# О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

И.С. СОМИНСКИЙ, Л.И. ГОЛОВИНА, И.М. ЯГЛОМ

И. С. СОМИНСКИЙ, Л. И. ГОЛОВИНА,
И. М. ЯГЛОМ

# О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

512+513
С 61
УДК 512.0+513.0

*Илья Самойлович Соминский, Лидия Ивановна Головина,*
*Исаак Моисеевич Яглом*

О математической индукции

М., 1967 г., 144 стр. с илл.

Редакторы *А. П. Баева, Ю. А. Гастев*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 30/XI 1966 г. Подписано к печати 2/III 1967 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 4,5. Условн. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 8. Тираж 75 000 экз.
Т-01803. Цена книги 24 коп. Заказ № 1075.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

2-2-2
169-67

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1950 г. в издаваемой Гостехиздатом — Физматгизом — издательством «Наука» серии небольших книжек «Популярные лекции по математике», рассчитанных в первую очередь на учащихся средней школы, появилась брошюра И. С. Соминского «Метод математической индукции».

Эта брошюра доступно излагала содержание метода индукции, широко применяющегося в самых разнообразных разделах математики, начиная от вопросов, входящих в курс средней школы, и до самых продвинутых ее частей.

Книжка такого рода была очень нужна, и брошюра И. С. Соминского заслуженно пользовалась большим успехом; в последующие годы она выдержала несколько переизданий и была переведена на многие иностранные языки.

Некоторым недостатком брошюры И. С. Соминского можно было считать почти полное отсутствие в ней примеров и задач геометрического содержания.

Конечно, метод математической индукции, по самому существу своему связанный с понятием числа, имеет наибольшие применения в арифметике, алгебре и теории чисел. Но понятие целого числа является основным не только в теории чисел, специально занимающейся изучением его свойств, но и вообще во всей математике. Поэтому метод математической индукции применяется в самых разнообразных областях математики.

В частности, применения этого метода в геометрии особенно интересны и эффектны; они легко могут заинтересовать начинающего математика.

В 1956 г. в той же серии «Популярные лекции по математике» вышла в свет книжка Л. И. Головиной и И. М. Яглома «Индукция в геометрии».

Выпуская эту книгу, мы имели в виду дополнить содержание брошюры И. С. Соминского геометрическими примерами.

Нашу книгу мы рассматривали как естественное продолжение брошюры И. С. Соминского; в предисловии к этой книге указывалось, что она будет особенно интересна читателям, знакомым с книжкой «Метод математической индукции».

Ныне издательство «Наука» сочло целесообразным объединить книги «Метод математической индукции» и «Индукция в геометрии» в одну.

Так как настоящая книга выпускается после смерти Ильи Самойловича Соминского, скончавшегося 25 июля 1962 г., то подготовку ее, естественно, нам пришлось взять на себя.

Введение и первая часть настоящей книги довольно точно воспроизводят брошюру «Метод математической индукции»; лишь содержание Введения несколько расширено за счет примеров, заимствованных из книги «Индукция в геометрии».

Вторая часть книги в основном совпадает с последним изданием брошюры «Индукция в геометрии»; добавлено лишь несколько новых задач.

Работа над обеими частями книги в первую очередь преследовала цель большей их унификации.

Так, например, мы отнесли в конец книги все указания к решению геометрических задач в соответствии с тем, как это было принято в брошюре И. С. Соминского.

От книги «Индукция в геометрии» идет разделение всего материала на «примеры», сопровождаемые подробными решениями, и «задачи», доставляющие читателю материал для самостоятельной работы.

Книга рассчитана на учащихся старших классов средней школы, студентов младших курсов педагогических институтов, университетов и других вузов, а также на учителей математики; она может быть использована в работе школьных математических кружков.

Введение к книге и § 1 первой части вполне доступны учащимся неполной средней школы; остальные части требуют несколько большей подготовки.

Много интересных задач на метод математической индукции читатель может найти в книге В. А. Кречмара, Задачник по алгебре, изд-во «Наука», М., 1964. Широкое обсуждение принципа индукции содержится в статье выдающегося польского математика В. Серпинского «О математической индукции», «Математика в школе», 1936, № 3.

1966 г.

*Л. И. Головина,*
*И. М. Яглом*

# ВВЕДЕНИЕ

Утверждения подразделяются на общие и частные.

Приведем примеры общих утверждений.

Все граждане СССР имеют право на образование.

Во всяком параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Все числа, оканчивающиеся нулем, делятся на 5.

Соответствующими примерами частных утверждений являются следующие:

Петров имеет право на образование.

В параллелограмме $ABCD$ диагонали в точке пересечения делятся пополам.

140 делится на 5.

Переход от общих утверждений к частным называется *дедукцией*. Рассмотрим пример.

Все граждане СССР имеют право на образование. (1)

Петров — гражданин СССР. (2)

Петров имеет право на образование. (3)

Из общего утверждения (1) при помощи утверждения (2) получено частное утверждение (3).

Переход от частных утверждений к общим называется *индукцией*. Индукция может привести как к верным, так и к неверным выводам. Поясним это двумя примерами.

140 делится на 5. (1)

Все числа, оканчивающиеся нулем, делятся на 5. (2)

Из частного утверждения (1) получено общее утверждение (2). Утверждение (2) верно.

140 делится на 5. (1)

Все трехзначные числа делятся на 5. (2)

Из частного утверждения (1) получено общее утверждение (2). Утверждение (2) неверно.

Спрашивается, как пользоваться в математике индукцией *), чтобы получать только верные выводы? Ответ на этот вопрос и дается в этой книжке.

1. Рассмотрим сначала два примера индукции, недопустимой в математике.

**Пример 1.** Пусть

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Легко проверить, что

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}.$$

На основании полученных результатов утверждаем, что при всяком натуральном $n$ $S_n=\frac{n}{n+1}$.

**Пример 2.** Рассмотрим трехчлен $x^2+x+41$, на который обратил внимание еще Л. Эйлер. Подставив в этот трехчлен вместо $x$ нуль, получим простое число 41. Подставив теперь в этот же трехчлен вместо $x$ единицу, получим опять простое число 43. Продолжая подставлять в трехчлен вместо $x$ последовательно 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, получаем всякий раз простое число 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. На основании полученных результатов утверждаем, что при подстановке в рассматриваемый трехчлен вместо $x$ любого целого неотрицательного числа всегда в результате получается простое число.

Почему рассуждения, приведенные в этих примерах, недопустимы в математике? В чем порочность выводов, которые нами сделаны?

Дело в том, что в обоих этих рассуждениях мы высказали общее утверждение относительно любого $n$ (во втором примере относительно любого $x$) только на основании того, что это утверждение оказалось справедливым для некоторых значений $n$ (или $x$).

---

*) См. Послесловие. Немногочисленные подстрочные примечания редактора всюду отмечаются звездочками; сноски, принадлежащие авторам, нумеруются.

Индукция широко применяется в математике, но применять ее надо умело *). При легкомысленном же отношении к индукции можно получить неверные выводы.

Так, если в примере 1 сделанное нами общее утверждение случайно оказывается верным, как это доказано ниже в примере 10, то в примере 2 наше общее утверждение является неверным.

В самом деле, при более внимательном изучении трехчлена $x^2+x+41$ обнаружили, что он равен простому числу при $x=0, 1, 2, \ldots, 39$, но при $x=40$ этот трехчлен равен $41^2$, т. е. числу составному **).

**2.** В примере 2 мы встретились с утверждением, справедливым в 40 частных случаях и все же вообще оказавшимся несправедливым.

Приведем еще несколько примеров утверждений, которые справедливы в нескольких частных случаях, а вообще несправедливы.

**Пример 3.** Двучлен $x^n-1$, где $n$ — натуральное число, представляет для математиков большой интерес. Достаточно сказать, что он тесно связан с геометрической задачей о делении окружности на $n$ равных частей. Не удивительно поэтому, что двучлен этот всесторонне изучается в математике. Математиков, в частности, интересовал вопрос о разложении этого двучлена на множители с целыми коэффициентами.

Рассматривая эти разложения при многих частных значениях $n$, математики наблюдали, что все коэффициенты разложения по абсолютной величине своей не превосходят единицы. В самом деле,

$$\begin{aligned}
&x-1=x-1,\\
&x^2-1=(x-1)(x+1),\\
&x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),\\
&x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1),\\
&x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),\\
&x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Были составлены таблицы, в пределах которых коэффициенты этим свойством обладали. Попытки доказать этот факт для всякого $n$ успеха не имели.

---

*) См. Послесловие.

**) И уж совсем сразу бросается в глаза, что при $x=41$ $x^2+x+41=41^2+41+41$ делится на 41.

В 1938 г. в журнале «Успехи математических наук» (вып. IV) была опубликована заметка выдающегося советского математика Н. Г. Чеботарева, в которой он предложил нашим математикам выяснить этот вопрос.

Эту задачу решил В. К. Иванов [1]). Оказалось, что указанным свойством обладают все двучлены $x^n-1$, степень которых меньше 105. Одним же из множителей $x^{105}-1$ является многочлен

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+$$
$$+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-$$
$$-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+$$
$$+x^{12}-x^{9}-x^{8}-2x^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}+x+1,$$

уже не обладающий этим свойством.

**Пример 4.** Рассмотрим числа вида $2^{2^n}+1$. При $n=0, 1, 2, 3, 4$ числа $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65\,537$ — простые. Замечательный французский математик XVII в. П. Ферма предполагал, что все числа такого вида — простые. В XVIII в. Л. Эйлер нашел, что $2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\cdot 6\,700\,417$ — составное число.

**Пример 5.** Знаменитый немецкий математик XVII в., один из создателей так называемой «высшей математики», Г. В. Лейбниц доказал, что при всяком целом положительном $n$ число $n^3-n$ делится на 3, число $n^5-n$ делится на 5, число $n^7-n$ делится на 7 *). На основании этого он предположил было, что при всяком нечетном $k$ и любом натуральном $n$ число $n^k-n$ делится на $k$, но скоро сам заметил, что $2^9-2=510$ не делится на 9.

**Пример 6.** В ошибку такого же рода впал однажды известный советский математик Д. А. Граве, предположив, что для всех простых чисел $p$ число $2^{p-1}-1$ не делится на $p^2$. Непосредственная проверка подтвердила это предположение для всех простых чисел $p$, меньших тысячи. Вскоре, однако, было установлено, что $2^{1092}-1$ делится на $1093^2$ (1093 — простое число), т. е. предположение Граве оказалось ошибочным.

---

[1]) «Успехи математических наук», 1941, вып. IV, стр. 313—317.

*) См., например, книгу: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, Физматгиз, М., 1959 (задачи 27а), б), в)).

**Пример 7.** Поставим задачу о нахождении наибольшего возможного числа частей, на которое могут разбить плоскость $n$ окружностей. Ясно, что при $n=1$ это число равно двум (рис. 1, *а*); при $n=2$ — четырем (рис. 1, *б*); при $n=3$ — восьми (рис. 1, *в*). Естественно ожидать, что и в дальнейшем удастся каждый раз проводить окружность так, чтобы она разбивала на две части каждую из имевшихся ранее частей; в таком случае число частей при добавлении новой окружности будет удваиваться и для $n$ окружностей окажется равным $2^n$. Однако это заключение неправильно: на самом деле наибольшее число частей, на которое можно разбить плоскость четырьмя окружностями, равно 14, а не 16; для $n$ окружностей это число равно $n^2 - n + 2$ *).

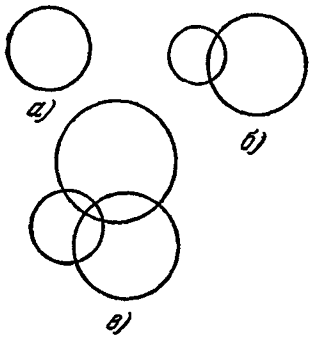



Рис. 1.

**Пример 8.** На сколько частей делят пространство $n$ плоскостей, проходящих через одну точку, если никакие три из них не проходят через одну прямую?

Рассмотрим простейшие частные случаи этой задачи. Одна плоскость делит пространство на две части. Две плоскости, проходящие через одну точку, делят пространство на четыре части. Три плоскости, проходящие через одну точку, но не проходящие через одну прямую, делят пространство на восемь частей.

На первый взгляд может показаться, что с увеличением числа плоскостей на единицу количество частей, на которые разбивается пространство, увеличивается вдвое, и, таким образом, четыре плоскости разобьют пространство на 16 частей, пять — на 32 части, а вообще $n$ плоскостей разобьют пространство на $2^n$ частей.

В действительности это не так, а именно: четыре плоскости разбивают пространство на 14 частей, пять плоскостей — на 22 части. Можно доказать, что $n$ плоскостей разбивают пространство на $n(n-1)+2$ частей **).

---

*) См. решение задачи 33 (п. Б) части II, стр. 142.

**) Решение см. ниже, на стр. 24, пример 13.

**Пример 9.** Приведем еще один весьма убедительный пример. Подставляя в выражение $991n^2+1$ вместо $n$ последовательно целые числа 1, 2, 3, ..., мы никогда не получим числа, являющегося полным квадратом, сколько бы дней или даже лет мы ни посвятили этим вычислениям. Однако если мы сделаем отсюда вывод, что все числа такого вида не являются квадратами, то мы ошибемся. На самом деле оказывается, что среди чисел вида $991n^2+1$ имеются и квадраты, только наименьшее значение $n$, при котором число $991n^2+1$ есть полный квадрат, очень велико. Вот это число:

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

Рассмотренные примеры позволяют сделать простой и в то же время важный вывод.

*Утверждение может быть справедливым в целом ряде частных случаев и в то же время несправедливым вообще.*

**3.** Теперь возникает такой вопрос. Имеется утверждение, справедливое в нескольких частных случаях. Все частные случаи рассмотреть невозможно. Как же узнать, справедливо ли это утверждение вообще?

Этот вопрос иногда удается решить посредством применения особого метода рассуждений, называемого *методом математической индукции* (полной индукции, совершенной индукции).

В основе этого метода лежит принцип математической индукции, заключающийся в следующем:

*Утверждение справедливо для всякого натурального $n$, если:* 1) *оно справедливо для $n=1$ и* 2) *из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n=k$ следует его справедливость для $n=k+1$.*

Доказательство*). Предположим противное, т. е. предположим, что утверждение справедливо не для всякого

*) Начинающийся здесь текст до п. 4 читатель может опустить без ущерба для понимания дальнейшего. Дело в том, что упоминаемый ниже принцип наименьшего числа, с помощью которого здесь доказывается принцип математической индукции, ничуть не более (хотя и не менее) очевиден, чем сам принцип математической индукции. С другой стороны, эти два предложения, как показывает более глубокий их анализ, оказываются эквивалентными только после принятия дополнительных допущений. Ограничимся поэтому принятием принципа математической индукции как интуитивно чрезвычайно убедительного допущения и запомним, что он является одной из аксиом, определяющих натуральный ряд чисел. Подробнее по этому поводу см. Послесловие и указанную там литературу.

натурального $n$. Тогда существует такое натуральное $m$, что 1) утверждение для $n=m$ несправедливо, 2) для всякого $n$, меньшего $m$, утверждение справедливо (иными словами, $m$ есть первое натуральное число, для которого утверждение несправедливо).

Очевидно, что $m>1$, так как для $n=1$ утверждение справедливо (условие 1). Следовательно, $m-1$ — натуральное число. Выходит, что для натурального числа $m-1$ утверждение справедливо, а для следующего натурального числа $m$ оно несправедливо. Это противоречит условию 2.

Конечно, при доказательстве принципа математической индукции мы пользовались тем, что *в любой совокупности натуральных чисел содержится наименьшее число*. Легко видеть, что это свойство в свою очередь можно вывести как следствие из принципа математической индукции. Таким образом, оба эти предложения равносильны. Любое из них можно принять за одну из аксиом, определяющих натуральный ряд, — тогда другое будет теоремой. Обычно за аксиому принимают как раз сам принцип математической индукции.

**4.** Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называется доказательством *методом математической индукции*. Такое доказательство должно состоять из двух частей, из доказательства двух самостоятельных теорем:

Теорема 1. *Утверждение справедливо для $n=1$.*

Теорема 2. *Утверждение справедливо для $n=k+1$, если оно справедливо для $n=k$, где $k$ — произвольное натуральное число.*

Если обе эти теоремы доказаны, то на основании принципа математической индукции утверждение справедливо для всякого натурального $n$.

**Пример 10.** Вычислить сумму (см. пример 1)

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Мы знаем, что $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}$. Теперь мы не повторим ошибку, допущенную в примере 1, и не станем сразу утверждать, что $S_n=\frac{n}{n+1}$ при всяком натуральном $n$.

Будем осторожны и скажем, что рассмотрение сумм $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ позволяет высказать гипотезу (предположение), что $S_n=\frac{n}{n+1}$ при всяком натуральном $n$. При этом мы знаем, что гипотеза эта верна при $n=1, 2, 3, 4$. Для проверки гипотезы воспользуемся методом математической индукции.

Теорема 1. Для $n=1$ гипотеза верна, так как $S_1=\frac{1}{2}$.

Теорема 2. Предположим, что гипотеза верна для $n=k$, т. е. что $S_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$, где $k$ — некоторое натуральное число. Докажем, что тогда гипотеза обязана быть верной и для $n=k+1$, т. е. что $S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$.

Действительно, $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$; следовательно, по условию теоремы,

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Обе теоремы доказаны. Теперь на основании принципа математической индукции мы утверждаем, что $S_n=\frac{n}{n+1}$ при всяком натуральном $n$.

Замечание 1. Необходимо подчеркнуть, что доказательство методом математической индукции безусловно требует доказательства обеих теорем, 1 и 2.

Мы уже видели, к чему привело пренебрежительное отношение к теореме 2 (пример 2).

Сейчас мы покажем, что нельзя опускать и теорему 1. Рассмотрим пример.

**Пример 11.** Теорема. *Всякое натуральное число равно следующему за ним натуральному числу.*

Доказательство проведем методом математической индукции. Предположим, что

$$k=k+1. \tag{1}$$

Докажем, что

$$k+1=k+2. \tag{2}$$

Действительно, прибавив к каждой части равенства (1) по 1, получим равенство (2). Выходит, что если утверждение справедливо для $n=k$, то оно справедливо и для $n=k+1$. Теорема доказана.

Следствие. Все натуральные числа равны.

Где же здесь ошибка? Ошибка заключается в том, что первая теорема, необходимая для применения принципа математической индукции, не доказана и не верна, а доказана только одна вторая теорема.

Теоремы 1 и 2 имеют свое особое значение. Теорема 1 создает, так сказать, базу для проведения индукции. Теорема 2 дает право неограниченного автоматического расширения этой базы, право перехода от данного частного случая к следующему, от $n$ к $n+1$.

Если не доказана теорема 1, а доказана теорема 2 (см. пример 11), то, следовательно, не создана база для проведения индукции, и тогда бессмысленно применять теорему 2, так как и расширять-то, собственно, нечего.

Если не доказана теорема 2, а доказана только теорема 1 (см. примеры 1 и 2), то, хотя база для проведения индукции и создана, право расширения этой базы отсутствует.

Замечание 2. Метод математической индукции разобран выше для простейшего случая. В более сложных случаях формулировки теорем 1 и 2 должны быть соответственно изменены.

Иногда вторая часть доказательства опирается на справедливость утверждения не только для $n=k$, но и для $n=k-1$. В этом случае утверждение в первой части должно быть проверено для двух последовательных значений $n$.

Иногда также вторая часть доказательства состоит в установлении справедливости требуемого рассуждения для какого-то значения $n$ в предположении справедливости его для всех натуральных чисел $k$, меньших $n$. Ниже читатель найдет примеры такого рода (см. пример 3 на стр. 42).

Иногда утверждение доказывается не для всякого натурального $n$, а для всякого целого $n$, превосходящего некоторое целое $m$[1]). В этом случае в первой части доказательства утверждение проверяется для $n=m+1$, а если это требуется, то и для нескольких последующих значений $n$.

**5.** Вернемся еще раз к примеру 1 для выяснения одной существенной стороны метода математической индукции.

Изучая сумму $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ при разных значениях $n$, мы подсчитали, что $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}$, ... и это навело нас на гипотезу, что $S_n=\frac{n}{n+1}$ и при всяком $n$.

---

[1]) Так, например, любое утверждение, касающееся свойств произвольных $n$-угольников, имеет смысл лишь при $n\geqslant 3$.

Для проверки гипотезы мы использовали метод математической индукции.

Нам повезло, мы высказали гипотезу, которая подтвердилась. Если бы мы высказали гипотезу неудачно, то порочность гипотезы обнаружилась бы при попытке доказательства теоремы 2.

**Пример 12.** Рассмотрим суммы

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Допустим, что, изучая $S_n$, мы высказали гипотезу

$$S_n=\frac{n+1}{3n+1}. \qquad (1)$$

При $n=1$ формула (1) верна, так как $S_1=\frac{1}{2}$. Предположим, что формула (1) верна при $n=k$, т. е. $S_k=\frac{k+1}{3k+1}$. Попытаемся доказать, что формула (1) верна и при $n=k+1$, т. е. что $S_{k+1}=\frac{k+2}{3k+4}$. Имеем

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k+1}{3k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^3+4k^2+5k+2}{(k+1)(k+2)(3k+1)},$$

т. е. результат получился иной.

Выходит, что из справедливости формулы (1) при $n=k$ не следует ее справедливость при $n=k+1$. Мы обнаружили, что формула (1) неверна.

Таким образом, *метод математической индукции позволяет в поисках общего закона испытывать возникающие при этом гипотезы, отбрасывать ложные и утверждать истинные.*

Чтобы научиться применять метод математической индукции, надо рассмотреть достаточное количество задач.

Чтобы не повторять без конца слова «Теорема 1» и «Теорема 2», мы условимся в дальнейшем помечать первую и вторую части доказательства по индукции (эти части и составляют содержание двух теорем, доказательство которых равносильно пользованию методом индукции) знаками 1° и 2°. Кроме того, мы будем различать примеры, снабженные подробными решениями, и задачи, предназначенные для самостоятельной работы читателя. В конце книги приведены указания, относящиеся к решению всех приведенных в тексте задач. Иногда эти указания представляют собой лишь ссылку на иную, доступную читателям литературу; в других случаях они содержат полное решение задачи.

ЧАСТЬ I

# ИНДУКЦИЯ В АРИФМЕТИКЕ И В АЛГЕБРЕ

## § 1. Доказательства тождеств; задачи арифметического характера

**Пример 1.** Выпишем в порядке возрастания нечетные положительные числа 1, 3, 5, 7, ... Обозначим первое из них $u_1$, второе $u_2$, третье $u_3$ и т. д., т. е. $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_4 = 7$, ... Поставим перед собой такую задачу: составить формулу, выражающую нечетное число $u_n$ через его номер $n$.

Решение. Первое нечетное число $u_1$ можно записать так:

$$u_1 = 2 \cdot 1 - 1; \qquad (1)$$

второе нечетное число $u_2$ можно записать так:

$$u_2 = 2 \cdot 2 - 1; \qquad (2)$$

третье нечетное число $u_3$ можно записать так:

$$u_3 = 2 \cdot 3 - 1. \qquad (3)$$

Внимательно рассматривая равенства (1), (2), (3), можно высказать гипотезу, что для получения любого нечетного числа достаточно от удвоенного номера его отнять 1, т. е. для $n$-го нечетного числа имеем формулу

$$u_n = 2n - 1. \qquad (4)$$

Докажем, что формула эта справедлива.

1°. Равенство (1) показывает, что для $n = 1$ формула (4) справедлива.

2°. Предположим, что формула (4) справедлива для $n=k$, т. е. $k$-е нечетное число имеет вид $u_k=2k-1$. Докажем, что тогда формула (4) обязана быть справедливой и для $(k+1)$-го нечетного числа, т. е. что $(k+1)$-е нечетное число имеет вид $u_{k+1}=2(k+1)-1$, или, что все равно, $u_{k+1}=2k+1$.

Для получения $(k+1)$-го нечетного числа достаточно к $k$-му нечетному числу прибавить 2, т. е. $u_{k+1}=u_k+2$. Но, по условию, $u_k=2k-1$. Значит, $u_{k+1}=(2k-1)+$ $+2=2k+1$, что и требовалось доказать.

*Ответ*. $u_n=2n-1$.

**Пример 2.** Вычислить сумму первых $n$ нечетных чисел.

Решение. Обозначим искомую сумму $S_n$, т. е.

$$S_n=1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

Для решения таких задач в математике существуют готовые формулы. Нам интересно решить эту задачу, не прибегая к готовой формуле, а пользуясь методом математической индукции. Для этого прежде всего надо построить гипотезу, т. е. просто постараться угадать ответ.

Придаем $n$ последовательно значения 1, 2, 3, ... до тех пор, пока у нас не накопится достаточно материала, чтобы на основе его построить более или менее надежную гипотезу. После этого останется только эту гипотезу проверить методом математической индукции.

Имеем $S_1=1$, $S_2=4$, $S_3=9$, $S_4=16$, $S_5=25$, $S_6=36$. Теперь все зависит от наблюдательности решающего задачу, от его способности по частным результатам угадать общий. Полагаем, что в данном случае легко заметить, что $S_1=1^2$, $S_2=2^2$, $S_3=3^2$, $S_4=4^2$. На основе этого можно предположить, что вообще $S_n=n^2$.

Докажем, что гипотеза эта справедлива.

1°. При $n=1$ сумма представляется одним слагаемым, равным 1. Выражение $n^2$ при $n=1$ также равно 1. Значит, при $n=1$ гипотеза верна.

2°. Допустим, что гипотеза верна для $n=k$, т. е. $S_k=k^2$. Докажем, что тогда гипотеза должна быть верной и для $n=k+1$, т. е. $S_{k+1}=(k+1)^2$. Действительно, $S_{k+1}=S_k+$ $+(2k+1)$. Но $S_k=k^2$ и потому $S_{k+1}=k^2+(2k+1)=$ $=(k+1)^2$, что и требовалось доказать.

*Ответ*. $S_n=n^2$.

**Задача 1.** Найти $u_n$, если известно, что $u_1=1$ и что при всяком натуральном $k>1$ $u_k=u_{k-1}+3$.

Указание. $u_1=3\cdot1-2$, $u_2=3\cdot2-2$.

**Задача 2.** Найти сумму $S_n=1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}$.

Указание. $S_1=2-1$, $S_2=2^2-1$, $S_3=2^3-1$.

**Пример 3.** Доказать, что сумма $n$ первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Решение. Эта задача отличается от предыдущих тем, что гипотезу здесь строить не надо, она дана. Нужно только доказать, что гипотеза верна.

Обозначим искомую сумму $S_n$, т. е. $S_n=1+2+\ldots+n$.

1°. При $n=1$ гипотеза верна.

2°. Пусть $S_k=1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Покажем, что $S_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. В самом деле,

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Задача решена.

**Пример 4.** Доказать, что сумма квадратов $n$ первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение. Пусть $S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

1°. $S_2(1)=1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$.

2°. Предположим, что $S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Тогда

$$S_2(n+1)=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

и окончательно

$$S_2(n+1)=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

**Пример 5.** Доказать, что

$$S_n=1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. 1°. При $n=1$ гипотеза, очевидно, верна ($(-1)^0=1$).

2°. Пусть

$$S_k=1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}.$$

Докажем, что

$$S_{k+1}=1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2=$$
$$=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Действительно,

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k(k+1)^2=$$
$$=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=$$
$$=(-1)^k\left[(k+1)-\frac{k}{2}\right](k+1)=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

**Задача 3.** Доказать, что

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

**Задача 4.** Доказать, что сумма кубов $n$ первых чисел натурального ряда равна $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

**Задача 5.** Доказать, что

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\quad (x\neq 1).$$

**Пример 6.** Доказать, что

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Решение. 1°. $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$.

2°. Если

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

то

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n+n(n+1)=$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Пример 6 можно также вывести из результатов примеров 3 и 4, если заметить, что

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n=$$
$$=1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\ldots$$
$$\ldots+(n-1)[(n-1)+1]=[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]+$$
$$+[1+2+\ldots+(n-1)].$$

**Задача 6.** Доказать, что

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

**Задача 7.** Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

**Задача 8.** Доказать, что

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

**Задача 9.** Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

**Задача 10.** Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

**Задача 11.** Доказать, что

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}.$$

**Пример 7.** Доказать, что если $v_0=2$, $v_1=3$ и для всякого натурального $k$ имеет место соотношение $v_{k+1}=3v_k-2v_{k-1}$, то $v_n=2^n+1$.

Решение. 1°. Для $n=0$ и $n=1$ утверждение справедливо по условию.

2°. Предположим, что $v_{k-1}=2^{k-1}+1$; $v_k=2^k+1$. Тогда $v_{k+1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)=2^{k+1}+1$.

**Задача 12.** Доказать, что если $u_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$, $u_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$ и для всякого натурального $k>2$ имеет место соотношение $u_k=(\alpha+\beta)u_{k-1}-\alpha\beta u_{k-2}$, то $u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

**Пример 8.** Произведение $1\cdot2\cdot3\ldots n$ обозначается знаком $n!$ и читается так: «$n$ факториал». Полезно запомнить, что $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$.

Вычислить $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$

Решение.

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1, \quad S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5,$$
$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23.$$

Присматриваясь к этим результатам, можно заметить, что

$$S_1 = 2! - 1, \quad S_2 = 3! - 1, \quad S_3 = 4! - 1.$$

Это дает возможность высказать гипотезу, что

$$S_n = (n+1)! - 1.$$

Проверим эту гипотезу.

1°. Для $n = 1$ гипотеза верна, так как $S_1 = 1 \cdot 1! = 2! - 1$.

2°. Пусть

$$S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Покажем, что

$$S_{k+1} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = \\ = (k+2)! - 1.$$

Действительно,

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+1)! = [(k+1)! - 1] + \\ + (k+1)(k+1)! = (k+1)!\,[1 + (k+1)] - 1 = \\ = (k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

**Задача 13.** Доказать тождество

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

**Пример 9.** Дано:

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = a \quad (\alpha \neq \beta), \quad A_2 = m - \frac{a}{m-1},$$

$$A_3 = m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m-1}}, \quad A_4 = m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m-1}}} \quad \text{и т. д.,}$$

т. е. для $k > 1$

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k} \quad (m \neq 1).$$

Доказать, что

$$A_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}. \qquad (1)$$

Решение. 1°. Докажем сначала, что формула (1) верна для $n=2$. По условию,

$$A_2 = m - \frac{a}{m-1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)-1} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}.$$

По формуле (1) $A_2 = \frac{(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)}$. Сократив последнюю дробь на $\alpha-\beta$, имеем $A_2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}$, что и требовалось доказать.

2°. Пусть формула (1) справедлива для $n=k$, т. е.

$$A_k = \frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}{(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})}. \tag{2}$$

Докажем, что тогда она должна быть справедлива и для $n=k+1$, т. е. $A_{k+1} = \frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}$.

Действительно, $A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k}$ или $A_{k+1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta}{A_k}$.

Пользуясь равенством (2), имеем

$$A_{k+1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta\,[(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})]}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)} =$$

$$= \frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}.$$

Теорема доказана.

**Задача 14.** Упростить многочлен

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

**Пример 10.** Доказать, что любое целое число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством в 3 и 5 рублей.

Решение. 1°. Для 8 рублей утверждение справедливо (ибо $8=3+5$).

2°. Пусть утверждение верно для $k$ рублей, где $k$ — целое число, большее или равное 8.

Возможны два случая: 1) $k$ рублей уплачивается одними трехрублевыми билетами и 2) $k$ рублей уплачивается денежными билетами, среди которых есть хоть один билет пятирублевого достоинства.

В первом случае трехрублевых билетов должно быть не менее трех, так как в этом случае $k > 8$. Для того чтобы уплатить $k+1$ рубль, заменим три трехрублевых билета двумя пятирублевыми.

Во втором случае для уплаты $k+1$ рубля заменим один пятирублевый билет двумя трехрублевыми.

**Пример 11.** Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Решение. 1°. Сумма $1^3+2^3+3^3$ делится на 9. Значит, утверждение справедливо, когда первым из трех последовательных натуральных чисел является 1.

2°. Пусть сумма $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$, где $k$ — некоторое натуральное число, делится на 9. Сумма

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=$$
$$=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27=$$
$$=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3)$$

представляет собой сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 9, а потому тоже делится на 9.

**Задача 15.** Доказать, что при любом целом $n \geqslant 0$

$$A_n = 11^{n+2}+12^{2n+1}$$

делится на 133.

**Пример 12.** Из $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$ произвольно выбрали $n+1$ число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся хотя бы два числа, из которых одно делится на другое.

Решение[1]. 1°. Для двух чисел 1, 2 утверждение справедливо.

2°. Допустим, что из $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$, где $n \geqslant 2$, удалось выбрать так $n+1$ число, что ни одно из них не делится на другое. Совокупность всех этих чисел обозначим для краткости $M_{n+1}$. Докажем, что тогда из $2n-2$ чисел $1, 2, \ldots, 2n-2$ можно выбрать $n$ чисел таких, что опять ни одно из них не будет делиться на другое.

Возможны четыре случая:

1) $M_{n+1}$ не содержит ни $2n-1$, ни $2n$.

2) $M_{n+1}$ содержит $2n-1$ и не содержит $2n$.

---

[1]) Это решение принадлежит М. А. Фридману.

3) $M_{n+1}$ содержит $2n$ и не содержит $2n-1$.

4) $M_{n+1}$ содержит и $2n-1$, и $2n$.

Случай 1. Исключим из $M_{n+1}$ какое-нибудь число. Останется $n$ чисел, каждое из которых не больше, чем $2n-2$. Ни одно из этих чисел не делится на другое.

Случай 2. Исключим из $M_{n+1}$ число $2n-1$. Останется $n$ чисел, каждое из которых не больше, чем $2n-2$. Ни одно из этих $n$ чисел не делится на другое.

Случай 3. Исключим из $M_{n+1}$ число $2n$ и опять получим тот же результат.

Случай 4. Прежде всего заметим, что в $M_{n+1}$ не содержится число $n$, так как иначе в $M_{n+1}$ нашлось бы два числа ($2n$ и $n$), из которых одно делится на другое.

Исключим из $M_{n+1}$ числа $2n-1$ и $2n$. Совокупность оставшихся $n-1$ чисел обозначим $M_{n-1}$. Присоединим к $M_{n-1}$ число $n$. Получим $n$ чисел, каждое из которых не превосходит $2n-2$. Остается показать, что среди этих $n$ чисел ни одно не делится на другое.

В $M_{n+1}$ не было двух чисел, из которых одно делится на другое. Значит, таких чисел не было и в $M_{n-1}$. Остается только убедиться в том, что таких чисел не появилось и тогда, когда мы к $M_{n-1}$ присоединили число $n$.

Для этого достаточно убедиться в том, что: 1) ни одно число, входящее в $M_{n-1}$, не делится на $n$ и 2) число $n$ не делится ни на одно из чисел, входящих в $M_{n-1}$.

Первое вытекает из того, что все числа, входящие в $M_{n-1}$, не превосходят $2n-2$.

Второе вытекает из того, что число $2n$ не делится ни на одно из чисел, входящих в $M_{n-1}$.

Итак, если допустить, что утверждение неверно для $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$, то оно неверно и для $2(n-1)$ чисел $1, 2, \ldots, 2n-2$. Значит, если утверждение верно для $2(n-1)$ чисел $1, 2, \ldots, 2n-2$, то оно верно и для $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$.

Отсюда и из пункта 1° следует, что наше утверждение справедливо для $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$, где $n$ — любое натуральное число.

Заметим, что эта задача имеет следующее простое решение.

Выберем из $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$ произвольное $n+1$ число. Совокупность этих чисел обозначим $M_{n+1}$.

Каждое четное число, входящее в $M_{n+1}$, разделим на такую степень двойки, чтобы частное было нечетным.

Совокупность этих частных и всех нечетных чисел, входящих в $M_{n+1}$, обозначим через $M'_{n+1}$. В $M'_{n+1}$ содержится $n+1$ нечетное число, каждое из которых меньше $2n$.

Так как всех положительных нечетных чисел, меньших $2n$, имеется всего $n$, то в $M'_{n+1}$ найдутся хотя бы два равных числа. Каждое из этих чисел пусть равно $k$.

Полученный результат означает, что в $M_{n+1}$ было два числа $2^s k$ и $2^t k$ (где одно из чисел $s$ и $t$ может равняться нулю). Но одно из чисел $2^s k$ и $2^t k$ делится на другое.

**Задача 16.** Доказать, что $n$ различных прямых, проведенных на плоскости через одну точку, делят плоскость на $2n$ частей.

**Пример 13.** Доказать, что $n$ плоскостей, проходящих через одну точку так, что никакие три из них не проходят через одну прямую, делят пространство на $A_n = n(n-1)+2$ частей.

Решение. 1°. Одна плоскость делит пространство на две части, и $A_1 = 2$. Для $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Предположим, что утверждение справедливо для $n=k$, т. е. $k$ плоскостей делят пространство на $k(k-1)+2$ частей. Докажем, что тогда $k+1$ плоскостей делят пространство на $k(k+1)+2$ частей.

Действительно, пусть $P$ есть $(k+1)$-я плоскость. С каждой из первых $k$ плоскостей плоскость $P$ пересекается по некоторой прямой и, таким образом, плоскость $P$ разбита на части посредством $k$ различных прямых, проходящих через одну точку. На основании задачи 16 утверждаем, что плоскость $P$ разбита на $2k$ частей, каждая из которых представляет собой плоский угол с вершиной в данной точке.

Первые $k$ плоскостей делят пространство на некоторые многогранные углы. Некоторые из этих многогранных углов делятся посредством плоскости $P$ на две части.

Общей гранью двух таких частей служит часть плоскости, ограниченная двумя лучами, по которым $P$ пересекается с гранями данного многогранного угла, т. е. один из $2k$ плоских углов, на которые плоскость $P$ разбита.

Это означает, что число многогранных углов, разбиваемых на две части плоскостью $P$, не может быть больше, чем $2k$.

С другой стороны, каждая из $2k$ частей, на которые разбивается плоскость $P$, в результате пересечения ее с первыми $k$ плоскостями, является общей гранью двух многогранных углов и таким образом делит многогранный угол, образованный первыми $k$ плоскостями, на две части.

Это означает, что число многогранных углов, которые разбиваются на две части плоскостью $P$, не может быть меньше, чем $2k$.

Итак, плоскость $P$ разбивает на две части точно $2k$ частей пространства, образованных первыми $k$ плоскостями. Поэтому если $k$ плоскостей разбивают пространство на $k(k-1)+2$ частей, $k+1$ плоскость разбивает пространство на $[k(k-1)+2]+2k=k(k+1)+2$ частей. Утверждение доказано.

## § 2. Тригонометрические и алгебраические задачи

**Пример 14.** Доказать тождество

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\ \ldots\ \cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Решение. 1°. При $n=0$ тождество справедливо, так как

$$\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}.$$

2°. Пусть тождество справедливо при $n=k$, т. е.

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\ \ldots\ \cos 2^k\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$$

Тогда оно справедливо и при $n=k+1$. Действительно,

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\ldots\cos 2^k\alpha\cos 2^{k+1}\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}=\frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}.$$

**Пример 15.** Доказать, что $A_n=\cos n\theta$, если известно, что $A_1=\cos\theta$; $A_2=\cos 2\theta$ и для всякого натурального $k>2$ имеет место соотношение $A_k=2\cos\theta A_{k-1}-A_{k-2}$.

Решение. 1°. Утверждение справедливо при $n=1$ и $n=2$.

2°. Пусть $A_{k-2}=\cos(k-2)\theta$, $A_{k-1}=\cos(k-1)\theta$. Тогда $A_k=2\cos\theta\cos(k-1)\theta-\cos(k-2)\theta=\cos k\theta$, ибо

$$\cos k\theta+\cos(k-2)\theta=2\cos\theta\cos(k-1)\theta.$$

**Пример 16.** Доказать, что

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}.$$

Решение. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо. 2°. Пусть

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx = \frac{\sin \frac{k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2}.$$

Тогда

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx + \sin (k+1) x =$$

$$= \frac{\sin \frac{k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} + \sin (k+1) x =$$

$$= \frac{\sin \frac{k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} + 2 \sin \frac{k+1}{2} x \cos \frac{k+1}{2} x =$$

$$= \frac{\sin \frac{k+2}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{k+1}{2} x,$$

ибо

$$2 \cos \frac{k+1}{2} x \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{k+2}{2} x - \sin \frac{kx}{2}.$$

**Задача 17.** Доказать, что

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

**Задача 18.** Доказать, что

$$\sin x + 2 \sin 2x + \ldots + n \sin nx =$$

$$= \frac{(n+1) \sin nx - n \sin (n+1) x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

**Задача 19.** Доказать, что

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx=$$
$$=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos (n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

**Задача 20.** Доказать, что

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x \quad (x\neq m\pi).$$

**Задача 21.** Доказать, что

$$\operatorname{arc\,ctg}3+\operatorname{arc\,ctg}5+\ldots+\operatorname{arc\,ctg}(2n+1)=$$
$$=\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{n+1}{n}-n\operatorname{arc\,tg}1.$$

**Пример 17.** Доказать, что

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)^{*)}.$$

Решение. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо, так как $1+i=2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

2°. Пусть $(1+i)^k=2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)$. Тогда

$$(1+i)^{k+1}=2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=2^{\frac{k+1}{2}}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(k+1)\pi}{4}\right).$$

**Задача 22.** Доказать, что

$$(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$$

**Пример 18.** Доказать теорему:

*Если в результате конечного числа рациональных действий* (т. е. сложения, вычитания, умножения и деления) *над комплексными числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получается число $u$,*

---

*) По определению, $i^2=-1$.

*то в результате тех же действий над сопряженными комплексными числами $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ получится число $\overline{u}$, сопряженное с $u$.*

Решение. 1°. Прежде всего покажем, что утверждение верно для каждого из четырех действий над двумя комплексными числами. Пусть $x_1 = a + bi$, $x_2 = c + di$. Тогда

$$x_1 + x_2 = (a + c) + (b + d) i = u,$$

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d) i = \overline{u}.$$

Точно так же утверждение проверяется для вычитания, умножения и деления.

2°. Пусть теперь дано некоторое рациональное выражение от комплексных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вычисление такого выражения сводится, как известно, к последовательному выполнению одного из четырех действий над двумя комплексными числами, причем действия эти могут быть занумерованы.

Например, пусть $u = \dfrac{x_1x_2 + x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3}$. Для вычисления $u$ достаточно произвести действия:

$$1)\ x_1x_2 = u_1,\ 2)\ x_3x_4 = u_2,\ 3)\ x_1 + x_2 = u_3,$$

$$4)\ u_3 - x_3 = u_4,\ 5)\ u_1 + u_2 = u_5,\ 6)\ u_5 : u_4 = u.$$

Предположим, что утверждение верно для всех выражений, которые вычисляются посредством не более $k$ действий. Термин «действие» здесь означает сложение, либо вычитание, либо умножение, либо деление двух комплексных чисел. Покажем, что тогда утверждение должно быть верно и для выражений, требующих $k + 1$ действий.

Действительно, последнее $(k + 1)$-е действие мы выполняем над числами $u_i$ и $u_j$, которые сами вычислялись посредством не более чем $k$ действий.

В результате замены чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сопряженными, числа $u_i$ и $u_j$ заменяются сопряженными $\overline{u_i}$ и $\overline{u_j}$, а тогда и результат $(k + 1)$-го действия над ними, т. е. число $u$, также заменится сопряженным числом $\overline{u}$.

**Задача 23.** Доказать, что при любом натуральном $n$

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

## § 3. Задачи на доказательство неравенств

**Пример 19.** Доказать, что при любом натуральном $n > 1$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Р е ш е н и е. Обозначим левую часть неравенства через $S_n$.

1°. $S_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$, следовательно, при $n=2$ неравенство справедливо.

2°. Пусть $S_k>\frac{13}{24}$ при некотором $k$. Докажем, что тогда и $S_{k+1}>\frac{13}{24}$. Имеем $S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$, $S_{k+1}=$ $=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$.

Сравнивая $S_k$ и $S_{k+1}$, имеем $S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$, т. е. $S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$.

При любом натуральном $k$ правая часть последнего равенства положительна. Поэтому $S_{k+1}>S_k$. Но $S_k>\frac{13}{24}$, значит, и $S_{k+1}>\frac{13}{24}$.

**Задача 24.** Найти ошибку в рассуждении.

У т в е р ж д е н и е. При любом натуральном $n$ справедливо неравенство $2^n>2n+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть неравенство справедливо при $n=k$, где $k$ — некоторое натуральное число, т. е.

$$2^k>2k+1. \qquad (1)$$

Докажем, что тогда неравенство справедливо и при $n=k+1$, т. е.

$$2^{k+1}>2(k+1)+1. \qquad (2)$$

Действительно, $2^k$ не меньше 2 при любом натуральном $k$. Прибавим к левой части неравенства (1) $2^k$, а к правой 2. Получим справедливое неравенство $2^k+2^k>$ $>2k+1+2$, или $2^{k+1}>2(k+1)+1$. Утверждение доказано.

**Задача 25.** При каких натуральных $n$ справедливо неравенство $2^n>2n+1$?

**Пример 20.** При каких натуральных $n$ справедливо неравенство $2^n > n^2$?

Решение.

При $n=1$ неравенство справедливо, так как $2^1 > 1^2$.
При $n=2$ неравенство несправедливо, так как $2^2 = 2^2$.
При $n=3$ неравенство несправедливо, так как $2^3 < 3^2$.
При $n=4$ неравенство несправедливо, так как $2^4 = 4^2$.
При $n=5$ неравенство справедливо, так как $2^5 > 5^2$.
При $n=6$ неравенство справедливо, так как $2^6 > 6^2$.

По-видимому, неравенство справедливо при $n=1$ и при любом $n > 4$. Докажем это.

1°. При $n=5$ неравенство справедливо.

2°. Пусть

$$2^k > k^2, \tag{1}$$

где $k$ — некоторое натуральное число, большее 4.

Докажем, что

$$2^{k+1} > (k+1)^2. \tag{2}$$

Мы знаем, что $2^k > 2k+1$ при $k > 4$ (задача 25). Поэтому если мы к левой части неравенства (1) прибавим $2^k$, а к правой $2k+1$, получим справедливое неравенство (2).

*Ответ.* $2^n > n^2$, когда $n=1$ и когда $n > 4$.

**Пример 21.** Доказать, что $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$, где $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, $n$ — натуральное число, большее 1 *).

Решение. 1°. При $n=2$ неравенство справедливо, так как $\alpha^2 > 0$.

2°. Пусть неравенство справедливо при $n=k$, где $k$ — некоторое натуральное число, т. е.

$$(1+\alpha)^k > 1+k\alpha. \tag{1}$$

Покажем, что тогда неравенство справедливо и при $n=k+1$, т. е.

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha. \tag{2}$$

Действительно, по условию, $1+\alpha > 0$, поэтому справедливо неравенство

$$(1+\alpha)^{k+1} > (1+k\alpha)(1+\alpha), \tag{3}$$

полученное из неравенства (1) умножением каждой части его на $1+\alpha$. Перепишем неравенство (3) так: $(1+\alpha)^{k+1} >$

---

*) Это неравенство часто называют **неравенством Бернулли**.

$> 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2$. Отбросив в правой части последнего неравенства положительное слагаемое $k\alpha^2$, получим справедливое неравенство (2).

**Задача 26.** Доказать, что при любом натуральном $n>1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

**Задача 27.** Доказать, что при любом натуральном $n>1$

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

**Пример 22.** Доказать, что

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n, \tag{1}$$

где $a+b>0$, $a\neq b$, $n$ — натуральное число, большее 1.

Решение. 1°. При $n=2$ неравенство (1) принимает вид

$$2(a^2+b^2)>(a+b)^2. \tag{2}$$

Так как $a\neq b$, то справедливо неравенство

$$(a-b)^2>0. \tag{3}$$

Прибавив к каждой части неравенства (3) по $(a+b)^2$, получим неравенство (2).

Этим доказано, что при $n=2$ неравенство (1) справедливо.

2°. Пусть неравенство (1) справедливо при $n=k$, где $k$ — некоторое натуральное число, т. е.

$$2^{k-1}(a^k+b^k)>(a+b)^k. \tag{4}$$

Докажем, что тогда неравенство (1) должно быть справедливо и при $n=k+1$, т. е.

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>(a+b)^{k+1}. \tag{5}$$

Умножим обе части неравенства (4) на $a+b$. Так как, по условию, $a+b>0$, то получаем следующее справедливое неравенство:

$$2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)>(a+b)^{k+1}. \tag{6}$$

Для того чтобы доказать справедливость неравенства (5), достаточно показать, что

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b), \tag{7}$$

или, что то же самое,

$$a^{k+1}+b^{k+1}>a^kb+ab^k. \qquad (8)$$

Неравенство (8) равносильно неравенству

$$(a^k-b^k)(a-b)>0. \qquad (9)$$

Если $a>b$, то $a^k>b^k$, и в левой части неравенства (9) имеем произведение двух положительных чисел. Если $a<b$, то $a^k<b^k$, и в левой части неравенства (9) имеем произведение двух отрицательных чисел. В обоих случаях неравенство (9) справедливо.

Этим доказано, что из справедливости неравенства (1) при $n=k$ следует его справедливость при $n=k+1$.

**Пример 23.** Доказать, что при любом $x>0$ и при любом натуральном $n$ справедливо неравенство

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\ldots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1. \qquad (1)$$

Решение. 1°. а) При $n=1$ неравенство (1) принимает вид

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2. \qquad (2)$$

Неравенство (2) вытекает из неравенства $(x-1)^2\geqslant 0$.

б) При $n=2$ неравенство (1) принимает вид

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 3. \qquad (3)$$

Неравенство (2) справедливо при любом $x>0$; значит, оно справедливо и при замене $x$ на $x^2$, т. е. $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$. Прибавив к каждой части последнего неравенства по 1, получим неравенство (3).

2°. Предположим, что неравенство (1) справедливо при $n=k$, где $k$—некоторое натуральное число, т. е.

$$x^k+x^{k-2}+\ldots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1. \qquad (4)$$

Докажем, что тогда неравенство (1) справедливо и при $n=k+2$, т. е.

$$x^{k+2}+x^k+x^{k-2}+\ldots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+3. \qquad (5)$$

Заменив в неравенстве (2) $x$ на $x^{k+2}$, получаем

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant 2. \qquad (6)$$

Сложив почленно неравенства (4) и (6), получим неравенство (5).

Подведем теперь итог.

В пп. 1° а) и б) мы доказали, что неравенство (1) справедливо при $n=1$ и при $n=2$.

В п. 2° мы доказали, что из справедливости неравенства (1) при $n=k$ вытекает его справедливость и при $n=k+2$. Иными словами, п. 2° дает нам право перехода от $n=k$ к $n=k+2$.

Результаты пп. 1° а) и 2° дают нам право утверждать, что неравенство (1) справедливо при любом нечетном $n$. Точно так же результаты пп. 1° б) и 2° дают нам право утверждать, что неравенство (1) справедливо при любом четном $n$.

В целом мы имеем право утверждать, что неравенство (1) справедливо при любом натуральном $n$.

**Пример 24.** Доказать теорему:

*Среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического, т. е. если $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ положительны, то*

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. \qquad (1)$$

Решение. 1°. При $n=2$ неравенство (1) принимает вид

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}. \qquad (2)$$

Это неравенство легко получить из справедливого при любых положительных $a_1$ и $a_2$ неравенства $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant 0$.

Неравенство (2) имеет простой геометрический смысл. На прямой $AB$ отложим последовательно отрезки $a_1$ и $a_2$. На сумме их как на диаметре опишем окружность. Тогда $\frac{a_1+a_2}{2}$ — радиус этой окружности, а $\sqrt{a_1a_2}$ — половина хорды, перпендикулярной к диаметру в общей точке $a_1$ и $a_2$ (рис. 2), из чего и усматривается справедливость неравенства (2).

2°. Предположим, что неравенство (1) справедливо при $n=k$. Докажем, что тогда оно справедливо и при $n=2k$.

Действительно,

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}}=\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}}{2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}}{2}=$$

$$=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots+a_{2k}}{2k}.$$

Неравенство (1) проверено при $n=2$ и, таким образом, можем утверждать, что оно справедливо при $n=4$, 8, 16 и т. д., т. е. вообще при $n=2^s$, где $s$ — натуральное число.

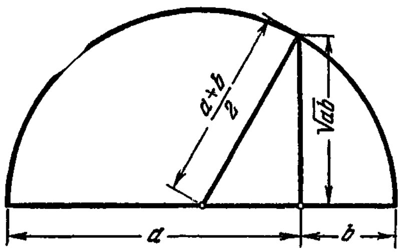



Рис. 2.

3°. Для того чтобы доказать справедливость неравенства (1) при всяком натуральном $n$, покажем, что из справедливости неравенства при $n=k$ следует его справедливость при $n=k-1$.

Итак, пусть $a_1$, $a_2$, ..., $a_{k-1}$ — некоторые положительные числа. Пусть $\lambda$ — некоторое, пока не определенное, положительное число. Тогда

$$\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_{k-1}\lambda}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k}.$$

Выберем $\lambda$ так, чтобы

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1},$$

т. е. положим $\lambda=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$. Имеем

$$\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})}{k-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1},$$

или

$$\sqrt[k-1]{a_1a_2\ldots a_{k-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}.$$

Пусть теперь $m$ — произвольное натуральное число. Если $m=2^s$, то, согласно 2°, для него неравенство справедливо. Если же $m \neq 2^s$, то найдем такое $s$, чтобы $m$ было меньше $2^s$, и тогда на основании 2° и 3° утверждаем, что неравенство верно для $n=m$.

## § 4. Доказательство некоторых теорем элементарной алгебры методом математической индукции

Теорема 1. *Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной со всевозможными их удвоенными попарными произведениями, т. е.*

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+ \\ +2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n). \qquad (1)$$

1°. Для $n=2$ формула (1) может быть доказана непосредственным умножением.

2°. Допустим, что формула (1) верна для $n=k-1$, т. е.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k-1}^2+2S,$$

где $S$ — сумма всевозможных попарных произведений, составленных из $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Докажем, что

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k)^2= \\ =a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k-1}^2+a_k^2+2S_1,$$

где $S_1$ — сумма всевозможных попарных произведений, составленных из $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$, т. е.

$$S_1=S+(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})a_k.$$

Действительно,

$$(a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k)^2=[(a_1+\ldots+a_{k-1})+a_k]^2= \\ =(a_1+\ldots+a_{k-1})^2+2(a_1+\ldots+a_{k-1})a_k+a_k^2= \\ =a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2+2S+2(a_1+\ldots+a_{k-1})a_k+a_k^2= \\ =a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2+2S_1.$$

Теорема 2. *$n$-й член арифметической прогрессии может быть вычислен по формуле*

$$a_n=a_1+d(n-1), \qquad (1)$$

*где $a_1$ — первый член, $d$ — разность прогрессии.*

1°. Для $n=1$ формула (1) верна.

2°. Предположим, что формула (1) верна для $n=k$, т. е. $a_k=a_1+d(k-1)$. Тогда $a_{k+1}=a_k+d=a_1+d(k-1)+$ $+d=a_1+dk$, т. е. формула (1) оказывается справедливой и для $n=k+1$.

Теорема 3. *$n$-й член геометрической прогрессии может быть вычислен по формуле*

$$a_n=a_1q^{n-1}, \tag{1}$$

*где $a_1$ — первый член, $q$ — знаменатель прогрессии.*

1°. Для $n=1$ формула (1) верна.

2°. Пусть $a_k=a_1q^{k-1}$. Тогда $a_{k+1}=a_kq=a_1q^k$.

Теорема 4. *Число перестановок из $m$ элементов может быть вычислено по формуле*

$$P_m=m!. \tag{1}$$

1°. Прежде всего заметим, что $P_1=1$ и, таким образом, при $m=1$ формула (1) верна.

2°. Пусть $P_k=k!$. Докажем, что $P_{k+1}=(k+1)!$.

Из данных $k+1$ элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ возьмем только первые $k$ и составим из них всевозможные перестановки. По условию, таких перестановок будет $k!$.

В каждой из этих перестановок поставим элемент $a_{k+1}$ последовательно перед 1-м элементом, перед 2-м, ..., перед $k$-м, после $k$-го. Этим путем мы из одной перестановки из $k$ элементов получим $k+1$ перестановок из $k+1$ элементов. Всего имеем $k!(k+1)=(k+1)!$ перестановок из $k+1$ элементов.

Необходимо выяснить:

1) нет ли среди этих $(k+1)!$ перестановок двух одинаковых;

2) все ли перестановки из $k+1$ элементов нами получены.

1) Допустим, что среди $(k+1)!$ перестановок имеются две одинаковые. Назовем их $p_1$ и $p_2$. Пусть в перестановке $p_1$ элемент $a_{k+1}$ занимает $s$-е место, считая слева. Тогда и в $p_2$ элемент $a_{k+1}$ занимает $s$-е место, считая слева.

Удалим из $p_1$ и $p_2$ элемент $a_{k+1}$. Получим две одинаковые перестановки из $k$ элементов: $\overline{p_1}$ и $\overline{p_2}$.

Выходит, что для получения $p_1$ и $p_2$ в одну и ту же перестановку из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ два раза на одно и то же место был поставлен элемент $a_{k+1}$. Это противоречит правилу, по которому построены перестановки.

2) Допустим, что некоторая перестановка $p$ из $k+1$ элементов нами не получена. Пусть в $p$ элемент $a_{k+1}$ занимает $s$-е место слева. Удалим из $p$ элемент $a_{k+1}$. Получим перестановку $\bar{p}$ из первых $k$ элементов. Значит, для получения $p$ достаточно было взять перестановку $\bar{p}$ и поставить в нее элемент $a_{k+1}$ так, чтобы он занял $s$-е место слева.

Мы не могли не взять перестановку $\bar{p}$, так как брали всевозможные перестановки из первых $k$ элементов. Мы не могли не поставить элемент $a_{k+1}$ на указанное место, так как ставили его и первым, и вторым, ..., и $(k+1)$-м слева.

Итак, *составленные нами перестановки все различны и всякая перестановка из $k+1$ элементов нами получена.*

Из сказанного вытекает, что $P_{k+1}=(k+1)!$.

Теорема 5. *Число размещений из $m$ элементов по $n$ может быть вычислено по формуле*

$$A_m^n=m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1). \tag{1}$$

1°. Прежде всего заметим, что $A_m^1=m$ и, таким образом, формула (1) верна при $n=1$.

2°. Предположим, что $A_m^k=m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)$, где $k<m$. Докажем, что $A_m^{k+1}=m(m-1)\ \ldots\ (m-k)$.

Для получения всех размещений из $m$ элементов по $k+1$ достаточно взять все размещения из $m$ элементов по $k$ и к каждому из них приписать в конце каждый из оставшихся $m-k$ элементов. Нетрудно убедиться, что составленные таким образом размещения из $m$ элементов по $k+1$ *все различны* и, кроме того, *всякое размещение из $m$ элементов по $k+1$ содержится среди полученных.* Выходит, что $A_m^{k+1}=A_m^k(m-k)=m(m-1)\ \ldots\ (m-k)$.

Теорема 6. *Число сочетаний из $m$ элементов по $n$ может быть вычислено по формуле*

$$C_m^n=\frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ n}. \tag{1}$$

1°. Прежде всего заметим, что $C_m^1=m$ и, таким образом, при $n=1$ формула (1) верна.

2°. Допустим, что $C_m^k=\dfrac{m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ k}$. Докажем, что $C_m^{k+1}=\dfrac{m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\ \ldots\ k(k+1)}$.

Для получения всех сочетаний из $m$ элементов по $k+1$ выпишем все сочетания из $m$ элементов по $k$ и к каждому из них в качестве $(k+1)$-го элемента присоединим каждый из $m-k$ оставшихся элементов. Ясно, что таким путем будут получены все сочетания из $m$ элементов по $k+1$, но каждое из них получится $k+1$ раз.

Действительно, сочетание $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ получится, когда к сочетанию $a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}$ присоединится элемент $a_1$, когда к сочетанию $a_1, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}$ присоединится элемент $a_2$ и т. д., когда, наконец, к сочетанию $a_1, a_2, \ldots, a_k$ присоединится элемент $a_{k+1}$. Таким образом,

$$C_m^{k+1} = C_m^k \frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{1\cdot 2\ldots k(k+1)}.$$

Теорема 7. *Каковы бы ни были числа $a$ и $b$ и каково бы ни было натуральное число $n$, имеет место формула*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^s a^{n-s}b^s + \ldots \\ \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n \qquad (1)$$

(формула бинома Ньютона).

1°. При $n=1$ имеем $a+b=a+b$ и, таким образом, для этого случая формула (1) верна.

2°. Пусть $(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \ldots + b^k$. Тогда

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = \\ = (a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \ldots + b^k)(a+b) = \\ = a^{k+1} + (1 + C_k^1)\, a^k b + (C_k^1 + C_k^2)\, a^{k-1}b^2 + \ldots \\ \ldots + (C_k^s + C_k^{s+1})\, a^{k-s}b^{s+1} + \ldots + b^{k+1}.$$

Имея в виду, что $C_k^s + C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$, получаем

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1}b^2 + \ldots \\ \ldots + C_{k+1}^{s+1} a^{k-s}b^{s+1} + \ldots + b^{k+1}.$$

ЧАСТЬ II

# ИНДУКЦИЯ В ГЕОМЕТРИИ

## § 1. Вычисление по индукции

Наиболее естественное применение метода математической индукции в геометрии, близкое к использованию этого метода в теории чисел и в алгебре,— это применение к решению геометрических задач на вычисление. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Вычислить сторону $a_{2^n}$ правильного $2^n$-угольника, вписанного в круг радиуса $R$.

Решение. 1°. При $n=2$ правильный $2^n$-угольник есть квадрат; его сторона $a_4=R\sqrt{2}$. Далее, согласно формуле удвоения

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}}$$

находим, что сторона правильного восьмиугольника $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, сторона правильного шестнадцатиугольника $a_{16}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, сторона правильного тридцатидвухугольника $a_{32}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. Можно предположить поэтому, что сторона правильного вписанного $2^n$-угольника при любом $n\geqslant 2$ равна

$$a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2\ \text{двойки}}}. \qquad (1)$$

2°. Допустим, что сторона правильного вписанного $2^n$-угольника выражается формулой (1). В таком случае по формуле удвоения

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-R^2\frac{2-\overbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}^{}}{4}}}\,\underset{n-2\ \text{двойки}}{} =$$

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-R^2\,\dfrac{2-\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-2\ \text{двойки}}}{4}}}=$$

$$=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\ \text{двойка}}},$$

откуда следует, что формула (1) справедлива для всех $n$.

Из формулы (1) вытекает, что длина $C=2\pi R$ окружности радиуса $R$ равна пределу выражения

$$2^nR\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-2\ \text{двойки}}}$$

при неограниченном возрастании $n$ и, следовательно,

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-2\ \text{двойки}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{n}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-1\ \text{двойка}}}.$$

**Задача 1.** Пользуясь формулой (1), доказать, что $\pi$ равно пределу, к которому стремится выражение

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots},$$

когда число множителей (квадратных корней) в знаменателе неограниченно возрастает (ф о р м у л а  В и е т а). Закон составления множителей определяется первыми тремя, которые уже написаны.

**Пример 2.** Указать правило вычисления радиусов $r_n$ и $R_n$ вписанной и описанной окружностей правильного $2^n$-угольника, имеющего данный периметр $P$.

Решение. 1°. $r_2=\frac{P}{8}$, $R_2=\frac{P\sqrt{2}}{8}$.

2°. Зная радиусы $r_n$ и $R_n$ вписанной и описанной окружностей правильного $2^n$-угольника периметра $P$, вычислим радиусы $r_{n+1}$ и $R_{n+1}$ вписанной и описанной окружностей $2^{n+1}$-угольника того же периметра. Пусть $AB$ (рис. 3) — сторона правильного $2^n$-угольника периметра $P$, $O$ — его центр, $C$ — середина дуги $AB$ и $D$ — середина хорды $AB$; далее, пусть $EF$ — средняя линия треугольника $ABC$ и $G$ — ее середина. Так как $\angle EOF=\angle EOC+\angle FOC=$ $=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB$, то $EF$ равно стороне правильного $2^{n+1}$-угольника, вписанного в круг радиуса $OE$, причем периметр этого $2^{n+1}$-угольника равен $2^{n+1}EF=$ $=2^{n+1}\frac{AB}{2}=2^nAB$, т. е. тоже равен $P$. Таким образом, $r_{n+1}=OG$ и $R_{n+1}=OE$.

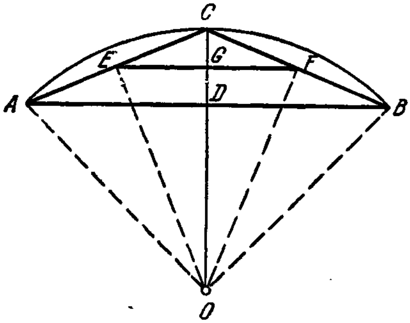


Рис. 3.

Далее, ясно, что $OC-OG=OG-OD$, т. е. $R_n-r_{n+1}=$ $=r_{n+1}-r_n$, откуда $r_{n+1}=\frac{R_n+r_n}{2}$. Наконец, из прямоугольного треугольника $OEC$ имеем $OE^2=OC\cdot OG$, т. е. $R_{n+1}^2=R_nr_{n+1}$ и $R_{n+1}=\sqrt{R_n\cdot r_{n+1}}$. Итак, окончательно:

$$r_{n+1}=\frac{R_n+r_n}{2} \text{ и } R_{n+1}=\sqrt{R_n\cdot r_{n+1}}.$$

Рассмотрим последовательность $r_2, R_2, r_3, R_3, \ldots, r_n, R_n, \ldots$ Члены этой последовательности стремятся к радиусу окружности длины $P$, т. е. к $\frac{P}{2\pi}$. В частности, при $P=2$ имеем $r_2=\frac{1}{4}$ и $R_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Полагая еще $r_1=0$ и $R_1=\frac{1}{2}$, получаем следующую теорему:

*Если составить последовательность чисел*

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}+1}{8}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{8}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}+\sqrt{2}+1}{16}, \ldots,$$

*первые два члена которой равны* 0 *и* $\frac{1}{2}$, *а каждый из остальных попеременно равен среднему арифметическому и среднему геометрическому двух предшествующих, то члены этой последовательности стремятся к* $\frac{1}{\pi}$.

**Пример 3.** Определить сумму внутренних углов $n$-угольника (не обязательно выпуклого!).

Решение. 1°. Сумма внутренних углов треугольника равна $2d$. Сумма внутренних углов четырехугольника равна $4d$, так как каждый четырехугольник можно разбить на два треугольника (рис. 4).

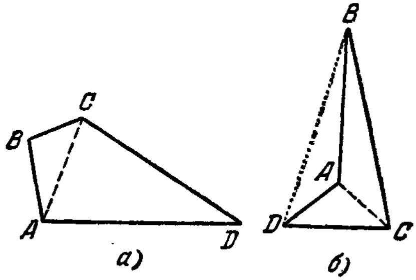



Рис. 4.

2°. Предположим уже доказанным, что сумма внутренних углов любого $k$-угольника, где $k < n$, равна $2d(k-2)$, и рассмотрим $n$-угольник $A_1A_2\ldots A_n$.

Прежде всего докажем, что во всяком многоугольнике можно найти диагональ [1]), разбивающую его на два многоугольника с меньшим числом сторон (для выпуклого многоугольника это ясно). Пусть $A$, $B$, $C$ — любые три смежные вершины многоугольника. Через вершину $B$ проведем всевозможные лучи, заполняющие внутренний угол $ABC$ многоугольника до пересечения их с контуром многоугольника.

Возможны два случая:

А. Все лучи упираются в одну и ту же сторону многоугольника (рис. 5, *а*). В этом случае диагональ $AC$ разбивает наш $n$-угольник на $(n-1)$-угольник и треугольник.

Б. Не все лучи упираются в одну и ту же сторону (рис. 5, *б*). В этом случае один из лучей будет проходить через некоторую вершину $M$ многоугольника, и диагональ $BM$ будет разбивать многоугольник на два многоугольника с меньшим числом сторон.

---

[1]) Заметим, что диагональ невыпуклого многоугольника может пересекать его или целиком лежать вне его (как диагональ $BD$ на рис. 4, *б*).

Вернемся теперь к доказательству нашего основного утверждения. В $n$-угольнике $A_1A_2\ldots A_n$ проведем диагональ $A_1A_k$, разбивающую его на $k$-угольник $A_1A_2\ldots A_k$ и $(n-k+2)$-угольник $A_1A_kA_{k+1}\ldots A_n$. Согласно сделанному предположению, суммы внутренних углов $k$-угольника и $(n-k+2)$-угольника соответственно равны $2d(k-2)$ и $2d[(n-k+2)-2]=2d(n-k)$; поэтому сумма углов $n$-угольника

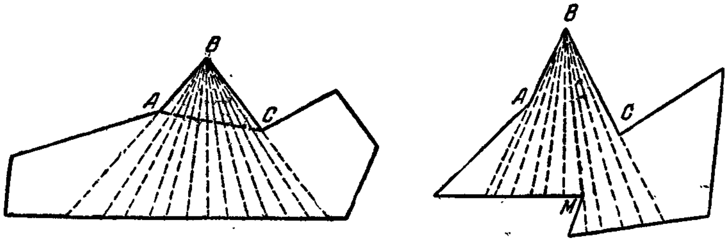




Рис. 5.

$A_1A_2\ldots A_n$ будет равна $2d(k-2)+2d(n-k)=2d(n-2)$, откуда следует справедливость нашего утверждения для всех $n$.

Как мы видели в примере 3, во всяком многоугольнике можно найти диагональ, разбивающую его на два многоугольника с меньшим числом сторон. Каждый из этих многоугольников, не являющийся треугольником, можно снова разбить на два многоугольника с меньшим числом сторон и т. д. Следовательно, каждый многоугольник можно непересекающимися диагоналями разбить на треугольники.

**Пример 4.** На сколько треугольников $n$-угольник (не обязательно выпуклый) может быть разбит своими непересекающимися диагоналями?

Решение. 1°. Для треугольника это число равно единице (в треугольнике нельзя провести ни одной диагонали); для четырехугольника это число равно, очевидно, двум (см. рис. 4, *а* и *б*).

2°. Предположим, что мы уже знаем, что каждый $k$-угольник, где $k<n$, разбивается непересекающимися диагоналями на $k-2$ треугольника (независимо от способа разбиения). Рассмотрим одно из разбиений $n$-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ на треугольники. Пусть $A_1A_k$ — одна из диагоналей этого разбиения; она делит $n$-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ на $k$-угольник

$A_1A_2\ldots A_k$ и $(n-k+2)$-угольник $A_1A_kA_{k+1}\ldots A_n$. В силу сделанного предположения, общее число треугольников разбиения будет равно

$$(k-2)+[(n-k+2)-2]=n-2;$$

тем самым наше утверждение доказано для всех $n$.

**Задача 2.** Определить число $N$ непересекающихся диагоналей, используемых при разбиении $n$-угольника на треугольники.

**Пример 5.** Указать правило вычисления числа $P(n)$ способов, которыми выпуклый $n$-угольник может быть разбит на треугольники непересекающимися диагоналями.

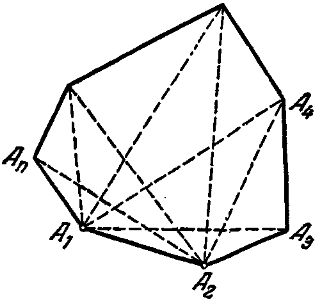


Рис. 6.

Решение. 1°. Для треугольника это число равно, очевидно, единице: $P(3)=1$.

2°. Предположим, что мы уже определили числа $P(k)$ для всех $k<n$; найдем, чему равно в таком случае $P(n)$. Для этого рассмотрим выпуклый $n$-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ (рис. 6). При всяком разбиении его на треугольники сторона $A_1A_2$ будет стороной одного из треугольников разбиения, третья вершина этого треугольника может совпасть с каждой из точек $A_3, A_4, \ldots, A_n$. Число способов разбиения $n$-угольника, при которых эта вершина совпадает с точкой $A_3$, равно числу способов разбиения на треугольники $(n-1)$-угольника $A_1A_3A_4\ldots A_n$, т. е. равно $P(n-1)$. Число способов разбиения, при которых эта вершина совпадает с $A_4$, равно числу способов разбиения $(n-2)$-угольника $A_1A_4A_5\ldots A_n$, т. е. равно $P(n-2)=$ $=P(n-2)P(3)$; число способов разбиения, при которых она совпадает с $A_5$, равно $P(n-3)\cdot P(4)$, так как каждое из разбиений $(n-3)$-угольника $A_1A_5\ldots A_n$ можно комбинировать при этом с каждым из разбиений четырехугольника $A_2A_3A_4A_5$, и т. д. Таким образом, мы приходим к следующему соотношению:

$$P(n)=P(n-1)+P(n-2)P(3)+P(n-3)P(4)+\ldots$$
$$\ldots+P(3)P(n-2)+P(n-1). \qquad (2)$$

С помощью этой формулы последовательно получаем:

$P(4)=P(3)+P(3)=2,$

$P(5)=P(4)+P(3)P(3)+P(4)=5,$

$P(6)=P(5)+P(4)P(3)+P(3)P(4)+P(5)=14,$

$P(7)=P(6)+P(5)P(3)+P(4)P(4)+P(3)P(5)+P(6)=42$

и т. д.

Примечание. С помощью формулы (7) можно доказать, что при всяком $n$ имеем $P(n)=\frac{2(2n-5)!}{(n-1)!\,(n-3)!}$ [см., например, книгу А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 5), решение задачи 51 б)].

**Задача 3.** На сколько частей выпуклый $n$-угольник разбивается всеми своими диагоналями, если никакие три из них не пересекаются в одной точке.

## § 2. Доказательство по индукции

Уже некоторые предложения предыдущего параграфа можно рассматривать как примеры использования метода математической индукции для доказательства геометрических теорем.

Например, предложение примера 3 можно сформулировать так: доказать, что сумма углов $n$-угольника равна $2d(n-2)$; в примере 4 было доказано, что непересекающиеся диагонали разбивают $n$-угольник на $n-2$ треугольника. В этом параграфе мы рассмотрим дальнейшие примеры такого же рода.

**Пример 6.** Дано $n$ произвольных квадратов. Доказать, что их можно разрезать на части так, что из полученных частей можно сложить новый квадрат.

Решение. 1°. При $n=1$ наше утверждение не нуждается в доказательстве. Докажем, что и при $n=2$ оно также справедливо. Обозначим стороны заданных квадратов $ABCD$ и $abcd$ соответственно через $x$ и $y$; пусть $x \geqslant y$. На сторонах квадрата $ABCD$ со стороной $x$ (рис. 7, $a$) отложим отрезки $AM=BN=CP=DQ=\frac{x+y}{2}$ и разрежем этот квадрат по прямым $MP$ и $NQ$, которые, как легко видеть, пересекаются в центре $O$ квадрата и образуют между собой прямой угол, разбивая квадрат на четыре равные части. Эти куски приложим ко второму квадрату, как показано на рис. 7, *б*. Полученная фигура тоже будет квадратом, так как углы при точках $M'$, $N'$, $P'$, $Q'$ — развернутые, углы $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ — прямые и $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$.

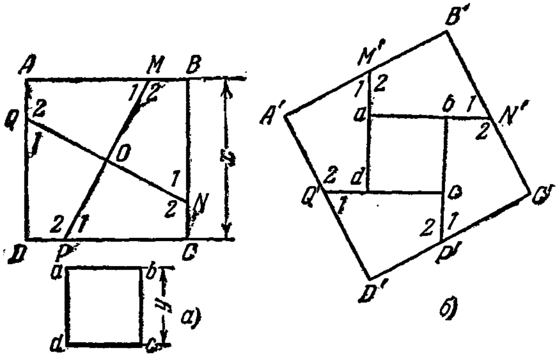



Рис. 7.

2°. Допустим, что наше утверждение уже доказано для $n$ квадратов, и пусть дано $n+1$ квадратов $K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}$.

Выберем любые два из этих квадратов, скажем $K_n$ и $K_{n+1}$. Как показано в п. 1°, разрезая один из этих квадратов и прикладывая полученные куски ко второму, можно получить новый квадрат $K'$.

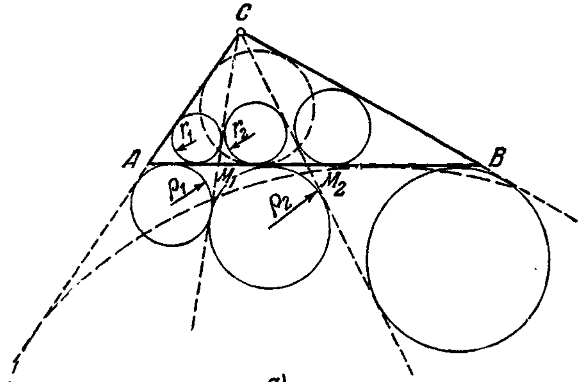
Далее, согласно сделанному нами предположению квадраты $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}, K'$ можно так разрезать на части, что из этих частей можно сложить новый квадрат, что и требовалось доказать.

**Пример 7.** Дан треугольник $ABC$. Через его вершину $C$ проведено $n-1$ прямых $CM_1, CM_2, \ldots, CM_{n-1}$, разбивающих треугольник на $n$ меньших треугольников $ACM_1$, $M_1CM_2$, ... ..., $M_{n-1}CB$. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ соответственно радиусы вписанных и вневписанных окружностей этих треугольников (все вневписанные окружности вписаны в угол $C$ треугольника; см. рис. 8, *а*), и пусть $r$ и $\rho$ — радиусы вписанной и вневписанной окружностей самого треугольника $ABC$.

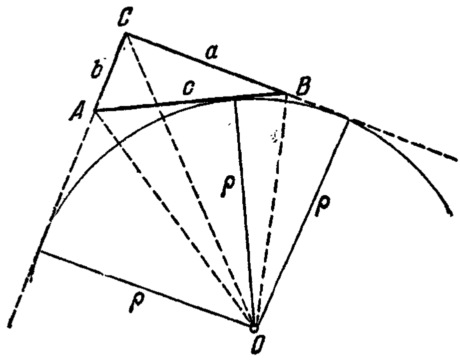
Доказать, что

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

Решение. Обозначим через $S$ площадь треугольника $ABC$ и через $p$ — его полупериметр; тогда, как известно,




*а)*




*б)*

Рис. 8.

$S = pr$. С другой стороны, если $O$ — центр вневписанной окружности этого треугольника (рис. 8, *б*), то

$$S = S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OCB} - S_{\Delta OAB} =$$
$$= \frac{1}{2} b\rho + \frac{1}{2} a\rho - \frac{1}{2} c\rho = \frac{1}{2} (b + a - c)\rho = (p - c)\rho;$$

следовательно, $pr = (p - c)\rho$ и $\frac{r}{\rho} = \frac{p - c}{p}$.

Далее, по известным формулам тригонометрии

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\frac{p-c}{p}=\frac{r}{\rho}. \qquad (3)$$

После этих предварительных замечаний обратимся к доказательству теоремы.

1°. При $n=1$ наше утверждение не нуждается в доказательстве. Докажем его справедливость для $n=2$. В этом случае треугольник $ABC$ прямой $CM$ разбит на два меньших треугольника $ACM$ и $CMB$. В силу формулы (3)

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{CMA}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{CMB}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{CMA}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ-\angle CMA}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{\rho}.$$

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для $n-1$ прямых, и пусть дано $n$ прямых $CM_1$, $CM_2$, ..., $CM_n$, разбивающих треугольник $ABC$ на $n+1$ меньших треугольников $ACM_1$, $M_1CM_2$, ..., $M_nCB$. Рассмотрим два из этих треугольников, скажем $ACM_1$ и $M_1CM_2$. Как мы видели в п. 1°, $\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r_{12}}{\rho_{12}}$, где $r_{12}$ и $\rho_{12}$—радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника $ACM_2$. Но для $n$ треугольников $ACM_2$, $M_2CM_3$, ..., $M_nCB$ в силу сделанного предположения имеет место равенство $\frac{r_{12}}{\rho_{12}}\cdot\frac{r_3}{\rho_3}\cdot\ldots\cdot\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}}=\frac{r}{\rho}$ и, следовательно, $\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}\cdot\ldots\cdot\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}}=\frac{r}{\rho}$.

**Задача 4.** Пусть прямые $CM$ и $CM'$ двумя способами разбивают треугольник $ABC$ на два треугольника $ACM$, $CMB$ и $ACM'$, $CM'B$; $r_1$, $r_2$ и $r_1'$, $r_2'$—соответственно радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники. Доказать, что если $r_1=r_1'$, то $r_2=r_2'$, и что аналогичное свойство имеет место также и для радиусов вневписанных окружностей.

**Задача 5.** В обозначениях примера 7 доказать, что

$$\frac{r_1+\rho_1}{R_1}+\frac{r_2+\rho_2}{R_2}+\ldots+\frac{r_n+\rho_n}{R_n}=\frac{r+\rho}{R},$$

где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ и $R$ — соответственно радиусы описанных окружностей треугольников $ACM_1$, $M_1CM_2$, ..., $M_nCB$, $ABC$.

**Задача 6.** Дано $n$ окружностей $C_1, C_2, \ldots, C_n$, проходящих через точку $O$; вторые точки пересечения окружностей $C_1$ и $C_2$, $C_2$ и $C_3$, ..., $C_n$ и $C_1$ обозначим, соответственно, через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 9). Пусть $B_1$ — произвольная точка окружности $C_1$, отличная от $O$ и от $A_1$. Проведем секущую $B_1A_1$, пересекающую окружность $C_2$ в точке $B_2$, затем секущую $B_2A_2$, пересекающую окружность $C_3$ в точке $B_3$, и т. д. (в случае, если, например, точка $B_2$ совпадает с $A_2$, вместо секущей через точку $A_2$ проводим касательную к окружности $C_2$). Доказать, что полученная в конце концов на окружности $C_1$ точка $B_{n+1}$ совпадает с $B_1$.

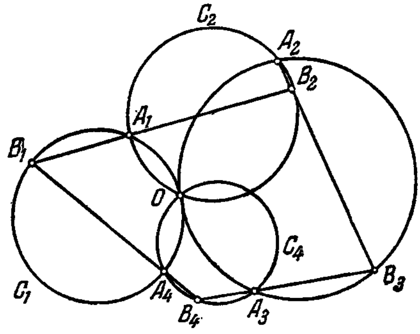


Рис. 9.

Пусть на плоскости задана сеть линий, соединяющих между собой какие-то точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$ и не имеющих других общих точек; мы будем считать еще, что эта сеть линий «состоит из одного куска», т. е. что из каждой из точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$ можно попасть в любую другую, двигаясь только вдоль линий сети (свойство с в я з н о с т и). Такую сеть линий мы будем называть к а р т о й, заданные точки — ее в е р ш и н а м и, отрезки кривых между двумя смежными вершинами — г р а н и ц а м и карты, части плоскости, на которые она разбивается границами (в том числе и бесконечную внешнюю область), — с т р а н а м и карты. Так, на рис. 10 точки $A_1$,

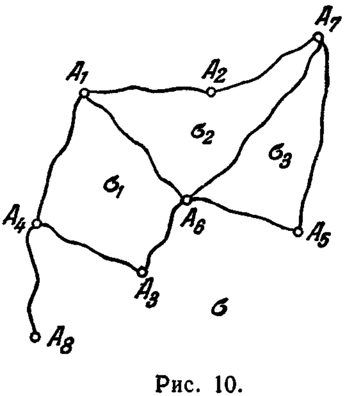


Рис. 10.

$A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$, $A_8$ являются вершинами карты, кривые $A_1A_2$, $A_2A_7$, $A_1A_6$, $A_6A_7$, $A_4A_1$, $A_4A_3$, $A_3A_6$, $A_6A_5$, $A_5A_7$, $A_4A_8$ — ее границами, области $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ и бесконечная внешняя область $\sigma$ — ее странами.

**Пример 8.** Теорема Эйлера. Обозначим число стран произвольной карты через $s$, число ее границ — через $l$ и число вершин — через $p$. Тогда $s+p=l+2$.

Доказательство. Проведем индукцию по числу $l$ границ карты.

1°. Пусть $l=0$, тогда $s=1$, $p=1$; в этом случае

$$s+p=l+2.$$

2°. Предположим, что теорема справедлива для любой карты, имеющей $n$ границ, и рассмотрим карту, содержащую $l=n+1$ границ, $s$ стран и $p$ вершин. Возможны два случая.

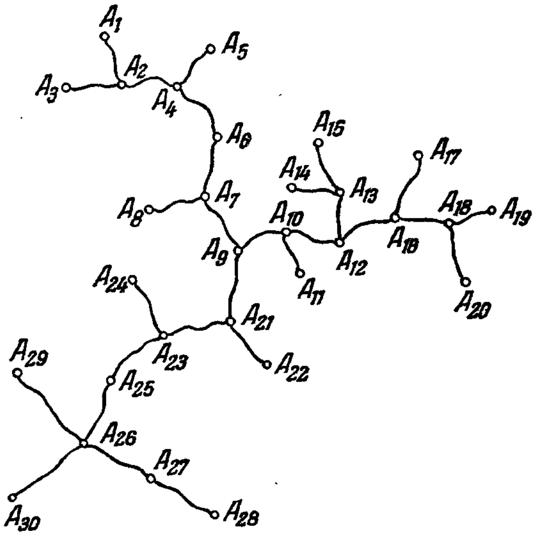



Рис. 11.

а) Для любых двух вершин карты существует единственный соединяющий их путь вдоль границ карты (хотя бы один такой путь существует ввиду связности карты). В этом случае карта не содержит ни одного замкнутого контура и, следовательно, имеет вид, изображенный на рис. 11; при этом $s=1$. Покажем, что на такой карте найдется хотя бы одна вершина, принадлежащая только одной границе (как вершина $A_1$ на рис. 11; такую вершину мы будем называть *крайней*). Действительно, возьмем произвольную вершину карты. Если она — не крайняя, то она служит концом по крайней мере двух границ. Пройдем по одной из этих границ до второй ее вершины. Если и эта вершина — не крайняя, то она служит концом какой-то другой границы; пройдем по этой границе до второго ее конца и т. д. Так как карта по условию не содержит замкнутых контуров, мы не вернемся ни к одной из ранее пройденных вершин и ввиду конечности числа вершин карты в конце концов придем к такой вершине, которая уже будет крайней. Удалив эту вершину вместе с единственной границей, имеющей ее своим концом, мы получим новую карту, в которой $l'=l-1=n$, $s'=s=1$, $p'=p-1$, причем эта новая карта останется, конечно, связной. В силу индуктивного предположения $s'+p'=l'+2$, откуда и $s+p=l+2$.

б) Существуют две вершины, соединимые более чем одним путем (рис. 10). В таком случае на карте имеется некоторый замкнутый контур, проходящий через эти вершины. Удалив одну из границ этого контура (без вершин), мы получим новую связную карту, в которой $l'=l-1=n$, $p'=p$, $s'=s-1$. По предположению $s'+p'=l'+2$, откуда и $s+p=l+2$.

**Пример 9.** Доказать, что если в каждой вершине карты сходится не менее трех границ (т. е. если карта не содержит таких вершин, как $A_2$, $A_3$, $A_5$, $A_8$, и таких границ, как $A_4A_8$ на рис. 10), то найдется страна карты, имеющая не более пяти границ.

Решение. Так как в каждой из $p$ вершин карты сходится не менее трех границ, то $3p$ не превосходит удвоенного числа границ $2l$ (удвоенного, ибо каждая граница соединяет две вершины); отсюда

$$p \leqslant \frac{2}{3} l. \tag{4}$$

Предположим теперь, что каждая из $s$ стран карты имеет не менее шести границ; тогда $6s$ не превосходит удвоенного числа границ $2l$ (удвоенного, ибо каждая граница разделяет две страны), откуда

$$s \leqslant \frac{1}{3} l. \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) дают: $s+p \leqslant \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} l = l$, что противоречит теореме Эйлера. Следовательно, наше предположение о том, что каждая страна имеет не меньше шести границ, неверно.

**Задача 7.** На плоскости даны пять точек. Доказать, что нельзя соединить каждую из этих точек с каждой другой попарно не пересекающимися линиями (рис. 12).

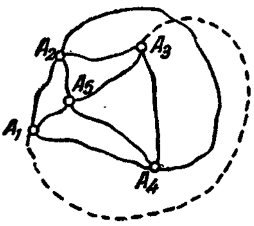



Рис. 12.

Другие примеры применения теоремы Эйлера о картах читатель сможет найти в книге: Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, М.—Л., Гостехиздат, 1952 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 6).

**Задача 8.** Доказать, что если $p$ — число вершин, $l$ — число ребер и $s$ — число граней выпуклого многогранника, то $s+p=l+2$ (теорема Эйлера о многогранниках).

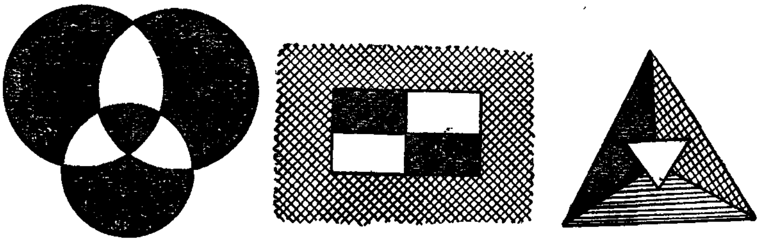
**Задача 9.** Доказать, что всякий многогранник имеет либо треугольную, либо четырехугольную, либо пятиугольную грань.

**Задача 10.** Доказать, что не существует многогранника с семью ребрами.

Другие примеры применения теоремы Эйлера о многогранниках читатель может найти, например, в книге: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. III, М., Гостехиздат, 1954 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 3).

## Задачи о раскраске карт

Пусть на плоскости задана некоторая карта. Мы будем говорить, что она *правильно раскрашена*, если каждая ее страна закрашена определенной краской, причем любые две страны, имеющие между собой общую границу, закрашены в разные цвета. Примером правильно раскрашенной карты может служить любая географическая карта. Всякую карту можно правильно раскрасить, например, закрасив каждую ее страну в особый цвет, однако такая раскраска неэкономна. Естественно, возникает вопрос, каково то *наименьшее* число красок, которым можно правильно раскрасить заданную карту. Ясно, что, например, карту, изображенную на рис. 13, *а*, можно правильно раскрасить двумя красками; для правильной раскраски карты, изображенной на рис. 13, *б*, необходимы уже три краски; карту же, изображенную на рис. 13, *в*, можно правильно раскрасить только четырьмя красками. До сих пор не найдено ни одной карты, которую не удалось бы правильно раскрасить четырьмя



*а)* *б)* *в)*

Рис. 13.

красками. Впервые, по-видимому, обратил внимание на это обстоятельство известный немецкий математик Мёбиус более ста лет назад. С тех пор многие крупные ученые пытались решить эту проблему четырех красок, т. е. либо доказать, что четырех красок достаточно для раскраски любой карты, либо найти пример карты, которую четырьмя красками раскрасить нельзя, однако до сих пор этого никому не удалось сделать. Установлено только, что для правильной раскраски любой карты, во всяком случае, достаточно пяти красок (см. ниже пример 13). Нетрудно найти также условия, при которых карта может быть раскрашена двумя (пример 11) или тремя (пример 12) красками. Мы укажем, кроме того, некоторое условие, необходимое и достаточное для того, чтобы карта могла быть правильно раскрашена четырьмя красками (пример 14); вопрос же о том, выполняется ли это условие для любой карты или имеются ли карты, ему не удовлетворяющие, остается, понятно, открытым.

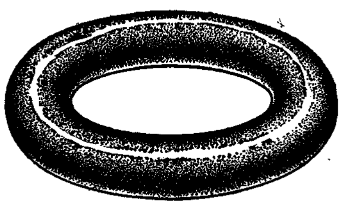


Рис. 14.

Любопытно отметить, что для некоторых поверхностей, устроенных, казалось бы, более сложно, чем плоскость, проблема раскраски карт решена полностью. Так, например, доказано, что на поверхности «баранки», или тора (рис. 14), для правильной раскраски любой карты достаточно семи красок, причем существуют карты, которые нельзя правильно раскрасить шестью красками[1]).

В дальнейшем мы будем предполагать, что карта не содержит неразделяющих границ, т. е. границ, по обе стороны от которых лежит одна и та же страна (как граница $A_4A_8$ на рис. 10, стр. 49), потому что в противном случае постановка задачи о правильной раскраске не имеет смысла. Мы будем также предполагать, что карта не содержит вершин, в которых сходятся лишь две границы (как вершина $A_2$ на рис. 10), ибо такая вершина была бы лишней. Другими словами, мы будем рассматривать лишь такие карты, в каждой вершине которых сходится не менее трех границ, т. е. карты, удовлетворяющие условию примера 9; результат этого примера в дальнейшем будет неоднократно использоваться.

Нам будет удобно еще считать, что на карте имеется только одна бесконечная область, т. е. что карта не имеет границ, «уходящих в бесконечность»; можно показать, что отказ от этого последнего условия не изменил бы ни одного из дальнейших выводов.

Карту, в каждой вершине которой сходится ровно три границы, мы будем называть **нормальной**. Пусть дана

---

[1]) Сравнительно недавно немецкий геометр Г. Рингель получил результаты, близкие к окончательному решению проблемы раскраски карт, начерченных на любой поверхности, отличной от плоскости (или от сферы). Наименьшее число красок, необходимое для правильной раскраски поверхности, устроенной как «сфера с сквозными дырами», согласно Рингелю, видимо, выражается следующей довольно сложной формулой:

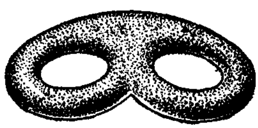
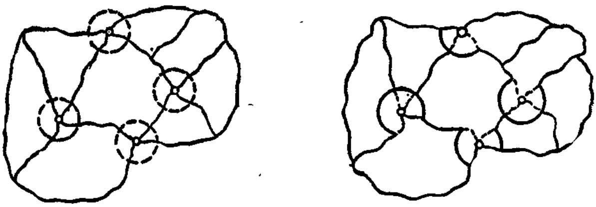


Рис. 15.

$$\left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right],$$

где квадратные скобки обозначают **целую часть** числа; так для тора (рис. 14), имеющего одну «дыру», это число равно $\left[\frac{7+\sqrt{49}}{2}\right]=\left[\frac{14}{2}\right]=7$, а для «кренделя» (рис. 15) оно имеет вид $\left[\frac{7+\sqrt{1+48\cdot 2}}{2}\right]=\left[\frac{7+\sqrt{97}}{2}\right]=\left[\frac{16,8\ldots}{2}\right]=8$. (См. изложение результатов Рингеля в сборнике «Математическое просвещение», вып. 3, Физматгиз, М., 1958, стр. 205—266.)

произвольная карта $S$ (рис. 16, *а*). Выделив около каждой из вершин этой карты, в которой сходится более трех границ, достаточно малый кружок и присоединив его к одной из стран, окружающих эту вершину, мы получим нормальную карту $S'$ с тем же числом стран (рис. 16, *б*); при этом из всякой правильной раскраски карты $S'$ легко получается правильная раскраска карты $S$ тем же числом красок и



*а)* *б)*

Рис. 16.

наоборот. Поэтому в вопросе о правильной раскраске карт мы часто будем ограничиваться рассмотрением нормальных карт.

Выясним теперь, как устроены простейшие нормальные карты[1]). Пусть $p$ — число вершин, $l$ — число границ и $s$ — число стран нормальной карты; тогда $2l=3p$ (ср. выше стр. 51), откуда $p=\frac{2}{3}l$. Кроме того, по теореме Эйлера $s+p=l+2$; значит, $s=(l-p)+2=\frac{l}{3}+2$ и, следовательно, $s\geqslant 2$. Но при $s=2$ находим, что $l=0$; такой карты, очевидно, не существует. Полагая $s=3$, получим $l=3$ и $p=2$; эта простейшая нормальная карта имеет вид, изображенный на рис. 17, *а*. При $s=4$ получаем $l=6$ и $p=4$. Покажем, что в этом случае карта имеет вид, изображенный на рис. 17, *б* или *в*. Действительно, обозначим через $k_2$ число двуугольников карты, через $k_3$ — число ее треугольников и через $k_4$ — число четырехугольников (так как $p=4$, карта не может иметь стран, число вершин которых больше

[1]) Здесь и в дальнейшем не различаются «одинаково устроенные» карты (как изображенные на рис. 13, *в* и 26, *а*), страны и границы которых можно перенумеровать так, что на обеих картах одинаково занумерованные страны разделяются одинаково занумерованными границами.

четырех). Тогда $k_2+k_3+k_4=s=4$ и $2k_2+3k_3+4k_4=$ $=2l=12$ (ср. выше стр. 51); из последнего равенства видно, что $k_3$ четно. Сумма $k_2+k_3+k_4$, равная 4, с точностью до порядка слагаемых может иметь вид $2+2+0$, $2+1+$ $+1$, $3+1+0$, $4+0+0$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

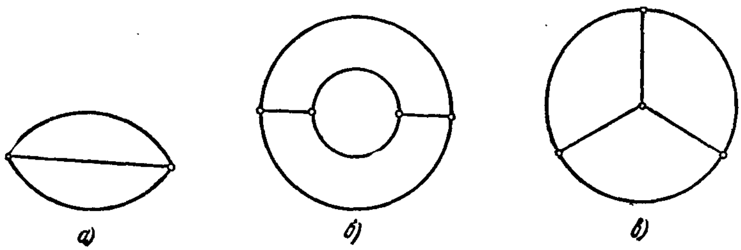


Рис. 17.

Если два из значений $k$ равны 2 и одно — нулю, то при $k_2=2$, $k_3=2$, $k_4=0$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4=10<12$; при $k_2=2$, $k_3=0$, $k_4=2$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4=2l=12$ — этому случаю отвечает карта, изображенная на рис. 17, *б*; при $k_2=0$, $k_3=2$, $k_4=2$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4=14>12$. Если одно из значений $k$ равно 2 и два — единице, то лишь при $k_2=1$, $k_3=2$, $k_4=1$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4=12$ — такая карта существует, но она не является нормальной (рис. 18).

Если одно из значений $k$ равно 3 и одно — единице, то должно быть $k_3=0$, так как $k_3$ четно; при этом $2k_2+$ $+4k_4\neq 12$.

Наконец, если одно из значений $k$ равно 4 и остальные — нулю, то лишь при $k_2=k_4=0$, $k_3=4$ сумма $2k_2+3k_3+$ $+4k_4$ равна $2l=12$ — соответствующая карта имеет вид, изображенный на рис. 17, *в*.

Иногда мы будем раскрашивать не только страны, но и **границы** карты; при этом цвета, в которые закрашены границы, мы будем обозначать цифрами 1, 2, 3, ... Если все границы, сходящиеся в одной и той же вершине, получают при такой нумерации границ разные номера, то мы будем называть соответствующую нумерацию границ карты **правильной** (см., например, рис. 19). Отметим, что задача о такой нумерации **вершин** карты, при которой «соседние» вершины, т. е. вершины, соединенные одной границей, получают разные номера, тоже связана с задачей о правильной раскраске стран карты; см. по этому поводу, например, книгу Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского, указанную на стр. 52, в которой читатель сможет также найти другие доказательства многих из приводимых ниже теорем.

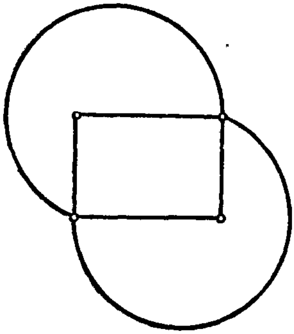


Рис. 18.

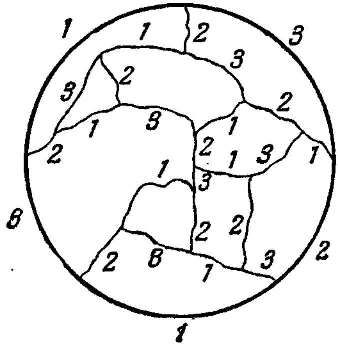
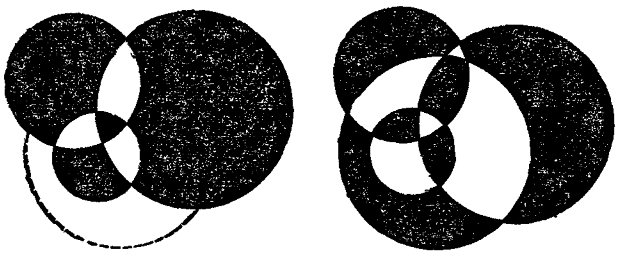


Рис. 19.

**Пример 10.** На плоскости дано $n$ окружностей. Доказать, что при любом расположении этих окружностей образуемую ими карту можно правильно раскрасить двумя красками.

Р е ш е н и е. 1°. При $n=1$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение справедливо для любой карты, образованной $n$ окружностями, и пусть на плоскости задано $n+1$ окружностей. Удалив одну из этих



а) б)

Рис. 20.

окружностей, мы получим карту, которую в силу сделанного предположения можно правильно раскрасить двумя красками, например черной и белой (рис. 20, *а*). Восстановим затем отброшенную окружность и по одну сторону от нее (например, внутри) изменим цвет каждой области на противоположный (т. е. черный — на белый и наоборот); легко видеть, что при этом мы получим карту, правильно раскрашенную двумя красками (рис. 20, *б*).

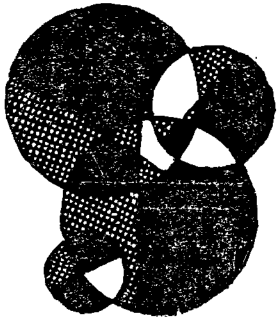


Рис. 21.

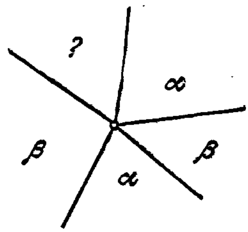



Рис. 22.

**Задача 11.** На плоскости задано $n$ окружностей, в каждой из которых проведено по хорде. Доказать, что образуемую ими карту можно правильно раскрасить тремя красками (рис. 21).

**Пример 11.** (Т е о р е м а  о  д в у х  к р а с к а х.) Для того чтобы карту можно было правильно раскрасить двумя красками, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее вершине сходилось четное число границ.

Р е ш е н и е. Н е о б х о д и м о с т ь этого условия очевидна, так как если в какой-нибудь вершине карты сходится нечетное число границ, то уже страны, окружающие эту вершину, нельзя правильно раскрасить двумя красками (рис. 22).

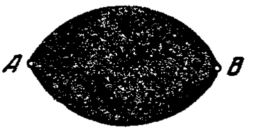



Рис. 23.

Для доказательства д о с т а т о ч н о с т и условия проведем индукцию по числу границ карты.

1°. Для карты с двумя границами утверждение очевидно (рис. 23).

2°. Предположим, что теорема справедлива для любой карты, в каждой вершине которой сходится четное число границ и общее число границ которой не превосходит $n$, и пусть дана карта $S$, имеющая $n+1$ границ и удовлетворяющая тому же условию. Начиная с произвольной вершины $A$ карты $S$, станем двигаться в произвольном направлении вдоль границ карты. Ввиду конечности числа вершин карты мы вернемся в конце концов в одну из уже пройденных вершин (карта не имеет крайних вершин, потому что на ней нет неразделяющих границ) и сможем выделить некоторый не имеющий самопересечений замкнутый контур, состоящий из границ карты. Удалив этот контур, мы получим карту $S'$ с меньшим числом границ, в каждой вершине которой также сходится четное число границ (потому что в каждой вершине карты $\hat{S}$ отбрасывалось четное число границ — 0 или 2). В силу индуктивного предположения карту $S'$ можно правильно раскрасить двумя красками.

Восстановив отброшенный контур и изменив все цвета с одной стороны от него (например, внутри), мы и получим правильную раскраску карты $S$.

**Пример 12.** (Теорема о трех красках.) Для того чтобы нормальная карта могла быть правильно раскрашена тремя красками, необходимо и достаточно, чтобы каждая ее страна имела четное число границ.

Доказательство. Необходимость сформулированного условия очевидна, так как если на карте имеется страна $\sigma$ с нечетным числом границ, то уже $\sigma$ и страны, пограничные с ней, невозможно правильно раскрасить тремя красками (рис. 24).

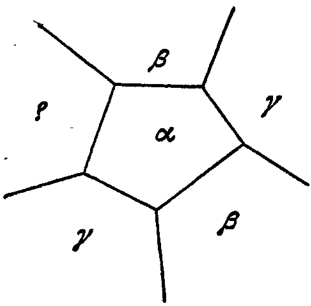


Рис. 24.

Для доказательства достаточности условия проведем индукцию по числу $n$ стран карты.

1°. Для нормальной карты, состоящей из трех стран (см. рис. 17, *а* на стр. 56), наше утверждение очевидно. Нормальную карту, состоящую из четырех стран и изображенную на рис. 17, *б*, тоже можно, очевидно, раскрасить тремя красками (для этого достаточно закрасить «внутреннюю» страну той же краской, что и внешнюю область); нормальная карта, изображенная на рис. 17, *в*, не удовлетворяет условию о четности числа границ каждой страны.

Таким образом, каждая нормальная карта, число стран которой равно 3 или 4 и каждая страна которой имеет четное число границ, может быть правильно раскрашена тремя красками.

2°. Предположим, что теорема верна для любой нормальной карты, каждая страна которой имеет четное число границ и общее число стран которой равно $n-1$ или $n$, и рассмотрим нормальную карту $S$, удовлетворяющую тому же условию и имеющую $n+1$ стран. Как вытекает из примера 9, на карте $S$ найдется страна $\sigma$, имеющая не более пяти границ. В нашем случае $\sigma$ будет иметь либо две, либо четыре границы. Рассмотрим каждый из этих случаев.

А. $\sigma$ имеет две границы. Пусть $A$ и $B$—вершины этой страны, $\sigma_1$ и $\sigma_2$—соседние с ней страны (рис. 25).

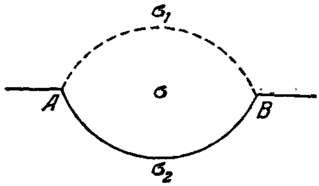


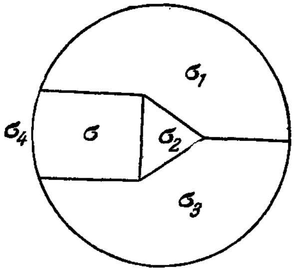

Рис. 25.

Удалив границу между странами $\sigma$ и $\sigma_1$, мы получим карту $S'$, которая также будет нормальной, так как точки $A$ и $B$ просто перестанут быть вершинами (мы условились, что карта не имеет лишних вершин), а в остальных вершинах будет сходиться прежнее число границ. Каждая страна карты $S'$ также имеет четное число границ, так как число границ каждой из стран $\sigma_1$ и $\sigma_2$ уменьшится на 2, а число границ каждой из остальных стран не изменится. Так как число стран карты $S'$ равно $n$, то в силу индуктивного предположения ее можно правильно раскрасить тремя красками $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Пусть страны $\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma$ и $\sigma_2' = \sigma_2$ получат при этом соответственно цвета $\alpha$ и $\beta$. Восстановив страну $\sigma$ и закрасив ее цветом $\gamma$, мы получим правильную раскраску карты $S$.

Б. $\sigma$ имеет четыре границы. Может случиться, что какие-либо две из прилегающих к $\sigma$ с противоположных сторон стран граничат между собой или даже совпадают (рис. 26, *а* или 17, *б*); однако в этом случае две другие граничащие с $\sigma$ страны уже не могут ни иметь между собой общих границ, ни совпадать. Пусть такими будут страны $\sigma_2$ и $\sigma_4$ (рис. 26, *б*). Присоединим страны $\sigma_2$ и $\sigma_4$ к $\sigma$, удалив границы $AB$ и $CD$. Мы получим карту $S'$, которая будет также, очевидно, нормальной, причем и на этой карте каждая страна будет иметь четное число границ. Действительно, если число границ страны $\sigma_1$ было равно $2k_1$, число границ страны $\sigma_2$ равно $2k_2$, число границ страны $\sigma_3$ равно $2k_3$ и число границ страны $\sigma_4$ равно $2k_4$, то страна $\sigma' = \sigma + \sigma_2 + \sigma_4$ будет иметь $2k_2 + 2k_4 - 4$ границ, страна $\sigma_1' = \sigma_1$ будет иметь $2k_1 - 2$

границ и страна $\sigma_3' = \sigma_3$ будет иметь $2k_3 - 2$ границ, в то время как число границ каждой из остальных стран не изменится. (В том случае, когда страны $\sigma_1$ и $\sigma_3$ совпадают, эта страна на карте $S'$ будет иметь на четыре границе меньше, чем на карте $S$.)

Так как карта $S'$ имеет $n-1$ стран, то ее в силу индуктивного предположения можно правильно раскрасить тремя



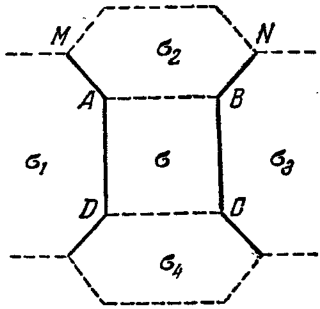




Рис. 26.

красками $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Покажем, что при этом страны $\sigma_1'$ и $\sigma_3'$ будут закрашены в один и тот же цвет (это утверждение очевидно, если $\sigma_3'$ совпадает с $\sigma_1'$). Действительно, пусть страна $\sigma'$ окрашена цветом $\alpha$, страна $\sigma_1'$ — цветом $\beta$. Так как на участке $MN$ к $\sigma'$ прилегает нечетное число стран $(2k_2-3)$ и цвета этих стран должны, очевидно, чередоваться в последовательности $\gamma$, $\beta$, $\gamma$, $\beta$, ..., $\gamma$, то страна $\sigma_3'$ будет закрашена цветом $\beta$. Восстановив страну $\sigma$ и закрасив ее цветом $\gamma$, мы получим правильную раскраску карты $S$.

**Пример 13.** (Теорема о пяти красках.) Любую нормальную карту можно правильно раскрасить пятью красками.

Доказательство. 1°. Для карты, число стран которой не превосходит пяти, утверждение очевидно.

2°. Предположим, что теорема справедлива для любой нормальной карты, число стран которой равно $n-1$ или $n$, и рассмотрим карту $S$, состоящую из $n+1$ стран. Как было показано в примере 9, карта $S$ содержит по крайней мере одну страну $\sigma$, число границ которой не превосходит пяти. Рассмотрим все случаи, которые при этом могут иметь место.

а) $\sigma$ имеет две границы (см. рис. 25 на стр. 60). Пусть $\sigma_1$ и $\sigma_2$ будут соседние с $\sigma$ страны. Присоединив страну $\sigma_1$ к $\sigma$, мы получим нормальную карту $S'$, число стран которой равно $n$.

В силу индуктивного предположения карту $S'$ можно правильно раскрасить пятью красками. Страны $\sigma_1' = \sigma + \sigma_1$ и $\sigma_2' = \sigma_2$ будут при этом окрашены какими-то двумя из этих красок. Восстановив страну $\sigma$, мы сможем закрасить ее одной из трех оставшихся красок.

б) $\sigma$ имеет три границы (рис. 27, *а*). Присоединим $\sigma_1$ к $\sigma$. Закрасив полученную карту $S'$ пятью красками, мы

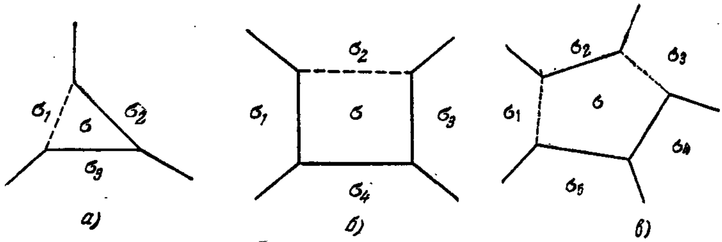



Рис. 27.

сможем затем закрасить страну $\sigma$ одним из двух цветов, не использованных при закраске стран $\sigma_1' = \sigma + \sigma_1$, $\sigma_2' = \sigma_2$, $\sigma_3' = \sigma_3$.

в) $\sigma$ имеет четыре границы (рис. 27, *б*). Найдутся две из прилегающих к $\sigma$ стран, которые между собой не совпадают (см. пример 12). Присоединив к $\sigma$ одну из этих стран, например $\sigma_2$, мы получим карту $S'$ из $n$ стран, которую в силу индуктивного предположения можно правильно раскрасить пятью красками. При этом страны $\sigma_1' = \sigma_1$, $\sigma_2' = \sigma_2 + \sigma$, $\sigma_3' = \sigma_3$ и $\sigma_4' = \sigma_4$ получат какие-то четыре из пяти возможных цветов (или меньше, если $\sigma_1'$ и $\sigma_3'$ совпадают или закрашены одним цветом). Восстановив страну $\sigma$, мы сможем закрасить ее в пятый цвет.

г) $\sigma$ имеет пять границ (рис. 27, *в*). Как в примере 16, найдутся две соседние с $\sigma$ страны, не граничащие между собой и не совпадающие; пусть это будут $\sigma_1$ и $\sigma_3$. Присоединив обе эти страны к $\sigma$, мы получим нормальную карту $S'$, имеющую $n-1$ стран. В силу индуктивного предположения карту $S'$ можно правильно раскрасить пятью красками. При этом страны $\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma + \sigma_3$, $\sigma_2' = \sigma_2$, $\sigma_4' = \sigma_4$ и $\sigma_5' = \sigma_5$ получат какие-то четыре из этих пяти цветов. Восстановив страну $\sigma$, мы сможем закрасить ее в пятый цвет.

**Пример 14.** (Теорема Волынского[1].) Нормальную карту в том и только в том случае можно правильно раскрасить четырьмя красками, если ее границы можно правильно занумеровать тремя цифрами.

Решение. А. Если нормальную карту можно правильно раскрасить четырьмя красками, то ее границы можно правильно занумеровать тремя цифрами.

Пусть нормальная карта $S$ правильно раскрашена четырьмя красками $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Обозначим цифрой 1 границы между странами, закрашенными в цвета $\alpha$ и $\beta$ или в цвета $\gamma$ и $\delta$, цифрой 2—границы между странами, закрашенными в цвета $\alpha$ и $\gamma$ или в цвета $\beta$ и $\delta$, и цифрой 3—границы между странами, закрашенными в цвета $\alpha$ и $\delta$ или в цвета $\beta$ и $\gamma$. Полученная нумерация границ будет правильной: действительно, если в какой-либо вершине $A$ сходятся две границы, отмеченные одной и той же цифрой (например, цифрой 1, рис. 28), то страны $\sigma_2$ и $\sigma_3$, отделяемые от страны $\sigma_1$ границами с одинаковым номером, должны были бы иметь один и тот же цвет (так, если $\sigma_1$ в нашем примере имеет цвет $\alpha$, то $\sigma_2$ и $\sigma_3$ закрашены цветом $\beta$), но это не может иметь места, так как $\sigma_2$ и $\sigma_3$ граничат между собой.

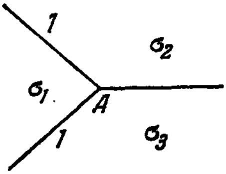


Рис. 28.

Б. Если границы нормальной карты можно правильно занумеровать тремя цифрами, то ее страны можно правильно раскрасить

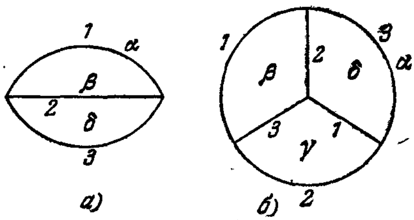


Рис. 29.

четырьмя красками. Доказательство этого утверждения мы проведем индукцией по числу $n$ стран карты.

1°. Границы простейшей нормальной карты, состоящей из трех стран (см. рис. 17, *а* на стр. 56), можно единственным образом занумеровать цифрами 1, 2, 3 (с точностью до перестановки этих цифр). Раскрасим эту карту, как указано на рис. 29, *а*. При этом граница между странами, окрашенными в цвета $\alpha$ и $\beta$, будет иметь номер 1, граница между странами, окрашенными в цвета $\beta$ и $\delta$,—

[1]) В. В. Волынский (1923—1943), советский математик, погиб на фронте Великой Отечественной войны.

номер 2 и граница между странами, окрашенными в цвета $\alpha$ и $\delta$,— номер 3.

Правильную раскраску карты $S$ четырьмя красками $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, при которой границы между цветами $\alpha$ и $\beta$ и между цветами $\gamma$ и $\delta$ имеют номер 1, границы между цветами $\alpha$ и $\gamma$ и между цветами $\beta$ и $\delta$ — номер 2 и границы между цветами $\alpha$ и $\delta$ и между цветами $\beta$ и $\gamma$ — номер 3, мы будем называть допустимой. Мы показали, что простейшую нормальную карту, состоящую из трех стран, можно допустимым образом правильно раскрасить четырьмя красками. Покажем, что это же верно и для нормальной карты, состоящей из четырех стран (рис. 17, *б* и *в*). Границы карты, изображенной на рис. 17, *в*, можно единственным образом (с точностью до перестановки цифр) правильно занумеровать цифрами 1, 2, 3 (рис. 29, *б*). Раскраска этой карты, указанная на рис. 29, *б*, будет допустимой. Карта, изображенная на рис. 17, *б*, допускает две существенно

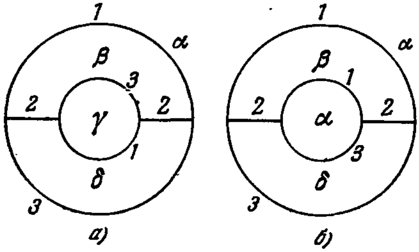



Рис. 30.

различные нумерации границ (рис. 30, *а* и *б*). Раскраски этих карт, указанные на рис. 30, *а* и *б*, также будут допустимыми.

2°. Предположим, что всякую нормальную карту, границы которой правильно занумерованы тремя цифрами и число стран которой равно $n-1$ или $n$, можно допустимым образом раскрасить четырьмя красками, и рассмотрим нормальную карту $S$, имеющую $n+1$ стран, границы которой также правильно занумерованы тремя цифрами. Как мы видели в примере 9, на карте $S$ найдется страна $\sigma$, число границ которой не превосходит пяти. Рассмотрим различные частные случаи, которые при этом могут иметь место.

а) $\sigma$ имеет две границы. Единственная (с точностью до перестановки цифр) возможная нумерация границ в окрестности $\sigma$ изображена на рис. 31, *а*. Присоединим страну $\sigma_1$ к $\sigma$; новой границе $MN$, разделяющей страны $\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma$ и $\sigma_2' = \sigma_2$ (рис. 31, *б*), отнесем номер 1, номера остальных границ оставим без изменения. Полученная карта $S'$ будет нормальной; ее границы будут правильно занумерованы тремя цифрами. Так как число стран карты $S'$ равно $n$, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем, если страна $\sigma_1'$ имеет цвет $\alpha$, то страна $\sigma_2'$ будет цвета $\beta$. Восстановив страну $\sigma$ и закрасив ее цветом $\gamma$, мы получим допустимую раскраску карты $S$ четырьмя красками.

б) σ имеет три границы. Единственно возможная нумерация границ в окрестности σ указана на рис. 32, *а*. Представим себе, что карта $S$ начерчена на резиновой пленке, и стянем страну σ в точку; при этом границы $AB$, $BC$ и $AC$ пропадут, а вершины $A$, $B$

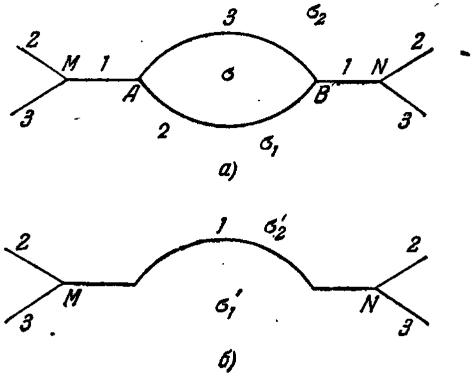



Рис. 31.

и $C$ сольются в одну $A = B = C = A'$ (рис. 32, *б*). Не меняя нумерации границ $MA'$, $NA'$, $PA'$ (бывших $MA$, $NB$, $PC$) и всех остальных, мы получим нормальную карту $S'$ с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты $S'$ равно $n$, ее можно

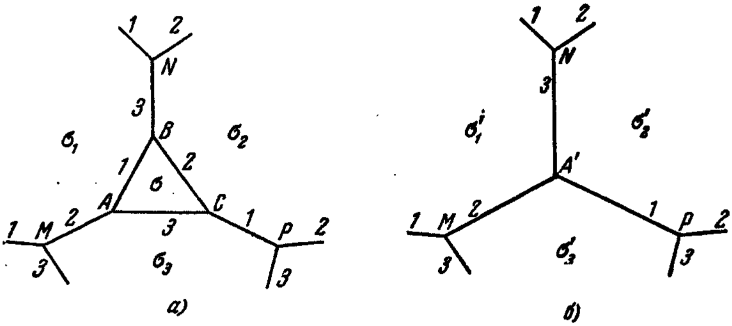



Рис. 32.

правильно раскрасить четырьмя красками; при этом, если страна $\sigma_1'$ окрашена цветом $\alpha$, то страна $\sigma_2'$ будет цвета $\delta$ и страна $\sigma_3'$ — цвета $\gamma$. Восстановив страну σ и закрасив ее цветом $\beta$, мы получим допустимую раскраску карты $S$.

в) σ имеет четыре границы. В этом случае возможны две существенно различные нумерации границ в окрестности страны $\sigma$ (рис. 33, *а* и 34, *а*). Рассмотрим первый случай (рис. 33, *а*). Найдутся две соседние с $\sigma$ страны, не имеющие между собой общих границ (см. пример 12). Так как обе пары противоположных

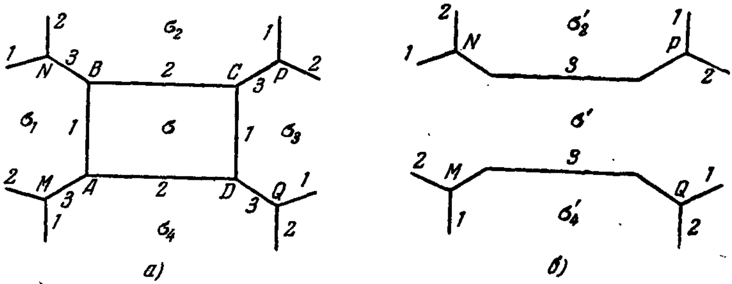



Рис. 33.

стран $\sigma_1$, $\sigma_3$ и $\sigma_2$, $\sigma_4$ в смысле нумерации границ равноправны, мы можем предположить, что не имеют общих границ страны $\sigma_1$ и $\sigma_3$. Присоединим к $\sigma$ обе страны $\sigma_1$ и $\sigma_3$; новым границам $NP$ и $MQ$

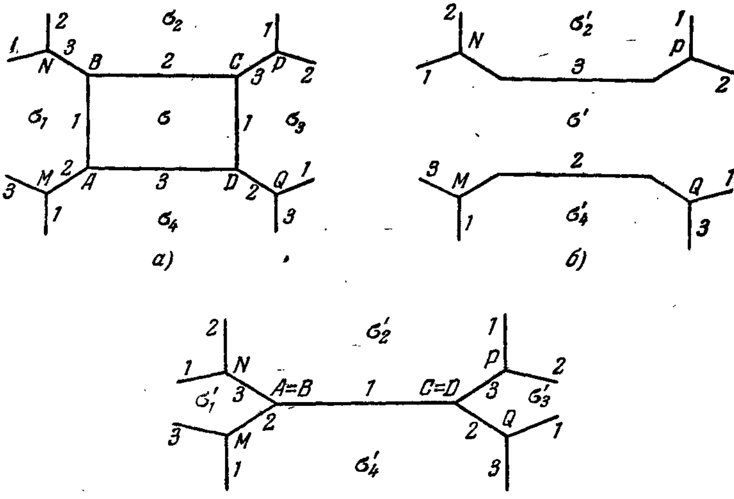



Рис. 34.

отнесем номер 3 (рис. 33, *б*). Полученная карта $S'$ будет нормальной с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты $S'$ равно $n-1$, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем если страна $\sigma' = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma$ закрашена цветом $\alpha$, то страны $\sigma_2' = \sigma_2$ и $\sigma_4' = \sigma_4$ будут цвета $\delta$. Восстановив страну $\sigma$, мы закрасим ее цветом $\beta$.

Во втором случае (рис. 34, *а*), если не имеющими общих границ странами являются $\sigma_1$ и $\sigma_3$, то можно рассуждать аналогично; только в этом случае новая граница $NP$ получит по-прежнему номер 3, а граница $MQ$ — номер 2 (рис. 34, *б*); страна $\sigma_4' = \sigma_4$ будет закрашена цветом $\gamma$. Восстановив страну $\sigma$, мы по-прежнему закрасим ее цветом $\beta$.

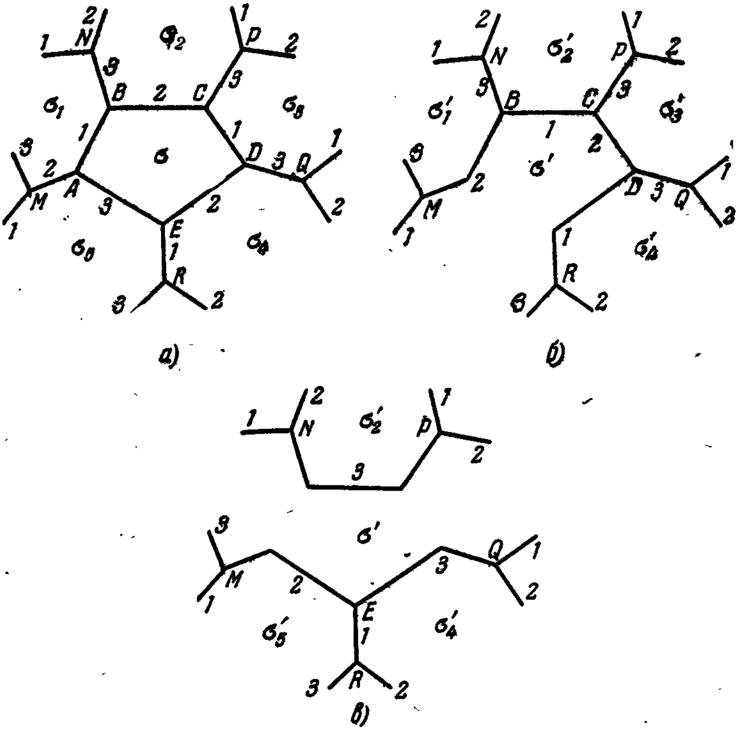



Рис. 35.

Наконец, предположим, что не имеют общих границ страны $\sigma_2$ и $\sigma_4$. Стянем четырехугольник $ABCD$ в отрезок так, чтобы точка $A$ совпала с точкой $B$, а точка $C$ — с точкой $D$; при этом граница $BC$ сольется с $AD$. Нумерацию границ $MA$, $NB$, $PC$ и $QD$ оставим прежней, а новой границе $BC = AD$ отнесем номер 1 (рис. 34, *в*). Полученная карта $S'$ будет нормальной с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты $S'$ равно $n$, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем если страна $\sigma_1'$ имеет цвет $\alpha$, то страна $\sigma_2'$ будет цвета $\delta$, страна $\sigma_3'$ — цвета $\alpha$ и страна $\sigma_4'$ — цвета $\gamma$. Восстановив страну $\sigma$, мы закрасим ее цветом $\beta$.

г) $\sigma$ имеет пять границ. В этом случае, с точностью до перестановки цифр 1, 2, 3, возможен только один способ нумерации границ в окрестности страны $\sigma$ (рис. 35, *а*). Рассмотрим сначала случай, когда страна $\sigma_5$ не совпадает и не имеет общих границ ни с $\sigma_2$, ни с $\sigma_3$. Присоединим страну $\sigma_5$ к $\sigma$, новой границе $MB$ отнесем номер 2, новой границе $RD$ — номер 1; границу $BC$ переименуем в 1, границу $CD$ — в 2. Мы получим нормальную карту $S'$ (рис. 35, *б*) с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты $S'$ равно $n$, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем если страна $\sigma' = \sigma + \sigma_5$ закрашена цветом $\alpha$, то страны $\sigma_2'$ и $\sigma_4'$ будут цвета $\beta$, а страны $\sigma_1'$ и $\sigma_3'$ — цвета $\gamma$. Восстановив страну $\sigma$, мы закрасим ее цветом $\delta$.

В том случае, когда страна $\sigma_5$ граничит или совпадает с $\sigma_2$, то страны $\sigma_1$ и $\sigma_3$ не граничат между собой и не совпадают, если же страна $\sigma_5$ совпадает или граничит с $\sigma_3$, то не могут ни совпадать, ни граничить между собой страны $\sigma_2$ и $\sigma_4$. Так как оба последних случая в смысле нумерации границ равноправны, достаточно рассмотреть случай, когда страны $\sigma_1$ и $\sigma_3$ не имеют общих границ и не совпадают. Присоединим обе эти страны к $\sigma$, новой границе $NP$ отнесем номер 3, новой границе $ME$ — номер 2 и новой границе $EQ$ — номер 3. Мы получим нормальную карту $S'$ (рис. 35, *в*) с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты $S'$ равно $n-1$, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем если страна $\sigma' = \sigma + \sigma_1 + \sigma_3$ закрашена цветом $\alpha$, то страны $\sigma_2' = \sigma_2$ и $\sigma_4' = \sigma_4$ будут цвета $\delta$, а страна $\sigma_5' = \sigma_5$ — цвета $\gamma$. Восстановив страну $\sigma$, мы закрасим ее цветом $\beta$.

Так как не известно, всякую ли нормальную карту можно правильно раскрасить четырьмя красками, то не известно также, границы всякой ли нормальной карты можно правильно занумеровать тремя цифрами. Можно доказать лишь следующее более слабое утверждение.

**Пример 15.** Границы всякой нормальной карты можно правильно занумеровать четырьмя цифрами.

Доказательство. Мы докажем это утверждение для любой (даже не обязательно связной; см. выше стр. 49) карты, в каждой вершине которой сходится не более трех границ. Доказательство проведем индукцией по числу $n$ вершин карты.

1°. При $n=2$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение справедливо для любой карты, в каждой вершине которой сходится не более трех границ и число вершин которой равно $n$, и рассмотрим карту $S$, удовлетворяющую тому же условию и имеющую $n+1$ вершин. Удалив одну из этих вершин, скажем $A_0$, вместе с принадлежащими ей границами, мы получим карту $S'$, в каждой вершине которой сходится не более трех границ и число вершин которой равно $n$. В силу индуктивного предположения границы карты $S'$ можно правильно занумеровать четырьмя цифрами 1, 2, 3, 4. Восстановим вершину $A_0$ с ее границами. При этом возможны три случая:

а) Вершина $A_0$ соединена (одной, двумя или тремя границами) лишь с одной вершиной $A_1$ карты $S'$ (рис. 36, *а*, *б*, *в*). В этом случае нумерация границ карты $S'$ легко продолжается в правильную нумерацию границ карты $S$.

б) Вершина $A_0$ соединена с двумя вершинами $A_1$ и $A_2$ карты $S'$, причем с одной из них она может быть соединена двумя границами

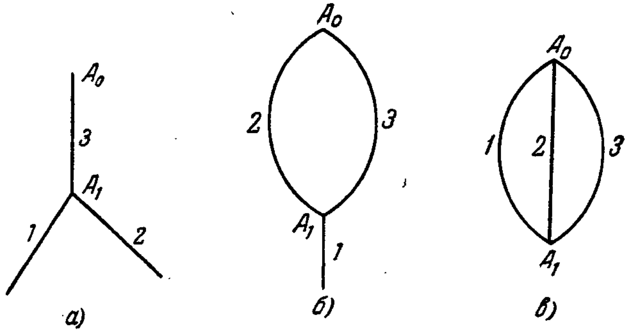



Рис. 36.

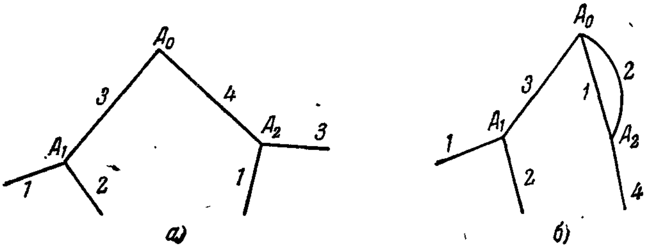



Рис. 37.

(рис. 37, *а* и *б*). Легко проверить, что при этом во всех случаях нумерация границ карты $S'$ может быть продолжена в правильную нумерацию границ карты $S$.

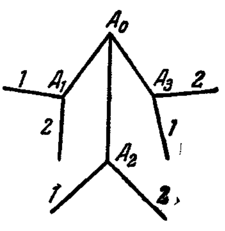



Рис. 38.

в) Вершина $A_0$ соединена с тремя вершинами $A_1$, $A_2$, $A_3$ карты $S'$ (рис. 38). Наименее благоприятным случаем будет тот, когда через каждую из вершин $A_1$, $A_2$, $A_3$ карты $S'$ проходит по две границы. Для каждой из границ $A_0A_1$, $A_0A_2$, $A_0A_3$ мы будем иметь в этом случае по два возможных номера, из которых не удастся выбрать трех различных номеров лишь в том случае, если эти три пары одинаковы, т. е. если три пары границ карты $S'$, проходящих через вершины $A_1$, $A_2$, $A_3$, получили одинаковые номера, скажем 1 и 2. Выделим тогда на карте $S'$ контур максимальной длины, начинающийся в вершине $A_1$ и состоящий попеременно из границ с номерами 1 и 3 (такой контур может состоять лишь из одной границы и может заканчиваться и в одной из вершин $A_2$ и $A_3$). Этот контур не может иметь самопересечений, так как, по предположению, границы карты $S'$ занумерованы правильно. Переменим номера границ этого контура, заменяя единицу тройкой и наоборот.

При этом нумерация границ карты $S'$ останется, очевидно, правильной, причем в новой нумерации три пары границ, проходящих через вершины $A_1$, $A_2$ и $A_3$ карты $S'$, уже не будут занумерованы одинаково; а в этом случае правильная нумерация границ карты $S'$ легко может быть продолжена в правильную нумерацию границ карты $S$.

## § 3. Построение по индукции

Применение метода математической индукции к решению задач на построение может иметь место в том случае, если в условии задачи фигурирует некоторое целое положительное число $n$ (например, в задачах на построение $n$-угольников). Ниже мы рассмотрим ряд примеров такого рода. При этом в настоящем параграфе мы будем рассматривать и самопересекающиеся многоугольники (рис. 39); другими словами, под многоугольником в большинстве задач понимается какая угодно замкнутая ломаная $A_1A_2\ldots A_n$.

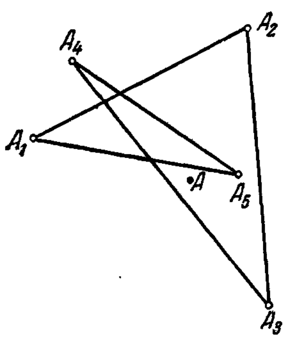


Рис. 39.

**Пример 16.** На плоскости даны $2n+1$ точек. Построить $(2n+1)$-угольник, для которого эти точки являются серединами сторон.

Решение. 1°. При $n=1$ задача сводится к построению треугольника по заданным серединам его сторон и решается легко (достаточно провести через каждую из трех заданных точек прямую, параллельную прямой, соединяющей две другие точки).

2°. Предположим, что мы умеем строить $(2n-1)$-угольник по заданным серединам его сторон, и пусть даны $2n+1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$, являющиеся серединами сторон искомого $(2n+1)$-угольника $x_1x_2\ldots x_{2n+1}$.

Рассмотрим четырехугольник $x_1x_{2n-1}x_{2n}x_{2n+1}$ (рис. 40). Точки $A_{2n-1}$, $A_{2n}$, $A_{2n+1}$ служат серединами трех его сторон $x_{2n-1}x_{2n}$, $x_{2n}x_{2n+1}$, $x_{2n+1}x_1$.

Пусть $A$ — середина четвертой стороны $x_1x_{2n-1}$. Четырехугольник $A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A$ — параллелограмм (для доказательства достаточно провести прямую $x_1x_{2n}$ и рассмотреть треугольники $x_1x_{2n+1}x_{2n}$ и $x_1x_{2n-1}x_{2n}$, для которых отрезки $A_{2n}A_{2n+1}$ и $A_{2n-1}A$ служат средними линиями); так как точки $A_{2n-1}$, $A_{2n}$ и $A_{2n+1}$ нам известны, то четвертая вершина $A$ параллелограмма легко может быть построена. Точки $A_1$, $A_2, \ldots$, $A_{2n-2}$, $A$ являются серединами сторон $(2n-1)$-угольника $x_1x_2\ldots x_{2n-1}$, который согласно сделанному предположению мы можем построить. Далее, остается только построить отрезки $x_1x_{2n+1}$ и $x_{2n-1}x_{2n}$ (точки $x_1$ и $x_{2n-1}$ уже определены), делящиеся пополам в известных точках $A_{2n+1}$ и $A_{2n-1}$.

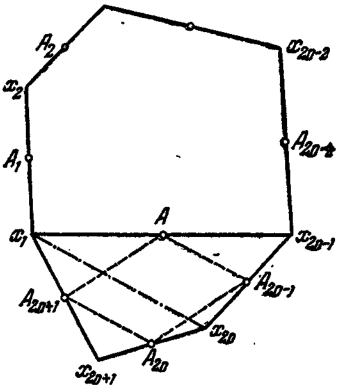


Рис. 40.

В случае многоугольника, не имеющего самопересечений, ясно, что понимать под внешними и внутренними (по отношению к этому многоугольнику) точками. В общем случае это понятие теряет смысл; так, например, нельзя сказать, расположена ли точка $A$ на рис. 39 внутри или вне многоугольника.

Вместо этого мы введем следующее определение. Пусть дан произвольный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Установим для этого многоугольника определенное *направление обхода* его вершин (скажем, в порядке $A_1, A_2, \ldots, A_n$). Пусть на одной из сторон, например $A_1A_2$, многоугольника построен треугольник $A_1BA_2$. Если направление обхода вершин треугольника в порядке $A_1$, $A_2$, $B$ противоположно направлению обхода вершин многоугольника (одно — по, а другое — против часовой стрелки), то мы будем говорить, что треугольник обращен *во внешнюю сторону* по отношению к многоугольнику; если же направления обхода вершин треугольника и многоугольника совпадают, — будем говорить, что он обращен *во внутреннюю сторону* по отношению к многоугольнику.

**Пример 17.** На плоскости даны $n$ точек. Построить $n$-угольник, стороны которого являются основаниями равнобедренных треугольников с вершинами в данных $n$ точках и углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ при вершинах[1]).

Решение. Мы будем считать, что некоторые из углов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могут быть и больше $180^\circ$, условившись, что при $\alpha < 180^\circ$ соответствующий равнобедренный треугольник обращен во внешнюю сторону по отношению к многоугольнику, а при $\alpha > 180^\circ$ — во внутреннюю сторону (причем угол при вершине в этом случае равен $360^\circ - \alpha$).

1°. Пусть $n=3$. Допустим, что задача решена, $x_1, x_2, x_3$ — вершины искомого треугольника, $A_1, A_2, A_3$ — заданные

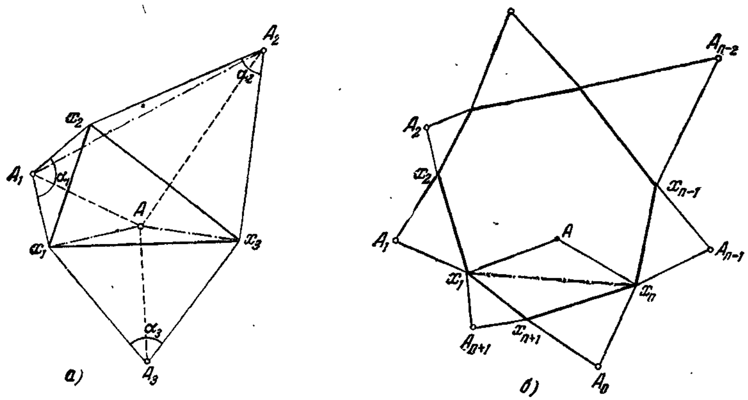



Рис. 41.

вершины построенных на его сторонах равнобедренных треугольников с углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ при вершинах (рис. 41, *а*). При повороте плоскости вокруг точки $A_1$ на угол $\alpha_1$ (мы условимся считать, что все повороты производятся против часовой стрелки) вершина $x_1$ перейдет в $x_2$, при повороте вокруг точки $A_2$ на угол $\alpha_2$ вершина $x_2$ перейдет в $x_3$. Оба эти поворота, последовательно выполненные один за другим, равносильны одному повороту на угол $\alpha_1 + \alpha_2$ вокруг некоторой точки $A$, которую можно построить по точкам $A_1$ и $A_2$ и углам $\alpha_1$ и $\alpha_2$ следующим образом: на отрезке $A_1A_2$ при точках $A_1$ и $A_2$ строим углы $\frac{\alpha_1}{2}$ и $\frac{\alpha_2}{2}$; точка $A$ пересечения вторых сторон этих углов и будет центром результирующего пово-

[1]) Предыдущий пример можно считать частным случаем примера 17 при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 180^\circ$.

рота на угол $\alpha_1+\alpha_2$ [см., например, И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I, § 2 гл. I части первой, М., Гостехиздат, 1955 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 7)]. При этом результирующем повороте вершина $x_1$ переходит в $x_3$. Следовательно, вершина $x_3$ переходит в $x_1$ при повороте вокруг точки $A$ на угол $360°-(\alpha_1+\alpha_2)$ и, значит, точка $A$ является вершиной равнобедренного треугольника с основанием $x_1x_3$ и углом $360°-(\alpha_1+\alpha_2)$ при вершине.

По точкам $A$ и $A_3$, если они не совпадают (что может иметь место, лишь если $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=360°\cdot k$), можно построить сторону $x_1x_3$. Для этого на отрезке $AA_3$ по обе стороны от точек $A$ и $A_3$ строим соответственно углы $\frac{360°-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$ и $\frac{\alpha_3}{2}$. Точки пересечения сторон этих углов и будут вершинами $x_1$ и $x_3$ искомого треугольника. После этого нетрудно построить и вершину $x_2$. При $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=360°\cdot k$ (когда точка $A$ совпадает с $A_3$) решение задачи является неопределенным.

2°. Предположим, что мы умеем строить $n$-угольник по вершинам построенных на его сторонах равнобедренных треугольников с заданными углами при вершинах, и пусть требуется построить $(n+1)$-угольник по вершинам $A_1$, $A_2$, ... $A_n$, $A_{n+1}$ построенных на его сторонах равнобедренных треугольников с углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ при вершинах.

Пусть $x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}$ — искомый $(n+1)$-угольник (рис. 41, *б*). Рассмотрим треугольник $x_1x_nx_{n+1}$. Как в п. 1°, по известным вершинам $A_n$ и $A_{n+1}$ равнобедренных треугольников $x_nA_nx_{n+1}$ и $x_{n+1}A_{n+1}x_1$, построенных на сторонах $x_nx_{n+1}$ и $x_{n+1}x_1$, можно найти вершину $A$ равнобедренного треугольника $x_1Ax_n$, построенного на диагонали $x_1x_n$ и имеющего угол при вершине, равный $360°-(\alpha_n+\alpha_{n+1})$. Этим наша задача сводится к задаче о построении $n$-угольника $x_1x_2\ldots x_n$ по вершинам $A_1A_2\ldots A_{n-1}A$ построенных на его сторонах равнобедренных треугольников с известными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 360°-(\alpha_n+\alpha_{n+1})$ при вершинах. В силу индуктивного предположения $n$-угольник $x_1x_2\ldots x_n$ может быть построен, после чего уже нетрудно построить и искомый $(n+1)$-угольник $x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}$.

При $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=360°\cdot k$ решение задачи является невозможным или неопределенным (почему?).

**Задача 12.** На плоскости дано $n$ точек. Построить $n$-угольник, для которого эти точки являются вершинами построенных на его сторонах треугольников, имеющих заданные углы при вершинах и заданные отношения боковых сторон.

**Пример 18.** На плоскости даны окружность и $n$ точек. Вписать в окружность $n$-угольник, стороны которого проходят через заданные точки.

Решение. Эта задача — трудная; для ее решения надо применить метод математической индукции совсем неожиданным образом. А именно, здесь не удается воспользоваться индукцией по числу $n$ сторон многоугольника; вместо

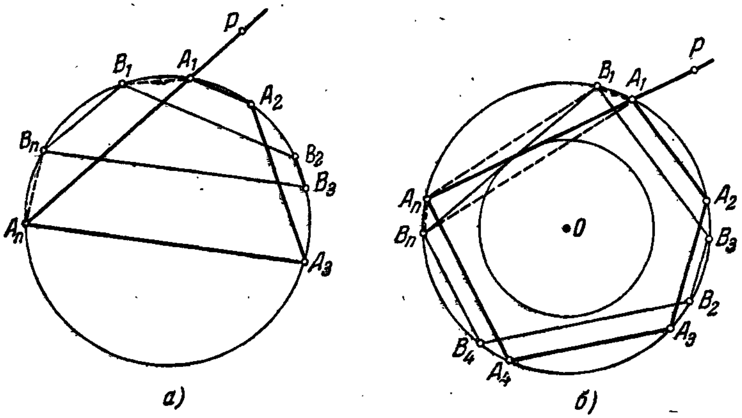



Рис. 42.

этого приходится рассматривать более общую задачу о построении $n$-угольника, $k$ соседних сторон которого проходят через $k$ заданных точек, а остальные $n-k$ сторон параллельны заданным прямым (эта задача переходит в рассматриваемую при $k=n$) и *проводить индукцию по числу* $k$.

1°. При $k=1$ имеем такую задачу: вписать в окружность $n$-угольник, сторона $A_1A_n$ которого проходит через заданную точку $P$, а остальные $n-1$ сторон $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_n$ параллельны заданным прямым $l_1$, $l_2$, ..., $l_{n-1}$.

Допустим, что задача решена и искомый многоугольник построен (рис. 42, *а*, *б*). Возьмем на окружности произвольную точку $B_1$ и построим вписанный многоугольник $B_1B_2 \ldots B_n$, стороны $B_1B_2$, $B_2B_3$, ..., $B_{n-1}B_n$ которого параллельны соответственно прямым $l_1$, $l_2$, ..., $l_{n-1}$. Тогда дуги $A_1B_1$,

$A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ будут равны между собой, причем дуги $A_1B_1$ и $A_2B_2$, $A_2B_2$ и $A_3B_3$ и т. д. будут иметь противоположные направления на окружности. Следовательно, при четном $n$ дуги $A_1B_1$ и $A_nB_n$ направлены в противоположные стороны, и четырехугольник $A_1B_1B_nA_n$ является равнобедренной трапецией с основаниями $A_1A_n$ и $B_1B_n$ (рис. 42, *а*). Поэтому сторона $A_1A_n$ искомого многоугольника параллельна стороне $B_1B_n$ $n$-угольника $B_1B_2 \ldots B_n$; следовательно, в этом случае через точку $P$ надо провести прямую, параллельную $B_1B_n$, после чего уже без труда определяются и остальные вершины $n$-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ (провести исследование).

При нечетном $n$ дуги $A_1B_1$ и $A_nB_n$ имеют одинаковые направления и четырехугольник $A_1B_1A_nB_n$ является равнобедренной трапецией с основаниями $A_1B_n$ и $B_1A_n$ (рис. 42, *б*). Так как диагонали $A_1A_n$ и $B_1B_n$ трапеции равны, то в этом случае нужно провести через точку $P$ прямую, на которой заданная окружность отсекает хорду $A_1A_n$, равную известной хорде $B_1B_n$, т. е. прямую, касательную к окружности, концентрической с заданной и касающейся $B_1B_n$ (исследование!).

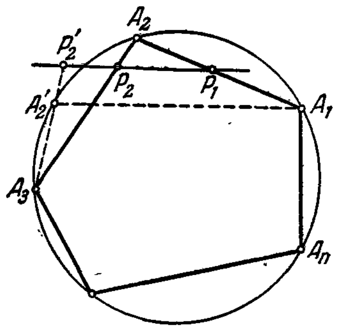


Рис. 43.

2°. Предположим, что мы уже умеем решать задачу о построении вписанного в окружность $n$-угольника, $k$ последовательных сторон которого проходят через $k$ заданных точек, а остальные $n-k$ сторон параллельны заданным прямым, и пусть требуется вписать в окружность $n$-угольник, у которого $k+1$ соседних сторон $A_1A_2$, $A_2A_3$, $\ldots$, $A_{k+1}A_{k+2}$ проходят через $k+1$ заданных точек $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_{k+1}$, а остальные $n-k-1$ сторон параллельны заданным прямым.

Допустим, что задача решена и искомый $n$-угольник построен (рис. 43). Рассмотрим стороны $A_1A_2$ и $A_2A_3$ этого многоугольника. Проведем через вершину $A_1$ прямую $A_1A_2'$, параллельную $P_1P_2$, обозначим через $A_2'$ точку пересечения этой прямой с окружностью и через $P_2'$ — точку пересечения прямой $A_2'A_3$ с $P_1P_2$. Треугольники $P_1A_2P_2$ и $P_2'P_2A_3$ подобны, так как $\angle A_2P_1P_2 = \angle A_2A_1A_2' = \angle A_2A_3P_2'$ и $\angle A_2P_2P_1 =$

$=\angle P'_2P_2A_3$. Следовательно, $\frac{P_1P_2}{A_3P_2}=\frac{A_2P_2}{P'_2P_2}$, откуда

$$P'_2P_2=\frac{A_3P_2\cdot A_2P_2}{P_1P_2}.$$

Так как произведение $A_3P_2\cdot A_2P_2$ зависит лишь от данной точки $P_2$ и от окружности (но не от выбора точек $A_2$ и $A_3$!), то оно может быть определено; поэтому величина отрезка $P'_2P_2$ может быть найдена и, следовательно, точка $P'_2$ может быть построена. Таким образом, нам известны $k$ точек $P'_2, P_3, \ldots, P_{k+1}$, через которые проходят $k$ соседних сторон $A'_2A_3$, $A_3A_4$, $\ldots$, $A_{k+1}A_{k+2}$ $n$-угольника $A_1A'_2A_3\ldots A_n$, остальные же $n-k$ сторон его $A_{k+2}A_{k+3}$, $\ldots$, $A_nA_1$, $A_1A'_2$ параллельны известным прямым. В силу индуктивного предположения мы можем построить $n$-угольник $A_1A'_2A_3\ldots A_n$, после чего уже нетрудно построить и искомый $n$-угольник $A_1A_2\ldots A_n$.

**Задача 13.** В заданную окружность вписать $n$-угольник, $k$ сторон которого (не обязательно соседних!) проходят через $k$ заданных точек, а остальные $n-k$ сторон параллельны заданным прямым.

**Пример 19.** Даны две параллельные прямые $l$ и $l_1$. С помощью одной линейки разделить отрезок $AB$ прямой $l$ на $n$ равных частей.

Решение. 1°. Пусть $n=2$. Произвольную точку $S$ плоскости, не лежащую на прямых $l$ и $l_1$, соединим с точками $A$ и $B$ (рис. 44, $a$) и обозначим через $C$ и $D$ точки пересечения прямых $AS$ и $BS$ с прямой $l_1$. Точку пересечения прямых $AD$ и $BC$ обозначим через $T_2$, точку пересечения прямых $ST_2$ и $l$ — через $P_2$. Докажем, что точка $P_2$ — искомая, т. е. что $AP_2=\frac{1}{2}AB$.

Обозначим через $Q_2$ точку пересечения прямых $ST_2$ и $l_1$. Легко видеть, что $\triangle T_2P_2B \backsim \triangle T_2Q_2C$, $\triangle ABT_2 \backsim \triangle DCT_2$, $\triangle SAP_2 \backsim \triangle SCQ_2$ и $\triangle SAB \backsim \triangle SCD$, откуда $\frac{P_2B}{Q_2C}=\frac{T_2B}{T_2C}=\frac{AB}{CD}$ и $\frac{P_2A}{Q_2C}=\frac{SA}{SC}=\frac{AB}{CD}$. Следовательно, $\frac{P_2B}{Q_2C}=\frac{P_2A}{Q_2C}$, а поэтому $P_2A=P_2B$ и $AP_2=\frac{1}{2}AB$.

2°. Предположим, что мы уже умеем, пользуясь одной линейкой, строить такую точку $P_n$ отрезка $AB$, что $AP_n=$

$= \frac{1}{n} AB$. Выберем вне $l$ и $l_1$ произвольную точку $S$, и обозначим через $T_n$ и $Q_n$ точки пересечения прямой $SP_n$ соответственно с $AD$ и $l_1$ (рис. 44, *б*). Точку $T_{n+1}$ пересечения

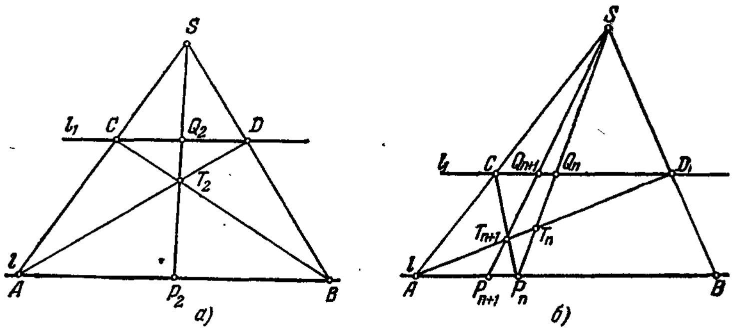



Рис. 44.

прямых $AD$ и $CP_n$ соединим с $S$ и обозначим точки пересечения $ST_{n+1}$ с прямыми $l_1$ и $l$ через $Q_{n+1}$ и $P_{n+1}$.

Докажем, что $P_{n+1}$ — искомая точка, т. е. что $AP_{n+1} = \frac{1}{n+1} AB$.

Действительно, из подобия треугольников $CQ_{n+1}T_{n+1}$ и $P_nP_{n+1}T_{n+1}$, $CT_{n+1}D$ и $P_nT_{n+1}A$ имеем:

$$\frac{P_{n+1}P_n}{CQ_{n+1}} = \frac{P_nT_{n+1}}{CT_{n+1}} = \frac{AP_n}{CD}; \tag{6}$$

из подобия треугольников $SAP_{n+1}$ и $SCQ_{n+1}$, $SAB$ и $SCD$ имеем:

$$\frac{AP_{n+1}}{CQ_{n+1}} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}. \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует $\frac{P_{n+1}P_n}{AP_{n+1}} = \frac{AP_n}{AB}$ или, так как $P_{n+1}P_n = AP_n - AP_{n+1}$ и $AP_n = \frac{1}{n} AB$,

$$\frac{\frac{1}{n} AB - AP_{n+1}}{AP_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n} AB}{AB}, \quad \frac{1}{n} AB - AP_{n+1} = \frac{1}{n} AP_{n+1},$$

откуда окончательно $AP_{n+1} = \frac{1}{n+1} AB$.

Для того чтобы найти последующие точки $P'_{n+1}$, $P''_{n+1}$, ... деления, достаточно тем же приемом построить отрезки $P_{n+1}P'_{n+1}=\frac{1}{n}P_{n+1}B$, $P'_{n+1}P''_{n+1}=\frac{1}{n-1}P'_{n+1}B$ и т. д.

Замечание. Для построения точек $P'_{n+1}$, $P''_{n+1}$, ... можно также поступить следующим образом. Используя точку $P_2$, можно провести через точку $S$ прямую $l_2 \parallel l$ (см. рис. 45, *а*, где

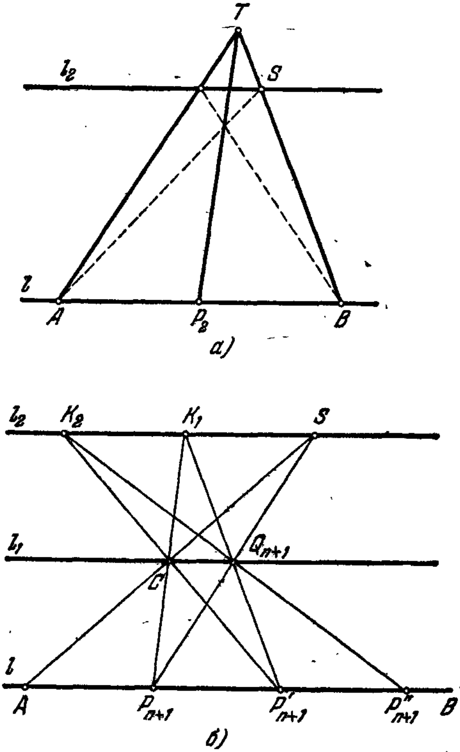



Рис. 45.

точка $T$ выбрана на $BS$ произвольно). Пусть $K_1$ — точка пересечения прямой $P_{n+1}C$ с $l_2$ и $P_{n+1}$ — точка пересечения прямой $K_1Q_{n+1}$ с $l$ (рис. 45, *б*). Тогда легко проверить, что $P_{n+1}P'_{n+1}=AP_{n+1}=$ $=\frac{1}{n+1}AB$. Построение следующих точек $P''_{n+1}$, $P'''_{n+1}$ ... — аналогично.

**Задача 14.** Пользуясь циркулем данного раствора $a$ и линейкой, построить отрезок, равный $a/n$.

## § 4. Нахождение геометрических мест по индукции

Рассмотрим несколько задач на нахождение геометрических мест с помощью метода математической индукции.

**Пример 20.** На сторонах выпуклого $n$-угольника $A_1 \dots A_n$ отложены отрезки $B_1C_1$, $B_2C_2$, ..., $B_nC_n$. Найти геометрическое место внутренних точек $M$ этого многоугольника, для которых сумма площадей треугольников $MB_1C_1$,

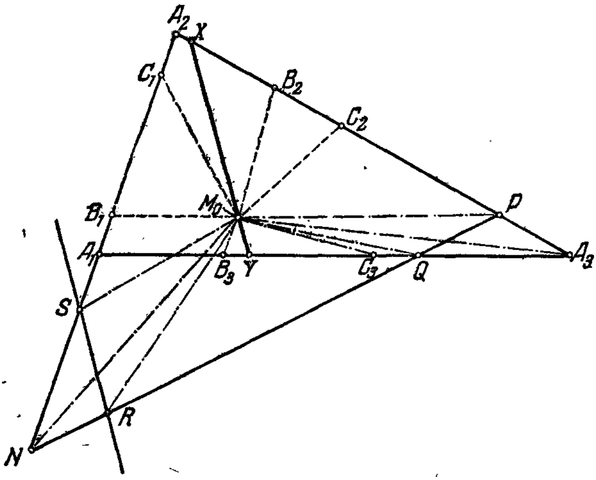



Рис. 46

$MB_2C_2$, ..., $MB_nC_n$ постоянна (равна сумме $S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0B_2C_2} + \dots + S_{\triangle M_0B_nC_n}$, где $M_0$ — определенная точка внутри многоугольника).

Решение. 1°. Пусть $n=3$ (рис. 46). На сторонах $A_3A_2$ и $A_3A_1$ треугольника $A_1A_2A_3$ отложим отрезки $A_3P = B_2C_2$ и $A_3Q = B_3C_3$.

Тогда [1])

$$S_{\triangle M_0B_2C_2} + S_{\triangle M_0B_3C_3} = S_{\triangle M_0PA_3} + S_{\triangle M_0QA_3} = S_{\triangle PQA_3} + S_{\triangle M_0PQ}$$

[1]) Здесь мы считаем, что точка $M_0$ лежит внутри четырехугольника $A_1A_2PQ$; рассуждение мало изменилось бы и в ином случае.

и, следовательно,

$$S_{\triangle M_0B_1C_1}+S_{\triangle M_0B_2C_2}+S_{\triangle M_0B_3C_3}=$$
$$=S_{\triangle PQA_3}+(S_{\triangle M_0B_1C_1}+S_{\triangle M_0PQ}).$$

Аналогично

$$S_{\triangle MB_1C_1}+S_{\triangle MB_2C_2}+S_{\triangle MB_3C_3}=S_{\triangle PQA_3}+(S_{\triangle MB_1C_1}+S_{\triangle MPQ}).$$

Мы видим, что искомое геометрическое место определяется условием

$$S_{\triangle MB_1C_1}+S_{\triangle MPQ}=S_{\triangle M_0B_1C_1}+S_{\triangle M_0PQ}.$$

Пусть теперь $N$ — точка пересечения прямых $A_1A_2$ и $PQ$ (если эти прямые параллельны, искомое геометрическое место будет отрезком параллельной им прямой). Отложим на сторонах угла $A_2NP$ отрезки $NR=PQ$ и $NS=B_1C_1$; тогда $S_{\triangle M_0B_1C_1}+S_{\triangle M_0PQ}=S_{\triangle M_0NS}+S_{\triangle M_0NR}=S_{\triangle NRS}+$ $+S_{\triangle M_0RS}$ и аналогично $S_{\triangle MB_1C_1}+S_{\triangle MPQ}=S_{\triangle NRS}+S_{\triangle MRS}$.

Следовательно, искомое геометрическое место состоит из тех точек $M$, лежащих внутри треугольника, для которых $S_{\triangle MRS}=S_{\triangle M_0RS}$, т. е. представляет собой отрезок $XY$ прямой, проходящей через точку $M_0$ (и параллельной прямой $RS$[1])).

2°. Пусть мы уже знаем, что для $n$-угольника искомое геометрическое место представляет собой отрезок прямой (проходящей, разумеется, через точку $M_0$). Рассмотрим теперь $(n+1)$-угольник $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$; пусть $B_1C_1$, $B_2C_2$, $\ldots$, $B_nC_n$, $B_{n+1}C_{n+1}$ — заданные отрезки, отложенные на его сторонах, и $M_0$ — точка внутри $(n+1)$-угольника (рис. 47). На сторонах угла $A_1A_{n+1}A_n$ от вершины $A_{n+1}$ отложим отрезки $A_{n+1}P=B_nC_n$ и $A_{n+1}Q=B_{n+1}C_{n+1}$. Тогда

$$S_{\triangle MB_nC_n}+S_{\triangle MB_{n+1}C_{n+1}}=S_{\triangle MA_{n+1}P}+S_{\triangle MA_{n+1}Q}=$$
$$=S_{\triangle A_{n+1}PQ}+S_{\triangle MPQ}.$$

Следовательно, для точек $M$ искомого геометрического места

$$S_{\triangle MB_1C_1}+S_{\triangle MB_2C_2}+\ldots+S_{\triangle MB_{n-1}C_{n-1}}+S_{\triangle MPQ}=$$
$$=S_{\triangle M_0B_1C_1}+S_{\triangle M_0B_2C_2}+\ldots+S_{\triangle M_0B_{n-1}C_{n-1}}+S_{\triangle M_0PQ}.$$

В силу индуктивного предположения искомое геометрическое место представляет собой отрезок прямой, проходящей через точку $M_0$.

---

[1]) Индукцию можно было бы начинать со случая $n=2$, когда «$n$-угольник» представляет собой угол, имеющий лишь две стороны.

Из решения задачи нетрудно усмотреть также метод построения этого геометрического места.

**Задача 15.** Даны $n$ прямых $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$, на каждой из которых задано по отрезку $B_1C_1$, $B_2C_2$, ..., $B_nC_n$ и точка $M_0$. Найти геометрическое место точек $M$, для которых алгебраическая сумма площадей треугольников $MB_1C_1$, $MB_2C_2$, ..., $MB_nC_n$, где площадь треугольника $MB_iC_i$ ($i=1$, $2$, ..., $n$) берется со знаком плюс, если точка $M$ лежит с той же стороны от прямой $l_i$, что и точка $M_0$, и со знаком минус — в противном случае, равна соответствующей сумме для точки $M_0$.

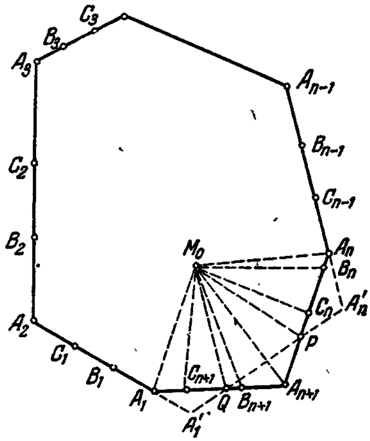



Рис. 47.

**Задача 16.** Доказать, что в четырехугольнике, который можно описать около круга, середины диагоналей лежат на одной прямой с центром круга (рис. 48).

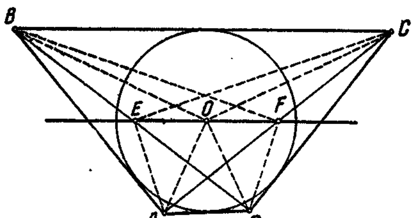



Рис. 48.

**Задача 17.** Доказать, что прямая, соединяющая середины диагоналей выпуклого четырехугольника (не параллелограмма и не трапеции), делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон (рис. 49).

**Пример 21.** Даны $n$ точек $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ и $n$ (положительных или отрицательных!) чисел $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$.

Найти геометрическое место точек $M$, для которых сумма $a_1 \cdot MA_1^2 + a_2 \cdot MA_2^2 + \ldots + a_n MA_n^2$ постоянна.

Решение. 1°. Пусть $n=2$. Для определенности будем сначала предполагать, что оба числа $a_1$ и $a_2$ положительны.

Возьмем на отрезке $A_1A_2$ точку $O$, делящую его в отношении $a_2:a_1$, т. е. такую точку $O$, что $OA_1=\frac{a_2}{a_1+a_2}A_1A_2$ и $OA_2=\frac{a_1}{a_1+a_2}A_1A_2$. Пусть $M$ — произвольная точка плоскости и $H$ — основание

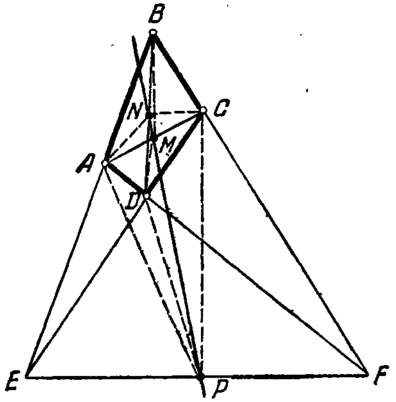



Рис. 49.

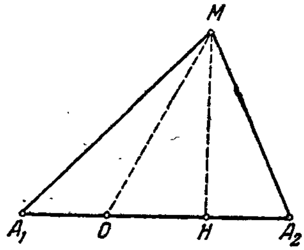



Рис. 50.

перпендикуляра, опущенного из $M$ на прямую $A_1A_2$ (рис. 50). Тогда имеем:

$$MA_1^2=MO^2+A_1O^2\pm 2A_1O\cdot HO,$$

$$MA_2^2=MO^2+A_2O^2\mp 2A_2O\cdot HO.$$

Умножая первое из этих равенств на $A_2O$, второе — на $A_1O$ и складывая их почленно, получим:

$$MA_1^2\cdot A_2O+MA_2^2\cdot A_1O=MO^2(A_2O+A_1O)+$$
$$+A_1O^2\cdot A_2O+A_2O^2\cdot A_1O=MO^2\cdot A_1A_2+A_1O\cdot A_2O\cdot A_1A_2.$$

Подставим теперь вместо $A_1O$ и $A_2O$ их значения; получим:

$$MA_1^2\frac{a_1\cdot A_1A_2}{a_1+a_2}+MA_2^2\frac{a_2\cdot A_1A_2}{a_1+a_2}=MO^2\cdot A_1A_2+\frac{a_1}{a_1+a_2}\,\frac{a_2}{a_1+a_2}A_1A_2^3,$$

или

$$a_1MA_1^2+a_2MA_2^2=(a_1+a_2)\,MO^2+\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}A_1A_2^2.$$

Следовательно, если $a_1MA_1^2+a_2MA_2^2=R^2$, то

$$MO^2=\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2=\text{const}.$$

Отсюда вытекает, что если $\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2>0$, то искомым геометрическим местом будет окружность с центром в точке $O$ радиуса $\sqrt{\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2}$; если

$$\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2=0,$$

то искомое геометрическое место состоит из единственной точки $O$; наконец, если $\frac{R^2}{a_1+a_2}-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}A_1A_2^2<0$, то это геометрическое место не содержит ни одной точки.

Случай, когда $a_1$ и $a_2$ оба отрицательны, очевидным образом сводится к предыдущему. В случае, когда $a_1>0$, $a_2<0$ и $a_1+a_2\neq 0$ (например, $a_1+a_2>0$), точку $O$ следует выбрать на продолжении отрезка $A_1A_2$ правее точки $A_2$ так, чтобы было

$$A_2O=\left|\frac{a_1}{a_1+a_2}\right| \quad \text{и} \quad A_1O=\left|\frac{a_2}{a_1+a_2}\right|;$$

дальнейшие рассуждения не будут отличаться от вышеизложенных. Наконец, если $a_1+a_2=0$, то $a_1=-a_2$, и наша задача сводится к следующей: найти геометрическое место точек $M$, для которых разность квадратов расстояний от двух заданных точек $A_1$ и $A_2$ постоянна. Пусть $H$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $M$ на прямую $A_1A_2$ (рис. 50), тогда $MA_1^2=MH^2+A_1H^2$, $MA_2^2=MH^2+A_2H^2$ и, следовательно, $MA_1^2-MA_2^2=A_1H^2-A_2H^2$. Если

$$MA_1^2-MA_2^2=R^2, \quad \text{то} \quad A_1H-A_2H=\frac{R^2}{A_1A_2},$$

чем полностью определяется точка $H$; отсюда следует, что искомым геометрическим местом будет в этом случае прямая, проходящая через точку $H$ и перпендикулярная к $A_1A_2$.

2°. Предположим, что мы уже доказали, что при $n$ заданных точках соответствующее геометрическое место представляет собой окружность, если $a_1+a_2+\ldots+a_n\neq 0$, и прямую, если $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$. Рассмотрим теперь $n+1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ и $n+1$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Предположим, что $a_n+a_{n+1}\neq 0$ (если бы было $a_n+a_{n+1}=0$, то мы заменили бы эту пару чисел числами $a_{n-1}$ и $a_{n+1}$ или числами $a_{n-1}$ и $a_n$; если одновременно $a_n+a_{n+1}=0$, $a_{n-1}+a_{n+1}=0$ и $a_{n-1}+a_n=0$, то $a_{n-1}=a_n=a_{n+1}=0$, и мы можем непосредственно воспользоваться индуктивным предположением, так как при этом задача сводится к случаю $n-2$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ и $n-2$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$).

Как в п. 1°, покажем, что на отрезке $A_nA_{n+1}$ можно найти такую точку $O$, что для любой точки $M$ плоскости

$$a_nMA_n^2+a_{n+1}MA_{n+1}^2=(a_n+a_{n+1})MO^2+\frac{a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}A_nA_{n+1}^2.$$

Тем самым наша задача сведется к нахождению геометрического места точек $M$, для которых постоянна сумма

$$a_1MA_1^2+a_2MA_2^2+\ldots+a_{n-1}MA_{n-1}^2+(a_n+a_{n+1})MO^2.$$

В силу индуктивного предположения это геометрическое место будет окружностью при $a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}\neq 0$ и прямой при $a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}=0$.

**Задача 18.** Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от $n$ заданных точек постоянна.

**Задача 19.** Найти точку, сумма квадратов расстояний которой от $n$ заданных точек минимальна.

**Задача 20.** Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух заданных точек постоянно.

**Задача 21.** Дан $n$-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Найти геометрическое место таких точек $M$, что многоугольник, вершинами которого являются проекции точки $M$ на стороны заданного многоугольника, имеет данную площадь $S$.

## § 5. Определение по индукции

Интересные примеры применения метода математической индукции в геометрии доставляют задачи, содержащие понятия, само определение которых использует переход «от $n$ к $n+1$». Задачам такого рода и посвящен настоящий параграф.

**Пример 22.** Определение медиан и центра тяжести $n$-угольника.

1°. **Центром тяжести отрезка** мы будем называть его середину (рис. 51, *а*).

В таком случае **медианы треугольника** $A_1A_2A_3$ можно определить как отрезки, соединяющие вершины треугольника с центрами тяжести противоположных сторон

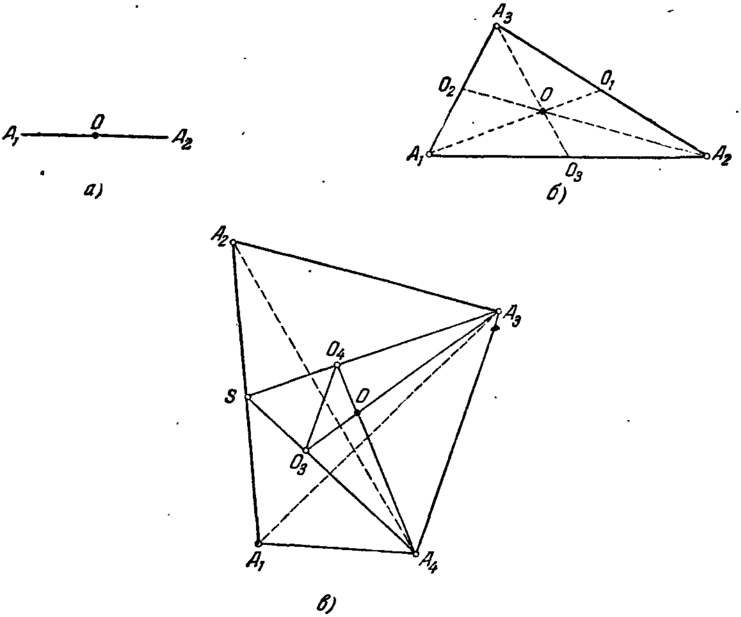



Рис. 51.

(рис. 51, *б*). Как известно, медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении $2:1$, считая от вершины. Точку, в которой пересекаются все медианы треугольника, называют **центром тяжести треугольника**.

Условимся теперь называть **медианами четырехугольника** $A_1A_2A_3A_4$ отрезки, соединяющие его вершины $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ с центрами тяжести $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ треугольников, образованных остальными тремя вершинами (рис. 51, *в*). Докажем, что *медианы четырехугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении* $3:1$, *считая от вершины*. Действительно, обозначим через $S$ центр тяжести (середину) стороны $A_1A_2$, а через $O_4$ и $O_3$ — центры тяжести треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; пусть еще $O$ — точка пересечения медиан $A_3O_3$ и $A_4O_4$ четырехугольника. Так как $SA_3$ и $SA_4$ — медианы треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$, то $\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{3}{1}$ и $\frac{SA_4}{SO_3}=\frac{3}{1}$, и, следовательно, $\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{SA_4}{SO_3}$.

Отсюда вытекает, что $O_3O_4 \parallel A_3A_4$ и $\frac{A_3A_4}{O_3O_4}=\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{3}{1}$. Далее, из подобия треугольников $OO_3O_4$ и $OA_3A_4$ имеем:

$$\frac{OA_4}{OO_4}=\frac{OA_3}{OO_3}=\frac{A_3A_4}{O_3O_4}=\frac{3}{1}.$$

Таким образом, любые две соседние (т. е. выходящие из смежных вершин) медианы четырехугольника в точке пересечения делятся в отношении 3:1. Отсюда следует, что все

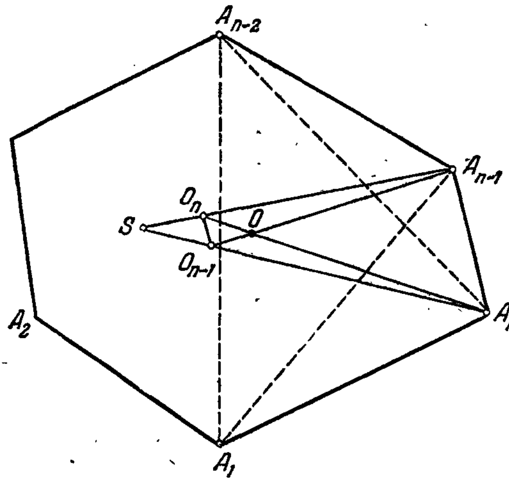



Рис. 52.

четыре медианы четырехугольника проходят через одну точку $O$, в которой все они делятся в отношении 3:1. Точку $O$ пересечения медиан четырехугольника называют **центром тяжести четырехугольника**.

2°. Предположим, что для всех $k < n$ мы уже определили медианы $k$-угольника как отрезки, соединяющие вершины $k$-угольника с центрами тяжести $(k-1)$-угольников, образованных остальными $k-1$ вершинами, и для всех $k < n$ определили центр тяжести $k$-угольника как точку пересечения его медиан. Мы будем также предполагать уже доказанным, что медианы $k$-угольника при $k < n$ делятся в точке пересечения (центре тяжести $k$-угольника) в отношении $(k-1):1$ (считая от вершины).

Определим теперь медианы $n$-угольника как отрезки, соединяющие вершины $n$-угольника с центрами тяжести $(n-1)$-угольников, образованных остальными $n-1$ вершинами. Докажем что *все медианы $n$-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении* $(n-1):1$ (считая от вершины). Действительно, пусть $S$ — центр тяжести $(n-2)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{n-2}$; тогда прямые $SA_{n-1}$ и $SA_n$ будут медианами $(n-1)$-угольников $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ и $A_1A_2\ldots A_{n-2}A_n$ (рис. 52). Если $O_n$ и $O_{n-1}$ — центры тяжести этих $(n-1)$-угольников, то в силу индуктивного предположения $\frac{SA_{n-1}}{SO_n}=\frac{SA_n}{SO_{n-1}}=\frac{n-1}{1}$. Следовательно, $O_{n-1}O_n \parallel A_nA_{n-1}$ и $\frac{A_{n-1}A_n}{O_{n-1}O_n}=\frac{n-1}{1}$. Обозначим через $O$ точку пересечения медиан $O_{n-1}A_{n-1}$ и $O_nA_n$ $n$-угольника $A_1A_2\ldots A_n$. Из подобия треугольников $OO_{n-1}O_n$ и $OA_{n-1}A_n$ следует, что $\frac{OA_{n-1}}{OO_{n-1}}=\frac{OA_n}{OO_n}=\frac{A_{n-1}A_n}{O_{n-1}O_n}=\frac{n-1}{1}$. Таким образом, любые две смежные медианы $n$-угольника в точке пересечения делятся в отношении $(n-1):1$. Отсюда и следует, что все медианы $n$-угольника пересекаются в одной точке (и делятся в ней в отношении $(n-1):1$).

Теперь мы можем определить ц е н т р т я ж е с т и $n$-угольника как точку пересечения его медиан, а затем и м е д и а н ы $(n+1)$-у г о л ь н и к а как отрезки, соединяющие вершины $(n+1)$-угольника с центрами тяжести $n$-угольников, образованных остальными $n$ вершинами. Метод математической индукции позволяет утверждать, что наши определения медиан и центра тяжести $n$-угольника имеют смысл п р и л ю б о м $n$.

**Задача 22.** В $n$-угольнике $A_1A_2\ldots A_n$ обозначим через $O_1$ центр тяжести $(n-1)$-угольника $A_2A_3\ldots A_n$, через $O_2$ — центр тяжести $(n-1)$-угольника $A_1A_3\ldots A_n$ и т. д., через $O_n$ — центр тяжести $(n-1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{n-1}$. Доказать, что $n$-угольник $O_1O_2\ldots O_n$ подобен данному $n$-угольнику $A_1A_2\ldots A_n$.

М е д и а н о й $k$-г о п о р я д к а $n$-угольника $(k < n)$ называется отрезок, соединяющий центр тяжести $k$-угольника, образованного любыми $k$ вершинами $n$-угольника, с центром тяжести $(n-k)$-угольника, образованного остальными $n-k$ вершинами. Таким образом, медиана $k$-го порядка является одновременно и медианой $(n-k)$-го порядка. Медианы $n$-угольника, определенные в примере 22, можно было бы назвать медианами первого порядка.

**Задача 23.** Доказать, что все медианы $k$-го порядка $n$-угольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении $(n-k):k$.

**Задача 24.** Сформулировать утверждение задачи 23 при $n=4$, $k=2$.

Окружность, проходящая через середины трех сторон треугольника (рис. 53), называется окружностью Эйлера этого треугольника; она обладает рядом интересных свойств (так, например, окружность Эйлера треугольника $ABC$, кроме середин $D$, $E$, $F$ сторон, проходит еще через основания $P$, $Q$, $R$ высот $AP$, $BQ$ и $CR$ и через три точки $K$, $L$, $M$, делящие пополам отрезки $AH$, $BH$, $CH$ высот между точкой $H$ их пересечения и вершинами[1]); поэтому окружность Эйлера часто называют еще окружностью девяти точек треугольника). Так как окружность Эйлера треугольника $ABC$ описана вокруг треугольника $DEF$, подобного $ABC$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, то радиус ее

---

[1]) Так как четырехугольник $KFDM$ (рис. 53) — прямоугольник (ибо $FK \parallel BH \parallel DM$, так как $KF$ и $DM$ — средние линии треугольников $ABH$ и $CBH$ с общим основанием $BH$; $FD \parallel AC \parallel KM$, так как $FD$ и $KM$ — средние линии треугольников $ABC$ и $AHC$ с общим основанием $AC$; $BH \perp AC$), то отрезки $FM$ и $DK$ равны и имеют общую середину. Так же доказывается, что и отрезок $EL$ равен им и середина $EL$ совпадает с общей серединой $FM$ и $KD$. Отсюда следует, что окружность Эйлера, проходящая через точки $D$, $E$ и $F$, проходит также через $K$, $L$ и $M$ (центр этой окружности совпадает с общей серединой $DK$, $EL$ и $FM$, а диаметр равен общей длине этих отрезков).

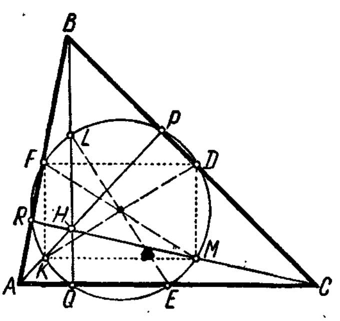


Рис. 53.

Далее, так как по доказанному $K$ и $D$ — диаметрально противоположные точки окружности Эйлера и $\angle KPD=90°$, то окружность Эйлера проходит через точку $P$; так же доказывается, что она проходит и через точки $Q$ и $R$.

равен $R/2$, где $R$ — радиус описанной окружности исходного треугольника $ABC$. Понятие окружности Эйлера может быть следующим образом распространено на любой вписанный в окружность многоугольник.

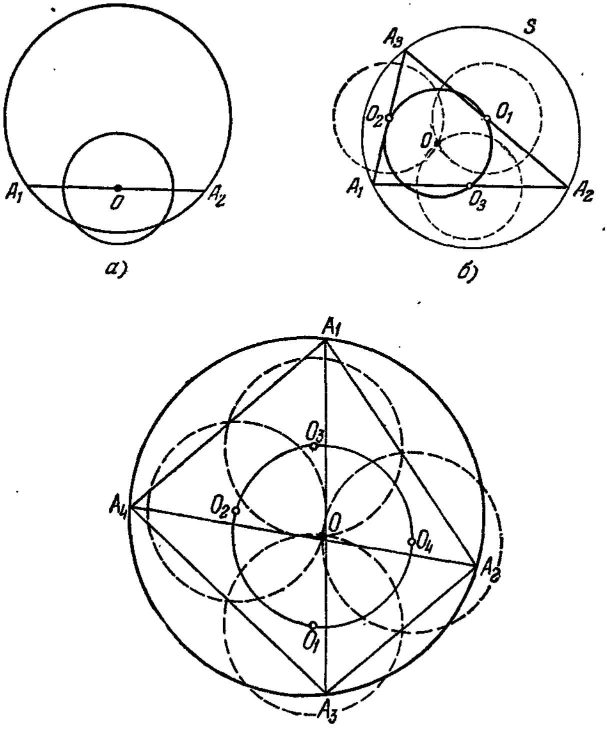



Рис. 54.

**Задача 25.** 1°. Окружностью Эйлера хорды $A_1A_2$ окружности $S$ радиуса $R$ называется окружность радиуса $R/2$, центром которой служит середина хорды $A_1A_2$ (рис. 54, *а*). Три окружности Эйлера сторон вписанного в окружность $S$ треугольника $A_1A_2A_3$ пересекаются в одной точке $O$, которая является центром окружности радиуса $R/2$, проходящей через центры трех окружностей Эйлера; эта окружность называется окружностью Эйлера треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 54, *б*).

2°. Предположим, что нами уже определена окружность Эйлера вписанного в окружность $S$ $n$-угольника и известно, что ее радиус равен $R/2$ ($R$ — радиус окружности $S$). Рассмотрим теперь $(n+1)$-угольник $A_1A_2A_3 \ldots A_{n+1}$, вписанный в окружность $S$. В таком случае $n+1$ окружностей Эйлера $n$-угольников $A_2A_3 \ldots A_{n+1}$, $A_1A_3 \ldots A_{n+1}$, ..., $A_1A_2 \ldots A_n$ пересекаются в одной точке, которая является центром окружности радиуса $R/2$, проходящей через центры всех $n+1$ окружностей Эйлера; эта окружность называется **окружностью Эйлера** $(n+1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ (см. рис. 54, *в*, где изображена окружность Эйлера четырехугольника).

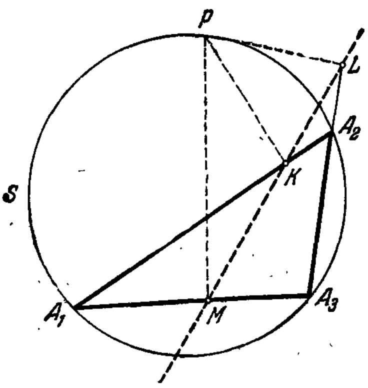



Рис. 55.

**Задача 26.** Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — произвольный $n$-угольник, вписанный в окружность $S$. Доказать, что центр тяжести $n$-угольника (см. пример 22) лежит на отрезке, соединяющем центр $S$ с центром окружности Эйлера $n$-угольника, и делит этот отрезок в отношении $(n-2):2$.

**Задача 27.** 1°. Пусть треугольник $ABC$ вписан в окружность $S$ и $P$ — произвольная точка этой окружности. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки $P$ на стороны треугольника $ABC$, лежат на одной прямой (рис. 55; эта прямая называется **прямой Симпсона** точки $P$ относительно треугольника $ABC$).

2°. Предположим, что мы уже определили прямую Симпсона точки $P$ окружности $S$ относительно любого вписанного в нее $n$-угольника; пусть $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ — вписанный в окружность $S$ $(n+1)$-угольник. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки $P$ на $n+1$ прямых Симпсона этой точки относительно всевозможных $n$-угольников, образованных $n$ вершинами $(n+1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, лежат на одной прямой. Эту прямую мы будем называть **прямой Симпсона** точки $P$ относительно $(n+1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$.

Пример 23. 1°. Пусть $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ — четыре прямые общего положения, т. е. такие, что никакие две из них не параллельны и никакие три не проходят через одну точку; $O_1$ — центр окружности, описанной вокруг треугольника, образованного прямыми $l_2$, $l_3$, $l_4$; $O_2$ — центр окружности, описанной вокруг треугольника, образованного прямыми $l_1$, $l_3$, $l_4$, и т. д. Тогда четыре точки $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$ лежат на одной окружности, называемой окружностью центров четырех прямых $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ (рис. 56).

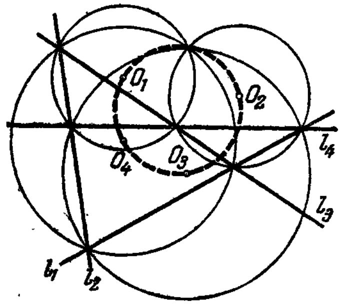



Рис. 56.

2°. Пусть уже определена окружность центров $n$ прямых и пусть даны $n+1$ прямых общего положения $l_1$, $l_2$, ..., $l_{n+1}$. Обозначим центр окружности центров $n$ прямых $l_2$, $l_3$, ..., $l_{n+1}$ через $O_1$, центр окружности центров $n$ прямых $l_1$, $l_3$, ..., $l_{n+1}$ — через $O_2$ и т. д. Тогда $n+1$ точек $O_1$, $O_2$, $O_3$, ..., $O_{n+1}$ лежат на одной окружности, называемой окружностью центров $n+1$ прямых $l_1$, $l_2$, $l_3$, ..., $l_{n+1}$.

Доказательство. 1°. Пусть $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ — четыре прямые общего положения (рис. 57), $A_{12}$ — точка пересечения $l_3$ и $l_4$, $A_{13}$ —

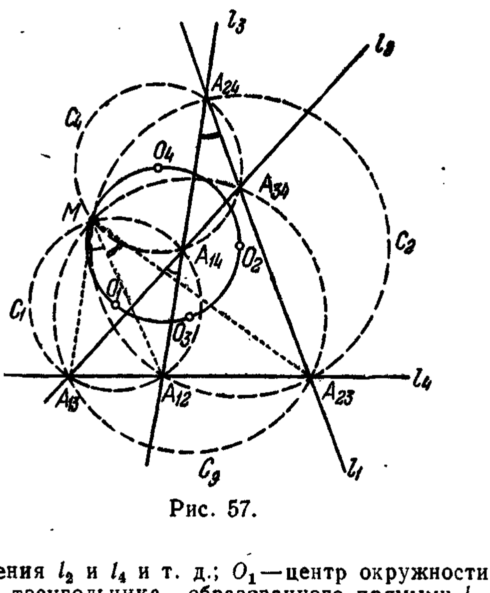



Рис. 57.

точка пересечения $l_2$ и $l_4$ и т. д.; $O_1$ — центр окружности $C_1$, описанной вокруг треугольника, образованного прямыми $l_2$, $l_3$ и $l_4$, и т. д. Докажем, прежде всего, что окружности $C_1$, $C_2$, $C_3$ и $C_4$ пересекаются в одной точке $M$. Действительно, если $M$ есть точка пересечения $C_1$ и $C_2$, отличная от $A_{12}$, то

$$\angle A_{13}MA_{12} = \angle A_{13}A_{14}A_{12} = \angle \text{ между } l_2 \text{ и } l_3;$$
$$\angle A_{12}MA_{23} = \angle A_{12}A_{24}A_{23} = \angle \text{ между } l_3 \text{ и } l_1.$$

Отсюда следует, что $\angle A_{13}MA_{23} = \angle$ между $l_2$ и $l_1 = \angle A_{13}A_{34}A_{23}$, т. е. что окружность $C_3$ проходит через $M$; точно так же доказывается, что и $C_4$ проходит через $M$.

Теперь мы уже можем доказать, что точки $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$ лежат на одной окружности. Рассмотрим три окружности $C_1$, $C_2$ и $C_3$, проходящие через одну точку $M$; $C_1$ и $C_3$ пересекаются еще в точке $A_{13}$, $C_2$ и $C_3$ — в точке $A_{23}$. Отсюда следует[1]):

$$\angle O_1O_3O_2 = \angle A_{13}MA_{23} = \angle A_{13}A_{34}A_{23} = \angle \text{ между } l_2 \text{ и } l_1.$$

Точно так же доказывается, что и $\angle O_1O_4O_2 = \angle$ между $l_2$ и $l_1 = \angle O_1O_3O_2$, откуда и вытекает требуемое утверждение.

2°. Предположим, что для $n$ прямых наши утверждения уже доказаны; при этом мы можем также считать уже доказанным, что *дуга окружности центров $n$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$ между центрами $O_1$ и $O_2$ окружностей центров $n-1$ прямых $l_2, l_3, \ldots, l_n$ и $n-1$ прямых $l_1, l_3, \ldots, l_n$ равна удвоенному углу между прямыми $l_1$ и $l_2$* (см. конец п. 1°). Рассмотрим теперь $n+1$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$ общего положения; пусть $O_1$ — центр окружности $C_1$ центров $n$ прямых $l_2, l_3, \ldots, l_{n+1}$ и т. д., $O_{12}$ — центр окружности $C_{12}$ центров $n-1$ прямых $l_3, l_4, \ldots, l_{n+1}$ и т. д. Докажем, что окружности $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ пересекаются в одной точке $M$. Действительно, пусть $M$ — отличная от $O_{12}$ точка пересечения окружностей $C_1$ и $C_2$. В таком случае имеем[1]):

$$\angle O_{13}MO_{12} = \frac{1}{2} \smile O_{13}O_{12} = \angle \text{ между } l_2 \text{ и } l_3;$$

$$\angle O_{12}MO_{23} = \frac{1}{2} \smile O_{12}O_{23} = \angle \text{ между } l_3 \text{ и } l_1.$$

Отсюда следует, что $\angle O_{13}MO_{23} = \angle$ между $l_2$ и $l_1 = \angle O_{13}O_{34}O_{23}$, т. е. что окружность $C_3$ проходит через $M$. Точно так же доказывается и то, что каждая из остальных окружностей $C_4, C_5, \ldots, C_{n+1}$ проходит через $M$.

Рассмотрим теперь три окружности $C_1$, $C_2$ и $C_3$, проходящие через одну точку $M$; $C_1$ и $C_3$ пересекаются еще в точке $O_{13}$, $C_2$ и $C_3$ — в точке $O_{23}$. Мы имеем[1]):

$$\angle O_1O_3O_2 = \angle O_{13}MO_{23} = \angle O_{13}O_{43}O_{23} = \angle \text{ между } l_2 \text{ и } l_1.$$

---

[1]) Точнее, эти углы равны или составляют в сумме 180°. Вообще, чтобы сделать нижеследующие рассуждения независимыми от чертежа, надо воспользоваться понятием н а п р а в л е н н ы х у г л о в (см., например, написанные Д. И. П е р е п е л к и н ы м решения задач в книге Ж. А д а м а р, Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1948, стр. 488—489).

Точно так же показывается, что и для любой из точек $O_i$ ($i=4$, 5, ..., $n+1$) $\angle O_1O_iO_2 = \angle$ между $l_2$ и $l_1$, откуда и следует, что все точки $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$, ..., $O_{n+1}$ лежат на одной окружности.

В формулировке примера 23 можно также заменить всюду описанные окружности вписанными. Однако здесь появляется одно

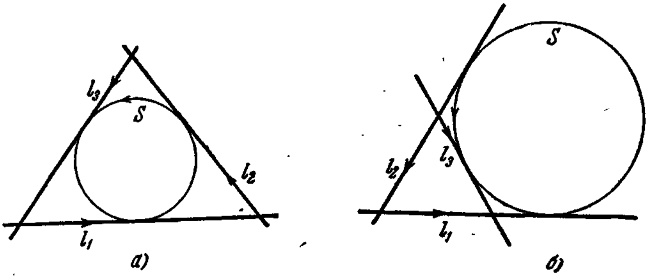



Рис. 58.

дополнительное затруднение, связанное с тем, что, в то время как описанная окружность треугольника (окружность, проходящая через все вершины треугольника) определяется однозначно, за его вписанную окружность (окружность, касающуюся всех

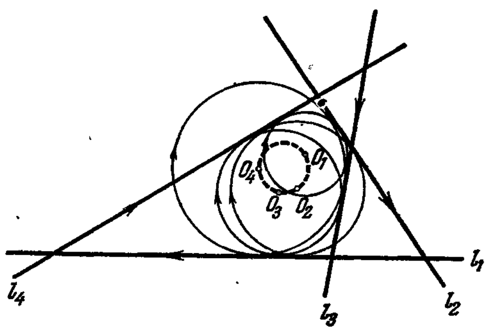



Рис. 59.

сторон треугольника) можно принять одну из четырех окружностей (всех трех сторон касаются одна вписанная и три вневписанные окружности). Чтобы устранить это затруднение, можно поступить следующим образом. Введем в рассмотрение **направленные** прямые и окружности, указав стрелкой на каждой линии направление движения по ней; далее будем считать направленные прямую и окружность **касающимися** лишь в том случае, если направления их в точке касания, совпадают. При этом будет существовать уже **одна-единственная** направленная окружность, касающаяся трех данных направленных прямых $l_1$, $l_2$ и $l_3$, не пересекающихся в одной точке (рис. 58, *а*, *б*),—

направленная вписанная окружность образованного $l_1$, $l_2$ и $l_3$ треугольника.

**Задача 28.** 1°. Пусть $l_1$, $l_2$, $l_3$ и $l_4$—четыре направленные прямые общего положения, т. е. такие, что каждые две из них пересекаются и никакие три не имеют общей точки; $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$—центры направленных вписанных окружностей треугольников, образованных $l_2$, $l_3$ и $l_4$; $l_1$, $l_3$ и $l_4$ и т. д. Тогда четыре точки $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$ лежат на одной окружности, называемой окружностью центров четырех направленных прямых $l_1$, $l_2$, $l_3$ и $l_4$ (рис. 59).

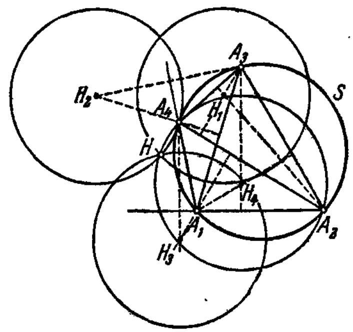


Рис. 60.

2°. Пусть уже определена окружность центров $n$ направленных прямых и пусть даны $n+1$ направленных прямых общего положения $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$, $l_{n+1}$. Обозначим через $O_1$, $O_2$, ..., $O_n$, $O_{n+1}$ центры окружностей центров $n+1$ совокупностей по $n$ направленных прямых, которые можно выделить из наших $n+1$ прямых. В таком случае $n+1$ точек $O_1$, $O_2$, $O_3$, ..., $O_{n+1}$ лежат на одной окружности—окружности центров $n+1$ направленных прямых.

**Задача 29.** Определение ортоцентра вписанного в окружность многоугольника. 1°. Ортоцентром треугольника, как известно, называется точка пересечения его высот.

2°. Пусть уже определен ортоцентр $n$-угольника $A_1A_2...A_n$, вписанного в окружность $S$, и пусть имеем вписанный в $S$ $(n+1)$-угольник $A_1A_2...A_nA_{n+1}$. Обозначим через $H_1$, $H_2$, ..., $H_{n+1}$ ортоцентры $n+1$ многоугольников $A_2A_3...A_{n+1}$, $A_1A_3A_4...A_{n+1}$, ..., $A_1A_2...A_n$. В таком случае равные $S$ окружности с центрами в точках $H_1$, $H_2$, ..., $H_{n+1}$ пересекаются в одной точке $H$; эта точка и называется ортоцентром $(n+1)$-угольника $A_1A_2...A_{n+1}$ (так, на рис. 60 изображен ортоцентр четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$).

**Задача 30.** 1°. Центральной точкой двух (пересекающихся) прямых называется точка их пересечения (рис. 61, *а*).

Центральной окружностью трех прямых общего положения (см. пример 23) называется окружность, проходящая через центральные точки каждой пары из этих прямых (рис. 61, *б*).

Пусть теперь даны четыре прямые общего положения $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$. Обозначим через $S_1$ центральную окружность трех прямых $l_2$, $l_3$, $l_4$, через $S_2$—центральную окружность трех прямых $l_1$, $l_3$, $l_4$ и т. д. Тогда четыре окружности $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ пересекаются в одной точке $O$, которая называется центральной точкой четырех прямых $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ (рис. 61, *в*).

2°. Предположим, что уже определена центральная окружность $2n-1$ прямых и центральная точка $2n$ прямой, и пусть даны $2n+1$

прямых общего положения $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}, l_{2n+1}$. Обозначим через $A_1$ центральную точку $2n$ прямых $l_2, l_3, \ldots, l_{2n}, l_{2n+1}$, через $A_2$ — центральную точку $2n$ прямых $l_1, l_3, \ldots, l_{2n}, l_{2n+1}$ и т. д., через $A_{2n+1}$ — центральную точку $2n$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}$. Тогда точки $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_{2n+1}$ лежат на одной окружности, которую мы будем называть центральной окружностью $2n+1$ прямой $l_1, l_2, \ldots$ $\ldots, l_{2n}, l_{2n+1}$.

Пусть, наконец, задано $2n+2$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ общего положения. Обозначим через $S_1$ центральную окружность

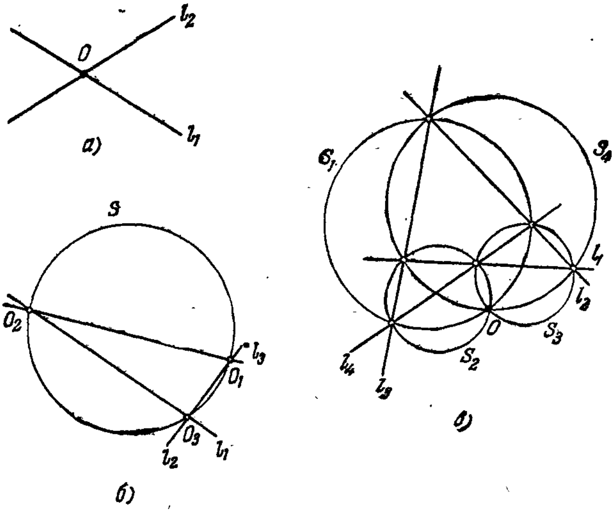



Рис. 61.

$2n+1$ прямых $l_2, l_3, \ldots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$, через $S_2$ — центральную окружность $2n+1$ прямых $l_1, l_3, \ldots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ и т. д., через $S_{2n+2}$ — центральную окружность $2n+1$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}$. Тогда окружности $S_1, S_2, \ldots, S_{2n+1}, S_{2n+2}$ пересекаются в одной точке, которую мы и будем называть центральной точкой $2n+2$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$.

**Задача 31.** 1°. Даны три прямые $l_1, l_2, l_3$ общего положения. Центр окружности, описанной вокруг образованного ими треугольника, называется центральной точкой трех прямых.

Рассмотрим теперь четыре прямые $l_1, l_2, l_3, l_4$ общего положения. Обозначим через $A_1$ центральную точку трех прямых $l_2, l_3, l_4$, через $A_2$ — центральную точку трех прямых $l_1, l_3, l_4$ и т. д. Тогда четыре точки $A_1, A_2, A_3, A_4$ лежат на одной окружности (см. выше пример 23), которая называется центральной окружностью четырех прямых $l_1, l_2, l_3, l_4$.

2°. Пусть уже определены центральная точка $2n-1$ прямых и центральная окружность $2n$ прямых и пусть даны $2n+1$ прямая общего положения $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}, l_{2n+1}$. Обозначим через $S_1$ центральную окружность $2n$ прямых $l_2, l_3, \ldots, l_{2n}, l_{2n+1}$, через $S_2$ — центральную окружность $2n$ прямых $l_1, l_3, \ldots, l_{2n}, l_{2n+1}$ и т. д., через $S_{2n+1}$ — центральную окружность $2n$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}$. Тогда окружности $S_1, S_2, \ldots, S_{2n+1}$ пересекаются в одной точке, которую мы будем называть **центральной точкой** $2n+1$ **прямых** $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}, l_{2n+1}$.

Пусть, наконец, дано $2n+2$ прямых общего положения $l_1, l_2, \ldots$ $\ldots, l_{2n+2}$. Центральную точку $2n+1$ прямых $l_2, l_3, \ldots, l_{2n+2}$ обозначим через $A_1$, центральную точку $2n+1$ прямых $l_1, l_3, \ldots$ $\ldots, l_{2n+2}$ — через $A_2$ и т. д., центральную точку $2n+1$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}$ — через $A_{2n+2}$. Тогда точки $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+2}$ лежат на одной окружности, которую мы и назовем **центральной окружностью** $2n+2$ **прямых** $l_1, l_2, \ldots, l_{2n+2}$.

**Линейным элементом** называется совокупность точки $A$ и заданного в ней направления, определяемого прямой $a$, проходящей через $A$. Линейный элемент обозначается символом $(A, a)$. $n$ линейных элементов $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n)$ мы будем называть **конциклическими** (от слова «цикл» — окружность), если прямые $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — прямые общего положения (см. выше пример 23) и $n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на одной окружности.

**Задача 32.** 1°. **Направляющей окружностью двух линейных элементов** $(A_1, a_1)$ и $(A_2, a_2)$ (таких, что точки $A_1$ и $A_2$ различны, а прямые $a_1$ и $a_2$ пересекаются) называется окружность, проходящая через точки $A_1, A_2$ и через точку пересечения $a_1$ и $a_2$ (рис. 62, *а*). Направляющие окружности трех пар линейных элементов $(A_1, a_1)$ и $(A_2, a_2)$, $(A_1, a_1)$ и $(A_3, a_3)$, $(A_2, a_2)$ и $(A_3, a_3)$ (таких, что точки $A_1, A_2, A_3$ все различны, а прямые $a_1, a_2, a_3$ — общего положения) пересекаются в одной точке, называемой **направляющей точкой трех линейных элементов** $(A_1, a_1), (A_2, a_2)$ и $(A_3, a_3)$ (рис. 62, *б*).

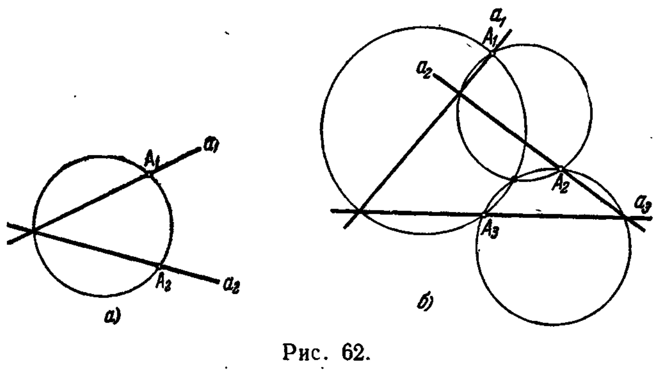



Рис. 62.

2°. Пусть нами уже определены направляющая окружность $2n-2$ концикличеcких линейных элементов и направляющая точка $2n-1$ концикличеcких линейных элементов. Рассмотрим $2n$ концикличеcких линейных элементов. В таком случае $2n$ направляющих точек всевозможных совокупностей по $2n-1$ из них лежат на одной окружности, называемой **направляющей окружностью** $2n$

конциклических линейных элементов. Далее, если рассмотреть $2n+1$ конциклических линейных элементов, то всевозможные совокупности по $2n$ из них определят $2n+1$ направляющих окружностей, которые все пересекаются в одной точке — направляющей точке $2n+1$ конциклических линейных элементов.

## § 6. Индукция по числу измерений *)

При изучении курса стереометрии бросается в глаза известная аналогия между стереометрическими и планиметрическими теоремами. Так, свойства параллелепипеда во многом подобны свойствам параллелограмма (ср., например, теоремы: «В параллелепипеде противоположные грани равны и диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам» и «В параллелограмме противоположные стороны равны и диагонали в точке пересечения делятся пополам»), свойства шара подобны свойствам круга (ср., например, теоремы: «Касательная плоскость шара перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания» и «Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания»). Однако наряду с этим имеет место и существенная разница между свойствами плоских и пространственных фигур. Главное различие здесь состоит в том, что фигуры на плоскости имеют два измерения («длина» и «ширина»), в то время как пространственные тела имеют три измерения («длина», «ширина» и «высота»). Соответственно этому положение точки на плоскости полностью определяется двумя координатами $x$ и $y$ (рис. 63, *б*), в то время как для определения положения точки в пространстве надо знать три ее координаты $x$, $y$ и $z$ (рис. 63, *в*). Поэтому наше обычное пространство часто называют **трехмерным пространством** («пространством трех измерений»), в то время как про плоскость говорят, что она представляет собой **двумерное пространство** («пространство двух измерений»).

Эту терминологию можно распространить еще дальше. Положение точки на прямой полностью определяется одной единственной координатой $x$ (рис. 63, *а*); это связано с тем, что на прямой линии все фигуры (отрезки) имеют лишь одно измерение («длину»). Поэтому прямую называют **одномерным пространством**; это позволяет считать, что число измерений пространства может быть равно единице, двум или трем.

*) См. Послесловие.

Стереометрические теоремы обычно бывают сложнее соответствующих планиметрических предложений; в свою очередь свойства плоских фигур, разумеется, много сложнее свойств фигур на прямой (отрезков). При этом доказательства «трехмерных» (т. е. стереометрических) теорем часто существенно опираются на знание соответствующих «двумерных»

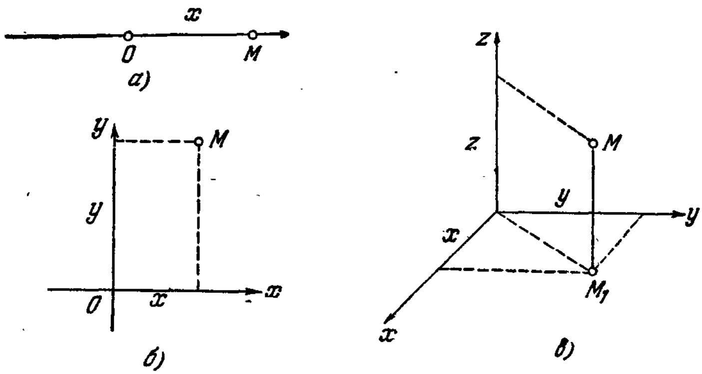



Рис. 63.

(т. е. планиметрических) предложений; так, например, доказательство того, что диагонали параллелепипеда делятся в точке пересечения пополам, использует соответствующее свойство диагоналей параллелограмма. В свою очередь доказательства «двумерных» теорем иногда основываются на аналогичных «одномерных». Это обстоятельство делает возможным использование в некоторых геометрических задачах **индукции по числу измерений**, заключающейся в последовательном переходе*) от одномерного к двумерному, а затем к трехмерному пространству; примеры такого рода и собраны в настоящем параграфе.

В современной математике и физике большую роль играет понятие **$n$-мерного пространства**, в котором положение точки определяется $n$ координатами; здесь $n$ — произвольное целое положительное число, возможно, большее трех[1]). Свойства фигур в $n$-мерном пространстве часто до-

*) См. стр. 124.

[1]) См., например, § 7 статьи «Векторы и их применения в геометрии», Энциклопедия элементарной математики, кн. IV, Физматгиз, М., 1963 или специальную статью «Многомерные пространства», ЭЭМ, кн. V, «Наука», 1966.

казываются с помощью математической индукции по числу измерений пространства; при этом, строго говоря, лишь при доказательстве «$n$-мерных» теорем, где $n$ — л ю б о е, мы можем с полным правом говорить о «методе индукции» (ибо лишь здесь у нас полностью работает «теорема 2» из описания этого метода, утверждающая возможность перехода от п р о и з в о л ь н о г о значения $n=k$ к следующему значению $n=k+1$; см. выше, стр. 11). Метод математической индукции позволяет перенести на $n$-мерное пространство, где $n$ — любое, в с е результаты этого параграфа. Однако, поскольку

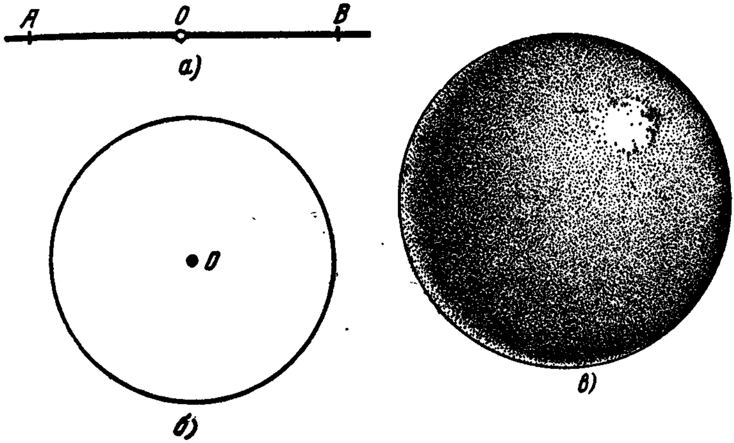



Рис. 64.

понятие о многомерных пространствах выходит за рамки математической подготовки, предполагаемой у читателя настоящей книги, мы ниже всюду ограничиваемся лишь случаями $n=1$, 2 или 3 (т. е. случаями прямой, плоскости и обычного пространства) *).

При разборе примеров и решении задач этого параграфа следует иметь в виду, что окружности на плоскости (т. е. геометрическому месту точек, равноудаленных от данной точки $O$, рис. 64, *б*) в пространстве соответствует сфера (поверхность шара, рис. 64, *в*), а на прямой линии — пара точек, равноудаленных от данной точки $O$ (рис. 64, *а*); кругу

*) Подробнее об этом см. стр. 124.

на плоскости в пространстве соответствует шар, а на прямой — отрезок, наконец, треугольнику $ABC$ на плоскости (рис. 65, *б*) в пространстве соответствует тетраэдр (т. е. произвольная треугольная пирамида, имеющая четыре вершины $A$, $B$, $C$, $D$, рис. 65, *в*), а на плоскости — отрезок $AB$, имеющий две «вершины» $A$ и $B$ (рис. 65, *а*).

Следует отметить, что вопрос о том, какое стереометрическое предложение соответствует данной планиметрической теореме, вообще говоря, не решается однозначно. Иногда удобно считать, что треугольнику на плоскости отвечает не тетраэдр (фигура, имеющая на одно измерение больше), а такой же треугольник, только расположенный в пространстве; аналогично этому можно

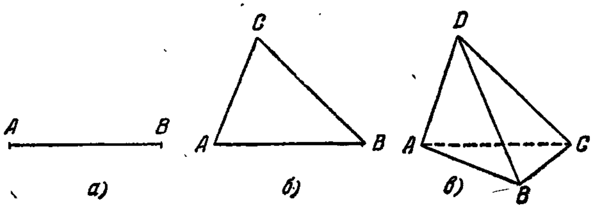



Рис. 65.

считать, что прямой на плоскости в пространстве соответствуют и прямая, и плоскость. При этом можно получать разные «стереометрические аналоги» одной и той же планиметрической теоремы. Так, например, теореме «сумма квадратов расстояний от точки $M$ плоскости до всех вершин правильного $n$-угольника с центром $O$, вписанного в окружность радиуса $R$, равна $n(R^2+OM^2)$» (см., например, указанную на стр. 139 книгу Д. О. Шклярского и др., задача 234) отвечают следующие две стереометрические теоремы: «сумма квадратов расстояний от точки $M$ пространства до всех вершин правильного $n$-угольника с центром $O$, вписанного в окружность радиуса $R$, равна $n(R^2+OM^2)$» и «сумма квадратов расстояний от точки $M$ пространства до всех вершин правильного многогранника с $n$ вершинами, вписанного в сферу с центром $O$ и радиусом $R$, равна $n(R^2+OM^2)$»; обе эти теоремы верны и обе выводятся из соответствующей «двумерной» теоремы, так что при выводе обеих используется индукция по числу измерений. Мы не останавливаемся подробнее на этом вопросе, предоставив читателю самостоятельно сравнить переход от «одномерной» к «двумерной» и к «трехмерной» теоремам, например, в нижеследующих примерах 26 и 33 с одной стороны и 25 и 32 с другой стороны.

Во всех примерах и задачах настоящего параграфа основным считается «трехмерное» (стереометрическое) предложение, хотя часто наибольший интерес представляет соответствующий результат, относящийся к «двумерному» (плоскому) случаю и переход от двумерного к трехмерному случаю лишь намечается, а не проводится со всей полнотой.

## 1. Вычисление и нахождение геометрических мест с помощью индукции по числу измерений

**Пример 24.** На сколько частей разбивают пространство $n$ плоскостей, каждые три из которых пересекаются и никакие четыре не имеют общей точки (такие плоскости мы будем называть «плоскостями общего положения»)?

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. Определить, на сколько частей разбивают прямую $n$ точек.

Решение. Обозначим это число через $F_1(n)$; очевидно, что $F_1(n)=n+1$.

Б. На сколько частей разбивают плоскость $n$ прямых, каждые две из которых пересекаются и никакие три не имеют общей точки ($n$ прямых «общего положения»)?

Решение. 1°. Одна прямая разбивает плоскость на две части.

2°. Предположим, что нам известно число $F_2(n)$ частей, на которые разбивают плоскость $n$ прямых общего положения, и рассмотрим $n+1$ прямых общего положения. Первые $n$ из них разбивают плоскость на $F_2(n)$ частей; $(n+1)$-я прямая $l$, по условию, пересекается с каждой из остальных $n$ прямых в $n$ различных точках; эти точки разбивают прямую $l$ на $F_1(n)=n+1$ частей (см. пункт А).

Следовательно, прямая $l$ пересекает $n+1$ из ранее полученных частей плоскости, и значит, добавляет к $F_2(n)$ частям

$$F_1(n)=n+1$$

новых частей.

Таким образом,

$$F_2(n+1)=F_2(n)+F_1(n)=F_2(n)+(n+1). \qquad (8)$$

Подставляя в равенство (8) вместо $n$ значения $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, получим:

$$\begin{aligned}
F_2(n) &= F_2(n-1)+n,\\
F_2(n-1) &= F_2(n-2)+(n-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
F_2(3) &= F_2(2)+3,\\
F_2(2) &= F_2(1)+2.
\end{aligned}$$

Сложим все эти равенства; так как $F_2(1)=2$, мы будем иметь:

$$F_2(n)=F_2(1)+[n+(n-1)+\ldots+2]=$$
$$=1+[n+(n-1)+\ldots+2+1],$$

и окончательно: $F_2(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$.

В. Задача, сформулированная в начале настоящего примера.

Решение. 1°. Одна плоскость разбивает пространство на две части.

2°. Предположим, что нам известно число $F_3(n)$ частей, на которые разбивают пространство $n$ плоскостей общего положения, и рассмотрим $n+1$ плоскостей общего положения. Первые $n$ из них разбивают пространство на $F_3(n)$ частей; $(n+1)$-ю плоскость $\pi$ эти $n$ плоскостей пересекают по $n$ прямым общего положения и, следовательно, разбивают ее на $F_2(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$ частей (см. пункт Б). Таким образом, получаем соотношение

$$F_3(n+1)=F_3(n)+F_2(n)=F_3(n)+\frac{n^2+n+2}{2}. \qquad (9)$$

Заменив в равенстве (9) $n$ на $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, будем иметь:

$$F_3(n)=F_3(n-1)+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2},$$
$$F_3(n-1)=F_3(n-2)+\frac{(n-2)^2+(n-2)+2}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_3(3)=F_3(2)+\frac{2^2+2+2}{2},$$
$$F_3(2)=F_3(1)+\frac{1^2+1+2}{2}.$$

Складывая все эти равенства, получим:

$$F_3(n)=F_3(1)+\frac{1}{2}[(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2]+$$
$$+\frac{1}{2}[(n-1)+(n-2)+\ldots+1]+\frac{1}{2}[\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n-1 \text{ раз}}],$$

или окончательно, учитывая, что $F_3(1)=2$:

$$F_3(n)=2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}+\frac{(n-1)n}{4}+(n-1)=$$
$$=\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}.$$

**Задача 33.** На сколько частей разбивают пространство $n$ сфер, каждые две из которых пересекаются между собой?

**Пример 25.** Найти геометрическое место точек пространства, сумма квадратов расстояний которых от $n$ заданных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ постоянна (равна $d^2$).

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. На прямой даны $n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Найти точки $M$ прямой такие, что $MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2=d^2$, где $d$ — заданное число.

Решение. Примем нашу прямую за числовую ось; пусть точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответствуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а искомой точке $M$ — число $x$. В таком случае длины отрезков $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$ будут равны $(x-a_1), (x-a_2), \ldots$ $\ldots, (x-a_n)$ и, следовательно, $MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2=$ $=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$. Но

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2=$$
$$=x^2-2a_1x+a_1^2+x^2-2a_2x+a_2^2+\ldots+x^2-$$
$$-2a_nx+a_n^2=$$
$$=nx^2-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)=$$
$$=n\left(x-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2+(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-$$
$$-\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}$$

или, если обозначить через $A$ точку, соответствующую числу $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$,

$$MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2=nMA^2+(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-$$
$$-\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}. \quad (10)$$

Таким образом,

$$nMA^2=d^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}$$

и, значит,

$$MA=\sqrt{\frac{1}{n}\left[d^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}\right]}.$$

Это равенство, вообще говоря (если подкоренное выражение положительно), определяет две точки $M$, удовлетворяющие условию задачи (они расположены по разные стороны от точки $A$).

Б. Найти геометрическое место точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых от $n$ заданных точек $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ постоянна (и равна $d^2$).

Решение[1]). Выберем на плоскости какую-нибудь (безразлично какую) прямоугольную систему координат и обозначим проекции точек $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ на ось $x$ и на ось $y$ соответственно через $A_1'$, $A_2'$, ..., $A_n'$ и $A_1''$, $A_2''$, ..., $A_n''$; проекции точки $M$ на оси координат обозначим через $M'$ и $M''$ В таком случае

$$\begin{aligned}
MA_1^2&=M'A_1'^2+M''A_1''^2,\\
MA_2^2&=M'A_2'^2+M''A_2''^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
MA_n^2&=M'A_n'^2+M''A_n''^2
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2=(M'A_1'^2+M'A_2'^2+\ldots+M'A_n'^2)+\\+(M''A_1''^2+M''A_2''^2+\ldots+M''A_n''^2).$$

Но, в силу формулы (10),

$$M'A_1'^2+M'A_2'^2+\ldots+M'A_n'^2=\\=nM'A'^2+(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n},$$

$$M''A_1''^2+M''A_2''^2+\ldots+M''A_n''^2=\\=nM''A''^2+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n},$$

где $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ и $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$ — абсциссы и ординаты точек $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, $A'$ и $A''$ — точки осей $x$ и $y$ с

---

[1]) Иное решение этой задачи было намечено выше (см. пример 21 и задачу 18 на стр. 81—84).

координатами

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \text{ и } \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}.$$

Таким образом

$$MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2=nMA^2+(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+$$
$$+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}-$$
$$-\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n} \qquad (11)$$

($A$ — точка плоскости, проектирующаяся на оси координат в точки $A'$ и $A''$), откуда

$$nMA^2=d^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)+$$
$$+\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}+\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n}$$

и, значит,

$$MA=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n}\left[d^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)+\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}+\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n}\right]},$$

т. е. искомое геометрическое место представляет собой окружность радиуса

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left[d^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)+\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}+\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n}\right]},$$

если подкоренное выражение положительно; состоит из одной точки $A$, если оно равно нулю, и не содержит ни одной точки, если оно отрицательно.

В. Предложение, сформулированное в начале примера.

Указание. Рассмотреть прямоугольную систему координат $x$, $y$, $z$ в пространстве, спроектировать все точки на плоскость $xOy$ и на ось $Oz$; далее воспользоваться формулами (10) и (11).

## 2. Определение и доказательство с помощью индукции по числу измерений

**Пример 26.** Тетраэдр, четыре вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3 и 4, разбит на меньшие тетраэдры так, что каждые два из тетраэдров разбиения либо совсем не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общее ребро (но не часть ребра), либо имеют общую грань (но не часть грани). Все вершины полученных малых тетраэдров занумерованы теми же цифрами 1, 2, 3 и 4, причем все вершины, лежащие на грани большого тетраэдра, нумеруются тремя цифрами, которыми занумерованы вершины этой грани, а все вершины, лежащие на каком-либо ребре большого тетраэдра, нумеруются двумя цифрами, которыми занумерованы концы ребра. Доказать, что найдется по крайней мере один малый тетраэдр, все четыре вершины которого занумерованы разными цифрами.

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. Отрезок, концы которого обозначены цифрами 1 и 2, разбит на несколько непересекающихся меньших отрезков и все точки деления занумерованы цифрами 1 или 2 (рис. 66, *а*).

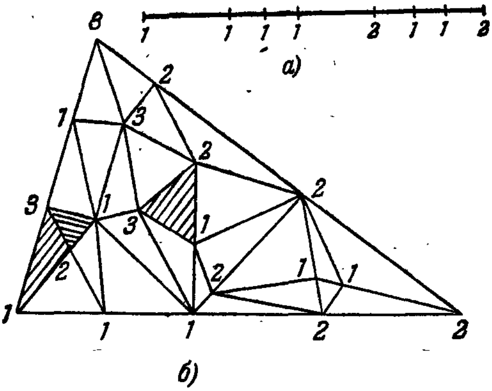


Рис. 66.

Доказать, что найдется по крайней мере один отрезок разбиения, концы которого занумерованы разными цифрами.

Решение. Покажем, что число отрезков, обозначенных цифрами 1, 2, нечетно; отсюда и будет следовать существование хотя бы одного такого отрезка (ибо нуль есть число четное). Обозначим через $A$ число концов отрезков разбиения, занумерованных цифрой 1. Это число, очевидно, будет нечетным, ибо каждая цифра 1, стоящая внутри большого отрезка (число таких цифр 1 обозначим через $k$), является концом двух отрезков разбиения, и лишь единственная цифра 1, которой занумерован конец большого отрезка, принадлежит одному отрезку разбиения; следовательно, $A=2k+1$. С другой стороны, пусть $p$ будет число отрезков 11 среди всех наших отрезков разбиения и $q$ — число отрезков 12. Тогда число $A$ вершин 1 будет равно $A=2p+q$. Из равенства $2k+1=2p+q$ следует, что $q$ нечетно.

Б. Треугольник, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2 и 3, разбит на меньшие треугольники так, что два треугольника разбиения либо совсем не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону (но не часть стороны). Все вершины треугольников разбиения нумеруются цифрами 1, 2 и 3, причем вершины, лежащие на стороне большого треугольника, нумеруются одной из цифр, которой занумерованы концы этой стороны (рис. 66, *б*). Доказать, что найдется по крайней мере один треугольник разбиения, все вершины которого занумерованы разными цифрами.

Решение. Покажем, что число треугольников 1 2 3 нечетно. Для этого сосчитаем общее число $A$ сторон треугольников разбиения, занумерованных цифрами 1, 2. Число отрезков 1 2, лежащих внутри основного треугольника, обозначим через $k$, а число таких отрезков, лежащих на стороне 1 2 большого треугольника, — через $l$ (на других сторонах основного треугольника вообще не может быть отрезков 1 2). Так как каждый из первых $k$ отрезков разбиения принадлежит двум треугольникам разбиения, а каждый из $l$ последних отрезков — одному, то $A=2k+l$.

С другой стороны, пусть $p$ — число треугольников разбиения, вершины которых занумерованы цифрами 1, 2, 2 или 1, 2, 1, и $q$ — число треугольников 1 2 3. Так как каждый из первых $p$ треугольников имеет две стороны 1 2, а каждый из $q$ последних — одну такую сторону, то $A=2p+q$. Из равенства $2k+l=2p+q$ следует, что число $q$ четно или нечетно одновременно с числом $l$. Но число $l$ нечетно в силу предложения А, а следовательно, и $q$ нечетно.

В. Предложение, сформулированное в начале этого примера.

Решение. Пусть $A$ будет число граней тетраэдров разбиения, обозначенных цифрами 1, 2, 3. Если $k$ таких граней лежат внутри основного тетраэдра и $l$ — на его грани 1 2 3, то $A=2k+l$.

С другой стороны, если $p$ — число тетраэдров разбиения, обозначенных цифрами 1, 1, 2, 3; 1, 2, 2, 3 или 1, 2, 3, 3, а $q$ — число тетраэдров разбиения, обозначенных цифрами 1, 2, 3, 4, то, очевидно, $A=2p+q$. Из равенства $2k+l=2p+q$ следует, что числа $q$ и $l$ одновременно четны или нечетны.

Но число $l$ в силу предложения Б нечетно, и следовательно, и $q$ нечетно.

Во введении к этому параграфу мы указывали, что «индукция по числу измерений иногда может быть заменена обыкновенной индукцией». Приведем здесь соответствующие примеры.

**Пример 27.** Доказать сформулированное в примере 26 А предложение индукцией по числу $n$ отрезков разбиения.

Решение. 1°. При $n=1$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любого разбиения отрезка на $n$ меньших отрезков, и пусть дано разбиение отрезка 1 2 на $n+1$ меньших отрезков. Если не все из этих отрезков обозначены цифрами 1, 2, то найдется отрезок, концы которого обозначены одинаковыми цифрами, например 1 1. Стянем этот отрезок в точку, тогда мы получим разбиение отрезка 1 2 на $n$ меньших отрезков. В силу индуктивного предположения в этом разбиении, а значит, и в первоначальном разбиении найдется по крайней мере один отрезок, обозначенный цифрами 1, 2, что и требовалось доказать.

**Пример 28.** Доказать сформулированное в примере 26 Б предложение индукцией по числу $n$ треугольников разбиения.

Решение. 1°. При $n=1$ утверждение очевидно; при $n=2$ оно легко проверяется.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любого разбиения треугольника 1 2 3 на $n$ или меньше треугольников, и пусть мы имеем разбиение треугольника на $n+1$ треугольников. Если не все из этих треугольников обозначены цифрами 1, 2, 3, то найдется треугольник, у которого две вершины имеют одинаковые номера, например 1. К стороне 11 прилегают либо два треугольника разбиения (если эта сторона лежит внутри основного треугольника, рис. 67, *а*), либо один треугольник (если эта сторона лежит на стороне основного треугольника, рис. 67, *б*). Стянем отрезок 1 1 в точку; мы получим новое разбиение треугольника 1 2 3 на $n-1$ (в первом случае, рис. 67, *в*) или на $n$ (во втором случае, рис. 67, *г*) треугольников. В силу индуктивного предположения в этом разбиении (а значит, и в первоначальном разбиении) найдется по крайней мере один треугольник, вершины которого обозначены цифрами 1, 2, 3.

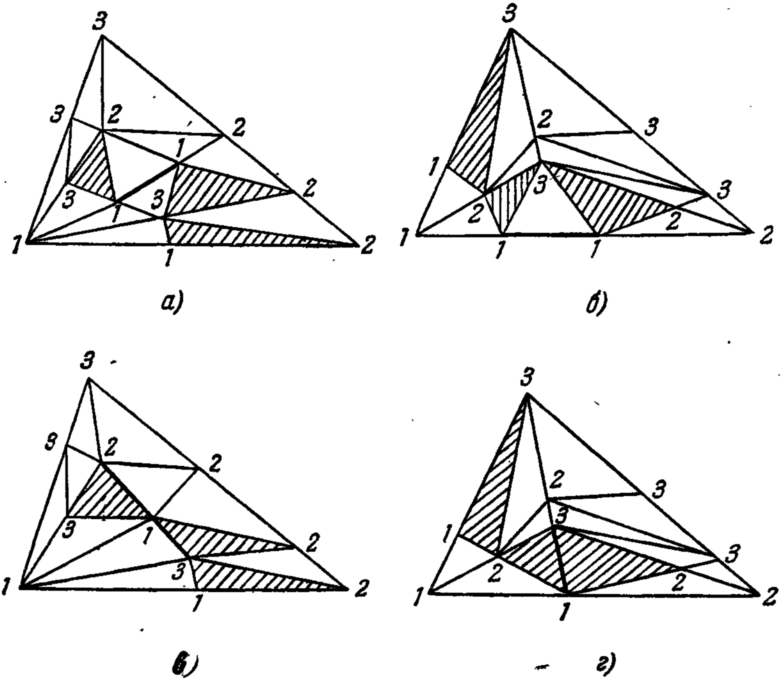



Рис. 67.

**Задача 34.** Доказать теорему примера 26 В индукцией по числу $n$ тетраэдров разбиения.

Предложение примера 26 можно еще уточнить. Введем понятие «ориентировки» тетраэдра, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, различая тетраэдры, для которых обход вдоль грани 1 2 3 от вершины 1 к вершине 2 и затем к вершине 3 представляется из вершины 4 совершаемым по часовой стрелке, и такие, для которых этот обход наблюдается из вершины 4 происходящим против часовой стрелки. В таком случае имеет место следующее предложение.

**Задача 35.** Доказать, что в условиях примера 26 число тетраэдров разбиения, занумерованных цифрами 1, 2, 3, 4 и ориентированных так же, как и основной тетраэдр, будет ровно на единицу больше числа тетраэдров 1 2 3 4, ориентированных противоположным образом.

**Пример 29.** В пространстве задано $n$ шаров, каждые четыре из которых пересекаются. Доказать, что все эти шары пересекаются, т. е. что существует точка, принадлежащая всем шарам.

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. На прямой задано $n$ отрезков, каждые два из которых пересекаются. Доказать, что все отрезки пересекаются, т. е. что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.

Решение. 1°. Для $n=2$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любых $n$ отрезков, и пусть на прямой задан $n+1$ попарно пересекающихся отрезков $l_1, l_2, \ldots, l_n, l_{n+1}$. В силу

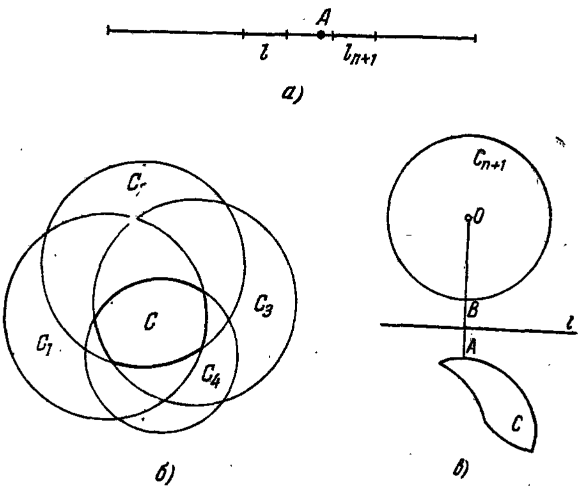



Рис. 68.

индуктивного предположения $n$ отрезков $l_1, l_2, \ldots, l_n$ пересекаются. Обозначим их общую часть (которая будет, очевидно, точкой или отрезком) через $l$. Докажем, что отрезок $l_{n+1}$ пересекается с $l$. Допустим, что это не так; тогда существует точка $A$, разделяющая $l_{n+1}$ и $l$ (рис. 68, $a$). Но каждый из отрезков $l_1, l_2, \ldots, l_n$ содержит $l$ и, по условию, пересекается с отрезком $l_{n+1}$, следовательно, каждый из этих отрезков содержит точку $A$, а значит, точка $A$ принадлежит $l$. Полученное противоречие доказывает, что $l_{n+1}$

и $l$ пересекаются; их общая часть принадлежит всем заданным отрезкам $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$.

Б. На плоскости задано $n$ кругов, каждые три из которых пересекаются. Доказать, что существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем этим кругам.

Решение. 1°. При $n=3$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любых $n$ кругов, и пусть на плоскости задано $n+1$ кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$. В силу индуктивного предположения $n$ кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ пересекаются; обозначим их общую часть через $C$ (рис. 68, *б*) («круговой многоугольник» $C$ может представлять собой целый круг или состоять из одной лишь точки). Нам надо доказать, что фигура $C$ и круг $C_{n+1}$ пересекаются. Предположим, что это не так; в таком случае можно провести прямую $l$, разделяющую фигуры $C_{n+1}$ и $C$: такой прямой будет, например, перпендикуляр $l$ к прямой, соединяющей центр $O$ круга $C_{n+1}$ с самой близкой к $O$ точкой $A$ фигуры $C$, восставленный в середине отрезка $AB$, где $B$—точка пересечения отрезка $OA$ с окружностью круга $C_{n+1}$ (рис. 68, *в*)[1]).

Так как каждый из кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ содержит фигуру $C$ и, по условию, пересекается с кругом $C_{n+1}$, то он пересекает и прямую $l$. Обозначим отрезок, по которому круг $C_1$ пересекает прямую $l$, через $a_1$, отрезок, по которому круг $C_2$ пересекает эту прямую,—через $a_2$ и т. д. На прямой $l$ мы будем иметь тогда $n$ отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Любые два из этих отрезков пересекаются. Действительно, рассмотрим два из них, например $a_1$ и $a_2$. Пусть $M$—произвольная точка фигуры $C$ (тогда точка $M$ принадлежит обоим кругам $C_1$ и $C_2$). Далее, так как любые три из заданных кругов пересекаются, то существует точка $N$, принадлежащая одновременно кругам $C_1$, $C_2$ и $C_{n+1}$. Тогда отрезок $MN$ целиком принадлежит кругам $C_1$ и $C_2$, а, значит, точка его пересечения с прямой $l$ будет общей точкой отрезков $a_1$ и $a_2$.

---

[1]) Действительно, если прямая $l$ не разделяет фигур $C_{n+1}$ и $C$, то на ней найдется точка $K$, принадлежащая фигуре $C$. В треугольнике $OAK$ угол $OAK$—острый; кроме того, по определению точки $A$ $OA \leqslant OK$. Следовательно, основание $L$ перпендикуляра, опущенного из $O$ на прямую $AK$, будет лежать между точками $A$ и $K$. Так как обе точки $A$ и $K$ принадлежат всем кругам $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то и весь отрезок $AK$, а следовательно, и его точка $L$ принадлежат каждому из кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и, значит, $L$ принадлежит $C$. Поэтому должно быть $OL \geqslant OA$. Полученное противоречие(«перпендикуляр больше наклонной») доказывает наше утверждение.

Как следует из предложения А, на прямой $l$ существует точка, принадлежащая всем отрезкам $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Эта точка должна принадлежать всем кругам $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и, значит, фигуре $C$, что противоречит построению прямой $l$. Следовательно, фигуры $C_{n+1}$ и $C$ должны иметь хотя бы одну общую точку, которая и будет общей точкой всех кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$.

В. Предложение, сформулированное в начале примера.

Решение. 1°. Для $n=4$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любых $n$ шаров, и пусть дано $n+1$ шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$. Обозначим через $\Phi$ пересечение $n$ шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ (существующее в силу индуктивного предположения). Тогда точно так же, как в примере 29 Б, можно показать, что если шар $\Phi_{n+1}$ не пересекается с $\Phi$, то существует разделяющая их плоскость $\pi$. Фигуры, по которым каждый из шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ пересекает плоскость $\pi$, являются кругами, любые три из которых пересекаются; следовательно, на плоскости $\pi$ существует точка, принадлежащая всем этим кругам и, значит, принадлежащая $\Phi$, что противоречит определению плоскости $\pi$.

Предложение примера 29 тоже может быть доказано индукцией не по числу измерений, а прямо по числу фигур.

**Пример 30.** Доказать предложение примера 29 Б индукцией по числу кругов.

Решение. Мы докажем соответствующее предложение для круговых многоугольников, т. е. для фигур, каждая из которых является пересечением конечного числа кругов; отсюда, в частности, будет следовать и наше первоначальное утверждение.

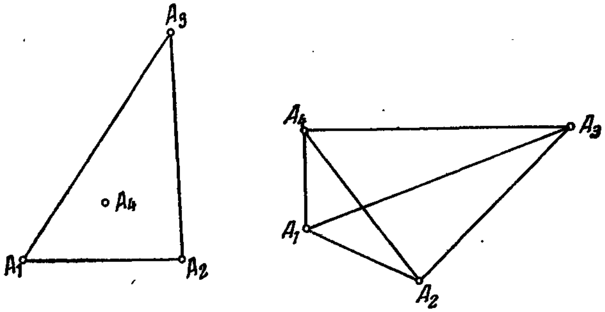
1°. Для $n=3$ утверждение очевидно.

Пусть даны четыре круговых многоугольника $C_1, C_2, C_3, C_4$, каждые три из которых пересекаются. Обозначим через $A_1$ общую точку фигур $C_2$, $C_3$ и $C_4$, через $A_2$ — общую точку фигур $C_1$, $C_3$ и $C_4$ и т. п. Возможны два случая:

а) Одна из точек $A_1, A_2, A_3, A_4$, например $A_4$, принадлежит треугольнику, образованному остальными тремя точками (рис. 69, *а*). Тогда, так как весь треугольник $A_1A_2A_3$ принадлежит $C_4$, точка $A_4$ тоже принадлежит $C_4$ и, следовательно, $A_4$ будет общей точкой всех четырех фигур $C_1, C_2, C_3, C_4$.

б) Ни одна из точек $A_1, A_2, A_3, A_4$ не принадлежит треугольнику, образованному остальными точками. В этом случае точка $A$ пересечения диагоналей (выпуклого) четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 69, *б*) как общая точка треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$ будет общей точкой всех четырех фигур $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$.

2°. Пусть наше утверждение уже доказано для $n$ круговых многоугольников. Рассмотрим $n+1$ круговых многоугольников $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$. Обозначим через $C$ пересечение фигур $C_n$ и $C_{n+1}$ (ясно, что $C$ тоже будет круговым многоугольником) и докажем, что любые три из $n$ фигур $C_1$, $C_2, \ldots, C_{n-1}$, $C$ пересекаются. Действительно, если среди этих трех фигур нет $C$, то они пересекаются по условию.




*а)* *б)*

Рис. 69.

Рассмотрим теперь любую тройку этих фигур, содержащую $C$, например $C_1, C_2, C$. Так как из четырех фигур $C_1, C_2, C_n, C_{n+1}$ любые три пересекаются, то в силу п. 1° эти четыре фигуры имеют общую точку, которая и будет общей точкой фигур $C_1$, $C_2$ и $C$.

Так как любые три из $n$ фигур $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C$ пересекаются, то в силу индуктивного предположения все эти фигуры имеют общую точку, которая и будет общей точкой $n+1$ фигур $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$.

**Задача 36.** Доказать предложение примера 29 В индукцией по числу $n$ шаров.

**Задача 37.** На плоскости дано $n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расстояние между каждыми двумя из которых не превосходит единицы. Доказать, что все эти точки можно заключить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (теорема Юнга)[1]).

---

[1]) Дж. Юнг — английский математик XIX в.

**Задача 38.** В пространстве дано $n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расстояние между каждыми двумя из которых не превосходит единицы. Доказать, что все эти точки можно заключить в шар радиуса $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Обобщение предложения примера 29 и ряд приложений более общей теоремы можно найти в книге: И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, § 2, М.— Л., Гостехиздат, 1951 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 4).

**Пример 31.** Рассмотрим какое-то конечное число полупространств[1]), заполняющих все пространство. Доказать, что из них можно выбрать четыре (или меньше) полупространства, уже заполняющих все пространство.

Рассмотрим последовательно следующие задачи:

А. Вся прямая покрыта каким-то конечным числом лучей. Доказать, что из них можно выбрать два луча, уже покрывающих всю прямую.

Решение. Пусть $A$ будет самая правая вершина всех лучей, направленных влево, а $B$ — самая левая вершина всех лучей, направленных вправо. Так как лучи, по условию, покрывают всю прямую, то точка $B$ лежит не правее $A$, и два луча с вершинами в точках $A$ и $B$ полностью покрывают всю прямую.

Б. Вся плоскость покрыта каким-то конечным числом $n$ полуплоскостей[2]). Доказать, что из них можно выбрать две или три полуплоскости, уже покрывающие всю плоскость.

Решение. Доказательство проведем индукцией по числу $n$ полуплоскостей.

1°. При $n=3$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение справедливо для $n$ полуплоскостей, и пусть дано $n+1$ полуплоскостей $F_1, F_2, \ldots, F_n, F_{n+1}$, покрывающих всю плоскость. Границы этих полуплоскостей обозначим соответственно через $l_1, l_2, \ldots, l_n, l_{n+1}$. Возможны два случая.

1-й случай. Прямая $l_{n+1}$ целиком содержится в одной из заданных полуплоскостей, скажем в $F_n$. Тогда прямые $l_n$ и $l_{n+1}$ параллельны. Если полуплоскости $F_n$ и $F_{n+1}$ расположены по разные стороны от своих границ (рис. 70, $a$), то

[1]) Полупространством называется часть пространства, лежащая по одну сторону от некоторой плоскости.

[2]) Полуплоскостью называется часть плоскости, лежащая по одну сторону от некоторой прямой.

две полуплоскости $F_n$ и $F_{n+1}$ уже покрывают всю плоскость. В противном случае одна из этих двух полуплоскостей целиком содержится в другой (например, $F_{n+1}$ содержится в $F_n$;

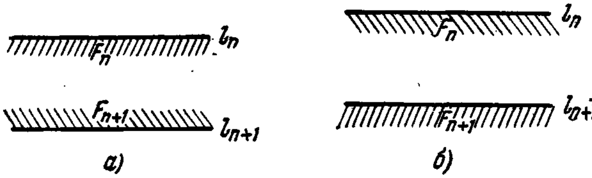



Рис. 70.

рис. 70, б), и теорема следует из индуктивного предположения, так как в этом случае уже $n$ полуплоскостей (в нашем случае — $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$) покрывают всю плоскость.

2-й случай. Прямая $l_{n+1}$ не содержится ни в одной из полуплоскостей $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$. Тогда она полностью покрывается этими полуплоскостями, которые высекают на ней $m \leqslant n$ лучей, покрывающих всю прямую. Как мы видели в А,

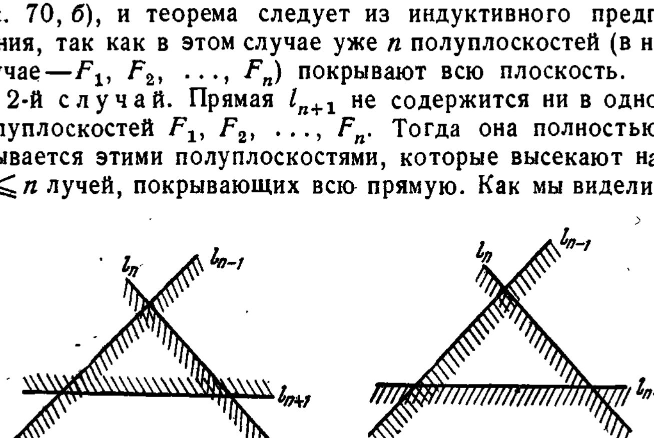



Рис. 71.

из этих лучей можно выбрать два, также покрывающих всю прямую. Соответствующие полуплоскости пусть будут $F_{n-1}$ и $F_n$. Рассмотрим теперь отдельно два возможных случая взаимного расположения полуплоскостей $F_{n-1}$, $F_n$ и $F_{n+1}$.

а) Полуплоскость $F_{n+1}$ содержит точку пересечения прямых $l_{n-1}$ и $l_n$ (рис. 71, а). В этом случае три полуплоскости $F_{n-1}$, $F_n$ и $F_{n+1}$ уже покрывают всю плоскость.

б) Полуплоскость $F_{n+1}$ не содержит точки пересечения прямых $l_{n-1}$ и $l_n$ (рис. 71, б). В этом случае плоскость покрывается $n$ полуплоскостями $F_1, F_2, \ldots, F_n$, и теорема следует из индуктивного предположения.

В. Предложение, сформулированное в условии задачи.

Решение. Доказательство проведем индукцией по числу $n$ заданных полупространств.

1°. При $n=4$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение справедливо для $n$ полупространств, и пусть задано $n+1$ полупространств

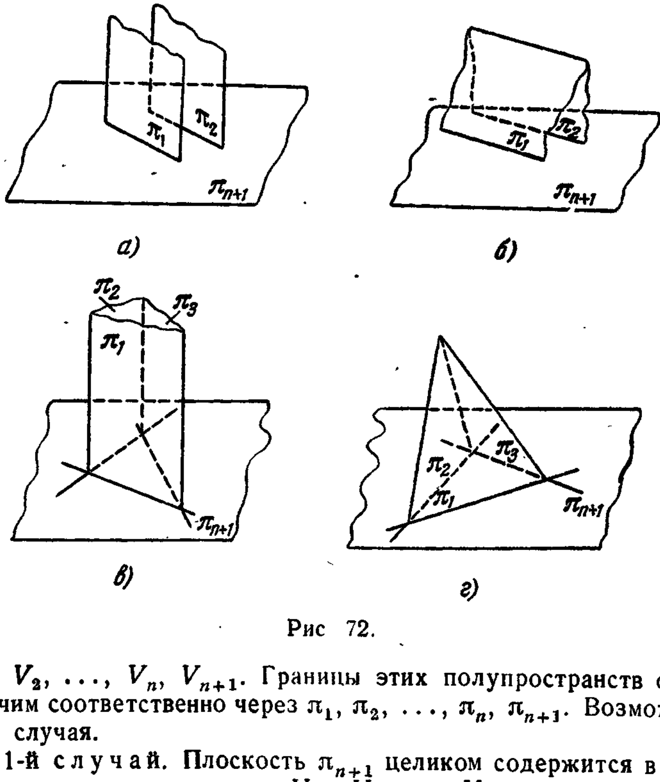



Рис 72.

$V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}$. Границы этих полупространств обозначим соответственно через $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \pi_{n+1}$. Возможны два случая.

1-й случай. Плоскость $\pi_{n+1}$ целиком содержится в одном из полупространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$, например в $V_n$. В этом случае плоскости $\pi_{n+1}$ и $\pi_n$ параллельны. Если полупространства $V_{n+1}$ и $V_n$ расположены по разные стороны от своих границ, то эти два полупространства уже заполняют все пространство. В противном случае одно из двух полупространств $V_{n+1}$ и $V_n$ целиком содержится в другом, и теорема следует из индуктивного предположения.

2-й случай. Плоскость $\pi_{n+1}$ не содержится ни в одном из полупространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Тогда она полностью покрывается этими полупространствами, которые высекают на ней $m \leqslant n$ полуплоскостей $F_1, F_2, \ldots, F_m$.

В силу результата Б из этих полуплоскостей можно выбрать две или три, также покрывающие всю плоскость (рис. 70, *а* и 71, *а*). Рассмотрим отдельно каждый из возможных здесь случаев.

а) Плоскость $\pi_{n+1}$ покрывается двумя полуплоскостями (рис. 70, *а*), скажем, $F_1$ и $F_2$, причем соответствующие плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ параллельны (рис. 72, *а*). В этом случае все пространство заполняется двумя полупространствами $V_1$ и $V_2$.

б) Плоскость $\pi_{n+1}$ покрывается двумя полуплоскостями $F_1$ и $F_2$, но соответствующие плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ пересекаются (рис. 72, *б*). Если полупространство $V_{n+1}$ содержит линию пересечения плоскостей $\pi_1$ и $\pi_2$, то три полупространства $V_1$, $V_2$ и $V_{n+1}$ заполняют все пространство. В противном случае полупространство $V_{n+1}$ покрывается полупространствами $V_1$ и $V_2$, и теорема следует из индуктивного предположения.

в) Плоскость $\pi_{n+1}$ покрывается тремя полуплоскостями (рис. 71, *а*), скажем $F_1$, $F_2$ и $F_3$, причем плоскость $\pi_3$ параллельна линии пересечения плоскостей $\pi_1$ и $\pi_2$ (соответствующие плоскости образуют «призму»; см. рис. 72, *в*). В этом случае три полупространства $V_1$, $V_2$ и $V_3$ заполняют все пространство.

г) Плоскость $\pi_{n+1}$ покрывается тремя полуплоскостями $F_1$, $F_2$ и $F_3$, и плоскость $\pi_3$ не параллельна линии пересечения $\pi_1$ и $\pi_2$ (соответствующие плоскости образуют «пирамиду»; см. рис. 72, *г*). Если полупространство $V_{n+1}$ содержит точку пересечения плоскостей $F_1$, $F_2$ и $F_3$, то четыре полупространства $V_1$, $V_2$, $V_3$ и $V_{n+1}$ заполняют все пространство; в противном случае полупространство $V_{n+1}$ покрывается полупространствами $V_1$, $V_2$, $V_3$, и теорема следует из индуктивного предположения.

**Задача 39.** Доказать, что в пространстве не может существовать более четырех лучей, попарно образующих между собой тупые углы.

**Пример 32.** Доказать существование числа $C_3$, такого, что стороны каждого пространственного многоугольника $A_1, A_2, \ldots, A_n$, длина каждой из сторон которого не превосходит 1, можно переставить (не меняя их величин и направлений) таким образом, чтобы полученный в результате этой перестановки многоугольник можно было заключить в шар радиуса $C_3$.

Как и всюду в этом параграфе, рассмотрим сначала соответствующие «одномерную» и «двумерную» задачи.

А. На прямой задано $n$ точек $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, причем длина каждого из отрезков $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_n$, $A_nA_1$ не превосходит 1. Доказать существование такого числа $C_1$ (не зависящего от положения точек и от числа $n$!), что отрезки $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_n$, $A_nA_1$ можно переставить на прямой таким образом, чтобы полученная «ломаная» $B_1B_2 \ldots B_nB_1$, каждое звено которой совпадает по величине и направлению с одним из звеньев «ломаной» $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_nA_1$, целиком лежала внутри отрезка длины $2C_1$.

Решение. Условимся считать длину $a_i$ звена $A_iA_{i+1}$($i=1, 2, \ldots, n$; за $A_{n+1}$ принимается точка $A_1$) нашей «ломаной» $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ положительной, если точка $A_{i+1}$ расположена правее $A_i$ (мы считаем прямую, на которой лежат все точки, горизонтальной), и отрицательной в противном случае. Очевидно, $a_1+a_2$ есть длина отрезка $A_1A_3$ (которая может быть согласно нашему условию положительной или отрицательной), $a_1+a_2+a_3$ — длина отрезка $A_1A_4$ и т. д., $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$ — длина отрезка $A_1A_n$, $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n=0$ (это есть длина «отрезка $A_1A_1$»). Так как каждое «звено» ломаной $B_1B_2 \ldots B_nB_1$ равно какому-то звену первоначальной ломаной $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, то наше предложение можно сформулировать так:

*Даны $n$ положительных и отрицательных чисел $a_1$, $a_2$, ..., $a_{n-1}$, $a_n$, каждое из которых по абсолютной величине не превосходит единицы и сумма которых равна нулю; доказать, что эти числа можно расположить в таком порядке $a_{i_1}$, $a_{i_2}$, ..., $a_{i_{n-1}}$, $a_{i_n}$* (здесь $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n$ суть те же номера $1, 2, \ldots, n-1, n$, но как-то переставленные), *что все суммы $a_{i_1}$, $a_{i_1}+a_{i_2}$, $a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}$, ..., $a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_{n-1}}$ по абсолютной величине не превосходят некоторого числа $C_1$* (не зависящего от последовательности $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ и даже от числа $n$).

Докажем, что в качестве $C_1$ можно взять число 1. Пусть $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ — все положительные числа из последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а $a''_1, a''_2, \ldots, a''_q$ — все отрицательные числа ($p+q=n$). Возьмем столько первых положительных чисел $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ ($k \leqslant p$), чтобы их сумма не превзошла единицы (например, одно число $a'_1$), затем добавим столько отрицательных чисел $a''_1, a''_2, \ldots, a''_l$ ($l \leqslant q$), чтобы сумма всех выписанных чисел стала отрицательной, но по абсолютной величине была не больше единицы. Потом снова обратимся к положительным числам и т. д., пока не исчерпаем всех заданных чисел. Полученная при этом последовательность $a^*_1=a'_1$, $a^*_2=a'_2, \ldots$, $a^*_k=a'_k$; $a^*_{k+1}=a''_1$, $a^*_{k+2}=a''_2$, ..., $a^*_{k+l}=a''_l$; ... обладает, очевидно, требуемым свойством.

Б. На плоскости дан многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ (который может быть невыпуклым или даже самопересекающимся), причем длина каждой из сторон этого многоугольника не превосходит единицы (рис. 73). Доказать существование такого (не зависящего от многоугольника) числа $C_2$, что стороны многоугольника можно переставить, не меняя их величин и направлений, таким образом, чтобы полученный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ целиком помещался внутри круга радиуса $C_2$.

Решение. Докажем, что в качестве $C_2$ можно взять число $\sqrt{5}$. Обозначим стороны многоугольника $A_1A_2\ldots A_nA_1$, взятые по длине и направлению, т. е. рассматриваемые как векторы, через $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Выберем из них некоторые векторы $a_1', a_2', \ldots, a_s'$ так, чтобы замыкающая $\overline{B_1B_s}$ (рис. 74) образуемой ими ломаной имела наибольшую возможную длину. Тогда проекции каждого из векторов $a_1', a_2', \ldots a_s'$ на замыкающую $\overline{B_1B_s}$ будут иметь одно и то же направление, совпадающее с направлением $\overline{B_1B_s}$ (если бы проекция какого-нибудь вектора имела противоположное направление, то удаление этого вектора привело бы к увеличению длины замыкающей). Наоборот, проекции всех остальных векторов $a_1'', a_2'', \ldots, a_{n-s}''$ на $\overline{B_1B_s}$ имеют противоположное направление. Другими

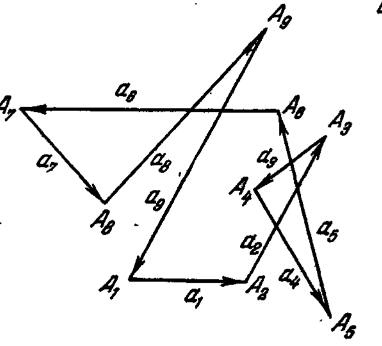



Рис. 73.

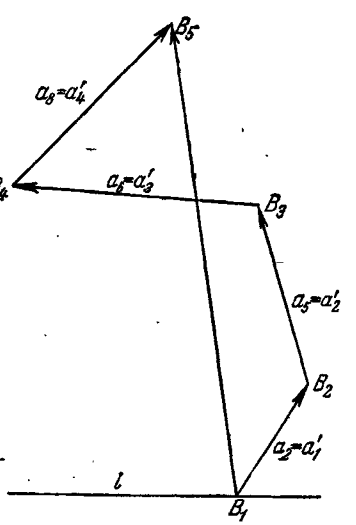



Рис. 74.

словами, можно считать, что проекции $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_s'$ векторов $a_1'$, $a_2', \ldots, a_s'$ на направление $\overline{A_1A_s}$ положительны $(0 \leqslant \alpha_i' \leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, s)$, а проекции $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_{n-s}''$ векторов $a_1'', a_2'', \ldots, a_{n-s}''$ на то же направление отрицательны $(-1 \leqslant \alpha_j'' \leqslant 0, j=1, 2, \ldots, n-s)$. Обозначим еще (положительные или отрицательные) проекции векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на прямую $l$, перпендикулярную к $\overline{B_1B_s}$, на которой выбрано «положительное» направление, через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Ясно, что $\beta_1'+\beta_2'+\ldots+\beta_s'=0$ и $\beta_1''+\beta_2''+\ldots+\beta_{n-s}''=0$ (здесь $\beta_1'$ — проекция вектора $a_1'$, $\beta_1''$ — проекция вектора $a_1''$ и т. д.); при этом $|\beta_1'| \leqslant 1$, $|\beta_2'| \leqslant 1, \ldots, |\beta_s'| \leqslant 1$ и $|\beta_1''| \leqslant$

$\leqslant 1$, $|\beta_2''| \leqslant 1, \ldots, |\beta_{n-s}''| \leqslant 1$. В силу п. А можно так расположить числа $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_s'$ и числа $\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_{n-s}''$, чтобы при любом $\nu$ выполнялись неравенства $\beta_1' + \beta_2' + \ldots + \beta_\nu' \leqslant 1$ и $\beta_1'' + \beta_2'' + \ldots$ $\ldots + \beta_\nu'' \leqslant 1$. Если теперь все числа $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_s'$ и $\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_{n-s}''$ объединить в одну общую последовательность так, чтобы установленный выше порядок следования чисел $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_s'$ и порядок следования чисел $\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_{n-s}''$ не нарушались, то сумма любого числа первых членов полученной последовательности не превзойдет 2.

Расположим теперь числа $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_s'$ и $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_{n-s}''$ в одну общую последовательность так, чтобы сумма любого числа первых членов этой последовательности по абсолютной величине не превзошла единицы. Как видно из рассуждения, проведенного в п. А, это можно сделать, не нарушая порядка следования чисел $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_s'$ и чисел $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_{n-s}''$ между собой. Пусть соответствующее расположение наших векторов будет $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*$.

Тогда для любого $\nu$ будем иметь: $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_\nu^* \leqslant 1$, $\beta_1^* + \beta_2^* + \ldots + \beta_\nu^* \leqslant 2$, где $\alpha_k^*$ и $\beta_k^*$ — проекции $a_k^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ на $\overline{B_1B_s}$ и на $l$. Так как проекции замыкающей ломаной, образованной векторами $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_\nu^*$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ на прямые $\overline{B_1B_s}$ и $l$ равны соответственно $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_\nu^*$ и $\beta_1^* + \beta_2^* + \ldots + \beta_\nu^*$, то если длина этой замыкающей равна $c_\nu$, то $c_\nu^2 = (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_\nu^*)^2 + (\beta_1^* + \beta_2^* + \ldots + \beta_\nu^*)^2$, т. е. $c_\nu^2 \leqslant 5$, $c_\nu \leqslant \sqrt{5}$.

Мы нашли, что расстояние любой вершины полученной векторной ломаной от фиксированной точки $A_1$ не превосходит $\sqrt{5}$; отсюда следует, что весь полученный многоугольник помещается в круге радиуса $\sqrt{5}$.

В. Предложение, сформулированное в начале примера.

Указание. Доказать, что в качестве $C_3$ можно взять $\sqrt{21}$. Рассуждение в этом случае аналогично проведенному в п. Б; $\beta_1$, $\beta_2, \ldots, \beta_n$ будут проекции векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на плоскость $\pi$, перпендикулярную к замыкающей $\overline{B_1B_s}$.

**Пример 33.** Определение медиан и центра тяжести тетраэдра.

А. Центром тяжести отрезка называется его середина.

Б. Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую из его вершин с центром тяжести противоположной стороны. Известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке; эта точка называется центром тяжести треугольника.

В. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий любую из его вершин с центром тяжести противоположной грани.

Докажем, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке.

Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ (рис. 75), и пусть $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$—центры тяжести треугольников $DBC$, $ACD$, $ABD$ и $ABC$. Так как прямые $BO_1$ и $AO_2$ пересекаются в середине $P$ отрезка $CD$, то прямые $AO_1$ и $BO_2$ также пересекаются в некоторой точке $O_{12}$; аналогично $AO_1$ и $CO_3$, $AO_1$ и $DO_4$, $BO_2$ и $CO_3$, $BO_2$ и $DO_4$, $CO_3$ и $DO_4$ пересекаются в точках $O_{13}$, $O_{14}$, $O_{23}$, $O_{24}$ и $O_{34}$. Докажем, что все эти точки совпадают (на чертеже—точка $O$). Действительно, если бы, например, $O_{12}$ и $O_{13}$ не совпадали, то прямые $AO_1$, $BO_2$ и $CO_3$ лежали бы в одной плоскости $\pi$ (в плоскости $O_{12}O_{13}O_{23}$), но тогда и прямая $DO_4$, пересекающая $AO_1$, $BO_2$ и $CO_3$, лежала бы в той же самой плоскости, т. е. все четыре вершины тетраэдра должны были бы лежать в одной плоскости $\pi$. Так как это неверно, то точки $O_{12}$ и $O_{13}$ должны совпадать; с этой точкой совпадают и все остальные точки $O_{14}$, $O_{23}$, $O_{24}$, $O_{34}$.

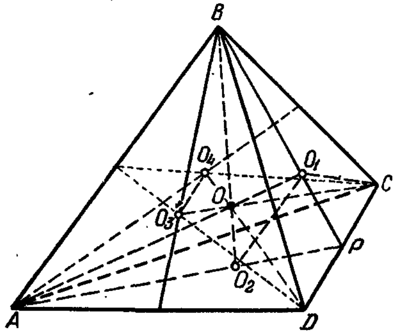


Рис. 75.

Точка пересечения медиан тетраэдра называется центром тяжести тетраэдра.

**Задача 40.** Доказать, что центр тяжести делит каждую из медиан тетраэдра в отношении 3:1, считая от вершины.

# ПОСЛЕСЛОВИЕ

*Ю. А. Гастев*

Индукция (лат. inductio — наведение) — переход от частного к общему; дедукция (лат. deductio — вывод) — переход от общего к частному. Всем известна роль процессов обобщения результатов отдельных наблюдений и опытов (т. е. индукции) для эмпирических, экспериментальных наук. Математика же издавна считается классическим образцом осуществления чисто дедуктивных методов, т. к. явно или неявно всегда подразумевается, что все математические предложения (кроме принятых за исходные — аксиом) доказываются, а конкретные применения этих предложений выводятся из доказательств, пригодных для общих случаев (дедукция).

Но вот мы читаем: «Индукция широко применяется в математике, но применять ее надо умело» (стр. 7 настоящей книги); «... как пользоваться в математике индукцией, чтобы получать только верные выводы?» *) (стр. 6). Что же все это, собственно, значит? Не следует ли понимать дело так, что среди математических методов есть «достоверные», действующие, так сказать, безотказно (дедуктивные), и «не вполне надежные», дающие подчас, особенно в неумелых руках (как выражаются авторы, «при легкомысленном отношении»), осечку (индуктивные)? Если бы это было действительно так, то где же искать критерии надежности таких «индуктивных» методов? Как вернуть себе уверенность в непреложной обязательности математических выводов? Или это безнадежная затея, и достоверность математических заключений — той же природы, что и опытные обобщения экспериментальных наук, так что любой доказанный факт неплохо было бы еще «проверить» (подобно тому как школьникам часто рекомендуется «проверять» правильность выполнения арифметических действий или решения уравнений по общей формуле)? В действительности дело обстоит не так. Индукция, т. е. «наведение» (на мысль, на догадку, на гипотезу) играет в математике, безусловно, очень большую, но чисто эвристическую роль: она позволяет догадываться о том, каким, по всей видимости, должно быть решение. Устанавливаются же математические предложения только дедуктивно. Ни один математический результат не может претендовать на достоверность, истинность, коль скоро он не выведен из исходных посылок.

*) Такого рода трактовка «индукции в математике» стала почти традиционной для школьных учебников — вплоть до самых новых (см., например, §§ 62—63 учебника алгебры Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой).

Ну, а как же «метод математической индукции»? Дело все в том, что «математическая индукция» есть дедуктивный метод. В самом деле, разберемся детальнее в структуре математических умозаключений, выглядящих как «переход от частного к общему». Легко убедиться, что так называемая математическая индукция на самом деле вовсе не есть индукция — это чисто дедуктивный метод рассуждения! Доказательство, проводимое этим методом, состоит из двух частей: 1) так называемый базис — доказательство (дедуктивное!) искомого предложения для одного (или нескольких) натурального числа (например, для 0 или 1; это то, что на стр. 11 именуется «Теоремой 1»); 2) индукционный шаг («Теорема 2»), состоящий в доказательстве (опять-таки дедуктивном) общего утверждения: для всех $n$ верно, что из того, что искомое утверждение справедливо для $n$, вытекает, что оно справедливо и для $n+1$. «Принцип математической индукции» (стр. 12) — точно формулируемое предложение (интуитивная убедительность которого признается многими математиками как неоспоримая; при аксиоматическом же построении арифметики он фигурирует в качестве аксиомы), позволяющее извлечь из базиса и индукционного шага чисто дедуктивное доказательство рассматриваемого предложения для всех натуральных чисел $n$. Таким образом, никаких «не учтенных в посылках» случаев, на которые затем («по индукции») надо было бы еще «распространять» заключение, не остается — теорема именно доказывается для всех натуральных чисел: из базиса, доказанного, скажем, для числа 0, мы получаем, по индукционному шагу, доказательство для числа 1, затем таким же образом для 2, затем для 3 ... — и так утверждение может быть обосновано для любого натурального числа *).

Иначе говоря, название «математическая индукция» обусловлено тем, что этот метод просто ассоциируется в нашем сознании с традиционными «индуктивными» умозаключениями (ведь базис действительно доказывается только для частного случая); индукционный шаг, в отличие от основанных на опыте критериев правдоподобности индуктивных умозаключений в естественных (и общественных) науках, есть общее утверждение, не нуждающееся ни в какой частной посылке и доказываемое по строгим канонам дедуктивных рассуждений. Потому-то и называют математическую «индукцию» «полной», или «совершенной», что она (в противоположность обычной, «несовершенной» индукции, не обеспечивающей нам полного знания) есть дедуктивный («стопроцентно надежный») метод доказательства.

Итак, в качестве метода доказательства индукция в математике не применяется, что, разумеется, никак не исключает широкого применения в ней дедуктивного метода «математической индукции» **).

---

*) О встающих в связи с такого рода обоснованием метода проблемах см. указанную ниже литературу.

**) О чрезвычайно плодотворной роли «обычной» («неполной») индукции в формировании математических догадок, ведущих затем и к открытиям новых фактов, и о связи «обычной» индукции с методом математической индукции см. в книге Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, М., ИЛ, 1957, т. I (особенно глава 7).

Условившись отныне в таком понимании термина, мы можем, конечно, позволить себе теперь и вольные перефразировки вроде «индукции в геометрии» (как названа вторая часть этой книжки) или «индукции в математике». Но при этом всегда надо помнить, что первое выражение, строго говоря, имеет совсем не тот смысл, что громоздкое (но точное!) выражение «употребление дедуктивного метода математической индукции для доказательства теорем геометрического содержания» (хотя, для облегчения речи, и употребляется как его синоним), а второе — отнюдь не то же самое (вопреки чисто грамматическим признакам), что «математическая индукция»; последний термин следует воспринимать целиком, а вовсе не в смысле «индукция в математике».

Особого внимания в этом отношении требует § 6 второй части «Индукция по числу измерений». Приведенные в этом параграфе доказательства теорем планиметрии, опирающиеся на доказательства аналогичных утверждений для прямой, и доказательства стереометрических теорем, опирающиеся на соответствующие планиметрические результаты, сами по себе не являются, конечно, не только «обычной» индукцией, но и применением принципа математической индукции: в них не доказывается никаких утверждений, справедливых для всех $n$ (в данном случае — числа измерений пространства); это — просто переходы от одного частного случая ($n=1$ или $n=2$) к другому частному случаю ($n=2$ или $n=3$). Верно, однако, и то, что аналогия, усматриваемая в приводимых доказательствах, позволяет извлечь из них и подлинный индукционный шаг («теорему 2»), нужный для доказательства рассматриваемого предложения для общего случая *).

Метод математической индукции (в той форме, в какой он рассматривается в этой книжке) есть метод доказательства арифметических теорем, точнее, теорем, выражающих общие свойства натуральных чисел (0, 1, 2, ... ; иногда, как в этой книге, натуральный ряд уславливаются начинать с единицы, что абсолютно не принципиально). И для арифметики натуральных чисел этот метод, в известном (достаточно разумном и сильном) смысле, является универсальным (а часто и единственным) орудием доказательств.

Дело в том, что при аксиоматическом (дедуктивном) построении арифметики все ее здание опирается на определения операций над натуральными числами по математической индукции **) (например, при определении сложения прежде всего определяется, — в качестве базиса индукции, — что значит прибавить единицу или нуль; затем — индукционный шаг определения — определение прибавления произвольного натурального числа сводится к определению прибавления предшествующего числа). И вполне понятно потому, что «добираться» до общих свойств натуральных чисел, связанных, скажем, с операциями сложения или умножения, нам приходится (если уж мы хотим обосновывать их аксиоматически) по той же «лестнице» (на нижней «ступени» которой находится соответствующее свойство для наименьшего натурального числа), по которой мы «совершаем восхождение»

*) См. стр. 97 и далее.

**) Называемые также рекурсивными определениями.

к интересующему нас общему понятию; грубо говоря, иначе просто не видно, как за нужное нам доказательство «ухватиться» *). И так обстоит дело с доказательством любого общего арифметического утверждения! И если это не видно из школьного курса арифметики и алгебры, то лишь потому, что он (совершенно резонно) опирается не столько на аксиоматический метод, сколько на опыт и интуицию **). В конце концов самый придирчивый и критически настроенный читатель часто довольствуется знанием того, что, скажем, дистрибутивность умножения относительно сложения м о ж н о доказать, и уже не требует с а м о г о доказательства. (Но такая, пусть вполне обоснованная, уверенность так же отличается от подлинного доказательства, как, скажем, газетная информация от подлинного знания очевидца, причем эта аналогия простирается весьма далеко.) Поэтому-то метод математической индукции и появляется в школьном курсе математики гораздо позже интуитивно прозрачных и легко постигаемых свойств арифметических действий, например, в связи с формулой бинома Ньютона, которая уже отнюдь не такова, чтобы справедливость ее «бросалась в глаза».

В той мере, в какой другие разделы математики опираются на арифметическую основу, они нуждаются в методе математической индукции. Потребность эта бывает двоякого рода. Прежде всего многие разделы математики просто строятся на базе арифметики натуральных чисел (скажем, теория рациональных чисел, приводящая в свою очередь к теории действительных чисел); другие же могут быть и н т е р п р е т и р о в а н ы в арифметических терминах (например, любой факт евклидовой геометрии можно выразить на «координатном языке» действительных чисел). В этих случаях утверждения, предположим, геометрического содержания могут быть доказаны именно для такой арифметической интерпретации с помощью математической индукции. Можно сказать, что геометрическая или какая-либо иная «специфика» подобных предложений не более существенна для самого доказательства, чем, например, природа рассматриваемых объектов в задаче о сложении трех огурцов с пятью огурцами или трех пароходов с пятью пароходами.

Но бывает так, что базис индукции доказывается существенно неарифметическими методами ***). И в этом случае, однако, индукционный шаг (даже если он опирается на геометрические или какие-нибудь другие аксиомы) представляет собой некоторое о б щ е е у т в е р ж д е н и е о н а т у р а л ь н ы х ч и с л а х, поскольку в нем

*) Точно так же, как любая теорема о свойствах «ортоцентров многоугольников», о п р е д е л я е м ы х п о м а т е м а т и ч е с к о й и н д у к ц и и (стр. 94 настоящей книжки), по необходимости должна доказываться этим методом.

**) В тех же случаях, когда в школьном курсе доказываются какие-либо общие свойства натуральных чисел, то доказательство, если и не проводится по индукции, то лишь благодаря тому, что в качестве посылок (часто неявных) используются предложения, для строгого обоснования которых индукция все же необходима (подобно тому как употребление постулата о параллельных в евклидовой геометрии можно «замаскировать», пользуясь вместо него каким-нибудь из его следствий).

***) Примеры такого рода читатель найдет во второй части этой книжки.

идет речь о выполнении некоторого свойства для любого натурального числа $n$ *).

Отметим еще, что метод, оказавшийся столь плодотворным для проведения доказательств, следующих процессу построения натурального ряда 0, 1, 2, ..., может быть обобщен и на процессы совершенно другого вида. Например, в исчислениях математической логики, оперирующих с формулами («высказываниями»), построенными из «элементарных формул» («элементарных высказываний») вида $A$, $B$, $C$ ... с помощью, допустим, знаков & («и»), $\vee$ («или»), $\supset$ («если ..., то ...») и $\neg$ («не»), общие свойства формул доказываются путем так называемой индукции по построению формулы: доказывается, что 1) искомым свойством обладает любая элементарная формула (базис), и 2) из того, что этим свойством обладают формулы $X$ и $Y$, следует, что им обладают формулы $(X \& Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \supset Y)$ и $\neg X$ (индукционный шаг); из этого делается вывод о справедливости доказываемого предложения для всех формул указанного вида. Аналогия с рассматриваемой в настоящей книге математической индукцией настолько прозрачна, что бросается в глаза и неподготовленному читателю.

Вообще, любая математическая (или логическая) конструкция, состоящая в переходе от одного или нескольких исходных объектов к новым объектам с помощью одной или нескольких операций перехода, может служить основой соответствующего «индуктивного» (являющегося, как мы уже видели, чисто дедуктивным) метода определения и доказательства. (Относительно подчиненная роль метода математической индукции в математическом анализе, кстати, объясняется именно тем обстоятельством, что действительные числа, в отличие от натуральных, не являются продуктом такой развертывающейся четко очерченной конструкции, так что различного рода «индукции по действительным числам» далеко не обладают той универсальностью, как метод математической индукции в арифметике и его модификации в математической логике.)

Для разрешения тех вопросов общелогического и общематематического характера, которые могли бы возникнуть теперь у читателя, отсылаем его к специальной литературе **). Задачу же первоначального ознакомления с конкретными применениями метода математической индукции в элементарной математике может с успехом выполнить эта книжка.

---

*) То есть сам переход «от $n$ к $n+1$» доказывается для любого $n$.

**) См., например, Л. Генкин, О математической индукции, М., Физматгиз, 1962; Э. Ландау, Основы анализа, М., ИЛ, 1948; И. В. Арнольд, Теоретическая арифметика, М., Учпедгиз, 1939, § 13, 14, 17, 19; С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957, § 7, 13, 21, 38 и др.; «Математическая индукция» — Философская энциклопедия, М., 1964 (т. 3).

# УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ *)

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

### Индукция в арифметике и в алгебре

1. Гипотеза: $u_n = 3n - 2$.

1°. Для $n=1$ гипотеза верна.

2°. Пусть $u_k = 3k - 2$. Тогда

$$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 2 + 3 = 3(k+1) - 2.$$

2. Гипотеза: $S_n = 2^n - 1$.

1°. Для $n=1$ гипотеза верна.

2° Пусть $S_k = 2^k - 1$. Тогда $S_{k+1} = S_k + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

[Можно также сразу образовать разность $2S_n - S_n$ и показать, что она равна $2^n - 1$.]

3. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$.

Тогда

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \\ = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

4. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$.

Тогда

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \\ = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

5. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$.

---

*) Ниже указываются номера задач. Решения примеров приводятся в тексте.

Тогда

$$1+x+x^2+\ldots+x^k+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

6. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

Тогда

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

7. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$.

Тогда

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$
$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}.$$

8. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$.

Тогда

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=(k+1)\frac{k(2k+3)+2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}=$$
$$=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

9. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}$.

Тогда

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=$$
$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

10. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}$.

Тогда

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$$
$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}.$$

11. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.
2°. Пусть

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}.$$

Тогда

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$
$$=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}.$$

12. 1°. При $n=1$ и $n=2$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $u_{k-2}=\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}$, $u_{k-1}=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}$. Тогда

$$u_k=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}.$$

13. 1°. При $n=0$ имеем $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}$. Следовательно, утверждение справедливо.
2°. Пусть

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=$$
$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

14. При $n=1$ имеем $1-\frac{x}{1!}=-\frac{x-1}{1}$.

При $n=2$ имеем

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=-\frac{x-1}{1}+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!}.$$

При $n=3$ имеем

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}.$$

Это наводит на гипотезу:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=$$

$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}.$$

1°. При $n=1$ гипотеза верна.

2°. Пусть

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^k\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}=$$

$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{k!}.$$

Тогда

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!}+$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\ldots(x-k)}{(k+1)!}=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{k!}+$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\ldots(x-k)}{(k+1)!}=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{k!}\left[\frac{x}{k+1}-1\right]=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)(x-k-1)}{(k+1)!}.$$

15. 1°. При $n=0$ утверждение справедливо.

2°. Предположим, что утверждение справедливо при $n=k$, т. е. что $A_k=11^{k+2}+12^{2k+1}$ делится на 133. Тогда

$$A_{k+1}=11^{k+3}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}=$$
$$=11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11\cdot 11^{k+2}+133\cdot 12^{2k+1}+11\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}=11A_k+133\cdot 12^{2k+1}.$$

Мы представили $A_{k+1}$ в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на 133. Значит, $A_{k+1}$ делится на 133.

16. 1°. При $n=1$ утверждение задачи, очевидно, справедливо.

2°. Предположим, что при $n=k$ утверждение справедливо, т. е. что $k$ прямых делят плоскость на $2k$ углов. Так как $(k+1)$-я прямая рассекает на части сразу два вертикальных угла, то она увеличивает число частей, на которые делится плоскость, на два. Поэтому $(k+1)$-я прямая делит плоскость на $2k+2=2(k+1)$ частей.

17. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо, так как

$$\frac{\sin\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\cos x.$$

2°. Пусть

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx+\cos(k+1)x=$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(k+1)x=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x+2\sin\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x+\left(\sin\frac{2k+3}{2}x-\sin\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{2k+3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

18. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо, так как

$$\frac{2\sin x-\sin 2x}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\sin x.$$

2°. Пусть

$$\sin x+2\sin 2x+\ldots+k\sin kx=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Тогда

$$\sin x+2\sin 2x+\ldots+k\sin kx+(k+1)\sin(k+1)x=$$

$$=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}+(k+1)\sin(k+1)x=$$

$$=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x+2(k+1)\sin(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{2(k+1)\cos x\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{(k+1)[\sin(k+2)x+\sin kx]}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x-(k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

19. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо, так как

$$\frac{2\cos x-\cos 2x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cos x-2\cos^2 x}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos x(1-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\cos x.$$

2°. Пусть

$$\cos 2x+2\cos 2x+\ldots+k\cos kx=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Тогда

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+k\cos kx+(k+1)\cos(k+1)x=$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+(k+1)\cos(k+1)x=$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+$$

$$+\frac{2(k+1)\cos(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-$$

$$-\frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x+1}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-$$

$$-\frac{(k+1)[\cos(k+2)x+\cos kx]+1}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x-(k+1)\cos(k+2)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

20. 1°. При $n=1$ утверждение справедливо, так как

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2°. Пусть

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-\operatorname{ctg}x.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-\operatorname{ctg}x+\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2^{k+1}}-1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}}+\frac{1}{2^{k+1}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}}-\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}-\operatorname{ctg}x.$$

21. 1°. Имеем $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2-\operatorname{arc\,tg}1)=\frac{2-1}{1+2\cdot 1}=\frac{1}{3}$. Поэтому $\operatorname{arc\,tg}2-\operatorname{arc\,tg}1=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\operatorname{arc\,ctg}3$. Значит, при $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Покажем сначала, что

$$\operatorname{arc\,ctg}(2k+3)=\operatorname{arc\,tg}\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc\,tg}1. \tag{1}$$

Действительно, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc\,tg}1\right)=\dfrac{\frac{k+2}{k+1}-1}{1+\frac{k+2}{k+1}\cdot 1}=\dfrac{1}{2k+3}$.

Значит,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2k+3}=\operatorname{arc\,ctg}(2k+3)=\operatorname{arc\,tg}\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc\,tg}1.$$

Предположим, что утверждение справедливо при $n=k$, т. е. $\operatorname{arc\,ctg}3+\operatorname{arc\,ctg}5+\ldots+\operatorname{arc\,ctg}(2k+1)=$

$$=\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{k+1}{k}-k\operatorname{arc\,tg}1. \tag{2}$$

Докажем, что тогда оно справедливо и при $n=k+1$, т. е. $\operatorname{arc\,ctg}3+\operatorname{arc\,ctg}5+\ldots+\operatorname{arc\,ctg}(2k+3)=$

$$=\operatorname{arc\,tg}2+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{k+2}{k+1}-(k+1)\operatorname{arc\,tg}1. \tag{3}$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим равенство (3).

**22.** 1°. При $n=1$ утверждение справедливо, так как

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\ \sin\frac{\pi}{6}\right).$$

2°. Пусть $(\sqrt{3}-i)^k=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)$.

Тогда

$$(\sqrt{3}-i)^{k+1}=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{6}-i\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right].$$

**23.** 1°. При $n=1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть $(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx$. Тогда

$$(\cos x+i\sin x)^{k+1}=(\cos kx+i\sin kx)(\cos x+i\sin x)=$$
$$=(\cos kx\cos x-\sin kx\sin x)+i(\cos kx\sin x+\sin kx\cos x)=$$
$$=\cos(k+1)x+i\sin(k+1)x.$$

**24.** Ошибочна самая последняя фраза: «Утверждение доказано». В действительности доказано, что неравенство $2^n>2n+1$ справедливо при $n=k+1$, если оно справедливо при $n=k$, где $k$ — любое натуральное число.

Отсюда еще не следует, что неравенство это справедливо *хотя бы при одном* значении $n$ и тем более *при любом* натуральном $n$.

Короче говоря, ошибка заключается в том, что доказана только теорема 2, а теорема 1 не рассматривалась и база для индукции не создана.

**25.** Легко видеть, что 3 — наименьшее натуральное значение $n$, при котором неравенство $2^n>2n+1$ справедливо.

Учитывая, что из справедливости неравенства при $n=k$ следует его справедливость при $n=k+1$ (задача 24), утверждаем, что неравенство справедливо при любом натуральном $n\geqslant 3$.

**26.** 1°. При $n=2$ неравенство справедливо, так как

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}.$$

2°. Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}. \qquad (1)$$

Докажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}. \qquad (2)$$

При любом $k\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}-\sqrt{k}. \qquad (3)$$

Действительно, неравенство (3) равносильно неравенству $1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}>1$, полученному из него умножением обеих частей на $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$. Сложив почленно неравенства (1) и (3), получим неравенство (2).

27. 1°. При $n=2$ неравенство принимает вид $\frac{16}{3}<6$ и, следовательно, справедливо.

2°. Пусть $\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}$, где $k\geqslant 2$. Нетрудно проверить, что $\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$ при $k>0$. Поэтому

$$\frac{4^k}{k+1}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2},$$

т. е.

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}.$$

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### Индукция в геометрии

1. Обозначим через $S_{2^n}$ площадь правильного $2^n$-угольника, вписанного в круг радиуса $R$, а через $h_{2^n}$ — его апофему. Тогда из формулы (1) следует, что

$$h_{2^n}=\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}=\frac{R}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ двоек}}$$

и

$$S_{2^n}=\frac{1}{2}(2^n a_{2^n})\,h_{2^n}=2^{n-2}R^2\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-3\text{ двойки}}}=$$

$$=2^{n-2}Ra_{2^{n-1}}$$

(здесь предполагается, что $n\geqslant 3$). Далее, имеем: $\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}}=$ $=\frac{2^{n-1}a_{2^n}h_{2^n}}{2^{n-1}Ra_{2^n}}=\frac{h_{2^n}}{R}=\cos\frac{180^\circ}{2^n}$, откуда следует, что

$$\frac{S_4}{S_{2^n}}=\frac{S_4}{S_8}\cdot\frac{S_8}{S_{16}}\cdot\ldots\cdot\frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^n}}=\cos\frac{180^\circ}{4}\cos\frac{180^\circ}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{180^\circ}{2^{n-1}}.$$

Так как $S_4=2R^2$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}=\pi R^2$, то $\frac{2}{\pi}$ равно пределу выражения $\cos 45^\circ\cos\frac{45^\circ}{2}\cos\frac{45^\circ}{4}\ldots$ Затем остается только воспользоваться формулой $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

**2.** Из того, что $N$ диагоналей и $n$ сторон $n$-угольника являются сторонами $n-2$ треугольников (см. пример 4), следует, что

$$2N+n=3(n-2),\quad N=n-3.$$

**3.** Выпуклый $(n+1)$-угольник $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ диагональю $A_1A_n$ разбивается на $n$-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ и треугольник $A_1A_nA_{n+1}$. Считая известным число $F(n)$ частей, на которые разбивается своими диагоналями $n$-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, сосчитаем, сколько частей добавляется от присоединения вершины $A_{n+1}$ (это число на единицу больше числа частей, на которые диагонали, выходящие из вершины $A_{n+1}$, разбиваются остальными диагоналями). Так мы найдем соотношение

$$F(n+1)=F(n)+(n-1)+1(n-2)+2(n-3)+\ldots$$
$$\ldots+(n-3)2+(n-2)1,$$

которое с помощью примеров 3 и 6 части I можно переписать в виде

$$F(n+1)=F(n)+(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=$$
$$=F(n)+\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}-1.$$

Суммируя значения $F(n)$, $F(n-1)$, ..., $F(4)$ и используя результаты примеров 3 и 4 и задачи 4 из части I, получим:

$$F(n)=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

**4.** В обозначениях примера 7 доказать сначала, что $\frac{r}{\rho}=1-\frac{2r}{h}$ и $\frac{\rho}{r}=1+\frac{2\rho}{h}$ (где $h$ — высота, проведенная из вершины $C$), откуда вытекают равенства

$$\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2}{h}\right)=1-\frac{2r}{h}=\left(1-\frac{2r_1'}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2'}{h}\right),$$
$$\left(1+\frac{2\rho_1}{h}\right)\left(1+\frac{2\rho_2}{h}\right)=1+\frac{2\rho}{h}=\left(1+\frac{2\rho_1'}{h}\right)\left(1+\frac{2\rho_2'}{h}\right).$$

**5.** Как известно, $S=pr=(p-c)\rho=\frac{abc}{4R}$, откуда, применяя теорему косинусов, получаем:

$$\frac{r+\rho}{2R}=\frac{\frac{S}{p}+\frac{S}{p-c}}{\frac{abc}{2S}}=\frac{(a+b)\left[c^2-(a-b)^2\right]}{2abc}=$$
$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\cos CAB+\cos CBA.$$

**6.** Предварительно доказать следующую лемму. Пусть $O_1$ и $O_2$ — центры окружностей $C_1$ и $C_2$, пересекающихся в точке $O$, и $B_1B_2$ — секущая, проведенная через вторую точку $A_1$ пересечения этих окружностей (рис. 76); тогда отрезки $B_1B_2$ и $O_1O_2$ видны из точки $O$ под одним и тем же углом. Затем доказать предложенную теорему для трех окружностей. После этого, предполагая, что теорема справедлива для $n-1$ окружностей, рассмотреть $n$ окружностей $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Провести секущую через точку $B_{n-1}$ и точку пересечения окружностей $C_{n-1}$ и $C_1$; к $n-1$ окружностям $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ применить индуктивное предположение.

**7.** Предположив, что все эти точки соединены с соблюдением условий задачи, мы придем к карте, имеющей 5 вершин, $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ границ и, следовательно, 7 стран (теорема Эйлера!). Невозможность такой карты вытекает из рассуждений, близких к тем, которые привели к неравенству (5).

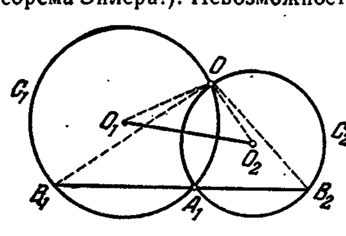



Рис. 76.

**8.** Поместим многогранник внутрь шара достаточно большого радиуса и из центра шара (который можно считать находящимся внутри многогранника) спроектируем все точки многогранника на сферу (поверхность шара). Полученную на сфере карту спроектируем из произвольной ее точки, не принадлежащей никакой границе, на плоскость, касающуюся сферы в диаметрально противоположной точке (с т е р е о г р а ф и ч е с к а я п р о е к ц и я). К полученной плоской карте применим теорему Эйлера.

**9.** См. пример 9.

**10.** Применить теорему Эйлера.

**11.** Пусть карта, образованная $n$ окружностями с хордами, правильно раскрашенная тремя красками $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Проведем $(n+1)$-ю окружность и цвета стран, расположенных внутри этой окружности по одну сторону от соответствующей хорды, изменим по схеме $\alpha\to\beta$, $\beta\to\gamma$, $\gamma\to\alpha$, а цвета стран, расположенных внутри окружности по другую сторону от хорды, — по схеме $\alpha\to\gamma$, $\beta\to\alpha$, $\gamma\to\beta$.

**12.** Задача может быть решена аналогично примеру 17 (представляющему собой ее частный случай), только вместо поворота вокруг заданной точки $A_1$ на известный угол $\alpha_1$ здесь следует рассматривать преобразование подобия, состоящее из поворота на угол $\alpha_1$ и центрально-подобного преобразования (гомотетии) с тем же центром $A_1$ и коэффициентом подобия, равным отношению сторон соответствующего треугольника (и аналогично для других заданных точек). Последовательное выполнение двух таких преобразований равносильно некоторому третьему преобразованию того же типа (см., например, § 2 гл. I части второй указанной выше книги И. М. Яглома). Следовательно, в обозначениях, аналогичных принятым в решении предыдущего примера, по вершинам $A_1$ и $A_2$ треугольников $x_1x_2A_1$ и $x_2x_3A_2$ можно найти вершину $A$ треугольника $x_1x_3A$, построенного на отрезке $x_1x_3$ и имеющего известный угол при вершине и известное отношение боковых сторон.

Построение стороны $x_1x_3$ треугольника $x_1x_2x_3$ по точкам $A$ и $A_3$ можно выполнить, например, следующим образом. Последовательность двух известных преобразований подобия с центрами $A$ и $A_3$ переводит $x_1$ в себя (сначала $x_1$ переходит в $x_3$, затем $x_3$ — в $x_1$). Но последовательность этих преобразований равносильна одному преобразованию подобия с центром в некоторой точке $B$, которую можно построить. Так как точка $B$ переходит в себя, то она совпадает с искомой точкой $x_1$. Если сумма заданных углов при вершинах кратна 360°, а произведение отношений сторон равно единице, то решение задачи невозможно или неопределенно.

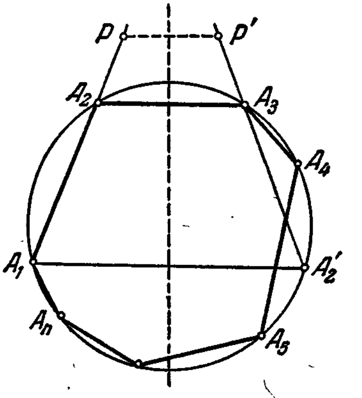


Рис. 77.

13. Пусть сторона $A_1A_2$ искомого многоугольника проходит через точку $P$, а сторона $A_2A_3$ параллельна прямой $l$ (рис. 77). Обозначим через $P'$ точку, симметричную с точкой $P$ относительно диаметра окружности, перпендикулярного к прямой $l$, и через $A_2'$ — точку пересечения прямой $P'A_3$ с окружностью. В $n$-угольнике $A_1A_2'A_3\ldots A_n$ сторона $A_1A_2'$ параллельна заданной прямой $l$, а сторона $A_2'A_3$ проходит через известную точку $P'$. Выполнив такое построение соответствующее число раз, мы сведем эту задачу к построению $n$-угольника, у которого $k$ соседних сторон проходят через известные точки, а остальные $n-k$ сторон параллельны заданным прямым.

14. На окружности радиуса $a$ отметим точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, являющиеся вершинами правильного шестиугольника. Предположим, что нам уже известна точка $B_n$ радиуса $OA_n$ такая, что $OB_n=\frac{1}{n}OA_n=\frac{a}{n}$ (здесь считается $A_{6m+k}=A_k$ при любом $m$ и $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$; $B_1=A_1$), и обозначим через $B_{n+1}$ точку пересечения прямых $OA_{n+1}$ и $B_nA_{n+2}$; тогда $OB_{n+1}=\frac{a}{n+1}$.

15. Искомым геометрическим местом является прямая линия; доказательство аналогично решению примера 20.

16. В обозначениях рис. 48 имеем:

$$S_{\triangle BCE}+S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BCF}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle BCO}+S_{\triangle ADO}=\frac{1}{2}S,$$

где $S$ — площадь четырехугольника. Отсюда в силу результата примера 20 (или задачи 15) следует, что точки $E$, $F$ и $O$ лежат на одной прямой.

17. В обозначениях рис. 49 (где точки $M$ и $N$ — середины диагоналей $AC$ и $BD$, а $P$ — середина отрезка $EF$) имеем:

$$S_{\triangle ABM}+S_{\triangle CDM}=S_{\triangle ABN}+S_{\triangle CDN}=S_{\triangle ABP}-S_{\triangle CDP}=\frac{1}{2}S,$$

где $S$ — площадь четырехугольника. Отсюда в силу результата задачи 15 следует, что точки $M$, $N$ и $P$ лежат на одной прямой.

18. Достаточно в условии примера 21 положить $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

19. Центр окружности, которая является искомым геометрическим местом в задаче 18.

20. Если $M$ — точка искомого геометрического места, то $\frac{AM}{BM}=c$ и, следовательно, $AM^2-c^2\cdot BM^2=0$; поэтому настоящая задача сводится к примеру 21.

21. Можно показать, что площадь треугольника, вершинами которого являются проекции точки $M$ на стороны треугольника $A_1A_2A_3$, равна $\frac{1}{4}\left|1-\frac{d^2}{R^2}\right|S_{\triangle A_1A_2A_3}$, где $R$ — радиус описанной окружности $\Sigma$ треугольника $A_1A_2A_3$, $d$ — расстояние точки $M$ от центра окружности $\Sigma$. Отсюда вытекает, что при $n=3$ искомое

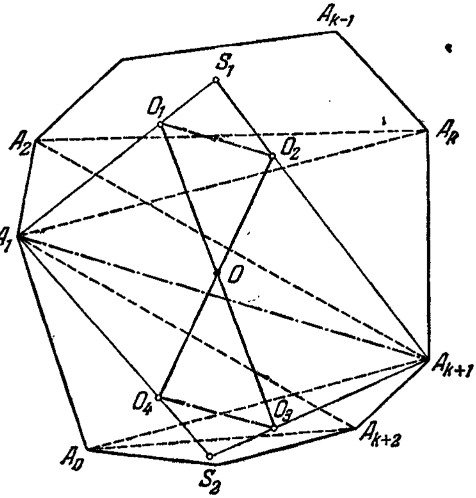



Рис. 78.

геометрическое место представляет собой окружность, концентрическую $\Sigma$ (или пару таких окружностей). Далее, при помощи индукции по числу сторон многоугольника показывается, что и при любом $n$ искомое геометрическое место, вообще говоря, будет представлять собой окружность (или пару концентрических окружностей). [См. решение задачи 90 из книги: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, М., Гостехиздат, 1952 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 2).]

22. Как доказано в примере 22, $O_1O_2 \| A_1A_2$ и $\frac{O_1O_2}{A_1A_2}=\frac{1}{n-1}$.

Аналогично $O_2O_3 \| A_2A_3$ и $\frac{O_2O_3}{A_2A_3}=\frac{1}{n-1}$ и т. д.

23. Пусть $S_1$ и $S_2$ — центры тяжести $(k-1)$-угольника $A_2A_3\ldots A_k$ и $(n-k-1)$-угольника $A_{k+2}A_{k+3}\ldots A_n$, $O_1$ и $O_2$ — центры тяжести $k$-угольников $A_1A_2\ldots A_k$ и $A_2A_3\ldots A_{k+1}$, $O_3$ и $O_4$ — центры тяжести $(n-k)$-угольников $A_{k+1}\ldots A_n$ и $A_{k+2}\ldots A_nA_1$ (рис. 78). Тогда $\frac{O_1S_1}{O_1A_1}=\frac{O_2S_1}{O_2A_{k+1}}=\frac{1}{k-1}$ и $O_1O_2 \| A_1A_{k+1}$; $\frac{O_3S_2}{O_3A_{k+1}}=\frac{O_4S_2}{O_4A_1}=\frac{1}{n-k-1}$ и $O_3O_4 \| A_1A_{k+1}$. Если теперь $O$ — точка пересечения медиан $k$-го порядка $O_2O_4$ и $O_1O_3$, то из подобия треугольников $OO_1O_2$ и $OO_3O_4$ имеем:

$$\frac{OO_1}{OO_3}=\frac{OO_2}{OO_4}=\frac{O_1O_2}{O_3O_4}=\frac{\frac{1}{k}A_1A_{k+1}}{\frac{1}{n-k}A_1A_{k+1}}=\frac{n-k}{k}.$$

Можно также доказать, что при любом $k$ точка пересечения медиан $k$-го порядка $n$-угольника совпадает с его центром тяжести.

24. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей произвольного четырехугольника, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

25. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырехугольник, вписанный в окружность $S$. Из того, что, например, окружность Эйлера треугольника $A_1A_2A_3$ проходит через три середины отрезков $H_4A_1$, $H_4A_2$, $H_4A_3$, где $H_4$ — точка пересечения высот $A_1A_2A_3$ (см. выше), вытекает, что она центрально-подобна (гомотетична) окружности $S$ с центром подобия в точке $H_4$ и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$; поэтому середина отрезка $H_4A_4$ принадлежит этой окружности. Теперь остается только заметить, что середины отрезков $H_1A_1$, $H_2A_2$, $H_3A_3$ и $H_4A_4$ (где $H_1$, $H_2$ и $H_3$ — точки пересечения высот соответствующих треугольников) совпадают; это вытекает из того, что, например, четырехугольник $A_1H_2H_1A_2$ является параллелограммом (ибо $A_1H_2 \| A_2H_1 \perp A_3A_4$ и $A_1H_2 = A_2H_1 =$ удвоенному расстоянию от центра $S$ до $A_3A_4$).

Предположим теперь, что для всех $k$-угольников, число сторон $k$ которых не превосходит $n \geqslant 4$, существование окружности Эйлера уже доказано, и рассмотрим $(n+1)$-угольник $A_1\ldots A_n A_{n+1}$, вписанный в окружность $S$. Нам надо доказать, что окружности Эйлера $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$ $n$-угольников $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3A_4\ldots A_{n+1}, \ldots, A_1A_2\ldots A_n$ пересекаются в одной точке; для этого достаточно доказать, что пересекаются в одной точке каждые три из них, например $S_1$, $S_2$ и $S_3$.

[Ибо если каждые три из $n \geqslant 5$ окружностей (никакие две из которых не совпадают) пересекаются в одной точке, то и все окружности пересекаются в одной точке (для $n=4$ это уже неверно).]

Обозначим через $S_{12}$, $S_{13}$, $S_{23}$ окружности Эйлера $(n-1)$-угольников $A_3A_4\ldots A_{n+1}$, $A_2A_4A_5\ldots A_{n+1}$, $A_1A_4A_5\ldots A_{n+1}$ и через $O_{12}$, $O_{13}$, $O_{23}$ — их центры; пусть еще $O_1$, $O_2$, $O_3$ — центры окружностей $S_1$, $S_2$, $S_3$ и $O_{123}$ — центр окружности Эйлера $S_{123}$ $(n-2)$-угольника $A_4A_5\ldots A_{n+1}$. В таком случае мы придем к рис. 79, из которого нетрудно усмотреть равенство треугольников $O_1O_2O_3$ и $O_{23}O_{13}O_{12}$. [Для доказательства равенства сторон $O_1O_2$ и $O_{23}O_{13}$ этих треугольников достаточно рассмотреть треугольники $O_1O_2O_{12}$ и $O_{23}O_{13}O_{123}$, в которых

$$O_{12}O_1=O_{12}O_2=O_{123}O_{23}=O_{123}O_{13}=\frac{R}{2},$$

$$\angle O_1O_{12}O_2=\angle O_1O_{12}O_{123}+\angle O_{123}O_{12}O_2=$$
$$=2\angle O_{13}O_{12}O_{123}+2\angle O_{123}O_{12}O_{23}=2\angle O_{13}O_{12}O_{23}$$

и $\angle O_{23}O_{123}O_{13}=2\angle O_{13}O_{12}O_{23}$, как вписанный и центральный угол описанной вокруг $O_{12}O_{13}O_{23}$ окружности, опирающиеся на одну дугу; так же доказывается, что $O_1O_3=O_{23}O_{12}$ и $O_2O_3=$ $=O_{13}O_{12}$]. Из того, что $\triangle O_1O_2O_3=\triangle O_{23}O_{13}O_{12}$ и окружности $S_{23}$, $S_{13}$ и $S_{12}$ пересекаются в одной точке $O_{123}$, уже следует, что и окружности $S_1$, $S_2$ и $S_3$ пересекаются в одной точке.

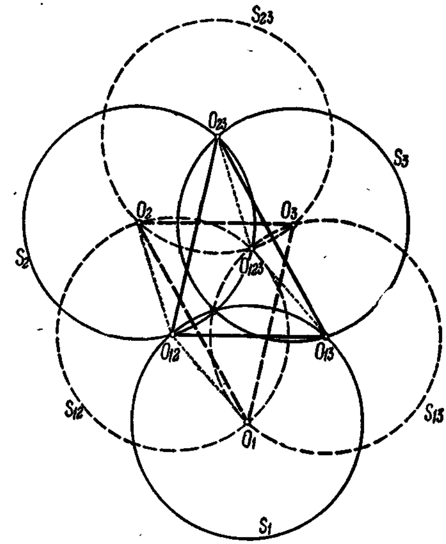


Рис. 79.

26. Решение этой задачи можно найти в книге И. М. Яглома, указанной выше (см. решение задачи 52 в)).

27. Теорема о прямой Симпсона точки $P$ относительно треугольника $A_1A_2A_3$ широко известна; доказательство ее вытекает, например, из того, что в обозначениях рис. 55 четырехугольники $PA_1MK$, $PLA_2K$ и $PMA_3L$ вписываются в окружность, в силу чего $\angle A_1KM=$ $=\angle A_1PM$, $\angle A_2KL=$ $=\angle A_2PL$ и $\angle MPL=$ $=180^\circ-\angle A_3=\angle A_1PA_2$, откуда вытекает, что $\angle A_1KM=\angle A_2KL$.

Полное решение задачи 27, а также другие решения задач 22—26 можно найти в § 8 книги И. М. Яглома «Комплексные числа», Физматгиз, М., 1963.

**28.** Решение этой задачи близко к решению примера 23.

**29.** См., например, указанную на стр. 141 книгу И. М. Яглома, стр. 53—65. Заметим, что ортоцентры вписанных в окружность многоугольников обладают рядом свойств, близких к свойствам ортоцентров треугольников; ряд таких свойств, доказывать которые по необходимости приходится методом математической индукции (ибо ортоцентр многоугольника определяется по индукции), указан в названной книге И. М. Яглома.

**30.** Доказательства сформулированных здесь предложений можно найти в книге Д. О. Шклярского и др., указанной на стр. 140 (см. решение задачи 125), и в книге И. М. Яглом, Геометрические преобразования, II, М., Гостехиздат, 1956 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 8) (см. решение задачи 218 а)).

**31.** Доказательства сформулированных здесь предложений совершенно аналогичны доказательствам предложений, составляющих содержание задачи 30.

**32.** Доказательства предложений, составляющих содержание этой задачи, можно найти в указанной в ответе к задаче 30 книге И. М. Яглома (см. решение задачи 218 б)).

**33.** Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. На сколько частей делят прямую $n$ «одномерных окружностей», т. е. $n$ пар точек (см. введение к этому параграфу).

Ответ. $2n$ точек делят прямую на $2n+1$ частей.

А′. Найти число $\Phi_1(n)$ частей, на которое делят окружность $n$ пар точек, расположенных на этой окружности.

Ответ. $\Phi_1(n)=2n$.

Б. Найти число $\Phi_2(n)$ частей, на которые делят плоскость $n$ попарно пересекающихся окружностей.

Решение. Так как $n$ окружностей пересекают $(n+1)$-ю окружность в $n$ парах точек и, следовательно, делят ее на $\Phi_1(n)=2n$ частей (см. п. А′), то $(n+1)$-я окружность пересекает $\Phi_1(n)=2n$ из тех $\Phi_2(n)$ частей, на которые делят плоскость $n$ окружностей. Отсюда получаем равенство $\Phi_2(n+1)=\Phi_2(n)+\Phi_1(n)=\Phi_2(n)+2n$. Используя это равенство и то, что $\Phi_2(1)=2$, будем иметь: $\Phi_2(n)=n^2-n+2$.

Б′. На сколько частей делят сферу $n$ попарно пересекающихся окружностей, расположенных на этой сфере?

Ответ. На $\Phi_2(n)=n^2-n+2$ частей.

В. Исходная задача.

Решение. Так как $n$ сфер пересекают $(n+1)$-ю сферу по $n$ окружностям и, следовательно, разбивают ее поверхность на $\Phi_2(n)=n^2-n+2$ частей (см. пункт Б′), то если $n$ попарно пересекающихся сфер разбивают пространство на $\Phi_3(n)$ частей, то $n+1$ сфер разобьют пространство на $\Phi_3(n+1)=\Phi_3(n)+\Phi_2(n)=\Phi_3(n)+(n^2-n+2)$ частей. Отсюда и из того, что $\Phi_3(1)=2$, можно найти $\Phi_3(n)=\dfrac{n(n^2-3n+8)}{3}$.

**34.** Доказательство аналогично доказательству утверждения примера 28.

**35.** Рассмотреть последовательно следующие задачи.

А. В условиях примера 26 А будем различать отрезки 1 2, для которых направление от вершины 1 к вершине 2 совпадает с направлением от 1 к 2 для основного отрезка, и отрезки 1 2, для которых направление от 1 к 2 противоположно направлению основного отрезка. Доказать, что число первых отрезков на единицу больше, чем число вторых.

Б. Будем говорить, что треугольник 1 2 3 (см. пример 26 Б) ориентирован по часовой стрелке (или против часовой стрелки), если обход его вершин от вершины 1 к вершине 2 и затем к вершине 3 происходит по часовой стрелке (или против часовой стрелки). Доказать, что число треугольников разбиения, занумерованных цифрами 1, 2, 3 и ориентированных так же, как и основной треугольник, ровно на единицу больше числа остальных треугольников разбиения, занумерованных цифрами 1, 2, 3.

В. Предложение, сформулированное в начале условия задачи.

**36.** Доказать соответствующее предложение для «шаровых многогранников», т. е. тел, каждое из которых является пересечением конечного числа шаров. Доказательство этого предложения проводится аналогично доказательству утверждения примера 30.

**37.** Показать прежде всего, что любые три из этих точек можно заключить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Затем построить круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центром в каждой из заданных точек и показать, что любые три из этих кругов пересекаются. Общая точка всех этих кругов, существующая в силу результата примера 29 Б, и будет центром круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$, содержащего все заданные точки.

**38.** Доказательство аналогично решению задачи 37.

**39.** Пусть в пространстве задана некоторая конечная система лучей, попарно образующих между собой тупые углы, причем предположим, что эта система является максимальной в том смысле, что не существует ни одного луча, который с каждым из заданных лучей образует тупой угол. Отнесем каждому лучу полупространство, ограниченное плоскостью, перпендикулярной к этому лучу, и расположенное от нее по ту же сторону, что и луч. Ввиду максимальности нашей системы лучей эти полупространства заполняют все пространство, и наше утверждение следует из результата примера 31.

**40.** Воспользоваться тем, что центр тяжести треугольника делит медианы в отношении 2:1 (ср. пример 22).

## СОДЕРЖАНИЕ

Цена 24 коп.