной* множеством M. Если $\{M\} = G$, то M называется *системой образующих* для G.

Отметим, что пересечение подалгебр может быть пустым (если, конечно, сигнатура алгебры не содержит нульарных операций). Так, в полугруппе всех целых чисел по сложению подполугруппы строго положительных и строго отрицательных чисел имеют пустое пересечение. Отметим также, что если рассматриваются кольца с единицей и нульарная операция, отмечающая единицу, включена в сигнатуру, то подалгебрами будут лишь подкольца, содержащие единицу кольца.

Если G и G' — алгебры одной и той же сигнатуры Ω (назовем их *однотипными*), то отображение $\varphi: G \to G'$ называется *гомоморфизмом*, если для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ будет

$$(a_1 a_2 \ldots a_n \omega)\varphi = (a_1\varphi)(a_2\varphi) \ldots (a_n\varphi)\omega, \tag{1}$$

а для любого $\omega \in \Omega_0$ элемент 0_ω, отмечаемый этой операцией в G, переходит в элемент $0_\omega'$, отмечаемый ею в G',

$$0_\omega \varphi = 0_\omega'. \tag{2}$$

Образ алгебры G при гомоморфизме $\varphi: G \to G'$, т. е. совокупность образов всех элементов из G, будет подалгеброй в G'. Действительно, если $a_i' = a_i\varphi$, $a_i \in G$, $a_i' \in G'$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\omega \in \Omega_n$, то $a_1' a_2' \ldots$ $\ldots a_n'\omega = (a_1\varphi)(a_2\varphi) \ldots (a_n\varphi)\,\omega = (a_1 a_2 \ldots a_n\omega)\varphi$. Элементы $0_\omega'$, $\omega \in \Omega_0$, также принадлежат по определению гомоморфизма к образу алгебры G.

Гомоморфизм φ называется *мономорфизмом*, если он является взаимно однозначным отображением G в G', т. е. вложением, и *эпиморфизмом*, если он отображает G на G'. Отображение G на G', являющееся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, называется *изоморфизмом*; если такое отображение существует, то G и G' *изоморфны*, $G \simeq G'$. Значение понятия изоморфизма в том, что две изоморфные алгебры с точки зрения свойств заданных в них алгебраических операций неразличимы, т. е. могут рассматриваться как два экземпляра одной и той же алгебры.

Гомоморфизм алгебры G в себя (случай $G' = G$) называется *эндоморфизмом*, изоморфизм G на себя — *автоморфизмом*. Примером последнего является тождественное отображение G на себя.

Пусть задана произвольная сигнатура Ω. Существуют ли алгебры этой сигнатуры? Всегда существуют одноэлементные алгебры, так как во всяком одноэлементном множестве можно определить, притом единственным способом, все операции из Ω. Существуют, впрочем, и алгебры сигнатуры Ω, имеющие сколь угодно большую мощность. Покажем это, построив алгебры, в некотором смысле самые свободные среди всех алгебр сигнатуры Ω; точный смысл этого высказывания вскоре выяснится.

Возьмем произвольное множество X, о котором лишь предположим, что оно не пересекается с множеством символов операций Ω. С другой стороны, каждой нульарной операции $\omega \in \Omega$ сопоставим символ 0_ω, причем все эти символы различны и не являются элементами множеств X и Ω. Определим понятие *слова* (точнее, Ω-*слова*) над алфавитом X. Именно, элементы из X и элементы 0_ω, $\omega \in \Omega_0$, считаются словами, а затем для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых слов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ выражение $w_1 w_2 \ldots w_n \omega$ также будет считаться словом.

Множество всех Ω-слов над алфавитом X следующим образом превращается в алгебру сигнатуры Ω. Если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то результатом применения этой операции к словам $w_1, w_2, \ldots, w_n$ считаем слово $w_1 w_2 \ldots w_n \omega$; если же $\omega \in \Omega_0$, то эта нульарная операция фиксирует слово 0_ω. Полученная алгебра называется *алгеброй Ω-слов над алфавитом X*. Множество X служит для этой алгебры системой образующих.

Очевидно, что алгебры Ω-слов над равномощными алфавитами изоморфны.

Алгебры Ω-слов *свободны* в классе всех алгебр сигнатуры Ω в следующем смысле: *всякое отображение φ_0 множества образующих X в любую алгебру G сигнатуры Ω можно продолжить, притом единственным образом, до гомоморфизма φ алгебры Ω-слов $F(X)$ в алгебру G*. В самом деле, образы элементов, отмеченных нульарными операциями, определяются однозначно в соответствии с (2). Если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и образы при отображении φ слов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ уже определены, то образом слова $w_1 w_2 \ldots w_n \omega$ считаем элемент $(w_1\varphi)(w_2\varphi) \ldots (w_n\varphi)\omega \in G$ в полном соответствии с (1). Единственность построенного нами гомоморфизма следует из единственности записи всякого слова через элементы алфавита X и символы нульарных операций.

Отсюда немедленно следует, что *если алгебра G сигнатуры Ω порождается множеством M, $G = \{M\}$, то всякий элемент из G хотя бы одним способом записывается в виде Ω-слова от (конечной системы) элементов из M.*

Класс всех алгебр данной сигнатуры Ω является слишком широким и аморфным образованием. Правда, существует некоторая литература, посвященная группоидам, т. е. множествам с одной произвольной бинарной операцией. Трудно указать, однако, какой-либо вопрос, который был бы специфическим именно для этого случая, и мы будем смотреть на слово «группоид» лишь как на простой термин, а не как на понятие, которое должно было бы стать предметом самостоятельного изучения. Отметим здесь же, что класс всех алгебр с пустой сигнатурой (операции отсутствуют) есть просто класс всех множеств.

Обычно приходится рассматривать классы однотипных алгебр, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Чаще всего это делается следующим образом. Фиксируем некоторый алфавит, например стандартный алфавит $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, элементы которого назовем неизвестными. Если w, w' — два любых Ω-слова над этим алфавитом, то формальное равенство

$$w = w'$$

назовем *Ω-тождеством.* Пусть Λ — любая система Ω-тождеств, конечная или бесконечная. Класс всех алгебр сигнатуры Ω, в которых выполняются все тождества из Λ (т. е. каждое тождество из Λ после подстановки в него вместо неизвестных любых элементов данной алгебры превращается в равенство, справедливое в этой алгебре), не является пустым — к нему заведомо принадлежат все одноэлементные алгебры сигнатуры Ω. Этот класс называется *многообразием* алгебр сигнатуры Ω, определяемым тождествами Λ, и будет записываться через (Ω, Λ).

Отметим, что класс всех алгебр сигнатуры Ω будет многообразием, определяемым пустой системой тождеств (или тождеством $x = x$). С другой стороны, класс одноэлементных алгебр этой сигнатуры также является многообразием; это *абсолютно вырожденное многообразие* определяется тождеством $x = y$.

Довольно скоро мы должны будем воспользоваться следующим замечанием: *всякая подалгебра алгебры многообразия* (Ω, Λ) *сама принадлежит к этому многообразию.* В самом деле, всякое тождество из Λ, выполняясь во всей алгебре, будет справедливо, в частности, и для элементов из заданной подалгебры.

Отметим также, что *всякий эпиморфный образ алгебры многообразия* (Ω, Λ) *сам принадлежит к этому многообразию.* В самом деле, пусть задан эпиморфизм $\varphi\colon G \to G'$, где G — из многообразия (Ω, Λ), и пусть $w_1 = w_2$ — тождество из Λ. Если в его запись входят неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ и если $a_1', \ldots, a_n'$ — любые элементы из G', не обязательно различные, то существуют такие $a_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$, что $a_i\varphi = a_i'$. Тогда $[w_j(a_1, \ldots, a_n)]\varphi = w_j(a_1', \ldots, a_n')$, $j = 1, 2$, а так как

$$w_1(a_1, \ldots, a_n) = w_2(a_1, \ldots, a_n),$$

то и

$$w_1(a_1', \ldots, a_n') = w_2(a_1', \ldots, a_n'),$$

что и требовалось доказать. В частности, *алгебра, изоморфная алгебре данного многообразия, сама принадлежит к этому многообразию*; иными словами, всякое многообразие является абстрактным классом алгебр.

§ 2. ГРУППЫ

Известно, что *группа* есть множество с одним ассоциативным бинарным умножением, причем левое и правое деления всегда выполнимы и однозначны. Обозначим решение уравнения $az = b$ через $b \setminus a$, а решение уравнения $ta = b$ — через b / a. Можно считать, что это еще две бинарные операции, определенные в группе. Умножение и эти две новые операции подчинены тождествам:

(Ia) $(xy)z = x(yz)$,

(Ib) $x(y \setminus x) = y$, (Ib′) $(y/x)x = y$,

(Ic) $xy \setminus x = y$, (Ic′) $yx/x = y$.

Последние два тождества как раз выражают однозначность обратных операций, так как если, например, $ac = b$, то по (Ic)

$$b \setminus a = ac \setminus a = c.$$

Класс всех групп оказался многообразием относительно трех бинарных операций ab, $b \setminus a$, b / a. Известно, однако, что понятие группы можно определить также при помощи бинарного умножения, унарной операции перехода к правому обратному элементу a^{-1} и нульарной операции, фиксирующей правую единицу 1, причем снова получаем многообразие, так как указанные операции подчиняются тождествам

(IIa) $(xy)z = x(yz)$,

(IIв) $xx^{-1} = 1$,

(IIc) $x \cdot 1 = x$.

Равносильность этих двух определений группы общеизвестна. Напомним лишь, что при переходе от первого определения ко второму умножение сохраняется и принимается, что

$$1 = a \setminus a, \quad a^{-1} = 1 \setminus a.$$

При этом приходится доказывать, что для любых a и b

$$b \setminus b = a \setminus a,$$

— лишь в этом случае 1 будет нульарной операцией. В самом деле, используя, помимо ассоциативности умножения, последовательно аксиомы (Ib′), (Ib), (Ib′) и (Ic), получаем

$$b \diagdown b = [(b \diagup a)a] \diagdown b = [(b \diagup a)a(a \diagdown a)] \diagdown b = \\ =[b\,(a \diagdown a)] \diagdown b = a \diagdown a.$$

Проверка аксиом (II) проходит теперь без затруднений.

При переходе от второго определения к первому сохраняется умножение и принимается, что

$$b \diagdown a = a^{-1}b, \qquad b \diagup a = ba^{-1}.$$

Проверка аксиом (I) проходит без затруднений после того, как будет доказано, что для всех a

$$1\cdot a = a,\ a^{-1}a = 1.$$

Действительно, используя, помимо ассоциативности умножения, в первом случае последовательно аксиомы (IIc), (IIb), (IIb), (IIc), (IIb), (IIb), (IIc), а во втором — (IIc), (IIc), (IIb), (IIc), (IIb), получаем

$$1\cdot a = 1\cdot a\cdot 1 = 1\cdot a\cdot a^{-1}\cdot(a^{-1})^{-1} = 1\cdot 1\cdot(a^{-1})^{-1} = \\ = 1\cdot(a^{-1})^{-1} = a\cdot a^{-1}\cdot(a^{-1})^{-1} = a\cdot 1 = a,$$

$$a^{-1}\cdot a = a^{-1}\cdot a\cdot 1 = a^{-1}\cdot a\cdot a^{-1}\cdot(a^{-1})^{-1} = \\ = a^{-1}\cdot 1\cdot(a^{-1})^{-1} = a^{-1}\cdot(a^{-1})^{-1} = 1.$$

Мы видим, что один и тот же класс алгебраических объектов может задаваться как многообразие универсальных алгебр многими разными способами. Это приводит к понятию эквивалентности многообразий.

Понятие группы может быть определено и многими другими способами. Интересно то, что его можно определить, в частности, при помощи всего одной бинарной операции, впрочем, неассоциативной, причем оказывается, что класс групп является некоторым многообразием группоидов. В этом определении используется уже встречавшаяся нам операция $b \diagup a$. Обозначим ее через ω, т. е.

$$ba\omega = ba^{-1}.$$

Операции, используемые во втором из указанных выше определений группы, записываются через операцию ω следующим образом (используется бесскобочная запись, т. е. символ ω всегда применяется к двум предшествующим элементам группы):

$$1 = aa\omega,\ a^{-1} = aa\omega a\omega,\ ab = abb\omega b\omega\omega.$$

Тождества, определяющие группу, получим, переписав должным образом тождества (II). Впрочем, как показали Хигмэн и Б. Нейман (Publ. Math. **2** (1952), 215—221), рассматриваемое многообразие можно задать одним единственным тождеством, а именно

$$xxx\omega y\omega z\omega xx\omega z\omega\omega\omega = y.$$

Любопытно, что класс групп не является многообразием полугрупп (т. е. ассоциативных группоидов).

Отметим, что класс абелевых групп также будет многообразием — достаточно к набору тождеств (I) (или (II)) добавить тождество коммутативности умножения

$$xy = yx.$$

Этот класс будет многообразием и относительно указанной выше операции $ba\omega = ba^{-1}$, причем это многообразие также может быть задано одним единственным тождеством, а именно

$$xyz\omega yx\omega\omega\omega = z.$$

§ 3. ПОЛУГРУППЫ

В двух первых определениях группы из предыдущего параграфа участвует бинарное ассоциативное умножение. Множество с одной бинарной ассоциативной операцией называется *полугруппой*. Это не просто термин, введенный для сокращения речи,— класс полугрупп, являющийся, очевидно, многообразием, уже стал носителем богатой теории, а применения полугрупп в математике и смежных науках все умножаются.

Нужно сказать, что и логические оправдания для понятия полугруппы как предмета самостоятельного изучения могут быть приведены столь же убедительные, как и для понятия группы. Покажем это. Правда, это будет скорее относиться к *полугруппам с единицей*, которые составляют многообразие алгебр с сигнатурой, состоящей из бинарного умножения и нульарной операции, отмечающей элемент 1, причем умножение ассоциативно и, кроме того, выполняются тождества

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x. \tag{1}$$

Впрочем, *любую полугруппу G добавлением одного единственного элемента* 1 *можно вложить в полугруппу с единицей*. При этом умножение, заданное в G, сохраняется, а произведение, хотя бы один из сомножителей которого есть 1, определяется в соответствии с (1). Ассоциативность так определенного умножения проверяется без затруднений.

Как известно, *преобразованием* множества M называется любое отображение этого множества в себя (т. е. на некоторое подмножество). В частности, *подстановкой* множества M называется любое взаимно однозначное отображение этого множества на себя.

С другой стороны, если даны множества M, N, P и отображения φ: $M \to N$ и ψ: $N \to P$, то последовательное выполнение этих отображений дает отображение $\varphi\psi$: $M \to P$, называемое их *произведением*. Таким образом, для всех $a \in M$

$$a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi.$$

Это умножение отображений ассоциативно: если даны отображения

$$\varphi\colon M \to N,\ \psi\colon N \to P,\ \chi\colon P \to Q,$$

то

$$(\varphi\psi)\chi = \varphi(\psi\chi),$$

так как для любого $a \in M$

$$a[(\varphi\psi)\chi] = [a(\varphi\psi)]\chi = [(a\varphi)\psi]\chi = (a\varphi)(\psi\chi) = \\ = a[\varphi(\psi\chi)].$$

Умножение отображений не является, понятно, алгебраической операцией в смысле § 1. Она будет, однако, таковой в случае преобразований одного множества. При этом множество всех преобразований данного множества M оказывается полугруппой; это *симметрическая полугруппа* на множестве M.

Симметрическая полугруппа на M оказывается полугруппой с единицей. Роль единицы играет *тождественная подстановка* ε_M,

$$a\varepsilon_M = a \text{ для всех } a \in M.$$

Больше того, для любых отображений $\varphi\colon M \to N$ и $\psi\colon L \to M$ будет, очевидно,

$$\varepsilon_M\varphi = \varphi, \quad \psi\varepsilon_M = \psi,$$

т. е. тождественная подстановка ε_M играет роль единицы по отношению к умножению любых отображений, если, понятно, соответствующее произведение имеет смысл.

Подстановки множества M выделяются в симметрической полугруппе на M как такие ее элементы φ, для которых существуют обратные элементы φ^{-1}, удовлетворяющие условиям

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon_M.$$

Обратное преобразование φ^{-1} само будет подстановкой, переводящей для всякого $a \in M$ элемент $a\varphi$ в элемент a. Так как произведение подстановок само будет подстановкой и это умножение ассоциативно, то мы получаем, что множество всех подстановок данного множества M будет группой; это *симметрическая группа* на множестве M.

Мы видим, что симметрическая группа на M выделяется в симметрической полугруппе на M как содержащаяся в ней однозначно определенная максимальная группа с тем же умножением и той же единицей.

Существование симметрических групп и симметрических полугрупп в равной мере оправдывает выбор групп и полугрупп в качестве объектов изучения. Правда, для групп известна следующая теорема Кэли:

Теорема 1. *Всякая группа G изоморфно вкладывается в симметрическую группу на множестве G.*

Параллельная теорема справедлива, однако, и для полугрупп:

Теорема 1′. *Всякая полугруппа с единицей G изоморфно вкладывается в симметрическую полугруппу на множестве G.*

Из последней теоремы немедленно следует, ввиду сказанного выше, что всякая полугруппа G изоморфно вкладывается в некоторую симметрическую полугруппу, хотя в общем случае последняя берется на некотором большем, чем G, множестве.

Покажем, что теоремы 1 и 1′ являются непосредственными следствиями двух других теорем, представляющих и самостоятельный интерес. Отметим сперва, что *произведение гомоморфизмов универсальных алгебр* (в смысле умножения отображений) *само будет гомоморфизмом*. Действительно, если даны однотипные алгебры G, G', G'' с системой операций Ω и гомоморфизмы $\varphi\colon G \to G'$, $\psi\colon G' \to G''$, то для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ будет

$$(a_1a_2\ldots a_n\omega)(\varphi\psi) = [(a_1a_2\ldots a_n\omega)\varphi]\psi =$$
$$= [(a_1\varphi)(a_2\varphi)\ldots(a_n\varphi)\omega]\psi =$$
$$= [(a_1\varphi)\psi][(a_2\varphi)\psi]\ldots[(a_n\varphi)\psi]\omega =$$
$$= [a_1(\varphi\psi)][a_2(\varphi\psi)]\ldots[a_n(\varphi\psi)]\omega.$$

С другой стороны, если операция $\omega \in \Omega_0$ отмечает в алгебрах G, G', G'' соответственно элементы 0_ω, $0'_\omega$, $0''_\omega$, то

$$0_\omega(\varphi\psi) = (0_\omega\varphi)\psi = 0'_\omega\psi = 0''_\omega.$$

Отсюда следует, что множество всех эндоморфизмов данной алгебры G составляет подполугруппу в симметрической полугруппе на множестве G, притом содержащую единицу этой полугруппы,— тождественная подстановка является, очевидно, даже автоморфизмом. Полученная полугруппа с единицей называется *полугруппой (всех) эндоморфизмов* алгебры G.

Аналогично всякий автоморфизм алгебры G является подстановкой в множестве G. Произведение двух автоморфизмов этой алгебры будет и подстановкой, и эндоморфизмом, а поэтому само будет автоморфизмом. Обратная подстановка φ^{-1} для автоморфизма φ сама будет автоморфизмом: если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, то существуют такие $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G$, что $a_i = b_i\varphi$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а поэтому

$$(a_1a_2 \ldots a_n\omega)\varphi^{-1} = [(b_1\varphi)(b_2\varphi)\ldots(b_n\varphi)\omega]\varphi^{-1} = \\ = (b_1b_2 \ldots b_n\omega)(\varphi\varphi^{-1}) = b_1b_2 \ldots b_n\omega = \\ = (a_1\varphi^{-1})(a_2\varphi^{-1})\ldots(a_n\varphi^{-1})\omega.$$

Если же $\omega \in \Omega_0$ отмечает в G элемент 0_ω, то из $0_\omega\varphi = 0_\omega$ следует $0_\omega\varphi^{-1} = 0_\omega$. Таким образом, все автоморфизмы данной алгебры G составляют подгруппу в симметрической группе на множестве G; это *группа (всех) автоморфизмов* алгебры G. Очевидно, что эта группа выделяется в полугруппе всех эндоморфизмов алгебры G как содержащаяся в ней однозначно определенная максимальная группа с тем же умножением и той же единицей. Можно сказать также, что группа автоморфизмов есть группа всех обратимых элементов полугруппы эндоморфизмов.

Справедливы следующие теоремы, из которых теоремы 1 и 1′ немедленно следуют:

Т е о р е м а 2. *Всякая группа G изоморфна группе всех автоморфизмов некоторой универсальной алгебры, определенной на множестве G.*

Теорема 2′. *Всякая полугруппа с единицей G изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов некоторой универсальной алгебры, определенной на множестве G.*

Оказывается, что теорема 2 сама следует из теоремы 2′. Проведем сперва некоторые вспомогательные рассмотрения.

Пусть задано эпиморфное (в частности, изоморфное) отображение φ полугруппы G с единицей e на полугруппу G'. Тогда образ $e\varphi$ единицы будет единицей в G'. Если элемент a обратим в G, то образ $a^{-1}\varphi$ его обратного элемента a^{-1} будет в G' обратным для элемента $a\varphi$, т. е. $(a\varphi)^{-1} = a^{-1}\varphi$. Отсюда следует, что *полугруппа, изоморфная группе, сама будет группой.*

В самом деле, если b' — произвольный элемент из G', то существует такой элемент $b \in G$, что $b\varphi = b'$. Тогда

$$b'(e\varphi) = (b\varphi)(e\varphi) = (be)\varphi = b\varphi = b'$$

и аналогично $(e\varphi)b' = b'$. С другой стороны,

$$(a\varphi)(a^{-1}\varphi) = (aa^{-1})\varphi = e\varphi$$

и аналогично $(a^{-1}\varphi)(a\varphi) = e\varphi$.

Пусть теперь теорема 2′ уже доказана и пусть дана произвольная группа G. Являясь, в частности, полугруппой с единицей, G будет изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов некоторой алгебры, определенной на множестве G. Эта последняя полугруппа будет, следовательно, группой. Отсюда вытекает, что все эндоморфизмы рассматриваемой алгебры обратимы, т. е. являются на самом деле ее автоморфизмами, что доказывает теорему 2.

Остается доказать теорему 2′. Если дана полугруппа G с единицей e, то для всякого $a \in G$ возьмем в множестве G унарную операцию ω_a, являющуюся в полугруппе G левым умножением на элемент a,

$$x\omega_a = ax \text{ для всех } x \in G.$$

Множество G со всеми операциями ω_a, $a \in G$, будет алгеброй, которую обозначим через $\overline{G}$. Правое умножение φ_b в полугруппе G на элемент b, $x\varphi_b = xb$ для всех $x \in G$, будет эндоморфизмом алгебры $\overline{G}$, так как для любых $x,\ a \in G$

$$(x\omega_a)\varphi_b = (ax)b = a(xb) = (x\varphi_b)\omega_a.$$

При этом если $b \neq c$, то $\varphi_b \neq \varphi_c$, так как

$$e\varphi_b = eb = b,\ e\varphi_c = ec = c.$$

Эндоморфизмами φ_b, $b \in G$, исчерпываются все эндоморфизмы алгебры $\overline{G}$, так как если φ — произвольный ее эндоморфизм и $e\varphi = c$, то для всех $x \in G$

$$x\varphi = (xe)\varphi = (e\omega_x)\varphi = (e\varphi)\omega_x = xc = x\varphi_c,$$

т. е. $\varphi = \varphi_c$. Мы получили взаимно однозначное соответствие между всеми эндоморфизмами алгебры $\overline{G}$ и всеми элементами полугруппы G, которое будет на самом деле изоморфизмом соответствующих полугрупп, так как для всех $x,\ b,\ c \in G$

$$x\varphi_{bc} = x(bc) = (xb)c = (x\varphi_b)\varphi_c = x(\varphi_b\varphi_c),$$

т. е. $\varphi_{bc} = \varphi_b\varphi_c$. При этом, как и должно быть, единице полугруппы G соответствует тождественный автоморфизм алгебры $\overline{G}$, так как для всех $x \in G$

$$x\varphi_e = xe = x.$$

Теорема 2′ доказана.

§ 4. ИНВЕРСНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Рассмотрим теперь один класс алгебр, промежуточный между классами групп и полугрупп, а именно класс инверсных полугрупп. Введем сперва вспомогательные понятия. Именно, назовем полугруппу *регулярной*, если для всякого ее элемента a существует хотя бы один такой элемент x, что

$$axa = a. \tag{1}$$

Назовем, далее, элементы a и b полугруппы G *обратными* друг другу, если

$$aba = a, \; bab = b.$$

Оказывается, что *регулярную полугруппу можно определить как полугруппу, в которой всякий элемент обладает обратным элементом, не обязательно единственным.* Действительно, если $axa = a$, то положим $b = xax$. Тогда

$$aba = (axa)xa = axa = a,$$
$$bab = x(axa)xax = x(axa)x = xax = b,$$

т. е. b является обратным для a.

В случае групп элементы, обратные друг другу в указанном полугрупповом смысле, будут в точности обратными в обычном (групповом) смысле, причем всякий элемент обладает единственным обратным.

Полугруппа называется *инверсной*, если всякий ее элемент a обладает обратным элементом, притом единственным; обозначим его через a^{-1}, так что

$$aa^{-1}a = a, \; a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}.$$

Заметим, что требование единственности обратного элемента в этом случае, в отличие от случая групп, необходимо специально накладывать.

Класс инверсных полугрупп содержит в себе класс всех групп и, как мы скоро узнаем, шире последнего.

Понятие инверсной полугруппы допускает и иные определения. Напомним, что элемент a некоторой полугруппы (или группоида) называется *идемпотентом*, если $a^2 = a$. Отметим, что регулярная полугруппа непременно обладает идемпотентами: если выполняется равенство (1), то элемент ax будет идемпотентом, так как

$$(ax)^2 = (axa)x = ax.$$

Оказывается, что *инверсные полугруппы — это такие регулярные полугруппы, в которых любые два идемпотента перестановочны.*

В самом деле, пусть дана инверсная полугруппа G. Ясно, что она регулярна.

Докажем сначала, что в инверсной полугруппе произведение идемпотентов также будет идемпотентом. Пусть a и b — два идемпотента, $a^2 = a$, $b^2 = b$. Положим

$$s = (ab)^{-1}, \ t = sa.$$

Тогда

$$(ab)t(ab) = absa^2b = (ab)s(ab) = ab,$$
$$t(ab)t = sa^2bsa = s(ab)sa = sa = t.$$

Поэтому, ввиду единственности обратного элемента, $t = (ab)^{-1}$, т. е. $sa = s$. Аналогично, полагая $t' = bs$, получим $bs = s$. Отсюда

$$s^2 = (sa)(bs) = s(ab)s = s,$$

т. е. элемент s идемпотентен. Однако идемпотентный элемент служит для самого себя обратным, единственным ввиду инверсности полугруппы, а поэтому $s = ab$. Идемпотентность элемента ab доказана. Идемпотентен, следовательно, и элемент ba. Используя это, получаем:

$$(ab)(ba)(ab) = ab^2a^2b = (ab)^2 = ab,$$
$$(ba)(ab)(ba) = ba^2b^2a = (ba)^2 = ba.$$

Этим доказано, что $ba = (ab)^{-1}$. Однако элемент ab, будучи идемпотентом, совпадает со своим обратным, откуда $ab = ba$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь G—регулярная полугруппа с перестановочными идемпотентами, a — любой элемент из G, b и c — обратные элементы для a. Тогда элементы ab, ac, ba, ca будут идемпотентами и, следовательно, между собою перестановочны. Отсюда

$$b = bab = b(ac)(ab) = (bab)(ac) = bac,$$
$$c = cac = (ca)(ba)c = (ba)(cac) = bac,$$

т. е. $b = c$. Теорема доказана.

Класс инверсных полугрупп является на самом деле многообразием относительно операций ab и a^{-1}, которое задается тождествами

$$(xy)z = x(yz), \qquad xx^{-1}x = x, \qquad x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}.$$

Покажем теперь, что инверсная полугруппа удовлетворяет тождествам

1. $(x^{-1})^{-1} = x$.
2. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
3. $xx^{-1}yy^{-1} = yy^{-1}xx^{-1}$.

Ясно, что инверсная полугруппа регулярна и удовлетворяет аксиомам 1 и 3 (последнее потому, что элементы aa^{-1} и bb^{-1} идемпотентны и, следовательно, перестановочны). Выполняется и тождество 2, как показывают следующие равенства, в которых снова используется перестановочность идемпотентов:

$$(ab)(b^{-1}a^{-1})(ab) = a(bb^{-1})(a^{-1}a)b = (aa^{-1}a)(bb^{-1}b) = ab,$$
$$(b^{-1}a^{-1})(ab)(b^{-1}a^{-1}) = b^{-1}(a^{-1}a)(bb^{-1})a^{-1} =$$
$$= (b^{-1}bb^{-1})(a^{-1}aa^{-1}) = b^{-1}a^{-1}.$$

Наоборот, как показал Б. М. Шайн (сб. «Теория полугрупп и ее приложения», Саратов, вып. 1 (1965), 286—324), *регулярная полугруппа G, в которой для обратных элементов выполняются равенства* 1, 2, 3, *инверсна*. Для любого $a \in G$ будет, ввиду аксиом регулярной полугруппы, 2 и 1,

$$a^{-1} = (aa^{-1}a)^{-1} = a^{-1}(a^{-1})^{-1}a^{-1} = a^{-1}aa^{-1},$$

т. е. элементы a и a^{-1} действительно обратны друг другу.

Далее, ввиду 3,

$$a^{-1}(a^{-1})^{-1}aa^{-1} = aa^{-1}a^{-1}(a^{-1})^{-1},$$

т. е., ввиду 1,

$$a^{-1}aaa^{-1} = aa^{-1}a^{-1}a.$$

Если теперь a — идемпотент, $a^2 = a$, то, используя указанные равенства и 2, получим

$$a^{-1} = a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}aaa^{-1} = aa^{-1}a^{-1}a = a\,(aa)^{-1}a = aa^{-1}a = a.$$

Отсюда

$$aa^{-1} = aa = a.$$

Если b — любой другой идемпотент, то будет $bb^{-1} = b$, а поэтому из 3 следует перестановочность идемпотентов a и b, что и доказывает инверсность нашей полугруппы.

Покажем теперь, что понятие инверсной полугруппы на самом деле имеет право быть предметом самостоятельного изучения. Назовем *частичной подстановкой* множества M любое взаимно однозначное отображение вида $\varphi: A \to B$, где A и B — некоторые подмножества из M. К числу частичных подстановок относятся, в частности, все подстановки множества M, все подстановки любого его подмножества, а также пустая подстановка (тождественная подстановке пустого подмножества), которую обозначим через 0.

Если $\varphi: A \to B$, $\psi: C \to D$ — две частичных подстановки множества M, то их произведение $\varphi\psi$ определяется так. Если пересечение $B \cap C$ пусто, то полагаем $\varphi\psi = 0$. Если же $B \cap C$ — непустое, то обозначим через A' его прообраз при φ, через D' — его образ при ψ. Тогда $\varphi\psi: A' \to D'$, причем для любого $a' \in A'$

$$a'(\varphi\psi) = (a'\varphi)\psi.$$

Ясно, что это будет частичная подстановка. Пустая подстановка 0 играет для этого умножения роль нуля, т. е. для любой частичной подстановки φ

$$\varphi\cdot 0 = 0\cdot\varphi = 0.$$

Для всякой частичной подстановки $\varphi: A \to B$ существует, очевидно, обратная частичная подстановка

φ^{-1}: $B \to A$, причем

$$\varphi\varphi^{-1} = \varepsilon_A, \quad \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon_B,$$

где ε_A, например, есть тождественная подстановка подмножества A. Именно, если $a\varphi = b$, $a \in A$, то $b\varphi^{-1} = a$. Используя обратную частичную подстановку, мы могли бы, например, вместо A' написать выше $(B \cap C)\varphi^{-1}$.

Покажем, что умножение частичных подстановок ассоциативно. Пусть даны φ: $A \to A'$, ψ: $B \to B'$, χ: $C \to C'$ и пусть $(\varphi\psi)\chi$: $D \to D'$, $\varphi(\psi\chi)$: $E \to E'$. Легко проверить, что

$$D = [(A' \cap B)\psi \cap C](\varphi\psi)^{-1},$$
$$E = [A' \cap (B' \cap C)\psi^{-1}]\varphi^{-1}.$$

Покажем, что $D = E$. Если $a \in D$, то $a(\varphi\psi) \in C$, а так как заведомо $a(\varphi\psi) \in B'$, то $a(\varphi\psi) \in B' \cap C$, откуда $a\varphi \in (B' \cap C)\psi^{-1}$. Вместе с очевидным $a\varphi \in A'$ это показывает, что $D \subseteq E$. Обратное включение проверяется аналогично. На полученном подмножестве отображения $(\varphi\psi)\chi$ и $\varphi(\psi\chi)$ действуют одинаково, так как оба сводятся на последовательное применение отображений φ, ψ и χ.

Полученная полугруппа регулярна, так как для любой частичной подстановки φ: $A \to B$ будет

$$\varphi\varphi^{-1}\varphi = \varepsilon_A\varphi = \varphi.$$

Эта полугруппа даже инверсна. Действительно, ее идемпотентами служат тождественные подстановки ε_A для всех подмножеств $A \subseteq M$ и, как легко проверить, только они. Действительно, если φ: $A \to B$ и $\varphi^2 = \varphi$, то, по определению умножения,

$$(B \cap A)\varphi^{-1} = A, \quad (B \cap A)\varphi = B.$$

Поэтому, ввиду взаимной однозначности φ,

$$A = B \cap A = B,$$

т. е. φ является подстановкой на A, притом тождественной, так как других идемпотентов симметрическая группа не содержит. Однако для любых $A, B \subseteq M$

$$\varepsilon_A \varepsilon_B = \varepsilon_{A \cap B} = \varepsilon_B \varepsilon_A.$$

Эта инверсная полугруппа называется симметрической инверсной полугруппой на множестве M. Она не будет группой, так как мультипликативная группа не может иметь нуля, равно как и потому, что группа обладает единственным идемпотентом.

Справедлива следующая теорема В. В. Вагнера — Престона (ДАН СССР 84 (1952), 1119—1122, J. Lond. Math. Soc. 29 (1954), 411—419), параллельная теоремам 1 и 1′ из § 3:

Всякая инверсная полугруппа G изоморфно вкладывается в симметрическую инверсную полугруппу на множестве G.

Отметим сперва, что для всякого $a \in G$ будет

$$Ga = Ga^{-1}a, \tag{2}$$

где Ga означает множество всех элементов вида xa, $x \in G$. Именно, ясно, что

$$Ga^{-1}a = (Ga^{-1})a \subseteq Ga,$$

но, с другой стороны,

$$Ga = Gaa^{-1}a = (Ga)a^{-1}a \subseteq Ga^{-1}a.$$

Поэтому для всех $a \in G$

$$Ga^{-1} = Gaa^{-1}. \tag{3}$$

Сопоставим, учитывая (2), каждому элементу $a \in G$ отображение $\varphi_a\colon Ga^{-1} \to Ga$, определяемое тем, что для всякого $x \in Ga^{-1}$ будет

$$x\varphi_a = xa \in Ga. \tag{4}$$

Поэтому $\varphi_{a^{-1}}\colon Ga \to Ga^{-1}$, причем

$$y\varphi_{a^{-1}} = ya^{-1}$$

для всех $y \in Ga$. Однако, если $x \in Ga^{-1}$, т. е. $x = x'a^{-1}$, то

$$x(\varphi_a\varphi_{a^{-1}}) = x'a^{-1}aa^{-1} = x'a^{-1} = x$$

и аналогично для $y \in Ga$ будет

$$y(\varphi_{a^{-1}}\varphi_a) = y.$$

Отображения φ_a и $\varphi_{a^{-1}}$ оказались обратными друг другу и, следовательно, взаимно однозначными отображениями, т. е. частичными подстановками, причем

$$\varphi_{a^{-1}} = \varphi_a^{-1}. \tag{5}$$

Пусть $\varphi_a = \varphi_b$. Отсюда, в частности,

$$Ga^{-1} = Gb^{-1}, \tag{6}$$

т. е. $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1} \in Gb^{-1}$, а поэтому, снова ввиду равенства отображений φ_a и φ_b,

$$a^{-1}a = a^{-1}b. \tag{7}$$

Ввиду (3) равенство (6) можно переписать в виде

$$Gaa^{-1} = Gbb^{-1}, \tag{8}$$

причем aa^{-1} и bb^{-1} являются, как мы знаем, идемпотентами. Ввиду (8)

$$aa^{-1} = xbb^{-1},$$

откуда

$$aa^{-1}bb^{-1} = xbb^{-1}bb^{-1} = xbb^{-1} = aa^{-1};$$

аналогично

$$bb^{-1}aa^{-1} = bb^{-1}.$$

Так как, однако, идемпотенты в G перестановочны, то из этих равенств следует

$$aa^{-1} = bb^{-1}. \tag{9}$$

Используя (7) и (9), получаем

$$a = aa^{-1}a = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b.$$

Таким образом, отображение $a \to \varphi_a$ является взаимно однозначным вложением G в симметрическую инверсную полугруппу на G. Докажем изоморфность этого вложения. Отображение φ_{ab} определено, как мы знаем, на множестве $G(ab)^{-1}$, произведение $\varphi_a\varphi_b$, ввиду (5), — на множестве $(Ga \cap Gb^{-1})a^{-1}$. Однако, ввиду (2), применяемого дважды, и (3),

$$Ga \cap Gb^{-1} = Ga^{-1}a \cap Gbb^{-1} = Ga^{-1}abb^{-1} = Gabb^{-1},$$

так как, ввиду перестановочности идемпотентов, $Gbb^{-1}a^{-1}a = Ga^{-1}abb^{-1} \subseteq Ga^{-1}a \cap Gbb^{-1}$, если же элемент x лежит в этом пересечении, то

$$x = xa^{-1}a = xbb^{-1} = xa^{-1}abb^{-1} \in Ga^{-1}abb^{-1}.$$

Поэтому, ввиду (3),

$$(Ga \cap Gb^{-1})a^{-1} = Gabb^{-1}a^{-1} = G(ab)(ab)^{-1} = G(ab)^{-1}.$$

Таким образом, отображения φ_{ab} и $\varphi_a\varphi_b$ определены на одном и том же подмножестве, а так как $x(ab) = (xa)b$, то доказано, что $\varphi_{ab} = \varphi_a\varphi_b$. Это вместе с (5) доказывает теорему.

Можно было бы определить частичный автоморфизм универсальной алгебры как изоморфное отображение одной ее подалгебры на другую. Легко видеть, что произведение частичных автоморфизмов как частичных подстановок само будет частичным автоморфизмом и что частичные автоморфизмы данной алгебры составляют инверсную полугруппу с единицей и нулем. По аналогии с теоремами 2 и 2′ из § 3 можно было бы поставить следующий вопрос: *всякая ли инверсная полугруппа G с единицей и нулем изоморфна инверсной полугруппе всех частичных автоморфизмов некоторой универсальной алгебры, определенной на множестве G?* О. И. Доманов показал, однако, что это не так (Изв. высших учебн. зав., Математика **8** (1971), 52—58).

§ 5. ПОЛУГРУДЫ

Полугруппа G называется *полугруппой с инволюцией*, если в ней задана, помимо умножения, еще унарная операция a^{-1}, причем выполняются следующие тождества (помимо ассоциативности умножения):

$$(x^{-1})^{-1} = x, \ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Полугруппы с инволюцией составляют, следовательно, многообразие, содержащее в себе многообразие всех инверсных полугрупп.

В полугруппе с инволюцией G следующим образом определим тернарную операцию $[abc]$:

$$[abc] = ab^{-1}c.$$

Ассоциативность умножения и определение инволюции дают

$$ab^{-1}cd^{-1}e = (ab^{-1}c)d^{-1}e = a\,(dc^{-1}b)^{-1}e = ab^{-1}(cd^{-1}e),$$

т. е. для операции $[abc]$ выполняются тождества

$$[[xyz]uv] = [x[uzy]v] = [xy[zuv]]; \tag{1}$$

обращаем внимание на то, что в средней части крайние множители внутренней скобки оказались переставленными. Алгебра с одной тернарной операцией, удовлетворяющей тождествам (1), называется *полугрудой.*

Слова «полугруда, *определяемая* данной полугруппой с инволюцией» имеют понятный смысл.

Если G будет инверсной полугруппой, то операция $[abc]$, определенная выше, будет удовлетворять, помимо тождеств (1), также тождествам

$$[xxx] = x, \tag{2}$$

$$[[xyy]zz] = [[xzz]yy], \ [[xxy]yz] = [[yyx]xz]; \tag{3}$$

последние вытекают из аксиомы 3 предшествующего параграфа, для первого из тождеств (3) переписанной для обратных элементов. Алгебра с одной тернарной операцией, удовлетворяющей тождествам (1), (2) и (3), называется *обобщенной грудой.* Быть может, термин «инверсная полугруда» был бы более оправданным.

Наконец, если G будет группой (что также является полугруппой с инволюцией относительно умножения и взятия обратного элемента), то операция $[abc]$ будет удовлетворять, помимо тождеств (1), также тождествам

$$[xyy] = x, \ [yyx] = x, \tag{4}$$

из которых тождества (2) и (3) немедленно следуют. Алгебра с одной тернарной операцией, удовлетворяющей тождествам (1) и (4), называется *грудой.*

Для определенных нами алгебр докажем следующую теорему Бэра-Вагнера (Бэром она доказана для груд, В. В. Вагнером для обобщенных груд и полугруд; см. Уч. зап. Саратовск. ун-та **70** (1961), 25—39). Назовем элемент e полугруды G *биунитарным*, если для любых $a \in G$

$$[aee] = [eea] = a.$$

Тождества (4) показывают, что в груде всякий элемент биунитарен. Отметим также, что если полугруппа с инволюцией обладает единицей, то в соответствующей полугруде эта единица будет одним из биунитарных элементов.

Если G — полугруда (или обобщенная груда), обладающая биунитарными элементами, или же груда, и если e — любой биунитарный элемент из G, то операции, определяемые равенствами

$$ab = [aeb], \ a^{-1} = [eae],$$

превращают множество G в полугруппу с инволюцией (соответственно, в инверсную полугруппу или в группу), для которой e служит единицей, причем определяемая ею полугруда (соответственно, обобщенная груда или груда) совпадает с исходной.

Действительно, элемент e служит единицей для умножения ab, так как, ввиду его биунитарности,

$$ae = [aee] = a, \ ea = [eea] = a.$$

Далее, ассоциативность умножения ab следует из (1):

$$(ab)c = [[aeb]ec] = [ae[bec]] = a(bc).$$

Из (1) и биунитарности элемента e следует также

$$(a^{-1})^{-1} = [e[eae]e] = [[eea]ee] = a,$$

$$b^{-1}a^{-1} = [[ebe]e[eae]] = [[[ebe]ee]ae] = [[ebe]ae] = \\ = [e\,[aeb]e] = (ab)^{-1},$$

т. е. нами получена полугруппа с инволюцией. Если же G — обобщенная груда, то, так как

$$ab^{-1} = [ae[ebe]] = [[aee]be] = [abe], \tag{5}$$

получаем

$$aa^{-1}a = [[aae]ea] = [aa[eea]] = [aaa] = a$$

ввиду (2), а также $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. Нами получена, следовательно, инверсная полугруппа. Наконец, если G — груда, то, по (5) и (4),

$$aa^{-1} = [aae] = e,$$

т. е. нами получена группа, так как уже доказано, что e является единицей. Последнее утверждение теоремы проверяется следующим образом на основании (5):

$$ab^{-1}c = [[abe]ec] = [ab[eec]] = [abc].$$

Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что введение понятия груды как самостоятельного объекта изучения было ошибкой, так как это всего лишь еще один способ определения понятия группы, на этот раз при помощи одной тернарной и одной нульарной операции (последняя фиксирует произвольный элемент), способ, эквивалентный рассмотренным в § 2. Заметим, что группы, которые получаются этим путем из данной груды, будут, как можно показать, изоморфными. Именно, пусть в груде G взяты элементы e и e' и определены умножения

$$a\cdot b = [aeb], \quad a\circ b = [ae'b]. \tag{6}$$

Тогда, ввиду (4) и (1),

$$a \circ b = [a[eee']b] = [[ae'e]eb] = [ae'e] \cdot b.$$

Покажем, что преобразование σ множества G, определяемое равенством

$$a\sigma = [ae'e], \ a \in G,$$

будет подстановкой. Действительно, преобразование τ,

$$a\tau = [aee'], \ a \in G,$$

будет для него обратным, так как

$$a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau = [[ae'e]ee'] = [ae'[eee']] = [ae'e'] = a,$$
$$a(\tau\sigma) = (a\tau)\sigma = [[aee']e'e] = [ae[e'e'e]] = [aee] = a.$$

Этим доказано, что группы с операциями (6) будут изотопными (см. § 6) и, по второй теореме Алберта (см. конец § 6), изоморфными.

Что же касается понятий обобщенной груды и полугруды, то положение иное — сейчас будет показано, что существуют обобщенные груды, не содержащие биунитарных элементов. Можно было бы доказать, впрочем, что всякую полугруду (всякую обобщенную груду) можно изоморфно вложить в полугруду (соответственно, в обобщенную груду), обладающую биунитарными элементами и определяемую, следовательно, некоторой полугруппой с инволюцией (некоторой инверсной полугруппой).

П р и м е р о б о б щ е н н о й г р у д ы б е з б и у н и т а р н ы х э л е м е н т о в можно построить следующим образом. Возьмем множество M, построим на нем симметрическую инверсную полугруппу и перейдем к определяемой ею обобщенной груде; обозначим последнюю через G. Возьмем, далее, в M подмножества A и B и обозначим через G' множество всех тех частичных подстановок в M (т. е. тех элементов из G), которые отображают (взаимно однозначно) некоторое подмножество из A на некоторое подмножество из B. Это множество замкнуто, очевидно, относительно тернарной операции $[\varphi\psi\chi] = \varphi\psi^{-1}\chi$, т. е. является подалгеброй обобщенной груды G и, следовательно, само будет обобщенной грудой. Пусть ε: $A_0 \to B_0$ — ее биунитарный элемент. Тогда для любой частичной подстановки $\varphi \in G'$, т. е. φ: $A' \to B'$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, должно быть $\varepsilon\varepsilon^{-1}\varphi = \varphi$. Отсюда следует, ввиду определения умножения частичных подстановок, что $A' \subseteq \subseteq A_0$, откуда, так как, в частности, подмножество A' могло быть любым отдельным элементом из A, вытекает $A_0 = A$. Таким образом, если подмножества A и B будут выбраны так, что мощность A строго больше мощности B, то соответствующая обобщенная груда G' не будет содержать биунитарных элементов.

§ 6. КВАЗИГРУППЫ И ЛУПЫ

Мы пришли к понятию полугруппы, заметив, что в некоторых из определений группы участвует бинарная ассоциативная операция. Первое определение группы из § 2 после удаления из него требования ассоциативности умножения приводит к другому важному понятию, также ставшему в последнее время предметом содержательной теории. Именно, группоид, в котором для любых элементов a, b однозначно разрешимы уравнения

$$ax = b, \quad ya = b,$$

называется *квазигруппой.* Как и в § 2, можно утверждать. что квазигруппы составляют многообразие относительно трех бинарных операций ab, $b \diagdown a$, $b \diagup a$, определяемое тождествами

$$x(y \diagdown x) = y, \qquad (y \diagup x)\, x = y,$$
$$xy \diagdown x = y, \qquad yx \diagup x = y.$$

Из определения квазигруппы нельзя вывести существование в ней единицы. Квазигруппа, обладающая единицей, называется *лупой.* Лупы также составляют многообразие, сигнатура которого состоит из трех бинарных и одной нульарной операции.

Нельзя рассчитывать на то, что для оправдания выбора квазигрупп в качестве объекта самостоятельного изучения можно будет использовать каким-либо способом преобразования или отображения. Для этой цели хорошо служат, однако, так называемые сети. По образцу геометрической сети, состоящей из всех точек плоскости и трех семейств прямых — все прямые, параллельные оси абсцисс, оси ординат и еще одной прямой,— введем следующее понятие. Рассмотрим систему из четырех непустых попарно непересекающихся множеств P, L^1, L^2, L^3; элементы первого множества назовем *точками*, остальных множеств — *прямыми*, причем нумерацию множеств (или, как мы будем говорить, семейств) прямых считаем фиксированной. Примем, что точки и прямые могут находиться в отношении *инцидентности*, выражаемом словами «точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку» и т. д.

Назовем эту систему *сетью*, если выполняются следующие требования:

а) через каждую точку проходит одна и только одна прямая каждого из трех семейств;

б) две прямые, принадлежащие к различным семействам, пересекаются в одной и только одной точке.

Заметим, что ввиду а) прямые одного семейства не могут пересекаться. Заметим также, что семейства L^1, L^2, L^3 равномощны — мы получим взаимно однозначное соответствие между L^1 и L^2, если фиксируем некоторую прямую l^3 из L^3 и сопоставим друг другу те прямые из L^1 и L^2, которые пересекаются в точке, лежащей на l^3.

Если G — множество, равномощное с каждым из L^i, $i = 1, 2, 3$, то прямые каждого из этих трех семейств можно снабдить индексами, пробегающими множество G. Фиксировав эти индексации, притом совершенно произвольные, мы следующим образом определяем на G операцию умножения: $ab = c$, если через точку пересечения прямых $l_a^1 \in L^1$ и $l_b^2 \in L^2$ проходит прямая $l_c^3 \in L^3$. Относительно этой операции G будет квазигруппой: единственным решением уравнения $ax = b$, например, будет индекс той единственной прямой семейства L^2, которая проходит через точку пересечения прямых l_a^1 и l_c^3. Эта квазигруппа называется *координатной квазигруппой* исходной сети.

Всякая квазигруппа G является координатной квазигруппой некоторой сети. Построим эту сеть. Ее точками считаем упорядоченные пары (a, b) элементов из G, прямыми i-го семейства, $i = 1, 2, 3,$— символы l_a^i для всех $a \in G$. Точка (a, b) считается инцидентной прямой l_a^1 первого семейства, прямой l_b^2 второго и прямой l_{ab}^3 третьего. Следовательно, требование а) выполняется. Выполняется и требование б): прямые l_a^1 и l_b^2 пересекаются в точке (a, b), прямые l_a^1 и l_c^3 — в точке $(a, c \setminus a)$, прямые l_b^2 и l_c^3 — в точке $(c / b, b)$. Очевидно, что при указанной индексации прямых построенной сети координатной квазигруппой служит как раз квазигруппа G.

Заметим, что применения квазигрупп, в частности, в теории алгебраических кривых, связаны обычно с указанным представлением квазигруппы в качестве координатной квазигруппы некоторой сети. Иногда, впрочем, берется понятие, двойственное к сети (прямые называются точками, а точки — прямыми).

Координатная квазигруппа сети зависит, очевидно, от выбранных индексаций прямых каждого семейства. Если эти индексации будут изменены (что равносильно применению к ним некоторых подстановок множества G), то на том же множестве G будет определена новая квазигруппа, в общем случае с первоначальной не изоморфная. Эти квазигруппы будут, однако, изотопными в соответствии со следующим общим определением.

Два группоида, с операциями $a\cdot b$ и $a\circ b$, определенные на одном и том же множестве G, называются *изотопными*, если существуют такие подстановки ρ, σ и τ множества G, что для любых a, $b\in G$

$$a\circ b=(a\rho\cdot b\sigma)\tau.$$

Легко проверяется, что отношение *изотопии* будет для бинарных операций на множестве G отношением эквивалентности.

Изоморфизм двух бинарных операций, заданных на одном и том же множестве, является частным случаем изотопии, а именно при $\rho=\sigma=\tau^{-1}$. С другой стороны, изотопия называется *главной* (соответственно говорят о *главном изотопе*), если τ является тождественной подстановкой, т. е.

$$a\circ b=a\rho\cdot b\sigma.$$

Всякий изотоп группоида изоморфен некоторому его главному изотопу. Действительно, если на множестве G заданы группоиды с операциями $a\cdot b$ и $a\circ b$, причем $a\circ b=(a\rho\cdot b\sigma)\tau$, то операция

$$a\times b=a\tau\rho\cdot b\tau\sigma$$

определяет на G главный изотоп первого группоида, изоморфный второму, так как

$$(a\tau^{-1}\times b\tau^{-1})\tau=[(a\tau^{-1})\tau\rho\cdot(b\tau^{-1})\tau\sigma]\tau=(a\rho\cdot b\sigma)\tau=a\circ b.$$

Две координатные квазигруппы одной и той же сети, определенные на одном и том же множестве G, на самом деле изотопны. Действительно, обозначим операцию в первой квазигруппе через $a \circ b$, т. е. $a \circ b = c$ означает, что прямые l_a^1, l_b^2 и l_c^3 пересекаются в одной точке. Меняем теперь индексации прямых каждого семейства, подвергая их подстановкам ρ, σ и τ. Теперь эти же три прямые будут обозначены через $l_{a\rho}^1$, $l_{b\sigma}^2$, $l_{c\tau}^3$, причем каждый из элементов $a\rho$, $b\sigma$, $c\tau$ пробегает все множество G, а поэтому во второй квазигруппе (с операцией $a \cdot b$) будет

$$a\rho \cdot b\sigma = c\tau,$$

т. е.

$$a\rho \cdot b\sigma = (a \circ b)\tau.$$

Так как подстановки ρ, σ, τ были произвольными, то ясно, что *все координатные квазигруппы данной сети составляют, с точностью до изоморфизма, полный класс изотопных квазигрупп, определенных на множестве G.* Отсюда сразу следует, что *всякий группоид, изотопный квазигруппе, сам будет квазигруппой.* Используя сети, легко доказать также следующую теорему Алберта (Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 507—519):

Всякая квазигруппа изотопна некоторой лупе.

В самом деле, заданная квазигруппа G служит координатной квазигруппой для сети (P, L^1, L^2, L^3). Отметим теперь в G некоторый элемент e и следующим образом изменим индексацию прямых: индексацию семейства L^3 оставим без изменения, а некоторую прямую семейства L^1 обозначим через l_e^1, после чего прямую семейства L^2 обозначим через l_b^2, если она проходит через точку пересечения прямых l_e^1 и l_b^3 (этим определяется, в частности, прямая l_e^2), и, наконец, прямую семейства L^1 обозначим через l_a^1, если она проходит через точку пересечения прямых l_e^2 и l_a^3. При этом, как легко проверить, индекс прямой l_e^1 не изменится. Координатная квазигруппа, соответствующая этой новой индексации, имеет, очевидно, элемент e своей единицей, т. е. будет лупой.

Изотопные лупы могут не быть изоморфными. Справедлива, однако, вторая теорема Алберта:

Если лупа (в частности, группа) изотопна некоторой группе, то они изоморфны.

Эта теорема вытекает, впрочем, из следующей теоремы Брака — Хьюза (Trans. Amer. Math. Soc. **60** (1946), 245—354; J. London Math. Soc. **32** (1957), 510—511):

Если группоид с единицей изотопен полугруппе, то они изоморфны, т. е. оба являются полугруппами с единицей.

Действительно, пусть на множестве G заданы группоид с умножением $a \cdot b$ и единицей e и полугруппа с умножением $a \circ b$, причем они изотопны, т. е.

$$a \circ b = (a\rho \cdot b\sigma)\tau,$$

где ρ, σ, τ — подстановки в G. Так как для любых a, b, $c \in G$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

то

$$[(a\rho \cdot b\sigma)\tau\rho \cdot c\sigma]\tau = [a\rho \cdot (b\rho \cdot c\sigma)\tau\sigma]\tau,$$

откуда

$$(a\rho \cdot b\sigma)\tau\rho \cdot c\sigma = a\rho \cdot (b\rho \cdot c\sigma)\tau\sigma. \tag{1}$$

Полагая здесь $a\rho = c\sigma = e$, получаем для всех $b \in G$

$$b\sigma\tau\rho = b\rho\tau\sigma. \tag{2}$$

Полагая, далее, в (1) $a\rho = e$ и используя (2), получаем

$$b\rho\tau\sigma \cdot c\sigma = (b\rho \cdot c\sigma)\tau\sigma$$

или, заменяя $b\rho$ на a и $c\sigma$ на b,

$$a\tau\sigma \cdot b = (a \cdot b)\tau\sigma \tag{3}$$

для всех a, $b \in G$. Аналогично, полагая в (1) $c\sigma = e$ и используя (2), получаем

$$(a\rho \cdot b\sigma)\tau\rho = a\rho \cdot b\sigma\tau\rho$$

или, заменяя $a\rho$ на a и $b\sigma$ на b,

$$(a\cdot b)\tau\rho = a\cdot b\tau\rho \tag{4}$$

для всех $a, b \in G$. Наконец, последовательно используя (3), (4) и (2), получаем, что для любых $a, b \in G$

$$(a\circ b)\sigma\tau\rho = (a\rho\cdot b\sigma)\tau\sigma\tau\rho = (a\rho\tau\sigma\cdot b\sigma)\tau\rho = a\rho\tau\sigma\cdot b\sigma\tau\rho = \\ = a\sigma\tau\rho\cdot b\sigma\tau\rho,$$

т. е. подстановка $\sigma\tau\rho$ оказывается изоморфизмом между заданными группоидом и полугруппой. Теорема доказана.

§ 7. МУФАНГОВЫ ЛУПЫ

Многообразие луп настолько шире многообразия групп, что было бы неправильным смотреть на лупы как, так сказать, на «неассоциативные группы». В самом деле, хотя лупа обладает единицей 1 и, будучи квазигруппой, для всякого элемента a содержит элементы

$$a^{-1} = 1 \setminus a \text{ и } {}^{-1}a = 1 / a,$$

однако эти «обратные элементы» вовсе не играют в лупе роль обратных элементов группы. Введем поэтому следующий более узкий класс луп.

Лупа G называется *лупой с обратимостью*, если для любых a, $b \in G$

$$(ba)a^{-1} = b, \quad {}^{-1}a(ab) = b. \tag{1}$$

Подставляя во второе из равенств (1) вместо b элемент a^{-1}, получаем ${}^{-1}a = a^{-1}$, т. е. *всякий элемент лупы с обратимостью обладает однозначно определенным двусторонним обратным элементом* a^{-1}:

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Равенства (1) принимают теперь вид

$$(ba)a^{-1} = a^{-1}(ab) = b. \tag{2}$$

Ясно, что $(a^{-1})^{-1} = a$, откуда

$$b \setminus a = a^{-1}b, \quad b / a = ba^{-1}. \tag{3}$$

Действительно, ввиду (2) будет, например,

$$a(a^{-1}b) = (a^{-1})^{-1}(a^{-1}b) = b.$$

На основании (3) покажем, что

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}. \tag{4}$$

В самом деле, если $ab = c$, то $b = a^{-1}c$, откуда $a^{-1} = bc^{-1}$ и, наконец, $c^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Укажем еще некоторые свойства луп с обратимостью, необходимые для дальнейшего. Пусть G — такая лупа и пусть задан ее главный изотоп с операцией

$$a \circ b = a\rho \cdot b\sigma, \tag{5}$$

также являющийся лупой; пусть 1_0 — единица последней. Тогда, подставляя в (5) вместо b элемент 1_0, получаем

$$a = a\rho \cdot 1_0\sigma,$$

откуда, ввиду (2),

$$a\rho = a \cdot (1_0\sigma)^{-1}.$$

Аналогично,

$$b\sigma = (1_0\rho)^{-1} \cdot b.$$

Положим

$$(1_0\sigma)^{-1} = u, \quad (1_0\rho)^{-1} = v.$$

Заметим, что в любой квазигруппе G умножение с п р а в а всех ее элементов на некоторый элемент u определяет подстановку множества G, которую мы обозначим через r_u. Аналогично через l_v обозначим подстановку, получающуюся от умножения с л е в а всех элементов квазигруппы на элемент v. Возвращаясь к лупе с обратимостью G, мы получаем, что операция (5) любого ее главного изотопа, являющегося лупой, может быть записана в виде

$$a \circ b = ar_u \cdot bl_v \tag{6}$$

(символ подстановки, как обычно, мы записываем справа).

Отметим, с другой стороны, что для лупы с обратимостью G ее главный изотоп с операцией (6) при любых $u, v \in G$ будет лупой. В самом деле, единицей будет служить элемент $v^{-1}u^{-1}$, так как для всех $a \in G$

$$v^{-1}u^{-1} \circ a = (v^{-1}u^{-1})r_u \cdot al_v = [(v^{-1}u^{-1})u] \cdot (va) = \\ = v^{-1}(va) = a,$$

и аналогично с другой стороны.

Вернемся на минуту к рассмотрению изотопий группоидов (см. § 6). В том частном случае, когда обе изотопные операции совпадают, $a \circ b = ab$, т. е.

$$ab = (a\rho \cdot b\sigma)\tau, \tag{7}$$

говорят об *автотопии* рассматриваемого группоида. Обозначим через λ подстановку, обратную τ, т. е.

$\lambda = \tau^{-1}$. Тогда автотопию (7) можно переписать в виде

$$a\rho \cdot b\sigma = (ab)\lambda.$$

Запишем ее символом (ρ, δ, λ). В частности, если φ — автоморфизм группоида, то $(\varphi, \varphi, \varphi)$ будет автотопией, и обратно.

Если (ρ, σ, λ) и $(\rho', \sigma', \lambda')$ — две автотопии группоида G, то их произведение

$$(\rho, \sigma, \lambda)(\rho', \sigma', \lambda') = (\rho\rho', \sigma\sigma', \lambda\lambda')$$

также будет автотопией, так как для любых $a, b \in G$

$$a\rho\rho' \cdot b\sigma\sigma' = (a\rho \cdot b\sigma)\lambda' = (ab)\lambda\lambda'.$$

Это умножение автотопий ассоциативно, так как сводится к умножению подстановок, единицей служит тождественная автотопия $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, где ε — тождественная подстановка, а обратной для автотопии (ρ, σ, λ) будет автотопия $(\rho^{-1}, \sigma^{-1}, \lambda^{-1})$. Действительно, это будет автотопия, так как

$$(ab)\lambda^{-1} = [(a\rho^{-1})\rho \cdot (b\sigma^{-1})\sigma]\lambda^{-1} = (a\rho^{-1} \cdot b\sigma^{-1})\lambda\lambda^{-1} = \\ = a\rho^{-1} \cdot b\sigma^{-1}.$$

Полученная группа автотопий группоида содержит в качестве подгруппы его группу автоморфизмов.

Вновь возвращаясь к лупам с обратимостью, отметим, что в них отображение $a \to a^{-1}$ будет подстановкой; обозначим ее через ι:

$$a\iota = a^{-1}.$$

Лемма. *Если* (ρ, σ, λ) — *автотопия лупы с обратимостью* G, *то* $(\lambda, \iota\sigma\iota, \rho)$ *и* $(\iota\rho\iota, \lambda, \sigma)$ *также будут ее автотопиями. Обратно, существование любой из этих новых автотопий влечет существование исходной автотопии.*

Действительно, для любых $a, b \in G$ выполняется равенство $a\rho \cdot b\sigma = (ab)\lambda$. Подставляя сюда ab вместо a и b^{-1} вместо b, получаем

$$(ab)\rho \cdot b\iota\sigma = a\lambda,$$

откуда

$$(ab)\rho = a\lambda\cdot(b\iota\sigma)^{-1} = a\lambda\cdot b\iota\sigma\iota,$$

т. е. $(\lambda, \iota\sigma\iota, \rho)$, действительно, — автотопия. Аналогично, подставляя в то же равенство ab вместо b и a^{-1} вместо a, получаем

$$a\iota\rho\cdot(ab)\sigma = b\lambda,$$

откуда

$$(ab)\sigma = (a\iota\rho)^{-1}\cdot b\lambda = a\iota\rho\iota\cdot b\lambda,$$

т. е. и $(\iota\rho\iota, \lambda, \sigma)$ будет автотопией. Последнее утверждение леммы следует из того, что применение уже доказанного к автотопии $(\lambda, \iota\sigma\iota, \rho)$, например, снова дает автотопию (ρ, σ, λ), так как $\iota^2 = \varepsilon$.

На самом деле основным объектом изучения являются не лупы с обратимостью, а более узкий класс муфанговых луп. Именно, лупа называется *муфанговой*, если все лупы, ей изотопные, являются лупами с обратимостью. Муфанговы лупы также составляют многообразие ввиду следующей теоремы Муфанг (Math. Ann., **110** (1935), 416—430):

Лупа G тогда и только тогда муфангова, когда в ней выполняется тождество

$$(xy)(zx) = [x(yz)]x. \tag{8}$$

Доказательство. Положим сперва, что G — лупа со свойством обратимости. Мы знаем, что всякий ее изотоп изоморфен главному изотопу и что во всех лупах, являющихся главными изотопами лупы G, операции задаются по правилу (6) при некоторых u и v, которые могут быть произвольными элементами из G. Пусть G_0 — один из этих главных изотопов, а операция в нем есть

$$a\circ b = ar_u\cdot bl_v.$$

Выполнимость в G_0 первого из тождеств (1) равносильна существованию такой подстановки ι_0, что для любых $a, b \in G$

$$(a\circ b)\circ b\iota_0 = a,$$

что равносильно равенству

$$(a \circ b) r_u \cdot b \iota_0 l_v = a,$$

равносильному, в свою очередь, равенству

$$(a \circ b) r_u = a \cdot b \iota_0 l_v \iota. \tag{9}$$

Заметим, что в нашей лупе G обратной для подстановки r_u служит подстановка $r_{u^{-1}}$, т. е. $r_u^{-1} = r_{u^{-1}}$, так как $(au)u^{-1} = a$; аналогично $l_v^{-1} = l_{v^{-1}}$. Так как элемент ar_u^{-1} пробегает вместе с элементом a все множество G и это же верно для элементов bl_v^{-1} и b, то равенство (9) равносильно равенству

$$(ar_u^{-1} \circ bl_v^{-1}) r_u = ar_u^{-1} \cdot bl_v^{-1} \iota_0 l_v \iota,$$

т. е., полагая $l_v^{-1} \iota_0 l_v \iota = \tau$, — равенству

$$(ab) r_u = ar_u^{-1} \cdot b\tau;$$

иными словами, оно равносильно существованию в лупе G автотопии (r_u^{-1}, τ, r_u). Последнее, по лемме, равносильно существованию автотопии $(\iota r_u^{-1} \iota, r_u, \tau)$, равной (l_u, r_u, τ), так как ввиду замечания выше и (4), для всех $a \in G$

$$a \iota r_u^{-1} \iota = (a^{-1} u^{-1})^{-1} = ua = al_u.$$

На самом деле, однако, $\tau = l_u r_u$, так как для любого $a \in G$

$$a\tau = (a \cdot 1)\tau = al_u . 1r_u = (al_u) u = al_u r_u.$$

Наконец, существование автотопии $(l_u, r_u, l_u r_u)$ по определению означает, что для любых $a, b \in G$

$$al_u \cdot br_u = (ab) l_u r_u,$$

т. е.

$$(ua)(bu) = [u(ab)]u.$$

Это означает, так как элемент u мог быть произвольным элементом из G, что выполнение во всех лупах, изотопных лупе G, первого из тождеств (1), составляющих определение лупы с обратимостью, влечет выполнение в G тождества (8). Таким же путем доказывается, что и выполнение второго из тождеств (1) во всех лупах, изотопных лупе G, влечет выполнение в G того же тождества (8); при проведении доказательства нужно лишь в должном месте заменить элементы a и b соответственно на al_v^{-1} и br_u^{-1}, а при применении леммы использовать ее другое утверждение.

Остается доказать, что всякая лупа G с тождеством (8) будет лупой с обратимостью. Из (8) при $y = 1$ для всех $x, z \in G$ следует $x(zx) = (xz)x$. Поэтому, подставляя в (8) вместо x, y, z элементы a^{-1}, b, a (где a, b — произвольные элементы из G и $aa^{-1} = 1$), получаем

$$a^{-1}b = [a^{-1}(ba)]a^{-1} = a^{-1}[(ba)a^{-1}],$$

откуда $b = (ba)a^{-1}$, т. е. в G выполняется первое из тождеств (1). С другой стороны, подставляя в (8) вместо x, y, z элементы ${}^{-1}a$, a, b (где ${}^{-1}a \cdot a = 1$), получаем

$$b({}^{-1}a) = [{}^{-1}a \cdot (ab)]({}^{-1}a),$$

откуда $b = {}^{-1}a\,(ab)$, т. е. в G выполняется и второе из тождеств (1). Теорема доказана.

Заметим, что тождество (8) можно было бы заменить в этой теореме некоторыми другими тождествами, равносильными ему в классе луп, например, тождеством

$$[(xy)z]y = x[y(zy)].$$

Отметим, что в силу другой теоремы Муфанг муфангову лупу можно определить как такую лупу, что во всякой лупе, ей изотопной, подлупа, порожденная любыми двумя элементами, ассоциативна, т. е. является группой.

§ 8. n-ГРУППЫ

Понятие сети, введенное в § 6, было подсказано примером сети, составленной из всех точек и трех семейств прямых на плоскости — прямые, параллельные оси x, оси y и еще одной прямой. Столь же естественно, однако, рассмотрение в трехмерном пространстве множества всех точек и четырех семейств плоскостей — параллельных трем координатным плоскостям и еще одной плоскости. Переход к n-мерному евклидову пространству очевиден. Этим подсказывается следующее определение.

Система непустых попарно непересекающихся множеств P, L^1, L^2, . . ., L^{n+1} (элементы первого множества называются *точками*, а остальных — *гиперплоскостями*) называется *n-мерной сетью*, если между точками и гиперплоскостями задано отношение инцидентности, удовлетворяющее следующим требованиям:

а) через каждую точку проходит одна и только одна гиперплоскость каждого из $n+1$ семейств;

б) n гиперплоскостей, принадлежащих к различным семействам, пересекаются в одной и только одной точке.

Таким образом, сети, рассмотренные в § 6, в силу этого определения будут двумерными сетями.

Заметим, что семейства гиперплоскостей L^1, L^2, ..., L^{n+1} равномощны — мы получим взаимно однозначное соответствие между L^1 и L^2, если фиксируем гиперплоскости $l^i \in L^i$, $i = 3, \ldots, n+1$, и гиперплоскости $l^1 \in L^1$ сопоставим гиперплоскость $l^2 \in L^2$, проходящую через точку пересечения гиперплоскостей l^1, $l^3, \ldots, l^{n+1}$.

Пусть G — множество, равномощное с L^i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Используем его для индексации гиперплоскостей этих семейств, после чего определим в G следующим образом n-арную операцию: $a_1a_2 \ldots a_n\omega = b$, если через точку пересечения гиперплоскостей $l^i_{i_1} \in L^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, проходит гиперплоскость $l^{n+1}_b \in L^{n+1}$. Для этой операции на каждом из мест $1, 2, \ldots, n$ существует однозначно определенная обратная операция: так, решением уравнения $xa_2 \ldots a_n\omega = b$ будет индекс той единственной гиперплоскости семейства L^1, которая проходит через точку пересечения гиперплоскостей $l^2_{a_2}$, $l^3_{a_3}$, . . ., $l^n_{a_n}$ l^{n+1}_b.

Алгебра с одной n-арной операцией, однозначно обратимой на каждом месте, называется *n-квазигруппой*. Так как, как и в § 6, можно показать, что всякая n-квазигруппа служит координатной n-квазигруппой некоторой n-мерной сети, то n-квазигруппы оказываются столь же естественным объектом изучения, как и квазигруппы (т. е. 2-квазигруппы), и их изучение уже началось. Ясно, что n-квазигруппы при фиксированном n составляют многообразие.

Много раньше началось изучение частного случая n-квазигрупп, обобщающего на n-арный случай понятие группы. Именно, n-квазигруппа называется *n-группой*, если в ней выполняются следующие тождества ассоциативности:

$$\begin{gathered}(x_1x_2\ldots x_n\omega)x_{n+1}\ldots x_{2n-1}\,\omega = \\ = x_1x_2\ldots x_i\,(x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_{i+n}\omega)x_{i+n+1}\ldots x_{2n-1}\omega, \qquad (1) \\ i = 1, 2, \ldots, n-1.\end{gathered}$$

Как обычно, из (1) следует, что в n-группе можно однозначным образом говорить о произведении k элементов a_1, a_2, . . ., a_k, взятых в указанном порядке, не заботясь о том, как расставлены скобки, если, конечно, это произведение вообще имеет смысл, т. е. если k при делении на $n-1$ дает остаток 1,

$$k \equiv 1 \pmod{n-1}.$$

Условимся записывать это произведение просто в виде $a_1a_2\ldots a_k$ (без символа ω). Условимся также в случае, когда в таком произведении где-то стоят рядом m элементов, равных одному и тому же элементу a, писать вместо этих элементов символ a^m.

Теория n-групп при $n \geqslant 3$ существенно отличается от теории групп (т. е. 2-групп), так как при $n \geqslant 3$ нет аналога единицы. Будем считать поэтому, что на n наложено указанное условие $n \geqslant 3$.

Пусть дана n-группа G. Если $a \in G$, то решение уравнения

$$a^{n-1}x = a$$

обозначается через $\bar{a}$ и называется элементом, *косым* для элемента a. Оказывается, что для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$a^{i-1}\bar{a}\, a^{n-i} = a \tag{2}$$

(считаем, что a^0 означает отсутствие этого множителя). Действительно, из $a^{n-1}\bar{a} = a$ следует

$$a^n = (a^{n-1}\bar{a})a^{n-1} = a^{n-i}\,(a^{i-1}\bar{a}a^{n-i})a^{i-1},$$

а поэтому равенство (2) вытекает из единственности обратной операции на $(n-i+1)$-м месте.

Больше того, для любых a, $b \in G$ имеют место равенства ($i = 0, 1, \ldots, n-2$)

$$ba^i\bar{a}a^{n-i-2} = b, \tag{3}$$

$$a^i\bar{a}a^{n-i-2}b = b. \tag{4}$$

Докажем первое из них. Можно подобрать такие элементы $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, что $b = c_1c_2 \ldots c_{n-1}a$. Поэтому, ввиду (2),

$$ba^i\bar{a}a^{n-i-2} = c_1c_2 \ldots c_{n-1}\,(a^{i+1}\bar{a}a^{n-i-2}) = \\ = c_1c_2 \ldots c_{n-1}a = b.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Можно было бы показать (см. Глейхгевихт и Глазек, Coll. Math. 17 (1967), 209—219), что n-группу при $n \geqslant 3$ можно определить как множество с одной n-арной операцией, удовлетворяющей тождествам ассоциативности (1), и еще одной унарной операцией $\bar{a}$, для которой выполняются следующие тождества, являющиеся частными случаями тождеств (3) и (4):

$$yx^{n-2}\bar{x} = y, \qquad yx^{n-3}\bar{x}x = y,$$

$$\bar{x}x^{n-2}y = y, \qquad x\bar{x}x^{n-3}y = y.$$

Пусть дана группа Γ с умножением $a \circ b$. Если $n \geqslant 3$, то следующим образом определим на множестве Г n-арную операцию $a_1a_2 \ldots a_n$:

$$a_1a_2 \ldots a_n = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n.$$

Ясно, что все требования, входящие в определение n-группы, выполняются. Назовем полученную n-группу *определяемой* группой Г.

Докажем, что *n-группа G, $n \geqslant 3$, тогда и только тогда определяется группой, если она обладает хотя бы одним элементом t, удовлетворяющим условиям*

а) $\bar{t} = t$,

б) *для любых $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in G$ и любого i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $ta_1a_2 \ldots a_{n-1} = a_1 \ldots a_ita_{i+1} \ldots a_{n-1}$.*

В самом деле, если n-группа G определяется группой Г, то роль элемента t играет единица группы Г, хотя могут существовать и другие элементы, обладающие свойствами а) и б). Обратно, пусть n-группа G обладает элементом t с нужными свойствами. Следующим образом определим на G бинарную операцию: для всех a, $b \in G$

$$a \circ b = at^{n-2}b.$$

Это умножение ассоциативно ввиду ассоциативности операции в n-группе:

$$(a \circ b) \circ c = (at^{n-2}b)t^{n-2}c = at^{n-2}(bt^{n-2}c) = a \circ (b \circ c).$$

Роль единицы играет элемент t: ввиду а) и (3) будет

$$a \circ t = at^{n-2}t = a. \qquad (5)$$

Наконец, обратным для элемента a будет решение уравнения $at^{n-2}x = t$, существующее в n-группе G. Нами построена на множестве G группа с умножением $a \circ b$. Определяемой ею n-группой служит исходная n-группа G. В самом деле, используя б) и применяя несколько раз равенство $a_nt^{n-1} = a_n$ (см. (5)), получаем:

$$a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n = a_1t^{n-2}a_2t^{n-2}a_3 \ldots a_{n-1}t^{n-2}a_n = \\ = a_1a_2 \ldots a_nt^{(n-2)(n-1)} = a_1a_2 \ldots a_n.$$

Теорема доказана.

Мы видим, что класс всех n-групп, определяемых группами, при фиксированном n, $n \geqslant 3$, оказывается многообразием, в сигнатуру которого входят операции n-группы и еще одна нульарная операция. Это многообразие оказывается эквивалентным многообразиям, указанным в § 2, т. е. мы получили еще одну форму определения группы.

Понятие n-группы допускает следующее разумное оправдание. Именно, можно было бы показать, что всякая n-группа изоморфно вкладывается в n-группу, определяемую группой. Это вытекает из теоремы Поста (Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 208—350), утверждающей, что все n-группы можно получить из групп при помощи следующей конструкции. Берется группа G, обладающая нормальным делителем A, индекс которого конечен и делит число $n-1$, а фактор-группа G/A — циклическая. Тогда смежный класс A_g, являющийся образующим элементом этой фактор-группы, обладает, ввиду $g^{n-1} \in A$, тем свойством, что произведение любых n его элементов содержится в самом этом классе. Класс A_g оказывается, следовательно, n-группой, а именно, n-подгруппой n-группы, определяемой группой G.

Другая форма этого описания n-групп — в работах Хоссу (Publ. Math. 10 (1963), 87—92) и Л. М. Глускина (Матем. сб. 68 (1965), 444—472).

Приведем пример 3-группы, не определяемой какой-либо группой. Именно, легко проверяется, что следующая алгебра с одной тернарной операцией будет 3-группой (на самом деле здесь применяется конструкция, указанная в теореме Поста, к случаю, когда G — циклическая группа четвертого порядка, а A — ее подгруппа второго порядка): алгебра состоит из двух элементов a и b, а тернарная операция коммутативна (т. е. произведение $x_1x_2x_3$ не зависит от порядка сомножителей) и задается равенствами

$$a^3 = b, \ a^2b = a, \ ab^2 = b, \ b^3 = a.$$

Эта 3-группа не будет определяться группой в силу доказанной выше характеризации таких 3-групп, так как $\bar{a} = b$, $\bar{b} = a$.

§ 9. АССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА

Настало время вспомнить, что в курсе высшей алгебры наряду с понятием группы значительное место занимают понятия ассоциативного кольца и модуля. Начнем с первого из них. Напомним, что *ассоциативное кольцо* можно определить как множество, являющееся абелевой группой по сложению и полугруппой по умножению (они называются соответственно аддитивной группой и мультипликативной полугруппой кольца), причем эти операции связаны законами дистрибутивности

$$x(y+z) = xy + xz,$$
$$(x+y)z = xz + yz.$$

Ассоциативные кольца составляют, следовательно, многообразие.

Любая абелева группа G может служить аддитивной группой некоторого ассоциативного кольца — достаточно взять на G нулевое умножение, т. е. положить $ab = 0$ для всех $a, b \in G$, где 0 — нуль аддитивной группы. С другой стороны, не всякая полугруппа служит мультипликативной полугруппой некоторого ассоциативного кольца. Действительно, известно, что во всяком кольце R для любого его элемента a выполняются равенства

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \tag{1}$$

т. е. мультипликативная полугруппа ассоциативного кольца всегда является *полугруппой с нулем* (нуль полугруппы определяется равенствами (1)).

Всякая полугруппа G изоморфно вкладывается в мультипликативную полугруппу некоторого ассоциативного кольца.

Предположим сперва, что G уже является подполугруппой мультипликативной полугруппы кольца R. Тогда подкольцо, порожденное множеством G, будет состоять из тех элементов кольца R, которые хотя бы одним способом записываются в виде суммы

$$\sum_{a \in G}{}' k_a a, \tag{2}$$

где a пробегает все элементы из G, а коэффициенты являются целыми числами, причем не более конечного числа этих коэффициентов отлично от нуля; это условие на коэффициенты отмечено штрихом у знака суммы. Ясно, что элемент $b \in G$ допускает запись вида (2), а именно, с $k_b = 1$ и $k_a = 0$ для всех $a \neq b$. В соответствии со свойствами операций в кольце элементы этого вида составляют подкольцо, так как

$$\sum_{a \in G}' k_a a + \sum_{a \in G}' l_a a = \sum_{a \in G}' (k_a + l_a) a, \tag{3}$$

$$0 = \sum_{a \in G}' 0 \cdot a, \tag{4}$$

$$-\left(\sum_{a \in G}' k_a a\right) = \sum_{a \in G}' (-k_a) a, \tag{5}$$

$$\sum_{a \in G}' k_a a \cdot \sum_{b \in G}' l_b b = \sum_{c \in G}' m_c c, \tag{6}$$

где m_c является суммой всех отличных от нуля произведений $k_a l_b$ для таких a и b, что $ab = c$. Ясно, что правые части равенств (3) — (6) имеют вид (2) с конечным числом ненулевых коэффициентов. В частности, равенство (6) означает, что конечные суммы, стоящие множителями в левой части этого равенства, перемножаются почленно, затем применяются равенства вида

$$k_a a \cdot l_b b = (k_a l_b)(ab),$$

произведения ab заменяются равными им элементами c полугруппы G и, наконец, выполняется приведение подобных членов. Полученное подкольцо порождается, очевидно, множеством G.

Пусть теперь G — произвольная полугруппа. Рассмотрим множество всевозможных формальных сумм вида (2) и определим в этом множестве операции в соответствии с равенствами (3) — (6). Мы получим ассоциативное кольцо. В самом деле, по сложению это будет абелева группа, как без всяких затруднений следует из (3) — (5). Проверка ассоциативности умложения и законов дистрибутивности уже несколько громоздка, но не представляет никаких принципиальных трудностей, и мы ее опускаем. Отметим, что умножение в соответствии с (6) слов вида (2), имеющих лишь один ненулевой коэффициент, притом равный единице, сводится к умножению элементов полугруппы G. Этим определяется изоморфное вложение заданной полугруппы G в мультипликативную полугруппу построенного нами кольца. Это самое свободное из возможных вложений нашей полугруппы в том смысле, что всякий элемент кольца записывается через элементы полугруппы в виде (2) однозначно.

Построенное нами кольцо называется *целочислённым полугрупповым кольцом* полугруппы G, а если G — группа, то *целочисленным групповым кольцом* этой группы.

Если мультипликативная полугруппа ассоциативного кольца R обладает единицей (см. § 3), то R называется *кольцом с единицей*. Ассоциативные кольца с единицей составляют, очевидно, многообразие.

Всякое ассоциативное кольцо R изоморфно вкладывается в ассоциативное кольцо с единицей.

Предположим сперва, что кольцо R уже содержится в ассоциативном кольце $\bar{R}$ с единицей e. Тогда подкольцо, порожденное в $\bar{R}$ множеством $R \cup e$, будет состоять из тех элементов, которые хотя бы одним способом записываются в виде

$$a + ke, \tag{7}$$

где $a \in R$, k — целое число; обозначим выражение (7) символом (a, k). Из свойств операций в кольце $\bar{R}$ следует:

$$(a, k) + (b, l) = (a + b, k + l), \tag{8}$$

$$0 = (0, 0), \tag{9}$$

$$-(a, k) = (-a, -k), \tag{10}$$

$$(a, k)(b, l) = (ab + la + kb, kl). \tag{11}$$

Пусть теперь R — произвольное ассоциативное кольцо. Рассмотрим множество всевозможных пар вида

(a, k), где $a \in R$, k — целое число, и определим в нем операции в соответствии с равенствами (8) — (11). Мы получим ассоциативное кольцо — очевидно, что это будет абелева группа по сложению, а проверка ассоциативности умножения и законов дистрибутивности хотя и громоздка, но не представляет никаких принципиальных трудностей. Единицей этого кольца служит пара (0, 1), как немедленно следует из (11). Наконец, из (8) и (11) следует

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$
$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0),$$

т. е. пары вида $(a, 0)$ составляют в построенном нами кольце подкольцо, изоморфное исходному кольцу R. Мы получили самое свободное вложение кольца R в кольцо с единицей в том смысле, что запись элементов кольца $\bar{R}$ в виде (7) — ввиду (8) — (11) будет

$$(a, k) = (a, 0) + k(0, 1)$$

— оказывается однозначной.

Ассоциативно-коммутативные кольца (умножение не только ассоциативно, но и коммутативно) были подсказаны, понятно, кольцами чисел, кольцами многочленов и кольцами функций. Покажем, чем оправдывается большой интерес к произвольным ассоциативным кольцам.

Рассмотрим гомоморфизмы некоторой группы G, записанной мультипликативно, в абелеву группу G', записанную аддитивно. Если φ и ψ — два таких гомоморфизма, то отображение $\varphi + \psi$, определяемое равенством

$$a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi, \quad a \in G, \tag{12}$$

также будет гомоморфизмом G в G'. Действительно, ввиду коммутативности сложения в G' получаем для любых $a, b \in G$

$$(ab)(\varphi + \psi) = (ab)\varphi + (ab)\psi =$$
$$= a\varphi + b\varphi + a\psi + b\psi = (a\varphi + a\psi) + (b\varphi + b\psi) =$$
$$= a(\varphi + \psi) + b(\varphi + \psi).$$

Ясно, что это сложение гомоморфизмов коммутативно и ассоциативно. Роль нуля играет *нулевой гомоморфизм*, отображающий всю группу G в нуль группы G'. С другой стороны, для любого гомоморфизма $\varphi: G \to G'$ отображение $-\varphi$, определяемое равенством

$$a(-\varphi) = -a\varphi, \quad a \in G,$$

будет гомоморфизмом, так как для любых $a, b \in G$

$$(ab)(-\varphi) = -(ab)\varphi = -(a\varphi + b\varphi) = \\ = (-a\varphi) + (-b\varphi) = a(-\varphi) + b(-\varphi).$$

Этот гомоморфизм будет *противоположным* для φ, так как для $a \in G$

$$a[\varphi + (-\varphi)] = a\varphi + a(-\varphi) = a\varphi - a\varphi = 0,$$

т. е. $\varphi + (-\varphi)$ равно нулевому гомоморфизму.

Таким образом, *гомоморфизмы любой группы* G (легко проверить, что в качестве G здесь можно было бы взять не группу, а любую алгебру, однотипную с группой) *в абелеву группу* G' *составляет по сложению абелеву группу*. В частности, эндоморфизмы абелевой группы G составляют по сложению, определяемому равенством (12), абелеву группу. Вместе с тем, в соответствии с § 3 они составляют полугруппу с единицей по умножению в смысле умножения преобразований.

Покажем, что эти операции связаны законами дистрибутивности. Именно, для любого $a \in G$ и любых эндоморфизмов φ, ψ и χ

$$a[\varphi(\psi + \chi)] = (a\varphi)(\psi + \chi) = (a\varphi)\psi + (a\varphi)\chi = \\ = a(\varphi\psi) + a(\varphi\chi) = a(\varphi\psi + \varphi\chi),$$

$$a[(\psi + \chi)\varphi] = [a(\psi + \chi)]\varphi = (a\psi + a\chi)\varphi = \\ = (a\psi)\varphi + (a\chi)\varphi = a(\psi\varphi) + a(\chi\varphi) = a(\psi\varphi + \chi\varphi).$$

Для дальнейшего отметим, что в доказательстве первого закона дистрибутивности не использовалось то, что преобразования φ, ψ, χ являются эндоморфизмами.

Таким образом, эндоморфизмы абелевой группы G составляют относительно операций сложения и умножения эндоморфизмов ассоциативное кольцо с единицей. Оно называется *кольцом эндоморфизмов* абелевой группы G.

Всякое ассоциативное кольцо изоморфно вкладывается в кольцо эндоморфизмов некоторой абелевой группы.

Так как всякое ассоциативное кольцо изоморфно вкладывается в ассоциативное кольцо с единицей, то мы будем доказывать следующую теорему:

Всякое ассоциативное кольцо R с единицей 1 изоморфно вкладывается в кольцо эндоморфизмов своей аддитивной группы.

В самом деле, сопоставим всякому $a \in R$ преобразование, переводящее всякий элемент $x \in R$ в элемент xa. Это эндоморфизм аддитивной группы кольца R, так как

$$(x + y)\, a = xa + ya.$$

Сумме и произведению элементов из R соответствуют сумма и произведение соответствующих эндоморфизмов, как показывают равенства

$$x\,(a + b) = xa + xb, \quad x\,(ab) = (xa)\,b.$$

Наконец, различным элементам из R соответствуют различные эндоморфизмы, так как из $a \neq b$ следует $1 \cdot a \neq 1 \cdot b$.

В теории ассоциативных колец, ныне весьма широко разработанной, большую роль играют следующие классы колец, не являющиеся, впрочем, многообразиями: кольца без делителей нуля и тела. Именно, кольцо R называется *кольцом без делителей нуля*, если его элементы, отличные от нуля, составляют подполугруппу мультипликативной полугруппы кольца, иными словами, если произведение любых двух элементов из R, отличных от нуля, само отлично от нуля. Если же указанная подполугруппа отличных от нуля элементов является по умножению даже группой, то кольцо называется *телом*, а в ассоциативно-коммутативном случае — *полем*.

Ясно, что всякое подкольцо кольца без делителей нуля, в частности, тела, само будет кольцом без делителей нуля. Возникает естественный вопрос, всякое ли ассоциативное кольцо без делителей нуля можно вложить в тело? Этот вопрос оказался тесно связанным с вопросом об условиях, при которых полугруппа может быть вложена в группу. Из свойств группы немедленно следует, что если полугруппа G является подполугруппой группы, то G будет *полугруппой с сокращениями*, т. е. для любых $a, b, c \in G$ из $ac = bc$, а также из $ca = cb$ следует $a = b$. Полугруппа ненулевых элементов всякого ассоциативного кольца без делителей нуля будет полугруппой с сокращениями: если в кольце без делителей нуля $ac = bc$ и $c \neq 0$, то $(a - b)c = 0$, откуда $a - b = 0$, т. е. $a = b$.

Можно доказать, что всякая коммутативная полугруппа с сокращениями изоморфно вкладывается в абелеву группу, а всякое ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля (т. е. область целостности) изоморфно вкладывается в тело. С другой стороны, А. И. Мальцев (Math. Ann. **113** (1937)) построил пример ассоциативного (но не коммутативного) кольца без делителей нуля, которое не вкладывается в тело, причем полугруппа ненулевых элементов этого кольца (являющаяся, как мы знаем, полугруппой с сокращениями) не вкладывается в группу. В самое последнее время несколько авторов, в частности, Л. А. Бокуть (ДАН СССР **165** (1965), 555—558), построили примеры ассоциативных колец без делителей нуля, которые не вкладываются в тело, хотя полугруппы их ненулевых элементов вкладываются в группу.

§ 10. НЕАССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА

Хотя требование ассоциативности умножения в кольце оказывается весьма естественным, как только что было показано, однако очень часто оно не выполняется. По этой причине *кольцом* называют сейчас неассоциативное (т. е. не обязательно ассоциативное) кольцо. Это алгебра, являющаяся абелевой группой по сложению и группоидом по умножению, причем эти операции связаны законами дистрибутивности. Слова *«аддитивная группа кольца»* и *«мультипликативный группоид кольца»* имеют понятный смысл.

Отметим, что для (неассоциативных) колец сохраняются (с их доказательствами) многие простейшие свойства ассоциативных колец, в частности, законы дистрибутивности для разности,

$$a(b-c) = ab - ac, \quad (b-c)a = ba - ca,$$

мультипликативное свойство нуля,

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

правило знаков при умножении,

$$(-a)b = a(-b) = -ab, \quad (-a)(-b) = ab.$$

Дословно так же, как в предыдущем параграфе, доказывается, что *всякий группоид G изоморфно вкладывается в мультипликативный группоид некоторого кольца* (а именно, строится *целочисленное группоидное кольцо* группоида G), а также что *всякое кольцо изоморфно вкладывается в кольцо с единицей.*

Понятие кольца без делителей нуля переносится на неассоциативный случай без всяких затруднений. Что же касается понятия тела, то при его перенесении на неассоциативный случай возникают различные возможности, причем пока нет установившейся терминологии. Мы будем говорить о *кольце с делением*, если для любых a и b, где $a \neq 0$, уравнения

$$ax = b, \quad ya = b$$

обладают в кольце решениями, не обязательно однозначно определенными. Кольцо с делением может обладать, следовательно, делителями нуля.

Кольцо, в котором указанные уравнения обладают однозначными решениями, назовем *квазителом*. Делителей нуля квазитело содержать не может и поэтому его отличные от нуля элементы составляют по умножению группоид, даже квазигруппу. Наконец, термин *тело* целесообразно применять к кольцу, мультипликативный группоид ненулевых элементов которого является лупой или, быть может, даже муфанговой лупой.

Можно доказать, что всякое (неассоциативное) кольцо без делителей нуля вкладывается в квазитело (Б. Нейман, Proc. London. Math. Soc. 1 (1951), 241—256). Отметим также, что всякий группоид с сокращениями (ср. § 9) вкладывается в квазигруппу (см., например, П. Кон, Универсальная алгебра, VII, 4).

Покажем некоторые случаи появления неассоциативных колец. Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо. Сохраним его аддитивную группу, а операцию умножения ab заменим *операцией коммутирования*

$$a \circ b = ab - ba. \tag{1}$$

Это новое умножение дистрибутивно относительно сложения; так, например,

$$a \circ (b + c) = a(b + c) - (b + c)a = ab + ac - ba - ca = \\ = (ab - ba) + (ac - ca) = a \circ b + a \circ c.$$

Обозначим полученное кольцо через $R^{(-)}$. Если кольцо R было и коммутативным, то $R^{(-)}$ будет просто кольцом с нулевым умножением. В общем же случае оно может оказаться неассоциативным. В нем выполняются, однако, следующие тождества, из которых второе называется *тождеством Якоби*:

$$x^2 = 0, \tag{2}$$

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0. \tag{3}$$

Проверим эти тождества:

$$a \circ a = aa - aa = 0;$$

$$(a\circ b)\circ c + (b\circ c)\circ a + (c\circ a)\circ b = (ab - ba)\,c - c\,(ab - ba) + (bc - cb)\,a - a\,(bc - cb) + (ca - ac)\,b - b\,(ca - ac) = 0.$$

Кольцо, удовлетворяющее тождествам (2) и (3), называется *лиевым*. Таким образом, *всякому ассоциативному кольцу R соответствует лиево кольцо $R^{(-)}$ с той же аддитивной группой и с умножением, определяемым равенством* (1). Как показал Лазар (C. r. Paris 234 (1952)), для всякого лиева кольца L можно указать такое ассоциативное кольцо R, что L изоморфно вкладывается в лиево кольцо $R^{(-)}$.

Для дальнейшего отметим, что лиево кольцо, соответствующее в указанном смысле кольцу эндоморфизмов абелевой группы G, мы будем называть *лиевым кольцом эндоморфизмов* этой абелевой группы.

Укажем еще один случай появления лиевых колец. Если R — произвольное (не обязательно ассоциативное) кольцо, то *дифференцированием* кольца R называется всякое преобразование δ множества R, являющееся эндоморфизмом аддитивной группы кольца R, т. е.

$$(a + b)\delta = a\delta + b\delta, \qquad a, b \in R,$$

и удовлетворяющее условию

$$(ab)\delta = (a\delta)b + a(b\delta), \qquad a, b \in R.$$

Примером дифференцирования любого кольца R служит нулевой эндоморфизм его аддитивной группы.

Дифференцирования произвольного кольца R составляют лиево кольцо, а именно подкольцо лиева кольца эндоморфизмов аддитивной группы кольца R.

В самом деле, если δ_1 и δ_2 — дифференцирования кольца R, то эндоморфизм аддитивной группы $\delta_1 + \delta_2$ также будет дифференцированием, так как для любых $a,\ b \in R$

$$\begin{aligned}(ab)(\delta_1 + \delta_2) &= (ab)\delta_1 + (ab)\delta_2 = \\ &= (a\delta_1)b + a(b\delta_1) + (a\delta_2)b + a(b\delta_2) = \\ &= (a\delta_1 + a\delta_2)b + a(b\delta_1 + b\delta_2) = \\ &= [a\,(\delta_1 + \delta_2)]\,b + a\,[b\,(\delta_1 + \delta_2)].\end{aligned}$$

Нулевой эндоморфизм, как уже отмечено выше, является дифференцированием. Эндоморфизм $-\delta$, противоположный дифференцированию δ, сам будет дифференцированием, так как для $a,\ b \in R$

$$(ab)(-\delta) = -[(ab)\delta] = -[(a\delta)\,b + a\,(b\delta)] = \\ = [a(-\delta)]b + a\,[b(-\delta)].$$

Наконец, лиево произведение

$$\delta_1 \circ \delta_2 = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$$

дифференцирований δ_1 и δ_2 само будет дифференцированием, так как для $a,\ b \in R$

$$(ab)(\delta_1 \circ \delta_2) = (ab)(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1) = \\ = [(ab)\,\delta_1]\,\delta_2 - [(ab)\delta_2]\,\delta_1 = \\ = [(a\delta_1)b + a(b\delta_1)]\delta_2 - [(a\delta_2)b + a(b\delta_2)]\delta_1 = \\ = [(a\delta_1)b]\delta_2 + [a(b\delta_1)]\delta_2 - [(a\delta_2)b]\,\delta_1 - [a\,(b\delta_2)]\delta_1 = \\ = [(a\delta_1)\delta_2]b + (a\delta_1)(b\delta_2) + (a\delta_2)(b\delta_1) + a\,[(b\delta_1)\delta_2] - \\ - [(a\delta_2)\delta_1]b - (a\delta_2)(b\delta_1) - (a\delta_1)(b\delta_2) - a[(b\delta_2)\delta_1] = \\ = [a(\delta_1 \circ \delta_2)]\,b + a[b\,(\delta_1 \circ \delta_2)].$$

Заметим, что совокупность дифференцирований кольца R подкольцом (ассоциативного) кольца эндоморфизмов его аддитивной группы в общем случае не будет.

Другой класс неассоциативных колец мы получим следующим аналогичным путем. В произвольном ассоциативном кольце R сохраним аддитивную группу, а операцию умножения заменим *операцией симметрирования*

$$a \cdot b = ab + ba. \tag{4}$$

Это новое умножение дистрибутивно относительно сложения; например,

$$a \cdot (b + c) = a(b + c) + (b + c)a = ab + ac + ba + \\ + ca = (ab + ba) + (ac + ca) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Обозначим полученное кольцо через $R^{(+)}$. Покажем, что в нем выполняются следующие тождества:

$$x \cdot y = y \cdot x, \tag{5}$$

$$[(x \cdot x) \cdot y] \cdot x = (x \cdot x) \cdot (y \cdot x). \tag{6}$$

В самом деле, для любых $a, b \in R$

$$a \cdot b = ab + ba = ba + ab = b \cdot a,$$

$$[(a \cdot a) \cdot b] \cdot a = [(aa + aa)\, b + b(aa + aa)]\, a + a\, [(aa + aa)b + b(aa + aa)] = aaba + aaba + baaa + baaa + aaab + aaab + abaa + abaa = (aa + aa)(ba + ab) + (ba + ab)\,(aa + aa) = (a \cdot a) \cdot (b \cdot a).$$

Кольца, удовлетворяющие тождествам (5) и (6), называются *йордановыми*. В общем случае они неассоциативны, хотя к их числу принадлежат, очевидно, все ассоциативно-коммутативные кольца. Мы получили, что *всякому ассоциативному кольцу R соответствует йорданово кольцо $R^{(+)}$ с той же аддитивной группой и с умножением, определяемым равенством* (4). Отметим, впрочем, что не всякое йорданово кольцо изоморфно вкладывается в кольцо $R^{(+)}$ для какого-либо ассоциативного кольца R.

Многообразия лиевых и йордановых колец стали уже наряду с многообразием ассоциативных колец носителями богатых и активно разрабатываемых теорий. Изучаются и многие другие классы неассоциативных колец, в частности, *коммутативные кольца*, удовлетворяющие тождеству (5), и *антикоммутативные кольца*, удовлетворяющие тождеству (2). Название последних объясняется тем, что в любом кольце R из тождества (2) вытекает тождество

$$xy = -yx. \tag{7}$$

Действительно, если $a, b \in R$, то, ввиду (2),

$$a^2 = b^2 = (a + b)^2 = 0,$$

откуда

$$0 = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = ab + ba.$$

Обратно, если аддитивная группа кольца R не содержит элементов второго порядка, то из (7) следует (2), так как для любого $a \in R$ будет ввиду (7) $a^2 = -a^2$, т. е. $2a^2 = 0$, откуда, ввиду сделанного предположения, $a^2 = 0$.

Большой интерес представляют некоторые классы колец, являющихся обобщениями ассоциативных колец. Так как в тождестве ассоциативности участвуют три неизвестных, то всякое кольцо, в котором ассоциативны все подкольца, порожденные тремя элементами, само будет ассоциативным. Поэтому естественно возникает понятие *альтернативного кольца*, т. е. кольца, в котором ассоциативны подкольца, порожденные любыми двумя элементами. Существует теорема Артина, по которой кольцо тогда и только тогда альтернативно, когда в нем выполняются тождества

$$(xx)y = x(xy), \quad (yx)x = y(xx).$$

Альтернативные кольца составляют, следовательно, многообразие; это можно было бы усмотреть, впрочем, и из исходного определения.

Еще более широк класс *колец с ассоциативными степенями*, т. е. колец, в которых ассоциативны все подкольца, порожденные одним элементом. Весьма широк также класс *эластичных* колец, удовлетворяющих тождеству

$$(xy)x = x(yx).$$

К этому классу колец принадлежат, очевидно, все альтернативные (в частности, ассоциативные) кольца. К нему принадлежат и все коммутативные (в частности, йордановы) кольца, так как в этом случае

$$(ab)a = a(ab) = a(ba),$$

а также все антикоммутативные (в частности, лиевы) кольца, так как в этом случае, ввиду (7),

$$(ab)a = -a(ab) = -a(-ba) = a(ba).$$

Понятие кольца, как и понятие группы, может быть определено многими эквивалентными способами; иными словами, существует много различных многообразий алгебр, эквивалентных многообразию всех колец. Так, в произвольном кольце рассмотрим *присоединенное* *умножение*, определяемое равенством

$$a*b = a + b - ab. \tag{8}$$

Так как отсюда

$$ab = a + b - a*b, \tag{9}$$

то понятие кольца может быть определено при помощи обычного сложения и присоединенного умножения. Законы дистрибутивности принимают теперь непривычный вид, а именно

$$(a + b)*c = a*c + b*c - c, \tag{10}$$
$$c*(a + b) = c*a + c*b - c.$$

Проверим хотя бы первый из них:

$$(a + b)*c = a + b + c - (a + b)\,c = a + b +$$
$$+ c - ac - bc = (a + c - ac) + (b + c - bc) - c =$$
$$= a*c + b*c - c.$$

Обратно, из законов дистрибутивности (10) для присоединенного умножения сейчас же следуют, ввиду (9), законы дистрибутивности для обычного умножения.

Нуль кольца играет для присоединенного умножения роль единицы, так как, по (8),

$$a*0 = a + 0 - a\cdot 0 = a$$

и аналогично $0*a = a$.

Ассоциативные кольца имеют ассоциативное присоединенное умножение.

Действительно, если кольцо R ассоциативно, то

$$(a*b)*c = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)\,c =$$
$$= a + b + c - ab - ac - bc + abc =$$
$$= a + (b + c - bc) - a\,(b + c - bc) = a*(b*c).$$

Изучение колец с использованием присоединенного умножения открывает новые возможности для развития теории. Так, ассоциативные кольца, являющиеся группой по присоединенному умножению,— единицей этой группы будет, как мы знаем, нуль кольца,—

аналогичны телам, но уже составляют многообразие. Это *кольца, радикальные в смысле Джекобсона*; они играют в теории ассоциативных колец очень большую роль.

Кольцам без делителей нуля аналогичны *полурадикальные кольца*, т. е. ассоциативные кольца, по присоединенному умножению являющиеся полугруппой с сокращениями (см. § 9). Всякое подкольцо радикального кольца полурадикально, поэтому возникает вопрос о возможности вложения полурадикального кольца в радикальное. Оказывается (см. В. А. Андрунакиевич, Изв. АН СССР, сер. матем. 12 (1947) 129—178), что положение здесь в точности такое же, как в вопросе о вложении ассоциативных колец без делителей нуля в тела (см. § 9). Понятия радикального и полурадикального кольца могут быть перенесены и на неассоциативный случай, но, как показал О. И. Доманов, в этом случае теорема, аналогичная отмеченной выше в настоящем параграфе теореме Б. Неймана, уже не имеет места.

Отметим еще один способ определения кольца. Именно (см. Ю. И. Сорkин, Успехи матем. наук 12 : 4 (1957)), это можно сделать при помощи одной тернарной операции. Рассмотрим в произвольном кольце R операцию

$$abc\omega = ac - bc + a - b. \tag{11}$$

Легко проверить, что через эту операцию можно записать все операции, входящие в обычную сигнатуру кольца:

$$aab\omega = 0, \quad 0a0\omega = -a, \quad ab0\omega = a - b,$$

$$a0b0\omega 0\omega = a + b, \quad a0b\omega a0\omega = ab.$$

Тождества, задающие кольцо как алгебру с операцией (11), получаются переписыванием тождеств, входящих в обычное определение кольца, но можно показать, что кольцо может быть также задано относительно этой операции одним единственным тождеством.

§ 11. ГРУППЫ С ОПЕРАТОРАМИ. МОДУЛИ

Существует, помимо перечисленных выше, много других типов универсальных алгебр, для которых можно было бы привести столь же убедительные аргументы, оправдывающие их введение и изучение. Мы вынуждены ограничиться кратким перечнем некоторых из них — далеко не всех, не сопровождая этот перечень до некоторого времени сколько-нибудь глубокими теоремами, хотя среди этих типов алгебр будут и такие, которые уже сейчас принадлежат к важнейшим объектам изучения в общей алгебре (например, модули, линейные алгебры и структуры), а также такие, которые должны будут занять центральное положение в алгебре в обозримом будущем.

Еще на заре развития общей теории групп стали изучать *группы с операторами*, т. е. группы, в которых задана некоторая система Σ унарных операций, дистрибутивных относительно группового умножения. Иными словами, группа G называется *Σ-операторной*, а элементы из Σ — *операторами* для G, если для любых $a, b \in G$ и $\alpha \in \Sigma$

$$(ab)\alpha = a\alpha \cdot b\alpha. \tag{1}$$

Всякий элемент $\alpha \in \Sigma$ действует, следовательно, как эндоморфизм группы G. причем различные элементы из Σ могут действовать в G как один и тот же эндоморфизм.

Все группы с данной системой операторов Σ составляют, очевидно, многообразие универсальных алгебр: сигнатура состоит из групповых операций и Σ, а система тождеств — из соответствующих групповых тождеств и тождеств вида (1) для всех $\alpha \in \Sigma$. Заметим, что подалгебры Σ-операторной группы называются *Σ-допустимыми подгруппами*, а гомоморфизмы Σ-операторных групп (с фиксированной, понятно, системой операторов Σ) — *Σ-операторными гомоморфизмами*.

Понятие группы с операторами подсказано следующими примерами. Всякая группа G будет Σ-операторной относительно любой системы Σ своих эндоморфизмов. От этого частного случая понятие произвольной операторной группы отличается лишь тем, что в общем случае, как уже отмечено выше, различные операторы могут действовать как один и тот же эндоморфизм группы. Если в качестве Σ мы возьмем множество всех эндоморфизмов группы G, то Σ-допустимые подгруппы называются в теории групп *вполне характеристическими*. Если Σ будет множеством всех автоморфизмов группы G, то Σ-допустимые подгруппы называются *характеристическими*. Если же в качестве Σ рассмотреть множество всех внутренних автоморфизмов группы G, т. е. трансформирований группы G произвольными ее элементами (если фиксировано $a \in G$, то преобразование $x \to a^{-1}xa$, $x \in G$, является, очевидно, автоморфизмом группы G), то Σ-допустимы нормальные делители группы G и только они.

С другой стороны, если в произвольном кольце R фиксирован элемент a, то правое умножение на a, т. е. преобразование $x \to xa$, $x \in R$, будет эндоморфизмом аддитивной группы кольца R, как вытекает из закона дистрибутивности. Если взять в R всевозможные правые умножения, то можно считать аддитивную группу кольца R операторной группой с самим множеством R в качестве системы операторов. Допустимыми будут при этом правые идеалы кольца R, т. е. подгруппы аддитивной группы, выдерживающие умножение справа на любой элемент кольца. Мы получили пример операторной группы, в которой различные операторы могут действовать как один и тот же эндоморфизм группы. Взяв в кольце R левые умножения, мы приходим к еще одной возможности рассматривать аддитивную группу кольца как R-операторную; допустимыми подгруппами будут при этом левые идеалы кольца. Наконец, объединяя эти две системы операторов, мы придем к такой системе операторов для аддитивной группы кольца R, что допустимыми подгруппами будут двусторонние идеалы этого кольца и только они.

Отметим, что теория групп без операторов является частью теории операторных групп — достаточно взять систему операторов пустой или же состоящей из одного тождественного автоморфизма.

Изучение групп с произвольной системой операторов равносильно изучению *групп с полугруппой операторов*: система операторов является полугруппой Π относительно умножения $\alpha\beta$, причем для любого элемента a рассматриваемой группы и любых операторов α, $\beta \in \Pi$ должно выполняться равенство

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta. \tag{2}$$

В самом деле, пусть дана группа G с произвольной системой операторов Σ. Построим полугруппу Π, элементами которой служат всевозможные слова вида $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Sigma$, $n \geqslant 1$, а умножение слов определяется равенством

$$(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_s) = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\beta_1\beta_2 \ldots \beta_s; \tag{3}$$

ассоциативность этого умножения очевидна. Отметим, что Π есть свободная полугруппа с множеством Σ свободных образующих (ср. § 1). Сопоставляя каждому слову $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \in \Pi$ эндоморфизм группы G, являющийся произведением эндоморфизмов, соответствующих операторам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Sigma$, мы превращаем G в Π-операторную группу. Π служит для G даже полугруппой операторов, так как справедливость требования (2) вытекает из (3) и ассоциативности умножения эндоморфизмов. Ясно также, что Σ-допустимые подгруппы остаются и Π-допустимыми, а Σ-операторные гомоморфизмы будут и Π-операторными.

Условие (2) показывает, что, сопоставляя каждому элементу полугруппы операторов Π соответствующий ему эндоморфизм группы G, мы получаем гомоморфное отображение полугруппы Π в полугруппу эндоморфизмов группы G.

К полугруппе операторов Π всегда можно присоединить единицу ε, действующую как тождественный автоморфизм основной группы G; условие (2) не будет при этом нарушено. Если полугруппа операторов, обладающая единицей, действует на группе G так, что единица является тождественным оператором, то будем говорить, что она действует *унитарно*.

Частным случаем этого является понятие *группы с группой операторов*. Если дана группа G с унитарно действующей группой операторов Γ, то всякий элемент из Γ действует как автоморфизм группы G, т. е. группа Γ гомоморфно отображена в группу автоморфизмов группы G, или, как говорят, *представлена* автоморфизмами группы G. Изучению представлений групп автоморфизмами посвящена книга Б. И. Плоткина «Группы автоморфизмов алгебраических систем», М., «Наука», 1966.

Теорию групп с группой операторов можно рассматривать впрочем, как часть теории групп без операторов. Именно, группа H называется *полупрямым произведением* своих подгрупп A и B, причем B должно быть нормальным делителем в H, если всякий элемент $h \in H$ однозначно записывается в виде $h = ab$, $a \in A$, $b \in B$. Трансформирования элементами из A индуцируют в B автоморфизмы, произведению элементов из A соответствует произведение соответствующих автоморфизмов, а поэтому B будет группой с группой операторов A.

Обратно, если дана группа G с группой операторов Γ и если φ будет соответствующим гомоморфизмом группы Γ в группу автоморфизмов группы G, то множество H пар вида αa, $\alpha \in \Gamma$, $a \in G$, превращается в группу, если умножение пар определить по правилу

$$\alpha a \cdot \beta b = (\alpha\beta)(a^{\beta} b),$$

где $a^{\beta} = a(\beta\varphi)$ (т. е. образ элемента a при операторе β или, что то же самое, при автоморфизме $\beta\varphi$, соответствующем оператору β). Легко проверяется ассоциативность этого умножения; роль единицы играет пара εe, где ε и e — соответственно единицы групп Γ и G; обратным для элемента αa служит элемент $\alpha^{-1}(a^{-1})^{\alpha^{-1}}$. Так же просто проверяется, что элементы вида αe, $\alpha \in \Gamma$, составляют в H подгруппу Γ', изоморфную Γ, а элементы вида εa, $a \in G$,— нормальный делитель G', изоморфный G, и что группа H будет их полупрямым произведением, а автоморфизм, индуцированный в G' трансформированием элементом $\alpha e \in \Gamma'$, соответствует при изоморфизме между G и G' автоморфизму $\alpha\varphi$ группы G.

Впрочем, переход от полупрямых произведений групп к группам с группой операторов (а также к представлениям групп автоморфизмами других групп) открыл для развития теории такие возможности, которые без этого не могли бы возникнуть. Отметим хотя бы, что класс всех операторных групп с фиксированной группой операторов Γ является многообразием: к тождествам, определяющим многообразие групп с системой операторов Γ, нужно добавить всевозможные тождества вида

$$(x\alpha)\beta = x\gamma,$$

если в группе Γ для элементов α, β, γ выполняется равенство $\alpha\beta = \gamma$. Это же утверждение справедливо, понятно, и для класса групп с фиксированной полугруппой операторов.

Вернемся к произвольной системе операторов, но ограничимся теперь рассмотрением абелевых групп. Изучение абелевой группы с произвольной системой операторов равносильно изучению этой группы как операторной с ассоциативным кольцом операторов. При этом, если G — абелева группа, записанная аддитивно, а R — ассоциативное кольцо, то G называется *абелевой группой с кольцом операторов* R или (*правым*) *модулем над кольцом* R, или же, короче, R-*модулем*, если G является R-операторной группой, т. е. для любых $a, b \in G$ и $\alpha \in R$ имеет место равенство (1), записываемое теперь в виде

$$(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \tag{4}$$

и если, кроме того, для любых $a \in G$ и α, $\beta \in R$ выполняются равенства

$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta, \tag{5}$$

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta, \tag{6}$$

из которых последнее совпадает с (2).

Как показывает определение кольца эндоморфизмов абелевой группы, *всякая абелева группа будет модулем* *над любым подкольцом своего кольца эндоморфизмов.* С другой стороны, если задан R-модуль G, то, ввиду (5) и (6), этим задан гомоморфизм кольца R в кольцо эндоморфизмов аддитивной группы G. Отметим также, что, рассматривая выше аддитивную группу кольца R как R-операторную, используя правые умножения, мы на самом деле в случае ассоциативного кольца R превратили эту группу в R-модуль, так как справедливость условий (5) и (6) вытекает здесь из свойств ассоциативного кольца.

Если кольцо R обладает единицей ε, то R-модуль G называется *унитарным* в том случае, если ε действует в G как тождественный оператор,

$$a\varepsilon = a, \quad a \in G, \tag{7}$$

т. е. если группа G имеет мультипликативную полугруппу кольца R унитарной полугруппой операторов.

Изучение абелевых групп с произвольной системой операторов равносильно изучению унитарных модулей. В самом деле, если дана абелева группа G с системой операторов Σ, то описанным выше способом можно перейти к полугруппе операторов Π. Обозначим через R целочисленное полугрупповое кольцо полугруппы Π (см. § 9) и для любого $a \in G$ и любого элемента

$$\rho = \sum_{\alpha \in \Pi}{}' k_\alpha \alpha, \quad \rho \in R,$$

(ср. § 9) положим

$$a\rho = \sum_{\alpha \in \Pi}{}' k_\alpha (a\alpha).$$

Без затруднений проверяется, что группа G превращается этим в R-модуль. Вложим, наконец, кольцо R в кольцо с единицей $\bar{R}$ способом, указанным в § 9, и для любого $a \in G$ и любого элемента $(\rho, k) \in \bar{R}$ (ср. § 9) положим

$$a(\rho, k) = a\rho + ka.$$

Группа G превращается этим в унитарный $\bar{R}$-модуль, причем ее Σ-допустимые подгруппы остаются и $\bar{R}$-допустимыми, т. е. будут подмодулями $\bar{R}$-модуля G, а Σ-операторные гомоморфизмы будут и $\bar{R}$-операторными.

На основании таких же соображений, какие использовались выше в случае полугруппы или группы операторов, устанавливается, что *все R-модули над фиксированным кольцом R (а также все унитарные R-модули над кольцом R с единицей) составляют многообразие.*

Отметим, что *всякая абелева группа G является унитарным модулем над кольцом целых чисел,*— если k — любое целое число, то его действие как оператора состоит в том, что всякий элемент $a \in G$ переходит в свое k-кратное ka.

Унитарные модули над ассоциативным (не обязательно коммутативным) телом K называются (*правыми*) *векторными пространствами* над K; если K — поле, то добавлять «правыми» понятно, нет необходимости. Многообразие векторных пространств над телом K является одним из немногих примеров многообразий, все алгебры которых могут быть полностью описаны. Именно, всякое векторное пространство над K обладает *базами*, т. е. максимальными линейно независимыми подмножествами, причем все его базы имеют одну и ту же мощность; она называется *размерностью* пространства. С другой стороны, для всякой мощности $\mathfrak{m}$, конечной или бесконечной, над телом K существует векторное пространство размерности $\mathfrak{m}$. Наконец, два векторных пространства над телом K изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность.

§ 12. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР В ПОЛУГРУППАХ

Предыдущий параграф дал нам примеры алгебр с бесконечным множеством операций. Еще раньше мы встречались с операциями произвольной арности. Можно считать, таким образом, что понятие универсальной алгебры уже достаточно хорошо оправдано во всей той общности, в какой оно было введено в § 1. Существует, однако, возможность сделать это оправдание еще более убедительным, показав, что на самом деле все универсальные алгебры могут быть некоторым естественным способом получены при помощи полугрупп.

Пусть дана полугруппа П. Зафиксируем в ней элемент a, возьмем натуральное число n и рассмотрим слово

$$x_1 \ldots x_n a. \tag{1}$$

Любой системе значений $b_1, \ldots, b_n \in$ П неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ слово (1) сопоставляет однозначно определенный элемент $b_1 \ldots b_n a$ полугруппы П, т. е. определяет в П n-арную операцию. Конечно, n-арные производные операции можно задать в полугруппе П и многими другими способами, но мы ограничимся сейчас операциями, определяемыми словами вида (1), т. е. заданием числа n и элемента a.

Если дана произвольная сигнатура Ω, то сопоставим каждому $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, некоторый элемент a_ω полугруппы П (эти элементы не обязаны быть различными для различных ω) и зададим на П операцию ω при помощи слова $x_1 \ldots x_n a_\omega$. Если, сверх того, элементы a_ω будут зафиксированы в П и для всех $\omega \in \Omega_0$, то на множестве П будет задана алгебра сигнатуры Ω, которую назовем *специальной производной алгеброй сигнатуры* Ω *на полугруппе* П. Эта алгебра определяется, конечно, выбором элементов a_ω, $\omega \in \Omega$.

Мы скажем, что алгебра G сигнатуры Ω обладает *специальным точным представлением* в полугруппе П, если она изоморфно вкладывается в некоторую специальную производную алгебру сигнатуры Ω на этой полугруппе. Докажем следующую теорему Копа — Ребане (П. Коп, Универсальная алгебра, М., «Мир», 1968; Ю. К. Ребане, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 878—885).

Всякая алгебра G произвольной сигнатуры Ω обладает специальным точным представлением в некоторой полугруппе Π.

Доказательство. Искомая полугруппа Π будет симметрической полугруппой (т. е. полугруппой всех преобразований) на следующем множестве M: его элементами служат всевозможные такие непустые упорядоченные конечные строки $(u_1, \ldots, u_s)$, что всякое u_i, $i = 1, \ldots, s$, является или некоторым элементом из G, или же некоторым символом $\omega \in \Omega$ положительной арности, причем если $u_j = \omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и если $n + 1 \leqslant j \leqslant s$, то элементы $u_{j-n}, \ldots$ $\ldots, u_{j-1}$ должны не все быть элементами из G.

Сопоставим каждому $\omega \in \Omega$ элемент σ_ω полугруппы Π, т. е. преобразование множества M. Именно, если ω нульарно и отмечает в алгебре G элемент 0_ω, то для любого элемента $(u_1, \ldots, u_s) \in M$ положим

$$(u_1, \ldots, u_s)\sigma_\omega = (u_1, \ldots, u_s, 0_\omega); \tag{2}$$

строка, стоящая справа, снова будет элементом из M. Если же $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то полагаем

$$(u_1, \ldots, u_s)\sigma_\omega = (u_1, \ldots, u_s, \omega), \tag{3}$$

если справа стоит элемент из M; если же это не так, т. е. если $s \geqslant n$ и все элементы $u_{s-n+1}, \ldots, u_s$ лежат в G, а поэтому в G существует элемент $u_{s-n+1} \ldots$ $\ldots u_s\omega$, то полагаем

$$(u_1, \ldots, u_s)\sigma_\omega = (u_1, \ldots, u_{s-n}, u_{s-n+1} \ldots u_s\omega). \tag{4}$$

Используя элементы σ_ω, $\omega \in \Omega$, в качестве элементов a_ω, мы, как указано выше, построим на полугруппе Π специальную производную алгебру сигнатуры Ω. Покажем, что в нее изоморфно вкладывается исходная алгебра G. Сопоставим всякому элементу $a \in G$ следующий элемент φ_a полугруппы Π (т. е. преобразование множества M):

$$(u_1, \ldots, u_s)\varphi_a = (u_1, \ldots, u_s, a); \tag{5}$$

строка, стоящая справа, будет, очевидно, элементом множества M. Если $a,b \in G$ и $a \neq b$, то $\varphi_a \neq \varphi_b$, так как, например, ввиду (5)

$$(a)\varphi_a = (a,a), \quad (a)\varphi_b = (a,b).$$

Полученное взаимно однозначное отображение G в Π является изоморфным. В самом деле, если $\omega \in \Omega_0$, то, по (5) и (2),

$$\varphi_{0_\omega} = \sigma_\omega.$$

Если же $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то, ввиду (5) и (4),

$$\varphi_{a_1 \ldots a_n \omega} = \varphi_{a_1} \ldots \varphi_{a_n} \sigma_\omega.$$

Теорема Кона — Ребане доказана. Эта теорема не дает возможности, понятно, сводить все проблемы общей алгебры к теории полугрупп. Она показывает, однако, что все то, что мы изучаем в общей алгебре, в конечном счете содержится в полугруппах. В цикле работ Ю. К. Ребане (Сиб. матем. ж. **7** (1966), 878—885; **10** (1969), 945—949) указаны характеризации тех алгебр, которые обладают точным представлением в коммутативных полугруппах, в полугруппах с сокращениями, а также в полугруппах с некоторыми другими свойствами.

§ 13. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ С ОПЕРАТОРАМИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА. ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ. МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ ГРУППЫ, КОЛЬЦА И ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ

Специальные производные алгебры сигнатуры Ω на полугруппах, которыми мы пользовались в предыдущем параграфе, были связаны с фиксированием в полугруппе элементов a_ω, $\omega \in \Omega$. Иными словами, мы рассматривали полугруппу с дополнительной системой нульарных операций, мощность которой равна мощности множества Ω. Иногда рассматриваются и другие типы алгебр с дополнительной системой нульарных операций. Таково, например, многообразие колец с единицей, содержащееся в многообразии всех колец с одной дополнительной нульарной операцией.

Столь же часто встречаются алгебры с дополнительной системой унарных операций. Так, понятие группы с операторами немедленно обобщается до понятия алгебры многообразия (Ω, Λ) с системой операторов Σ: каждый оператор $\alpha \in \Sigma$ должен действовать в алгебре G этого многообразия как некоторый эндоморфизм относительно операций Ω. Как и в § 11, от произвольной системы операторов Σ в этом общем случае также можно перейти к полугруппе операторов.

В частности, если рассматривается *кольцо R с системой операторов Σ*, то для любых $a, b \in R$ и $\alpha \in \Sigma$ будет

$$(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \tag{1}$$

$$(ab)\alpha = a\alpha \cdot b\alpha. \tag{2}$$

Часто рассматривают, однако, кольца с такой дополнительной системой унарных операций, что эти операции действуют как эндоморфизмы аддитивной группы кольца, т. е. выполняется условие (1), но связь с умножением в кольце, выражаемая условием (2), заменяется некоторым другим условием. Так, понятие дифференцирования кольца (см. § 10) подсказывает следующее определение:

Кольцо R называется *кольцом с системой дифференциальных операторов* Δ (или *дифференциальным кольцом*), если Δ служит системой операторов для аддитивной группы кольца R и если для любых $a, b \in R$ и $\delta \in \Delta$ выполняется условие

$$(ab)\,\delta = (a\delta)b + a(b\delta). \tag{3}$$

Каждое $\delta \in \Delta$ действует в R, следовательно, как его дифференцирование. Так как дифференцирования кольца R составляют, как мы знаем, лиево кольцо — обозначим его через Δ_R,— то от произвольной системы дифференциальных операторов можно перейти к лиеву кольцу дифференциальных операторов. При этом оказывается, что теория колец с произвольной системой дифференциальных операторов (или д и ф ф е р е н ц и а л ь н а я а л г е б р а, как принято говорить) равносильна изучению объектов, состоящих из произвольного кольца R, лиева кольца Δ и гомоморфизма $\varphi\colon\ \Delta \to \Delta_R$. Иными словами, помимо тождеств (1) (с заменой α на δ) и (3) будут выполняться следующие тождества: для любых $a \in R$ и $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$

$$a(\delta_1 + \delta_2) = a\delta_1 + a\delta_2,$$

$$a\,(\delta_1 \circ \delta_2) = (a\delta_1)\delta_2 - (a\delta_2)\delta_1,$$

где через $\circ$ обозначено умножение в лиевом кольце Δ, а через $a\delta$, $\delta \in \Delta$, обозначен образ элемента $a \in R$ при дифференцировании $\delta\varphi \in \Delta_R$.

Укажем, наконец, еще один весьма часто встречающийся тип колец с дополнительной системой унарных операций, подсказываемый связью умножения в кольцах матриц и кольцах функций с умножением матрицы или функции на число. Именно, рассмотрим произвольное кольцо R с такой дополнительной системой унарных операций Σ, что всякое $\alpha \in \Sigma$ действует в R как эндоморфизм аддитивной группы, перестановочный в кольце всех эндоморфизмов этой группы со всеми правыми и левыми умножениями кольца R; иными словами, помимо условия (1) выполняется также следующее условие: для любых $a, b \in R$

$$(ab)\alpha = (a\alpha)b = a(b\alpha). \tag{4}$$

Те эндоморфизмы аддитивной группы кольца R, которые удовлетворяют условию (4), составляют подкольцо K_R в (ассоциативном) кольце всех эндоморфизмов этой группы.

Действительно, если эндоморфизмы φ и ψ обладают свойством (4), то, например, для любых a, $b \in R$

$$(ab)(\varphi \pm \psi) = (ab)\varphi \pm (ab)\psi = (a\varphi)b \pm (a\psi)\,b = \\ = (a\varphi \pm a\psi)b = [a(\varphi \pm \psi)]b,$$

$$(ab)(\varphi\psi) = [(ab)\varphi]\,\psi = [(a\varphi)b]\psi = [(a\varphi)\psi]b = \\ = [a(\varphi\psi)]b.$$

Ввиду доказанного от произвольной системы Σ можно на основании тех же соображений, что и выше, перейти к ассоциативному кольцу K, элементы которого действуют в кольце R в соответствии с условиями (1) и (4), причем задан гомоморфизм φ: $K \to K_R$, т. е. выполняются также условия (5) и (6) из § 11. Таким образом, аддитивная группа кольца R оказывается K-модулем. Если кольцо K обладает единицей ε, то естественно предположить, что полученный K-модуль унитарен, т. е. выполняется также условие (7) из § 11.

Если даны произвольное кольцо R и ассоциативное кольцо K с единицей, причем аддитивная группа кольца R является унитарным K-модулем и выполняется условие (4), то кольцо R называется *линейной алгеброй* над кольцом K.

Коммутативность кольца K мы не предполагаем. Можно показать, однако, что если кольцо R не содержит *аннуляторов*, т. е. таких ненулевых элементов b, что для всех $x \in R$

$$bx = xb = 0,$$

то «действующее» кольцо K непременно будет коммутативным. По этой причине. а также и в силу других соображений, с одним из которых мы встретимся в следующем параграфе, целесообразно ограничиться рассмотрением линейных алгебр лишь над ассоциативно-коммутативными кольцами с единицей.

Особенно важное место занимает в общей алгебре теория линейных алгебр над полями. Она развивается совершенно параллельно общей теории колец без дополнительных унарных операций, причем часто идет много дальше последней, так как векторные пространства над полями устроены много проще, чем произвольные абелевы группы.

Сейчас будут указаны некоторые типы универсальных алгебр, обобщающие те или иные из рассмотренных ранее «классических» типов алгебр. Эти обобщения будут обычно идти весьма далеко в сторону произвольных универсальных алгебр, и поэтому эти типы алгебр естественно вводить лишь теперь, когда общее понятие универсальной алгебры можно считать вполне оправданным. Заметим, чтобы не оговаривать этого каждый раз, что все рассматриваемые нами классы алгебр будут многообразиями.

Начнем с понятия, объединяющего понятия группы (притом с произвольной системой унарных операторов) и кольца. Пусть дана группа G. Эта группа не обязана быть коммутативной, но нам будет удобно использовать для нее аддитивную запись; в частности, нулевой элемент этой группы будет, как обычно, обозначаться символом 0. Группа G называется *группой с системой мультиоператоров* Ω или, короче, *Ω-группой*, если в G помимо групповых операций задана еще некоторая система операций Ω положительных арностей, причем эти операции связаны с групповыми операциями следующим условием: для всякого $\omega \in \Omega_n$

$$0\ldots 0\omega = 0, \tag{5}$$

где слева нуль стоит n раз. Группу G назовем *аддитивной группой Ω-группы G*.

Если подалгебру Ω-группы как универсальной алгебры мы будем называть *Ω-подгруппой*, то условие (5) можно было бы заменить словами: нуль Ω-группы G является ее Ω-подгруппой.

Понятие Ω-группы превращается при пустой системе мультиоператоров Ω в понятие группы. Всякая

Σ-операторная группа имеет Σ системой (унарных) мультиоператоров, так как для всякого $\alpha \in \Sigma$ равенство $0\cdot\alpha = 0$ немедленно вытекает из условия (1) § 11, переписанного аддитивно. Наконец, произвольное кольцо является частным случаем Ω-группы — система мультиоператоров Ω состоит в этом случае из одного бинарного умножения; справедливость в любом кольце равенства $0\cdot 0 = 0$ вытекает из законов дистрибутивности.

Конечно, связь между мультиоператорами и групповыми операциями, задаваемая условием (5), чрезвычайно слаба. Оказалось, однако, что все параллельно развивающиеся разделы теории групп с операторами и теории колец (их, впрочем, не очень много) могут быть изложены сразу для любых мультиоператорных групп (Хиггинс, Proc. London Math. Soc. **6** (1956); русский перевод в сб. «Математика» 3, № 4 (1959)).

Следует отметить, что и группы с операторами, и кольца принадлежат на самом деле к числу *дистрибутивных* Ω-групп. Именно, условие (5) заменяется следующим много более сильным условием дистрибутивности каждой операции из Ω на каждом месте: если $\omega \in \Omega_n$, то для $i = 1, \ldots, n$

$$a_1 \ldots a_{i-1}(b+c)\,a_{i+1} \ldots a_n\omega = \\ = a_1 \ldots a_{i-1}ba_{i+1} \ldots a_n\omega + a_1 \ldots a_{i-1}ca_{i+1} \ldots a_n\omega. \quad (6)$$

Отсюда следует, как обычно, что $a_1 \ldots a_n\omega = 0$, если хотя бы один из элементов $a_1, \ldots, a_n$ равен нулю; уже это свойство само много сильнее условия (5).

Сделаем еще один шаг в сторону теории колец, а именно, выделим такие дистрибутивные Ω-группы, аддитивные группы которых абелевы, а все мультиоператоры из Ω не менее чем бинарны. Это образование называется *мультиоператорным Ω-кольцом*. Параллельно вводится понятие *мультиоператорной линейной Ω-алгебры* над полем P; именно, в качестве аддитивной группы берется векторное пространство над полем P, а мультиоператоры из Ω

удовлетворяют не только условию дистрибутивности (6), но и условию: если $\omega \in \Omega_n$, $\alpha \in P$, то для $i = 1, \ldots, n$

$$a_1 \ldots a_{i-1} (\alpha a_i) a_{i+1} \ldots a_n\omega = \\ = \alpha (a_1 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_n\omega).$$

Можно утверждать уже, что именно в этой общности следует рассматривать вопросы, относящиеся к произвольным неассоциативным кольцам и неассоциативным линейным алгебрам (см. обзор А. Г. Куроша, Успехи матем. наук 24 : 1 (1969)).

§ 14. АБЕЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Перейдем теперь к некоторым другим классам алгебр, обобщающим на этот раз понятие ассоциативного кольца. Это понятие было оправдано в § 9 при помощи колец эндоморфизмов абелевых групп, которые возникли ввиду того, что гомоморфизмы любой группы (на самом деле даже любой алгебры, однотипной с группой) в абелеву группу составляют по сложению гомоморфизмов абелеву группу. Опишем алгебры произвольной сигнатуры, обладающие свойством, аналогичным этому свойству абелевых групп.

Пусть дана алгебра A сигнатуры Ω. Скажем, что гомоморфизмы алгебры G этой же сигнатуры в алгебру A суммируемы, если

а) для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$: $G \to A$ отображение $\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega$, определяемое равенством

$$g(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) = (g\varphi_1) \ldots (g\varphi_n)\omega, \; g \in G, \tag{1}$$

само является гомоморфизмом;

б) для любого $\omega \in \Omega_0$, причем 0_ω — отмечаемый этой операцией элемент алгебры A, отображение φ_ω: $G \to A$, определяемое равенством

$$g\varphi_\omega = 0_\omega, \quad g \in G, \tag{2}$$

является гомоморфизмом.

Алгебра A сигнатуры Ω называется *абелевой* (в различных частных случаях употребляются многие другие названия), если гомоморфизмы в нее любой алгебры этой же сигнатуры суммируемы.

Алгебра A сигнатуры Ω тогда и только тогда абелева, когда

а) *для любых $\omega \in \Omega_n$, $\omega' \in \Omega_s$, $n, s \geqslant 1$, в A выполняется тождество*

$$(x_{11} \ldots x_{1n}\,\omega) \ldots (x_{s1} \ldots x_{sn}\omega)\,\omega' = \\ = (x_{11} \ldots x_{s1}\,\omega') \ldots (x_{1n} \ldots x_{sn}\omega')\,\omega, \tag{3}$$

где $(x_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ — *матрица из неизвестных*;

б) *все* $\omega \in \Omega_0$ *отмечают в* A *один и тот же элемент и этот элемент является* Ω-*подалгеброй в* A.

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega_n$, $\omega' \in \Omega_s$, $n, s \geqslant 1$, пусть даны гомоморфизмы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ алгебры G сигнатуры Ω в A и пусть $b_1, \ldots, b_s \in G$. Положим

$$b_i\varphi_j = a_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{4}$$

Матрица (a_{ij}) является на самом деле произвольной матрицей данных размеров из элементов алгебры A — ввиду замечания, сделанного в § 1, достаточно было бы взять в качестве G алгебру Ω-слов над алфавитом $b_1, \ldots, b_s$, а в качестве φ_j гомоморфизм этой алгебры, переводящий указанный алфавит в j-й столбец данной матрицы. Используя (4), (1) и гомоморфность отображений φ_j, получаем:

$$(a_{11} \ldots a_{1n}\omega) \ldots (a_{s1} \ldots a_{sn}\,\omega)\omega' =$$
$$= [(b_1\varphi_1) \ldots (b_1\varphi_n)\omega] \ldots [(b_s\varphi_1) \ldots (b_s\varphi_n)\omega]\omega' =$$
$$= [b_1\,(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)] \ldots [b_s(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)]\omega';$$

$$(a_{11} \ldots a_{s1}\omega') \ldots (a_{1n} \ldots a_{sn}\omega')\omega =$$
$$= [(b_1\varphi_1) \ldots (b_s\varphi_1)\omega'] \ldots [(b_1\varphi_n) \ldots (b_s\varphi_n)\omega']\omega =$$
$$= [(b_1 \ldots b_s\omega')\varphi_1] \ldots [(b_1 \ldots b_s\omega')\varphi_n]\omega =$$
$$= (b_1 \ldots b_s\omega')(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega).$$

Эти равенства показывают, что справедливость в A всех тождеств вида (3) равносильна тому, что всякое отображение вида $\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega$, $n \geqslant 1$, ведет себя как гомоморфизм по отношению ко всем ненульарным операциям $\omega' \in \Omega$.

С другой стороны, из гомоморфности отображения φ_ω из (5), $\omega \in \Omega_0$, следует, в частности, что для любого $\omega' \in \Omega_0$ элемент, отмечаемый этой операцией в G, должен переходить при φ_ω в элемент $0_{\omega'} \in A$, т. е., ввиду (2), все $\omega \in \Omega_0$ действительно отмечают в A один и тот же элемент; обозначим его просто через 0. Из этой же гомоморфности отображения φ_ω, $\omega \in \Omega_0$, следует, что для любой операции $\omega' \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых $a_1, \ldots, a_n \in G$ будет

$$(a_1 \ldots a_n\omega')\,\varphi_\omega = (a_1\varphi_\omega) \ldots (a_n\varphi_\omega)\,\omega',$$

т. е. $0 \ldots 0\omega' = 0$. Обратно, из справедливости условия б) теоремы следует гомоморфность всякого отображения φ_ω, $\omega \in \Omega_0$. Отсюда же следует, наконец, и гомоморфность всякого отображения вида $\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega$, $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, относительно нульарных операций: если операция $\omega' \in \Omega_0$ отмечает в алгебре G элемент $\bar{0}_{\omega'}$, то, по (1),

$$\bar{0}_{\omega'}\,(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) = (\bar{0}_{\omega'}\varphi_1) \ldots (\bar{0}_{\omega'}\varphi_n)\omega = \\ = 0 \ldots 0\omega = 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что мы получили бы в точности этот же класс алгебр, если бы в определении абелевой алгебры требовали суммируемость гомоморфизмов в алгебру A лишь для таких алгебр сигнатуры Ω, которые принадлежат к некоторому заданному многообразию, содержащему A. В этом случае нужно было бы только использовать в доказательстве теоремы не алгебру Ω-слов, а соответствующую свободную алгебру этого многообразия.

Если алгебра A сигнатуры Ω абелева, то определения (1) и (2) превращают множество всех гомоморфизмов в A любой алгебры G сигнатуры Ω в алгебру этой же сигнатуры,— (1) задает все операции положительных арностей, а гомоморфизм φ_ω из (2) отмечается нульарной операцией ω; это *алгебра гомоморфизмов G в A*. Из определения операций над гомоморфизмами немедленно следует, что *в алгебре гомороморфизмов любой алгебры G в абелеву алгебру A выполняются все тождества, выполняющиеся в A*; в частности, эта алгебра сама будет абелевой.

Из сказанного следует, что эндоморфизмы абелевой алгебры A сигнатуры Ω составляют по указанным операциям абелеву алгебру этой же сигнатуры. С другой стороны, они составляют полугруппу по умножению (в смысле умножения отображений, см. § 3). *Это умножение связано с операциями из Ω законами дистрибутивности.* Именно, если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то для любого

$a \in A$ и любых эндоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ будет, ввиду (1),

$$a[\psi(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)] = (a\psi)(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) = \\ = [(a\psi)\varphi_1] \ldots [(a\psi)\varphi_n]\omega = [a(\psi\varphi_1)] \ldots [a(\psi\varphi_n)]\omega = \\ = a\,[(\psi\varphi_1) \ldots (\psi\varphi_n)\omega],$$

$$a[(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)\psi] = [a(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)]\psi = \\ = [(a\varphi_1) \ldots (a\varphi_n)\omega]\psi = [(a\varphi_1)\psi] \ldots [(a\varphi_n)\psi]\omega = \\ = [a(\varphi_1\psi)] \ldots [a(\varphi_n\psi)]\omega = a[(\varphi_1\psi) \ldots (\varphi_n\psi)\omega],$$

т. е.

$$\psi(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) = (\psi\varphi_1) \ldots (\psi\varphi_n)\omega, \tag{5}$$

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)\psi = (\varphi_1\psi) \ldots (\varphi_n\psi)\omega. \tag{6}$$

С другой стороны, если мы обозначим теперь через φ_0 нулевой эндоморфизм алгебры A (т. е. эндоморфизм из (2), отображающий A в нуль 0 этой абелевой алгебры), то для любого $a \in A$ и любого эндоморфизма ψ будет

$$a(\psi\varphi_0) = (a\psi)\varphi_0 = 0,$$

$$a(\varphi_0\psi) = (a\varphi_0)\psi = 0\psi = 0,$$

т. е.

$$\psi\varphi_0 = \varphi_0, \tag{7}$$

$$\varphi_0\psi = \varphi_0. \tag{8}$$

Мы пришли к следующему многообразию алгебр: это абелевы алгебры сигнатуры Ω (с нулем 0, если в Ω имеются нульарные операции) и в то же время полугруппы по бинарному умножению, причем выполняются законы дистрибутивности и, в частности, нуль абелевой алгебры играет роль нуля для умножения. В соответствии с терминологией, которая будет введена в следующем параграфе, полученные алгебры можно называть *дистрибутивными кольцоидами над абелевыми алгебрами.*

Рассмотрим некоторые примеры. *В многообразии групп абелевыми алгебрами будут в точности абелевы группы.* Действительно, тождество (3) в группе для случая, когда и ω, и ω' являются умножением, имеет вид

$$(x_{11}x_{12})(x_{21}x_{22}) = (x_{11}x_{21})(x_{12}x_{22}), \tag{9}$$

откуда $x_{12}x_{21} = x_{21}x_{12}$, т. е. умножение коммутативно. Если же одна из операций ω, ω' является умножением, а другая — переходом к обратному элементу, то (3) принимает вид

$$(x_1x_2)^{-1} = x_1^{-1}x_2^{-1},$$

что в абелевой группе действительно выполняется. Наконец, единица группы на самом деле является подгруппой. Дистрибутивные кольцоиды совпадают в этом случае с ассоциативными кольцами.

Для полугрупп с единицей абелевость также совпадает с коммутативностью, как показывает тождество (9) при $x_{11} = x_{12} = 1$. *В многообразии всех полугрупп существуют, однако, некоммутативные, но абелевы полугруппы.* Такова, например, всякая полугруппа с умножением $ab = a$.

Кольцо будет абелевым тогда и только тогда, когда оно с нулевым умножением, т. е. в нем выполняется тождество $xy = 0$. Действительно, тождество (3) для случая, когда ω — сложение, а ω' — умножение, принимает вид

$$(x_{11} + x_{12})(x_{21} + x_{22}) = x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22},$$

откуда при $x_{22} = 0$ получаем $x_{12}x_{21} = 0$. Кольца с нулевым умножением играют в теории колец на самом деле ту же роль, какая в общей теории групп принадлежит абелевым группам.

Рассмотрим, наконец, унитарные модули над ассоциативным кольцом K с единицей. Все требования, содержащиеся в приведенной выше характеризации абелевых алгебр, вытекают в этом случае из определения модуля, кроме одного. Именно, если $\alpha, \beta \in K$, то тождество (3) принимает для случая $\omega = \alpha$, $\omega' = \beta$ вид

$$(x\alpha)\beta = (x\beta)\alpha,$$

т. е.

$$x(\alpha\beta) = x(\beta\alpha). \tag{10}$$

Естественно ограничиться поэтому при рассмотрении модулей, являющихся абелевыми алгебрами, просто модулями над коммутативно-ассоциативным кольцом K.

При этом ограничении на K дистрибутивные кольцоиды над унитарными K-модулями — это в точности ассоциативные линейные алгебры над кольцом K. Действительно, дистрибутивность умножения на первом и на втором месте (условия (5) и (6)) относительно унарной операции $\alpha \in K$, взятой в качестве ω, и есть как раз условие (4) из § 13.

§ 15. КОЛЬЦОИДЫ

В этом параграфе будет введен еще один тип алгебр, более широкий, чем рассмотренный выше класс дистрибутивных кольцоидов над абелевыми алгебрами, но не менее естественный. Абелевы алгебры появились у нас потому, что мы хотели обеспечить суммируемость гомоморфизмов произвольной алгебры сигнатуры Ω в данную алгебру. Эта потребность отпадает, однако, если мы будем рассматривать не гомоморфизмы, а произвольные отображения.

Именно, пусть дана алгебра A сигнатуры Ω. Рассмотрим множество всевозможных отображений (не только гомоморфизмов!) алгебры G сигнатуры Ω в алгебру A. Определяя для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$: $G \to A$ отображение $\varphi_1 \ldots \varphi_n \omega$ равенством (1) из § 14, а для любого $\omega \in \in \Omega_0$ отображение φ_ω равенством (2) из § 14, мы превращаем множество всех отображений G в A в алгебру сигнатуры Ω. Из определения операций над отображениями сейчас же следует, что в этой алгебре отображений G в A выполняются все тождества, справедливые в A, т. е. эта алгебра принадлежит к многообразию (Ω, Λ), если в нем содержится алгебра A.

В частности, все преобразования алгебры A многообразия (Ω, Λ) составляют по указанным операциям алгебру этого же многообразия — алгебру преобразований алгебры A. С другой стороны, они составляют полугруппу по умножению преобразований — симметрическую полугруппу на множестве A. При этом умножение преобразований связано с операциями из Ω законами дистрибутивности на втором месте: для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых преобразований $\psi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$

$$\psi(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) = (\psi\varphi_1) \ldots (\psi\varphi_n)\omega; \tag{1}$$

для любого $\omega \in \Omega_0$ и любого преобразования ψ

$$\psi\varphi_\omega = \varphi_\omega. \tag{2}$$

Действительно, при выводе формул (5) и (7) из § 14 (в отличие от формул (6) и (8)) мы на самом деле не использовали того, что рассматриваемые преобразования являются эндоморфизмами.

Полученное образование называется *симметрическим* (Ω, Λ)-*кольцоидом* на алгебре A в соответствии со следующим общим определением:

Алгебра G, сигнатура которой состоит из Ω и еще одного бинарного умножения, называется *кольцоидом над алгеброй многообразия* (Ω, Λ) или (Ω, Λ)-*кольцоидом*, если G, рассматриваемая как алгебра сигнатуры Ω, содержится в многообразии (Ω, Λ), а по умножению G является полугруппой, и если умножение связано с операциями из Ω законами дистрибутивности на втором месте. Операции из Ω называются *аддитивными операциями* кольцоида G, а G как алгебра сигнатуры Ω — *аддитивной алгеброй* кольцоида. Если законы дистрибутивности для умножения относительно операций из Ω выполняются и на первом месте (ср. (6) и (8) из § 14), то кольцоид называется *дистрибутивным*.

Докажем следующую теорему Я. В. Хиона (Тр. Моск. матем. о-ва **14** (1965), 3—47), хорошо оправдывающую понятие кольцоида:

Всякий (Ω, Λ)-*кольцоид* G *изоморфно вкладывается в симметрический* (Ω, Λ)-*кольцоид* S *на некоторой алгебре* H *многообразия* (Ω, Λ). *В качестве алгебры* H *можно взять, например, алгебру преобразований аддитивной алгебры* G^+ *кольцоида* G.

Доказательство. Пусть H выбрано так, как указано в формулировке теоремы. Условимся обозначать умножение в кольцоидах G и S символом $\circ$ для того, чтобы не смешивать его с применением преобразований.

Среди преобразований алгебры G^+ (т. е. множества G) имеются следующие постоянные преобразования c_g, $g \in G$: для всякого $x \in G$

$$xc_g = g. \tag{3}$$

Множество C всех постоянных преобразований является подалгеброй алгебры H. Действительно, для всякого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и всяких $x, a_1, \ldots, a_n \in G$ будет, ввиду (1) из § 14 и (3),

$$xc_{a_1 \ldots a_n\omega} = a_1 \ldots a_n\omega = (xc_{a_1}) \ldots (xc_{a_n})\,\omega = \\ = x\,(c_{a_1} \ldots c_{a_n}\omega),$$

откуда

$$c_{a_1\ldots a_n\omega} = c_{a_1} \ldots c_{a_n}\omega. \tag{4}$$

С другой стороны, если операция $\omega \in \Omega_0$ отмечает в G элемент 0_ω, то для отмечаемого ею в H элемента φ_ω будет, ввиду (2) из § 14, $x\varphi_\omega = 0$ для всех $x \in G$, откуда, ввиду (3),

$$\varphi_\omega = c_{0_\omega}. \tag{5}$$

Сопоставим каждому элементу $a \in G$ элемент $s_a \in S$, определяемый как преобразование множества H, следующим образом:
если $h \in C$, $h = c_g$, то

$$hs_a = c_{g\circ a}; \tag{6}$$

если же $h \notin C$, то

$$hs_a = c_a. \tag{7}$$

Если $a, b \in G$ и $a \neq b$, то $s_a \neq s_b$. Действительно, в этом случае найдется преобразование h множества G, не принадлежащее к C (например, перестановка a и b), и, по (7),

$$hs_a = c_a, \quad hs_b = c_b,$$

но $c_a \neq c_b$.

Полученное вложение G в S является мономорфизмом кольцоидов. Именно, если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то для любых $a_1, \ldots, a_n \in G$

$$s_{a_1\ldots a_n\omega} = s_{a_1} \ldots s_{a_n}\omega.$$

В самом деле, если $h = c_g$, то, применяя (6), (1), (4), снова (6), а затем (1) из § 14, получаем:

$$hs_{a_1\ldots a_n\omega} = c_{g\circ(a_1\ldots a_n\omega)} =$$
$$= c_{g\circ a_1} \ldots c_{g\circ a_n}\omega = (hs_{a_1}) \ldots (hs_{a_n})\,\omega =$$
$$= h\,(s_{a_1} \ldots s_{a_n}\omega).$$

Если же $h \notin C$, то, применяя (7), (4), снова (7), а затем

(1) из § 14, также получаем:

$$hs_{a_1\ldots a_n}\omega = c_{a_1\ldots a_n}\omega = c_{a_1}\ldots c_{a_n}\omega =$$
$$= (hs_{a_1})\ldots(hs_{a_n})\,\omega = h\,(s_{a_1}\ldots s_{a_n}\omega).$$

Далее, если операция $\omega \in \Omega_0$ отмечает в G элемент 0_ω, то s_{0_ω} будет элементом, отмеченным этой операцией в S. В самом деле, если $h = c_g$, то, применяя (6) и (2), получаем

$$hs_{0_\omega} = c_{g\circ 0_\omega} = c_{0_\omega},$$

если же $h \notin C$, то, по (7), снова

$$hs_{0_\omega} = c_{0_\omega}.$$

Теперь остается сослаться на (5), а затем на (2) из § 14.

Наконец, для любых $a, b \in G$

$$s_{a\circ b} = s_a \circ s_b.$$

В самом деле, если $h = c_g$, то, используя (6), ассоциативность умножения в кольцоиде, снова (6) и определение умножения преобразований, получаем:

$$hs_{a\circ b} = c_{g\circ a\circ b} = (hs_a)\,s_b = h\,(s_a \circ s_b).$$

Если же $h \notin C$, то, ввиду (7) и (6), снова

$$hs_{a\circ b} = c_{a\circ b} = (hs_a)\,s_b = h\,(s_a \circ s_b).$$

Теорема доказана.

Еще в тридцатых годах началось изучение кольцоидов над группами, т. е. *почти-колец*. Из того, что было сказано выше, можно сделать заключение, что понятие почти-кольца является столь же естественным объектом изучения, как и много более узкое понятие ассоциативного кольца. Это же справедливо и для двух промежуточных случаев — для дистрибутивных почти-колец (дистрибутивность выполняется на обоих местах, но аддитивная группа может быть неабелевой) и для почти-колец с абелевой аддитивной группой (хотя дистрибутивность на первом месте может не выполняться).

Давно изучаются и *полукольца*, т. е. кольцоиды над полугруппами. Рассматривались и *неокольца*, т. е. кольцоиды над лупами, а также кольцоиды над n-группами и т. д. Весьма интересны и давно изучаются кольцоиды над кольцами; для них конкурируют несколько названий, в том числе *менгеровы алгебры*. Значение их основано на том, что симметричная менгерова алгебра на кольце R — это просто совокупность всюду определенных функций одного переменного из R в R, рассматриваемая как кольцо относительно операций сложения и умножения функций (в смысле сложения и умножения значений функций при каждом значении переменного, ср. (1) из § 14) и в то же время как полугруппа относительно суперпозиции функций:

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)).$$

По существу эти же слова применимы, понятно, и к случаю симметрического кольцоида на алгебре любого многообразия (Ω, Λ).

В литературе уже появились различные обобщения кольцоидов. Так, рассматриваются *неассоциативные* (Ω, Λ)-*кольцоиды* — по умножению лишь группоид (в частности, квазигруппа), а не полугруппа.

Рассматриваются и *n-арные* (Ω, Λ)-*кольцоиды*. В частности, симметрические n-арные кольцоиды, $n > 2$, возникают так же, как появились выше симметрические бинарные кольцоиды — нужно только рассматривать на данной алгебре функции от $n-1$ переменного, а не от одного переменного. Пока преимущественно изучались n-арные кольцоиды над кольцами; началось изучение их и над мультиоператорными группами.

§ 16. СТРУКТУРЫ

Введем, наконец, еще один класс универсальных алгебр, занимающий в общей алгебре весьма заметное место. Напомним, что множество S называется *частично упорядоченным*, если на S задано бинарное отношение $\leqslant$, т. е. для некоторых упорядоченных пар a, $b \in S$ положено $a \leqslant b$, причем это отношение должно быть рефлексивным, транзитивным и антисимметричным, т. е. для всех a, b, $c \in S$

$a \leqslant a$,

если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$,

если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$.

Напомним также, что отношение $\geqslant$ обратно отношению $\leqslant$, т. е. $b \geqslant a$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant b$.

Частично упорядоченное множество S называется *структурой* (употребляется также термин «решетка»), если оно удовлетворяет следующим двум условиям.

I_1. Для всякой пары элементов a, $b \in S$ в S существует такой элемент $c = a \cap b$, *пересечение* элементов a и b, что $c \leqslant a$, $c \leqslant b$, причем если некоторый элемент c' также обладает свойствами $c' \leqslant a$, $c' \leqslant b$, то $c' \leqslant c$.

I_2. Для всякой пары элементов a, $b \in S$ в S существует такой элемент $d = a \cup b$, *объединение* элементов a и b, что $d \geqslant a$, $d \geqslant b$, причем если некоторый элемент d' также обладает свойствами $d' \geqslant a$, $d' \geqslant b$, то $d' \geqslant d$.

Из этого определения следует, что и пересечение $a \cap b$, и объединение $a \cup b$ элементов a и b определены в структуре S однозначно. Всякая структура является, следовательно, универсальной алгеброй с двумя бинарными операциями $\cap$ и $\cup$. Исходная частичная упорядоченность в структуре S может быть задана при помощи любой из этих операций. Именно, очевидно, что для элементов a, $b \in S$ тогда и только тогда $a \leqslant b$, когда $a \cap b = a$ (а также когда $a \cup b = b$).

Структуры как алгебры с бинарными операциями $\cap$ и $\cup$ составляют многообразие, задаваемое тождествами

II_1. $x \cap x = x, x \cup x = x$;

II_2. $x \cap y = y \cap x$, $x \cup y = y \cup x$;

II_3. $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$,
$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$;

II_4. $x \cap (x \cup y) = x$, $x \cup (x \cap y) = x$.

В самом деле, выполнение в структуре S тождеств II_1 и II_2 очевидно. Проверим II_3, хотя бы для пересечения. Для любых a, b, $c \in S$ будет, ввиду I_1,

$$(a \cap b) \cap c \leqslant a \cap b \leqslant a,$$
$$(a \cap b) \cap c \leqslant a \cap b \leqslant b,$$
$$(a \cap b) \cap c \leqslant c,$$

откуда, снова по I_1,

$$(a \cap b) \cap c \leqslant b \cap c,$$
$$(a \cap b) \cap c \leqslant a \cap (b \cap c).$$

Аналогично

$$a \cap (b \cap c) \leqslant (a \cap b) \cap c,$$

а поэтому имеет место II_3.

Проверим теперь хотя бы первое из тождеств II_4. Ввиду I_1

$$a \cap (a \cup b) \leqslant a,$$

но $a \leqslant a$ и, по I_2, $a \leqslant a \cup b$, откуда, по I_1,

$$a \leqslant a \cap (a \cup b);$$

отсюда следует II_4.

Пусть теперь S — алгебра с операциями $\cap$, $\cup$, удовлетворяющими тождествам II_1 — II_4. Покажем, что для a, $b \in S$ равенства

$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \tag{1}$$

одновременно выполняются или не выполняются. Действительно, если $a \cap b = a$, то, по II_2 и II_4,

$$a \cup b = (a \cap b) \cup b = b;$$

если же $a \cup b = b$, то, по II_4,

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a.$$

Если равенства (1) для элементов a и b имеют место, то положим $a \leqslant b$. Этим в множество S введена частичная упорядоченность. Действительно, $a \leqslant a$ ввиду II_1. Далее, если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, т. е. $a \cap b = a$, $b \cap c = b$, то, в силу II_3,

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a,$$

т. е. $a \leqslant c$. Наконец, если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, т. е. $a \cap b = a$, $b \cap a = b$, то, ввиду II_2, $a = b$.

Покажем, что выполняется условие I_1. Из

$$(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$$

следует $a \cap b \leqslant a$. Аналогично $a \cap b \leqslant b$. Если же в S взят произвольный элемент c', удовлетворяющий условиям $c' \leqslant a$, $c' \leqslant b$, т. е. $c' \cap a = c'$, $c' \cap b = c'$, то

$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c',$$

откуда $c' \leqslant a \cap b$. Элемент $a \cap b$ является, следовательно, пересечением элементов a и b в смысле условия I_1. Аналогичным образом доказывается, что элемент $a \cup b$ будет объединением элементов a и b в смысле условия I_2.

Подструктурой структуры S называется подалгебра S как алгебры сигнатуры $(\cap, \cup)$. Заметим, что подмножество T структуры S может оказаться структурой относительно той частичной упорядоченности, которая индуцируется в нем частичной упорядоченностью структуры S, не являясь подструктурой структуры S, — пересечения (или объединения) элементов из T в структуре T могут отличаться от их пересечений (объединений) в структуре S.

Примером структуры служит всякое *линейно упорядоченное множество* (или *цепь*): для любых элементов a, b имеет место или $a \leqslant b$, или же $a \geqslant b$.

Множество натуральных чисел будет структурой с отношением делимости в качестве отношения частичного порядка. Роль пересечения играет здесь наибольший общий делитель двух чисел, а объединением будет их наименьшее общее кратное.

Подмножества любого множества составляют структуру относительно частичной упорядоченности по теоретико-множественному включению. Для нас особенно важно, что можно говорить *о структуре подалгебр* любой универсальной алгербы. G. Это будет множество всех подалгебр алгебры G, если в G нет таких подалгебр A, B, пересечение которых пусто, в противном же случае указанное множество пополняется пустым подмножеством. Частичная упорядоченность подалгебр берется по теоретико-множественному включению. Пересечение $A \cap B$ двух подалгебр есть их теоретико-множественное пересечение, а роль объединения $A \cup B$ выполняет подалгебра $\{A, B\}$, порожденная теоретико-множественным объединением подалгебр A, B (см. § 1).

Если G — группа, то для любых ее нормальных делителей A, B подгруппы $A \cap B$ и $\{A, B\}$ сами будут, как известно, нормальными делителями в G, причем $\{A, B\} = AB$, т. е. всякий элемент из $\{A, B\}$ может быть хотя бы одним способом записан в виде произведения ab, $a \in A$, $b \in B$. Нормальные делители произвольной группы составляют, следовательно, подструктуру в структуре всех подгрупп этой группы.

Структура S называется *дедекиндовой* (или *модулярной*), если для любых a, b, $c \in S$, удовлетворяющих условию $a \geqslant b$, выполняется равенство

$$a \cap (b \cup c) = b \cup (a \cap c). \tag{2}$$

Структура нормальных делителей произвольной группы является дедекиндовой.

Действительно, пусть в группе G даны нормальные делители A, B и C, причем $A \supseteq B$. Нужно доказать, что

$$A \cap BC = B(A \cap C). \tag{3}$$

Так как $B \subseteq A$ и $B \subseteq BC$, то B содержится в левой части равенства (3). Там же содержится и $A \cap C$, так как $C \subseteq BC$. Отсюда следует, что вся правая часть равенства (3) содержится в его левой части. С другой стороны, любой элемент, содержащийся в нормальном делителе $A \cap BC$, является элементом $a \in A$, допускающим запись $a = bc$, где $b \in B$, $c \in C$. Отсюда

$c = b^{-1}a \in A$, так как $B \subseteq A$, т. е. $c \in (A \cap C)$, откуда

$$a = bc \in B\,(A \cap C).$$

Этим доказано, что левая часть равенства (3) содержится в свою очередь в его правой части.

Легко показать, что структура всех подгрупп некоммутативной группы в общем случае не будет дедекиндовой.

Дедекиндовы структуры составляют многообразие структур: структура S тогда и только тогда дедекиндова, если в ней выполняется тождество

$$x \cap [(x \cap y) \cup z] = (x \cap y) \cup (x \cap z). \tag{4}$$

Действительно, если структура S дедекиндова, то (4) следует из (2), так как $a \geqslant a \cap b$. Обратно, если в структуре S выполняется тождество (4), то для $a \geqslant b$ выполняется равенство (2), так как в этом случае $a \cap b = b$.

Еще более узким является многообразие *дистрибутивных* структур, т. е. структур, в которых выполняется тождество

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z). \tag{5}$$

В самом деле, всякая дистрибутивная структура является дедекиндовой, так как для таких элементов a, b, c структуры, что $a \geqslant b$, т. е. $a \cap b = b$, из (5) следует (2). С другой стороны, структура подгрупп прямой суммы двух циклических групп второго порядка дедекиндова, но не дистрибутивна.

Для структур (в отличие от колец, например) *тождество* (5) *равносильно двойственному ему тождеству*

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z). \tag{6}$$

Действительно, применяя (5), а также $\mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_4$, получаем:

$$a \cup (b \cap c) = [a \cup (a \cap c)] \cup (b \cap c) =$$
$$= a \cup [(a \cap c) \cup (b \cap c)] = a \cup [(a \cup b) \cap c] =$$
$$= [(a \cup b) \cap a] \cup [(a \cup b) \cap c] = (a \cup b) \cap (a \cup c).$$

Двойственные рассмотрения позволяют вывести (5) из (6).

Легко показать, что структура подмножеств любого множества дистрибутивна,— проверка в этом случае тождества (5) (или (6)) не представляет никаких затруднений. Существует теорема Стоуна, по которой всякая дистрибутивная структура изоморфно вкладывается в структуру подмножеств некоторого множества (Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37—111).

Единицей некоторой структуры S называется такой элемент 1, что для любого $a \in S$ выполняется неравенство $a \leqslant 1$. Нулем структуры S называется такой элемент 0, что для любого $a \in S$ будет $a \geqslant 0$. Если структура обладает единицей (или нулем), то этот элемент определен однозначно.

Если структура S обладает единицей и нулем, то элемент $b \in S$ называется *дополнением* к элементу $a \in S$, если

$$a \cap b = 0, \qquad a \cup b = 1.$$

В общем случае элемент может иметь много различных дополнений, однако в *дистрибутивной структуре с единицей и нулем всякий элемент может обладать не больше чем одним дополнением*, так как если структура S дистрибутивна, то в ней для любых элементов a, b, c из

$$a \cap c = b \cap c, \qquad a \cup c = b \cup c$$

следует $a = b$. Действительно,

$$a = a \cup (a \cap c) = a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) =$$
$$= (a \cup b) \cap (b \cup c) = b \cup (a \cap c) =$$
$$= b \cup (b \cap c) = b.$$

Обозначим дополнение к элементу a дистрибутивной структуры с единицей и нулем через $\bar{a}$. Очевидны или легко проверяются следующие равенства:

$$\bar{1} = 0, \ \bar{0} = 1, \ \bar{\bar{a}} = a, \ \overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}, \ \overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}.$$

Проверим хотя бы последнее из них:

$$(a \cup b) \cap (\bar{a} \cap \bar{b}) = [a \cap (\bar{a} \cap \bar{b})] \cup [b \cap (\bar{a} \cap \bar{b})] = 0 \cup 0 = 0,$$

$$(a \cup b) \cup (\bar{a} \cap \bar{b}) = [(a \cup b) \cup \bar{a}] \cap [(a \cup b) \cup \bar{b}] = 1 \cap 1 = 1.$$

Дистрибутивная структура с единицей и нулем, в которой каждый элемент обладает дополнением, называется *булевой структурой* (или *булевой алгеброй*). Структура всех подмножеств любого множества M является на самом деле булевой: роль единицы играет само множество M, роль нуля — пустое подмножество, дополнением к подмножеству A служит теоретико-множественное дополнение $M \setminus A$. Доказательство сформулированной выше теоремы Стоуна позволяет утверждать, что всякая булева структура изоморфно вкладывается (как алгебра сигнатуры ($\cap$, $\cup$, $-$, 1, 0)) в булеву структуру подмножеств некоторого множества.

С другой стороны, многообразие булевых структур оказывается эквивалентным одному специальному многообразию колец. Именно, ассоциативное кольцо R с единицей 1 называется *булевым кольцом*, если все его элементы идемпотентны, т. е. для всех $a \in R$

$$a^2 = a. \tag{7}$$

Всякое булево кольцо R коммутативно и удовлетворяет тождеству

$$2x = 0. \tag{8}$$

Действительно, для любых $a, b \in R$ из (7) следует

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = \\ = a + ab + ba + b,$$

откуда

$$ab + ba = 0. \tag{9}$$

Полагая здесь $b = a$ и учитывая (7), мы получаем (8), т. е. $x = -x$, а поэтому (9) можно переписать в виде

$$ab - ba = 0,$$

т. е. $ab = ba$.

Всякую булеву структуру можно превратить в булево кольцо, если положить

$$a + b = (a \cap \bar{b}) \cup (\bar{a} \cap b), \quad ab = a \cap b. \tag{10}$$

С другой стороны, всякое булево кольцо можно превратить в булеву структуру, если положить

$$a \cup b = a + b + ab, \quad a \cap b = ab. \tag{11}$$

Эти переходы обратны друг другу. При них нуль и единица структуры совпадают соответственно с нулем и единицей кольца, $-a = a$ ввиду (8), а на основании первого из равенств (10)

$$\bar{a} = a + 1.$$

Доказательство всех этих утверждений проходит при помощи канительной, но не сложной проверки. Стоит учесть при этом, что определение сложения из (10) можно записать, используя (6), также в виде

$$a + b = (a \cup b) \cap (\bar{a} \cup \bar{b}).$$

Отметим, что операция $a \cup b$ из (11) совпадает, ввиду (8), с присоединенным умножением в рассматриваемом кольце (см. § 10).

§ 17. ПОЛНЫЕ СТРУКТУРЫ. СООТВЕТСТВИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Многие из структур, в том числе структура подмножеств любого множества и структура подалгебр любой универсальной алгебры, обладают тем свойством, что пересечения и объединения определены в них не только для двух и поэтому, в силу ассоциативности, для любого конечного числа элементов, но и для всех бесконечных подмножеств. Это приводит к следующему понятию.

Частично упорядоченное множество S называется *полной структурой*, если для любого непустого подмножества $A \subseteq S$ в S существуют элементы c и d со следующими свойствами:

I_1'. Для всех $a \in A$ выполняется неравенство $c \leqslant a$, причем если некоторый элемент c' также удовлетворяет условию $c' \leqslant a$ для всех $a \in A$, то $c' \leqslant c$.

I_2'. Для всех $a \in A$ выполняется неравенство $d \geqslant a$, причем если некоторый элемент d' также удовлетворяет условию $d' \geqslant a$ для всех $a \in A$, то $d' \geqslant d$.

Однозначно определенные элементы c и d называются соответственно *пересечением* и *объединением* элементов подмножества A. Записываются они следующим образом: $c = \bigcap A$ (или $c = \bigcap\limits_{a \in A} a$, или $c = \bigcap\limits_{\alpha \in I} a_\alpha$, если a_α, $\alpha \in I$, пробегает все элементы подмножества A); аналогично для d.

Ясно, что полная структура будет и просто структурой.

Бесконечная полная структура не является, однако, универсальной алгеброй в том смысле, как это было определено в § 1. Тем не менее, это понятие играет для нас важную служебную роль и мы сделаем о нем несколько замечаний.

Всякая полная структура S обладает единицей и нулем — это будут соответственно элементы $\bigcup S$ и $\bigcap S$.

Если частично упорядоченное множество S обладает единицей 1 и в нем существуют пересечения для любых непустых подмножеств, то S будет полной структурой.

Нужно доказать лишь, что всякое непустое подмножество $A \subseteq S$ обладает объединением.

Обозначим через B множество всех таких элементов $b \in S$, что $b \geqslant a$ для всех $a \in A$. Множество B — непустое, так как $1 \in B$, а поэтому существует элемент $d = \bigcap B$.

Покажем, что $d = \bigcup A$.

В самом деле, если $a \in A$, то $a \leqslant b$ для всех $b \in B$, а поэтому $a \leqslant d$.

С другой стороны, если элемент $s \in S$ таков, что $s \geqslant a$ для всех $a \in A$, то $s \in B$, а поэтому $d \leqslant s$.

Именно отсюда вытекает, что *структура всех подалгебр любой алгебры G является полной*,— объединением данной системы подалгебр A_α, $\alpha \in I$, является подалгебра, порожденная теоретико-множественным объединением подмножеств A_α, $\alpha \in I$ (см. § 1).

Если даны частично упорядоченные множества S и S', то взаимно однозначное отображение φ множества S на множество S' называется *изоморфизмом*, если для любых $a, b \in S$ условия $a \leqslant b$ и $a\varphi \leqslant b\varphi$ равносильны.

Если φ: $S \to S'$ — изоморфизм полных структур S и S' как частично упорядоченных множеств, то для любого непустого подмножества $A \subseteq S$

$$(\bigcap_{a \in A} a)\varphi = \bigcap_{a \in A} (a\varphi),$$

$$(\bigcup_{a \in A} a)\varphi = \bigcup_{a \in A} (a\varphi).$$

Докажем хотя бы первое из этих утверждений. Если $c = \bigcap_{a \in A} a$, $c' = \bigcap_{a \in A} (a\varphi)$, то из $c \leqslant a$, $a \in A$, следует $c\varphi \leqslant a\varphi$, а поэтому $c\varphi \leqslant c'$.

С другой стороны, $c' \leqslant a\varphi$, $a \in A$, откуда $c'\varphi^{-1} \leqslant a$; поэтому $c'\varphi^{-1} \leqslant c$, откуда $c' \leqslant c\varphi$. Этим доказано, что $c\varphi = c'$.

Эти рассмотрения применимы и к случаю структур, не обязательно полных. Мы получаем, что изоморфизм структур как частично упорядоченных множеств будет их изоморфизмом и как алгебр сигнатуры $(\bigcap, \bigcup)$.

Обратное очевидно, так как $a \leqslant b$ равносильно $a \cap b = a$.

Элемент a полной структуры S называется *компактным*, если во всяком подмножестве $B \subseteq S$, для которого $a \leqslant (\bigcup B)$, найдется такое конечное подмножество $B' \leqslant B$, что $a \leqslant (\bigcup B')$.

В полной структуре подалгебр произвольной алгебры компактными элементами являются конечнопорожденные подалгебры (т. е. подалгебры, обладающие конечной системой образующих) и только они.

В самом деле, пусть в алгебре G сигнатуры Ω взята конечнопорожденная подалгебра

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

и пусть она содержится в объединении подалгебр B_α, $\alpha \in I$,

$$A \subseteq \{B_\alpha, \alpha \in I\}.$$

Выбираем для каждого из элементов $a_1, \ldots, a_n$ одну из его записей в виде Ω-слова от (конечной системы) элементов, принадлежащих к некоторым из подалгебр B_α, $\alpha \in I$ (ср. § 1). В результате выделяется такой конечный набор подалгебр $B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_s}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in I$, что через элементы этих подалгебр записывается каждый из элементов $a_1, \ldots, a_n$, а поэтому

$$A \subseteq \{B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_s}\}.$$

С другой стороны, если подалгебра C алгебры G не имеет конечной системы образующих, то она совпадает с объединением подалгебр $\{c\}$, где элемент c пробегает всю подалгебру C, но объединение любого конечного набора этих подалгебр строго меньше C.

Полная структура S называется *компактнопорожденной*, если всякий ее элемент является объединением компактных элементов. Легко видеть, что *полная структура подалгебр всякой алгебры будет компактнопорожденной.* Действительно, всякая подалгебра является объединением подалгебр с одним образующим, порожденных всеми ее элементами.

Существует теорема Биркгофа-Фринка, по которой всякая компактнопорожденная полная структура изоморфна полной структуре всех подалгебр некоторой алгебры (Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 299—316).

Со всякой алгеброй естественным образом связывается еще одна полная структура, много более широкая, чем структура подалгебр. Она будет введена в следующем параграфе, а сейчас укажем одну часто используемую конструкцию.

Пусть дано семейство алгебр G_i, $i \in I$, одной и той же сигнатуры Ω; множество индексов I может быть как конечным, так и бесконечным. Рассмотрим множество G, элементами которого являются всевозможные системы $a = (a_i \mid a_i \in G_i,\ i \in I)$ элементов, взятых по одному в каждой из алгебр G_i. Множество G можно превратить в алгебру сигнатуры Ω, полагая, что операции из Ω выполняются в G покомпонентно: если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и в G взяты элементы

$$a^{(k)} = (a_i^{(k)}), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то

$$a'a'' \ldots a^{(n)}\omega = (a_i'a_i'' \ldots a_i^{(n)}\omega);$$

если же $\omega \in \Omega_0$, то эта операция отмечает в G элемент

$$0^{\omega} = (0_i^{\omega}),$$

где 0_i^{ω} — элемент, отмечаемый операцией ω в алгебре G_i.

Алгебра G называется *декартовым произведением* (или полным прямым произведением, или полной прямой суммой) алгебр G_i, $i \in I$, и записывается в виде

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

или, если множество I конечно и состоит из натуральных чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$,— в виде

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n.$$

Из определения операций в G немедленно следует, что если все алгебры G_i, $i \in I$, принадлежат одному и тому же многообразию (Ω, Λ), то и их декартово произведение содержится в этом многообразии.

Сейчас мы ограничимся рассмотрением декартовых произведений пар алгебр. Если даны алгебры G и H сигнатуры Ω, то в их декартовом произведении $G \times H$ возьмем произвольную подалгебру; нам удобно обозначать ее буквой ρ. Эта подалгебра состоит из некоторых пар вида (a, b), $a \in G$, $b \in H$, причем если $(a, b) \in \rho$, то будем писать также $a\rho b$. На ρ можно смотреть как на бинарное отношение между множествами G и H, причем из определения подалгебры и определения операций в декартовом произведении следует, что подалгебра в $G \times H$ — это те и только те бинарные отношения ρ между G и H, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и $a_i \rho b_i$, $a_i \in G$, $b_i \in H$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$(a_1 \ldots a_n \omega) \rho (b_1 \ldots b_n \omega);$$

2) если $\omega \in \Omega_0$ и отмечает в G и H соответственно элементы 0_ω^G и 0_ω^H, то $0_\omega^G \rho 0_\omega^H$.

Подалгебры алгебры $G \times H$, т. е. бинарные отношения между G и H, обладающие свойствами 1) и 2), называются *соответствиями* между G и H. Для записи того, что ρ есть соответствие между G и H, мы будем использовать символ $G\rho H$.

Примерами соответствий служат всевозможные гомоморфизмы G в H или даже частичные гомоморфизмы, т. е. гомоморфизмы подалгебр алгебры G в алгебру H; если $G' \subseteq G$ и φ: $G' \to H$ — гомоморфизм, то, полагая $a'\varphi = b'$ для $a' \in G'$ и используя символ φ для записи соответствующего бинарного отношения, т. е. $a'\varphi b'$, мы получим, что условия 1) и 2) для φ вместо ρ следуют из определения гомоморфизма.

На произвольные же соответствия между G и H можно смотреть как на «многозначные частичные гомоморфизмы» G в H.

Соответствия между алгебрами G и H, являясь всевозможными подалгебрами алгебры $G \times H$, составляют полную структуру. Именно в смысле этой *полной структуры соответствий* между G и H будет пониматься дальше частичная упорядоченность соответствий.

Таким образом, $\rho \leqslant \sigma$ для соответствий $G\rho H$, $G\sigma H$ означает, что для любых $a \in G$, $b \in H$ из $a\rho b$ следует $a\sigma b$.

С другой стороны, пусть даны однотипные алгебры G, H и K сигнатуры Ω и соответствия $G\rho H$ и $H\sigma K$. Определим следующим образом бинарное отношение $\rho\sigma$ между G и K: $a(\rho\sigma)c$, $a \in G$, $c \in K$, тогда и только тогда, когда существует хотя бы один такой элемент $b \in H$, что $a\rho b$ и $b\sigma c$ или, короче, $a\rho b\sigma c$.

Это произведение $\rho\sigma$ *соответствий* $G\rho H$ *и* $H\sigma K$ *само является соответствием между* G *и* K. В самом деле, если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и $a_i(\rho\sigma)c_i$, $a_i \in G$, $c_i \in K$ $i = 1, \ldots, n$, то существуют такие $b_i \in H$, что $a_i\rho b_i\sigma c_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому по 1) из определения соответствия

$$(a_1 \ldots a_n\omega)\ \rho\ (b_1 \ldots b_n\omega)\ \sigma\ (c_1 \ldots c_n\omega),$$

откуда, по определению произведения соответствий,

$$(a_1 \ldots a_n\omega)\ (\rho\sigma)\ (c_1 \ldots c_n\omega).$$

С другой стороны, для $\omega \in \Omega_0$ будет, ввиду 2), $0_\omega^G\rho 0_\omega^H\sigma 0_\omega^K$, откуда $0_\omega^G\ (\rho\sigma)\ 0_\omega^K$.

Следует помнить, конечно, что произведение соответствий определено не всегда; именно, оно не определено для соответствий $G\rho H$ и $H'\sigma K$, если $H \neq H'$.

Умножение соответствий ассоциативно. Действительно, если даны соответствия $G\rho H$, $H\sigma K$, $K\tau L$, то для $a \in G$, $d \in L$ утверждение $a[(\rho\sigma)\tau]d$ равносильно существованию такого $c \in K$, что $a(\rho\sigma)c\tau d$, что равносильно существованию такого $b \in H$, что $a\rho b\sigma c\tau d$. Последнее же равносильно утверждению $a\rho b(\sigma\tau)d$, т. е. утверждению $a[\rho(\sigma\tau)]d$, что и требовалось доказать.

Отметим, что произведение соответствий в применении к гомоморфизмам превращается, очевидно, в произведение гомоморфизмов в смысле результата их последовательного выполнения (см. § 3).

Умножение соответствий связано с их частичной упорядоченностью следующим образом: *если даны соответствия $G\rho H$, $G\rho' H$, причем $\rho \leqslant \rho'$, то для любых соответствий $H\sigma K$, $L\tau G$ будет*

$$\rho\sigma \leqslant \rho'\sigma, \quad \tau\rho \leqslant \tau\rho'. \tag{1}$$

Докажем хотя бы первое утверждение.

Если $a(\rho\sigma)c$, $a \in G$, $c \in K$, то существует такое $b \in H$, что $a\rho b\sigma c$, т. е., ввиду $\rho \leqslant \rho'$, $a\rho' b\sigma c$, откуда следует $a(\rho'\sigma)c$.

Для всякого соответствия $G\rho H$ существует *инверсное соответствие* $H\rho^{-1}G$; именно, $b\rho^{-1}a$, где $a \in G$, $b \in H$, тогда и только тогда, когда $a\rho b$. Из определения соответствия (условия 1) и 2)) немедленно следует, что ρ^{-1} действительно будет соответствием и что выполняются следующие свойства:

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho; \tag{2}$$

если произведение $\rho\sigma$ существует, то

$$(\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\rho^{-1}; \tag{3}$$

наконец,

$$(\bigcap_{i\in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap_{i\in I} \rho_i^{-1}, \tag{4}$$

а поэтому из $\rho \leqslant \sigma$ следует $\rho^{-1} \leqslant \sigma^{-1}$.

Используя умножение соответствий, их частичную упорядоченность и инверсное соответствие, а также учитывая, что тождественный автоморфизм ε_G алгебры G является соответствием G с самим собою, можно описать некоторые специальные виды соответствий. Отметим сперва, что если дано декартово произведение

$$G = \prod_{i\in I} G_i,$$

то, сопоставляя каждому элементу $(a_i,\ i \in I) \in G$ элемент $a_i \in G_i$, мы получаем эпиморфизм $\pi_i\colon G \to G_i$; образ всякой подалгебры $A \subseteq G$ при π_i будет подалгеброй в G_i, называемой проекцией A в G_i.

В согласии с этим для любого соответствия $G\rho H$ проекция подалгебры $\rho \subseteq G \times H$ в G называется *первой проекцией соответствия* ρ; аналогично определяется *вторая проекция.*

Без труда проверяются следующие утверждения:

Первая (вторая) проекция соответствия $G\rho H$ *тогда и только тогда совпадает с* G (H), *когда* $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon_G$ (*когда* $\rho^{-1}\rho \geqslant \varepsilon_H$).

Соответствие $G\rho H$ *тогда и только тогда будет частичным гомоморфизмом, если* $\rho^{-1}\rho \leqslant \varepsilon_H$; *гомоморфизмом,— если* $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon_G$ *и* $\rho^{-1}\rho \leqslant \varepsilon_H$; *мономорфизмом,— если* $\rho\rho^{-1} = \varepsilon_G$ *и* $\rho\rho^{-1} \leqslant \varepsilon_H$; *эпиморфизмом,— если* $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon_G$ *и* $\rho^{-1}\rho = \varepsilon_H$; *изоморфизмом,— если* $\rho\rho^{-1} = \varepsilon_G$ *и* $\rho^{-1}\rho = \varepsilon_H$.

§ 18. КОНГРУЕНЦИИ

Применим сказанное выше к случаю $H = G$, т. е. рассмотрим соответствия $G\rho G$ алгебры G с самой собой (т. е., короче, *соответствия алгебры* G). Они составляют, как мы знаем, полную структуру, притом компактнопорожденную, так как это структура всех подалгебр декартова квадрата $G \times G$. Известна теорема Искандера (Изв. АН СССР, серия матем. 29 (1965), 1273—1282), по которой всякая компактнопорожденная полная структура изоморфна структуре всех соответствий некоторой алгебры; эта теорема обобщает, очевидно, отмеченную в предшествующем параграфе теорему Биркгофа — Фринка.

С другой стороны, произведение соответствий вида $G\rho G$ всегда определено и поэтому соответствия алгебры G составляют полугруппу по умножению; эта *полугруппа соответствий* обладает единицей $\varepsilon = \varepsilon_G$. Наконец, в множестве соответствий алгебры G существует инволюция, а именно переход к инверсному соответствию ρ^{-1}.

Совокупность соответствий алгербы G, рассматриваемых с их упорядоченностью, умножением и переходом к инверсному соответствию,— связи между этими отношениями и операциями указаны в предшествующем параграфе,— назовем *связкой соответствий* алгебры G.

Связка соответствий содержит в себе многое из того, что приходится использовать при изучении алгебры G. Так, *структура подалгебр алгебры G изоморфна подструктуре структуры ее соответствий, состоящей из всех таких соответствий ρ, что $\rho \leqslant \varepsilon$*. Именно, такими соответствиями будут тождественные автоморфизмы всевозможных подалгебр алгебры G и только они — последнее потому, что для соответствия ρ, удовлетворяющего условию $\rho \leqslant \varepsilon$, обе проекции совпадают, т. е. являются одной и той же подалгеброй. С другой стороны, эндоморфизмы алгебры G — это такие ее соответствия ρ, что $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon$, $\rho^{-1}\rho \leqslant \varepsilon$, а так как произведение гомоморфизмов совпадает, как мы знаем, с их произведением как соответствий, то *полугруппа эндоморфизмов алгебры G будет подполугруппой полугруппы ее соответствий.*

При изучении алгебр очень важную роль играет еще один тип соответствий. Именно, соответствие π алгебры G называется *конгруенцией*, если, как бинарное отношение, оно является отношением эквивалентности, т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно, иными словами, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\pi \geqslant \varepsilon, \quad \pi^{-1} = \pi, \quad \pi\pi \leqslant \pi. \tag{1}$$

Для конгруенции π будет даже

$$\pi\pi = \pi, \tag{2}$$

так как из $\pi \geqslant \varepsilon$ следует, по (1) из § 17, $\pi\pi \geqslant \pi$.

Если в алгебре G заданы конгруенции π_i, $i \in I$, то их пересечение в структуре соответствий само будет конгруенцией.

В самом деле, докажем справедливость условий (1) для конгруенции $\pi = \bigcap\limits_{i \in I} \pi_i$. Справедливость первого из этих условий очевидна, второе следует из равенства (4) предшествующего параграфа. Пусть, наконец, элементы a, $c \in G$ таковы, что $a(\pi\pi)c$. Тогда существует такой элемент $b \in G$, что $a\pi b$ и $b\pi c$, а поэтому для всех $i \in I$ будет $a\pi_i b$, $b\pi_i c$. Отсюда $a(\pi_i\pi_i)c$, т. е., так как для π_i выполняется последнее из условий (1), то $a\pi_i c$, $i \in I$, а поэтому $a\pi c$.

С другой стороны, о б ъ е д и н е н и е к о н г р у е н ц и й в с т р у к т у р е с о о т в е т с т в и й н е о б я з а н о б ы т ь к о н г р у е н ц и е й, как показывает следующий тривиальный пример. Рассмотрим множество M, в котором задана тождественная унарная операция

$$x\omega = x \text{ для всех } x \in M.$$

Всякая эквивалентность в множестве M будет конгруенцией полученной алгебры. Возьмем две конгруенции этой алгебры π_1 и π_2. Ввиду тождественности операции ω их объединение в структуре соответствий совпадает с их теоретико-множественным объединением как подмножеств множества $M \times M$. Последнее не обязано, однако, быть конгруенцией, так как может не удовлетворять условию транзитивности: если элементы

a, b, $c \in M$ таковы, что $a\pi_1 b$, $b\pi_2 c$, но a и c лежат в разных классах как по π_1, так и по π_2,— эта ситуация может быть реализована, если M содержит не менее трех элементов,— то a и c не находятся в отношении $\pi_1 \cup \pi_2$, хотя $a(\pi_1 \cup \pi_2) b$, $b(\pi_1 \cup \pi_2) c$.

Множество всех конгруенций произвольной алгебры G частично упорядочено как подмножество структуры соответствий, содержит единицу этой полной структуры, т. е. соответствие $G \times G$, и, наконец, замкнуто относительно пересечений. Оно само будет, следовательно, полной структурой. Эта *структура конгруенций* алгебры G не обязана быть, как мы знаем, подструктурой структуры соответствий.

Легко показать, что структура конгруенций всякой алгебры является компактнопорожденной. Отметим теорему Грецера — Шмидта, по которой всякая компактнопорожденная полная структура изоморфна структуре конгруенций некоторой алгебры (Acta Sci. Math. (Szeged) **24** (1963), 34—59).

Конгруенции данной алгебры не всегда составляют подполугруппу полугруппы ее соответствий, так как произведение двух конгруенций может не быть конгруенцией. Докажем следующую теорему:

Произведение $\pi_1\pi_2$ двух конгруенций π_1 и π_2 алгебры G тогда и только тогда будет конгруенцией, если конгруенции π_1 и π_2 перестановочны, т. е. $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$.

Действительно, если $\pi_1\pi_2$ является конгруенцией, то, используя свойства конгруенций (1), а также (3) из предшествующего параграфа, получаем:

$$\pi_1\pi_2 = (\pi_1\pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1}\pi_1^{-1} = \pi_2\pi_1.$$

Обратно, если $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$, то соответствие $\pi_1\pi_2$ обладает всеми свойствами (1), входящими в определение конгруенции. Именно, ввиду (1) из § 17,

$$\pi_1\pi_2 \geqslant \pi_1\varepsilon \geqslant \varepsilon\varepsilon = \varepsilon;$$

далее, ввиду (3) из § 17,

$$(\pi_1\pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1}\pi_1^{-1} = \pi_2\pi_1 = \pi_1\pi_2;$$

наконец, снова ввиду (1) из § 17,

$$(\pi_1\pi_2)(\pi_1\pi_2) = (\pi_1\pi_1)(\pi_2\pi_2) \leqslant \pi_1\pi_2.$$

Для некоторых классов алгебр, в том числе для групп, колец и вообще мультиоператорных групп, может быть доказана перестановочность всех их конгруенций. Структуры конгруенций алгебр, обладающих этим свойством, являются дедекиндовыми. Можно доказать даже несколько больше.

Полная структура называется *вполне дедекиндовой*, если для любых ее элементов a_i, b_i, $i \in I$, удовлетворяющих условию $a_i \geqslant b_j$ при $i \neq j$, имеет место равенство

$$\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I} b_i\right) = \bigcup_{i\in I} (a_i \cap b_i). \tag{3}$$

Всякая вполне дедекиндова структура S является дедекиндовой.

В самом деле, пусть в S взяты элементы a, b, c, причем $a \geqslant b$. Положим

$$a_1 = a, \quad a_2 = a \cup c, \quad b_1 = c, \quad b_2 = b.$$

Тогда $a_1 \geqslant b_2$ по предположению и $a_2 \geqslant b_1$ по определению операции объединения. Поэтому должно выполняться равенство (3), т. е.

$$(a_1 \cap a_2) \cap (b_1 \cup b_2) = (a_1 \cap b_1) \cup (a_2 \cap b_2)$$

или

$$a \cap (c \cup b) = (a \cap c) \cup [(a \cup c) \cap b],$$

а так как $a \geqslant b$, то мы получаем равенство (2) из § 16. Дедекиндовость структуры S доказана.

Справедлива следующая теорема Двингера (Proc. Neder. Ac. 20 (1958), 70—76): Если в алгебре G конгруенции перестановочны, то структура конгруенций этой алгебры вполне дедекиндова.

Значение конгруенций для теории универсальных алгебр определяется, как известно, следующим.

Если π — конгруенция алгебры G сигнатуры Ω, то в множестве G/π непересекающихся классов, на которые разбивается G конгруенцией π, естественным образом определяются все операции из Ω. Полученная *фактор-алгебра* G/π оказывается эпиморфным образом алгебры G при естественном эпиморфизме, сопоставляющем каждому элементу из G тот класс конгруенции π, к которому этот элемент принадлежит. Обратно, любой эпиморфизм φ: $G \to G'$ определяет в алгебре G конгруенцию π, классами которой служат полные прообразы элементов алгебры G', причем существует такой изоморфизм ψ алгебры G' на фактор-алгебру G/π, что произведение $\varphi\psi$ совпадает с естественным эпиморфизмом G на G/π.

ЛИТЕРАТУРА *)

К § 5

Вагнер В. В.
Теория обобщенных груд и обобщенных групп, Матем. сб. **32** (74) (1953), 545—632. [53 : 3, 1089]
Обобщенные груды, приводимые к обобщенным группам, Укр. матем. ж. 8 (1956), 235—253. [57 : 5, 3819]
Представление обобщенных груд, Укр. матем. ж. **11** (1959), 231—242. [60 : 8, 8640]
Полугруппы, ассоциированные с обобщенной грудой, Матем. сб. 52 (1960), 597—628. [61 : 6, 257]
Обобщенные груды и обобщенные группы с транзитивным отношением совместимости, Уч. зап. Саратовск. ун-та **70** (1961), 25—39. [63 : 1, 225]
Обобщенные груды и канонически упорядоченные грудоиды, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1967, № 3, 8—19. [67 : 8, 122]
К теории антигруд, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1972, № 4, 18—31. [72 : 9, 147]

Глускин Л. М.
Полугруды с минимальными левыми идеалами, ДАН СССР **151** (1963), 485—488. [63 : 12, 225]
Представление полугруд, сб. «Памяти Н. Г. Чеботарева», Казань, 1964, 44—59. [65 : 4, 187]
Вполне простые полугруды, сб. «Теория полугрупп и ее приложения», Саратов **1** (1965), 179—197. [66 : 12, 260]
Идеалы полугруд, там же, 198—228. [66 : 12, 261]

Житомирский Г. И.
О решетке отношений конгруэнтности в обобщенной груде, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1965, № 1, 56—61. [65 : 6, 184]
О гомоморфизмах обобщенных груд, сб. «Теория полугрупп и ее приложения», Саратов, **1** (1965), 229—237. [66 : 12, 263]
О регулярных и стабильных отношениях на обобщенных грудах, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1968, № 1, 64—77. [68 : 6, 228]
Стабильные бинарные отношения на универсальных алгебрах, Матем. сб. 82 (1970), 163—174. [70 : 10, 218]
Многообразия обобщенных груд, сб. «Теория полугрупп и ее приложения», Саратов, **2** (1971), 27—35. [72 : 5, 156]
Обобщенные груды и обобщенные группы с модулярной решеткой отношений конгруэнтности, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1972, № 6, 26—35. [73 : 1, 186]

Инасаридзе Х. Н.
К теории обобщенных груд, Тр. Тбилисск. ун-та **102** (1964), 207—210. [65 : 4, 188]

*) В квадратных скобках даны номера рефератов в Реферативном журнале «Математика», раздел Алгебра.

М о л д а в с ь к а З. Я.
Лінійні півгруди, Доповіді АН УРСР, А, 1971, № 10, 888—890, 957. [72 : 2, 234]
Конгруенції на лінійних півгрудах, Доповіді Ан УРСР, А, 1972 № 7, 626—630, 670. [72 : 11, 117]

М у с т а ф а е в Л. Г.
Об идеальных эквивалентностях полугруд, ИАН АзССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1966, № 6, 30—35. [67 : 11, 186]
Связки полугруд, ИАН АзССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1967, №№ 3—4, 176—184. [68 : 6, 227]
Коммутативные связки полугруд, ИАН АзССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1968, № 3, 136—141. [69 : 4, 132]
Наиболее дробные полуструктурные разбиения полугруд, ДАН АзССР **27** (1971), 3—5. [72 : 2, 233]

М у с т а ф а е в Л. Г., Б а б а е в Э. А.
Коммутативные связки полугруд с сокращением, ИАН АзССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1971, №№ 5—6, 80—83 [72 : 9, 146]

Ф е й з у л л а е в Р. Б.
Биидеалы полугруд, ИАН АзССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1970, № 3, 43—51. [71 : 5, 188]
Идеалы полугруды гомоморфизмов графа, там же, 37—42. [71 : 6, 173]

Ш а й н Б. М.
Симметрические обобщенные груды, Научн. докл. высш. школы, физ.-матем. науки, 1959, № 1, 88—93. [61 : 1, 233]
Представление обобщенных груд, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1961, № 6, 142—154. [62 : 8, 164]
Инволютированные полугруппы полных бинарных отношений, ДАН СССР **156** (1964), 1300—1303. [64 : 11, 194]
Атомные полугруды и инволютированные полугруппы, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1965, № 3, 172—184. [65 : 11, 228]
К теории обобщенных групп и обобщенных груд, сб. «Теория полугрупп и ее приложения», Саратов, **1** (1965), 286—324. [66 : 12, 253]

Ш и м е л ь ф е н и г О. В.
Расширение обобщенных груд, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1966, № 5, 129—141. [67 : 2, 173]
К теории скрещенных полугруд, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1967, № 8, 100—105. [68 : 1, 190]
Классификация расширений обобщенных груд и обобщенных групп, Волжск. матем. сб. **7** (1969), 219—224. [69 : 12, 272]
К теории расширения обобщенных груд и обобщенных групп, там же, 215—218. [69 : 12, 271]

B e h a n z i n L.
Quelques considérations sur la théorie de demi-amas (d'après les travaux de V. V. Vagner), Semin. P. Dubreil, M. L. Dubreil-

Jacotin et C. Pisot, Fac. Sci. Paris 1960, 3/1—3/18. [61 : 8, 232]

D a l l a V. V.
Sulle quasischieri, Ann. mat. pura appl. **57** (1962), 187—201. [63 : 3, 213]

F o u l i s D. J.
Baer *-semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 648—654. [61 : 8, 234]
Relative inverses in Baer *-semigroups, Mich. Math. J. **10** (1963), 65—84. [64 : 1, 257]

H o s s z ú M.
Belouzov egy téoteléröl és annak néhány alkalmazásáról, Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl. 9 (1959), 51—56 [61 : 6, 257]
The explicit form of a class of heaps, Nehózipari müsz. egyet. közl. **23** (1964), 265—268. [65 : 6, 183]

S i o s o n F. M.
On ideals and subsemiheaps, Rev. roum. math. pur. appl. **11** (1966), 383—400. [67 : 2, 172]

К § 6

У ш а н Я.
Некоторые замечания о кликах и обобщение на n-арные полуклики, Матем. весн. **4** (1967), 307—315. [68 : 6, 241]
P-полуклики, Матем. весн. 5 (1968), 319—326. [69 : 4, 196]
Некоторые замечания о полукликах и определение AF-квазигрупп, Матем. весн. **6** (1969), 117—122. [70 : 3, 286]

Ш а й н Б. М.
Замечание к статье В. Зелмер, An. stiint. Univ. Iaşi, Sec 1a, **10** (1964), 265—268. [65 : 10, 207]

A u s t i n A. K.
A note on loops and laws, Quart. J. Math. **18** (1967), № 70, 119—123. [68 : 4, 199].

D e v i d é V.
Über eine Klasse von Gruppoiden. Glasnik mat.-fiz. i astron. **10** (1955), 265—286. [57 : 5, 3815].

F u r s t e n b e r g H.
The inverse operation in groups, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 991—997. [57 : 1, 151]

H á j e k P.
Die Szászchen Gruppoide, Mat.-fyz. časop. **15** (1965), 15—42. [65 : 12, 260]

H a s h i m o t o H.
Algebraic system with an operator, Math. japan **6** (1962), 59—64. [65 : 2, 304]

L i e b e c k H.
The structure of cliques, Math. Gaz. 51 (1967), N 375, 14—16. [67 : 9, 150]

M o l i n a r o I.
Demi-groups résidutifs, J. math. pur. appl. 39 (1960), 319—356. [61 : 10, 216]

N o r t o n D.
A note on associativity, Pacif. J. Math. 10 (1960), 591—595. [61 : 5, 242]

P a r r a c k C. A.
Cliques, Math. Gaz. 50 (1966), 43—46. [66 : 9, 229]

S c o t t B. T.
La forme générale les structures algébriques résiduées, C. r. Acad Sci. Paris 254 (1962), 2112—2114. [62 : 11, 180]

S z á s z G.
Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen, Acta scient. math. 15 (1953), 20—28. [54 : 4, 2895]

W a g n e r A.
On the associative law of groups, Rend. mat. e applic. 21 (1962), 60—76. [63 : 8, 182]

Z e l e n k o B.
Schwach assoziative Gruppoide, Glasnik mat.-fiz. i astron. 16 (1961), 3—73. [63 : 5, 236]
Axiomensysteme für A-Gruppen, Glasnik mat.-fiz. i astron. 20 (1965), 205—233. [68 : 4, 202]

Z e l m e r V.
Pseudogroups and pseudorings, Mathematica (RPR) 5 (1963), 137—172. [65 : 11, 229]
Pseudogrupuri, An. stiint. Univ. Iaşi 9 (1963), 323—356. [64 : 9, 195]

W h i t t a k e r J. V.
On the structure of half-groups, Canad. J. Math. 11 (1959), 651—659. [60 : 9, 10043]

К § 8

Б е л о у с о в В. Д.
Об одном классе n-арных луп, сб. «Математические исследования», Кишинев, 1, № 2 (1966), 130—139. [67 : 7, 226]
Позиционные алгебры с подстановками, сб. «Вопросы теории квазигрупп и луп», Кишинев 1970 (1971), 131—139. [71 : 7, 285]

Б е л о у с о в В. Д., С а н д и к М. Д.
n-арные квазигруппы и лупы, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 31—54. [66 : 8, 197]

В а к а р е л о в Д.
Тернарни групи, Годишник Софийск. ун-т, Матем. фак., 1966—1967, 61 (1968), 71—105. [69 : 4, 198]

Г л у с к и н Л. М.
О позиционных оперативах, ДАН СССР 157 (1964), 767—770. [64 : 12, 262]
Максимальные бииделы оператива, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1968, № 10, 30—41. [69 : 4, 133]
О позиционных оперативах, ДАН СССР 182 (1968), 1000—1003. [69 : 3, 152]
Позиционные оперативы, Матем. сб. 68 (1965), 444—482. [69 : 10, 156]
О простых оперативах, Вестн. Харьковск. ун-та 53 (1970), 38—51. [70 : 10, 217]
Минимальные идеалы оператива, Матем. зап. Уральск. ун-та 7 (1970), 56—60. [71 : 5, 357]
Об оперативах Риса, сб. «Математические исследования», Кишинев, 5, № 4 (1970), 35—44. [71 : 5, 355]
К теореме Сушкевича — Риса, I, Вестн. Харьковск. ун-та, Матем. и мех. 35 (1971), 3—22. [72 : 1, 287]
К теореме Сушкевича — Риса, II, Вестн. Харьковск. ун-та, Матем. и мех. 36 (1971), 14—36. [72 : 1, 288]
Оперативы с минимальными левыми идеалами, сб. «Теория полугрупп и ее приложения», Саратов, 2 (1971), 14—26. [72 : 5, 155]

Г л у с к и н Л. М., Ш в а р ц В. Я.
К теории ассоциативов, Матем. заметки 11 (1972), 545—554. [72 : 8, 401]

М а д е в с к и Ж.
n-асоцијативи кај кои некој лев идеал е n-группа, Годишен. зб. *Природно-матем. фак. Ун-т Скопје* 17—18 (1966—1967), 5—10. [70 : 7, 177]

С а н д и к М. Д.
О единицах в n-лупах, сб. «Исследования по алгебре и математическому анализу», Кишинев, 1965, 140—146. [65 : 12, 333]
Вполне приводимые n-квазигруппы, ИАН МолдССР, сер. физ.-техн. и матем. наук 7 (1965), 55—67. [66 : 5, 282]
О единственности представления n-квазигрупп, сб. «Исследования по общей алгебре», Кишинев, 1965, 123—135. [66 : 4, 210]
Гомоморфизмы n-луп, сб. «Математические исследования», Кишинев, 2, № 1 (1967), 83—100. [67 : 11, 216]
О дистрибутивности в n-квазигруппах, сб. «Математические исследования», Кишинев, 3, № 2 (1968), 161—169. [69 : 4, 199]
Действие n-квазигруппы на множестве, сб. «Вопросы теории квазигрупп и луп», Кишинев, 1970 (1971), 110—115. [71 : 7, 283]

С а н д и к М. Д., С о к о л о в Е. И.
Тотально-симметричные n-квазигруппы, сб. «Математические исследования», Кишинев, 3, № 2 (1968), 170—182. [69 : 4, 200]
Матрицы обращения и тотально симметричные n-квазигруппы, сб. «Вопросы теории квазигрупп и луп», Кишинев, 1970 (1971), 115—122. [71 : 7, 284]

С л і п е н к о А. К.
Позиційні оперативи відображень, Доповіді АН УРСР, А., 1969, № 2, 143—147. [69 : 9, 205]
Ідеали симетричних оперативів, Доповіді АН УРСР, А., 1969, № 12, 1093—1096. [70: 4, 311]
Зображення оперативів, Доповіді АН УРСР, А., 1970, № 3, 226—230, 285. [70 : 9, 135]

С л и п е н к о А. К., Ф е й з у л л а е в Р. Б.
Об идеальных эквивалентностях оперативов, ИАН АзССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1969, № 3, 77—82. [70 : 4, 210]

С о к о л о в Е. И.
Некоторые свойства n-оперативов, Уч. зап. Кишиневск. ун-та 91 (1967), 15—29. [69 : 3, 198]
Гомоморфизмы n-квазигрупп, сб. «Исследования по общей алгебре», Кишинев, 1 (1968), 54—70. [70 : 9, 190]
О приводимости (i, j)-ассоциативных n-квазигрупп, ИАН МолдССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1969, № 3, 10—18. [71 : 2, 212]

С о к о л о в Е. И., Б е л н о г л о А. И.
О свойствах коммутативности m-ассоциативных n-квазигрупп, сб. «Вопросы теории квазигрупп и луп», Кишинев, 1970 (1971), 139—145. [71 : 8, 206]

Т о д о р и к о в С., К о с т о в а М.
Един аналог на теорема на Хьолдер при тернарна наредба, Научни тр. Висш. ин-т хранит. и вкус. пром-ст. Пловдив, 12 (1965), 353—356. [66 : 9, 172]

Т р п е н о в с к и Б. Л.
Делумно ассоцијативни n-групоиди со неутрални елементи. Билтен Друшт. матем. и физ. СРМ 14 (1963), 5—16. [66 : 3, 261]
За n-групоидите со централни неутрални елементи, там же 31—39. [66 : 3, 262]
n-полугрупи што можат да ее пополнат со неутрални елементи, Билтен Друшт. матем. и физ. СРМ 15 (1964), 23—26. [66 : 6, 178]
За некои n-полугрупи што се унии од n-групи, Билтен Друшт. матем. и физ. СРМ 16 (1965), 11—17. [67 : 1, 148]
Антикомутативни n-групоиди, Годишен зб. Електро-маш. фак. Ун-т Скопје 1 (1967), 33—35. [69 : 12, 278]

Т р п е н о в с к и Б., Ч у п о н а Г.
Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи, Билтен Друшт. матем. и физ. НРМ 12 (1961), 15—24. [64 : 8, 271]

У ш а н Я.
Одно определение группы и его обобщение на n-арный случай, Матем. вестн. 5 (1968), 145—149. [69 : 3, 197]
Обобщение теоремы В. Д. Белоусова о четырех квазигруппах на тернарный случай, Билтен Друшт. матем. и физ. СРМ **20** (1969), 13—17. [71 : 12, 298]
Ассоциативные в целом системы тернарных квазигрупп, Math. balkan. **1** (1971), 273—281. [72 : 3, 217]

Ч у п о н а Г.
За тернарните асоцијативни операции, Билтен. Друшт. матем. и физ. НРМ **9** (1958), 5—10. [61 : 2, 158]
За n-арните подполугрупи, Билтен. Друшт. матем. и физ. НРМ **12** (1961), 5—13. [65 : 1, 216]
Полугрупи генерирани од асоцијативи, Годишен зб. Природно-матем. фак. Ун-т Скопје **15** (1964), 5—25. [67 : 6, 143]

Ш в а р ц В. Я.
Об одном классе позиционных оперативов, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1969, № 6, 98—105. [69 : 11, 125]

A l l e n D. J.
Abstract algebras with a single operation and group-like axioms, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 186—188. [67 : 11, 269]

B e l o u s o v V. D., H o s s z ú M.
Some problems on ternary quasigroups, Матем. весн. **1** (1964), 319—324. [66 : 6, 182]

B o c c i o n i D.
Simmetrizzazione di una operazione n-aria, Rend. Semin. mat. Univ. Padova **35** (1965), 82—106. [66 : 4, 213]

C l i m e s c u Al.
Independenta conditiilor de asociativitate, Bul. Inst. Politehn. Iași **1** (1955), 1—9. [59 : 6; 5632]

C r o m b e z G.
On partially ordered n-groups, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg **38** (1972), 141—146. [73 : 2, 297]

G h i k a A.
Structuri algebrice ternare, Comun. Acad. RPR **8** (1958), 257—261. [60 : 4, 3842]

G l e i c h g e w i c h t B., G l a z e k K.
Remarks on n-groups as abstract algebras, Colloq. math. **17** (1967), 209—219. [69 : 1, 328]

H o e h n k e H. J.
Über Verallgemeinerungen des Scharbegriffs, Math. Nachr. **38** (1968), 365—382. [69 : 5, 179]

H o s s z ú M.
On the explicit form of n-group operations, Publs math. **10** (1963), 88—92. [65 : 1, 217]

Loos O.
Assoziative tripelsysteme, Manuscr. math. **7** (1972), 103—112. [72 : 12, 292]

Monk D., Sioson F. M.
m-semigroups, semigroups und function representations, Fundam. math. **59** (1966), 233—241. [67 : 10, 140]

Radó F., Hosszú M.
Über eine Klasse von ternären Quasigruppen, Acta math. Acad. scient. hung. **15** (1964), 29—36. [65 : 1, 215]

Robinson D. W.
n-groups with identity elements, Math. Mag. **31** (1958), 255—258. [59 : 3, 2388]

Rosenberg J.
The application of ternary semigroups to the study of n-valued Sheffer functions, Notre Dame J. Form. Logic **10** (1969), 90—96. [70 : 2, 151]

Sioson F. M.
On regular algebraic systems, A note on notes by Iseki, Kovacs, and Lajos, Proc. Japan Acad. **39** (1963), 283—286. [64 : 1, 318]
Cyclic and homogenous m-semigroups, там же, 444—449. [64 : 9, 191]
Generalisation d'un théorème d'Hopkins — Brauer, C. r. Acad. sci. Paris **257** (1963), 1890—1892. [64 : 5, 201]
Remarques au sujet d'une note antérieure, там же, 3106. [64 : 7, 296]
Ideals in $(m+1)$-semigroups, Ann. mat. pura ed appl. **68** (1965), 161—200. [66 : 4, 211]
On free abelian m-groups, I, Proc. Japan Acad. **43** (1967), 876—879. [68 : 11, 197]
On free abelian m-groups, II, там же, 880—883. [68 : 11, 198]
On free abelian m-groups, III, там же, 884—888. [68 : 11, 199]

Szász C.
Asupra axiomelor care stau la baza definitiei unui n-grup, Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Braşov, Fac. mec. **7** (1965), 43—47. [66 : 12, 258]

Thurston H. A.
Some properties of partly associative operations, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 487—497. [57 : 1, 211]

Timm J.
Verbandstheoretische Behandlung n-stelliger Gruppen, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg **37** (1972), 218—224. [73 : 1, 302]

Tvermoes H.
Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, Math. scand. **1** (1953), 18—30. [54 : 2, 2019]

Zupnik D.
Polyadic semigroups, Publs math. **14** (1967), 273—279. [68 : 8, 181]

К § 10

З а р е ц к и й К. А.
Абстрактная характеристика биполугруппы бинарных отношений, Матем. заметки 1 (1967), 525—530. [68 : 1, 192]

Р о з е н В. В.
О рестриктивных биполугруппах, ассоциированных с обобщенными грудами, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1966, № 6, 144—151. [67 : 5, 170]

Ч у п о н а Г.
За некои релации мечу бинарните операции, Билтен Друшт. матем. и физ. НРМ 10 (1959), 5—27. [62 : 2, 250]
За квазипрстените, Билтен Друшт. мат. и физ. СРМ 20 [1969], 19—22. [71 : 11, 311]

Ш а й н Б. М.
Рестриктивные биполугруппы, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1965, № 1, 168—179. [65 : 6, 182]
Рестриктивные биполугруппы отображений, Изв. высш. учебн. заведений, Математика. 1967, № 1, 115—121. [67 : 10, 137]
Рестриктивные биполугруппы квазиоднозначных бинарных отношений, I, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1969, № 5, 73—84. [69 : 10, 89]
Involuted restrictive bisemigroups of binary relations, Matemat. časop. 19 (1969), 307—315. [70 : 5, 156]

B a r t o l e z z i F.
Su una classe di quasi corpi (sinistri) finite, Rend. mat. e applic. 24 (1965), 165—173. [66 : 9, 199]

B e a m o n t R. A.
Generalized rings, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 876—881. [60 : 7, 7318]

B o c c i o n i D.
Indipendenza delle condizioni di distributivitá, Rend. Seminar mat. Univ. Padova 28 (1958), 1—30. [59 : 7, 6686]
Indipendenza delle condizioni di mutua distributivitá, там же, 40—49. [59 : 7, 6687]
Dipendenza delle condizioni di mutua distributivitá nei bisistemi di ordine 3, там же, 50—67. [59 : 7, 6688]
Condizioni di distributivitá ed associativitá unilaterali, Rend. Seminar. mat. Univ. Padova 30 (1960), 178—193. [62 : 6, 219]
Condizioni di distributivitá con almeno una operazione commutativa, Rend. Seminar. mat. Univ. Padova 31 (1961), 87—103. [63 : 2, 221]
Indipendenza delle condizioni di doppia e di tripla distributivitá, Rend. Seminar. mat. Univ. Padova 33 (1963), 33—47. [64 : 9, 258]
Condizioni indipendenti ed equivalenti a quelle di mutua distributività, там же, 91—98. [64 : 9, 260]

C l i m e s c u A.
Anneaux faibles, Bull. Inst. politehn. Iaşi **7** (1961), 1—6. [62 : 12, 184]
A nouă clasă de inele slabe, Bul. Inst. Politehn. Iaşi **10** (1964), 1—4. [66 : 8, 287]

C h o u d h u r y A. C.
Quasigroups and nonassociative systems, I, II, III, Bull. Calcutta Math. Soc. **40** (1948), 183; **41** (1949), 221; **49** (1957), 9—24. [59 : 3, 2389]

C o u r t L. M.
The impossibility of rings with dual distributive laws, Riv. mat. Univ. Parma **6** (1965), 31—36. [68 : 3, 279]

E l l e r s E., K a r z e l H.
Endliche Inzidenzgruppen, Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg **27** (1964), 250—264. [65 : 4, 239]

F e r r e r o G.
Due generalizzazioni del concetto di anello e loro equivalenza nell'ambito degli «stems» finiti, Riv. mat. Univ. Parma **7** (1966), 145—150. [69 : 1, 295]
Struttura degli «stems» p-singolari, там же, 243—254. [69 : 1, 294]

H a r r i s B.
Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution, Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961), 148—162. [62 : 5, 256]

H s i a n g Wuchung, H s i a n g Wuyi
A note on the theory of (m, n)-distributive rings, Arch. Math. **11** (1960), 88—90. [61 : 6, 301]

H s i a n g Wuyi
On the distributive law, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 348—355. [61 : 3, 256]

J o r d a n P., R ü h a a k H.
Neue Beiträge zur Theorie der Lie-Tripel Algebren, und der Osborn-Algebren, Abh. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Literatur **1** (1969), 1—13.

K e l l a h e r M. J.
Right Bol quasifields, Canad. J. Math. **21** (1969), 1409—1420. [70 : 12, 241]

L o m b a r d o - R a d i c e L.
Quelques résultats nouveaux et quelques problèmes ouverts dans la théorie des quasicorps, Semin. P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, Fac. Sci. Paris **2** (1958), 20/1—20/10. [60 : 1, 180]
Anneaux ternaires et corps généralisés lies aux geometries non-arguésiennes, Algebraic and Topologic Foundations of Geometry, 1962, 123—130. [63 : 1, 276]

Luchian T.
Asupra algebrelor slabe de ordin 3, cu diviziune, An. ştiinţ. Univ. Iaşi 10 (1964), 29—42. [66 : 1, 371]
Observaţii asupra inelelor slabe, An. ştiinţ. Univ. Iasi, Sec. 1a, 11 (1965), 99—111. [67 : 7, 236]
Homomorphisme în inele slabe, An. ştiinţ. Univ. Iasi, Sec. Ia, 13 (1967), 17—28. [68 : 8, 253]
Asupra noţiunii de domeniu de integritate în inele slabe, там же, 257—262. [68 : 11, 230]
Weak ring extensions, An. ştiinţ, Univ. Iaşi, Sec. Ia, 18 (1972), 13—18. [73 : 1, 304]

Melter R. A.
A geometrical property of Boolean quaternions, Simon Stevin 37 (1963), 35—37. [64 : 9, 259]

Menichetti G.
Quasicorpi, di dimensione 2 sopra um campo K, associati a transformazioni quadratiche nel piano affine $\mathfrak{A}(K)$, Matematiche 25 (1970—1971), 117—148. [72 : 1, 494]

Menon P. K.
A class of quasi-fields having isomorphic additive and multiplicative groups, J. Indian Math. Soc. 27 (1963), 71—90. [65 : 2, 369]

Narayana R. M. L., Wilke F. M.
A necessary condition that two finite quasi-fields coordinatize isomorphic translation planes, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 124—125. [71 : 8, 263]

Natarajan N. S.
Rings with generalised distributive laws, J. Ind. Math. Soc. 28 (1964), 1—6. [66 : 3, 248]

Osborn J. M.
Lie triple algebras with one generator, Math. Z. 110 (1969), 52—74. [70 : 1, 242]

Petersson H. P.
Über den Wedderburnschen Struktursatz für Lie-Tripel-Algebren, Math. Z. 98 (1967), 104—118. [68 : 6, 312]

Plaumann P., Strambach K.
Zusammenhängende Quasikörper mit Zentrum, Arch. Math. 21 (1970), 455—465. [71 : 8, 250]

Rodriguez G.
Sui quasicorpi distributivi finiti, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. 26 (1959). 458—465. [60 : 9, 10087]

Sagle A. A.
On anti-commutative algebras and general Lie triple systems, Pacif. J. Math. 15 (1965), 281—291. [66 : 5, 240]

S a i t o T.
Note on the distributive laws, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 280—283. [60 : 6, 6252]
On (m, n)-distributive division rings, Proc. Japan Acad. 37 (1961), 69—71. [62 : 3, 240]
Note on the distributive laws (Supplement), Amer. Math. Monthly 68 (1961), 649—650. [62 : 11, 213]

S o b o c i n s k i B.
A new formalization of Newman algebra, Notre Dame J. Form. Logic 13 (1972), 255—264. [72 : 10, 214]
An equational axiomatization of associate Newman algebras, там же, 265—269. [72 : 10, 215]

T h i e r r i n G.
On duo rings, Canad. Math. Bull. 3 (1960), 167—172. [61 : 9, 291]

Y a m a g u t i K.
On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems), J. Sci. Hiroshima Univ. A21 (1957), 107—113. [60 : 5, 4982]

К § 12

Б а р а н о в и ч Т. М.
О некоторых теоремах в теории мультиоператорных алгебр, Сиб. матем. ж. 13 (1972), 6—16. [72 : 5, 319]

Г е ч е г Ф.
О некоторых классах полумодулей и модулей, Acta scient. math. 24 (1963), 165—172. [64 : 7, 308]

Р е б а н е Ю. К.
О представлении универсальных алгебр в коммутативных полугруппах, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 878—885. [67 : 10, 223]
О представлении универсальных алгебр в полугруппах с двусторонним сокращением и в коммутативных полугруппах с сокращением, ИАН ЭстССР, сер. физ., матем. 17 (1968), 375—378. [69 : 6, 250]
Представление мультиоператорных колец в ассоциативных кольцах, УМН 24 (1969), 43—46. [69 : 9, 204]
О представлении универсальных алгебр в нильпотентных полугруппах, Сиб. матем. ж. 10 (1969), 945—949. [70 : 2, 290]

Ф р е н к и н Б. Р.
О приводимости и сводимости в некоторых классах n-группоидов, сб. «Математические исследования», Кишинев, 6, № 2, (1971), 122—137. [72 : 2, 235]
О приводимости и сводимости в некоторых классах n-группоидов, II, сб. «Математические исследования», Кишинев, 7, № 1, (1972), 150—162. [72 : 6, 323]

Ч а к а н ь Б.
Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем, Acta scient. math. 23 (1962), 46—57. [63 : 4, 225]

Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полумодулей и модулей, Acta scient. math. **24** (1963), 157—164. [64 : 7, 307]

Climescu A.
Une définition unitaire des algèbres a operations finitaires, Bul. Inst. politehn. Iaşi 60 (1960), 1—4. [62 : 5, 220]

Neumann B. H., Wiegold E. C.
A semigroup representation of varieties of algebras, Colloq. math. 14 (1964), 111—114. [66 : 8, 189]

Radojčič M. D.
On the embedding of universal algebras in groupoids holding the law $xy * zu ** = xz * yu **$, Матем. вестн. 5 (1968), 353—356. [69 : 5, 258]

К § 13

Андрунакиевич В. А., Марин В. Г.
Мультиоператорные линейные алгебры без нильпотентных элементов, ДАН СССР **197** (1971), 746 — 749. [71 : 8, 266]
Мультиоператорные линейные алгебры без нильпотентных элементов, сб. «Математические исследования», Кишинев, 1971, 3—21. [71 : 11, 328]

Артамонов В. А.
Клоны полилинейных операций и мультиоператорные алгебры, УМН **24** (1969), 47—59. [69 : 9, 206]
Полупростые многообразия мультиоператорных алгебр, I, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1971, № 11, 3—10. [72 : 3, 272]
Полупростые многообразия мультиоператорных алгебр, II, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1971, № 12, 15—21. [72 : 6, 334]

Бургин М. С.
Теорема о свободе в некоторых многообразиях линейных Ω-алгебр и Ω-колец, УМН **24** (1969), 27 — 38. [69 : 9, 207]
Линейные Ω-алгебры над коммутативными кольцами и достижимые многообразия, Вестн. Московск. ун-та, матем., мех., 1972, № 2, 56—63. [72 : 7, 266]
Свободные факторалгебры свободных линейных Ω-алгебр, Матем. заметки **11** (1972), 537—544. [72 : 8, 398]
Линейные Ω-алгебры и теорема о свободе, Вестн. Моск. ун-та, матем., мех., 1972, № 5, 72—77. [73 : 2, 291]
Шрейеровы многообразия линейных алгебр, УМН **27** (1972), 227—228. [73 : 2, 295]

Бургин М. С., Артамонов В. А.
Некоторые свойства подалгебр в многообразиях линейных Ω-алгебр, Матем. сб. **87** (1972), 67—82. [72 : 5, 318]

Г а б о в и ч Е. Я.
Об архимедовски упорядоченных Ω-группах, Уч. зап. Тартуск. ун-та **129** (1962), 19—22. [64 : 3, 240]

Г е ч е г Ф.
Шрейерово расширение мультиоператорных групп, Acta scient. math. **23** (1962), 58—63. [63 : 3, 255]

Д и д и д з е Ц. Е.
Свободные суммы Ω-алгебр с объединенной Ω-подалгеброй, Сообщ. АН ГрузССР **50** (1968), 531—534. [69 : 2, 388]

И в а н о в И. С.
Свободные *T*-суммы мультиоператорных тел, Тр. Московск. матем. о-ва **17** (1967), 3—44. [69 : 1, 327]

К и з н е р Ф. И.
Две теоремы о тождествах в мультиоператорных алгебрах, УМН **24** (1969), 39—42. [69 : 7, 267]

К у з ь м и н Е. Н.
Тернарные тела, Алгебра и логика (семинар) **6**, № 1 (1967), 69—81. [68 : 8, 281]

К у р о ш А. Г.
Свободные суммы мультиоператорных алгебр, Сиб. матем. ж. **1** (1960), 62—70. [61 : 4, 216]
Свободные суммы мультиоператорных групп, Acta scient. math. **21** (1960), 187—196. [61 : 4, 218]
Мультиоператорные кольца и алгебры, УМН **24** (1969), 3—15. [69 : 9, 203]
Свободные суммы мультиоператорных линейных почти алгебр, сб. «Математические исследования», Кишинев, **6** (1971), 83—87. [71 : 8, 264]
Свободные разложения в некоторых многообразиях мультиоператорных групп, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1971, № 3, 50—54. [71 : 11, 333]

Л и ш а к М. Г.
Ω-группы с идеализаторным условием, ИАН КазССР, сер. физ.-матем. н., 1964, № 2, 63—68. [65 : 3, 360]
Метабелевы и слабо метабелевы Ω-группы, Идеализаторное условие, Вестник АН КазССР **10** (1964), 75—79. [65 : 4, 246]
О периодической части абелевой Ω-группы. Тр. I Казахстанск. межвуз. научн. конф. по матем. и механ., 1963, Алма-Ата, «Наука», 1965. 140—146. [68 : 2, 232]

Л ю Ш а о - с ю э
О прямых слагаемых в группах с мультиоператорами, Scientia sinica **13** (1964), 1735—1745. [65 : 8, 262]

М о л л о в Т. Ж.
Векторни дистрибутивни мултиоператорни групи, Научни тр. Висш. пед. ин-та, Пловдив, 5, № 2 (1967), 13—20. [69 : 4, 271]

Структурно наредени мультиоператорни групи, Научни тр. Висш. пед. ин-т, Пловдив, 6, № 1 (1968), 19—25. [69 : 10, 154]

П о л и н С. В.
Подалгебры свободных алгебр некоторых многообразий мультиоператорных алгебр, УМН 24 (1969), 17—26. [69 : 7, 266]

Р а д н е в П.
Върху един клас структурно наредени мультиоператорни групи, Научни тр. Висш. пед. ин-т, Пловдив, 8 (1970), 35—38. [71 : 6, 349]

Р я б у х и н Ю. М.
О некоторых многообразиях универсальных алгебр. ИАН МолдССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1967, № 8, 25—53. [68 : 7, 333]
К теории нижнего ниль-радикала колец, Алгебра и логика (семинар) 6, № 4 (1967), 83—92. [69 : 1, 310]
Радикалы в Ω-группах; I: Общая теория, Сб. «Математические исследования», Кишинев, 3, № 2 (1968), 123—160. [69 : 4, 270]
Радикалы в Ω-группах, II: Идеально наследственные радикалы, Сб. «Математические исследования», Кишинев, 3, № 4 (1968—1969), 108—135. [69 : 9, 210]
Радикалы в Ω-группах, III: Специальные и квазиспециальные радикалы, Сб. «Математические исследования», Кишинев, 4, № 1 (1969), 110—131. [69 : 11, 283]

С м и р н о в Д. М.
О приведенно свободных мультиоператорных группах, ДАН СССР 150 (1963), 44—47. [63 : 12, 302]
Упорядоченные мультиоператорные группы, Сиб. матем. ж. 6 (1965), 433—458. [65 : 10, 286]

С м и р н о в Д. М., Т а й ц л и н М. А.
О финитно аппроксимируемых абелевых мультиоператорных группах, УМН 17 (1962), 137—142. [63 : 7, 204]

С о к о л о в с к а я Т. В.
Мультиоператорные группы как универсальные алгебры с единственной операцией, подчиненной единственному тождеству, Сиб. матем. ж. 8 (1967), 853—858. [68 : 5, 353]

Т а й ц л и н М. А.
О финитной аппроксимируемости Ω-групп, Сиб. матем. ж. 3 (1962), 95—102. [62 : 9, 165]

Ч е р е м и с и н А. И.
Дистрибутивные FΩ-группы с конечным числом носителей. Сиб. матем. ж. 9 (1968), 177—187 [68 : 9, 255]

Ч у п о н а Г.
За [m, n]-протепите, Билтен Друшт. матем. и физ. СРМ 16 (1965), 5—10. [67 : 1, 226]

Barnes W. E.
On the Γ-rings of Nobusawa, Pacif. J. Math. 18 (1966), 411—422. [68 : 3, 257]

Berman G., Silverman R. J.
Embedding of algebraic systems, Pacif. J. Math. 10 (1960), 777—786. [62 : 7, 236]

Boccioni D.
P-gruppoide dei quozienti di un gruppoide con operatori, Rend. Semin. mat. Univ. Padova 25 (1956), 176—195. [57 : 5, 3814]
Q-pseudagruppi complementarizzabili, Rend. Semin. mat. Univ. Padova 26 (1956), 85—123. [57 : 11, 8468]
A-modulo supplementare di un *S*-semigruppo commutativo, Rend. Semin. mat. Univ. Padova 27 (1957), 48—59. [58 : 8, 6513]

Crawly P., Jonsson B.
Direct decompositions of algebraic systems, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 541—547. [64 : 7, 295]

Crombez G.
On (n, m)-rings, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg 37 (1972), 180—199. [73 : 1, 296]

Crombez G., Timm G., Timm J.
On (n, m)-quotient rings, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg 37 (1972), 200—203. [73 : 1, 297]

Dantoni G.
Ω-gruppi distributivi a sottogruppi additivi tutti ideali, Matematiche 23 (1968), 449—466. [69 : 12, 343]

Grillet P. A.
Homomorphismes principaux de tas e de groupoides, Bull. Soc. math. France 93 (1965), 1—167. [66 : 12, 262]

Hamisch W.
Topologie in der Algebra, Math. Z. 60 (1954), 458—487. [56 : 11, 7923]

Higgins P. J.
Groups with multiple operators, Proc. London Math. Soc. 6 (1956), 366—416. [57 : 4, 2951]

Javier E. J.
Homomorfismos de estructuras con operadores, 6 Reun. anual mat. esp., Sevilla, 1967, 133—141. [68 : 5,356]

Koskas M.
Theorie des hypertas, Applications à la théorie des demi-groupes, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. 40 (1966), 35—39. [67 : 2, 174]
Hypertas, demi-groupes et demi-hypergroupes, C. r. Acad. sci. 263 (1966), A153—A155. [67 : 2, 175]
Bi-hypertas, demi-groupes, demi-hypergroupes, там же, A197—A199. [67 : 2, 176]

Les hypertas, Sémin. Dubreil et Pisot, Fac. Sci. Paris 16, 1962—1963, N 1 (1967), 10/01—10/42. [68 : 5, 234]
Application de la théorie des hypertas aux demi-groupes, Sémin. Dubreil et Pisot, Fac. Sci. Paris 17, 1963—1964, № 1 (1967), 3/01—3/22. [68 : 5, 236]
Applications de la théorie des hypertas, II, Sémin. Dubreil et Pisot, Fac. Sci. Paris 18, 1964—1965, № 1 (1967), 5/01—5/10. [68 : 5, 235]

Kreimer H. F.
The foundations for an extension of differential algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 482—492. [66 : 2, 300]

Lausch H.
Functions on groups with multiple operators, J. London Math. Soc. 42 (1967), 698—700. [69 : 3, 196]

Luh J.
On primitive Γ-rings with minimal one-sided ideals, Osaka J. Math. 5 (1968), 165—173. [69 : 11, 214]
On the theory of simple Γ-rings, Mich. Math. J. 16 (1969), 65—75. [70 : 1, 264]

Murata K.
On nilpotent-free multiplicative systems, Osaka Math. J. 14 (1962), 53—70. [63 : 5, 307]

Nobauer W.
Transformation von Teilalgebren und Kongruenzrelationen in allgemeinen Algebren, J. reine und angew. Math., 1964, 214—215, 412—418. [65 : 3, 361]

Nobusawa N.
On a generalization of the ring theory, Osaka J. Math. 1 (1964), 81—89. [65 : 10, 266]

Osborn J. M.
Vector loops, Ill. J. Math. 5 (1961), 565—584. [63 : 2, 224]

Rokos P.
Generalisation of theorems in «General algebra», Bull. Soc. Math. Grece 28 (1954), 167—187. [56 : 5, 3712]
Algebre-anneaux, Prakt. Akad. Athēnōn 32 (1957), 308—318. [63 : 3, 257]

Sedláček L.
Grupoidy a grupy s operátory, Acta Univ. palack. olomuc. 7 (1961—1962), 33—36. [64 : 8, 207]

Sklar A.
Canonical decompositions, stable functions and fractional iterates, Acquat. math. 3 (1969), 118—129. [70 : 6, 269]

Szilágyi M.
On ordered Ω-groups, Rev. roum. math. pures et appl. 17 (1972), 1439—1450. [73 : 3, 325]

Tamura T., Burnell D. G.
A note on the extension of semigroups with operators, Proc. Japan Acad. 38 (1962), 495—498. [63 : 9, 190]
Extension of groupoids with operators, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 385—391. [65 : 4, 183]

Virág I.
Systèmes réguliers de Ω-sous-groupes d'un Ω-groupe, I, Stud. Univ. Bades-Bolyai, Ser. math.-mech. 15 (1970), 3—7. [71 : 9, 267]

Wuytack F., Depunt J.
«Rings» and «Linear algebras» over *I*-collections of modules, Bull. Soc. math. Belg. 20 (1968), 36—65. [69 : 8, 231]

К § 14

Алиев И. Ш.
О наименьшем многообразии симметрических алгебр, Алгебра и логика (семинар) 5, № 6 (1966), 5—14. [67 : 8, 198]

Чакань Б.
Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр, Acta scient. math. 25 (1964), 202—208. [66 : 3, 264]

Evans T.
A condition for a group to be commutative, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 898—899. [62 : 6, 184]
Endomorphisms of abstract algebras, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A66 (1961—1962), 54—64. [63 : 6, 262]

К § 15

Белоусов В. Д.
К определению понятия квазитела, ИАН Молд. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1964, № 6, 3—10. [65 : 8, 230]

Гринглаз Л. Я.
О локально нильпотентных квазикольцах, Матем. зап. Уральск. ун-та 5 (1965), 35—42. [66 : 5, 261]

Данилов Р. А.
Композиционная алгебра целых функций, Сб. статей по матем. Челябинск. гос. пед. ин-т, вып. 1, ч. 2 (1966), 102—110. [68 : 6, 314]

Лесохин М. М.
О полугруппе мультипликаций коммутативной регулярной полугруппы, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1964, № 3, 84—87. [65 : 2, 308]

Либер С. А.
Упорядоченные *n*-кольцоиды над мультиоператорными группами, сб. «Математические исследования», Кишинев, 7, № 1 (1972), 83—97. [72 : 6, 324]

М и р о н о в А. В.
К теории модулей над полуполями, Тр. Ташкент. политехн. ин-та 56 (1970), 45—52. [71 : 6, 310]

П л о т к и н Б. И.
Ω-полугруппы, Ω-кольца и представления, ДАН СССР **149** (1963), 1037—1040. [63 : 10, 244]

П о л и н С. В.
Примитивные $m\Omega$-почти кольца над мультиоператорными группами, Матем. сб. 84 (1971), 254—272. [71 : 6, 300]
Радикалы в $m\Omega$-почти кольцах, I, II, Изв. высш. учеб. заведений, Математика, 1972, № 1, 64—75; № 2, 63—71. [72 : 5, 320], [72 : 8, 393]

П о н о м а р е в В. Т.
Исследование применимости способа А. Н Колмогорова для расширения упорядоченных полуколец и частично упорядоченных колец, сб. «Математические исследования», Свердловск, 1961, 3—52. [62 : 3, 248]

Р е д и Э.
Представление систем Менгера многоместными эндоморфизмами, Уч. зап. Тартуск. ун-та **277** (1971), 47—51. [72 : 5, 317]

С а л и й В. Н.
К теории инверсных полуколец, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1969, № 3, 52—60. [69 : 9, 190]

Ф р е й д м а н П. А.
О дистрибутивно разрешимых почти кольцах, Тр. Рижск. алгебраич. семинара, Рига, 1969, 297—309. [70 : 4, 301]

Х е н н о Я.
Эквивалентности Грина в системах Менгера, Уч. зап. Тартуск. ун-та **277** (1971), 37—46. [72 : 5, 158]
Групповые системы Менгера, Тр. Таллин. политехн. ин-та, А, **312** (1971), 95—110. [72 : 8, 234]
Плотно вложенные правые идеалы систем Менгера, Изв. АН ЭстССР, физ., матем. **21** (1972), 131—141. [72 : 9, 261]
Плотные вложения в системах Менгера, там же, 231—238. [73 : 2, 170]

Х и о н Я. В.
Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления, Тр. Моск. матем. о-ва **14** (1965), 3—47. [66 : 12, 339]
Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления, Уч. зап. Тартуск. ун-та **192** (1966), 3—11. [68 : 12, 254]
n-арные Ω-кольцоиды, Сиб. матем. ж. 8 (1967), 174—194. [68 : 4, 252]

Ш н е п е р м а н Л. В.
Полугруппы непрерывных преобразований замкнутых множеств числовой прямой, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1965, № 6, 166—175. [67 : 7, 247]

Я р о к е р Я. Н.
Ціликом прості менгеровські оперативи. Доповіді АН УРСР, А. 1972, § 1, 34—37. [72 : 6, 178]

A d l e r I.
Composition rings, Duke Math. J. 29 (1962), 607—623. [63 : 12, 254]

A l m e i d a C. A.
Sur la théorie générale des demi-anneaux, I, II, Sémin P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, Fac. Sci. Paris, 1960—1961, 14 année, fasc. 2, 1963, 24/01-24/17, 25/01—25/12. [64 : 9, 244—245]
Sur les idéaux nucléaires d'un demi-anneau, Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa 11 (1965—1966), 277—293. [69 : 1, 296]

A n d r é J.
Über eine Beziehung zwischen Zentrum und Kern endlicher Fastkörper, Arch. Math. 14 (1963), 145—146. [63:10, 244]
Über invollständige Fastkörper und verallgemeinerte affine Räume, Math. Z. 119 (1971), 254—266. [71 : 8, 258]

A n s h e l M., C l a y J. R.
Planar algebraic systems: some geometric interpretations, J. Algebra 10 (1968), 166—173. [69 : 4, 252]

B a r b u t E.
On nil semirings with ascending chain conditions, Fundam. Math. 68 (1970), 261—264. [71 : 5, 327]

B a r t h é l e m y J. P.
Sur le spectre d'une semi-algèbre, C. r. Acad. sci. Paris 274 (1972), A1768 — A1771. [73 : 1, 303]

B e i d l e m a n J. C.
Quasi-regularity in near-rings, Math. Z. 89 (1965), 224—229. [66 : 2, 328]
A radical for near-ring modules, Mich. Math. J. 12 (1965), 377—383. [66 : 5, 262]
On near-rings and near-ring modules, Disse t. Abstrs. 25 (1965), 4716—4717. [66 : 8, 288]
Distributively generated near-rings with descending chain condition, Math. Z. 91 (1966), 65—69. [66 : 12, 314]
Nonsemi-simple distributively generated near-rings with minimum condition, Math. Ann. 170 (1967), 206—213. [67 : 11, 248]
On the theory of radicals of distributively generated near-rings, I, The primitive-radical, Math. Ann. 173 (1967), 89—101. [68 : 2, 215]
On the theory of radicals of distributively generated near-rings, II, The nil-radical, там же, 200—218. [68 : 10, 207]
Strictly prime distributively generated near-rings, Math. Z. 100 (1967), 97—105. [68 : 10, 205]
A note on regular near-rings, J. Indian Math. Soc. 33 (1969—1970), 207—209. [71 : 6, 307]

Beidleman J. C., Cox R. H.
Topological near-rings, Arch. Math. **18** (1967), 485—492. [68 : 7, 312]

Bell H. E.
Certain near-rings are rings, J. London Math. Soc. **4** (1971), 264—270. [72 : 4, 337]

Berman G., Silverman R. J.
Near-rings, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 23—34. [60 : 9, 10085]
Simplicity of near-rings of transformations, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 456—459. [60 : 10, 11378].

Betsch G.
Ein Radical für Fastringe, Math. Z. **78** (1962), 86—90. [63 : 6, 246]

Białynicki-Birula A.
On the spaces of ideals of semirings, Fundam. Math. **45** (1958), 247—253. [60 : 5, 4986]

Blackett D. W.
Simple and semisimple near-rings, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 772—785. [54 : 11, 5475]
The near-ring of affine transformations, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 517—519. [58 : 10, 8626]

Bleicher M. N., Bourne S.
On the embeddability of partially ordered halfrings, J. Math. Mech. **14** (1965), 109—116. [65 : 10, 267]

Boccioni D.
Seminelli complementarizzabili, Rend. Semin. mat. Univ. Padova **24** (1955), 474—509. [56 : 10, 7207]
Caratterizzazione di una classe di anelli generalizzati, Rend. Semin. mat. Univ. Padova **35** (1965), 116 — 127. [67 : 12, 275]

Bosák J.
Vše obecné mocniny v pologrupách, Mat.-fyz. časop. **13** (1963), 137—146. [63 : 12, 206]

Bourne S.
On multiplicative idempontents of a potent semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42** (1956), 632—638. [57 : 10, 7696]
On compact semirings, Proc. Japan Acad. **35** (1959), 332—334. [61 : 6, 279]
On the radical of a positive semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45** (1959), 1519. [61 : 7, 267]
On normed semialgebras, Studia math. **21** (1961), 45—54. [64 : 1, 300]
On locally compact positive half-fields, Math. Ann. **146** (1962), 423—426. [64 : 1, 301]
On convex topological halfalgebras, Portug. math. **24** (1965), 59—63. [67 : 6, 198]

Bourne S., Zassenhaus H.
On the semiradical of a semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44** (1958), 907—914. [61 : 6, 278]
On a Wedderburn — Artin structure theory of a potent semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **43** (1957), 613—615. [60 : 6, 8679]

Brown H.
Distributor theory in near-algebras, Communs Pure Appl. Math. **21** (1968), 535—544. [69 : 11, 254]
Near-algebras, Ill. J. Math. **12** (1968), 215—227. [70 : 3, 335]

Bruck R. H.
Analogues of the ring of rational integers, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 50—58. [56 : 9, 6456]

Buchi J. R., Wright J. B.
The theory of proportionality as an abstraction of group theory, Math. Ann. **130** (1955), 102—108. [56 : 10, 7153]

Clay J. R.
The near-rings on a finite cyclic group, Amer. Math. Monthly **71** (1964), 47—50. [64 : 12, 247]
Imbedding an arbitrary ring in a nontrivial near-ring, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 406—407. [68 : 1, 320]
The near-rings on groups of low order, Math. Z. **104** (1968), 364—371. [69 : 1, 298]
Research in near-ring theory using a digital computer, BIT (Sver.) **10** (1970), 249—265. [71 : 6, 305]
Generating balanced incomplete block designs from planar near-rings, J. Algebra **22** (1972), 319—331. [73 : 2, 279]

Clay J. R., Doi D. K.
Near-rings with identity of alternating groups, Math. Scand. **23** (1968), 54—56. [70 : 7, 268]

Clay J. R., Lawver D. A.
Boolean near-rings, Canad. Math. Bull. **12** (1969), 265—273. [70 : 6, 256]

Clay J. R., Malone J. J.
The near-rings with identities on certain finite groups, Math. Scand. **19** (1966), 146—150. [68 : 10, 206]

Clay J. R., Maxson C. J.
The near-rings with identities on generalized quaternion groups, Rend. Ist. lombardo Accad. Sci. e lett. **A104** (1970), 525—530. [71 : 6, 306]

Costa A. A.
Sur les μ-demi-anneaux, Math. Z. **108** (1968), 10—14. [69 : 7, 249]

Danes S.
On finite Dickson near-fields, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg **37** (1972), 254—257. [73 : 1, 275]

D a v i s A. S.
An axiomatization of the algebra of transformations over a set, Math. Ann. 164 (1966), 372—377. [66 : 12, 343]

D e s k i n s W. E.
A radical for near-rings, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 825—827. [56 : 5, 3708]

D i c k e r R. M.
The substitutive law, Proc. London Math. Soc. 13 (1963), 493—510. [64 : 8, 272]

D u l i n B. J., M o s h e r J. R.
The Dedekind property for semirings, J. Austral. Math. Soc. 14 (1972), 82—90. [73 : 2, 274]

E i l h a u e r R.
Zur Theorie der Halbkörper, I, Acta math. Acad. Scient. hung. 19 (1968), 23—45. [69 : 6, 262]

E n d l e r O.
Über multiplikative Strukturen und eudoxische Hüllen von archimedischen totalgeordneten Gruppen, Math. Z. 77 (1961), 339—358. [63 : 3, 204]

E v a n s T.
Some remarks on a paper by R. H. Bruck, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 211—220. [58 : 2, 1042]

F l i e s s M.
Du produit de Hurwitz de deux series formelles, C. r. Acad. sci. Paris 268 (1969), A535 — A537. [70 : 1, 257]

F r i n k O.
Symmetric and self-distributive systems, Amer. Math. Monthly 62 (1956), 697—707. [57 : 1, 212]

F r ö h l i c h A.
The near-ring generated by the inner automorphisms of a finite simple group, J. London Math. Soc. 33 (1958), 95—107. [60 : 8, 8680]
Distributively generated near-rings, I, II, Proc. London Math. Soc. 8 (1958), 76—108. [58 : 9, 7547] [60 : 9, 10086]

G l a z e k K.
On certain characterizations of distributive lattices, Colloq. math. 19 (1968), 195—198. [69 : 6, 244]
Uwagi o ideałach w półpierscieniach, Zesz. nauk. WSP Opolie Mat. 5 (1968), 161—176. [71 : 7, 341]

G o n s h o r H.
On abstract affine near-rings, Pacif. J. Math. 14 (1964), 1237—1240. [66 : 3, 245]

G r ä t z e r G.
A theorem on doubly transitive permutation groups with application to universal algebras, Fundam. Math. 53 (1963), 25—41. [64 : 4, 256]

G r a v e s J. A.
Near-domains, Diss. Abstrs. Int., B32, № 8 (1972), 4725—4726. [72 : 7, 252]

G r i l l e t M. P.
A semiring whose Green's relations do not commute, Acta sci. math. 31 (1970), 161—166. [71 : 3, 236]
Green's relations in a semiring, Port. math. 29 (1970), 181—195. [72 : 2, 385]
Semisimple A-semigroups and semirings, Fundam. Math. 76 (1972), 109—116. [73 : 3, 296]

G r i l l e t O. P.
Subdivision rings of a semiring, Fundam. Math. 67 (1970), 67—74. [70 : 12, 227]

G u p t a N. D.
Commutation near-rings of a group, J. Austral. Math. Soc. 7 (1967), 135—140. [68 : 3, 200]

H a l l M.
Projective planes and related topics, J. Calif. Inst. Techn, 1954, 1—77. [57 : 10, 7717]

H a r t n e y J. F. T.
On the radical theory of a distributively generated near-ring, Math. Scand. 23 (1968), 214—220. [70 : 7, 269]

H a v e l V.
Construction of certain systems with two compositions, Comment. math. Univ. Carolinae 6 (1965), 413—428. [66 : 9, 178]

H e a t h e r l e y H. E.
C-Z. transitivity and C-Z. decomposable near-rings, J. Algebra 19 (1971), 496—508. [72 : 5, 296]

H e a t h e r l e y H. E., M a l o n e J. J.
Some near-rings embeddings, II, Quart. J. Math. 21 (1970), 445—448. [71 : 6, 309]

H e n r i k s e n M.
The $a^{n(a)} = a$ theorem for semirings, Math. japan 5 (1958), 21—24. [60 : 8, 8678]

H e r i n g C.
A new class of quasifields, Math. Z. 118 (1970), 56—57. [71 : 6, 347]

H e r z J. C.
Pseudo-algebres de Lie, C. r. Acad. sci. Paris 236 (1953), 1935—1937. [53 : 3, 1109]

H o f m a n K. H.
Topologische Doppelloops, Math. Z. 70 (1958), 213—230. [60 : 8, 8681]
Topologische Doppelloops und topologische Halbgruppen, Math. Ann. 138 (1959), 239—258. [60 : 12, 13616]

Über archimedisch angeordnete, einseitig distributive Doppelloops, Arch. Math. **10** (1959), 348—355. [61 : 1, 289]
Über lokalkompakte positive Halbkörper, Math. Ann. **151** (1963), 262—271. [64 : 5, 221]
Topologische distributive Doppelloops, Math. Z. **71** (1959), 36—68. [61 : 7, 251]

H o o r n W. G. van
Some generalisations of the Jacobson radical for seminear-rings and semirings, Math. Z. **118** (1970), 69—82. [73 : 6, 308]

H o o r n W. G. van, R o o t s e l a a r B. van
Fundamental notion in the theory of seminear-rings, Compositio math. 18 (1966), 65—78. [68 : 10, 204]

H o r n e J. G.
On the ideal structure of certain semirings and compactification of topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 408—430. [60 : 9, 10038]

H o r s t J.
Probleme de divizibilitate in anumite semiinele si inele de matrici, Gaz. mat. (RSR) A75 (1969), 86—91. [70 : 2, 234]

H u g h e s D. R.
Planar division near-rings, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 502—526. [57 : 1, 201]

I i z u k a K.
On the Jacobson radical of a semiring, Tohoku Math. J. **11** (1959), 409—421. [61 : 6, 277]

I i z u k a K., N a k a h a r a I.
A note on the semiradical of a semiring, Kumamoto J. Sci. A4 (1959), 1—3. [63 : 3, 248]

I s é k i K.
Ideal theory of semiring, Proc. Japan Acad **32** (1956), 554—559. [60 : 5, 4984]
Ideals in semirings, Proc. Japan Acad. **34** (1958), 29—31. [59 : 9, 8879]
Quasiideals in semirings without zero, там же, 79—81. [59 : 11, 10892]
On ideals in semiring, там же, 507—509. [60 : 7, 7317]

I s é k i K., M i y a n a g a Y.
On a radical in a semiring, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 562—563. [60 : 5, 4985]

I s é k i K., O h a s h i S.
On definitions of commutative rings, Proc. Japan Acad. **44** (1968), 920—922. [69 : 12, 346]

I s k a n d e r A.
Word problem for ringoids of numerical functions, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 399—408. [72 : 4, 334]

Janin P.
Une généralisation de la notion d'anneau, Preanneaux, C. r. Acad. sci. Paris 269 (1969), A62 — A64. [70 : 1, 258]
Une généralisation de la notion d'algèbre sur un anneau, Préalgèbres, там же, A120 — A122. [70 : 1, 259]

Johnson A. A.
Order in logic and integral domains, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 386—390. [67 : 12, 248]

Kallaher M. J.
A note on finite Bol quasifields, Arch. Math. 23 (1972), 164—166 [73 : 1, 294]

Karzel H.
Kommutative Inzidenzgruppen, Arch. Math. 13 (1962), 535—538. [63 : 8, 220]
Normale Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe, Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg 28 (1965), 124—132. [65 : 10, 252]
Unendliche Dicksonsche Fostkorper, Arch. Math. 16 (1965), 247—256. [66 : 9, 200]

Kerby W.
Projektive and nicht-projektive Fastkörper, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 32 (1968), 20—24. [69 : 2, 341]
Angeordnete Fastkörper, там же, 132—146. [69 : 7, 213]
Angeordnete Fastkörperebener, Abn. Math. Semin. Univ. Hamburg 33 (1969), 4—16. [70 : 1, 288]

Klein-Barmen F.
Ordoid, Halbverband, ordoide Semigruppe, Math. Ann. 135 (1958), 142—159. [59 :5 , 4516]

La Torre D. R.
On the radical of hemiring, Dissert. Abstrs. 25 (1964), 3001. [66 : 3, 247]
On h-ideals and k-ideals in hemirings, Publs. Math. 12 (1965), 219—226. [66 : 9, 215]
A note on the Jacobson radical of a hemiring, Publs.math. 14 (1967), 9—13. [69 : 4, 238]
Le Brown—McCoy radicals of a hemiring, там же, 15—28. [69 : 4, 239]
A note on quotient semirings, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 463—465. [71 : 9, 234]

Lausch H.
Kohomologie von distributive erzeugten Fastringen, I, Erweiterungen, J. reine angew. Math. 229 (1968), 137—146. [69 ; 4, 326]
An application of a theorem of Faschütz, Bull. Austral. Math. Soc. 1 (1969), 381—384. [70 : 12, 226]
Idempotents and blocks in Artinian d. g. near-rings with identit element, Math. Ann. 188 (1970), 43—52. [71 : 3, 237]

L a w y e r D. A.
Concerning nil groups for near-rings, Acta math. Acad. Sci. hung. 22 (1972), 373—378. [72: 12, 273]

L a x t o n R. R.
Primitive distributively generated near-rings, Mathematika 8 (1961), 142—158. [63 : 6, 247]
A radical and its theory for distributively generated near-rings, J. London Math. Soc. 38 (1963), 40—49. [64 : 6, 251]
Prime ideals and the ideal-radical of a distributively generated near-ring, Math. Z. 83 (1964), 8—17. [66 : 1, 385]

L a x t o n R. R., M a c h i n A.
On the decomposition of near-rings, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg 38 (1972), 221—230. [73 : 2, 271]

L a z a r d M.
Lois de groupes et analyseurs, Ann. scient. École norm. supér. 72 (1955), 299—400. [57 : 4, 2923]

L e a r n e r A.
Hilberts function in a semilattice, Proc. Cambridge Phil. Soc. 55 (1959), 239—243. [61 : 3, 270]

L e e S i n - Min
Axiomatic characterization of Σ-semirings, Acta sci. math. 32 (1971), 337—343. [72 : 8, 359]

L i g h S.
On distributively generated near-rings, Proc. Edinburg Math. Soc. 16 (1969), 239—243. [70 : 1, 262]
Near-rings with descending chain condition, Compositio math. 21 (1969), 162—166. [70 : 3, 334]
On division near-rings, Canad. J. Math. 21 (1969), 1366—1371. [70 : 12, 228]
On boolean near-rings, Bull. Austral. Math. Soc. 1 (1969), 375—379. [70 : 12, 236]
Near-ring with identities on certain groups, Monatsh. Math. 75 (1971), 38—43. [71 : 9, 236]
The structure of a special class of near-rings, J. Austral. Math. Soc. 13 (1972), 141—146. [72 : 8, 361]
On the commutativity of near-rings, III, Bull. Austral. Math. Soc. 6 (1972), 459—464. [72 : 11, 218]

L i g h S., M c Q u a r r i e B., S l o t t e r b e c k O.
On near-fields, J. London Math. Soc. 5 (1972), 87—90. [72 : 12, 272]

L i n Y.-F., R a t t i J. S.
The graphs of semirings, J. Algebra 14 (1970), 73—82. [70 : 11,214]

L o h H o o i - T o n g
Notes on semirings, Math. Mag. 40, № 3 (1967), 150—152. [68 : 3, 280]

L u g o w s k i H.
Über die Vervollständigung geordnete Halbringe, Publs. math 9 (1962), 213—222. [64 : 4, 250]
Über gewisse Erweiterungen von positiven geordneten Halbmoduln, Publs. math. 15 (1968), 303—310. [70 : 1, 238]
Über die Struktur gewisser geordneter Halbringe, Math. Nachr. 51 (1971), 311—325. [72 : 7, 251]

M a l o n e J. J.
Near-ring automorphisms, Dissert. Abstrs. 24 (1964), 4213. [65 : 2, 368]
Near-rings with trivial multiplications, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1111—1112. [68 : 7, 316]
Near-rings homomorphisms, Canad. Math. Bull. 11 (1968), 35—41. [69 : 1, 299]
Automorphisms of abstract affine near-rings, Math. Scand. 25 (1969), 128—132. [70 : 11, 235]
A near-ring analogue of a ring embedding theorem, J. Algebra 16 (1970), 237—238. [71 : 5, 326]

M a l o n e J. J., H e a t h e r l y H. E.
Some near-rings embeddings, Quart. J. Math. 20, № 77 (1969), 81—85. [69 : 11, 253]

M a l o n e J. J., L y o n s C. G.
Endomorphism near-rings, Proc. Edinburgh Math. Soc. 17 (1970), 71—78. [71 : 3, 238]
Finite dihedral groups and D. G. near-rings, I, Compositio math. 24 (1972), 305—312. [73 : 2, 277]

M a r e š J.
Dvě vlastnosti výrazů v jistě volné univerzální algebře, Kybernetika 5 (1969), 190—200. [69 : 11, 255]

M a r t i n G. E.
Parastrophic planar ternary rings, J. Algebra 10 (1968), 37—46. [69 : 4, 253]

M a x s o n C. J.
On finite near-rings with identity, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1228—1230. [68 : 8, 254]
On local near-rings, Math. Z. 106 (1968), 197—205. [69 : 3, 232]
On imbedding fields in nontrivial near-fields, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 275—276. [69 : 11, 229]
Local near-rings of cardinality p^2, Canad. Math. Bull. 11 (1968), 555—561. [70 : 3, 336]
Dickson near-rings, J. Algebra 14 (1970), 152—169. [71 : 5,328]
On the construction of finite local near-rings, I, On noncyclic abelian p-groups, Quart. J. Math. 21 (1970), 449—457. [71 : 6, 303]
On the construction of finite local near-rings, II, On non-abelian p-groups, Quart J. Math. 22 (1971), 65—72. [71 : 9, 235]

On well-ordered groups and near-rings, Compositio math. **22** (1970), 241—244. [72 : 1, 497]
On morphisms of Dickson near-rings, J. Algebra **17** (1971), 404—411. [72 : 4, 332]

Meldrum J. D. P.
Varieties and D. G. near-rings, Proc. Edinburgh Math. Soc. **17** (1971), 271—274. [71 : 12, 363]

Menger K.
The algebra of functions: past, present, future, Rend. mat. applic. 20 (1961), 409—430. [63 : 7Б, 319]

Misfeld J., Timm J.
Topologische Dicksonsche Fastkörper, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg **37** (1972), 60—67. [72 : 9, 244]

Mosher J. R.
Generalized semirings of quotients, Dissert. Abstrs. **B29**, № 10 (1969), 3834. [70 : 4, 298]
Generalized quotients of semi-rings, Compositio math. **22** (1970), 275—281. [71 : 12, 364]

Natarajan N. S.
Ideal theory for semirings, J. Madras Univ. B32 (1962—1963) 161—168. [64 : 9, 246]

Neumann H.
Near-rings connected with free groups, Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam **2** (1954), 46—47. [56 : 2, 1082]
On varieities of groups and their associated near-rings, Math. Z. **65** (1956), 36—69. [57 : 1, 147]

Nöbauer W.
Über die Operation des Einsetzens in Polynomringen, Math. Ann. **134** (1958), 248—259. [58 : 11, 9604]
Funktionen auf kommutativen Ringen, Math. Ann. **147** (1962), 166—175. [64 : 12, 219]
Über die Darstellung von universellen Algebren dursch Funktionenalgebren, Publs. math. **10** (1963), 151—154. [65 : 3, 363]

Nöbauer W., Philipp W.
Über Einfachheite von Funktionenalgebren, Monatsh. Math. **66** (1962), 441—452. [63 : 7, 207]
Die Einfachheit der mehrdimensionalen Funktionenalgebren, Arch. Math. 15 (1964), 1—5. [65 : 3, 364]

Noronha G. M. L., Almeida C. A.
Sur le demianneau des nombres naturels, An. Fac. ciénc. Univ. Porto, 1965, №№ 1—2, 35—39. [68 : 8,252]

Onashi S.
On axiom systems of commutative rings, Proc. Japan Acad. **44** (1968), 915—919. [69 : 12, 345]
On definition for commutative idempotent semrings, Proc. Japan Acad. **46** (1970), 113—115. [71 : 6, 304]

O p l u š t i l K.
Die O-Systeme, Spisy vyd. přirodověd. fak. Masarykovy univ. **2** (1957), 69—86. [58 : 8, 6540]

P á t e r Z.
Über Funktionenalgebren, Bull. math. Soc. sci. math. RSR 9 (1965), 87—103. [68 : 1, 191]

P e a r s o n K. R.
Interval semirings on R_1 with ordinary multiplication, J. Austral. Math. Soc. 6 (1966), 273—288. [67 : 9, 170]
Embedding semigroups in semigroups with multiplicative unit, J. Austral. Math. Soc. 8 (1968), 183—191. [69 : 1, 297]
Certain topological semirings in R_1, там же, 171—182. [69 : 3, 229]
Compact semirings which are multiplicatively groups or groups with zero, Math. Z. **106** (1968), 388—394. [69 : 3, 231]
The three kernels of a compact semiring, J. Austral. Math. Soc. **10** (1969), 299—319. [70 : 6, 257]
Compact semirings which are multiplicatively O-simple, там же, 320—329. [70 : 6, 258]

P e t r i c h M.
Associative polynomial multiplications over an infinite integral domain, Math. Nachr. 29 (1965), 67—75. [66 : 1, 263]

P h i l i p p W.
Über die Einfachheit von Funktionenalgebren über Verbänden, Monatsh. Math. **67** (1963), 259—268. [64 : 7, 289]

P i l z G.
Über geordnete Kompositionringe, Monatsh. Math. **73** (1969), 159—169. [70 : 1, 253]
Geordnete Fastringe, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **35** (1970), 83—88. [71 : 7, 339]
Direct sums of ordered near-rings, J. Algebra **18** (1971), 340—342. [72 : 4, 333]
Zur Charakterisierung der Ordnungen in Fastringen, Monatsh. Math. **76** (1972), 250—253. [73 : 2, 275]

P ł o n k a E.
Symmetric operations in groups, Bull. Acad. polon. sci., Sér. Sci. math., astron., phys. **17** (1969), 481—482. [70 : 4, 237]

P o i n s i g n o n G. M.
Embedding of a semiring into a semiring with identity, Acta math. Acad. scient. hung. **20** (1969), 121—128. [69 : 9, 189]
On semirings which are embeddable into a semiring with identity, Acta math. Acad. sci. hung. **22** (1972), 305—307. [73 : 2, 278]

P o k r o p p F.
Dicksonsche Fastkörper, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **30** (1967), 188—219. [68 : 1, 289]

Isomorphe Gruppen- und Fastkörperpaare, Arch. Math. **18** (1967), 235—240. [68 : 4, 243]

P o y a t o s F.
Descomposiciones irreducibles en suma directa interna de ciertas estructuras algebraicas, Rev. mat. hisp.-amer. **27**, № 4 (1967), 151—170. [68 : 6, 319]
Introducción a la teoria de semimódulos, Publs. Fac. cienc. Univ. Madrid 62A (1967), 187. [69 : 7, 222]
Sobre ciertas des composiciones de semimodulos en suma directa, Rev. mat. hisp.-amer. **29**, № 1 (1969), 51—58. [69 : 10, 140]

P r e s t o n G. B.
The arithmetic of a lattice of sub-algebras of a general algebra, J. London Math. Soc. **29** (1954), 1—15. [57 : 8, 6203]
Factorization of ideals in general algebras, там же, 363—368. [57 : 8, 6204]

R a m a k o t a i a h D.
Radicals for near-rings, Math. Z. **97** (1967), 45—56. [68 : 5, 304]
Structure of 1-primitive near-rings, Math. Z. **110** (1969), 15—26. [70 : 1, 263]

R a o M. L. Narayana
A question on finite Moufang—Veblen—Wedderburn systems, J. Algebra **13** (1969), 486—495. [70 : 6, 219]

R o o t s e l a a r B. van
Zum *AIE* - Fasthalbringbegriff, Nieuw arch. wiskunde **15** (1967), 247—249. [68 : 7, 315]

R o s a t i L. A.
Gruppi strettamente 2-transitive e pseudocorpi, Matematiche **22** (1967), 182—190. [68 : 4, 239]

R o s e n f e l d A.
Prime semigroups and semirings, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 933—938. [68 : 6, 224]

R u t h e r f o r d D. E.
The Cayley — Hamilton theorem for semirings, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A66 (1963—1964 (1965)), 211—215. [66 : 2, 327]

S c h w e i z e r B., S k l a r A.
The algebra of functions, Math. Ann. **139** (1960), 366—382. [60 : 12, 14076]
The algebra of functions, II, Math. Ann. **143** (1961), 440—447. [63 : 7Б, 412]

S e l d e n J.
A note on compact semirings, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 882—886. [66 : 3, 246]
Left zero simplicity in semirings, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 694—698. [67: 4, 212]

S k o w i k o w s k i W., Z a w a d o w s k i A.
A generalization of maximal ideals method of Stone and Gelfand, Fundam. Math. 42 (1955), 215—231. [57 : 3, 2123]

S m i l e y M. F.
An introduction to Hestenes ternary rings, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 245—248. [70 : 1, 260]

S m i t h D. A.
On semigroups, semirings and rings of quotients, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, Div. 1, 30 (1966), 123—130. [67 : 12, 249]

S m i t h F. A.
A structure theory for a class of lattice ordered semirings, Dissert. Abstrs 26 (1965), 1675. [66 : 9, 214]
A structure theory for a class of lattice ordered semirings, Fundam. Math. 59 (1966), 49—64. [67 : 4, 206]

S t e i n f e l d O.
Über die Struktursätze der Semiringe, Acta math. Acad. scient. hung. 10 (1959), 149—155. [60 : 11, 12553]
Über Semiringe mit multiplikativer Kürzungsregel, Acta scient. math. 24 (1963), 190—195. [65 : 4, 235]
A kváziidealokról, Maguar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl. 14 (1964), 301—315. [65 : 5, 196]

S t e i n f e l d O., W i e g a n d t R.
Über die Verallgemeinerungen und Analogen der Wedderburn — Artinschen und Noetherschen Struktursätze, Math. Nachr. 34 (1967), 143—156. [68 : 2, 182]

S t o n e H. E.
Ideals in halfrings, Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972), 8—14. [72 : 11, 219]

S u b r a h m a n y a m N. V.
Boolean semirings, Math. Ann. 148 (1962), 395—401. [63 : 6, 248]

S u L i P i
Homomorphisms of near-rings of continuous functions, Pacif. J. Math. 38 (1971), 261—266. [72 : 4, 336]

S z e t o G.
On a class of near-rings, J. Austral. Math. Soc. 14 (1972), 17—19. [73 : 2, 272]

T h a r m a r a t n a m V.
Complete primitive distributively generated near-rings, Quart. J. Math. 18, № 72 (1967), 293—313.
Endomorphism near-ring of relatively free group, Math. Z. 113 (1970), 119—135. [70 : 6, 212]

T i m m J.
Eine Klasse schwacher binärer Doppelstrukturen, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 33 (1969), 102—118. [70 : 2, 291]

Über die additiven Gruppen spezieller Fastringe, J. reine angew. Math., 1969, 47—54. [70 : 7, 267]
Zur Theorie der (nicht notwendig assoziativen) Fastringe, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 35 (1970), 14—31. [71 : 6, 311]
Zur Konstruktion von Fastringen, II, там же, 57—74. [71 : 6, 312]
Zur Theorie der Fastringkonstruktionen, II, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg 36 (1971), 16—32. [72 : 1, 496]

Vandiver H. S., Weaver M. W.
A development of associative algebra and algebraic theory of numbers, IV, Math. Mag. 30 (1956), 1—8. [57 : 8, 6185]

Wähling H.
Invariante und vertauschbare Teilfastkörper, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **33** (1969), 197—202. [70 : 5, 239]

Walt A. P. van der
Prime ideals and nil radicals in near-rings, Arch. Math. **15** (1964), 408—414. [66 : 3, 244]

Wefelscheid H.
Zur Konstruktion bewerteter Fastkörper, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg 38 (1972), 106—117. [73 : 2, 276]

Weinert H. J.
Über Halbringe und Halbkörper, I, Acta math. Acad. scient. hung. 13 (1962), 365—378. [64 : 3, 233]
Über Halbringe und Halbkörper, II, Acta math. Acad. scient. hung. 14 (1963), 209—227. [64 : 3, 234]
Über Halbringe und Halbkörper, Acta math. Acad. scient. hung. 15 (1964), 177—194. [66 : 1, 383]
Ein Struktursatz fur idempotente Halbkörper, там же, 289—295. [66 : 8, 272]
Zur Erweiterung algebraischer Strukturen durch Rectsquotientenbildung, Acta math. Acad. scient. hung. **16** (1965), 213—214. [65 : 12, 258]

Whitlock H. I.
A composition algebra for multiplace functions, Math. Ann. **157** (1964), 167—178. [65 : 11, 276]

Wiegandt R.
Über die Structursätze der Halbringe, Ann. Univ. scient. budapest., Sec. math. 5 (1962), 51—68. [63 : 10, 235]

Wilker P.
Double loops and ternary rings, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 543—547. [65 : 5, 236]

Williams R. E.
A note on near-rings over vector spaces. Amer. Math. Monthly **74** (1967), 173—175. [67 : 11, 245]
Simple near-rings and their associated rings, Dissert. Abstrs. **26** (1966), 5470. [67 : 11, 247]

W o l f s o n K. G.
Two-sided ideals of the affine near-ring, Amer. Math. Monthly 65 (1958), 29—30. [60 : 5, 4981]

Y a m a m u r o S.
Ideals and homomorphisms in some near-algebras, Proc. Japan Acad. 42 (1966), 427—432. [67 : 12, 274]

Z e m m e r J. L.
Near-fields, planar and non-planar, Math. Student 32 (1964), 145—150. [66 : 1, 372]

К § 16, 17

И с к а н д е р А. А.
Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий, Матем. сб. 70 (1966), 438—456. [67 : 10, 222]

К о н т о р о в и ч П. Г., К у т н е в К. М.
Симметрические структуры, Сиб. матем. ж. 10 (1969), 537—548. [70 : 2, 211]

Л и в ш а к Я. Б.
Локальные теоремы для разрешимых структур с умножением, Матем. зап. Уральск. ун-та 3 (1961), 54—66. [62 : 9, 160]

С т е л л е ц к и й И. В.
Нильпотентные структуры, Тр. Моск. матем. о-ва 9 (1960), 211—235. [61 : 5, 284]

B a s s H.
Finite monadic algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 258—268. [59 : 9, 8882]

B e n z a k e n C.
Pseudo-treillis distributifs et applications, I, Pseudotreillis distributifs. Bul. Inst. politehn. Iaşi 12, №№ 3—4 (1966), 13—18. [68 : 6, 323]
Pseudo-treillis distributifs et applications, II, Bul. Inst. politehn. Iaşi 13, №№ 3—4 (1967), 11—15. [60 : 4, 244]
Pseudo-treillis distributifs et applications, III, Bul. Inst. politehn. Iaşi 14 (1968), 25—30. [70 : 5, 249]

B i a ł y n i c k i - B i r u l a A., R a s i o w a H.
On the representation of quasi-Boolean algebras, Bull. Acad. polon. sci. 5 (1957), 259—261. [58 : 1, 178]
Remakrs on quasi-boolean algebras, там же, 615—619 [61 : 5, 283]

C h o u d h u r y A. C.
The doubly distributive m-lattice, Bull. Calcutta Math. Soc. 49 (1957), 71—74. [58 : 9, 7552]

Gastaminza M. L., Gastaminza S.
Characterization of a De Morgan lattice in terms of implication and negation, Proc. Japan Acad. 44 (1968), 659—662. [69 : 5, 251]

Georgescu G.
Algèbres de Lukasiewicz complètes, C. r. Acad. sci. Paris 269 (1969), A1181 — A1184. [70 : 6, 263]

Georgescu G., Vraciu C.
n - valent centered Lukasiewicz algebras, Rev. roum. math. pur. appl. 14 (1969), 793—802. [70 : 1, 282]

Gerhardts M. D.
Zur Characterisierung distributiver Schiefverbände, Math. Ann. 161 (1965), 231—240. [66 : 10, 254]
Über die Zerlegbarkeit von nichtkommutativen Verbänden in kommutative Teilverbände, Proc. Japan Acad. 41 (1965), 883—888. [67 : 2, 225]
Ein unsymmetrisches Kommutativgesetz in der Verbandstheorie, Math. Nachr. 35 (1967), 305—310. [69 : 2, 374]
Schrägverbände und Quasiordnungen, Math. Ann. 181 (1969), 65—73. [70 : 2, 268]

Grätzer G.
A generalization of Stone's representation theorem for Boolean algebras, Duke Math. J. 30 (1963), 469—474. [65 : 5, 247]

Hino K.
A decomposition theorem in a multiplicative system, Osaka J. Math. 2 (1965), 147—152. [66 : 9, 217]

Jordan P.
Zur Theorie der nichtkommutativen Verbände, Abh. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Liter., 1953, № 3, 1—6. [54 : 5, 3263]
Die Theorie der Schrägverbande, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 21 (1957), 127—138. [58 : 7, 5572]
Beiträge zur Theorie der Schrägverbände, Abh. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Liter., 1956, № 2, 1—16. [59 : 3, 2423]
Beitrage zur Theorie der Schrägverbände, Abh. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. Mainz, 1956, 27—42. [60: 10, 11384]
Über distributive Schrägverbande, Abh. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Liter., 1958—1959, № 5, 1—31. [61 : 1, 286]
Über distributivmodulare Schrägverbände, Abh. math.-naturwiss. Kl. Acad. Wiss. und Liter., 1961, № 9, 1—26. [62 : 10 196]
Halbgruppen von Idempotenten und nichtkommutative Verbände, J. reine angew. Math. 211 (1962), 136—161. [64 : 6, 265]

J o r d a n P., B ö g e W.
Zur Theorie der Schrägverbande, II, Abh. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Liter., 1954, № 2, 76—92. [56 : 7, 5137]

J o r d a n P., W i t t E.
Zur theorie der Schrägverbände, Abh. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss und Liter., 1953, № 5, 225—232. [55 : 5, 2140]

K a l m a n J. A.
Lattices with involution, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 485—491. [60 : 1, 184]

K l e i n - B a r m e n F.
Verallgemeinerung des Verbandsbegriffs durch Abschwächung des Axioms der Idempotenz, Math. Z. **70** (1958), 38—51. [59 : 10, 9807]

M a r o n n a R.
A characterization of Morgan lattices, Portug. math. **23** (1964), 169—171. [66 : 7, 314]

M a r t i e L.
Sur les généralisations du treillis libre, C. r. Acad. sci. Paris **244** (1957), 1593—1595. [58 : 7, 5566]

M a t s u s h i m a J.
Idempotent semigroups on lattices, Japan. J. Math. **38** (1969), 1—17. [70 : 3, 190]

M a t s u s h i t a S.
Lattices non-commutatifs, C. r. Acad. sci. Paris **236** (1953), 1525—1527. [53 : 3, 1115]
Ideals in non-commutative lattices, Proc. Japan Acad. **34** (1958), 407—410. [59 : 8, 7830]
Zur theorie der nichtkommutativen Verbände, Math. Ann. **137** (1959), 1—8. [60 : 1, 185]

M c C a r t h y P. J.
Primary decomposition in multiplicative lattice, Math. Z. **90** (1965), 185—189. [66 : 8, 291]

P ł o n k a J.
On distributive quasi-lattices, Fundam. Math. **60** (1967), 191—200. [68 : 4, 249]

R u e d i n J.
Distributivité et axiomatique des treillis, C. r. Acad. sci. Paris **265** (1967), A812 — A815. [69 : 5, 252]

S e r v i M.
Algebre di Fréchet: una classe di algebre booleane con operatore, Rend. Circolo mat. Palermo **14** (1965—1966), 335—366. [68 : 2, 220]

S t e i n f e l d O.
Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoreischer Fragen, Acta scient. math. 22 (1961), 136—149. [62 : 2, 290]
Über Zerlegungssätze für teilweise geordneten Halbgruppen mit bedingten Distributivitätsregeln, Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl. 9 (1964—1965), 313—330. [67 : 5, 172]

S u b r a h m a n y a m N. V.
An extension of Boolean lattice theory, Math. Ann. 151 (1963), 332—345. [64 : 1, 316]

Z e l i n k a B.
O jednom typu multiplikativnich svazu, Matemat. časop. 18 (1968), 90—98. [69 : 1, 311]

Z e l m e r V.
Un analogue de l'algèbre Booléenne, Mathematica (RSR) 10 (1968), 391—400. [70 : 1, 278]

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоморфизм 13
Автотопия 46
Алгебра 11
— абелева 87
— аддитивная кольцоида 94
— булева 104
— гомоморфизмов 89
— линейная 83
— менгерова 97
— свободная 14
— специальная производная 78
— универсальная 11
— Ω-слов над алфавитом X 14
Алгебры изоморфные 13
— однотипные 13
Аннулятор 83

База 77

Гиперплоскость 51
Гомоморфизм 13
— нулевой 60
— противоположный 60
— Σ-операторный 70
Груда 35
— обобщенная 35
Группа 17
— абелева с кольцом операторов 75
— автоморфизмов 23
— аддитивная Ω-группы 84
— с группой операторов 74
— — операторами 70
— — полугруппой операторов 73
— — системой мультиоператоров 83
— симметрическая 22
— Σ-операторная 71
Группоиды изотопные 41

Дифференцирование 65
Дополнение 103

Идемпотент 26
Изоморфизм 13
Изотоп главный 41
Изотопия 41
— главная 41
Инцидентность 39

Квазигруппа 39
— координатная 40
Квазитело 64
Кольцо альтернативное 68
— антикоммутативное 67
— ассоциативное 56
— без делителей нуля 61
— булево 104
— дифференциальное 82
— йорданово 67
— коммутативное 67
— лиево 65
— полурадикальное 70
— радикальное в смысле Джекобсона 70
— с ассоциативными степенями 68
— — делением 63
— — единицей 58
— — системой операторов 81
— — — — дифференциальных 82
— целочисленное групповое 58
— — группоидное 63
— — полугрупповое 58
— эндоморфизмов 61
— — лиево 65
— эластичное 68
Кольцоид дистрибутивный над абелевой алгеброй 90
— над алгеброй многообразия 94
Конгруенция 115

Лупа 39
— муфангова 48
— с обратимостью 45

Многообразие 15
— абсолютно вырожденное 16
Множество линейно упорядоченное 98
— частично упорядоченное 98

Модуль (правый) над кольцом 75
Мономорфизм 13

Неокольцо 97

Объединение элементов 98
Операция аддитивная 94
— коммутирования 64
— симметрирования 66
— 0-арная 11
— n-арная 11

Пересечение элементов 98
Подалгебра 12
—, порожденная множеством 12
Подгруппа вполне характеристическая 72
— характеристическая 72
— Σ-*допустимая* 70
Подстановка 20
— обратная 21
— тождественная 21
— частичная 29
Подструктура 100
Поле 61
Полугруда 34
Полугруппа 20
— инверсная 26
— регулярная 26
— с единицей 20
— — инволюцией 34
— — нулем 55
— — сокращениями 61
— симметрическая 21
— — инверсная 31
— соответствий 114
— эндоморфизмов 23
Полукольцо 97
Почти-кольцо 96
Представление специальное точное 78
Преобразование 20
— обратное 21
Произведение декартово 109
— отображений 20
— полупрямое 74

Пространство векторное (правое) 77
Прямая 39

Размерность 77

Связка соответствий 114
Сеть 39
— n-мерная 51
Сигнатура 11
Система образующих 12
Слово 14
Соответствие 110
— инверсное 112
Структура 98
— булева 104
— вполне дедекиндова 117
— дедекиндова 101
— дистрибутивная 102
— компактнопорожденная 108
— конгруенций 116
— *модулярная* 101
— подалгебр 101
— полная 106
— соответствий 111

Тело 61
Теорема Алберта 42
— — вторая 43
— Биркгофа — Фринка 109
— Брака — Хьюза 43
— Вагнера — Престона 31
— Грецера — Шмидта 116
— Двингера 117
— Искандера 114
— Кона — Ребане 78
— Муфанг 48
— Стоуна 103
— Хиона 94
Тождество Якоби 64
Точка 39

Умножение присоединенное 68

Фактор-алгебра 118

Цепь 100

Элемент обратный полугруппы 26
— биунитарный 35
— косой 53
— компактный 108
Эндоморфизм 13
Эпиморфизм 13
n-группа 51
—, определяемая группой 54
n-квазигруппа 52
R-модуль 74
— унитарный 75

Ω-алгебра мультиоператорная линейная 85
Ω-группа 84
— — дистрибутивная 85
Ω-кольцо мультиоператорное 84
Ω-подгруппа 84
Ω-слово 14
Ω-тождество 15
(Ω, Λ)-кольцоид 94
— дистрибутивный 94
— неассоциативный 97
— симметрический 94
— n-арный 97

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора 3

Введение 5

§ 1. Универсальные алгебры 11
§ 2. Группы 17
§ 3. Полугруппы 20
§ 4. Инверсные полугруппы 26
§ 5. Полугруды 34
§ 6. Квазигруппы и лупы 39
§ 7. Муфанговы лупы 45
§ 8. n-группы 51
§ 9. Ассоциативные кольца 56
§ 10. Неассоциативные кольца 63
§ 11. Группы с операторами. Модули 71
§ 12. Представления универсальных алгебр в полугруппах 78
§ 13. Универсальные алгебры с операторами. Дифференциальные кольца. Линейные алгебры. Мультиоператорные группы, кольца и линейные алгебры 81
§ 14. Абелевы алгебры 87
§ 15. Кольцоиды 93
§ 16. Структуры 98
§ 17. Полные структуры. Соответствия универсальных алгебр 106
§ 18. Конгруенции 114

Литература 119

Предметный указатель 156