Н. Я. Виленкин
О. С. Ивашев-Мусатов
С. И. Шварцбурд

ФГОС

Алгебра

и начала математического анализа

УЧЕБНИК

Углублённый уровень

10

Издательство МНЕМОЗИНА

МАТЕМАТИКА: Алгебра и начала математического анализа □ Геометрия

МАТЕМАТИКА: Алгебра и начала математического анализа □ Геометрия

Н. Я. Виленкин
О. С. Ивашев-Мусатов
С. И. Шварцбурд

АЛГЕБРА

и начала математического анализа

10 класс

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных организаций

Углублённый уровень

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

18-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2014

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6
В44

Рецензент кандидат физико-математических наук *А. Я. Блох*

Виленкин Н. Я.
В44 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углублённый уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. — 18-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2014. — 352 с. : ил.

ISBN 978-5-346-02765-2

Учебник соответствует требованиям Федерального государственного стандарта среднего образования и предназначен для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10-м классе на углублённом уровне.

В учебнике выделены типовые задачи для подготовки учащихся к Единому государственному экзамену, предложены алгоритмы их выполнения и варианты заданий для самоконтроля, реализованы современные подходы к формированию проектно-исследовательских умений и ИКТ-компетенций. Темы индивидуальных проектов, предложенные в учебнике, входят в базовое академическое образование по экономике.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6

Учебное издание

Виленкин Наум Яковлевич, **Ивашев-Мусатов** Олег Сергеевич, **Шварцбурд** Семён Исаакович

МАТЕМАТИКА:
алгебра и начала математического анализа, геометрия

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
10 класс

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных организаций
(углублённый уровень)

Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 5380.

Издательство «Мнемозина».
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.
Тел.: 8 (495) 783 8284, 783 8286.
www.shop.mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Ульяновский Дом печати».
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ISBN 978-5-346-02765-2

Предисловие

Данная книга предназначена для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10-м классе на углубленном уровне. Ее можно использовать и для обучения в колледжах, готовящих к работе по профессиям, требующим повышенного знания математики. Наконец, она пригодна и для самостоятельного изучения курса математики. Заметим, что излагаемый в книге материал по объему несколько больше, чем предусмотрено Фундаментальным ядром содержания общего образования и требованиями ФГОС среднего общего образования. Соответствующие пункты отмечены звездочкой или набраны петитом. Они могут быть использованы для элективных курсов или курсов по выбору.

Учитывая, что изложение алгебры в 7—9-м классах было по необходимости не вполне строгим, авторы сочли полезным осветить и ряд ранее изучавшихся тем на более высоком теоретическом уровне. В соответствующих пунктах даются полные и строгие доказательства утверждений, принимаемых в курсе алгебры без доказательства или с неполными доказательствами. Изучение этих вопросов позволит как повторить пройденный материал, так и повысить уровень развития логического мышления учащихся.

Большинство задач учебника способствует подготовке учащихся к итоговой аттестации на достаточно высоком уровне. Задания, отмеченные звездочкой, предназначены для учащихся, желающих достичь высоких личностных результатов в предметной области «Математика».

Книга состоит из шести глав. Каждая глава разбита на параграфы, а параграфы на пункты. Ссылка на формулы (3) п. 4 означает, что речь идет о пункте того же параграфа, а ссылка на формулу (3) п. 4 параграфа 2 означает, что речь идет о материале той же главы.

При изучении уравнений и неравенств основное внимание уделено общим методам решения. Стремление к повышенному уровню строгости сочетается в книге с использованием наглядных иллюстраций рассматриваемых понятий там, где это полезно. Большое внимание уделяется приложениям математики как к вопросам вычислений, так и к задачам физики, экономики, социологии, что способствует достижению метапредметных результатов обучения.

В школах с углубленным изучением математики анализ естественно основывать на понятиях предела и непрерывности.

Мы сочли целесообразным начать с понятия предела функции на бесконечности, а лишь потом рассматривать предел в точке. Предел последовательности рассматривается как частный случай предела на бесконечности. Соответствующий материал может быть использован и при изучении ряда вопросов Примерной программы по математике основного общего образования для 8-го и 9-го классов школ с углубленным изучением математики и ее приложений.

Авторы выражают благодарность за сделанные замечания В. Р. Болотину, М. Л. Галицкому, Б. М. Давидовичу, Р. К. Гордину.

С целью организации самоконтроля знаний учащихся в Приложении приведены работы для самопроверки. Так же в Приложении даны примерные темы для исследовательской и проектной деятельности.

ГЛАВА 1 Числа и координаты

§ 1. Действительные числа

1. Действительные числа и бесконечные десятичные дроби. Применение математических методов для решения практических задач опирается на две основные операции: *счет* и *измерение*. При пересчете элементов конечных множеств получаются *натуральные числа*. Результаты измерений часто выражаются *дробями*. Например, если отрезок CD можно разбить на m отрезков, каждый из которых равен n-й доле единичного отрезка AB (рис. 1), то его длина выражается дробью $\frac{m}{n}$. В этом случае пишут

$$CD = \frac{m}{n}.$$

Длину любого отрезка можно с любой степенью точности выразить *положительным рациональным числом* (т. е. числом, представимым в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа). Но в теоретических исследованиях появляются отрезки, длины которых нельзя выразить такими числами.

П р и м е р 1. Покажем, что длину диагонали единичного квадрата (т. е. квадрата со стороной, равной 1) нельзя выразить никаким рациональным числом.

Р е ш е н и е. По теореме Пифагора имеем (рис. 2) $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Предположим, что AC можно записать в виде несократимой дроби $AC = \frac{m}{n}$. Тогда имеем $\frac{m^2}{n^2} = 2$, откуда $m^2 = 2n^2$,

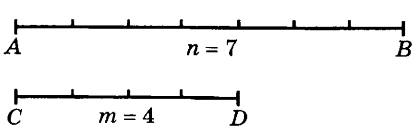


Рис. 1

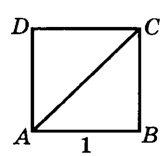


Рис. 2

а потому квадрат натурального числа m четен. Поскольку квадрат любого нечетного числа нечетен, то m должно быть четным числом, т. е. $m = 2k$. Отсюда следует, что $4k^2 = 2n^2$, откуда $2k^2 = n^2$. Это равенство показывает, что квадрат числа n четен, а потому n тоже четное число: $n = 2l$. Но тогда m и n делятся на 2, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Полученное противоречие показывает, что длина отрезка AC не выражается никаким рациональным числом.

Таким образом, чтобы можно было выражать числами длины любых отрезков, надо расширить совокупность $\boldsymbol{Q}_+$ положительных рациональных чисел, присоединив к ней новые элементы, которые называют иррациональными числами. С этой целью заметим, что при измерении отрезков возможны два случая:

а) длина измеряемого отрезка выражена *конечной десятичной дробью* $N,n_1...n_k$ (например, 4,806);

б) длина измеряемого отрезка не может быть выражена конечной десятичной дробью.

В случае б) длину отрезка можно измерять со все возрастающей точностью. Если обозначить через α_k приближенное значение длины α отрезка с точностью до $\frac{1}{10^k}$ по недостатку, то десятичные дроби $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k, ...$ будут иметь вид:

$$\alpha_0 = N;\ \alpha_1 = N,n_1;\ \ \alpha_2 = N,n_1n_2;\ ...\ ;$$
$$\alpha_k = N,n_1...n_k;\ ...\ . \tag{1}$$

Здесь N является натуральным числом или нулем, а $n_1, n_2...,$ $n_k, ...$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например, при измерении длины диагонали единичного квадрата получаем последовательно числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... .

Вместо бесконечной последовательности (1) десятичных дробей со все возрастающим числом десятичных знаков рассматривают только одну бесконечную десятичную дробь $\alpha = N,n_1...n_k...$ (например, 7,101001000100001...) и говорят, что она обозначает длину данного отрезка. Каждая такая дробь задает последовательность пар конечных десятичных дробей:

$$(N;\ N+1);\ \left(N,n_1;\ N,n_1 + \frac{1}{10}\right);\ ...,$$

$$\left(N,n_1...n_k;\ N,n_1...n_k + \frac{1}{10^k}\right);\ ...\ .$$

Число $\alpha_k = N,n_1...n_k$ (соответственно $\alpha'_k = \alpha_k + \frac{1}{10^k}$) называют *десятичным приближением числа* α *по недостатку* (соответственно *по избытку*) *с точностью до* $\frac{1}{10^k}$.

Любую конечную десятичную дробь $N,n_1...n_k$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби $N,n_1...n_k000...0...$, оканчивающейся «хвостом» из нулей. При этом, например, дроби $0,5 = 0,5000...0...$ соответствует последовательность пар десятичных приближений (0; 1), (0,5; 0,6), (0,50; 0,51), (0,500; 0,501) и т. д. Все приближения по недостатку для этой дроби, начиная со второго, одинаковы: $0,5 = 0,50 = 0,500 = ...$. Рассмотрим теперь бесконечную десятичную дробь 0,499... . Для нее последовательность пар десятичных приближений имеет вид: (0; 1), (0,4; 0,5), (0,49; 0,50), (0,499; 0,500) и т. д. В этом случае совпадают десятичные приближения по избытку, начиная со второго: $0,5 = 0,50 = 0,500 = ...$. Последовательность приближений по недостатку для первой дроби совпадает с последовательностью приближений по избытку для второй дроби. Это означает, что обе дроби выражают длину одного и того же отрезка, которая равна половине длины единичного отрезка, т. е. являются записями одного и того же числа.

Чтобы не обозначать двумя способами одно и то же число, условились не использовать бесконечных десятичных дробей, оканчивающихся «хвостом» из девяток. Такие дроби всегда можно заменить конечной десятичной дробью, заменив девятки нулями и увеличив на 1 цифру, стоящую перед ними. Например, $3,72999...9... = 3,73 = 3,73000...0...$. Итак, введем следующее определение.

Определение 1. *Положительным действительным числом* α называют бесконечную десятичную дробь $N,n_1...n_k...$, не оканчивающуюся последовательностью девяток.

Примерами таких чисел могут служить $5 = 5,0000...$, $\pi = 3,14159...$, $\frac{1}{3} = 0,333...3...$, $\sqrt{2} = 1,41421...$ и т. д.

Число N называют *целой частью* числа $\alpha = N,n_1...n_k\ ...$, а $0,n_1...n_k...$ — его *дробной частью*. Пишут $N = [\alpha]$, $0,n_1...n_k... = \{\alpha\}$. Например, если $\alpha = 14,271503...$, то $[\alpha] = 14$ и $\{\alpha\} = 0,271503...$.

Чтобы выразить изменения величин (их увеличение и уменьшение), кроме положительных действительных чисел нужны отрицательные действительные числа и нуль. Назовем *отрицательным действительным числом* бесконечную десятичную дробь вида $\alpha = -N,n_1...n_k...$. Такое число α называют *противоположным* числу $\beta = N,n_1...n_k...$ и пишут $\alpha = -\beta$, $\beta = -\alpha$.

У числа 0 две десятичные записи: $0,000...0...$ и $-0,000...0...$. Мы будем пользоваться лишь первой. Таким образом, $0 = -0$ — это единственное число, которое противоположно самому себе. Для любого числа α верно равенство $-(-\alpha) = \alpha$.

Числа, противоположные положительным рациональным числам, называют *отрицательными рациональными* числами. Положительные рациональные числа, отрицательные рациональные числа и нуль образуют вместе совокупность $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел. Если число α положительно и $\beta = -\alpha$, то полагают $\beta_k = -\alpha'_k$, $\beta'_k = -\alpha_k$ и называют число β_k (соответственно β'_k) *десятичным приближением числа* β *по недостатку* (соответственно *по избытку*). Далее, если β не является целым числом, полагают $[\beta] = -[\alpha] - 1$ и $\{\beta\} = 1 - \{\alpha\}$. Для целых β полагают $[\beta] = -\alpha$ и $\{\beta\} = 0$. Например, если $\beta = -2{,}71828...$, то $\beta_3 = -2{,}719$, $\beta'_3 = -2{,}718$, $[\beta] = -3$, $\{\beta\} = 1 - 0{,}71828... = 0{,}2817...$. Если $\beta = -3$, то $[\beta] = -3$, $\{\beta\} = 0$.

Положительные действительные числа сравнивают по величине так же, как числа, выражаемые конечными десятичными дробями. Именно, если $\alpha = N{,}n_1...n_k...$ и $\beta = M{,}m_1...m_k...$, то считают, что $\alpha < \beta$ в следующих случаях:

а) $N < M$;

б) $N = M$ и $n_1 < m_1$;

в) $N = M$ и существует такое k, что $n_1 = m_1, \dots, n_k = m_k$, но $n_{k+1} < m_{k+1}$.

Пример 2. Выясним, какое из чисел, π или $\sqrt{10}$, больше.

Решение. Имеем $\pi = 3{,}14159...$, $\sqrt{10} = 3{,}16227...$. Видим, что совпадают целые части и цифры десятых, а цифра сотых больше у $\sqrt{10}$. Значит, $\sqrt{10} > \pi$.

Если α — отрицательное число, а β — положительное число, то считают, что $\alpha < \beta$, $\alpha < 0$ и $0 < \beta$. Если α и β — отрицательные числа, то $\alpha < \beta$ в том и только в том случае, когда $-\beta < -\alpha$.

Упражнения

1. Докажите, что нет рационального числа, квадрат которого равен:
   1) 3; 2) 5; 3) 6; 4) 2,1.
2. Докажите, что нет рационального числа, куб которого равен:
   1) 2; 2) 3; 3) 6; 4) 2,1.
3. Докажите, что если a — целое число, не являющееся квадратом целого числа, то оно не является квадратом никакого рационального числа.
4. Докажите, что если a — целое число, не являющееся кубом целого числа, то оно не является кубом никакого рационального числа.
5. Пусть a, b, c — целые числа. При каком условии уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет рациональные корни? Докажите необходимость и достаточность этого условия.
6. Является ли 0 действительным числом?
7. Найдите для следующих чисел их целые и дробные части, приближения по недостатку и по избытку с точностью до 0,0001:
   1) $\pi = 3{,}1415926...$; 2) $-\pi$; 3) $0{,}5189773...$;
   4) $-0{,}5189773...$; 5) $0{,}0063754$; 6) $-0{,}0063754$.

8. Вычислите с помощью микрокалькулятора приближенные значения следующих чисел, найдите их целые и дробные части и приближения по недостатку и по избытку с точностью до 0,0001:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2+\sqrt{7,4}}$; 4) $\sqrt{\sqrt{7,4}-2}$;

5) $\sqrt{3+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt{3+\sqrt{2}}:\pi$.

9. Докажите, что если $\varepsilon > 0$, а k — натуральное число, то при достаточно большом значении n выполняется неравенство $\frac{k}{10^n} < \varepsilon$.

10. Постройте прямоугольники со сторонами 1 и 2 и со сторонами 3 и 2,1. Найдите с помощью микрокалькулятора приближенное значение площади и периметра прямоугольника, стороны которого равны диагоналям этих прямоугольников.

11. Докажите, что если для положительной бесконечной десятичной дроби все приближения по недостатку, начиная с n-го, совпадают, то все цифры дроби, начиная с некоторой (с какой?), — нули.

12. Существует ли наименьшее число, большее 0,52?

13. Каково наибольшее действительное число, меньшее 0,9, в десятичную запись которого не входит цифра 9?

14. Каково наименьшее действительное число, которое больше, чем 7,6, причем в его десятичную запись не входят цифры 0, 1 и 2?

2. Рациональные и иррациональные числа. Любое рациональное число является действительным числом, т. е. может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби. Чтобы получить такую запись для числа $\frac{m}{n}$, надо разделить «уголком» m на n. Например, деля 1 на 3, получаем бесконечную десятичную дробь 0,333...3... . Значит, $\frac{1}{3} = 0,333...3...$. Таким же образом убеждаемся, что $\frac{1}{7} = 0,142857142857...$, а $\frac{8}{45} = 0,1777...$.

В каждом из этих примеров получается десятичная дробь следующего вида: начиная с некоторого места, все время повторяется одна и та же цифра или группа цифр. Например, бесконечная десятичная дробь для записи числа $\frac{1}{3}$ получена повторением цифры 3, для $\frac{1}{7}$ — повторением группы цифр 142857, а для $\frac{8}{45}$ сначала идет цифра 1, а потом все время повторяется цифра 7.

Если бесконечная десятичная дробь, начиная с некоторого места, образована бесконечным повторением некоторой цифры или группы цифр, то ее называют *периодической*. Повторяющуюся цифру, группу цифр называют *периодом* этой дроби, а количество цифр в группе — *длиной периода*. Для дробей $\frac{1}{3}$ и $\frac{8}{45}$ длина периода равна 1, а для дроби $\frac{1}{7}$ она равна 6. Длина периода связана с арифметическими свойствами знаменателя несократимой дроби $\frac{m}{n}$, на которых мы не останавливаемся.

Обычно период дроби пишут один раз, заключая его в скобки: $0{,}333\ldots3\ldots = 0{,}(3)$; $0{,}142857142857\ldots = 0{,}(142857)$; $0{,}1777\ldots7\ldots = 0{,}1(7)$.

Любое рациональное число может быть записано в виде периодической десятичной дроби. Это утверждение достаточно доказать для чисел, записываемых правильными дробями: $r = \frac{m}{n}$, где $0 < m < n$. При делении m на n будут получаться остатки, принимающие значения 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Так как процесс деления бесконечен, то на каком-то месте появится остаток, который уже встречался ранее, и потому начнут повторяться один за другим как остатки, так и десятичные знаки (может случиться, что повторяется цифра нуль — в этом случае число выражается конечной десятичной дробью).

Итак, мы доказали, что *рациональные числа выражаются периодическими десятичными дробями*. Ниже (см. гл. 1, § 1, п. 6) будет доказано обратное утверждение: *любая периодическая десятичная дробь выражает некоторое рациональное число*. Отсюда следует, что действительные числа, не являющиеся рациональными (например, длина диагонали единичного квадрата), выражаются непериодическими десятичными дробями. Такие числа называют *иррациональными*. Другим примером иррационального числа может служить 0,101001000100001...; поскольку число нулей, следующих за единицей, все время возрастает, эта дробь не является периодической. Можно доказать, что иррациональны числа $\sqrt{2}$, π и т. д.

Упражнения

15. Покажите, что следующие числа не являются рациональными: 1) 0,737737773777773... ; 2) −6,56556655566655556666... .

16. Следующие рациональные числа запишите в виде конечных или периодических бесконечных десятичных дробей:

1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{7}{200}$; 3) $\frac{19}{625}$; 4) $-\frac{3449}{3025}$;

5) $\frac{4}{7}$; 6) $\frac{10}{11}$; 7) $\frac{1}{17}$; 8) $\frac{3}{31}$;

9) $\left(8\frac{21}{22} - 11\frac{5}{11}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{17}{12}\right)$;

10) $\left(\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \sqrt[4]{\frac{81}{256}}\right) : \sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2}$.

17. Докажите, что период десятичной дроби, выражающей число $\frac{m}{n}$, не может быть длиннее, чем $n - 1$.

3. Числовые множества и операции над ними. Любую совокупность действительных чисел называют *числовым множеством.* Само множество действительных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Другими примерами числовых множеств могут служить:

а) множество $\boldsymbol{R}_+$ положительных действительных чисел;

б) множество $\boldsymbol{R}_-$ отрицательных действительных чисел;

в) множество $\boldsymbol{Q}_+$ положительных рациональных чисел;

г) множество $\boldsymbol{Q}_-$ отрицательных рациональных чисел;

д) множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел;

е) множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел;

ж) множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел;

з) *числовой луч* $[a; +\infty)$, т. е. множество таких чисел x, что $a \leqslant x$;

и) *числовой луч* $(-\infty; a]$, т. е. множество таких чисел x, что $x \leqslant a$;

к) множество периметров многоугольников, вписанных в данную окружность;

л) множество положительных рациональных чисел, квадрат которых меньше, чем 2.

Определение 1. Числовое множество X называют *ограниченным*, если существует такое число a, что $|x| \leqslant a$ для всех x из X.

Пример 1. Множество периметров правильных многоугольников, описанных около данной окружности, ограничено.

Пример 2. Множество периметров выпуклых многоугольников, вписанных в данную окружность, ограничено.

Если число a принадлежит множеству X, то пишут $a \in X$, а если оно не принадлежит X, то пишут $a \notin X$.

Например, $5 \in \boldsymbol{N}$, но $\frac{3}{4} \notin \boldsymbol{N}$. Числовое множество X называется *частью* или *подмножеством* числового множества Y, если любой элемент из X принадлежит Y. В этом случае пишут: $X \subset Y$ или $Y \supset X$. Например, если $X = [4; +\infty)$, а $Y = [0; +\infty)$, то $X \subset Y$, $Y \supset X$.

Числовые множества, состоящие из нескольких чисел, называют *конечными*. Например, конечно множество натуральных чисел, квадрат которых меньше, чем 15, — оно состоит из чисел 1, 2 и 3. Такое множество обычно обозначают с помощью фигурных скобок $\{1, 2, 3\}$. К конечным множествам относятся множества, состоящие лишь из одного числа, например $\{4\}$, а также *пустое множество*, не содержащее ни одного числа (например, пусто множество натуральных чисел, квадрат которых равен -1). Пустое множество обозначают $\varnothing$. Для любого множества X считают, что $\varnothing \subset X$ и $X \subset X$.

Числовые множества часто задают, указывая общую форму входящих в них чисел или общее свойство всех этих чисел. В этом случае множество записывают в виде

$$\{x \mid P(x)\}, \tag{1}$$

где x обозначает общий элемент множества, а $P(x)$ — свойство, присущее всем элементам множества и только им.

Пример 3. Множество

$$\{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 8\} \tag{2}$$

состоит из действительных чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $3 \leqslant x \leqslant 8$. Множество

$$\{x \mid x = 3n + 1,\ n \in N\} \tag{3}$$

состоит из всех чисел вида $3n + 1$, где n пробегает все множество натуральных чисел. Придавая n последовательно значения 1, 2, 3, ... и вычисляя значения $3n + 1$, получаем множество чисел

$$\{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}.$$

Вместо (3) пишут короче $\{3n + 1 \mid n \in N\}$.

Два различных свойства могут определить одно и то же множество. Например, множества

$$X = \{x \mid x \in N,\ x < 4\} \text{ и } Y = \{x \mid (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}$$

состоят из одних и тех же чисел 1, 2 и 3. Два множества, состоящие из одних и тех же элементов, называют *равными*. Таким образом, в нашем случае множества X и Y равны. Пишут $X = Y$.

Если задано несколько множеств $X_1, \ldots, X_n$, то из них можно получить два новых множества — их общую часть, называемую иначе пересечением данных множеств, и их объединение.

Определение 2. Общей частью (пересечением) множеств $X_1, \ldots, X_n$ называют множество X, состоящее из тех и только тех чисел, которые принадлежат каждому из данных множеств.

Пересечение множеств $X_1, \ldots, X_n$ обозначают $X_1 \cap \ldots \cap X_n$.

Пример 4. Пересечением лучей $(-\infty; b]$ и $[a; +\infty)$ при $a < b$ является множество чисел, для которых выполняется двойное неравенство $a \leqslant x \leqslant b$. Это множество чисел называют *числовым отрезком* с концами a и b и обозначают $[a; b]$. Итак,

$$[a;\ b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Определение 3. *Объединением множеств* $X_1, \ldots, X_n$ называют новое множество X, состоящее из чисел, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств.

Объединение множеств $X_1, \ldots, X_n$ обозначают $X_1 \cup \ldots \cup X_n$.

Пример 5. Объединением отрезков $[1; 6]$ и $[2; 9]$ является отрезок $[1; 9]$. Множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел является объединением множеств $\boldsymbol{Q}_+$ положительных рациональных чисел, $\boldsymbol{Q}_-$ отрицательных рациональных чисел и нуля:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_+ \cup \boldsymbol{Q}_- \cup \{0\}.$$

Аналогично имеем

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_+ \cup \boldsymbol{R}_- \cup \{0\}.$$

Введем еще понятие разности множеств.

Определение 4. *Разностью множеств* X_1 *и* X_2 называют множество X, состоящее из тех чисел множества X_1, которые не принадлежат множеству X_2.

Это множество обозначают $X_1 \backslash X_2$.

Если A — подмножество B, $A \subset B$, то разность $B \backslash A$ называют *дополнением* A в B и обозначают A'_B.

Запись A' обозначает дополнение множества A во всем множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел.

Пример 6. Разностью между числовым отрезком $[a; b]$ и множеством $\{a; b\}$, состоящим из концов этого отрезка, является множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x < b$. Это множество называют *числовым интервалом* с концами a и b. Его обозначают $(a; b)$. Естественно, запись $[a; b)$ обозначает множество чисел x, для которых $a \leqslant x < b$, а запись $(a; b]$ — множество чисел x, для которых $a < x \leqslant b$. Множества чисел $(-\infty; a)$ и $(a; +\infty)$ называют *открытыми числовыми лучами*.

Упражнения

18. Каким из нижеследующих множеств принадлежит число $\frac{8}{11}$:

1) $\boldsymbol{Z}$; 2) $\boldsymbol{N}$; 3) $\boldsymbol{Q}$; 4) $\boldsymbol{Q}_+$; 5) $\boldsymbol{Q}_-$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $\boldsymbol{R}_+$; 8) $\boldsymbol{R}_-$; 9) $[-1; 6]$;

10) $\left[-\frac{8}{11};\ 9\right]$; 11) $[0; +\infty)$; 12) $\left[-6;\ -\frac{8}{11}\right]$?

19. Содержит ли множество $Q \cap [-1; 7)$ числа:

1) $\frac{3}{8}$; 2) -1; 3) 7; 4) $\sqrt{2}$; 5) -12; 6) 19; 7) π; 8) $\frac{\pi}{2\pi}$?

20. Пусть $A = [-2; 8]$, $B = (-4; 11)$, $C = [0; 9)$. Найдите множества:
1) $A \cap B \cap C$; 2) $A \cup B \cup C$; 3) $(A \cup B) \cap C'$; 4) $(A' \cap B) \cup C$.

21. Пусть $A = \{3n - 1 | n \in N\}$, $B = \{5n + 2 | n \in N\}$, $C = \{2n + 1 | n \in N\}$. Найдите множества:
1) $A \cap B$; 2) $A \cap C$; 3) $A \cap B \cap C$; 4) $(A \cap B) \cup C$.

22. Найдите числовые множества:
1) $\{(-1)^n | n \in N\}$; 2) $\{1 + (-1)^n 3 | n \in N\}$.

4. Разделяющее число числовых множеств. Пусть X — множество периметров правильных многоугольников, вписанных в данную окружность, а Y — множество периметров правильных многоугольников, описанных около той же окружности. Так как периметр правильного вписанного многоугольника меньше периметра правильного описанного многоугольника, то для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$. Длина окружности c разделяет множества X и Y — для любых $x \in X$ и $y \in Y$ имеем $x \leqslant c \leqslant y$. Введем следующие определения.

Определение 1. Пусть X и Y — непустые числовые множества. Множество Y называют *расположенным справа от* X, если для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$.

Определение 2. Пусть X и Y — непустые числовые множества. Число c *разделяет* эти множества, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняются неравенства $x \leqslant c \leqslant y$.

Если существует число c, разделяющее X и Y, то Y лежит справа от X. Например, отрезки $[1; 4]$ и $[6; 8]$ разделяются числом 5 и отрезок $[6; 8]$ лежит справа от отрезка $[1; 4]$. Справедливо обратное утверждение.

Теорема 1. *Если множество Y лежит справа от множества X, то существует хотя бы одно число, разделяющее эти множества.*

Доказательство этой теоремы мы представим в виде следующих задач, которые читателю предлагается решить самостоятельно.

1. Пусть все числа множества Y неотрицательны. Обозначим через c число $M,m_1...m_k...$, где M — наименьшее из целых чисел, для которых промежуток $[M; M + 1)$ содержит точки из Y, ..., m_k — наименьшее из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, для которых промежуток $\left[M,m_1...m_k; M,m_1...m_k + \frac{1}{10^k}\right)$ содержит точки из Y. Докажите, что число c не может кончаться последовательностью девяток.

2. Докажите, что построенное число c разделяет множества X и Y.

3. Докажите существование разделяющего числа для случая, когда среди чисел из Y есть отрицательные числа.

Выясним теперь, при каком условии множества X и Y разделяются лишь одним числом. Назовем *разноцветным* отрезок $[a; b]$, содержащий как точки множества X, так и точки множества Y.

Теорема 2. *Пусть множество Y лежит справа от множества X. Для того чтобы они разделялись лишь одним числом, необходимо и достаточно, чтобы существовали разноцветные отрезки сколь угодно малой длины* (т. е. множества X и Y сколь угодно близко примыкали друг к другу).

Доказательство. Предположим, что множества X и Y разделяются двумя числами c и d, где $c < d$. Не теряя общности, можем считать эти числа рациональными (в противном случае надо заменить c его достаточно точным рациональным приближением по избытку, а d — по недостатку). Так как любой разноцветный отрезок должен содержать как точки из X, так и точки из Y, то он содержит и отрезок $[c; d]$ (рис. 3), а потому его длина не может быть меньше числа $d - c$. Значит, в случае существования двух разделяющих чисел длины разноцветных отрезков не могут быть сколь угодно малыми.

Рис. 3

Теперь предположим, что множества X и Y разделяются лишь одним числом c. Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем отрезок $[d; e]$ с рациональными концами и такой, что $d < c < e$, причем $e - d < \varepsilon$. Так как c — единственное разделяющее число для X и Y, то на отрезке $[d; c]$ найдется хотя бы одна точка x из X (иначе и точка d разделяла бы X и Y). Аналогично на отрезке $[c; e]$ есть хотя бы одна точка y из Y, так как иначе X и Y разделялись бы и числом e. Итак, на отрезке $[d; e]$ есть как точки из X, так и точки из Y, а потому этот отрезок разноцветен. Поскольку длина этого отрезка меньше, чем ε, то мы доказали, что при единственности разделяющего числа существуют разноцветные отрезки сколь угодно малой длины. Теорема доказана.

Пример 1. Отрезки $[1; 4]$ и $[6; 8]$ разделяются любым числом отрезка $[4; 6]$. Любой разноцветный отрезок не может быть короче отрезка $[4; 6]$, и потому его длина не меньше, чем 2.

Пример 2. Отрезки [1; 4] и [4; 8] разделяются лишь числом 4. Отрезки вида $\left[4 - \frac{1}{n};\ 4 + \frac{1}{n}\right]$ разноцветные и имеют длину $\frac{2}{n}$. При достаточно большом значении n эта длина становится сколь угодно малой.

Упражнения

23. Среди следующих пар множеств найдите такие, для которых одно расположено справа от другого. Для этих пар множеств найдите все разделяющие числа.

1) X — множество десятичных приближений по недостатку числа $\sqrt{5}$, а Y — множество десятичных приближений по избытку числа $\sqrt{3}$.

2) X — множество десятичных приближений по недостатку числа $\sqrt{3}$, а Y — множество десятичных приближений по избытку числа $\sqrt{5}$.

3) X — множество периметров выпуклых многоугольников, вписанных в круг радиуса R, а Y — множество периметров выпуклых многоугольников, описанных около того же круга.

4) X — множество периметров выпуклых многоугольников, вписанных в круг радиуса R, а Y — множество периметров выпуклых многоугольников, описанных около круга радиуса $r < R$.

5) $X = \left\{2 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in N\right\}$, $Y = \left\{2 + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in N\right\}$.

6) $X = \left\{5 - \frac{8}{n} \,\middle|\, n \in N\right\}$, $Y = \left\{6 - \frac{10}{n} \,\middle|\, n \in N\right\}$.

5. Арифметические операции над действительными числами. Если высота треугольника имеет длину 5 см и делит основание треугольника на отрезки, равные 2 и 7 см, то периметр треугольника выражается числом $9 + \sqrt{29} + \sqrt{74}$. Таким образом, для вычисления этого периметра надо уметь складывать иррациональные числа. В этом пункте будут даны определения действий над любыми действительными числами.

Определение 1. Суммой действительных чисел x и y называется число $x + y$, разделяющее множество X сумм вида $x_n + y_n$ и множество Y сумм вида $x'_n + y'_n$.

Здесь, как обычно, x_n (соответственно x'_n) — десятичные приближения числа x по недостатку (соответственно по избытку), а y_n и y'_n имеют тот же смысл для числа y. Так как при любых m и n имеем $x_m \leqslant x \leqslant x'_n$ и $y_m \leqslant y \leqslant y'_n$, то $x_m + y_m \leqslant x'_n + y'_n$, и потому Y расположено справа от X. По теореме 1 п. 4 существует хотя бы одно число, разделяющее множества X и Y. Это число однозначно определено. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $\frac{2}{10^n} < \varepsilon$, а

$$(x'_n + y'_n) - (x_n + y_n) = (x'_n - x_n) + (y'_n - y_n) = \frac{2}{10^n}.$$

Это показывает, что существуют разноцветные отрезки сколь угодно малой длины, а потому X и Y разделяются лишь одним числом.

Разность $x - y$ определим как сумму $x + (-y)$.

Определение 2. *Произведением* положительных действительных чисел x и y называется число xy, разделяющее множество X произведений $x_n y_n$ и множество Y произведений $x'_n y'_n$.

Как и в случае суммы устанавливаем, что Y расположено справа от X и потому требуемое разделяющее число существует. Оно определено однозначно. В самом деле, $x_n < [x] + 1$, $y_n < [y] + 1$, $\frac{1}{10^n} < 1$, а потому

$$x'_n y'_n - x_n y_n = \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)\left(y_n + \frac{1}{10^n}\right) - x_n y_n =$$

$$= \frac{1}{10^n}\left(x_n + y_n + \frac{1}{10^n}\right) \leqslant \frac{[x] + [y] + 3}{10^n}.$$

Но при достаточно большом значении n дробь $\frac{[x] + [y] + 3}{10^n}$ принимает сколь угодно малые значения, а потому и разность $x'_n y'_n - x_n y_n$ может быть сделана сколь угодно малой.

Для чисел произвольных знаков и нуля произведение определяется известным образом: $(-x)y = x(-y) = -xy$, $(-x)(-y) = xy$, $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Определение 3. Числом, *обратным* положительному числу x, называется число $\frac{1}{x}$, разделяющее множество X чисел вида $\frac{1}{x'_n}$ и множество Y чисел вида $\frac{1}{x_n}$ (при $x_n \neq 0$).

Так как $0 < x_n \leqslant x < x'_m$, то $\frac{1}{x'_m} < \frac{1}{x_n}$, и потому Y расположено справа от X. Значит, существует число, разделяющее X и Y. Оно однозначно определено. В самом деле, пусть x_k — первое ненулевое приближение числа x по недостатку. Тогда при $n > k$ имеем $x_n \geqslant x_k > 0$ и

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x'_n} = \frac{x'_n - x_n}{x_n x'_n} = \frac{1}{10^n x_n x'_n} < \frac{1}{10^n x_k^2},$$

а при достаточно больших значениях n дробь становится сколь угодно малой.

Частным от деления x на y называют произведение $x \cdot \frac{1}{y}$. Его обозначают $\frac{x}{y}$. При $x > 0$, $y > 0$ полагают:

$$\frac{x}{-y} = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}, \qquad \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{0}{x} = \frac{0}{-x} = 0.$$

Введенные арифметические операции обладают свойствами, известными для соответствующих операций над рациональными числами:

1) $x + y = y + x$;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) $x + 0 = x$;
4) $x + (-x) = 0$;

1′) $xy = yx$;
2′) $x(yz) = (xy)z$;
3′) $x \cdot 1 = x$;
4′) $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, $x \neq 0$.

5) $x(y + z) = xy + xz$.

Из этих свойств, лежащих в основе всей школьной алгебры, вытекают остальные свойства операций над числами. В частности, из них вытекает, что равенство $xy = 0$ может иметь место, лишь если $x = 0$ или $y = 0$.

Легко показать, что отношение порядка в множестве $\boldsymbol{R}$ связано с арифметическими операциями в $\boldsymbol{R}$ известными свойствами:

а) *$a < b$ в том и только в том случае, когда $b - a > 0$;*

б) *ни для одного числа a не выполняется неравенство $a < a$;*

в) *если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;*

г) *для любых двух чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений $a = b$, $a < b$, $b < a$;*

д) *если $a < b$, то $a + c < b + c$; если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;*

е) *если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$; если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;*

ж) *если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$;*

з) *если $a < b$, то $-b < -a$;*

и) *если $0 < a < b$, то $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$;*

к) *для любого действительного числа a найдется такое целое число b, что $b \leqslant a < b + 1$.*

Модулем числа α называют такое число $|\alpha|$, что

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha, \text{ если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Из определения операций над действительными числами вытекают следующие свойства модуля:

а) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

в) $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$;

б) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

г) $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

Докажем, например, свойство а). Если a и b имеют одинаковые знаки, то модуль их суммы равен сумме их модулей (и имеет тот же знак, что слагаемые). В этом случае $|a + b| = |a| + |b|$. Если же a и b имеют различные знаки, то модуль числа $a + b$ равен разности большего и меньшего из их модулей, а потому меньше суммы этих модулей. В этом случае $|a + b| < |a| + |b|$. Наконец, если хотя бы одно из чисел a, b равно нулю, равенство $|a + b| = |a| + |b|$ очевидно. Таким образом, во всех случаях имеем $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Обозначая в неравенстве а) $a + b = c$, получаем, что $|c| \leqslant |c - b| + |b|$, т. е. $|c - b| \geqslant |c| - |b|$.

Упражнения

24. Запишите с помощью знака модуля следующие неравенства:
1) $-3 < x < 3$; 3) $-4 < x + 1 < 4$; 5) $-3 \leqslant x \leqslant 5$;
2) $-7 \leqslant x \leqslant 7$; 4) $-5 < x < 3$; 6) $-8 \leqslant x - 1 \leqslant 4$.

25. Решите неравенства:
1) $|x - 4| < 5$; 6) $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$;
2) $|x + 3| \geqslant 2$; 7) $|x^2 - 12x| > x^2 - 12x$;
3) $|x| < x + 1$; 8) $|x + 2| + |x - 2| \geqslant 12$;
4) $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$; 9) $|x - 4| + |x + 4| \leqslant 10$;
5) $|x^2 - 5| > 2$; 10) $\big||3 - x| - 2\big| \leqslant |x - 1|$.

26. Решите уравнения:
1) $|2x + 3| = x^2$; 3) $|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$;
2) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$; 4) $\big||x^2 + 2x + 5| + |x - 5|\big| = x^2 + 3x$.

27. 1) Докажите свойства а) — и), с. 18.
2) Докажите равенства:
$\dfrac{c}{b} \cdot b = c\ (b \neq 0)$; $\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}\ (ab \neq 0)$; $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}\ (bd \neq 0)$;
$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}\ (bd \neq 0)$.
3) Докажите свойства модуля б) — г).

28. Число α иррационально. Докажите, что число $\dfrac{1}{\alpha}$ тоже иррационально.

29. 1) Укажите два иррациональных числа, сумма которых рациональна.
2) Укажите два разных иррациональных числа, произведение которых рационально.

30. Пусть числа α и β иррациональны, r рационально. Какие из следующих чисел могут принимать рациональные значения:
1) $\alpha + \beta$; 3) $\alpha + r$; 5) $\sqrt{r}$; 7) $\sqrt{\alpha + \beta}$; 9) $\sqrt{\alpha + \sqrt{r}}$?
2) $\alpha\beta$; 4) αr; 6) $\sqrt{\alpha}$; 8) $\sqrt{\alpha + r}$;

31. Докажите, что следующие числа являются иррациональными:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{4 - \sqrt{5}}$; 5) $3 - \sqrt[6]{5}$;

2) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; 4) $\sqrt[3]{7}$; 6) $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{2}$.

Найдите для этих чисел целые и дробные части, приближения по недостатку и по избытку с точностью до 0,0001.

32. Для определения длины окружности и площади круга измерили длину радиуса $R = 5{,}689 \pm 0{,}001$ см. С какой точностью имеет смысл выбрать значение π? В каких границах лежат ответы?

33. Период T качания маятника связан с его длиной l формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где считают, что ускорение земного тяготения g равно 9,81 м/с^2. Найдите длину маятника, если он совершил 1000 полных качаний за 3625 с. С какой точностью надо брать значение π? Какова максимальная ошибка измерения длины?

6. Обращение периодических десятичных дробей в обыкновенные. Операция умножения действительных чисел на 10, 100, 1000 и т. д. выполняется так же, как и для конечных десятичных дробей, — путем переноса запятой. Пользуясь этим замечанием, легко обратить любую периодическую дробь в обыкновенную.

Обратим, например, в обыкновенную дробь периодическую дробь $x = 0{,}(246) = 0{,}246246246\ldots$. Если умножить эту дробь на 1000, то получим, что $1000x = 246{,}246246\ldots = 246 + x$. Отсюда находим, что $999x = 246$ и потому

$$x = \frac{246}{999} = \frac{82}{333}.$$

Десятичная дробь 0,00(246) в 100 раз меньше, чем 0,(246), и потому $0{,}00(246) = \frac{246}{99\,900}$. Дробь же 0,78(246) можно записать в виде суммы $0{,}78 + 0{,}00(246)$, и потому она равна $\frac{78}{100} + \frac{246}{99\,900} = \frac{78 \cdot 999 + 246}{99\,900} = \frac{78\,000 + 246 - 78}{99\,900} = \frac{78\,246 - 78}{99\,900}$; после сокращения получаем $0{,}78(246) = \frac{6514}{8325}$.

Предоставляем читателю сформулировать общее правило обращения десятичных периодических дробей в обыкновенные.

Замечание. Десятичная дробь 0,24(9) равна обыкновенной дроби $\frac{249 - 24}{900} = \frac{225}{900} = \frac{25}{100} = 0{,}25$. Вновь убеждаемся, что $0{,}24999\ldots9\ldots = 0{,}25 = 0{,}25000\ldots0\ldots$.

Упражнения

34. Обратите в обыкновенные дроби:

1) 0,(2); 2) 0,(23); 3) 1,(7); 4) 3,5(72).

35. Вычислите:

1) 0,(2) + 0,(3); 2) 0,(2) + 0,(37); 3) 0,(73) − 0,(487);

4) $\dfrac{\left(\frac{2}{3} + 0,(3)\right) : 0,25}{0,12(3) : 0,0925} + 12,5 \cdot 0,32;$

5) $\dfrac{0,725 + \frac{3}{5} + 0,175 + 0,42(6) + 0,12(3)}{0,128 \cdot 6,25 - (0,0345 : 0,12)};$

6) $\dfrac{0,8(5) + 0,17(1)}{0,8(5) - 0,17(1)} + \dfrac{0,8(3) + 0,1(6)}{0,8(3) - 0,1(6)}.$

7*. Степени с натуральными показателями и их свойства. Напомним определение степени с натуральным показателем. Пусть $a \in \boldsymbol{R}$ и $n \in \boldsymbol{N}$. Из сочетательности умножения в $\boldsymbol{R}$ следует, что при любой расстановке скобок в выражении $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n множителей) получится один и тот же результат. Его обозначают a^n и называют *n-й степенью числа a*. Число a называют *основанием степени*, а n — *показателем степени*. В частности, полагают $a^1 = a$.

Из определения степени вытекает, что для любого натурального числа n выполняются равенства

$$0^n = 0 \text{ и } 1^n = 1.$$

Операция возведения в степень с натуральным показателем обладает следующими свойствами:

1) *Если a и b — любые числа и $n \in \boldsymbol{N}$, то*

$$(ab)^n = a^n b^n. \qquad (1)$$

2) *Для любых a, b, где $b \neq 0$, и любого $n \in \boldsymbol{N}$ имеем:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

3) *Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.*

4) *Если a — любое число, отличное от нуля, а m и n — натуральные числа, такие, что $m > n$, то $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.*

Если же $m < n$, то $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$. Наконец, $\dfrac{a^m}{a^m} = 1$.

5) *Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство $(a^m)^n = a^{mn}$.*

6) *Если* $a > 0$, *то при любом натуральном* n *имеем* $a^n > 0$. *Если же* $a < 0$, *то* $a^n > 0$ *при четном* n *и* $a^n < 0$ *при нечетном* n.

7) *Если* $0 < a < b$, *то для любого* $n \in N$ *имеем* $a^n < b^n$.

8) *Если* $a > 0$, $b > 0$ *и* $a^n = b^n$, *то* $a = b$.

Упражнения

36. Выведите из основных законов алгебры (свойств 1) — 5), с. 18) формулы:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;
4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
6) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
7) $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$;
8) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$.

37. Докажите свойства 1) — 8) действий со степенями.

§ 2. Координаты на прямой и на плоскости

1. Величина направленного отрезка. При введении координат на прямой линии приходится учитывать не только длины отрезков, но и их направления. Поэтому введем общее понятие направленного отрезка.

Определение 1. Отрезок, у которого указаны его начало A и конец B, называют *направленным отрезком* и обозначают $\overrightarrow{AB}$.

Отрезок $\overrightarrow{BA}$ (получающийся перестановкой начала и конца отрезка $\overrightarrow{AB}$) называют *противоположным* отрезку $\overrightarrow{AB}$. Пишут $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. «Отрезок» $\overrightarrow{AA}$, начало и конец которого совпадают, называют *нулевым направленным отрезком* и обозначают $\vec{0}$.

Возьмем какую-нибудь прямую l, выберем на ней направление и назовем его положительным. Такую прямую назовем *направленной* и обозначим $\vec{l}$ (рис. 4).

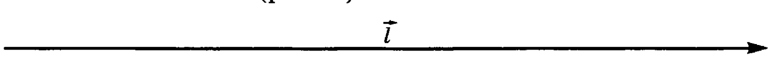


Рис. 4

Определение 2. Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ лежит на направленной прямой $\vec{l}$. *Величиной* этого отрезка называют число $\widetilde{AB}$, модуль которого равен длине AB этого отрезка, а знак положителен, если направления отрезка и прямой совпадают, и отрицателен в противном случае.

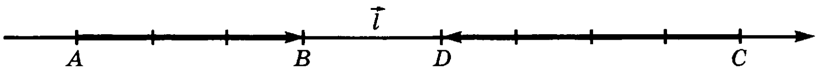


Рис. 5

Например, для отрезка $\overrightarrow{AB}$ на рисунке 5 имеем $\widetilde{AB} = 3$, а для отрезка $\overrightarrow{CD}$ на том же рисунке имеем $\widetilde{CD} = -4$. Отметим, что всегда

$$|\widetilde{AB}| = AB \text{ и } \widetilde{AB} = -\widetilde{BA}. \qquad (1)$$

Если точки A, B, C расположены как на рисунке 6, *а*, то

$$\widetilde{AB} = AB, \ \widetilde{BC} = BC, \ \widetilde{CA} = -CA. \qquad (2)$$

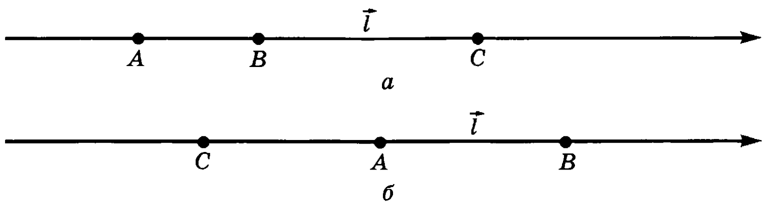


Рис. 6

Поскольку в этом случае $AC = AB + BC$, то выполняется равенство $-\widetilde{CA} = \widetilde{AB} + \widetilde{BC}$, т. е. $\widetilde{AB} + \widetilde{BC} + \widetilde{CA} = 0$. При расположении же точек A, B, C как на рисунке 6, *б*, равенство $AC = AB + BC$ не выполняется, а соотношение $\widetilde{AB} + \widetilde{BC} + \widetilde{CA} = 0$ остается верным.

Теорема Шаля. *Если точки A, B, C лежат на направленной прямой $\vec{l}$, то выполняется равенство*

$$\widetilde{AB} + \widetilde{BC} + \widetilde{CA} = 0. \qquad (3)$$

Доказательство. В случае, когда точки A, B, C расположены как на рисунке 6, *а*, равенство (3) доказано выше. При любой перестановке названий точек выражение $\widetilde{AB} + \widetilde{BC} + \widetilde{CA}$ либо остается неизменным (быть может, с перестановкой слагаемых), либо меняет знак. Отсюда следует, что при любой перестановке букв равенство (3) сохраняет силу. Значит, оно верно для любых точек A, B, C на прямой l.

Заметим, что равенство (3) остается верным и в случае, когда какие-либо из точек A, B, C совпадают.

Замечание. Теорема Шаля обобщается на любое конечное множество точек A_1 ..., A_n направленной прямой:

$$\widetilde{A_1A_2} + \widetilde{A_2A_3} + \ldots + \widetilde{A_{n-1}A_n} + \widetilde{A_nA_1} = 0.$$

Упражнения

38. 1) Изобразите на направленной прямой три отрезка, величина каждого из которых равна 4, и два отрезка, величина каждого из которых равна −4.

2) Проверьте теорему Шаля для точек A, B, C на рисунке 7.

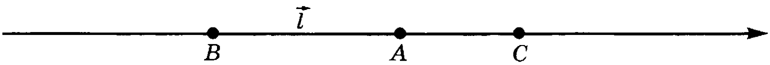


Рис. 7

3) Проверьте обобщенную теорему Шаля для точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 на рисунке 8.

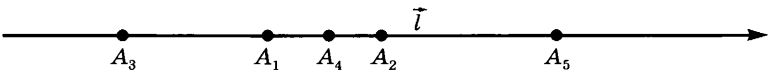


Рис. 8

2. Координаты на прямой линии. Чтобы определить систему координат на прямой линии l, выберем на этой прямой начало координат O, направление, которое примем за положительное (рис. 9), а также выберем единицу измерения длин. Каждой точке M прямой l поставим в соответствие ее *координату*, т. е. число x, равное величине $\widetilde{OM}$ направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$, $x = \widetilde{OM}$. Точку M с координатой x обозначают $M(x)$. Прямую l, на которой выбрана система координат, называют *координатной прямой.*

Рис. 9

Задача 1. Найдем расстояние между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ координатной прямой.

Решение. По теореме Шаля имеем $\widetilde{OM_1} + \widetilde{M_1M_2} + \widetilde{M_2O} = 0$, и потому $\widetilde{M_1M_2} = -\widetilde{M_2O} - \widetilde{OM_1}$. Но по определению координат $-\widetilde{M_2O} = \widetilde{OM_2} = x_2$, $\widetilde{OM_1} = x_1$ и, значит, $\widetilde{M_1M_2} = x_2 - x_1$. Из (1) п. 1 следует, что

$$M_1M_2 = |\widetilde{M_1M_2}| = |x_2 - x_1|. \qquad (1)$$

Пример 1. Найдем на координатной прямой точки, удаленные от точки $M(4)$ на расстояние 7.

Решение. Искомые точки имеют такие координаты x, что $|x - 4| = 7$. Это равенство равносильно тому, что $x - 4 = 7$ или $x - 4 = -7$. В первом случае $x = 11$, а во втором случае $x = -3$. Значит, на расстоянии 7 от точки $M(4)$ находятся точки $N_1(11)$ и $N_2(-3)$ координатной прямой (рис. 10).

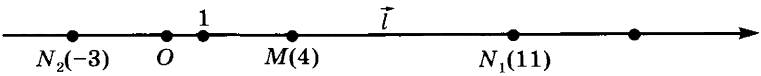


Рис. 10

П р и м е р 2. Изобразим на координатной прямой решение неравенства $|x-4| \leqslant 7$.

Р е ш е н и е. Число $|x-4|$ равно расстоянию от точки $N(x)$ до точки $M(4)$. Так как по условию это расстояние не превосходит числа 7, то искомым множеством является отрезок координатной прямой, заключенный между точками $N_2(-3)$ и $N_1(11)$ (см. пример 1).

Решение многих геометрических и физических задач сводится к делению отрезка в заданном отношении. Например, если массы m_1 и m_2 находятся соответственно в точках A и B, то центр этих масс расположен в такой точке M отрезка AB, что $AM : MB = m_2 : m_1$. Так как направления отрезков $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ совпадают, то справедливо равенство $\widetilde{AM} : \widetilde{MB} = m_2 : m_1$. Введем следующее определение.

Определение 1. Пусть точки A и B лежат на направленной прямой $\vec{l}$. Скажем, что *точка M делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении* λ, если $\widetilde{AM} : \widetilde{MB} = \lambda$.

З а д а ч а 2. Найдем координату точки $M(x)$, делящей в отношении λ отрезок AB, где $A(x_1)$ и $B(x_2)$.

Р е ш е н и е. Мы знаем, что $\widetilde{AM} = x - x_1$, $\widetilde{MB} = x_2 - x$. По условию имеем $\widetilde{AM} : \widetilde{MB} = \lambda$, и потому $(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda$. Решая это уравнение относительно x, получаем, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (2)$$

Если M — середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и тогда

$$x_{\text{сер}} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (3)$$

З а м е ч а н и е. Число $\lambda = \widetilde{AM} : \widetilde{MB}$ положительно, если точка M лежит между точками A и B, и отрицательно в противном случае. Например, точка M на рисунке 11 делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{6}{-3} = -2$, а точка N делит тот же отрезок в отношении $\lambda = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$.

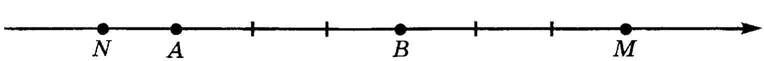


Рис. 11

Как отмечалось выше, центр масс m_1 и m_2, находящихся в точках $A(x_1)$ и $B(x_2)$, делит отрезок AB в отношении $m_2 : m_1$. Подставляя в формулу (2) $\lambda = m_2 : m_1$, получаем, что

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

Можно доказать, что *если массы m_1, ..., m_n помещены соответственно в точках $A_1(x_1)$, ..., $A_n(x_n)$, то центр этих масс находится в точке $M(x)$, где*

$$x = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + \ldots + m_n}. \qquad (5)$$

Пример 3. Точка $C(-1)$ делит отрезок AB, где $B(8)$, в отношении $1 : 3$. Найдем координату x_1 точки A.

Решение. По формуле (2) имеем

$$-1 = \frac{x_1 + \frac{1}{3} \cdot 8}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3x_1 + 8}{4}.$$

Решая это уравнение, находим, что $x_1 = -4$. Значит, $A(-4)$.

Пример 4. Найдем центр масс, равных 3, 1, 2, 4 и помещенных соответственно в точки $A_1(3)$, $A_2(-1)$, $A_3(2)$, $A_4(-8)$.

Решение. По формуле (5) имеем

$$x = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-8)}{3 + 1 + 2 + 4} = -2.$$

Значит, центр масс находится в точке $M(-2)$.

Пример 5. В точках $A(-3)$, $B(3)$ и $C(8)$ координатной прямой приложены силы $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, направленные перпендикулярно этой прямой, которые в условных единицах соответственно равны $F_1 = 5$, $F_2 = -4$, $F_3 = -6$. Найдите координату x точки приложения равнодействующей этих сил (рис. 12).

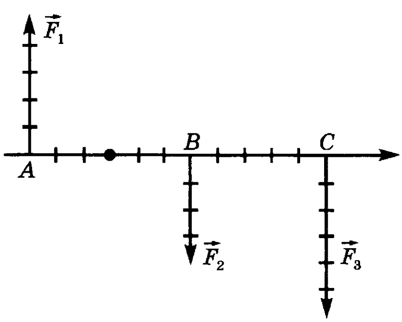


Рис. 12

Решение. Задача также решается по формуле (5), но с учетом знаков этих сил. Поэтому

$$x = \frac{5 \cdot (-3) + (-4) \cdot 3 + (-6) \cdot 8}{5 + (-4) + (-6)} =$$

$$= \frac{-75}{-5} = 15.$$

Упражнения

39. Изобразите на координатной прямой множества:
1) $A = \{x \mid -4 \leqslant x \leqslant 20\}$;
2) $B = \{x \mid -2 < x < 5\}$;
3) $C = \{x \mid |x + 2| \leqslant 3\}$.
Далее изобразите множества:
4) $A \cap B \cap C$; 6) $(A \cap B) \cup C$;
5) $A \cup B \cup C$; 7) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

40. Найдите точки координатной прямой, расстояние которых до точки $A(-4)$ втрое больше их расстояния до точки $B(8)$.

41. Найдите центр масс системы материальных точек A, B, C, D, если $A(-3)$, $B(6)$, $C(8)$, $D(11)$ и массы этих точек соответственно равны 1, 3, 5, 7 кг.

42. Найдите точку приложения равнодействующей для систем сил, изображенных на рисунке 13.

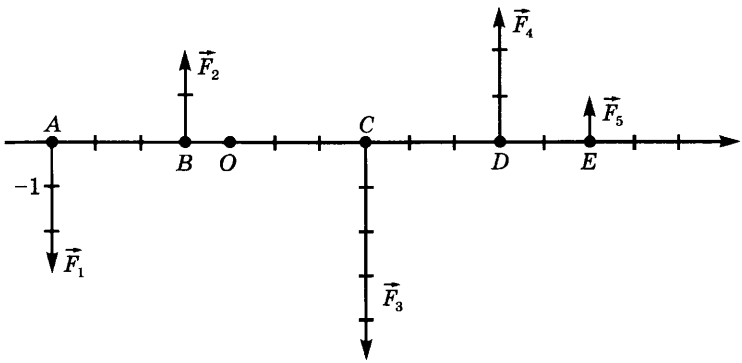


Рис. 13

43. 1) В точках $A(-5)$ и $B(10)$ помещены соответственно заряды в 2 Кл и в 1 Кл. Найдите точку на оси, в которой равнодействующая сил притяжения этих зарядов равна нулю.
2) В точках $A(-6)$ и $B(0)$ помещены соответственно заряды в −4 Кл и в 2 Кл. В какой точке оси действие этих зарядов уравновешивается?

3. Координатная плоскость. Выберем на плоскости две перпендикулярные прямые Ox и Oy, пересекающиеся в точке O, зададим на них положительные направления и установим общую для обеих прямых единицу измерения длин. Каждой точке прямых Ox и Oy соответствует число — координата этой точки (точка O на обеих прямых имеет координату 0). Плоскость xOy называют *координатной плоскостью*, точку O — *началом координат*, прямую Ox — *осью абсцисс* и прямую Oy — *осью ординат*. Углы, на которые оси Ox и Oy делят координатную плоскость, называют *четвертями* (рис. 14).

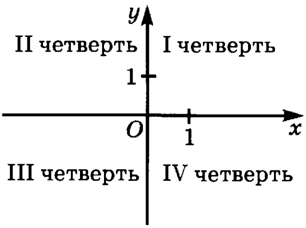


Рис. 14

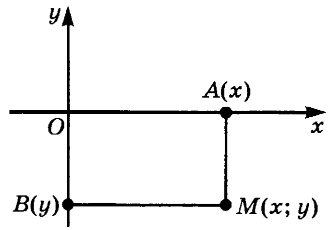


Рис. 15

Возьмем на координатной плоскости любую точку M и опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси абсцисс и ординат (рис. 15). Обозначим через x координату точки A на прямой Ox, а через y — координату точки B на прямой Oy. Тем самым точке M поставлена в соответствие пара чисел $(x; y)$ (записанных именно в этом порядке). Их называют *координатами* этой точки: x — *абсциссой* точки M, а y — ее *ординатой*. Точку M с координатами $(x; y)$ обозначают $M(x; y)$. Соответствие $(x; y) \to M(x; y)$ взаимно однозначно: каждой точке M координатной плоскости соответствует одна и только одна пара координат, а каждой паре чисел $(x; y)$ — одна и только одна точка плоскости, для которой эти числа служат координатами.

Введение координат на плоскости позволяет свести решение многих геометрических задач к решению алгебраических задач.

Задача 1. Найдем расстояние между точками плоскости $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 16).

Решение. Если $x_1 = x_2$, то очевидно, что $M_1M_2 = |y_2 - y_1|$, а если $y_1 = y_2$, то $M_1M_2 = |x_2 - x_1|$. Рассмотрим теперь общий случай, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. В силу теоремы Пифагора $M_1M_2^2 = M_1T^2 + TM_2^2$. Но $M_1T = A_1A_2$, $TM_2 = B_1B_2$, а потому $M_1M_2^2 = A_1A_2^2 + B_1B_2^2$. Поскольку $A_1A_2 = |x_2 - x_1|$, $B_1B_2 = |y_2 - y_1|$, то $M_1M_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Отсюда следует[1], что

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Пример 1. Найдем расстояние между точками $M_1(3; -1)$ и $M_2(7; -4)$.

Решение. По формуле (1) имеем

$$|M_1M_2| = \sqrt{(7 - 3)^2 + (-4 - (-1))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Задача 2. На плоскости заданы точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Найдем точку P, делящую отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda > 0$.

---

[1] Мы пользуемся здесь введенным в 8-м классе понятием квадратного корня. Строгое обоснование этого понятия будет дано в п. 8 § 2 главы 4.

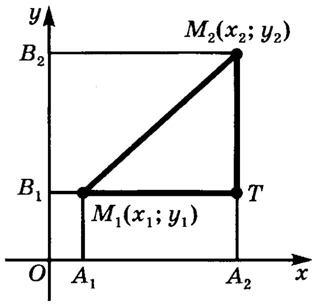


Рис. 16

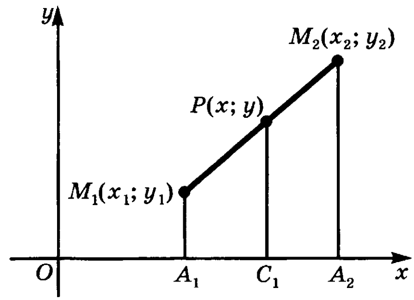


Рис. 17

Решение. Из рисунка 17 видно, что $A_1C_1 : C_1A_2 = M_1P : PM_2$, т. е. что точка C_1 делит отрезок A_1A_2 в том же отношении λ. Но тогда ее абсцисса x равна $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ (см. п. 2). Ту же абсциссу имеет и точка P. Аналогично находим, что ордината точки P равна $\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$. Итак, координаты точки $P(x; y)$ имеют вид:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

Формула (2) верна и при $\lambda \leqslant 0$, $\lambda \neq -1$.

Отметим частный случай этих формул. Если $\lambda = 1$, т. е. если точка P — середина отрезка M_1M_2, то

$$x_{\text{сер}} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_{\text{сер}} = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3}$$

Так же как и для прямой, центр масс системы материальных точек $M_1(x_1; y_1)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$ находится в точке $M(x; y)$, где

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + \ldots + m_n}, \\ y &= \frac{m_1y_1 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + \ldots + m_n} \end{aligned} \tag{4}$$

(через m_k обозначена масса точки M_k).

Пример 2. Найдем центр масс фигуры, изображенной на рисунке 18, считая пластинку однородной.

Решение. Разобьем пластинку на прямоугольники. Центр масс каждого прямоугольника находится в точке пересечения его диагоналей, а массу прямоугольника можно принять равной его площади.

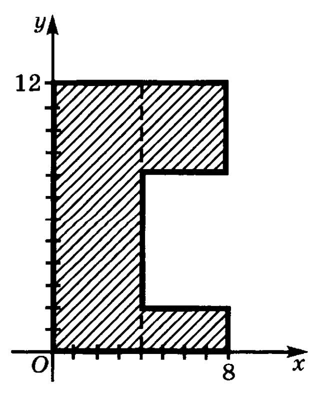


Рис. 18

Тем самым задача свелась к отысканию центра масс трех точек: $A(2;\ 6)$, $B(6;\ 1)$, $C(6;\ 10)$, если их массы соответственно равны 48, 8, 16. По формулам (4) получаем, что

$$x = \frac{2 \cdot 48 + 6 \cdot 8 + 6 \cdot 16}{48 + 8 + 16} = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{6 \cdot 48 + 1 \cdot 8 + 10 \cdot 16}{48 + 8 + 16} = \frac{19}{3}.$$

Упражнения

44. Найдите на оси ординат точку, удаленную на расстояние 5 от точки $A(2;\ -4)$.

45. Дан треугольник ABC, $A(1;\ -4)$, $B(2;\ 6)$, $C(-2;\ 3)$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и AC.

46. Найдите длину средней линии трапеции $ABCD$, зная координаты вершин трапеции: $A(-1;\ 3)$, $B(3;\ 5)$, $C(6;\ 8)$, $D(8;\ 12)$.

47. Докажите, что треугольник ABC, где $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 5)$, $C(3;\ -2)$, прямоугольный.

48. Известны координаты трех вершин квадрата: $A(2;\ -3)$, $B(6;\ 0)$, $C(-1;\ 1)$. Найдите координаты центра квадрата, его четвертой вершины и площадь квадрата.

49. Найдите точку пересечения медиан треугольника ABC, где $A(-2;\ -4)$, $B(3;\ 1)$, $C(5;\ -3)$.

50. Найдите точку пересечения биссектрисы AM треугольника ABC со стороной BC, если $A(-3;\ -2)$, $B(-1;\ 1)$, $C(3;\ 2)$.

51. Найдите центр масс для системы стержней, изображенной на рисунке 19.

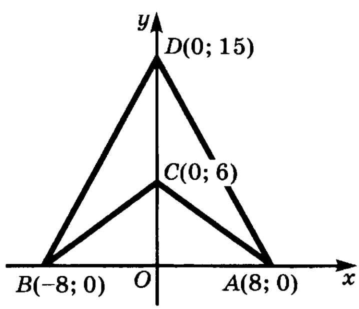


Рис. 19

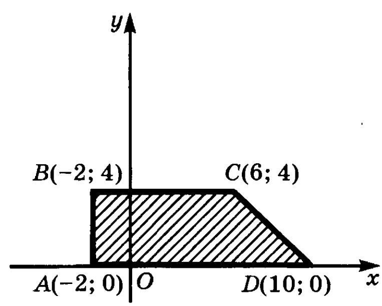


Рис. 20

52. Найдите центр масс фигуры, изображенной на рисунке 20.

53*. В точках $A(-4;\ 8)$, $B(5;\ -2)$, $C(9;\ 6)$ и $D(-3;\ 0)$ координатной плоскости приложены силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, направленные перпендикулярно этой плоскости, которые в условных единицах равны: $F_1 = 5$, $F_2 = -3$, $F_3 = 7$, $F_4 = -6$. Найдите точку приложения равнодействующей этой системы сил.

54. Обозначим через F, d, f соответственно фокусное расстояние линзы и расстояния от линзы до источника света и до изображения. Тогда имеет место равенство $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$.

Определите координату изображения, если $F = 3$, линза находится в точке $A(5;\ 3)$, а источник света в точке $B(1;\ 0)$.

ГЛАВА 2

Рациональные выражения. Уравнения и неравенства с одной переменной

§ 1. Рациональные выражения

1. Выражения и классы выражений. В курсе алгебры 7-го класса изучают различные буквенные выражения, образованные из чисел и букв с помощью операций сложения, умножения и деления (операция вычитания сводится к умножению вычитаемого на -1 и сложению). Там были указаны различные формы упрощения записи выражений, например, замена выражения $(6) + (a)$ на $6 + a$, выражения $(a + b) + c$ на $a + b + c$, применение дробной черты для обозначения деления и т. д.

Сейчас мы рассмотрим некоторые классы таких буквенных выражений и дадим им точные определения.

Определение 1. Одночленами называют:

а) числа; б) буквы; в) выражения вида $(A)(B)$ и $(A) : (B)$, где A и B — одночлены[1].

В современных книгах по алгоритмическим языкам это определение записывают так:

$$\langle\text{одночлен}\rangle ::= \langle\text{число}\rangle \mid \langle\text{буква}\rangle \mid \langle\text{одночлен}\rangle \times \langle\text{одночлен}\rangle \mid$$
$$\mid \langle\text{одночлен}\rangle : \langle\text{одночлен}\rangle.$$

Подобную форму записи определения называют *формой Бекуса*.

Пример 1. Какие из следующих выражений являются одночленами:

1) $\frac{3x}{5y}$; 3) $\frac{(4x^2)^3}{(5y^6)^2}$; 5) $\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{y^2}$;

2) $6x^3 \cdot 5y^2$; 4) $x^2 + 3y^2$; 6) $\frac{x+y}{x-y}$?

---

[1] Здесь и ниже при записи выражений применяются общепринятые сокращения. В частности, записи $(A) : (B)$ и $\frac{A}{B}$ означают одно и то же.

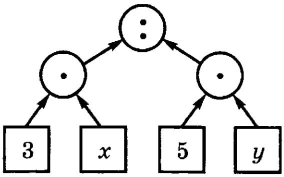


Рис. 21

Решение. 1) Запишем $\frac{3x}{5y}$ в виде $(A) : (B)$, где $A = 3x$, $B = 5y$. Далее, $3x$ запишем в виде $(A_1) \cdot (B_1)$, B — в виде $(A_2) \cdot (B_2)$, где $A_1 = 3$, $B_1 = x$, $A_2 = 5$, $B_2 = y$. Так как 3 — число, то A_1 — одночлен, а так как x — буква, то и B_1 — одночлен. Значит, $3x = (A_1) \cdot (B_1)$ — одночлен. Аналогично одночленом является $5y$. Но тогда и $(A) : (B)$, т. е. $\frac{3x}{5y}$, — одночлен.

Схема «синтаксического разбора» выражения $\frac{3x}{5y}$ изображена на рисунке 21 ($\cdot$ — действие умножения, $:$ — деления).

2) Так как $x^2 = x \cdot x$, а x — буква, то x^2 — одночлен. Но тогда и $x^3 = x^2 \cdot x$ тоже является одночленом. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что для любого натурального n выражение x^n — одночлен (точнее говоря, здесь применяется метод математической индукции, о котором будет рассказано в § 2). Но тогда одночленами являются $6x^3$ и $5y^2$, а значит, и $6x^3 \cdot 5y^2$.

3) Если A — одночлен, то и $A^2 = (A) \cdot (A)$ тоже одночлен. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что при любом натуральном n и A^n является одночленом. Значит, $(4x^2)^3$ и $(5y^6)^2$ — одночлены, а тогда и $\frac{(4x^2)^3}{(5y^6)^2}$ — одночлен.

4) Выражения x^2 и $3y^3$ — одночлены, но $(A) + (B)$ не входит в список форм одночленов. Поэтому $x^2 + 3y^3$ не является одночленом.

Аналогично доказывается, что к числу одночленов не принадлежат $\sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{y^2}$ и $\frac{x+y}{x-y}$.

Определение 2. Целым рациональным выражением (ц. р. в.) называют:

а) числа; б) буквы; в) выражения вида $(A) + (B)$ и $(A) \cdot (B)$, где A и B — ц. р. в.

В форме Бекуса это определение записывается так:

$$\langle \text{ц. р. в.} \rangle ::= \langle \text{число} \rangle \mid \langle \text{буква} \rangle \mid \langle \text{ц. р. в.} \rangle + \langle \text{ц. р. в.} \rangle \mid$$
$$\mid \langle \text{ц. р. в.} \rangle \, \langle \text{ц. р. в.} \rangle.$$

С помощью синтаксического разбора легко убедиться, что $(x^2 + y^2 + z^2)^3 - 6x^3y^3$ и $(x + 2y + 3z)^3 - 6xyz$ — целые рациональные выражения.

Одночлен, являющийся в то же время целым рациональным выражением, называют *целым одночленом*. Легко убедиться, что определение целого одночлена (ц. о.) в форме Бекуса имеет вид

$$\langle \text{ц. о.} \rangle ::= \langle \text{число} \rangle \mid \langle \text{буква} \rangle \mid \langle \text{ц. о.} \rangle \, \langle \text{ц. о.} \rangle.$$

Из одночленов, приведенных в примере 1, целым является $6x^3 \cdot 5y^2$.

Определение 3. *Рациональные выражения* (р. в.) определяются так:

$$\langle \text{р. в.} \rangle ::= \langle \text{число} \rangle \mid \langle \text{буква} \rangle \mid \langle \text{р. в.} \rangle + \langle \text{р. в.} \rangle \mid \langle \text{р. в.} \rangle \langle \text{р. в.} \rangle \mid$$
$$\mid \langle \text{р. в.} \rangle : \langle \text{р. в.} \rangle.$$

Например, $\left(\dfrac{5x^4 - 6y^4 + 9z^4}{x^3 + x^2y + 4z^3}\right)^5 + 8xyz$ — рациональное выражение (убедитесь в этом с помощью синтаксического разбора этого выражения).

Отметим один класс целых рациональных выражений.

Определение 4. *Линейные выражения* (л. в.) определяются в форме Бекуса так:

$$\langle \text{л. в.} \rangle ::= \langle \text{число} \rangle \mid \langle \text{буква} \rangle \mid \langle \text{число} \rangle \langle \text{л. в.} \rangle \mid \langle \text{л. в.} \rangle + \langle \text{л. в.} \rangle.$$

Примером линейного выражения может служить

$$4(3x - 5y + 6z - 11) - 7(2x + 5y + 11z + 9) + 5.$$

Выражение $\dfrac{2x + y + 6}{3x - y - 8}$ не является линейным, хотя его числитель и знаменатель — линейные выражения. Такие выражения называют *дробно-линейными*. Дробно-линейные выражения (д.-л. в.) можно определить так:

$$\langle \text{д.-л. в.} \rangle ::= \langle \text{л. в.} \rangle \mid \langle \text{л. в.} \rangle : \langle \text{л. в.} \rangle.$$

Из данных выше определений видно, какие операции не выводят за рамки того или иного класса выражений. Например, *произведение или частное двух одночленов является одночленом, сумма и произведение двух целых рациональных выражений снова являются целыми рациональными выражениями, а сумма, произведение и частное двух рациональных выражений снова являются рациональными выражениями.* Наконец, *линейная комбинация $a \cdot (A) + b \cdot (B)$ двух линейных выражений снова является линейным выражением.*

Наряду с этими операциями не выводит за рамки соответствующих классов операция замены букв выражениями тех же классов. Например, если в одночлене x^2y^3 заменить букву x одночленом $\dfrac{2x^3}{3y^4}$, а букву y — одночленом $\dfrac{2x}{5y^6}$, то получим выражение $\left(\dfrac{2x^3}{3y^4}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2x}{5y^6}\right)^3$, которое снова является одночленом от x и y. Разумеется, с помощью таких замен можно получить одночлены и от иных переменных.

Заменим в выражении $A(y)$ букву y выражением $B(x)$. Полученное выражение обозначают $A(B(x))$.

Особо важной является операция замены букв числами. Если в выражении от букв x, y, ..., z заменить букву x каким-нибудь числом, то получится выражение от оставшихся букв y, ..., z. Например, заменяя в выражении $(x^2 + y^2)z^2$ букву x на число 5 (т. е. придавая букве x значение 5), получаем выражение $(5^2 + y^2)z^2$ от y и z. Если же каждую букву заменить в данном выражении каким-нибудь числом, получится выражение, не содержащее букв. Такие выражения называются *числовыми*, например $\left(\frac{8,3 + 4,5}{2,3 - 2,4}\right)^2$.

При выполнении действий, указанных в числовом выражении, возможны два случая:

а) все указанные действия возможны;

б) в ходе вычислений получаем невозможную операцию деления на нуль.

В случае а) в результате вычислений получаем число, называемое *числовым значением* данного числового выражения. В случае б) говорят, что *выражение не имеет числового значения*. Например, значением числового выражения $(8^2 + 7^2 + 12) : 25$ является число 5, а выражение $5 : (4 - 4)$ не имеет числового значения.

Пусть $A(x_1, \ldots, x_n)$ — выражение от букв $x_1, \ldots, x_n$. *Значением* этого выражения при $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ называется значение числового выражения $A(a_1, \ldots, a_n)$, получаемого при замене x_1 на $a_1, \ldots, x_n$ на a_n. Если это значение существует, то говорят, что *данное выражение имеет числовое значение* при $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ или что *оно имеет числовое значение в точке* $(a_1, \ldots, a_n)$ (порядок чисел $a_1, \ldots, a_n$ при этом играет существенную роль). Множество упорядоченных наборов чисел $(a_1, \ldots, a_n)$, при которых выражение $A(x_1, \ldots, x_n)$ имеет значение, образует *область существования* этого выражения.

Пример 2. Найдем область существования выражения

$$\frac{8x}{(x + 1)(x - 2)(x - 6)}.$$

Решение. Это выражение не имеет числового значения лишь при значениях x, для которых $(x + 1)(x - 2)(x - 6)$ обращается в нуль, т. е. при $x = -1$, $x = 2$, $x = 6$. Исключая эти значения из множества $\boldsymbol{R}$, получаем числовое множество $\boldsymbol{R}\setminus\{-1; 2; 6\}$. Его записывают также в виде

$$(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; 6) \cup (6; +\infty).$$

Пример 3. Найдем область существования выражения

$$\frac{4}{(x - y)^2}.$$

Решение. Это выражение имеет числовое значение для пар $(a;\ b)$, у которых $a - b$ отлично от нуля, т. е. для пар $(a;\ b)$, где $a \neq b$. Парам вида $(a;\ a)$ соответствуют точки координатной плоскости, у которых абсцисса равна ординате, т. е. точки прямой, делящей пополам первый и третий координатные углы. Исключая эту прямую из координатной плоскости, получаем искомую область.

Упражнения

55. Среди следующих выражений найдите одночлены, целые одночлены, целые рациональные выражения, рациональные выражения, линейные выражения. В каждом случае укажите, от каких букв зависят эти выражения:

1) $\dfrac{x^2yz}{3t}$; 2) $8x^2yz$; 3) $4x^2 - 3x + 8$; 4) $\dfrac{17x^2 - 6x + 3}{5x + 4}$;

5) $(8x + 7y) - 5(2x + y)$.

Для каждого из этих выражений проведите «синтаксический разбор», т. е. объясните, как оно получается из чисел и букв.

56. Среди следующих числовых выражений укажите неверно записанные, а из верно записанных — не имеющие числового значения:

1) $(3 - 8) : (5 - 5)$;
2) $(3 - 8) : (5 - 4$;
3) $(5 + 5 -) \cdot 3$;
4) $(5 - 5) : (3 - 8)$;
5) $(+ - 6) \cdot 7$;
6) $42 :)3{,}7 + 4{,}85 - 9{,}56)$;
7) $84 : (3^3 \cdot 2 - 6 \cdot 9)$;
8) $(9 - \cdot\ 7) : 3)$.

57. Найдите области существования следующих выражений:

1) $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;
2) $\dfrac{8x^2}{6x^2(x^2 - 4)}$;
3) $\dfrac{8}{6(x^2 - 4)}$;
4) $\dfrac{1}{x^2 - 9} + \dfrac{6}{x^2 - 16}$.

58. Найдите значения следующих числовых выражений:

1) $$\frac{(0{,}625 + 2{,}708(3)) : 2{,}5}{(1{,}3 + 0{,}7(6) + 0{,}(36)) \cdot \frac{110}{401}};$$

2) $$\frac{\left(3\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}\right) + \left(1\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{2} + \left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{22}{147}}{\left(2 : 3\frac{1}{5}\right) + \left(3\frac{1}{4} : 13\right) : \frac{2}{3} - \left(2\frac{5}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{18}{65}}.$$

59. Найдите значения следующих выражений при заданных значениях букв:

1) $$\frac{\frac{a - b}{2a - b} - \frac{a^2 + b^2 + a}{2a^2 + ab - b^2}}{(4b^4 + 4ab^2 + a^2) : (2b^2 + a)} \cdot (b^2 + b + ab + a), \quad a = 0{,}55, \quad b = 2{,}05;$$

2) $$\frac{(2p - q)^2 + 2q^2 - 3pq}{\frac{2}{p} + q^2} : \frac{4p^2 - 3pq}{2 + pq^2}, \quad p = 0{,}78, \quad q = \frac{7}{25};$$

3) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}} : \dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \dfrac{ab}{a^2-b^2}$, $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$;

4) $\dfrac{1}{b(abc+a+c)} - \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}} : \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}$, $a = 1{,}385$, $b = 0{,}4(6)$, $c = 0{,}(79)$.

Запишите на алгоритмическом языке алгоритмы программ вычисления этих выражений.

2. Тождественные преобразования целых рациональных выражений. Одной из важных задач школьной алгебры является изучение тождественных преобразований целых рациональных выражений.

Определение. Целые рациональные выражения A и B от $x_1, \dots, x_n$ называются *тождественно равными*, если при замене букв $x_1, \dots, x_n$ любыми числами $a_1, \dots, a_n$ получаются числовые выражения, имеющие одинаковые значения.

Замена выражения тождественно равным ему выражением называется *тождественным преобразованием* выражения.

Пример. Выражения $(x+y)^2$ и $x^2+2xy+y^2$ тождественно равны, так как при любых значениях x и y имеют одинаковые значения.

Тождественные преобразования целых рациональных выражений основаны на тождествах 1) — 5) и 1′) — 3′) п. 5 § 1 главы 1 (тождество 4′ лежит в основе тождественных преобразований дробных выражений, которые будут рассмотрены ниже). Из указанных выше тождеств вытекают следующие формулы тождественных преобразований для выражений:

1) $A + B = B + A$; 1′) $AB = BA$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$; 2′) $(AB)C = A(BC)$;
3) $A + 0 = A$; 3′) $A \cdot 1 = A$.
4) $A + (-A) = 0$;
5) $A(B + C) = AB + AC$.

Например, при $A = x + y$, $B = x^2$, $C = y^2$ получаем из 5) тождество

$$(x+y)(x^2+y^2) = (x+y)x^2 + (x+y)y^2.$$

Отметим еще тождества для степеней и модулей:

6) $(AB)^n = A^nB^n$;
7) $A^mA^n = A^{m+n}$;
8) $(A^m)^n = A^{mn}$;

9) $\frac{A^m}{A^n} = \begin{cases} A^{m-n} & \text{при } m > n, \\ 1 & \text{при } m = n,\ A \neq 0; \end{cases}$

10) $|AB| = |A| \cdot |B|$;

11) $|A^n| = |A|^n$.

Упражнения

60. Докажите тождества:

1) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$;

2) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1$;

3) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1$;

4) $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$.

61. Упростите выражения:

1) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$;

2) $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3$.

62. Докажите тождества:

1) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$;

2) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$;

3) $(a + b + c + d)^2 + (a + b - c - d)^2 + (a + c - b - d)^2 + (a + d - b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$;

4) $(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 2(ab - bc + dc + ad)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(ab - ad + bc + dc)^2$;

5) $(a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 + (c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 = 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$.

63. Докажите, что $a = b = c = d$, если $4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$.

64. Докажите, что $x = y = z$, если

$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2$.

65. Пусть $X = q^3 + 3pq^2 - p^3$, $Y = -3pq(p + q)$, $Z = p^2 + pq + q^2$. Докажите, что $X^2 + XY + Y^2 = Z^3$.

66. Пусть $S = a + b + c$. Докажите, что

$S(S - 2b)(S - 2c) + S(S - 2c)(S - 2a) + S(S - 2a)(S - 2b) =$
$= (S - 2a)(S - 2b)(S - 2c) + 8abc$.

67. Покажите, что если $a + b + c = 0$, то:

1) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;

2) $2(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^4 + b^4 + c^4)$.

§ 2. Метод математической индукции

1. Полная и неполная индукция. В случае, когда математическое утверждение касается конечного числа объектов, его можно доказать, проверяя для каждого объекта. Например, утверждение «каждое двузначное четное число является суммой двух простых чисел» следует из серии равенств:

$10 = 5 + 5$;	$12 = 5 + 7$;	$14 = 7 + 7$;	$16 = 5 + 11$;	$18 = 5 + 13$;
$20 = 7 + 13$;	$22 = 11 + 11$;	$24 = 11 + 13$;	$26 = 13 + 13$;	$28 = 5 + 23$;
$30 = 7 + 23$;	$32 = 3 + 29$;	$34 = 17 + 17$;	$36 = 17 + 19$;	$38 = 19 + 19$;
$40 = 17 + 23$;	$42 = 19 + 23$;	$44 = 3 + 41$;	$46 = 3 + 43$;	$48 = 5 + 43$;
$50 = 7 + 43$;	$52 = 11 + 41$;	$54 = 13 + 41$;	$56 = 3 + 53$;	$58 = 5 + 53$;
$60 = 7 + 53$;	$62 = 31 + 31$;	$64 = 3 + 61$;	$66 = 5 + 61$;	$68 = 7 + 61$;
$70 = 3 + 67$;	$72 = 5 + 67$;	$74 = 7 + 67$;	$76 = 3 + 73$;	$78 = 5 + 73$;
$80 = 7 + 73$;	$82 = 3 + 79$;	$84 = 5 + 79$;	$86 = 7 + 79$;	$88 = 5 + 83$;
$90 = 7 + 83$;	$92 = 3 + 89$;	$94 = 5 + 89$;	$96 = 7 + 89$;	$98 = 19 + 79$.

Метод доказательства, при котором мы проверяем утверждение для конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называют *полной индукцией*. Этот метод применим сравнительно редко, поскольку математические утверждения касаются, как правило, не конечных, а бесконечных множеств объектов. Например, доказанное выше полной индукцией утверждение о четных двузначных числах является лишь частным случаем утверждения: «любое четное число является суммой двух простых чисел», которое до сих пор не доказано и не опровергнуто. Однако выдающийся отечественный ученый, дважды Герой Социалистического Труда академик И. М. Виноградов доказал, что каждое достаточно большое нечетное число является суммой трех простых чисел (а значит, всякое достаточно большое четное число — суммой четырех простых чисел). Но найденная им граница, начиная с которой выполняется утверждение теоремы, настолько велика, что проверить его для чисел, меньших этой границы, с помощью полной индукции невозможно даже при использовании самой быстродействующей вычислительной техники.

В естественных науках (физике, химии, биологии) применяют *неполную индукцию*: проведя эксперимент несколько раз, переносят полученные результаты на все случаи. Однако, если бы мы даже проверили утверждение о разложимости четного числа в сумму двух простых чисел для первого миллиарда четных чисел (это можно сделать с помощью ЭВМ), полученный результат лишь укрепил бы нашу уверенность в справедливости теоремы, но ни на шаг не приблизил бы нас к ее доказательству. Ведь речь идет о справедливости утверждения для всех четных чисел, а таких чисел бесконечно много.

Тем не менее разбор конечного числа случаев играет важную роль в математике: не давая доказательства того или иного утверждения, он помогает угадать правильную формулировку этого утверждения, если она еще неизвестна. Именно так член Петербургской академии наук Гольдбах пришел к гипотезе, что любое натуральное число, начиная с двух, является суммой не более чем трех простых чисел.

Пример. Угадаем с помощью неполной индукции формулу для суммы кубов первых n натуральных чисел.

Решение. Мы имеем: $1^3 = 1$; $1^3 + 2^3 = 9$; $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$. Но $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $36 = 6^2$, $100 = 10^2$. Осталось сообразить, что представляет собой последовательность чисел 1, 3, 6, 10, ... Но $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Мы приходим таким образом к гипотезе, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Если вспомнить формулу для суммы арифметической прогрессии, то эту гипотезу можно записать следующим образом:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (1)$$

Доказательство справедливости формулы (1) будет дано ниже.

Сумма $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ состоит из n слагаемых, причем k-е слагаемое равно k^3. Принято записывать такую сумму в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$, где $\sum$ — греческая буква «сигма». Для записи произведения n множителей применяют обозначение $\prod\limits_{k=1}^{n} A(k)$, где $\prod$ — прописная греческая буква «пи». Например,

$$\left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Отметим, что

$$\sum_{k=1}^{n+1} A(k) = \left(\sum_{k=1}^{n} A(k)\right) + A(n+1),$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} A(k) = \left(\prod_{k=1}^{n} A(k)\right) \cdot A(n+1).$$

Упражнения

68. Рассмотрите равенства:

$$\begin{array}{cl} 1 & = 0 + 1, \\ 2 + 3 + 4 & = 1 + 8, \\ 5 + 6 + 7 + 8 + 9 & = 8 + 27, \\ 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 & = 27 + 64. \end{array}$$

Догадайтесь, к какому общему закону подводят эти примеры. Выразите его в подходящих математических обозначениях и докажите.

69. Рассмотрите значения последовательных сумм:
1, $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$, ...
Имеется ли простое правило?

70. Рассмотрите значения последовательных сумм:
$1, \quad 1 + 8, \quad 1 + 8 + 27, \quad 1 + 8 + 24 + 64, \ldots .$
Имеется ли простое правило?

71. Проверьте, что любое четное число, большее 2, но меньшее 100, является суммой двух простых чисел.

72. Три стороны треугольника имеют соответственно длины l, m, n, где l, m, n —натуральные числа, такие, что $l \leqslant m \leqslant n$. Найдите для $n = 1$, 2, 3, 4 и 5 число различных треугольников. Найдите общий закон, управляющий зависимостью числа треугольников от n.

73. Запишите в виде суммы следующие выражения:
1) $\sum\limits_{k=1}^{5} \frac{1}{k}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{4} k^2$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; 4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^4}$.

74. Запишите следующие суммы с помощью знака $\sum$:
1) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}$;
2) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

75. Запишите следующие выражения в виде произведений:
1) $\prod\limits_{k=1}^{5} \frac{k}{2k+1}$; 2) $\prod\limits_{k=1}^{6} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right)$; 3) $\prod\limits_{k=1}^{6} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$; 4) $\prod\limits_{k=1}^{n} k^2$.

76. Запишите следующие произведения с помощью знака $\prod$:
1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10}$; 2) $\left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^3}\right)\left(1 - \frac{1}{4^3}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)$.

2. Метод математической индукции. Для доказательства математических утверждений, в формулировку которых входит произвольное натуральное число n (например, таких, как «для любого натурального n справедливо равенство $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$» или «в любом выпуклом n-угольнике число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$»), часто применяют особый метод математических рассуждений, получивший название *метода математической индукции*. Вместо того чтобы доказывать данное общее утверждение, которое мы обозначим $P(n)$, доказывают два утверждения: сначала $P(1)$, т. е. справедливость данного утверждения при $n = 1$, а потом утверждение «для любого натурального числа k из справедливости $P(k)$ вытекает справедливость $P(k + 1)$».

Из справедливости эти двух утверждений вытекает справедливость утверждения $P(n)$. В самом деле, поскольку верно $P(1)$, то верно и $P(1 + 1)$, т. е. $P(2)$ (иными словами, из справедливости утверждения при $n = 1$ вытекает, что оно справедливо и при $n = 2$). Далее, из того, что $P(2)$ верно, следует, что верно и $P(3)$, потом от $P(3)$ переходят к $P(4)$ и т. д. Ясно, что при этом мы доберемся рано или поздно до любого натурального числа n, а потому данное утверждение верно для всех n.

Пример. Докажем, что формула (1) п. 1 справедлива для всех n.

Решение. При $n = 1$ левая часть этой формулы принимает вид 1^3, т. е. равна 1. Правая же часть этой формулы при $n = 1$ принимает вид $\frac{1^2(1+1)^2}{4}$ и тоже равна 1. Значит, при $n = 1$ формула (1) п. 1 верна. Предположим теперь, что эта формула верна при $n = k$, т. е. что верно равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Докажем, что тогда эта формула верна и при $n = k + 1$ (каким бы ни было k), т. е. что верно равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \qquad (2)$$

Для этого заметим, что левую часть доказываемого равенства можно записать в виде $(1^3 + 2^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^3$. Но по предположению выражение в скобках равно $\frac{k^2(k+1)^2}{4}$, и потому

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Итак, формула (1) п. 1 верна при $n = 1$, а из ее справедливости при $n = k$ вытекает, что она верна и при $n = k + 1$ (каким бы k ни было). В силу метода математической индукции отсюда вытекает справедливость этой формулы для всех натуральных значений n.

Таким же образом можно доказать известные из восьмилетней школы формулы, касающиеся арифметической и геометрической прогрессии. Например, формула для n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad (3)$$

сразу следует из того, что если $a_k = a_1 + d(k-1)$, то $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk = a_1 + d \cdot [(k+1) - 1]$.

Аналогично доказывается формула для n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Докажем теперь справедливость формулы

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2} \qquad (4)$$

для суммы первых n членов арифметической прогрессии. Эта формула верна при $n = 1$, так как обе части равенства принимают при $n = 1$ значение a_1. Пусть уже доказано, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \frac{k(2a_1 + d(k-1))}{2}.$$

Тогда имеем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = \frac{k(2a_1 + d(k-1))}{2} + a_{k+1}.$$

Но $a_{k+1} = a_1 + kd$, и потому имеем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = \frac{k(2a_1 + d(k-1))}{2} + a_1 + kd =$$

$$= \frac{2ka_1 + dk(k-1) + 2a_1 + 2kd}{2} = \frac{2a_1(k+1) + dk(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(2a_1 + d(k+1-1))}{2}.$$

Итак, формула (4) верна при $n = 1$ и из ее справедливости при $n = k$ вытекает, что она верна и при $n = k + 1$. Значит, эта формула верна при всех натуральных значениях n.

Формула для суммы $\sum_n$ первых n членов геометрической прогрессии также легко доказывается методом математической индукции. Эта формула имеет при $q \neq 1$ вид

$$\sum_n = b_1 + b_1q + \ldots + b_1q^{n-1} = \frac{b_1q^n - b_1}{q-1}. \quad (5)$$

При $n = 1$ она справедлива, поскольку $\sum_1 = \frac{b_1q - b_1}{q-1} = b_1$.

Пусть формула (5) верна при $n = k$:

$$\sum_k = \frac{b_1q^k - b_1}{q-1}.$$

Тогда имеем

$$\sum_{k+1} = \sum_k + b_1q^k = \frac{b_1q^k - b_1}{q-1} + b_1q^k =$$

$$= \frac{b_1q^k - b_1 + b_1q^{k+1} - b_1q^k}{q-1} = \frac{b_1q^{k+1} - b_1}{q-1}.$$

Итак, формула (5) справедлива при $n = 1$, а из ее справедливости при $n = k$ следует, что она верна и при $n = k + 1$. Значит, она имеет место при всех $n \in N$.

Из формулы (5) следует, что

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Положив в этом равенстве $q = \frac{b}{a}$, получаем, что

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \ldots + \frac{b^k}{a^k} + \ldots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{\frac{b^n}{a^n} - 1}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{b^n - a^n}{a^{n-1}(b - a)},$$

и потому

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^k + \ldots + b^{n-1} = \frac{b^n - a^n}{b - a}.$$

Отсюда следует полезное тождество

$$(b - a)(a^{n-1} + \ldots + a^{n-k}b^k + \ldots + b^{n-1}) = b^n - a^n. \qquad (6)$$

Его частными случаями являются тождества

$$(b - a)(b + a) = b^2 - a^2, \qquad (6')$$

$$(b - a)(b^2 + ab + a^2) = b^3 - a^3. \qquad (6'')$$

Иногда при доказательствах утверждений методом математической индукции удобнее использовать следующую формулировку этого метода.

Если утверждение $P(n)$ истинно при $n = 1$ и для любого k из его истинности при всех $n \leqslant k$ следует, что оно истинно и при $n = k + 1$, то это утверждение истинно для всех n.

В самом деле, обозначим через $Q(k)$ утверждение: $P(n)$ истинно при $n = 1, 2, \ldots, k$. Тогда утверждения $P(1)$ и $Q(1)$ совпадают, и потому в силу истинности $P(1)$ истинно и $Q(1)$. Далее, по условию из того, что $Q(k)$ истинно (т. е. $P(n)$ истинно при $n = 1, 2, \ldots, k$), вытекает истинность $P(k + 1)$. Но тогда $P(n)$ истинно при $n = 1, 2, \ldots, k + 1$, т. е. истинно $Q(k + 1)$. В силу принципа математической индукции отсюда следует, что $Q(n)$ истинно для всех n. Но тогда и $P(n)$ истинно для всех n.

Отметим еще, что иногда можно доказать истинность некоторого утверждения $P(n)$ при $n = p$, а из его истинности при $n = k$, где $k \geqslant p$, вывести, что оно истинно и при $n = k + 1$. Тогда получаем, что данное утверждение истинно для всех $n \geqslant p$.

Упражнения

77. Докажите, что если (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q, то $b_n = b_1 q^{n-1}$.

78. Докажите, что для всех натуральных n выполняется равенство:

1) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$;

2) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2$;

3) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$;

4) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

5) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

6) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

79. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ обозначают $n!$ (читают: «n-факториал»). Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

3. Доказательство тождеств и неравенств с помощью математической индукции. Метод математической индукции позволяет доказывать различные тождества и неравенства, одна или обе из частей которых зависят от натурального числа n. Например, для доказательства тождества $A(n) = B(n)$ можно сначала убедиться, что $A(1) = B(1)$, а потом доказать тождество $A(n+1) - A(n) = B(n+1) - B(n)$. Тогда из истинности тождества $A(n) = B(n)$ при $n = k$ будет следовать его истинность при $n = k + 1$, а так как оно истинно и при $n = 1$, то по принципу математической индукции доказана его истинность при всех значениях n.

Пример 1. Докажем, что для всех n выполняется тождество

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}. \quad (1)$$

Решение. Положим

$$A(n) = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}, \quad B(n) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Нам надо доказать, что $A(n) = B(n)$ для всех n. Но $A(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $B(1) = \frac{1}{2}$, и потому $A(1) = B(1)$.

Далее,

$$A(k+1) = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)-1} - \frac{1}{2(k+1)},$$

$$A(k) = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k},$$

$$B(k+1) = \frac{1}{(k+1)+1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)+(k-1)} + \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{2(k+1)},$$

$$B(k) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}.$$

Поэтому

$$A(k+1) - A(k) = \frac{1}{2(k+1)-1} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{(2k+1)(2k+2)},$$

$$B(k+1) - B(k) = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Так как $A(1) = B(1)$ и $A(k+1) - A(k) = B(k+1) - B(k)$, то по сказанному выше тождество (1) истинно при всех значениях n.

В других случаях оказывается полезно разделить друг на друга соответствующие части доказываемых тождеств.

Пример 2. Докажем тождество

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Решение. При $n = 1$ левая часть доказываемого тождества принимает вид $1 - \frac{1}{4}$, а его правая часть — вид $\frac{3}{4}$. Поэтому тождество истинно при $n = 1$. Запишем теперь это тождество при $n = k + 1$ и при $n = k$ и разделим почленно получившиеся равенства. Получим равенство

$$1 - \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{k+3}{2(k+2)} : \frac{k+2}{2(k+1)},$$

т. е.

$$\frac{(k+2)^2 - 1}{(k+2)^2} = \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}.$$

Оно истинно. Значит, данное тождество истинно для всех n.

Докажем с помощью метода математической индукции *неравенство Бернулли*.

Теорема. *Если $x > -1$, то для всех натуральных значений n выполняется неравенство*

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx. \qquad (2)$$

Доказательство. При $n = 1$ доказываемое неравенство принимает вид $1 + x \geqslant 1 + x$ и, очевидно, справедливо. Предположим, что оно верно при $n = k$, т. е. что

$$(1 + x)^k \geqslant 1 + kx. \qquad (3)$$

Так как по условию $x > -1$, то $1 + x > 0$, и потому неравенство (3) не изменит смысла при умножении обеих его частей на $1 + x$:

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2. \qquad (4)$$

Так как $kx^2 \geqslant 0$, то из (4) получаем, что

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x.$$

Итак, неравенство (2) верно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ следует, что оно истинно и при $n = k + 1$. Значит, в силу математической индукции оно имеет место для всех $n \in N$.

Например, из (2) следует, что

$$1{,}005^{200} = (1 + 0{,}005)^{200} \geqslant 1 + 200 \cdot 0{,}005 = 2,$$
$$0{,}994^{10} = (1 - 0{,}006)^{10} \geqslant 1 - 10 \cdot 0{,}006 = 0{,}94.$$

Упражнения

80. Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ составляется по следующему закону: первые два числа a_0 и a_1 даны, каждое же следующее равно полусумме двух предыдущих. Докажите, что

$$a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^{n-1}\frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

81. Числа последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ определяются следующими условиями: $a_1 = 2$, $a_n = 3a_{n-1} + 1$. Докажите, что

$$a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 1).$$

82. Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ задана следующими условиями: $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n}a_n$. Докажите, что

$$a_n = n(n + 1).$$

83. Пусть члены последовательности связаны зависимостью

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0.$$

Докажите, что если $a_1 = 5$ и $a_2 = 7$, то $a_n = 2n + 3$.

84. Пусть пары чисел $(a, b), (a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$ образуются по закону

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ b_1 = \frac{a_1 + b}{2},\ \ldots,\ a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\ b_n = \frac{a_n + b_{n-1}}{2},\ \ldots .$$

Докажите, что

$$a_n = a + \frac{2}{3}(b - a)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right),\quad b_n = a + \frac{2}{3}(b - a)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right).$$

85. Докажите тождества:

1) $\dfrac{1}{2^3 - 2} + \dfrac{1}{4^3 - 4} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)^3 - 2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{n}{2n+1}$;

2) $\dfrac{x}{1 - x^2} + \dfrac{x^2}{1 - x^4} + \dfrac{x^4}{1 - x^8} + \ldots + \dfrac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}} = \dfrac{1}{1 - x} \cdot \dfrac{x - x^{2^n}}{1 - x^{2^n}}$;

3) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdot \ldots \cdot (1 + x^{2^{n-1}}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2^n - 1}$.

86. *Последовательность Фибоначчи* определяется следующими условиями:

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Докажите, что имеют место следующие соотношения:

1) $a_{n+2} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + 1$;

2) $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$;

3) $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$;

4) $a_n a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$;

5) $a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n$;

6) $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

87. Последовательность задана условием

$$a_1 = 10, \ \ a_{n+1} = \frac{2 + a_n^2}{2a_n}.$$

Докажите, что для всех $n \in N$ имеем $a_n \geqslant a_{n+1}$.

88. Последовательность задана условием

$$a_n = 0, \ \ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Докажите, что для всех $n \in N$ имеем $a_n \leqslant a_{n+1}$.

89. Докажите неравенства для $n \in N$:

1) $2^n > n$; 2) $2^n > 2n + 1$ при $n \geqslant 3$; 3) $2^n > n^3$ при $n \geqslant 10$.

§ 3. Многочлены от одной переменной

1. Канонический вид целых рациональных выражений. В п. 1 § 1 мы ввели несколько классов выражений. Каждое из этих выражений тождественно равно бесконечному множеству выражений, принадлежащих тому же классу. Например, целое рациональное выражение $x^2 + 3y^2$ тождественно равно целым рациональным выражениям $2x^2 + 5y^2 - x^2 - 2y^2$, $x^2 + 3y^2 - z^3 + z^3$ и т. д. В этом пункте мы рассмотрим вопрос о выборе из всей этой совокупности тождественно равных друг другу выражений какого-либо одного. Введем следующее определение.

Определение. Запись выражения данного класса называют *канонической*, если каждое выражение из этого класса тождественно равно одному и только одному выражению, имеющему каноническую запись.

Из этого определения вытекает, что два выражения данного класса тождественно равны в том и только в том случае, если их канонические записи совпадают. Канонические записи могут выбираться различными способами в зависимости от поставленных целей. Обычно требуют, чтобы они были достаточно удобны для вычисления значений выражений, поскольку одной из важнейших целей тождественных преобразований является приведение выражений к виду, более удобному для нахождения их числовых значений.

Теорема 1. *Любой целый одночлен от x тождественно равен либо числу, либо одночлену вида ax^n, где $a \in \boldsymbol{R}$ и $n \in N$.*

Доказательство. Докажем теорему на основании определения 1 п. 5. Она справедлива для всех чисел и для одночлена x, который записывается в виде $1 \cdot x$. Предположим, что теорема справедлива для одночленов $A(x)$ и $B(x)$. Тогда каждый из них либо является числом, либо тождественно равен одночлену указанного вида, т. е. $A(x) = ax^m$, $B(x) = bx^n$. Если $A(x)$ и $B(x)$ — числа, то их произведение тоже число. Если $A(x) = a$, $B(x) = bx^n$, то $A(x) \cdot B(x) = a \cdot bx^n = (ab)x^n$. Наконец, если $A(x) = ax^m$ и $B(x) = bx^n$, то

$$A(x)B(x) = ax^m \cdot bx^n = ab \cdot x^m \cdot x^n = abx^{m+n}. \qquad (1)$$

Во всех случаях получается либо число, либо одночлен указанного вида. Теорема доказана.

Теорема 2. *Одночлены ax^m, $a \neq 0$, и bx^n, $b \neq 0$, тождественно равны в том и только в том случае, когда $a = b$ и $m = n$. Одночлен ax^n тождественно равен нулю в том и только в том случае, когда $a = 0$.*

Доказательство. Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$, и при всех значениях x имеем $ax^m = bx^n$. Полагая $x = 1$, получаем, что $a = b$. Поскольку a и b отличны от нуля, выводим, что $x^m = x^n$. Полагая $x = 2$, получаем равенство $2^m = 2^n$, из которого следует, что $m = n$ (при $m < n$ имели бы $2^m < 2^n$, а при $m > n$ имели бы $2^m > 2^n$). Итак, из $ax^m = bx^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, следует, что $a = b$ и $m = n$. Если же $ax^m = 0$ для всех x, то при $x = 1$ получаем $a = 0$.

В дальнейшем будем любой одночлен вида $0 \cdot x^n$ заменять на 0.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что канонической записью для целых одночленов от x является ax^n, где $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, причем $a \neq 0$, если $n \neq 0$.

Теорема 3. *Любое целое рациональное выражение от x тождественно равно выражению вида*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \tag{2}$$

где a_n, a_{n-1}, ..., a_0 — некоторые числа и $a_n \neq 0$ (при $n > 0$).

Доказательство. Теорема верна для чисел и для выражения x. Пусть она верна для выражений $A(x)$ и $B(x)$, т. е. пусть

$$A(x) = a_m x^m + \ldots + a_0 \quad \text{и} \quad B(x) = b_n x^n + \ldots + b_0.$$

Тогда $A(x) + B(x) = (a_m x^m + \ldots + a_0) + (b_n x^n + \ldots + b_0)$. Если, например, $m \geqslant n$, то

$$A(x) + B(x) = (a_m + b_m)x^m + \ldots + (a_0 + b_0), \tag{3}$$

где считают, что $b_s = 0$ при $s > n$. Поэтому утверждение верно для $A(x) + B(x)$.

Далее имеем

$$A(x)B(x) = (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0) \times$$
$$\times (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0). \tag{4}$$

Применяя тождество 5) п. 2 и правило умножения одночленов (см. равенство (1)), получаем после группировки членов равенство

$$A(x)B(x) = \sum_{s=0}^{m+n} c_s x^s, \tag{5}$$

где

$$c_s = a_s b_0 + a_{s-1} b_1 + \ldots + a_0 b_s \tag{6}$$

(здесь $a_s = 0$, если $s > m$ и $b_s = 0$, если $s > n$).

Итак, теорема справедлива для чисел и для x, а из ее справедливости для $A(x)$ и $B(x)$ вытекает, что она имеет место для $A(x) + B(x)$ и $A(x)B(x)$. Значит, она верна для всех целых рациональных выражений.

В дальнейшем выражения вида (2) будем называть *многочленами от x степени n*. В частности, числа — многочлены нулевой степени (при этом удобно считать, что число 0 — многочлен, не имеющий степени). Слагаемое a_nx^n называют *старшим членом* многочлена $a_nx^n + \ldots + a_0$, а слагаемое a_0 — его *свободным членом*.

Из равенства (5) следует, что *старший член произведения двух многочленов равен произведению старших членов множителей, а свободный член произведения равен произведению свободных членов множителей*. Отсюда следует, что *степень произведения двух многочленов равна сумме степеней множителей*.

При сложении многочленов одинаковой степени может получиться многочлен меньшей степени. Например,

$$(3x^4 - 2x^2 - x + 1) + (-3x^4 + x^2 + 8) = -x^2 - x + 9.$$

Но при сложении многочленов различных степеней всегда получается многочлен, степень которого равна большей из степеней слагаемых. Например,

$$(3x^4 - 2x^2 - x + 1) + (6x^2 + 7) = 3x^4 + 4x^2 - x + 8.$$

Рассмотрим теперь вопрос об условиях тождественного равенства двух многочленов. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Если хотя бы один коэффициент многочлена $P(x)$ отличен от нуля, то найдется число b такое, что $P(b) \neq 0$* (т. е. этот многочлен не равен тождественно нулю).

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что многочлен $P(x)$ имеет вид $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, где a_n отлично от нуля. Если $n = 0$, то многочлен имеет вид $P(x) = a_0$, причем $a_0 \neq 0$, и потому все значения $P(x)$ равны a_0 и отличны от нуля. Если же $n \neq 0$, то $P(x)$ можно (при $x \neq 0$) представить в виде

$$P(x) = a_nx^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_0}{a_nx^n}\right).$$

При достаточно большом значении x все слагаемые в скобке, за исключением первого, малы, и потому найдется такое число b, что выполняются неравенства

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_nb}\right| < \frac{1}{n+1}, \ \ldots, \ \left|\frac{a_0}{a_nb^n}\right| < \frac{1}{n+1}$$

(для этого достаточно выбрать в качестве b большее из чисел 1 и $\frac{(n+1)M}{|a_n|}$, где M — наибольшее из чисел $|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|$).

Но тогда имеем

$$|P(b)| = |a_n b^n| \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n b} + \ldots + \frac{a_0}{a_n b^n}\right| \geqslant$$

$$\geqslant |a_n b^n| \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n b}\right| - \ldots - \left|\frac{a_0}{a_n b^n}\right|\right) >$$

$$> |a_n b^n| \Bigl(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1} - \ldots - \frac{1}{n+1}}_{n \text{ раз}}\Bigr) = \frac{|a_n b^n|}{n+1},$$

и потому $P(b) \neq 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если многочлен* $P(x)$ *тождественно равен нулю* (т. е. принимает нулевое значение для всех значений x), *то все его коэффициенты равны нулю.*

Доказательство. Если бы хоть один коэффициент многочлена $P(x)$ был отличен от нуля, то по теореме 4 нашлось бы значение b, при котором $P(b) \neq 0$, а это противоречит условию. Полученное противоречие доказывает, что сделанное предположение неверно, т. е. что все коэффициенты многочлена $P(x)$ равны нулю.

Следствие 2. *Если многочлены* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *тождественно равны, то они совпадают* (т. е. их коэффициенты при соответствующих степенях одинаковы).

Для доказательства достаточно применить следствие 1 к разности $P(x) - Q(x)$ этих многочленов. Она по условию тождественно равна нулю, а потому все ее коэффициенты равны нулю. Это может иметь место, лишь когда $P(x)$ и $Q(x)$ — один и тот же многочлен.

Теорема 3 и следствие 2 к теореме 4 доказывают, что *канонической записью для целых рациональных выражений от одного переменного являются многочлены.*

Пример. Докажем тождество

$$(x^2 + 1)^3 - 3(x^2 - x + 1)^2 + 6x(x - 1) + 11 = (x^3 + 3)^2.$$

Решение. Имеем

$$(x^2 + 1)^3 - 3(x^2 - x + 1)^2 + 6x(x - 1) + 11 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 +$$
$$+ 1 - 3x^4 - 3x^2 - 3 + 6x^3 - 6x^2 + 6x + 6x^2 - 6x + 11 =$$
$$= x^6 + 6x^3 + 9$$

и

$$(x^3 + 3)^2 = x^6 + 6x^3 + 9.$$

Так как в обоих случаях получили один и тот же многочлен, а именно $x^6 + 6x^3 + 9$, то тождество доказано.

Как отмечалось выше, для данного класса выражений можно по-разному выбирать канонические записи. Для целых рациональных выражений в качестве таких записей наряду с многочленами принимают и записи вида

$$(\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Они удобны для составления программ вычисления их значений на микрокалькуляторе, так как позволяют искать эти значения, лишь один раз введя в память микрокалькулятора значение аргумента.

Упражнения

90. Докажите, что $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$ есть полный квадрат.

91. Докажите тождества:

1) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^6 - 1$;

2) $1 + x^4 = \left(1 + x\sqrt{2} + x^2\right)\left(1 - x\sqrt{2} + x^2\right)$;

3) $x^8 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)$.

92. Упростите выражение $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1)(x^4 - 6x^2 + 1)$.

2. Деление многочлена с остатком. В отличие от операций сложения и умножения многочленов операция деления многочлена на многочлен выполнима не всегда. Иными словами, если заданы многочлены $A(x)$ и $B(x)$, то не всегда найдется такой многочлен $Q(x)$, что $A(x) = B(x)Q(x)$.

Пример 1. Докажем, что многочлен $x^2 + 1$ не делится на $x - 1$.

Решение. Предположим, что $x^2 + 1 = (x - 1) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Тогда при замене x любым числом должно получиться верное числовое равенство. Но при $x = 1$ получаем $1^2 + 1 = (1 - 1) \cdot Q(1) = 0$, что неверно.

Таким образом, в отношении выполнимости операций множество многочленов больше напоминает множество целых чисел, чем множество рациональных или действительных чисел. Но так же как и для множества целых чисел, в совокупности многочленов с действительными коэффициентами определена операция *деления с остатком*.

Теорема. *Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены от x с действительными коэффициентами, причем $B(x)$ не является нулевым многочленом. Тогда существуют такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$,* что

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x), \qquad (1)$$

причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$ (или $R(x)$ — нулевой многочлен).

Многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, обладающие указанными выше свойствами, называют соответственно *неполным частным* (или *частным*, если $R(x)$ — нулевой многочлен) и *остатком* при делении $A(x)$ на $B(x)$.

Доказательство. Обозначим через n степень многочлена $A(x)$, а через m — многочлена $B(x)$, зафиксируем m и проведем доказательство с помощью математической индукции по n. При $n < m$ теорема верна — достаточно положить $Q(x) = 0$, $R(x) = A(x)$. Пусть она доказана для всех $n < k$, где $k \geqslant m$. Чтобы доказать ее при $n = k$, достаточно доказать возможность представления любого одночлена ax^k в виде $Q_1(x)B(x) + R_1(x)$, где степень $R_1(x)$ меньше чем k. Но если $B(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$, $b_m \neq 0$, то[1]

$$ax^k = \frac{a}{b_m} x^{k-m} B(x) + R_1(x),$$

где $R_1(x) = ax^k - \frac{a}{b_m} x^{k-m} B(x)$. При этом степень $R_1(x)$ меньше, чем k, так как старшие члены в $ax^k - \frac{a}{b_m} x^{k-m} B(x)$ приводятся к нулю.

Итак, теорема справедлива для всех $n < m$, а из ее справедливости при $n < k$ следует, что она справедлива для $n = k$. Но тогда она справедлива для всех n.

При выполнении деления многочлена на многочлен часто бывает удобно применять так называемый *метод неопределенных коэффициентов*. Покажем его применение на следующем примере:

Пример 2. Разделим с остатком многочлен $A(x) = 2x^6 - 3x^4 - 5x^3 + x - 6$ на многочлен $B(x) = x^4 + 3x^3 + 5$.

Решение. Надо найти такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, что

$$2x^6 - 3x^4 - 5x^3 + x - 6 = (x^4 + 3x^3 + 5) \cdot Q(x) + R(x), \qquad (2)$$

причем степень $R(x)$ меньше степени $B(x)$, т. е. не больше, чем 3. Из того, что степень произведения многочленов равна сумме их степеней, следует, что степень многочлена $Q(x)$ равна $6 - 4 = 2$. Таким образом, хотя мы не знаем многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, их степени нам известны. Но многочлен второй степени имеет вид

$$Q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0,$$

а многочлен третьей степени — вид

$$R(x) = r_3 x^3 + r_2 x^2 + r_1 x + r_0.$$

Подставляя эти выражения вместо $Q(x)$ и $R(x)$ в (2), получаем: $2x^6 - 3x^4 - 5x^3 + x - 6 = (x^4 + 3x^3 + 5)(q_2 x^2 + q_1 x + q_0) + r_3 x^3 + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$. Если в правой части этого равенства раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим, что

$$2x^6 - 3x^4 - 5x^3 + x - 6 = q_2 x^6 + (q_1 + 3q_2)x^5 + (q_0 + 3q_1)x^4 + (r_3 + 3q_0)x^3 + (r_2 + 5q_2)x^2 + (r_1 + 5q_1)x + r_0 + 5q_0.$$

Это равенство должно выполняться при всех значениях x. Но если два многочлена тождественно равны, то их коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают. Отсюда получаем для отыска-

[1] При $k = m$ считаем $x^{k-m} = 1$.

ния неизвестных коэффициентов q_2, q_1, q_0, r_3, r_2, r_1, r_0 следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} q_2 = 2, & r_3 + 3q_0 = -5, \\ q_1 + 3q_2 = 0, & r_2 + 5q_2 = 0, \\ q_0 + 3q_1 = -3, & r_1 + 5q_1 = 1, \\ & r_0 + 5q_0 = -6. \end{array}$$

Из первого равенства получаем, что $q_2 = 2$. Подставляя это значение во второе равенство, находим значение $q_1 = -6$. Точно так же из третьего равенства получаем $q_0 = 15$. Значит, $Q(x) = 2x^2 - 6x + 15$. Теперь из четвертого равенства получаем: $r_3 = -50$, и далее находим: $r_2 = -10$, $r_1 = 31$, $r_0 = -81$; значит, $R(x) = -50x^3 - 10x^2 + 31x - 81$.

В общем случае тоже получается система уравнений для отыскания коэффициентов многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, которая решается столь же просто: сначала один за другим находим коэффициенты многочлена $Q(x)$, а потом многочлена $R(x)$. При этом получающиеся уравнения не только достаточны, но и необходимы для выполнения равенства (1), и потому многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ однозначно определены.

Вместо выписывания системы уравнений применяют запись деления «уголком», аналогичную записи при делении чисел. Тот же пример решается при этом следующим образом:

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} 2x^6 - 0\cdot x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 0\cdot x^2 + x - 6 \\ 2x^6 + 6x^5 \qquad\qquad\qquad + 10x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^4 + 3x^3 + 5 \\ \hline 2x^2 - 6x + 15 \end{array} \\
\hline
\quad -\begin{array}{l} -6x^5 - 3x^4 - 5x^3 - 10x^2 + x - 6 \\ -6x^5 - 18x^4 \qquad\qquad - 30x \end{array} & \\
\hline
\qquad\quad -\begin{array}{l} 15x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 31x - 6 \\ 15x^4 + 45x^3 \qquad\qquad + 75 \end{array} & \\
\hline
\qquad\qquad\quad -50x^3 - 10x^2 + 31x - 81 &
\end{array}$$

З а м е ч а н и е. Вообще *метод неопределенных коэффициентов* заключается в том, что, когда известен вид искомых многочленов, но неизвестны их коэффициенты, заменяют в исследуемом тождестве эти многочлены их записью с неопределенными коэффициентами, приводят обе части равенства к каноническому виду, после чего сравнивают слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x. Это дает систему уравнений, позволяющую найти искомые коэффициенты.

Упражнения

93. Проведите деление с остатком:
1) $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ на $x^2 - x + 1$;
2) $x^7 - 1$ на $x^3 + x + 1$;
3) $x^4 + x^2 + 1$ на $x + 5$;
4) $x^4 - 64$ на $x - 3$.

94. При каком значении k деление $x^3 + 6x^2 + kx + 12$ на $x + 4$ выполняется без остатка?

95. Делится ли многочлен $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 5$ без остатка на $x^2 - 3x + 2$?

96. При каких значениях a и b деление $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b$ на $x^2 - 3x + 2$ выполняется без остатка?

3. Теорема Безу. Корни многочлена. Остановимся на делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - \alpha$. Так как степень двучлена $x - \alpha$ равна 1, то степень остатка должна быть меньше 1. Иными словами, при делении $P(x)$ на $x - \alpha$ в остатке может получиться лишь некоторое число r (если $r = 0$, то деление выполняется без остатка):

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r. \qquad (1)$$

Чтобы найти значение r, положим $x = \alpha$ в тождестве (1). При этом двучлен $x - \alpha$ обращается в нуль. Получаем, что $P(\alpha) = r$.

Итак, доказано утверждение, называемое *теоремой Безу*.

Теорема 1 (Безу). *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен* $P(\alpha)$ (т. е. значению $P(x)$ при $x = \alpha$).

Пример 1. Докажем, что $x^4 - 6x^3 + 7x + 18$ делится без остатка на $x - 2$.

Решение. Подставляя в $x^4 - 6x^3 + 7x + 18$ вместо x значение 2, получаем: $2^4 - 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 + 18$, т. е. нуль.

Пример 2. Найдем остаток от деления $x^n + a^n$ на $x + a$.

Решение. В данном случае вместо x надо подставить $-a$. Получаем $(-a)^n + a^n$. Это выражение равно нулю, если n нечетно, и равно $2a^n$, если n четно. Значит, $x^n + a^n$ делится без остатка на $x + a$ лишь в случае, когда n нечетно.

Определение 1. Число α называют *корнем многочлена $P(x)$*, если $P(\alpha) = 0$ (т. е. если α — корень уравнения $P(x) = 0$).

Если многочлен $P(x)$ делится на $x - \alpha$, то α — корень этого многочлена. В самом деле, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, и потому $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$.

Справедливо и обратное утверждение. Оно вытекает из доказанной выше теоремы Безу.

Теорема 2. *Если число α является корнем многочлена $P(x)$, то этот многочлен делится на $x - \alpha$ без остатка.*

Доказательство. По теореме Безу остаток от деления $P(x)$ на $x - \alpha$ равен $P(\alpha)$, а по условию $P(\alpha) = 0$.

Отсюда видно, что задача решения уравнения $P(x) = 0$ равносильна задаче выделения делителей многочлена P, имеющих первую степень (так называемых *линейных делителей*).

Обобщением теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. *Если многочлен $P(x)$ имеет попарно различные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то он делится без остатка на произведение $(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$.*

Доказательство. Проведем доказательство с помощью математической индукции по числу корней. При $n = 1$ утверждение доказано в теореме 2. Пусть оно уже доказано для случая, когда число корней равно k, и пусть $P(x)$ имеет $k + 1$ попарно различных корней: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$. По предположению индукции многочлен $P(x)$ делится на произведение $(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)$:

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)Q(x).$$

При этом α_{k+1} — корень многочлена $P(x)$, т. е. $P(\alpha_{k+1}) = 0$. Значит, подставляя α_{k+1} вместо x, получаем верное равенство

$$P(\alpha_{k+1}) = (\alpha_{k+1} - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{k+1} - \alpha_k)Q(\alpha_{k+1}) = 0.$$

Но α_{k+1} по условию отлично от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, и потому ни одно из чисел $\alpha_{k+1} - \alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} - \alpha_k$ не равно нулю. Значит, нулю равно $Q(\alpha_{k+1})$, т. е. α_{k+1} — корень многочлена $Q(x)$. В силу теоремы 2 отсюда следует, что $Q(x)$ делится на $x - \alpha_{k+1}$ без остатка, $Q(x) = (x - \alpha_{k+1})Q_1(x)$, и потому $P(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)Q(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1})Q_1(x)$. Это и значит, что $P(x)$ делится на $(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_{k+1})$. Итак, доказано, что теорема верна при $k = 1$, а из ее справедливости при $n = k$ вытекает, что она верна и при $n = k + 1$. Значит, теорема верна при любом числе корней.

Следствие. *Многочлен степени n имеет не более n различных корней.*

Доказательство. Если бы многочлен $P(x)$ степени n имел корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, то он делился бы на произведение $(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_{n+1})$, имеющее степень $n + 1$, что невозможно.

Пусть многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тогда он делится без остатка на произведение $(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$, имеющее также степень n. Поэтому частным является некоторое число b. Итак,

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = b(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n). \quad (2)$$

Если раскрыть скобки в правой части равенства и сравнить коэффициенты при старших членах, то получим $a_n = b$. Значит,

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n). \quad (2')$$

Сравнивая остальные коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим соотношения между коэффициентами уравнения и его корнями, носящие название *формул Виета*. При $n = 2$ имеем

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2},$$

а при $n = 3$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3},$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_1}{a_3},$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Выполнение таких равенств необходимо и достаточно для того, чтобы числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ были корнями многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$.

Если многочлен $P(x)$ делится без остатка на $(x - \alpha)^k$, но не делится без остатка на $(x - \alpha)^{k+1}$, то говорят, что число α является *корнем кратности* k для $P(x)$. Например, при развертывании выражения $(x + 4)^2(x - 5)^3(x + 1)(x + 2)$ получаем многочлен $P(x)$, для которого число -4 — корень кратности два, число 5 — корень кратности три, а -1 и -2 — корни кратности один.

Формулы Виета сохраняют силу и при наличии кратных корней, но в этом случае надо каждый корень писать столько раз, какова его кратность. Например, если многочлен $ax^2 + bx + c$ имеет корень α кратности два, то $2\alpha = -\frac{b}{a}$ и $\alpha^2 = \frac{c}{a}$.

Пример 3. Составим квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Решение. Обозначим корни уравнения $x^2 - 6x + 4 = 0$ через x_1 и x_2. Тогда корнями искомого уравнения должны быть числа $y_1 = x_1^2$ и $y_2 = x_2^2$. Значит, это уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$, где

$$p = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2],$$

$$q = y_1y_2 = x_1^2x_2^2 = (x_1x_2)^2.$$

Но по формулам Виета имеем: $x_1 + x_2 = 6$ и $x_1 \cdot x_2 = 4$. Отсюда находим, что $q = (x_1x_2)^2 = 4^2 = 16$, а

$$p = -[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = -(6^2 - 2 \cdot 4) = -28.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид $x^2 - 28x + 16 = 0$.

Упражнения

97. Найдите остаток при делении многочлена $x^6 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + 5$ на $x + 3$.

98. Чему равен коэффициент a, если остаток от деления многочлена $x^4 - ax^3 + 4x^2 - x + 1$ на $x - 2$ равен 7?

99. Докажите, что многочлен $x^{2k} + a^{2n}$ при $a \neq 0$ не делится ни на $x - a$, ни на $x + a$.

100. Докажите, что многочлен $x^{2k+1} + a^{2k+1}$ делится без остатка на $x + a$.

101. Докажите теорему Безу с помощью тождества (6) п. 2 § 2.

102. Разложите на множители:

1) $x^6 - 1$; 2) $x^8 - 1$; 3) $x^4 - 18x^2 + 81$; 4) $x^{12} - 2x^6 + 1$;
5) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$; 6) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$; 7) $x^4 + x^2 + 1$;
8) $x^4 + 324$; 9) $x^4 + 4x^2 - 5$; 10) $4x^4 + 5x^2 + 1$;
11) $x^4 - (1 + ab)^2x^2 + ab$; 12) $x^8 + x^4 + 1$;
13) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$; 14) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$;
15) $(x^2 + x + 3)(x^2 + x + 4) - 12$;
16) $(x^2 + x - 1)^2 + 3x(x^2 + x - 1) + 2x^2$;
17) $2(x^2 + 2x - 1)^2 + 5(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2$;
18) $x(x^3 - a^3) + ax(x^2 - a^2) + a^3(x - a)$.

103. Напишите формулы Виета при $n = 4$.

104. 1) Составьте кубический многочлен, имеющий корни 7, -2 и 3 и старший коэффициент -5.
2) Составьте кубический многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

105. Какую кратность имеет корень 2 для многочлена

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8?$$

106. Какую кратность имеет корень 5 для многочлена

$$P(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125?$$

107. Определите a и b так, чтобы -2 было корнем многочлена $P(x) = x^5 - ax^2 + bx + 1$, имеющим по крайней мере кратность два.

108. Составьте кубический многочлен, имеющий корень 4 кратности два и корень -2.

109. Составьте квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $x^2 - 7x + 1 = 0$.

110. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $3x^2 - 10x + 4 = 0$.

111. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2 + 8x + 2 = 0$.

4. Тождественное равенство рациональных выражений. Рациональное выражение $\frac{(x^4 + 1)(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)}$ определено всюду, кроме точек $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$. Сократив дробь на $x - 3$, получим рациональное выражение $\frac{x^4 + 1}{x + 3}$, которое определено всюду, кроме точки $x = -3$, а умножив числитель и знаменатель дроби на $x + 4$, получим выражение $\frac{(x^4 + 1)(x - 3)(x + 4)}{(x - 3)(x + 3)(x + 4)}$, которое определено всюду, кроме точек $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ и $x_3 = -4$. В точках же, отличных от 3, -3, -4, все три выражения принимают одинаковые значения. Такие выражения называют тождественно равными в их общей области существования.

Определение. Рациональные выражения $A(x)$ и $B(x)$, имеющие непустые области существования, называют *тождественно равными в общей области существования*, если равенство $A(x) = B(x)$ выполняется для всех значений x, при которых как $A(x)$, так и $B(x)$ имеют числовое значение.

Мы будем писать в этом случае $A(x) = B(x)$, хотя следует всегда помнить, что могут существовать значения x, при которых одно из выражений имеет числовое значение, а второе его не имеет.

Как обычно, замену рационального выражения тождественно равным ему (в общей области существования) выражением называют *тождественным преобразованием* этого выражения. Для рациональных выражений остаются в силе формулы тождественных преобразований, указанные в п. 2 § 1. Кроме того, в точках, где A отлично от нуля, верно тождество

1) $A \cdot \frac{1}{A} = 1.$

Укажем еще несколько формул тождественных преобразований рациональных выражений:

2) $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$;

3) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$;

4) $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$;

5) $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$, $C \neq 0$;

6) $\left|\frac{1}{A}\right| = \frac{1}{|A|}$;

7) $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$;

8) $\frac{A^m}{A^n} = \frac{1}{A^{n-m}}$, $n > m$.

Отметим еще, что при приведении к нулю подобных членов может измениться область определения рационального выражения. Например, выражения $2x + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-4}$ и $2x$ тождественно равны для всех x, кроме $x = 4$, поскольку при $x = 4$ первое выражение не имеет числового значения, а второе его имеет.

Упражнения

112. Сократите дроби:

1) $\frac{5x^2 - x - 4}{x^3 - 1}$; 2) $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$; 3) $\frac{x^4 + x^2 - 2}{x^6 + 8}$; 4) $\frac{x^{2n+1} - x^{2n-1}}{(x^{n+1} - x^n)^2}$;

5) $\frac{a^{n+1} - a^{n-1}}{a^n + a^{n-1} + a^{n-2}}$; 6) $\frac{x^4 - x^2 - 12}{x^4 + 8x^2 + 15}$; 7) $\frac{2b^4 + 7b^2 + 6}{3b^4 + 3b^2 - 6}$.

113. Упростите выражения:

1) $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4x^3}{1+x^4} - \frac{8x^7}{1+x^8}$;

2) $\left(\frac{a^2 - ax}{a^2x + x^3} - \frac{2a^2}{x^3 - ax^2 + a^2x - a^3}\right)\left(1 - \frac{x-1}{a} - \frac{x}{a^2}\right)$;

3) $\dfrac{\dfrac{x^2 + a^2}{2a^2 + 3ax - 2x^2}}{\dfrac{2a + x}{2a - x} + \dfrac{a - 2x}{a + 2x}}$.

114. Докажите, что если $s = a + \frac{1}{a}$, то $a^4 + \frac{1}{a^4} = s^2(s^2 - 4) + 2$.

5. Каноническая форма рациональных выражений. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Любое рациональное выражение либо имеет числовое значение для всех x, за исключением конечного множества, либо не имеет числового значения ни для одного значения переменной x. В первом случае ненулевое рациональное выражение равно в своей области существования выражению вида*

$$\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0}, \tag{1}$$

где $a_m \neq 0$ (при $m > 0$), $b_n \neq 0$.

Доказательство. Теорема очевидным образом справедлива для чисел и для переменной x. В силу определения 3 п. 1 § 1 достаточно доказать, что если она справедлива для выражений $A(x)$ и $B(x)$, то она верна и для выражений $A(x) + B(x)$, $A(x) \cdot B(x)$ и $\frac{A(x)}{B(x)}$. Это делается очевидным образом на основании равенств 2), 3), 4) п. 4.

Из теоремы 1 и определения п. 4 следует, что два рациональных выражения от x тождественно равны, если они принимают одинаковые значения всюду, кроме конечного числа точек. Каноническим видом для рациональных выражений является $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x, причем дробь несократима, а старший коэффициент многочлена $Q(x)$ равен 1.

Пример. Приведем к каноническому виду рациональное выражение

$$\left(\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{2x + 1} \cdot \frac{4x^2 - 1}{3x + 2}\right) : \frac{25 - x^2}{x^2 + 4}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{2x + 1} \cdot \frac{4x^2 - 1}{3x + 2} = \frac{1}{2x - 1} - \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{(2x + 1)(3x + 2)} =$$

$$= \frac{1}{2x - 1} - \frac{2x - 1}{3x + 2} = \frac{3x + 2 - (2x - 1)^2}{(2x - 1)(3x + 2)} = \frac{-4x^2 + 7x + 1}{6x^2 + x - 2},$$

$$\frac{-4x^2 + 7x + 1}{6x^2 + x - 2} : \frac{25 - x^2}{x^2 + 4} = \frac{(x^2 + 4)(-4x^2 + 7x + 1)}{(6x^2 + x - 2)(25 - x^2)} =$$

$$= \frac{-4x^4 + 7x^3 - 15x^2 + 28x + 4}{-6x^4 - x^3 + 152x^2 + 25x - 50} = \frac{\frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{2}{3}}{x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{76}{3}x^2 - \frac{25}{6}x + \frac{25}{3}}.$$

Упражнения

115. Приведите к каноническому виду рациональные выражения:

1) $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$; 2) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$;

3) $\dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}$;

4) $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x-1)^2}$.

§ 4. Рациональные уравнения и неравенства с одной переменной

1. Уравнения, тождества, неравенства. В девятилетней школе были рассмотрены различные уравнения и неравенства— линейные, квадратные, биквадратные. В общем виде понятие уравнения с одной переменной определяется следующим образом.

Определение 1. Равенство вида $A(x) = B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ — выражения от x, называют *уравнением с переменной x*. Множество T значений x, при подстановке которых в уравнение получается истинное числовое равенство, называют *множеством истинности* или *решением* данного уравнения, а каждое такое значение переменной — *корнем уравнения*.

Пример 1. Равенство $(x - 4)(x + 2)(x - 6) = 0$ выполняется в том и только в том случае, когда x принимает одно из значений -2, 4, 6. Поэтому решением уравнения $(x - 4)(x + 2)(x - 6) = 0$ является множество $\{-2; 4; 6\}$. Числа -2, 4, 6 — корни данного уравнения. Ответ записывается также в виде $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$.

Пример 2. Равенство $x = |x|$ выполняется для всех неотрицательных значений x. Поэтому решением уравнения $x = |x|$ является полуось $[0; +\infty)$. Каждое неотрицательное число — корень данного уравнения.

Пример 3. Ни для одного числа x не выполняется равенство $x^2 + 1 = 0$. Поэтому уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней.

Понятие неравенства с одной переменной определяют аналогично понятию уравнения.

Определение 2. Соотношения $A(x) < B(x)$, $A(x) > B(x)$, $A(x) \leqslant B(x)$, $A(x) \geqslant B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ — выражения от x, называют *неравенствами с переменной x*. Множество T значений x, при подстановке которых в неравенство получается истинное числовое неравенство, называют *множеством истинности* или *решением* данного неравенства.

В отличие от уравнений понятие корня для неравенств не вводится.

Пример 4. Неравенство $3x - 12 \geqslant 0$ выполняется для тех значений x, при которых $x \geqslant 4$. Его решением является луч $[4; +\infty)$.

Пример 5. Неравенство $x^2 \geqslant 0$ выполняется для всех значений x. Его решением является вся числовая ось, оно тождественно выполняется на $\boldsymbol{R}$.

Пример 6. Неравенство $x^2 < 0$ не выполняется ни для одного значения x. Его решение — пустое множество $\varnothing$.

2. Равносильные уравнения и неравенства. В процессе решения уравнений и неравенств их заменяют другими, имеющими те же решения, что и исходные. Получаемые таким путем уравнения и неравенства называют равносильными заданным.

Определение. Уравнение $A_1(x) = B_1(x)$ *равносильно* уравнению $A_2(x) = B_2(x)$, если их решения совпадают (каждый корень первого уравнения является корнем второго и, обратно, каждый корень второго уравнения удовлетворяет первому).

В частности, равносильны любые два уравнения с пустым множеством решений.

Понятие равносильности неравенств определяется аналогично.

Чтобы установить, какие уравнения (соответственно неравенства) равносильны друг другу, используют теоремы о равносильности уравнений и неравенств, вытекающие из известных свойств числовых равенств и неравенств.

Очевидно, что равносильны неравенства $A(x) < B(x)$ и $B(x) > A(x)$: если $A(\alpha) < B(\alpha)$, то $B(\alpha) > A(\alpha)$, и обратно. Неравенство $A(x) \leqslant B(x)$ выполняется для тех и только для тех значений x, при которых либо $A(x) = B(x)$, либо $A(x) < B(x)$. Поэтому решение неравенства $A(x) \leqslant B(x)$ сводится к решению неравенства $A(x) < B(x)$ и уравнения $A(x) = B(x)$. Это позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением неравенства вида $A(x) < B(x)$.

Докажем теоремы, устанавливающие равносильность уравнений, а также неравенств, получаемых из данных одновременным преобразованием левой и правой частей. Для уравнения $A(x) = B(x)$

(соответственно неравенства $A(x) < B(x)$) обозначим через X множество всех чисел, для которых определены и $A(x)$, и $B(x)$ (т. е. пересечение областей существования этих выражений). Множество X будем называть *областью допустимых значений* переменной x (ОДЗ) для данного уравнения (соответственно неравенства). Отметим, что решение уравнения (соответственно неравенства) является подмножеством для ОДЗ.

Теорема 1. *Если к обеим частям уравнения*

$$A(x) = B(x) \tag{1}$$

прибавить выражение $C(x)$, определенное для всех $x \in X$, то получим уравнение

$$A(x) + C(x) = B(x) + C(x), \tag{2}$$

равносильное данному.

Доказательство. Пусть α — корень уравнения (1). Тогда выполняется числовое равенство $A(\alpha) = B(\alpha)$. Прибавим к обеим частям этого равенства число $C(\alpha)$, которое существует, поскольку $\alpha \in X$, а потому выражение $C(x)$ имеет числовое значение для $x = \alpha$. Получаем верное числовое равенство $A(\alpha) + C(\alpha) = B(\alpha) + C(\alpha)$, показывающее, что α — корень уравнения (2). Итак, любой корень уравнения (1) удовлетворяет и уравнению (2). Аналогично доказывается, что любой корень уравнения (2) удовлетворяет уравнению (1) (для доказательства достаточно прибавить к обеим частям равенства $A(\alpha) + C(\alpha) = B(\alpha) + C(\alpha)$ число $-C(\alpha)$). Равносильность уравнений (1) и (2) доказана.

Замечание. Условие, что выражение $C(x)$ определено для всех $x \in X$, существенно. Например, число 3 является корнем уравнения $x^2 = 9$, но не является корнем уравнения $x^2 + \frac{1}{x-3} = 9 + \frac{1}{x-3}$, полученного прибавлением к обеим частям данного уравнения выражения $\frac{1}{x-3}$. Причиной этого является то, что выражение $\frac{1}{x-3}$ не имеет числового значения при $x = 3$.

Из теоремы 1 вытекает, что любое уравнение $A(x) = B(x)$ можно заменить равносильным ему уравнением $A(x) - B(x) = 0$, правая часть которого равна нулю.

Теорема, аналогичная теореме 1, имеет место и для неравенств.

Теорема 1′. *Если выражение $C(x)$ определено для всех $x \in X$, то неравенства $A(x) < B(x)$ и $A(x) + C(x) < B(x) + C(x)$ равносильны.*

Из этой теоремы следует, что *неравенство $A(x) < B(x)$ равносильно неравенству $A(x) - B(x) < 0$.*

При умножении обеих частей уравнения на некоторое выражение $C(x)$ нужно следить не только за тем, чтобы это выражение было определено при всех $x \in X$, но и за тем, чтобы его значения на X были отличны от нуля, иначе можно получить посторонние корни.

Теорема 2. *Если обе части уравнения $A(x) = B(x)$ умножить на выражение $C(x)$, принимающее отличные от нуля значения для всех $x \in X$, то получится уравнение $A(x)C(x) = B(x)C(x)$, равносильное заданному.*

Эта теорема доказывается так же, как теорема 1: из равенства $A(\alpha) = B(\alpha)$ вытекает $A(\alpha)C(\alpha) = B(\alpha)C(\alpha)$, а из равенства $A(\alpha)C(\alpha) = B(\alpha)C(\alpha)$ — равенство $A(\alpha) = B(\alpha)$, так как $C(\alpha) \neq 0$.

Аналогичная теорема имеет место и для неравенств с той лишь разницей, что выражение $C(x)$ должно быть в этом случае положительным на X.

Теорема 2′. *Если выражение $C(x)$ принимает для всех $x \in X$ положительные значения, то неравенства $A(x) < B(x)$ и $A(x)C(x) < B(x)C(x)$ равносильны.*

Эта теорема вытекает из того, что при $C(\alpha) > 0$ из $A(\alpha) < B(\alpha)$ следует $A(\alpha)C(\alpha) < B(\alpha)C(\alpha)$, и обратно.

В случае когда выражение $C(x)$ отрицательно на X, равносильны неравенства $A(x) < B(x)$ и $A(x)C(x) > B(x)C(x)$. Это вытекает из того, что при $C(\alpha) < 0$ из $A(\alpha) < B(\alpha)$ следует $A(\alpha)C(\alpha) > B(\alpha)C(\alpha)$, и обратно.

Из доказанной теоремы следует, что если число a положительно, то равносильны неравенства $A(x) < B(x)$ и $aA(x) < aB(x)$, а если оно отрицательно, то равносильны неравенства $A(x) < B(x)$ и $aA(x) > aB(x)$ (где $x \in X$).

Замечание. Условие, что $C(x)$ не обращается в нуль на X, существенно для справедливости теоремы 2. Например, уравнения $x - 4 = 2x - 7$ и $(x - 4)(x - 2) = (2x - 7)(x - 2)$ не равносильны на $\boldsymbol{R}$: первое имеет лишь корень 3, а второе — корни 2 и 3.

Существенно и условие, что $C(x)$ определено на всем множестве X: уравнения $x - 4 = 2x - 7$ и $\frac{x-4}{x-3} = \frac{2x-7}{x-3}$ не равносильны — первое имеет корень 3, а второе не имеет корней, поскольку выражение $\frac{x-4}{x-3}$ не определено при $x = 3$. Аналогично и для неравенств.

Пример. Уравнения $x - 5 = 3x - 11$ и $(x - 5)(x^2 + 4) + x^3 = (3x - 11)(x^2 + 4) + x^3$ равносильны на всем множестве $\boldsymbol{R}$, поскольку второе получается из первого умножением на выражение $x^2 + 4$, все значения которого на $\boldsymbol{R}$ положительны, и прибавлением выражения x^3, определенного на всем $\boldsymbol{R}$.

Итак, если в ходе решения уравнения (неравенства) приходилось прибавлять к обеим частям уравнения (неравенства) одно и то же выражение, необходимо проверить, всюду ли определено это выражение на множестве X, где задано уравнение (неравенство). Если же в ходе решения приходилось умножать обе части уравнения (неравенства) на одно и то же выражение $C(x)$, надо проверить не только, всюду ли определено это выражение на X, но и не обращается ли оно в нуль на X (а для неравенств — сохраняет ли оно знак на X). *При умножении обеих частей неравенства на выражение, положительное на X, знак неравенства остается неизменным, а при умножении на выражение, отрицательное на X, меняется на противоположный.*

Если прибавить к обеим частям уравнения или неравенства выражение, не имеющее числового значения для некоторых значений x, может произойти потеря корней (а именно корней, для которых прибавляемое выражение не имеет числового значения). Аналогично обстоит дело при умножении обеих частей уравнения или неравенства на выражение, не имеющее числового значения для некоторых значений x. Если же обе части уравнения или неравенства умножаются на выражение, обращающееся в нуль для некоторых значений x, то могут появиться посторонние корни (а именно корни, обращающие в нуль это выражение).

Посторонние корни могут появиться и при тождественных преобразованиях частей уравнений, связанных с изменением области существования соответствующих выражений. Например, уравнения $\frac{(x-1)(x+4)}{x+4} = -5$ и $x - 1 = -5$ не равносильны: второе из них имеет корень -4, а для первого уравнения это число не является корнем (при $x = -4$ выражение $x + 4$, на которое сокращена дробь $\frac{(x-1)(x+4)}{x+4}$, обращается в нуль, и потому до сокращения эта дробь не имела числового значения при $x = -4$).

Упражнения

116. Докажите, что уравнения $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$ и $3x + 17 = 7x + 9$ имеют одинаковые рациональные корни.

117. Найдите область допустимых значений и решите уравнение

$$x^2 + 5x + 7 + \frac{1}{x^3 - x} = 1 + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x}.$$

118. Найдите область допустимых значений уравнения

$$x^2 + 8a^2 + \frac{11a^4}{x^2 - 4a^2} = 0$$

и решите его.

3. Основные методы решения уравнений. При решении уравнений применяют два основных метода: *разложение на множители* и *введение новой переменной*. Первый из них применим к уравнениям вида $P(x) = 0$.

Теорема 1. *Пусть*

$$P(x) = P_1(x) \cdot \ldots \cdot P_n(x),$$

причем выражения $P_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *определены на множестве* X. *Тогда множество корней уравнения* $P(x) = 0$, $x \in X$, *является объединением множеств корней уравнений* $P_k(x) = 0$, $x \in X$ (т. е. любое число из X, удовлетворяющее уравнению $P(x) = 0$, удовлетворяет хотя бы одному из уравнений $P_k(x) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и обратно).

Доказательство. Пусть $\alpha \in X$ — один из корней уравнения $P(x) = 0$. Тогда $P(\alpha) = 0$, т. е. $P_1(\alpha) \cdot \ldots \cdot P_n(\alpha) = 0$. Но произведение обращается в нуль в том и только в том случае, когда хоть один из множителей равен нулю. Поэтому хотя бы одно из чисел $P_1(\alpha), \ldots, P_n(\alpha)$ равно нулю, т. е. α — корень хотя бы одного из уравнений $P_k(x) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Обратно, если α — корень одного из этих уравнений, т. е. если, например, $P_1(\alpha) = 0$, то имеем $P_1(\alpha) \cdot \ldots \cdot P_n(\alpha) = 0$, и потому $P(\alpha) = 0$ (напомним, что по условию все выражения $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ имеют значения при $x = \alpha$). Теорема доказана.

Замечание. Условие, что все множители $P_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ имеют числовые значения для любого $x \in X$, существенно. Например, левая часть уравнения $(x - 2) \cdot \frac{1}{x - 2} = 0$ является произведением двух множителей $x - 2$ и $\frac{1}{x - 2}$. Однако число 2, удовлетворяющее уравнению $x - 2 = 0$, не является корнем данного уравнения, поскольку при $x = 2$ не определено выражение $\frac{1}{x - 2}$.

Пример 1. Решим уравнение $(2x - 6)(8 - 4x)(3x + 5) = 0$.

Решение. Корнями этого уравнения являются числа, удовлетворяющие одному из уравнений $2x - 6 = 0$, $8 - 4x = 0$, $3x + 5 = 0$. Корнем первого уравнения является число 3, второго — число 2, а третьего — число $-\frac{5}{3}$. Значит, решением уравнения является множество $\left\{3;\ 2;\ -\frac{5}{3}\right\}$. Пишут также: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{5}{3}$.

Пример 2. Решим уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Решение. Сначала разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = x^4 - x^2 - 9x^2 + 9 = x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) =$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3).$$

Решая уравнения $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, получаем числа 1, -1, 3, -3, множество которых $\{1;\ -1;\ 3;\ -3\}$ и является решением данного уравнения.

Таким образом, решение уравнения тесно связано с разложением его левой части на множители.

С помощью метода разложения на множители выводится формула для решения квадратных уравнений. Именно, если $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$ и $a \neq 0$, то справедливо тождество

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right).$$

Отсюда следует, что корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ являются числа

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

При $D = 0$ имеем корень $x = -\frac{b}{2a}$ кратности два.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0. \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что

$$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = (x^4 + 12x^3 + 36x^2) - (4x^2 + 8x + 4) =$$
$$= (x^2 + 6x)^2 - (2x + 2)^2 = (x^2 + 8x + 2)(x^2 + 4x - 2).$$

Поэтому уравнение (1) записывается так:

$$(x^2 + 8x + 2)(x^2 + 4x - 2) = 0.$$

Задача свелась к решению двух квадратных уравнений:

$$x^2 + 8x + 2 = 0 \text{ и } x^2 + 4x - 2 = 0.$$

Решая их, находим, что первое уравнение имеет корни $-4 \pm \sqrt{14}$, а второе — корни $-2 \pm \sqrt{6}$. Значит, решение данного уравнения имеет вид $\left\{-4 + \sqrt{14};\ -4 - \sqrt{14};\ -2 + \sqrt{6};\ -2 - \sqrt{6}\right\}$.

Другим методом решения уравнений является введение новой переменной. Покажем этот метод сначала на примере.

Пример 4. Решим уравнение

$$(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0. \qquad (2)$$

Решение. Обозначим $x^2 + x + 1$ через z. Так как $-3x^2 - 3x - 1 = -3z + 2$, то уравнение (2) принимает вид $z^2 - 3z + 2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим его корни 1 и 2. Поскольку $x^2 + x + 1 = z$, то всякий корень уравнения (2) удовлетворяет либо уравнению $x^2 + x + 1 = 1$, либо уравнению $x^2 + x + 1 = 2$. Решая эти уравнения, получаем решение для (2):

$$\left\{0;\ -1;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

В общем виде примененный выше метод можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Если* α — *один из корней уравнения* $f(z) = 0$, а β — *один из корней уравнения* $g(x) = \alpha$, *то* β *является одним из корней уравнения* $f(g(x)) = 0$. *Обратно, если* β — *корень уравнения* $f(g(x)) = 0$, *то* $\alpha = g(\beta)$ — *один из корней уравнения* $f(z) = 0$.

Доказательство. Пусть α — корень уравнения $f(z) = 0$ и β — корень уравнения $g(x) = \alpha$. Тогда имеем $g(\beta) = \alpha$, $f(\alpha) = 0$, и потому $f(g(\beta)) = f(\alpha) = 0$. Отсюда видно, что β — корень уравнения $f(g(x)) = 0$.

Обратно, пусть β — корень уравнения $f(g(x)) = 0$. Тогда $f(g(\beta)) = 0$. Отсюда следует, что число $\alpha = g(\beta)$ является корнем уравнения $f(z) = 0$.

Из теоремы 2 следует, что уравнение $F(x) = 0$ можно решить так: представить выражение $F(x)$ в виде $f(g(x))$, решить уравнение $f(z) = 0$, а потом решить все уравнения вида $g(x) = \alpha_k$, где α_k пробегает множество найденных корней уравнения $f(z) = 0$.

Покажем два частных случая указанного метода:

а) для решения уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

(так называемого *биквадратного уравнения*) достаточно сделать подстановку $x^2 = z$, сводящую его к квадратному уравнению

$$az^2 + bz + c = 0;$$

б) чтобы решить уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

(так называемое *возвратное уравнение*), разделим обе его части на x^2:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$$

после этого сделаем подстановку $x + \frac{1}{x} = z$. Так как $z^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, то получаем квадратное уравнение $a(z^2 - 2) + bz + c = 0$. Найдя его корни z_1 и z_2, решаем уравнения $x + \frac{1}{x} = z_1$ и $x + \frac{1}{x} = z_2$.

Пример 5. Решим уравнение

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Решение. Деля обе части уравнения на x^2 и полагая $z = x + \frac{1}{x}$, получаем уравнение $6(z^2 - 2) - 5z - 38 = 0$, т. е. $6z^2 - 5z - 50 = 0$. Оно имеет корни $\frac{10}{3}$ и $-\frac{5}{2}$. Теперь решим уравнения $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ и $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$. Получаем четыре корня: 3, $\frac{1}{3}$, -2 и $-\frac{1}{2}$. Значит, решением данного уравнения является множество $\left\{3; \frac{1}{3}; -2; -\frac{1}{2}\right\}$.

Пишут также: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

Упражнения

119. Решите уравнения (где надо, укажите область допустимых значений):

1) $\frac{5}{x^2 - 2x - 3} + \frac{21}{x^2 + 2x - 3} = \frac{9}{x^2 - 4x + 3} - \frac{35}{x^2 + 4x + 3}$;

2) $\frac{x^2 - 2nx + 2ax - n^2}{x^3 - a^3} + \frac{x + 2n}{x^2 + ax + a^2} = \frac{1}{x - a}$;

3) $\frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{x+2}{x-2}}} = \frac{12}{12x - 7}$;

4) $x^3 + (m - 1)x + m = 0$;

5) $(x + a)^4 - (x - a)^4 = 16x^4$;

6) $(x - a)(x - b)(x - c) + abc = 0$;

7) $\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} = \frac{4x}{1 + x^2}$;

8) $\left(\frac{a + x}{a - x}\right)^2 = 1 + \frac{cx}{ab}$;

9) $\frac{1}{x+a+b}+\frac{1}{x-a+b}+\frac{1}{x+a-b}+\frac{1}{x-a-b}=0;$

10) $(x-2)(x-3)(x-4)=6;$

11) $x^3+x^2-4x-4=0;$

12) $\frac{x}{a}+\frac{b}{x}+\frac{b^2}{x^2}=1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2};$

13) $x(x^2-2)=m(x^2+2mx+2);$

14) $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9;$

15) $(x^2-a^2)(x+a)b+(a^2-b^2)(a+b)x+(b^2-x^2)(b+x)a=0;$

16) $(p-1)^2x^3+px^2+\left(p-1+\frac{1}{p-1}\right)x+1=0;$

17) $(x-a)(x-2a)(x+3a)(x+4a)=c^4;$ 18) $x^4+(1-x)^4=a.$

120. Решите уравнения:

1) $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0;$

2) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right);$

3) $x^4+ax^3+bx^2+cx+\frac{c^2}{a^2}=0;$

4) $x^4-2x^3+x=a;$

5) $x^4+4ax^3+4a^3x=a^4;$

6) $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{142}{9};$

7) $x^4-29x^2+100=0;$

8) $x^4+7x^2+10=0;$

9) $x^4+130x^2+1089=0;$

10) $(x+a)^4+(x-a)^4=82a^4;$

11) $\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}+\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=-\frac{5}{2};$

12) $a^2x^4-(a^2+1)x^2+1=0;$

13) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0;$

14) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0;$

15) $x^3-3x^2-3x+1=0;$

16) $3x^3-7x^2-7x+3=0;$

17) $5x^4-12x^3+11x^2-12x+5=0;$

18) $x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0.$

121. Докажите, что если α — корень возвратного уравнения, то $\frac{1}{\alpha}$ тоже корень этого уравнения.

4. Решение неравенств. Простейшими среди неравенств с одной переменной являются *линейные неравенства*, т. е. неравенства вида $ax+b<0$. При $a=0$ решение этого неравенства либо пусто (если b положительно или равно нулю), либо совпадает со всей числовой прямой (если b отрицательно). Поэтому будем рассматривать лишь неравенства $ax + b < 0$, для которых $a \neq 0$. Решение такого неравенства сводится к решению уравнения $ax + b = 0$, корнем которого является число $-\frac{b}{a}$.

Это число делит числовую ось на два луча $\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$, причем на первом луче выполняется неравенство $x < -\frac{b}{a}$, т. е. $x + \frac{b}{a} < 0$, а на втором — неравенство $x + \frac{b}{a} > 0$. Отсюда следует, что при $a > 0$ на первом луче имеем $a\left(x + \frac{b}{a}\right) < 0$, т. е. $ax + b < 0$, а на втором луче $ax + b > 0$. При $a < 0$ роли лучей меняются.

Итак, мы доказали следующее утверждение: *если $a > 0$, то решением неравенства $ax + b < 0$ является числовой луч $\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$, а если $a < 0$ — то числовой луч $\left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$.*

Рассмотрим теперь неравенства, левая часть которых является произведением линейных множителей, т. е. неравенства вида

$$(a_1x + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_nx + b_n) < 0, \qquad (1)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ отличны от нуля. Вынесем за скобки множители $a_1, \ldots, a_n$ и пусть $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = a$. Неравенство (1) примет вид

$$a\left(x + \frac{b_1}{a_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x + \frac{b_n}{a_n}\right) < 0. \qquad (2)$$

Каждый из множителей $x + \frac{b_k}{a_k}$ положителен при $x > -\frac{b_k}{a_k}$ и отрицателен при $x < -\frac{b_k}{a_k}$. Он меняет знак лишь при переходе через точку $-\frac{b_k}{a_k}$. Отсюда следует, что все произведение, стоящее в левой части неравенства (2), может изменить знак лишь при переходе через одну из этих точек: они делят числовую ось на несколько интервалов, на каждом из которых произведение знака не меняет. Поэтому достаточно взять на каждом интервале «пробную точку» и узнать знак выражения в этой точке — тот же знак оно будет иметь на всем интервале. Описанный метод решения неравенств называют *методом интервалов.*

Проще всего обстоит дело, если все точки $-\frac{b_k}{a_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ различны. В этом случае достаточно узнать знак выражения

$a\left(x+\frac{b_1}{a_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x+\frac{b_n}{a_n}\right)$ на правом луче, т. е. при значениях x, которые больше всех чисел $-\frac{b_k}{a_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (он совпадает со знаком числа a), и провести волнообразную «кривую знаков», переходящую из нижней полуплоскости в верхнюю и обратно в точках $-\frac{b_k}{a_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пример 1. Решим неравенство

$$5(3x-6)(2x+5)(4x-11)(8-6x) > 0.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$5\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot(-6)(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{11}{4}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right) > 0.$$

Точки $-\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, 2 и $\frac{11}{4}$ делят числовую ось на части: $\left(-\infty;\ -\frac{5}{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{2};\ \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3};\ 2\right)$, $\left(2;\ \frac{11}{4}\right)$, $\left(\frac{11}{4};\ +\infty\right)$. На правом луче $\left(\frac{11}{4};\ +\infty\right)$ знак левой части неравенства совпадает со знаком коэффициента -720, т. е. отрицателен. Поэтому кривая знаков имеет вид, изображенный на рисунке 22, *а*. Значит, решением неравенства является объединение интервалов $\left(-\frac{5}{2};\ \frac{4}{3}\right)$ и $\left(2;\ \frac{11}{4}\right)$.

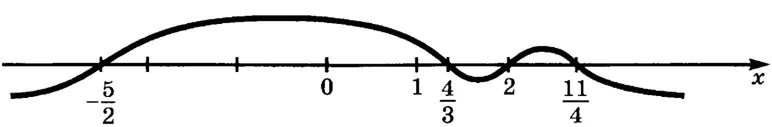


Рис. 22, *а*

Пример 2. Решим неравенство

$$(x^2-4x+3)(x^2+4x+4)(x^2+2x+4) > 0.$$

Решение. Корнями уравнения $x^2-4x+3=0$ являются числа 1 и 3, уравнения $x^2+4x+4=0$ — число -2, а уравнение $x^2+2x+4=0$ действительных корней не имеет. Числа -2, 1, 3 разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ 3)$, $(3;\ +\infty)$. Методом пробной точки находим, что решением данного неравенства является объединение интервалов $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 1)$, $(3;\ +\infty)$.

Предоставляем читателю проверить, что решением неравенства

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 4)(x^2 + 2x + 4) \geqslant 0$$

является объединение лучей $(-\infty; 1]$, $[3; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство $x^4 - 34x^2 + 225 < 0$.

Решение. Сначала решим биквадратное уравнение $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$. Полагая $x^2 = z$, получаем квадратное уравнение $z^2 - 34z + 225 = 0$, из которого находим $z_1 = 9$ и $z_2 = 25$. Решая уравнения $x^2 = 9$ и $x^2 = 25$, получаем 4 корня биквадратного уравнения: -3, 3, -5, 5. Значит, $x^4 - 34x^2 + 225 = (x + 5)(x + 3)(x - 3)(x - 5)$, и потому заданное неравенство имеет вид

$$(x + 5)(x + 3)(x - 3)(x - 5) < 0.$$

Изображаем на координатной прямой точки -5, -3, 3, 5 и проводим кривую знаков (рис. 22, *б*). Решением неравенства является объединение интервалов $(-5; -3)$ и $(3; 5)$.

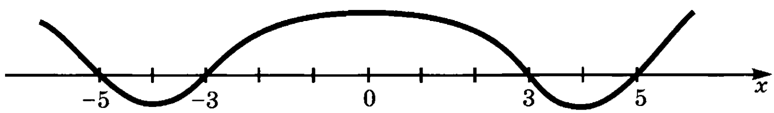


Рис. 22, *б*

Случай, когда среди множителей в левой части неравенства (2) есть повторяющиеся, легко сводится к разобранному выше, если принять во внимание, что четная степень любого многочлена принимает лишь неотрицательные значения. Например, чтобы решить неравенство $-4(x - 3)^7(x - 5)^4(x - 6)(x + 2)^3 > 0$, надо решить методом интервалов неравенство $-4(x - 3)(x - 6)(x + 2) > 0$ и исключить точки, где множитель $(x - 3)^6(x - 5)^4(x + 2)^2$ обращается в нуль. Получаем ответ

$$(-\infty; -2) \cup (3; 5) \cup (5; 6).$$

Аналогично решают неравенства, левая часть которых имеет вид дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Пример 4. Решим неравенство $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} < 0$.

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, переписываем данное неравенство в виде

$$\frac{x^2(x - 1)(x - 2)}{(x - 6)(x + 5)} < 0.$$

Точками, в которых множители меняют знаки, являются -5, 1, 2, 6. Они разбивают числовую ось на интервалы $(-\infty; -5)$, $(-5; 1)$,

$(1; 2)$, $(2; 6)$, $(6; +\infty)$. С помощью кривой знаков находим интервалы, где выполняется неравенство: $(-5; 1)$ и $(2; 6)$. При этом из интервала $(-5; 1)$ надо удалить точку 0, так как в этой точке выражение обращается в нуль. Итак, получаем ответ в виде

$$(-5; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 6).$$

Упражнения

122. Решите неравенства методом интервалов:

1) $(x + 1)(x + 3) > 0$;
2) $(x + 2)(x - 5) < 0$;
3) $x^2 - x - 2 < 0$;
4) $x^2 + 6x + 5 \geqslant 0$;
5) $(2x - 4)(3x + 6)(x - 7) > 0$;
6) $x^3 - 4x < 0$;
7) $x^3 + 2x^2 < 0$;
8) $(x^2 - 16)(x^2 - 25) \leqslant 0$;
9) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 > 0$;
10) $x^3 - 6x^2 + 5x < -12$;
11) $\dfrac{x + 2}{x - 5} < 0$;
12) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 16} \geqslant 0$;
13) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x + 3} > 0$;
14) $\dfrac{x^4 - 625}{x^4 - 256} \leqslant 0$;
15) $\dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x + 7} \geqslant 0$;
16) $\dfrac{x - 1}{(x + 2)(x + 5)} \leqslant 0$;
17) $\dfrac{(x - 2)(x + 2)(x - 5)}{(x - 3)(x + 4)(x - 8)} \geqslant 0$;
18) $\dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{(x - 2)(x^2 - 8)} \leqslant 0$;
19) $\dfrac{x - 3}{2 - x} > 1$;
20) $\dfrac{4 - x}{x - 5} < \dfrac{3}{4}$;
21) $\dfrac{3x}{x - 3} < \dfrac{1}{3}$;
22) $\dfrac{2x - 7}{3 - x} < 3$;
23) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} + \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} > 2x - \dfrac{1}{4x + 8}$;
24) $\dfrac{x}{x^2 + 7x + 12} < \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}$;
25) $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x - 2)^2} < 5$;
26) $\dfrac{1}{1 + 2x} - \dfrac{2}{2 + 3x} + \dfrac{3}{3 + 4x} < \dfrac{4}{4 + 5x}$.

5. Доказательство неравенств. Неравенства, выполняющиеся для всех x из некоторого числового множества X, называются *тождественными* на этом множестве. Доказательство тождественности неравенств сводится обычно к использованию основных свойств неравенств и того, что $x^2 \geqslant 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. При этом доказываемое неравенство $P(x) \leqslant Q(x)$ полезно переписать в виде $Q(x) - P(x) \geqslant 0$.

Пример 1. Докажем, что $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, если $x > 0$.

Решение. Это неравенство равносильно неравенству $x + \frac{1}{x} - 2 \geqslant 0$, т. е. $\frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geqslant 0$. Перепишем его в виде $\frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$. Так как $(x-1)^2 \geqslant 0$ для всех x, а $x > 0$ по условию, то неравенство доказано.

Пример 2. Докажем неравенство $x^4 - 7x^2 - 2x + 20 > 0$.

Решение. Преобразуем левую часть этого неравенства следующим образом: $x^4 - 7x^2 - 2x + 20 = (x^2 - 4)^2 + (x - 1)^2 + 3$. Так как $(x^2 - 4)^2 + (x - 1)^2$ является суммой заведомо неотрицательных слагаемых и $3 > 0$, то для всех x имеем $x^4 - 7x^2 - 2x + 20 > 0$.

Упражнения

123. Докажите, что:
1) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$;
2) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$;
3) $x^4 - 2x^2 + 4x + 3 > 0$, $x \in \boldsymbol{R}_+$;
4) $3(1 + x^2 + x^4) \geqslant (1 + x + x^2)^2$, $x \in \boldsymbol{R}_+$.

124. Докажите, что если для уравнения $x^2 + px + q = 0$ дискриминант D неотрицателен, то это же верно и для уравнения
$$x^2 + (p^2 + pq)x + p^3q + p^2q + q^3 - 2pq^2 = 0.$$

125. Решите уравнение
$$a^3(b-c)(x-b)(x-c) + b^3(c-a)(x-c)(x-a) + c^3(a-b)(x-a)(x-b) = 0.$$

126. Докажите, что:
1) при любом значении $\lambda \neq -1$ дискриминант D уравнения
$$(x-a)(x-c) + \lambda(x-b)(x-d) = 0,$$
где $a < b < c < d$, положителен;
2) при любых значениях a, b, c, d дискриминант уравнения
$$(x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) = 0$$
неотрицателен.

127. Пусть $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что по крайней мере одно из уравнений
$$x^2 + p_1x + q_1 = 0, \quad x^2 + p_2x + q_2 = 0$$
имеет неотрицательный дискриминант.

128. Каковы должны быть p и q для того, чтобы корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$ были числа p и q?

6. Отыскание рациональных корней уравнений с целыми коэффициентами. Любое уравнение $a_nx^n + \ldots + a_0 = c$, имеющее рациональные коэффициенты, равносильно уравнению того же вида, имеющему целые коэффициенты. Например, если умножить обе части уравнения $\frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{6} = 0$ на 60, то получится равносильное уравнение $45x^3 - 24x^2 - 10 = 0$, имеющее целые коэффициенты.

Необходимое условие для того, чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ была корнем уравнения

$$a_nx^n + \ldots + a_0 = 0,\ a_n \neq 0, \tag{1}$$

с целыми коэффициентами, формулируется следующим образом.

Для того чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ была корнем уравнения (1), *необходимо, чтобы числитель p этой дроби был делителем свободного члена a_0, а знаменатель q — делителем коэффициента a_n при старшем члене.*

Таким образом, чтобы найти рациональные корни $\frac{p}{q}$ уравнения (1), *можно:*

1) *найти все целые делители свободного члена* (как положительные, так и отрицательные);

2) *найти все натуральные делители коэффициента a_n при старшем члене;*

3) *составить все дроби с найденными возможными значениями числителя и знаменателя;*

4) *из найденных дробей отобрать те, которые удовлетворяют заданному уравнению.*

В самом деле, пусть $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения (1). Тогда выполняется равенство

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на q^n, получим:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0. \tag{2}$$

Значит,

$$\begin{aligned} a_0q^n &= -a_np^n - a_{n-1}p^{n-1}q - \ldots - a_1pq^{n-1} = \\ &= -p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1}). \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства делится на p, поэтому на p делится и число a_0q^n. Но мы предположили, что дробь $\frac{p}{q}$ несократима и потому числа p и q взаимно просты. Но тогда взаимно просты и числа p и q^n, а потому a_0q^n может делиться на p, лишь если a_0 делится на p. Значит, p — делитель числа a_0. Аналогично доказывается, что q — делитель числа a_n.

Сформулированное необходимое условие упрощается, если уравнение (1) приведенное, т. е. если $a_n = 1$. В этом случае a_n имеет единственный натуральный делитель 1 и потому все рациональные корни уравнения являются целыми числами — делителями свободного члена a_0. Итак, мы доказали, что *все рациональные корни приведенного уравнения с целыми коэффициентами являются делителями его свободного члена.*

Пример 1. Найдем корни уравнения

$$2x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 8x + 6 = 0. \qquad (3)$$

Решение. Свободный член 6 заданного уравнения имеет целые делители ±1, ±2, ±3, ±6. Коэффициент 2 при старшем члене имеет натуральные делители 1 и 2. Значит, надо испытать следующие числа: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$. Подставляя эти числа в уравнение (3), отбираем следующие корни: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что многочлен $2x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 8x + 6$ делится на $2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, т. е. на $2x^2 - 3x + 1$. Выполнив деление, получим частное $x^2 + 10x + 6$. Чтобы найти остальные корни, надо решить уравнение $x^2 + 10x + 6 = 0$. Его корнями являются $x_{3,4} = -5 \pm \sqrt{19}$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = -5 \pm \sqrt{19}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^4 + 3x^3 - 24x^2 + 17x + 3 = 0.$$

Решение. Так как это уравнение имеет целые коэффициенты и является приведенным, то его рациональные корни должны быть целыми и являться делителями свободного члена 3. Значит, надо проверить числа ±1, ±3. Корнями нашего уравнения являются $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Делим многочлен $x^4 + 3x^3 - 24x^2 + 17x + 3$ на $(x - 1)(x - 3)$, т. е. на $x^2 - 4x + 3$. Получаем частное $x^2 + 7x + 1$. Корнями уравнения $x^2 + 7x + 1 = 0$ являются $x_{3,4} = \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}$.

Некоторые делители свободного члена можно отбросить, воспользовавшись следующим утверждением.

Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ *является корнем уравнения*

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = 0 \qquad (4)$$

с целыми коэффициентами, то при любом целом значении k число $p - kq$ является делителем числа $f(k)$.

В частности, при $k = 1$ получаем, что $p - q$ должно являться делителем $f(1)$, а при $k = -1$ получаем, что $p + q$ — делитель $f(-1)$.

Пример 3. Решим уравнение

$$6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0.$$

Решение. Делителями свободного члена являются числа ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12, а коэффициента при старшем члене — числа 1, 2, 3, 6. Образуем несократимые дроби

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12,$$
$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3},\ \pm\frac{1}{6}.$$

Рациональные корни уравнения (если они существуют) должны находиться среди отобранных чисел. Для их нахождения применим сформулированное выше правило. Возьмем $k = 1$. Тогда $f(1) = 4$ должно делиться на $p - q$, где $\frac{p}{q}$ — испытываемое число. Разность $p - q$ принимает такие значения:

$$0,\ -\underline{2},\ \underline{1},\ -3,\ \underline{2},\ -\underline{4},\ 3,\ -5,\ 5,\ -7,\ 11,\ -13,$$
$$-\underline{1},\ -3,\ \underline{1},\ -5,\ -\underline{2},\ -\underline{4},\ -\underline{1},\ 5,\ \underline{1},\ -7,\ -5,\ -7$$

(для отрицательных дробей считаем отрицательным числитель). Число 4 делится лишь на подчеркнутые числа, которые соответствуют числам -1, 2, 3, -3, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$.

Возьмем теперь $k = -1$. Тогда $f(-1) = 12$ должно делиться на сумму $p + q$, которая принимает следующие значения: 0, $\underline{3}$, 4, $-\underline{2}$, $\underline{3}$, 5, 4, $\underline{2}$, 5, 7. Лишь подчеркнутые числа удовлетворяют этому условию. Они соответствуют дробям 2, -3, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$. Далее берем $k = 2$. Тогда $f(2) = 180$ должно делиться на $p - 2q$. Но для наших дробей $p - 2q$ равно 0, $-\underline{5}$, $-\underline{3}$, 7. Мы отобрали дроби -3 и $\frac{1}{2}$. Подставляя числа -3 и $\frac{1}{2}$ в заданное уравнение, получаем, что они являются его корнями: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Таким образом, многочлен $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ делится на $(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 + 2{,}5x - 1{,}5$. Выполняя деление, получаем частное $6x^2 + 4x - 8$. Корнями уравнения $6x^2 + 4x - 8 = 0$ являются $x_{3,4} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3}$.

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3}$.

Упражнения

129. Решите уравнения:

1) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1 = 0$;
2) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$;
3) $4x^4 + 8x^3 - x^2 - 8x - 3 = 0$;
4) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 22x + 55 = 0$;
5) $2x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 20x^2 + 60x - 36 = 0$;
6) $x^6 - x^5 - 8x^4 + 14x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$.

7. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля. Мы знаем, что $|a| = |b|$, если либо $a = b$, либо $a = -b$. Поэтому, чтобы решить уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$, надо решить уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$, после чего объединить их корни.

Пример 1. Решим уравнение $|3x - 1| = |2x + 3|$.

Решение. Задача сводится к решению двух уравнений: $3x - 1 = 2x + 3$ и $3x - 1 = -(2x + 3)$. Из первого уравнения находим $x_1 = 4$, а из второго $x_2 = -\frac{2}{5}$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{2}{5}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$|3x^2 - 28x + 19| = |x^2 - 20x + 13|.$$

Решение. Решаем квадратные уравнения

$3x^2 - 28x + 19 = x^2 - 20x + 13$ и $3x^2 - 28x + 19 = -(x^2 - 20x + 13)$. Из первого уравнения находим $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, а из второго $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

Если уравнение имеет вид $|f(x)| = g(x)$, то надо решить уравнения $f(x) = g(x)$ и $-f(x) = g(x)$, после чего отобрать из полученных корней те, при которых $g(x) \geqslant 0$.

Пример 3. Решим уравнение $|3x - 1| = 7x + 11$.

Решение. Решаем уравнение $3x - 1 = 7x + 11$ и получаем корень $x_1 = -3$. Далее решаем уравнение $-(3x - 1) = 7x + 11$ и получаем корень $x_2 = -1$. Подставляем эти корни в правую часть уравнения и видим, что она неотрицательна при $x = -1$. Значит, $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Во многих случаях оказывается полезным разбиение оси на промежутки, внутри которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют постоянный знак[1]. Эти промежутки отделяются друг от друга точками, в которых хоть одно выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль. После этого решают уравнение на каждом участке и отбирают те из полученных корней, которые лежат на своих участках.

Пример 4. Решим уравнение $|x| = |3x - 2| - x - 1$.

Решение. Выражение x обращается в нуль при $x = 0$, а $3x - 2$ — при $x = \frac{2}{3}$. Эти точки разбивают числовую ось на промежутки $(-\infty;\ 0]$, $\left(0;\ \frac{2}{3}\right]$, $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$. На первом из них $x < 0$ и $3x - 2 < 0$, и потому $|x| = -x$, $|3x - 2| = -(3x - 2)$. Значит, уравнение принимает вид $-x = -(3x - 2) - x - 1$. Корнем полученного уравнения является число $\frac{1}{3}$, не принадлежащее $(-\infty;\ 0]$. На $\left(0;\ \frac{2}{3}\right]$ имеем $x > 0$, $3x - 2 < 0$, $|x| = x$, $|3x - 2| = -(3x - 2)$, и уравнение принимает вид $x = -(3x - 2) - x - 1$. Это уравнение имеет корень $x_1 = \frac{1}{5}$, принадлежащий промежутку $\left(0;\ \frac{2}{3}\right]$. Наконец, на $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$ имеем $|x| = x$, $|3x - 2| = 3x - 2$, и уравнение принимает вид $x = 3x - 2 - x - 1$. Это уравнение имеет корень $x_2 = 3$, принадлежащий $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$. Значит, своему промежутку принадлежат два из найденных корней, а именно $\frac{1}{5}$ и 3.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 3$.

Пример 5. Решим уравнение $|7 - 2x| = |5 - 3x| + |x + 2|$.

Решение. Из равенств $7 - 2x = 0$, $5 - 3x = 0$, $x + 2 = 0$ находим точки разбиения оси на промежутки $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{3}$ и -2. Промежутки имеют вид $(-\infty;\ -2]$, $\left(-2;\ \frac{5}{3}\right]$, $\left(\frac{5}{3};\ \frac{7}{2}\right]$ и $\left(\frac{7}{2};\ +\infty\right)$. На $(-\infty;\ -2]$

---

[1] Если есть точки, в которых левая или правая часть уравнения не имеет значений, их также следует отметить на оси.

получаем уравнение $7 - 2x = 5 - 3x - x - 2$. Его корень $x_1 = -2$ принадлежит $(-\infty; -2]$. На $\left(-2; \frac{5}{3}\right]$ уравнение обращается в тождество $7 - 2x = 5 - 3x + x + 2$. Поэтому любая точка этого промежутка удовлетворяет уравнению. На промежутках $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{2}\right]$ и $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ получаем уравнения, не имеющие на них корней.

Ответ: $\left[-2; \frac{5}{3}\right]$.

Рассмотрим теперь неравенства, содержащие знак модуля. Сначала надо найти точки, в которых не определена левая или правая часть неравенства, а потом заменить неравенство соответствующим уравнением и решить его. Все полученные точки делят числовую ось на промежутки. Выбирая на этих промежутках контрольные точки, проверяем, удовлетворяется на них заданное неравенство или нет. Ответом к задаче служит объединение промежутков, где выполняется данное неравенство.

Пример 6. Решим неравенство $|x| \leqslant 2|x - 4| + x - 2$.

Решение. Точки 0 и 4 делят числовую ось на промежутки $(-\infty; 0]$, $(0; 4]$ и $(4; +\infty)$. На $(-\infty; 0]$ уравнение $|x| = 2|x - 4| + x - 2$ принимает вид $-x = 2(4 - x) + x - 2$. Это уравнение не имеет корней. На $(0; 4]$ имеем уравнение $x = 2(4 - x) + x - 2$, корень которого равен 3. Этот корень принадлежит $(0; 4]$. На $(4; +\infty)$ имеем уравнение $x = 2(x - 4) + x - 2$ с корнем 5, принадлежащим $(4; +\infty)$. Итак, уравнение $|x| = 2|x - 4| + x - 2$ имеет корни 3 и 5. Эти корни разбивают числовую ось на промежутки $(-\infty; 3)$, $(3; 5)$ и $(5; +\infty)$. На $(-\infty; 3)$ берем контрольную точку $x = 0$. Подставляя $x = 0$, получаем верное неравенство $0 \leqslant 2|0 - 4| + 0 - 2$, т. е. $0 \leqslant 6$. Значит, $(-\infty; 3)$ принадлежит решению. Аналогично и $(5; +\infty)$ принадлежит ему. Принадлежат решению и точки 3 и 5, поскольку неравенство нестрогое.

Ответ: $(-\infty; 3]$ и $[5; +\infty)$.

Упражнения

130. Решите уравнение:

1) $|7x - 1| = |2x + 4|$;
2) $|9x - 8| = 4x + 1$;
3) $|x + 1| + |2 - x| = |x + 3|$;
4) $|x^2 - 6x + 7| = |3x - 11|$;
5) $x^2 = |1 - 2x^2|$;
6) $|x^2 - 1| = x|x - 2|$.

131. Решите неравенство:

1) $|13 - 2x| \geqslant |4x - 9|$;
2) $|x - 1| > |3x - 1| - 10$;
3) $|x^2 - 3x + 2| \geqslant |x^2 + 3x + 2|$;
4) $|x - 2| + |3 - x| > 2 + x$.

ГЛАВА 3

Функции и последовательности

§ 1. Числовые функции и способы их задания

1. Введение. Явления природы тесно связаны друг с другом. В большинстве случаев законы, управляющие взаимозависимостью явлений, весьма сложны из-за тесного переплетения различных факторов. Но среди громадного многообразия явлений ученые выделили такие, в которых взаимосвязь величин настолько тесна, что, зная значение одной из них, можно узнать значение другой величины. Простейшие примеры таких взаимозависимостей дает геометрия. Например, зная длину стороны квадрата или радиус круга, можно найти площадь этой фигуры, зная длину стороны куба, можно вычислить его объем, и т. д.

В физике также встречаются зависимости между величинами, в которых значение одной величины однозначно определяет значение другой величины. Например, зная промежуток времени, протекший с начала свободного падения, можно найти путь, пройденный за этот промежуток времени падающим телом.

Будем называть зависимость величины y от величины x *функциональной*, если каждому рассматриваемому значению величины x соответствует определенное значение величины y. Поскольку после выбора единиц измерения значения величин выражаются числами, для изучения функциональных зависимостей между величинами применяют понятие *числовой функции*, т. е. изучают определенного вида зависимости между числами. В этой главе мы будем изучать числовые функции.

Не следует смешивать функциональную зависимость величин с причинной зависимостью. Хоть путь, пройденный падающим камнем, находится в функциональной зависимости от времени, протекшего с начала падения, причиной падения камня является, разумеется, не течение времени, а сила земного тяготения.

Упражнения

132. Среди нижеследующих величин укажите такие, что вторая из них находится в функциональной зависимости от первой. Выясните также, в каких случаях первая величина находится в функциональной зависимости от второй.

1) Дата и температура воздуха в данном месте в 12 ч дня.

2) Температура воздуха и его давление.

3) Дата и количество автомобилей, выпущенных за данные сутки заводом ВАЗ.

4) Площадь поверхности куба и его объем.

5) Длина диагонали квадрата и его периметр.

6) Длина диагонали прямоугольника и его площадь.

7) Радиус круга и площадь правильного шестиугольника, вписанного в этот круг.

8) Величина нагрузки на данную балку и наибольший прогиб этой балки (нагрузка распределяется равномерно).

9) Удлинение данного металлического стержня при нагревании и температура нагрева.

133. Укажите, от каких величин зависит удлинение металлического стержня при нагревании. Какие из этих величин надо считать заданными для того, чтобы удлинение функционально зависело от оставшейся величины?

134. Приведите известные вам примеры функций двух или трех переменных из физики и геометрии.

135. Является ли широта точки земной поверхности функцией ее долготы? Является ли функцией долготы широта точки, где находится самолет, совершающий рейс Москва — Ташкент?

136. Является ли давление воздуха в данной точке земной поверхности функцией времени? Является ли время функцией давления?

137. Является ли момент наступления астрономического полудня в данной точке земной поверхности функцией ее широты? А ее долготы? Ответьте на те же вопросы для момента наступления декретного полудня. Является ли этот момент функцией номера часового пояса?

138. Является ли широта точки земной поверхности функцией момента наступления астрономического полудня? А долгота этой точки?

139. Является ли широта точки земной поверхности в Северном полушарии функцией максимального угла подъема Солнца над линией горизонта?

140. Является ли уровень воды Москвы-реки у Каменного моста в 12 ч дня функцией от числа автомобилей, выпущенных за предыдущие сутки?

2. Числовые функции. Введем основное определение.

Определение. Пусть X — числовое множество. Правило, сопоставляющее каждому числу x из X некоторое число y, называют *числовой функцией, заданной на* X. Переменную, «пробегающую» множество X, называют *аргументом* функции.

Мы будем обычно обозначать аргумент функции буквой x. Сами числовые функции будем обозначать буквами f, φ, g и т. д. Число b, которое функция f сопоставляет числу $a \in X$, называют ее *значением* при $x = a$ и обозначают $f(a)$, $b = f(a)$. Множество X называют *областью задания* или областью определения функции f и обозначают $D(f)$. С каждой функцией связано множество

$\{f(x) | x \in X\}$. Его называют *областью значений* (или *множеством значений*) *функции* f и обозначают $E(f)$.

Чтобы задать функцию f, надо указать ее область задания X и правило, по которому каждому $x \in X$ сопоставляется число $f(x)$. Обычно это правило дается в виде некоторого выражения, показывающего, какие операции нужно выполнить над x, чтобы получить $f(x)$. По мере расширения совокупности операций расширяется совокупность функций, которые можно задавать выражениями. Для простоты функцию, заданную на множестве X некоторым выражением, будем обозначать тем же выражением с указанием множества X. Если функция задана выражением на всей области существования этого выражения, будем обозначать ее лишь указанием выражения.

Пример 1. Каждому $b \in \boldsymbol{R}$ и числовому множеству X соответствует функция, значение которой для любого $x \in X$ равно b. Такую функцию называют *постоянной на* X.

Пример 2. Функция x, $x \in X$, ставит в соответствие каждому числу x из X это же самое число.

Пример 3. Функция x^2, $x \in [-2; 5]$, задана на отрезке $[-2; 5]$ и ставит в соответствие каждому числу x из этого отрезка его квадрат. При изменении x от -2 до 5 значения x^2 сначала убывают от 4 до 0, а потом возрастают от 0 до 25. Поэтому для данной функции имеем $D(f) = [-2; 5]$, $E(f) = [0; 25]$.

Пример 4. Функция x^2 задана на всем множестве $\boldsymbol{R}$. Для нее $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$. Она отличается от функции примера 3, так как различны области задания этих функций.

Упражнения

141. Найдите область определения функции:

1) $\dfrac{1}{x^2 - 4}$; 3) $\dfrac{1}{x^4 - 10x^2 + 9}$;

2) $\dfrac{x}{|x|}$; 4) $\dfrac{x^3 + 8}{20x^4 - 19x^3 - 402x^2 - 19x + 20}$.

142. Балка длиной l, заделанная обоими концами в стену, прогибается под действием равномерно распределенной нагрузки Q. Величина прогиба y балки в точке, находящейся на расстоянии x от ее левого конца, выражается формулой

$$y = \frac{Q}{24EJl} x^2(l - x)^2,$$

где числа E и J зависят от материала, из которого изготовлена балка, и формы ее поперечного сечения. Какова область существования выражения, стоящего в правой части формулы? Какова область задания функции? Совпадают ли эти множества?

143. Пусть $f(x)$ — второй десятичный знак после запятой числа x. Найдите $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

144. Найдите $f(5)$, $f(-4)$, $f(a+1)$, если $f(x) = x + |x|$.

145. Найдите такой квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, что $f(0) = 3$, $f(1) = 7$, $f(2) = 3$.

146. Выразите площадь правильного шестиугольника как функцию от длины его стороны.

147. Выразите площадь описанного квадрата как функцию радиуса окружности.

148. Пусть X — множество всех положительных рациональных чисел x, $x = \frac{p}{q}$. Являются ли натуральные числа p и q функциями от x?

149. Пусть X — множество всех положительных рациональных чисел x, $x = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые натуральные числа. Являются ли p и q функциями от x?

150. Пусть $x \geqslant 0$ и y — такое число, что $y^2 = x$. Является ли y функцией от x?

151. X и Y — множество положительных рациональных чисел. Определяется ли функция на X следующим правилом: числу $x \in X$ ставится в соответствие такое число $y \in Y$, что $y^2 = x$?

152. Приведите примеры функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $-1 < f(x) < 1$; 2) $|f(x)| \leqslant 2$.

153. Дана функция f, где $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x-1}{x+1}$. Вычислите $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(a)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(a^2 - 1)$, $f\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$.

154. Найдите область определения функции:

1) $\dfrac{3x+1}{x^2 - 6x + 8}$; 3) $\dfrac{7x-5}{x^2-4}$; 5) $x + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x-3}}$;

2) $\dfrac{x^2+1}{x^3 - 2x - 4}$; 4) $\dfrac{6x+2}{x^3-27}$; 6) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}$.

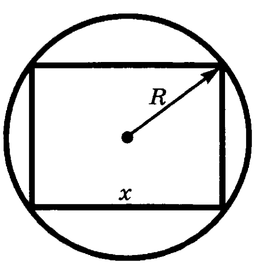


Рис. 23

155. В круг радиуса R вписан прямоугольник, одна из сторон которого равна x (рис. 23). Выразите площадь прямоугольника как функцию от x. Найдите область определения этой функции.

156. В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник высотой x (рис. 24). Выразите площадь этого прямоугольника как функцию от x. Найдите область определения этой функции.

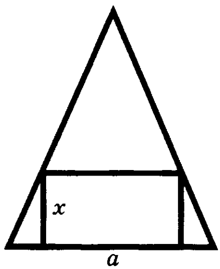


Рис. 24

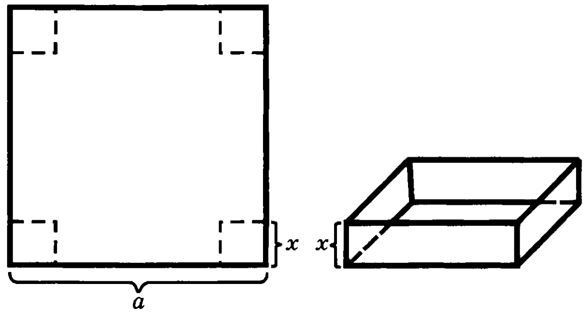


Рис. 25

157. Из квадрата со стороной a вырезаны по углам квадратики со стороной x и из полученной фигуры сделана открытая коробка (рис. 25). Выразите ее объем как функцию от x. Найдите область определения этой функции.

158. Известно, что объем прямого кругового цилиндра с высотой H и радиусом основания R выражается формулой $V = \pi R^2 H$, а его полная поверхность — формулой $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. Выразите полную поверхность цилиндра заданного объема V как функцию его высоты.

159. Выразите объем V цилиндра при заданной полной поверхности S как функцию его высоты H.

160. В цилиндре задан периметр осевого сечения $2p$. Выразите объем этого цилиндра как функцию радиуса R; выразите объем как функцию высоты H.

161. Два пункта A и B находятся в стороне от железной дороги (рис. 26). Строится шоссе из пункта A до станции C этой дороги и от станции C до пункта B. Выразите длину шоссе как функцию расстояния x от C до D (считая известным $AB = l$ или $DE = s$).

162. Всадник едет из пункта A в пункт B (рис. 27). Часть пути AC проходит по лугу, а часть пути CB — по песку. Скорость движения по лугу равна v_1, а скорость движения по песку v_2. Выразите время, затраченное всадником на движение, как функцию расстояния x от C до D.

163. В треугольнике ABC на основании AC дана точка M (рис. 28). Проведена прямая $QR \parallel AC$. Выразите площадь треугольника MQR как

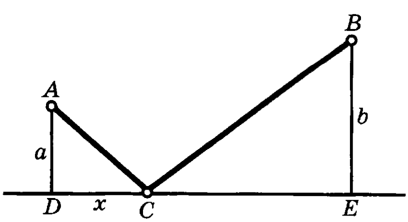


Рис. 26

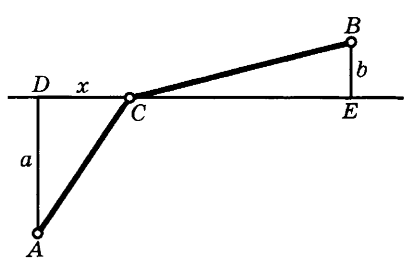


Рис. 27

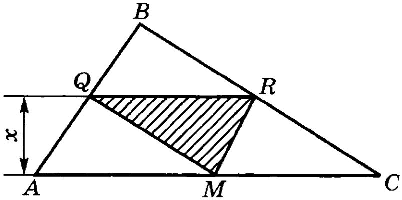


Рис. 28

функцию расстояния x между прямыми QR и AC (длина основания a в треугольнике и его высота h даны).

164. Задана площадь S равнобочной трапеции и угол 30° при ее основании. Выразите периметр трапеции как функцию от длины x боковой стороны.

165. В круг радиуса R вписана крестообразная фигура $ABCDEFGHIKLM$ с параллельными противоположными сторонами и такая, что $AM = FG = CD = IK = x$ (рис. 29). Выразите ее площадь как функцию от x.

166. Дан сегмент радиуса R и высотой h. В него вписан прямоугольник высотой x (рис. 30). Выразите периметр и площадь прямоугольника как функции от x.

167. Выразите площадь и периметр прямоугольного треугольника с данной высотой h как функцию длины катета x.

168. Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди в них $p\%$ и $q\%$ соответственно. Сплавив эти куски вместе, получили сплав с процентным содержанием меди в нем $r\%$. Выразите r как функцию отношения масс этих кусков.

169. Из сосуда с V л p-процентного раствора кислоты отлили x л раствора и долили x л воды. После чего повторили эту операцию еще дважды. Выразите концентрацию получившегося раствора как функцию от x.

170. Чтобы измерить глубину пропасти, в нее бросили камень и измерили время t, прошедшее до момента, когда услышали удар камня о дно пропасти. Выразите глубину пропасти h как функцию от t, если скорость звука равна 340 м/с, а ускорение свободного падения равно 9,81 м/с^2 (сопротивлением воздуха пренебречь).

3. Кусочное задание функций. Иногда функции задают различными выражениями на разных участках.

Пример 1. Парашютист прыгает из «зависшего» вертолета. Первые t_1 секунд он падает свободно, а затем раскрывает парашют и t_2 секунд падает до приземления с постоянной скоростью v. Выразите расстояние s парашютиста от вертолета как функцию времени t.

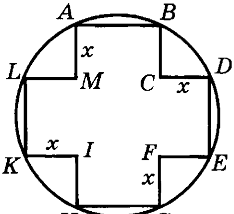


Рис. 29

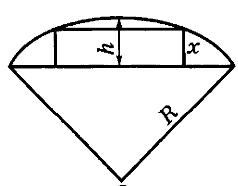


Рис. 30

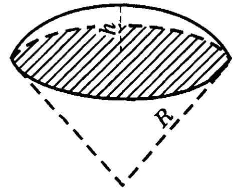


Рис. 31

Р е ш е н и е. В течение первых t_1 секунд действует закон свободного падения, согласно которому $s = \frac{gt^2}{2}$. По истечении t_1 секунд расстояние от парашютиста до вертолета равно $\frac{gt_1^2}{2}$, а дальше оно увеличивается равномерно со скоростью v. Поэтому в момент времени t, где $t_1 < t < t_1 + t_2$, это расстояние равно $\frac{gt_1^2}{2} + v(t - t_1)$. В момент времени $t_1 + t_2$ парашютист приземляется, и до того момента, когда он покинет точку приземления или вертолет изменит свое положение, это расстояние равно $\frac{gt_1^2}{2} + vt_2$.

Значит, выражение данной функции имеет вид

$$s = \begin{cases} \frac{gt^2}{2} \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \frac{gt_1^2}{2} + v(t - t_1) \text{ при } t_1 < t \leqslant t_1 + t_2, \\ \frac{gt_1^2}{2} + vt_2 \text{ при } t > t_1 + t_2. \end{cases}$$

П р и м е р 2. Объем шарового сегмента (рис. 31) выражается формулой $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, где R — радиус шара и h — высота сегмента. Пробирка имеет форму цилиндра высотой H и радиуса R, заканчивающегося внизу полушаром. Выразите объем воды, налитой в пробирку, как функцию высоты x столба воды.

Р е ш е н и е. Если $x \leqslant R$, то вода имеет форму шарового сегмента и потому ее объем равен $\pi x^2\left(R - \frac{x}{3}\right)$. Если $R < x \leqslant R + H$, то имеем полушар радиуса R и цилиндр высотой $x - R$ и радиуса R, а потому

$$V = \frac{2\pi R^3}{3} + \pi R^2(x - R) = \pi R^2 x - \frac{\pi R^3}{3}.$$

Значит,

$$V = \begin{cases} \pi x^2\left(R - \frac{x}{3}\right), \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant R, \\ \pi R^2 x - \frac{\pi R^3}{3}, \text{ если } R < x < R + H. \end{cases}$$

Пример 3. Найдем выражение для функций $[x]$ и $\{x\}$ (целой и дробной частей числа x).

Решение. Если $n \leqslant x < n + 1$, то $[x] = n$ и $\{x\} = x - n$. Здесь мы имеем бесконечно много различных выражений для функций.

В приведенных выше примерах функция задавалась различными выражениями на разных промежутках. Иногда функция задается различными выражениями на множествах более сложной структуры. Примером может служить *функция Дирихле* D, где

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если число } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Упражнения

171. Найдите $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $f(0)$, $f(14)$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{при } -1 \leqslant x < 0, \\ x(3 - x) & \text{при } 0 \leqslant x < 3, \\ \dfrac{x - 1}{x + 1} & \text{при } 3 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

172. Окно состоит из прямоугольника шириной a и высотой h и расположенного над ним равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой a (рис. 32). Обозначим через $S(x)$ площадь части окна, лежащей ниже прямой, параллельной основанию прямоугольника и отстоящей от него на расстоянии x. Запишите выражение для $S(x)$.

173. Найдите выражение для функции $\{x - 1\}^3$ при $n \leqslant x < n + 1$.

174. Балка длиной l прогибается под действием нагрузки Q, сосредоточенной в ее середине, причем концы балки свободно лежат на опорах. Прогиб балки в точке, находящейся на расстоянии x от ее левого конца, выражается формулами

$$y = \begin{cases} \dfrac{Ql^3}{48EJ}\left(\dfrac{3x}{l} - \dfrac{4x^3}{l^3}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2}; \\ \dfrac{Ql^3}{48EJ}\left(\dfrac{3(l - x)}{l} - \dfrac{4(l - x)^3}{l^3}\right), & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Найдите прогиб в точках, для которых $x = \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}, \frac{5l}{6}$. Почему при $x = \frac{l}{2}$ оба выражения дают один и тот же результат?

175. Геометрическая фигура состоит из прямоугольника со сторонами a и b, на сторону a которого поставлен равносторонний треугольник (рис. 33). Обозначим через $S(x)$ площадь части фигуры между нижним основанием прямоугольника и прямой, параллельной этому основанию и отстоящей от него на расстоянии x. Напишите выражение для $S(x)$.

176. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $BC = 8$ см и $AC = 10$ см (рис. 34). Обозначим через $S(x)$ площадь части треугольника, отсеченной от

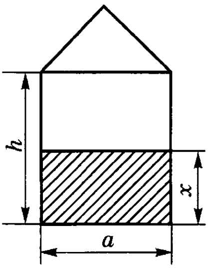


Рис. 32

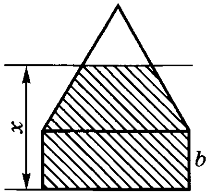


Рис. 33

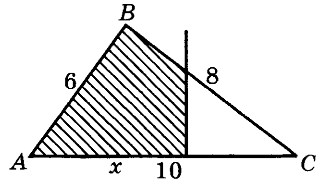


Рис. 34

него прямой, перпендикулярной стороне AC и отстоящей на x см от вершины A. Напишите выражение для $S(x)$.

177. В равнобочной трапеции $ABCD$ (рис. 35), основания которой $AD = a$ и $BC = b$ $(a > b)$, а высота равна h, проведена прямая $MN \parallel AB$, причем $AM = x$. Выразите площадь $S(x)$ фигуры $ABNM$ как функцию от x.

178. Напишите выражение функции $[x - 2]^3 + \{x - 3\}^2$ при $n \leqslant x < n + 1$ (n — целое).

179*. Абсолютно упругий мяч падает с высоты H на поверхность земли, подскакивает, снова падает и т. д. Найдите высоту h мяча в момент времени t. Решите ту же задачу, если скорость мяча после отражения от земной поверхности составляет q-ю часть скорости падения $(0 < q < 1)$.

180. Найдите $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, $f(\sqrt{10})$, $f\left(\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \text{ рационально и } |x| < 1, \\ -x^2, \text{ если } x \text{ иррационально и } |x| < 1, \\ x^2 + 4, \text{ если } x \text{ рационально и } |x| \geqslant 1, \\ -x^2 - 4, \text{ если } x \text{ иррационально и } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

4. График функции. Для наглядного изображения числовых функций используют их графики. Каждой паре чисел $(x; f(x))$, $x \in X$, ставят в соответствие точку $M(x; f(x))$ координатной плоскости. Получившееся при этом множество точек называют графиком функции.

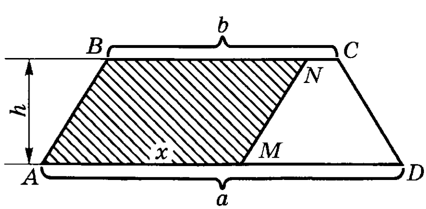


Рис. 35

Определение. Графиком числовой функции f, заданной на числовом промежутке X, называют множество Γ всех точек координатной плоскости, имеющих вид $M(x; f(x))$, где $x \in X$.

Это определение можно записать так:

$$\Gamma \overset{\text{опр.}}{=\!=} \{M(x; f(x)) \mid x \in X\}.$$

Чаще всего графиком функции является некоторая линия на плоскости, быть может распадающаяся на несколько кусков. Однако не всякая линия является графиком некоторой функции. Например, окружность не может быть графиком никакой функции, так как, зная абсциссу точки окружности, мы получаем, вообще говоря, два значения ординаты, а функция сопоставляет каждому $x \in X$ лишь одно число.

Для того чтобы линия Γ *была графиком некоторой функции,* ***необходимо и достаточно****, чтобы всякая прямая, параллельная оси ординат, либо не пересекалась с этой линией, либо пересекала ее в одной точке.* Например, полуокружность на рисунке 36 является графиком некоторой функции.

Если функция f задана некоторым выражением, то часто для построения ее графика выбирают из X несколько значений аргумента x_1, ..., x_n, находят соответствующие значения функции $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ и строят точки $M_1(x_1; f(x_1))$, ..., $M_n(x_n; f(x_n))$. Эти точки принадлежат графику данной функции. Если графиком функции является более или менее гладкая линия, то, соединяя полученные точки гладкой линией, получаем приближенное изображение (эскиз) искомого графика (рис. 37).

Пример. Построим эскиз графика функции $x^2 - 1$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Решение. Выберем для x значения −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3. Им соответствуют значения функции 8, 3, 0, −1, 0, 3, 8. Нанесем на плоскость точки $M_1(-3; 8)$, $M_2(-2; 3)$, $M_3(-1; 0)$, $M_4(0; -1)$, $M_5(1; 0)$, $M_6(2; 3)$, $M_7(3; 8)$ и соединим их гладкой линией. Получим эскиз графика, изображенный на рисунке 38.

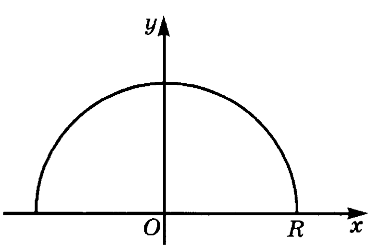


Рис. 36

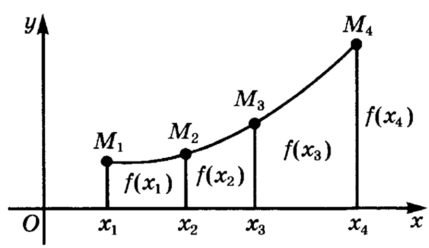


Рис. 37

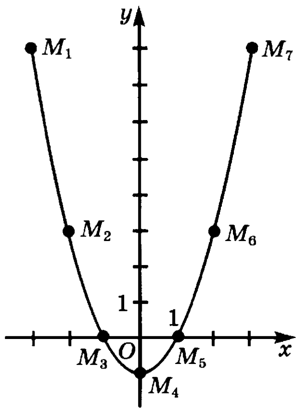


Рис. 38

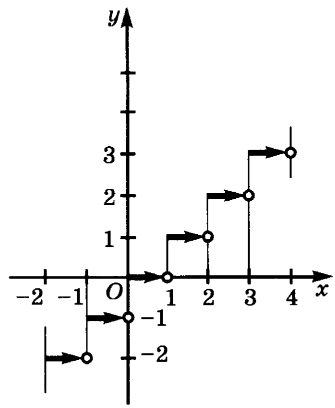


Рис. 39

Не всегда график функции состоит из одного куска. Например, график функции $[x]$ состоит из бесконечного множества промежутков единичной длины (рис. 39). Левый конец этих промежутков принадлежит им, а правый — нет.

Встречаются и «дикие» функции, график которых не содержит ни одного непрерывного куска. Например, график функции Дирихле D (с. 88) над любым сколь угодно малым участком оси абсцисс имеет и точки с ординатой 1, и точки с ординатой 0. Разумеется, такая функция не описывает какие-либо реальные процессы: поскольку любое измерение может быть сделано лишь с определенной точностью, не имеет смысла говорить, рационально или нет некоторое значение физической величины.

Так как эскиз графика строится по нескольким точкам, он имеет ограниченную точность. Эта точность снижается и тем, что реальная линия, дающая эскиз графика, имеет конечную толщину, в то время как «математические линии» считаются не имеющими толщины. Поэтому по графику можно лишь приближенно находить значения функции.

Тем не менее график — очень удобное средство, чтобы получить общее представление о ходе изменения функции. Во многих случаях зависимость между физическими величинами непосредственно задается с помощью графика, вычерченного самопишущим прибором. Например, прибор *термограф* дает кривую, показывающую изменение температуры воздуха с течением времени.

Упражнения

181. Постройте по точкам графики следующих функций:

1) $x^2 + 1$; 2) $x^3 + 1$; 3) $x^4 - 16$; 4) $\dfrac{16}{x^2 + 4}$;

5) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 9}$; 6) $\dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 9}$; 7) $x + \dfrac{4}{x^2}$; 8) $|x + 1|$;

9) $|x| + |x + 1|$; 10) $x + |x|$; 11) $|x - |x + 4||$.

182. Постройте графики функций из упражнений к п. 3.

183. Постройте график прогиба балки с заделанными концами под действием равномерно распределенной нагрузки Q (см. упражнение 142). Положите $\dfrac{Q}{EJ} = 9{,}6 \cdot 10^{-7}$, а l выберите произвольно; для x возьмите значения 0; $0{,}1l$; $0{,}2l$; $0{,}3l$; $0{,}4l$; ...; $0{,}9l$; l. Подберите удобные масштабы по осям координат.

184. Если один конец балки длиной l заделан в стену, а второй свободен (такие балки называют *консольными*, рис. 40, *а*), то при равномерно распределенной нагрузке Q уравнение прогиба имеет вид

$$y = \frac{Q}{24EJl}(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2).$$

Начертите график прогиба балки для этого случая, выбрав удобные масштабы по осям координат.

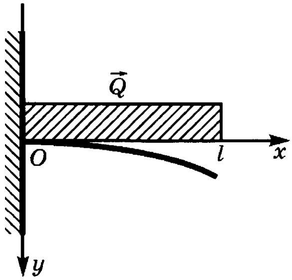
185. Начертите график прогиба балки с опертыми концами под действием сосредоточенной нагрузки Q (рис. 40, *б*) (см. упр. 174).

186. Если концы балки оперты, а нагрузка Q равномерно распределена, то уравнение прогиба балки имеет вид

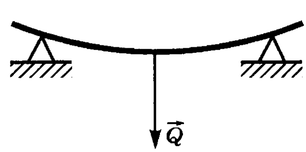
$$y = \frac{Q}{24EJl}(x^4 - 2lx^3 + l^3x).$$

Начертите график этой функции в том же масштабе, что и в упражнении 185. Сравните его с графиком упражнения 185. В каком случае наибольший прогиб больше? Сравните полученный график с графиком упражнения 183. В каком случае наибольший прогиб балки больше?

187. Существует ли функция, график которой переходит в себя при вращении плоскости на любой угол около начала координат? на угол 90°? на угол 45°? на угол 120°?



а



б

Рис. 40

5. Операции над функциями. Композиция функций. Назовем *суммой* функций f и g новую функцию $f + g$, заданную на множестве $D(f + g) = D(f) \cap D(g)$, и такую, что

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Если функции f и g заданы своими выражениями, то выражение для функции $f + g$ получается путем сложения этих выражений.

Пример 1. Суммой функций $x^3 + 7$, $-1 \leqslant x \leqslant 5$, и $x^2 + 4$, $0 \leqslant x \leqslant 8$, является функция $(x^3 + 7) + (x^2 + 4)$, $0 \leqslant x \leqslant 5$.

График функции $f + g$ строят с помощью сложения соответствующих ординат графиков функций f и g (рис. 41).

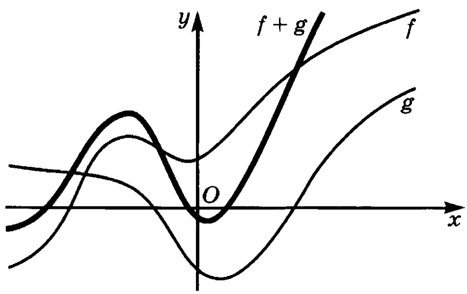


Рис. 41

Таким же образом определяют *произведение* функций f и g. Им является функция fg, заданная на том же множестве $D(f) \cap D(g)$ и такая, что

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Функция $\frac{1}{g}$ определена на множестве, состоящем из тех чисел множества $D(g)$, для которых $g(x) \neq 0$. При этом

$$\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

Назовем функцию $f \cdot \frac{1}{g}$ *частным* функций f и g и обозначим ее $\frac{f}{g}$.

Из сказанного ясен смысл обозначений $f^2 + 4f - 3$, $\frac{1}{f^3 + 5}$ и т. д.

Пример 2. Найдем выражение функции $\frac{1}{f^3 + 5}$, если $f(x) = (x - 3)^2 + 4$.

Решение. Это выражение имеет вид $\frac{1}{((x - 3)^2 + 4)^3 + 5}$.

Наряду с образованием новых функций с помощью арифметических операций над заданными функциями применяют операцию композиции функций. Рассмотрим следующий пример. Скорость падающего тела в момент времени t с начала падения выражается формулой $v = gt$, а кинетическая энергия этого тела — формулой $E = \frac{mv^2}{2}$. Поэтому в момент времени t кинетическая энергия тела равна $\frac{m(gt)^2}{2}$. Мы составили из двух зависимостей $v = gt$ и $E = \frac{mv^2}{2}$ новую зависимость $E = \frac{m(gt)^2}{2}$.

Определение. Пусть даны числовые функции f и g такие, что $E(f) \subset D(g)$. Их *композицией* называется новая числовая функция F, заданная на $D(f)$, которая каждому $x \in D(f)$ ставит в соответствие число $g(f(x))$. Функцию F обозначают также $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Если функции f и g заданы своими выражениями, то для получения выражения композиции $g \circ f$ этих функций надо подставить в выражение функции g вместо x выражение функции f.

Пример 3. Найдем выражение для композиции функций $g \circ f$, где $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

Решение. Заменяя в выражении $\frac{1}{x}$ переменную x на $x^2 + 1$, получаем выражение $\frac{1}{x^2 + 1}$ для $g \circ f$. Это выражение записывают так: $g(x^2 + 1)$. Часто так обозначают и саму функцию $g \circ f$.

Вообще если $A(x)$ — некоторое выражение, а f — числовая функция, определенная для всех значений этого выражения, то через $f(A(x))$ обозначают как выражение, полученное подстановкой $A(x)$ вместо x в выражение функции f, так и соответствующую композицию функций.

Поскольку может возникнуть опасность смешения композиций $g \circ f$ и $f \circ g$, часто записывают данные функции в виде $t = f(x)$, $y = g(t)$ (если строят композицию $g \circ f$) или в виде $t = g(x)$, $y = f(t)$ (если строят композицию $f \circ g$).

Пример 4. Если $f(x) = x^3$, то через $f(4 - x)$ обозначают функцию, которая каждому x ставит в соответствие число $(4 - x)^3$.

Упражнения

188. Пусть $f(x) = 1 + x^2$. Найдите выражение для:

1) $f^2 - 5f(x) + 2$;
2) $xf(x^2 - 5x + 2)$;
3) $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$;
4) $\frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$.

189. Пусть $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3 + 1$. Найдите выражение для:

1) $f^2(x) + \varphi^2(x)$;
2) $f^4(x)\varphi(x^2)$;
3) $f(x^4)\varphi^2(x)$;
4) $f(\varphi(x))$;
5) $\varphi(f(x))$;
6) $f(x + 1) + \varphi(x + 1)$.

190. Функция f задана на отрезке $[-1; 0]$. Найдите области задания следующих функций:

1) $f(-x^2)$;
2) $f(x - 1)$;
3) $f(2x)$;
4) $f\left(\frac{|x|}{x}\right)$;
5) $f(|x| + x)$;
6) $f\left(\frac{x - |x|}{2}\right)$.

191. Постройте графики следующих функций:

1) $x + \frac{4}{x}$; 2) $x - \frac{4}{x}$; 3) $x + \frac{1}{x^2}$; 4) $x^2 - \frac{1}{x}$.

6. Числовые последовательности и способы их задания. Числовое множество X, на котором задана функция f числового аргумента, может быть произвольным. В случае, когда оно совпадает с множеством N натуральных чисел, функцию называют числовой последовательностью.

Определение. *Числовой последовательностью* называют числовую функцию, заданную на множестве N натуральных чисел.

Для числовых последовательностей обычно вместо $f(n)$ пишут a_n и обозначают последовательность так: (a_n). Числа a_1, ..., a_n, ... называют *членами последовательности.*

Отметим, что мы уже встречались с последовательностью в примерах к п. 3 § 2 гл. 2.

Часто последовательность задают, указав выражение ее n-го члена через n.

Пример 1. Напишем первые пять членов последовательности (a_n), где $a_n = n^3 - 1$.

Решение. Имеем $a_1 = 1^3 - 1 = 0$, $a_2 = 2^3 - 1 = 7$, $a_3 = 3^3 - 1 = 26$, $a_4 = 4^3 - 1 = 63$, $a_5 = 5^3 - 1 = 124$.

Поэтому первыми пятью членами данной последовательности являются числа 0, 7, 26, 63, 124.

Заметим, что задание этих пяти чисел не определяет однозначно выражения $n^3 - 1$, по которому они получены. Те же числа получаются, например, и из выражения $n^3 - 1 + (n - 1)(n - 2) \times$ $\times (n - 3)(n - 4)(n - 5)$. Поэтому, зная несколько первых членов последовательности, можно лишь ставить вопрос об отыскании одной из формул, задающих эту последовательность.

Наряду с заданием последовательности формулой, выражающей a_n через n, применяют *рекуррентное* задание последовательности, при котором ее n-й член выражается через $(n-1)$-й, ..., $(n-k)$-й члены, где k фиксировано. При таком способе задания, помимо формулы, выражающей n-й член последовательности через предыдущие, надо задать еще k первых членов. Например, арифметическая прогрессия с разностью d задается рекуррентным соотношением $a_n = a_{n-1} + d$. Чтобы полностью определить эту прогрессию, надо еще знать ее первый член a_1.

Геометрическая прогрессия со знаменателем q задается рекуррентным соотношением $b_n = b_{n-1}q$ и первым членом b_1.

Пример 2. Найдем первые шесть членов последовательности, каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, т. е. $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, $n \geqslant 3$, а первыми двумя членами последовательности являются $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$.

Решение. По условию имеем:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 0 + 1 = 1, \quad a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 1 = 2,$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 1 + 2 = 3, \quad a_6 = a_4 + a_5 = 2 + 3 = 5.$$

Последовательность, задаваемую рекуррентным соотношением $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ и начальными условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, называют *последовательностью Фибоначчи.*

Последовательности, заданные рекуррентными соотношениями, встречаются во многих вопросах математики и ее приложений. Например, для приближенного извлечения квадратных корней строят рекуррентно заданные последовательности. Чтобы найти $\sqrt{a}$, берут любое положительное число x_1 и строят последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, где $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. Мы докажем в п. 12 § 3 главы 5, что по мере возрастания n члены этой последовательности приближаются к $\sqrt{a}$.

Упражнения

192. Напишите первые пять членов последовательности, n-й член которой выражается формулой:

1) $\frac{n^3}{n+1}$; 2) $\frac{3n^2-1}{n^2+1}$; 3) $\frac{(-1)^n}{n^3+4}$; 4) $\frac{(-1)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$.

193. По заданным первым членам последовательности подберите одну из формул для n-го члена:

1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \ldots$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^2, \left(\frac{4}{9}\right)^2, \ldots$;

3) $1, \frac{2}{101}, \frac{4}{201}, \frac{8}{301}, \ldots;$ 4) $1, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4\sqrt{4}}, \ldots;$

5) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{9}{27}, \frac{16}{81}, \ldots;$ 6) $1, -2, 3, -4, \ldots;$

7) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \ldots;$

8) $\frac{2}{1}, \frac{2^2}{1 \cdot 2}, \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots .$

194. Найдите номер наибольшего члена последовательности (a_n), если:
1) $a_n = 12n - n^2$; 2) $a_n = 11n - n^2$;

3) $a_n = \frac{10n}{100 + n^2}$; 4) $a_n = \frac{n^5}{2^n}$;

5) $a_n = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \ldots (101 - n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} (0{,}3)^n \cdot (0{,}7)^{100 - n}, \ 1 \leqslant n \leqslant 100.$

195. Скажем, что некоторое свойство P выполняется *почти для всех* членов последовательности, если оно может не выполняться лишь для конечного числа ее членов. Определите, какие из нижеуказанных свойств последовательности (a_n) имеют место для всех ее членов, почти для всех ее членов, для конечного числа членов, ни для одного члена. В каких случаях и данное свойство, и обратное ему выполняются для бесконечно многих членов последовательности (a_n)?
1) $a_n = n$, P — свойство быть точным квадратом.
2) $a_n = p_n$, где p_n обозначает n-е простое число, P — свойство быть нечетным.
3) $a_n = p_n$, P — свойство быть четным.
4) $a_n = p_n$, P — свойство $a_n > n$.
5) $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$, P — свойство $a_n < 1$.
6) $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$, P — свойство $a_n < \frac{11}{10}$.
7) $a_n = \frac{1000(1 + (-1)^n)}{n}$, P — свойство $a_n < 1$.
8) $a_n = \frac{10\,000}{n}$, P — свойство $a_n < 0{,}0001$.
9) $a_n = \frac{n - 1}{n + 1}$, P — свойство $1 - a_n < 0{,}0001$.

196. Докажите, что последовательность (a_n), где $a_n = 3^n + 5 \cdot 2^n$, удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ и начальным условиям $a_1 = 13$, $a_2 = 29$.

197. Докажите, что последовательность (a_n), где $a_n = 2^n (n + 4)$, удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ и начальным условиям $a_1 = 10$, $a_2 = 24$.

198. Пусть $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2}$. Выразите a_n и b_n через a_1, b_1 и n.

199. Докажите, что если последовательности (a_n) и (b_n) удовлетворяют рекуррентному соотношению вида

$$r_{n+2} = \alpha r_{n+1} + \beta r_n, \tag{1}$$

где α и β — некоторые числа, то для любых значений C_1 и C_2 последовательность $(C_1 a_n + C_2 b_n)$ удовлетворяет тому же соотношению (1).

200. Докажите, что если число r_1 — корень уравнения $r^2 = \alpha r + \beta$, то последовательность (r_1^n) удовлетворяет рекуррентному соотношению (1).

201. Пользуясь результатами упражнений 199 и 200, найдите решения рекуррентных соотношений:

1) $r_{n+2} = 5r_{n+1} - 4r_n$; 3) $r_{n+2} = 9r_{n+1} + 52r_n$;

2) $r_{n+2} = -r_{n+1} + 6r_n$; 4) $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$.

202. Докажите, что если число r_1 является корнем кратности 2 для квадратного уравнения $r^2 = \alpha r + \beta$, то не только последовательность (r_1^n), но и последовательность (nr_1^n) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$r_{n+2} = \alpha r_{n+1} + \beta r_n.$$

203. Решите рекуррентные соотношения

1) $r_{n+2} = 6r_{n+1} - 9r_n$; 2) $r_{n+2} = -8r_{n+1} - 16r_n$.

204. Найдите общее выражение n-го члена последовательности Фибоначчи.

§ 2. Преобразования графиков

1. Координатное задание геометрических преобразований. Выберем на прямой линии l систему координат с началом O и рассмотрим геометрическое преобразование, при котором каждая точка прямой перемещается на a единиц (в положительном направлении, если $a > 0$, в отрицательном, если $a < 0$, и совсем не перемещается, если $a = 0$). Если координата точки M равнялась x, $M = M(x)$, то после преобразования она перейдет в точку $M'(x + a)$. Таким образом, указанное преобразование задается формулой

$$x' = x + a. \tag{1}$$

Его называют *сдвигом прямой на a единиц.*

Рассмотрим теперь другое преобразование — *растяжение* прямой от точки O с коэффициентом k. При этом преобразовании точка O остается неподвижной, а любая иная точка M переходит в такую точку M', что $\widetilde{OM'} = k \cdot \widetilde{OM}$. Иными словами, если $k > 0$, то точка остается по ту же сторону от O, что и раньше, но ее расстояние до точки O умножается на k и потому увеличивается при $k > 1$ и уменьшается при $k < 1$. Если же $k < 0$, то указанное преобразование сводится к растяжению прямой от точки O с коэффициентом $|k|$ и последующей симметрии относительно точки O. В частности, если $k = -1$, то это преобразование является симметрией относительно точки O. Поскольку $\widetilde{OM} = x$, $\widetilde{OM'} = x'$, то растяжение прямой от точки O с коэффициентом k задается формулой

$$x' = kx. \qquad (2)$$

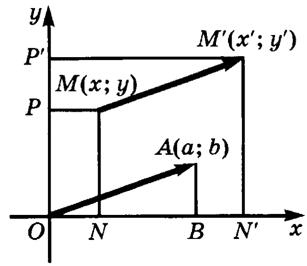


Рис. 42

Теперь разберем координатное задание геометрических преобразований плоскости. Начнем с *параллельного переноса.* Если при этом преобразовании начало координат O переходит в точку $A(a;\ b)$, а точка $M(x;\ y)$ — в точку $M'(x';\ y')$, то направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{MM'}$ имеют одинаковую длину и направление. Поэтому величины их проекций на ось абсцисс одинаковы, и точка $N(x)$ оси абсцисс сдвигается на a и переходит в точку $N'(x + a)$. Точка же $P(y)$ оси ординат переходит в точку $P'(y + b)$. Это означает, что точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M'(x + a;\ y + b)$ (рис. 42).

Итак, при указанном параллельном переносе точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M'(x + a;\ y + b)$, а потому он задается формулами:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases} \qquad (3)$$

Теперь рассмотрим гомотетию с центром O и коэффициентом $k > 0$. При этом преобразовании точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M'(x';\ y')$, лежащую на луче OM и такую, что $OM' = k \cdot OM$. При этом обе координаты умножаются на k, т. е. точка M' имеет координаты kx и ky. Значит, гомотетия с центром O и коэффициентом $k > 0$ задается формулами

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases} \qquad (4)$$

Эти формулы годятся и для гомотетии с коэффициентом $k < 0$. В частности, при $k = -1$ имеем

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases} \qquad (5)$$

Но гомотетия с центром O и коэффициентом -1 является *центральной симметрией относительно точки* O. Значит, формулы (5) задают эту симметрию.

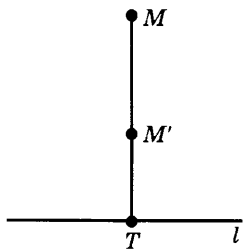


Рис. 43

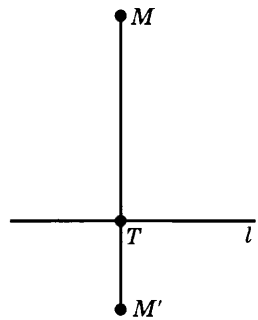


Рис. 44

В заключение рассмотрим преобразование *растяжения плоскости от прямой.* Пусть l — прямая линия и k — некоторое число. Растяжением плоскости от прямой l с коэффициентом k называют преобразование, при котором происходит растяжение каждой прямой, перпендикулярной прямой l, от точки пересечения T этих прямых с коэффициентом k (рис. 43, 44). Иными словами, точка M переходит в точку M' такую, что M и M' лежат на одном перпендикуляре к l, причем $TM' = k \cdot TM$ и точки M и M' лежат по одну сторону от l, если $k > 0$, и по разные стороны от l, если $k < 0$.

Из этого определения вытекает, что при растяжении от оси абсцисс с коэффициентом k точка $M(x; y)$ переходит в точку $M'(x'; y')$, где

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \tag{6}$$

Аналогично при растяжении с коэффициентом k от оси ординат точка $M(x; y)$ переходит в точку $M'(x'; y')$, где

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases} \tag{7}$$

Частным случаем растяжения от прямой является симметрия относительно этой прямой — в этом случае коэффициент k равен -1. Из формул (6) и (7) получаем, что при симметрии относительно оси абсцисс точка $M(x; y)$ переходит в точку $M'(x; -y)$, а при симметрии относительно оси ординат точка $M(x; y)$ переходит в точку $M'(-x; y)$.

Упражнения

205. Параллельный перенос переводит начало координат в точку $A(4; -3)$. Найдите образы точек $M(-1; 5)$, $N(2; -7)$ и прообразы точек $P(-3; 4)$, $Q(8; -6)$.

206. Параллельный перенос переводит точку $A(2; -5)$ в точку $B(-6; 1)$. Найдите образы точек $M(0; 6)$, $N(8; -1)$ и прообразы точек $P(-2; 3)$, $Q(5; -4)$.

207. Пусть φ — параллельный перенос, отображающий начало координат в точку $A(4; -2)$, и ψ — симметрия относительно оси абсцисс. Запишите формулами преобразования $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$. Совпадают ли получившиеся преобразования? Найдите при этих преобразованиях образы точек $M(-1; 5)$, $N(3; 4)$ и прообразы точек $P(2; 7)$, $Q(-3; 5)$.

208. Пусть φ — растяжение от оси абсцисс с коэффициентом 2, а ψ — параллельный перенос, при котором начало координат переходит в точку $A(5; 1)$. Запишите выражения для преобразований $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$. Найдите образ при преобразовании $\varphi \circ \psi$ квадрата $ABCD$, где $A(1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 3)$, $D(1; 3)$.

209. Докажите, что преобразование

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = \dfrac{y}{k}, \quad k \neq 0, \end{cases}$$

называемое *гиперболическим поворотом*, переводит в себя гиперболу $xy = a^2$.

210. Докажите, что преобразование

$$\begin{cases} x' = k(x - a) + a, \\ y' = k(y - b) + b \end{cases}$$

является гомотетией относительно точки $A(a; b)$ с коэффициентом k.

211. Опишите геометрическое преобразование, задаваемое формулами:

1) $\begin{cases} x' = 2(x - 4) + 5, \\ y' = 2(y + 3) - 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = 2x - 4, \\ y' = 2y + 3. \end{cases}$

2. Преобразования графиков функций. Пусть точка $M(x_0; y_0)$ лежит на графике функции f, т. е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Тогда координаты точки $M'(x_0 + a; y_0 + b)$ удовлетворяют соотношению $y = f(x - a) + b$. В самом деле, заменяя в этом соотношении x на $x_0 + a$, а y на $y_0 + b$, получаем равенство $y_0 + b = f(x_0 + a - a) + b$, которое верно, так как $y_0 = f(x_0)$. Мы доказали таким образом, что если точка $M(x_0; y_0)$ лежит на графике функции f, то точка $M'(x_0 + a; y_0 + b)$ лежит на графике функции F, связанной с f соотношением $F(x) = f(x - a) + b$.

Обратно, если точка $M'(x_0 + a; y_0 + b)$ лежит на графике функции F, то точка $M(x_0; y_0)$ лежит на графике функции f (из того, что $y_0 + b = f(x_0 + a - a) + b$, вытекает, что $y_0 = f(x_0)$).

Заметим теперь, что точка $M'(x_0 + a; y_0 + b)$ является образом точки $M(x_0; y_0)$ при параллельном переносе, который переводит начало координат $O(0; 0)$ в точку $A(a; b)$. Значит, этот перенос

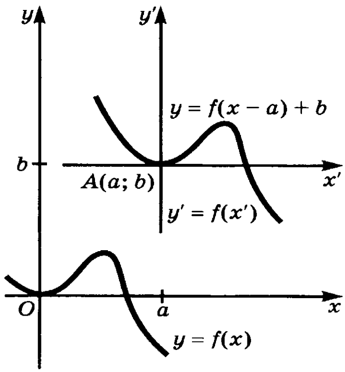


Рис. 45

отображает график функции f на график функции F. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $F(x) = f(x - a) + b$. *Тогда график функции* F *получается из графика функции* f *с помощью параллельного переноса, при котором начало координат* $O(0;\ 0)$ *переходит в точку* $A(a;\ b)$.

Обычно находят точку $A(a;\ b)$, проводят через нее вспомогательные оси координат и «привязывают» к ним график функции f (рис. 45).

Пример 1. На рисунке 46 изображен график функции f. Построим графики функций f_1, f_2, f_3, f_4, где

$$f_1(x) = f(x + 3) + 2, \quad f_2(x) = f(x + 3) - 2,$$
$$f_3(x) = f(x - 3) + 2, \quad f_4(x) = f(x - 3) - 2.$$

Решение. График функции f_1 получается из графика функции f с помощью параллельного переноса, при котором начало координат переходит в точку $A_1(-3;\ 2)$ (рис. 47). Для функции f_2 соответствующей точкой является $A_2(-3;\ -2)$, для функции f_3 — точка $A_3(3;\ 2)$, а для f_4 — точка $A_4(3;\ -2)$.

Рассмотрим теперь преобразования графиков, соответствующие умножениям координат на некоторые числа. Пусть точка $M(x_0;\ y_0)$ лежит на графике функции f, т. е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Тогда координаты точки $M'(kx_0;\ ly_0)$, где $k \neq 0$, $l \neq 0$, удовлетворяют соотношению $y = lf\left(\frac{x}{k}\right)$ (проверьте это утверждение подстановкой координат точки M' в указанное соотношение). Обратно, если координаты точки $M'(kx_0;\ ly_0)$, где $k \neq 0$, $l \neq 0$, удовлетворяют

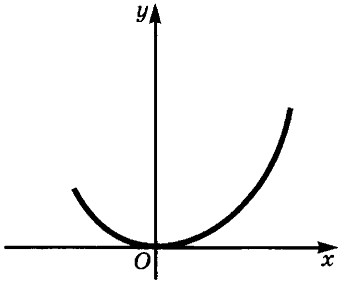


Рис. 46

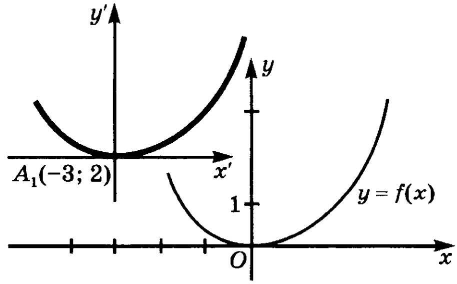


Рис. 47

соотношению $y = lf\left(\frac{x}{k}\right)$, то точка $M(x_0;\ y_0)$ лежит на графике функции f. Но точка $M'(kx_0;\ ly_0)$ получается из точки $M(x_0;\ y_0)$ с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом l и последующего растяжения от оси ординат с коэффициентом k. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $k \neq 0$, $l \neq 0$ и $F(x) = lf\left(\frac{x}{k}\right)$. Тогда график функции F получается из графика функции f с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом l и последующего растяжения от оси ординат с коэффициентом k.*

Поскольку растяжение от прямой с коэффициентом -1 является симметрией относительно этой прямой, то получаем следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Если $F(x) = -f(x)$, то график функции F получается из графика функции f с помощью симметрии относительно оси абсцисс.*

Следствие 2. *Если $F(x) = f(-x)$, то график функции F получается из графика функции f с помощью симметрии относительно оси ординат.*

Следствие 3. *Если $F(x) = -f(-x)$, то график функции F получается из графика функции f с помощью симметрии относительно начала координат* (т. е. композиции симметрий относительно осей координат).

Пример 2. На рисунке 48 изображен график функции f. Построим графики функций f_1, f_2, f_3 таких, что

$$f_1(x) = 2f(x),\ f_2(x) = f(3x),\ f_3(x) = 2f(3x).$$

Решение. График функции f_1 получается из графика функции f с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом 2. График функции f_2 получается из графика функции f с помощью растяжения от оси ординат с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Наконец график функции f_3 получается из графика функции f с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом 2 и от оси ординат с коэффициентом $\frac{1}{3}$.

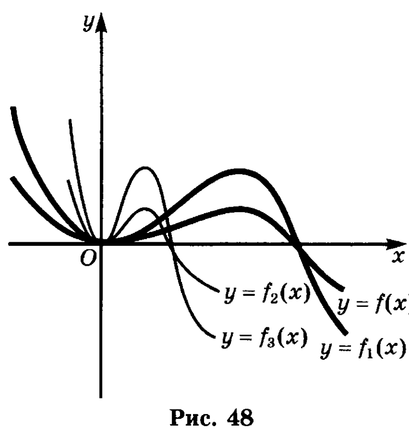


Рис. 48

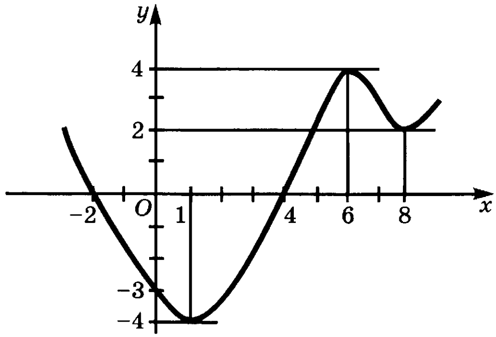


Рис. 49

Для построения графика функции F, где $F(x) = f(ax + b)$, записываем ее в виде $F(x) = f\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right)$, строим график функции $f(ax)$ и делаем параллельный перенос, при котором начало координат переходит в точку $A\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$.

Упражнения

212. На рисунке 49 изображен график функции f. Начертите график функции F:
1) $F(x) = f(x) + 2$; 2) $F(x) = f(x - 4) - 2$; 3) $F(x) = -f(x)$;
4) $F(x) = f(-x)$; 5) $F(x) = -f(-x)$; 6) $F(x) = 2f(x)$; 7) $F(x) = 2f(x - 4) + 5$;
8) $F(x) = f(2x) - 1$; 9) $F(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$; 10) $F(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$;
11) $F(x) = \frac{1}{2}f(3x)$; 12) $F(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{3}\right)$; 13) $F(x) = 2f(3x - 6) + 1$;
14) $F(x) = -2f(3x - 6) - 1$; 15) $F(x) = f(4 - x)$; 16) $F(x) = f(4 - 2x) + 2$.

213. Исходя из графика функции $|x|$, постройте графики следующих функций:

1) $\lvert x\rvert + 2$;	6) $2\lvert x\rvert$;	11) $2\lvert 3x - 6\rvert + 1$;
2) $\lvert x - 4\rvert + 2$;	7) $\left\lvert\frac{x}{3}\right\rvert$;	12) $-2\lvert 3x - 6\rvert - 1$;
3) $-\lvert x\rvert$;	8) $2\left\lvert\frac{x}{3}\right\rvert$;	13) $\lvert 4 - x\rvert$;
4) $\lvert -x\rvert$;	9) $2\lvert x - 4\rvert + 5$;	14) $\lvert 4 - 2x\rvert + 2$.
5) $-\lvert -x\rvert$;	10) $3\lvert -2x\rvert - 1$;	

3. График линейной функции. В курсе алгебры 7-го класса указывалось, что графиком функции kx является прямая линия, проходящая через начало координат. Однако там не было приведено доказательство этого утверждения. Мы приведем его сейчас.

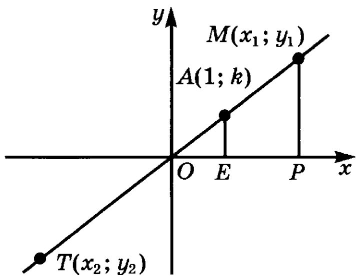


Рис. 50

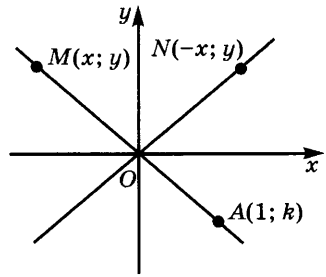


Рис. 51

Теорема. *Прямая линия, проходящая через начало координат и точку $A(1;\ k)$, является графиком функции kx.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $k > 0$. Возьмем на прямой OA точку $M(x_1;\ y_1)$, для которой $x_1 > 0$, и опустим из нее перпендикуляр MP на ось абсцисс. Тогда треугольники OAE и OMP подобны (рис. 50), и потому $\frac{AE}{OE} = \frac{MP}{OP}$. Но $AE = k$, $OE = 1$, $MP = y_1$, $OP = x_1$ и, значит, $\frac{k}{1} = \frac{y_1}{x_1}$. Отсюда следует, что $y_1 = kx_1$. Таким образом, для всех точек данной прямой, лежащих в первой четверти, выполняется равенство $y = kx$. Возьмем теперь на этой же прямой точку $T(x_2;\ y_2)$, симметричную точке M относительно начала координат O. Тогда $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, и из равенства $y_1 = kx_1$ следует, что $-y_2 = k(-x_2)$, а потому $y_2 = kx_2$. Значит, равенство $y = kx$ выполняется и для точек прямой, лежащих в третьей четверти. Наконец, оно выполняется и для точки $O(0;\ 0)$.

Итак, для любой точки $M(x;\ y)$ прямой OA выполняется равенство $y = kx$, а потому эта прямая является графиком для kx (точек, не принадлежащих этой прямой, график функции kx не имеет, поскольку каждой точке оси абсцисс соответствует точка прямой OA, а другая точка ей соответствовать не может по определению функции).

Теперь разберем случай, когда $k < 0$. Так как точки $M(x;\ y)$ и $N(-x;\ y)$ симметричны относительно оси ординат, а $kx = (-k) \cdot (-x)$, то при $k < 0$ графиком функции kx служит линия, симметричная относительно оси ординат графику функции $(-k) \cdot x$. Но $-k > 0$, и потому мы знаем, что график функции $(-k) \cdot x$ — прямая линия, проходящая через начало координат и лежащая в первой и третьей четвертях. Значит, при $k < 0$ графиком функции kx служит прямая линия, проходящая через начало координат и лежащая во второй и четвертой четвертях (рис. 51). Эта прямая проходит через точку $A(1;\ k)$.

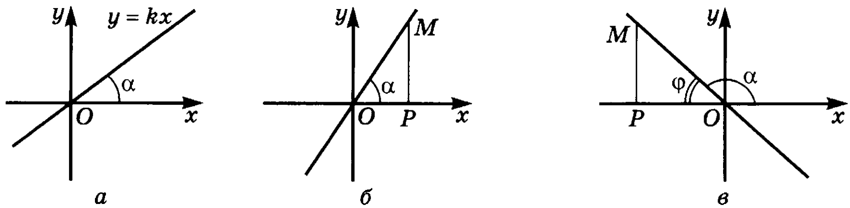


Рис. 52

Наконец, при $k = 0$ получаем прямую $y = 0$, т. е. ось абсцисс. Мы доказали, что *графиком функции kx является прямая, проходящая через начало координат и образующая с осью абсцисс острый угол при $k > 0$ и тупой угол при $k < 0$* (угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки). Среди прямых, проходящих через начало координат, лишь ось ординат не является графиком какой-либо функции вида $y = kx$ (рис. 52, *а*).

Функцию вида $kx + b$ называют *линейной функцией*. Ее график получается из графика функции kx путем сдвига на b вдоль оси ординат. Поэтому графиком функции $kx + b$ является прямая линия, параллельная прямой $y = kx$. Значит, *графики всех линейных функций, имеющих один и тот же коэффициент k, параллельны друг другу*. Поскольку этот коэффициент определяется углом между прямой и осью абсцисс, его называют *угловым коэффициентом* прямой.

Если угловой коэффициент прямой линии положителен, она образует острый угол с осью абсцисс, а если этот коэффициент отрицателен, то угол между осью абсцисс и прямой является тупым.

Через любую точку $M(a;\ b)$ координатной плоскости проходит лишь одна прямая с угловым коэффициентом k. Она получается из прямой $y = kx$ с помощью параллельного переноса, переводящего точку $O(0;\ 0)$ в точку $M(a;\ b)$. Согласно п. 2 уравнение этой прямой имеет вид $y = k(x - a) + b$.

Мы доказали следующее утверждение.

Уравнение прямой линии, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(a;\ b)$, имеет вид

$$y = k(x - a) + b. \qquad (1)$$

Угловой коэффициент прямой линии имеет простой геометрический смысл — он равен тангенсу угла α между осью абсцисс и этой прямой, причем угол отсчитывается от положительного направления прямой против часовой стрелки. В самом деле, при $k > 0$ имеем (рис. 52, *б*, *в*) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{OP} = k$, а при $k < 0$ имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180° - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi = -\frac{MP}{OP} = -|k| = k.$$

Пример 1. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -6)$ и параллельной прямой $y = 4x - 5$.

Решение. Так как угловой коэффициент искомой прямой равен угловому коэффициенту прямой $4x - 5$, т. е. числу 4, то ее уравнение имеет вид $y = 4\ (x - 3) - 6$. Раскрывая скобки, получаем $y = 4x - 18$.

Выберем на координатной плоскости две точки: $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Если $x_1 = x_2$, то эти точки лежат на прямой $x = x_1$, параллельной оси ординат и не имеющей поэтому углового коэффициента. Если же $x_1 \neq x_2$, то прямая M_1M_2 имеет угловой коэффициент. Чтобы найти его, заметим, что эта прямая проходит через точку M_1 и потому ее уравнение имеет вид $y = k(x - x_1) + y_1$. Но точка M_2 тоже лежит на этой прямой, а потому ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Значит, $y_2 = k(x_2 - x_1) + y_1$. Поскольку $x_2 \neq x_1$, находим отсюда, что *угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, выражается формулой*

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2)$$

Пример 2. Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $M_1(-4; 3)$ и $M_2(6; -7)$.

Решение. По формуле (2) получаем $k = \dfrac{-7 - 3}{6 - (-4)} = -1$.

Чтобы получить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, где $x_1 \neq x_2$, достаточно заменить в уравнении $y = k(x - x_1) + y_1$ коэффициент k на $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Получаем $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$, откуда (при $y_2 \neq y_1$)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3)$$

Пример 3. Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(5; 1)$ и $M_2(-3; 6)$.

Решение. По формуле (3) получаем $\dfrac{y - 1}{6 - 1} = \dfrac{x - 5}{-3 - 5}$. Это уравнение преобразуется к виду $y = -\dfrac{5}{8}x + \dfrac{33}{8}$.

Упражнения

214. Найдите значение k для прямой, проходящей через начало координат, и точку A, если:

1) $A(-8; 2)$; 2) $A(6; 3)$; 3) $A(2; 0)$; 4) $A(0; -2)$.

215. Начертите графики линейных функций:

1) $-x + 4$; 2) $2x + 1$; 3) $x + 4$; 4) $-3x + 8$.

Назовите угловые коэффициенты полученных прямых.

216. Постройте прямую, проходящую через точку $A(-1;\ 4)$ и имеющую угловой коэффициент 2. Напишите уравнение этой прямой.

217. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A и имеющей угловой коэффициент k, если:

1) $A(-1;\ 4)$, $k = 4$; 3) $A(-2;\ -5)$, $k = \frac{1}{2}$;

2) $A(3;\ 0)$, $k = -2$; 4) $A(6;\ 1)$, $k = -\frac{1}{3}$.

218. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-5;\ 3)$ и параллельной прямой $y = 4x - 7$.

219. Найдите угловой коэффициент прямой k, проходящей через точки $A(-1;\ 2)$ и $B(3;\ 0)$. Напишите уравнение этой прямой. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $C(6;\ 1)$ и параллельной прямой AB.

220. Дан треугольник ABC, где $A(-1;\ 2)$, $B(1;\ 0)$, $C(3;\ 6)$.

1) Напишите уравнения прямых AB, BC, CA.

2) Напишите уравнения прямых, на которых лежат медианы этого треугольника.

221. Постройте график функции f, где

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2, \text{ если } 0 < x \leqslant 3, \\ x - 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

222. Постройте график функции $|x - 1| + |x + 3|$.

Какой угловой коэффициент имеет этот график при $x = -6$; при $x = 0$; при $x = 8$?

223. Изобразите область, где:

1) $y \geqslant 2x - 1$ и $y \leqslant x + 5$; 2) $y \geqslant 3x + 5$ и $y \leqslant -x + 3$.

4. График квадратической функции. График функции x^2 был изучен в девятилетней школе. Он изображен на рисунке 53. В силу теоремы 2 п. 2 график функции ax^2 получается из графика функции x^2 с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом a. На рисунке 54 изображены графики функций ax^2 при различных значениях параметра a.

Построим с помощью параллельного переноса график общей квадратической функции $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Для этого выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Иными словами,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ где } \alpha = -\frac{b}{2a},\ \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

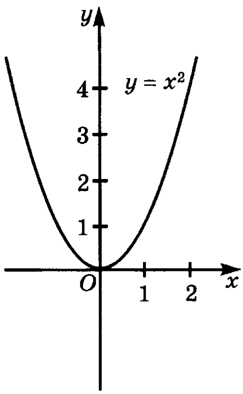


Рис. 53

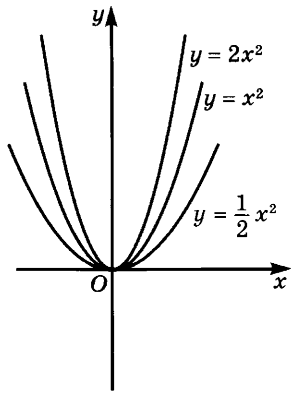


Рис. 54

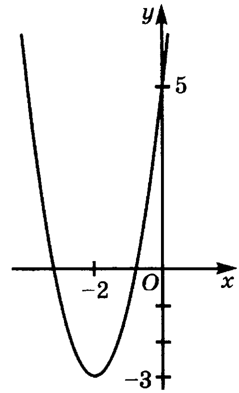


Рис. 55

Значит, график функции $ax^2 + bx + c$ получается из графика функции ax^2 с помощью параллельного переноса, при котором начало координат переходит в точку $A(\alpha;\ \beta)$.

Пример. Построим график функции $2x^2 + 8x + 5$.

Решение. Выделяя полный квадрат, получаем, что

$$2x^2 + 8x + 5 = 2(x^2 + 4x) + 5 = 2(x^2 + 4x + 4) + 5 - 8 = \\ = 2(x + 2)^2 - 3.$$

Поэтому проводим через точку $A(-2;\ -3)$ вспомогательные оси координат и изображаем в этих осях график функции x^2, а потом получаем из него в тех же осях график функции $2x^2$. Полученная линия будет графиком функции $2x^2 + 8x + 5$ в исходных осях координат (рис. 55).

График функции x^2 называют *параболой*. Параболами называют и все кривые, подобные этому графику. Покажем, что графиком функции ax^2 при любом $a \neq 0$ является парабола. Для этого достаточно заметить, что при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{a}$ точка $M(x;\ x^2)$, лежащая на графике функции x^2, переходит в точку $M'\left(\frac{x}{a};\ \frac{x^2}{a}\right)$, и что $\frac{x^2}{a} = a\left(\frac{x}{a}\right)^2$.

График функции $ax^2 + bx + c$ при любом $a \neq 0$ получается из графика функции ax^2 с помощью параллельного переноса и потому тоже является параболой.

Упражнения

224. Постройте графики функций:

1) $x^2 - 8x + 20$;	3) $3x - x^2$;	5) $2 - 4x - x^2$;
2) $2x^2 - 6x + 2$;	4) $1 - x - x^2$;	6) $3x^2 + 5x + 1$.

225. Постройте параболу, проходящую через точки A, B и C, если:
1) $A(1;\ 1)$, $B(-2;\ 4)$, $C(0;\ 0)$;
2) $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(-1;\ -2)$;
3) $A(0;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, $C(-2;\ 3)$;
4) $A(0;\ 2)$, $B(1;\ 6)$, $C(4;\ 6)$.

226. На параболе $y = ax^2$ выбрана точка $M(x_0;\ y_0)$ и через нее проведена секущая с угловым коэффициентом k. Выразите через x_0 и k абсциссу второй точки пересечения параболы и секущей. При каком значении k обе точки пересечения сливаются в одну, т. е. прямая касается параболы?

227. Напишите уравнение касательной к параболе $y = ax^2$ в точке с абсциссой x_0, если:
1) $a = -2,\ x_0 = 4$; 2) $a = 3,\ x_0 = 1$.

5. График дробно-линейной функции. Покажем теперь, как путем преобразования уже известного из курса девятилетней школы графика функции $\frac{1}{x}$ построить график любой функции $\frac{ax+b}{cx+d}$. Поскольку эта функция является частным двух линейных функций $ax + b$ и $cx + d$, ее называют *дробно-линейной функцией.*

Отметим, что иногда дробно-линейная функция тождественно равна линейной функции или даже всюду, кроме одной точки, постоянна. Именно, если $c = 0$ и $d \neq 0$, то имеем линейную функцию $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$, графиком которой служит прямая линия. Если же $c \neq 0$, но $ad - bc = 0$, то выполняется пропорция $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, из которой следует, что $y = \frac{a}{c}$ (разумеется, для отличных от $-\frac{d}{c}$ значений x). В этом случае графиком функции служит прямая линия $y = \frac{a}{c}$, параллельная оси абсцисс, из которой выброшена точка $M\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$.

В дальнейшем, говоря о дробно-линейной функции $\frac{ax+b}{cx+d}$, будем предполагать, что $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$. Мы покажем, что в этом случае график дробно-линейной функции получается из гиперболы $y = \frac{1}{x}$ с помощью растяжения от оси абсцисс и параллельного переноса.

График функции $\frac{k}{x}$ получается из графика функции $\frac{1}{x}$ с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом k. На рисунке 56 показаны графики функций $\frac{3}{x}$ и $-\frac{3}{x}$.

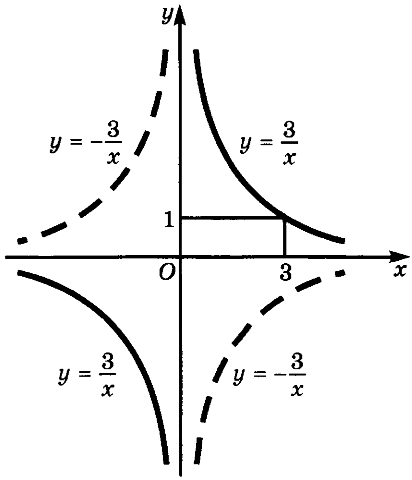


Рис. 56

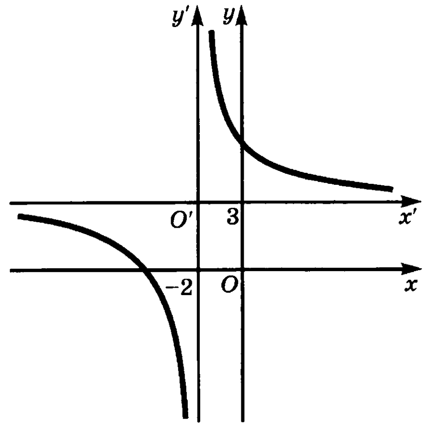


Рис. 57

Чтобы построить график функции $\frac{ax+b}{cx+d}$, выделим из дроби целую часть. Для этого разделим «уголком» $ax + b$ на $cx + d$:

$$\begin{array}{r|l} ax + b & cx + d \\ \cline{2-2} -\;ax \qquad + \frac{ad}{c} & \frac{a}{c} \\ \hline b - \frac{ad}{c} & \end{array}$$

Значит,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Таким образом,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x-\alpha}, \text{ где } k = \frac{bc-ad}{c^2},\ \alpha = -\frac{d}{c},\ \beta = \frac{a}{c}. \qquad (1)$$

Поэтому *график функции* $\frac{ax+b}{cx+d}$ *получается из графика функции* $\frac{k}{x}$ *с помощью параллельного переноса, при котором начало координат переходит в точку* $A(\alpha;\ \beta)$, где k, α, β *определяются из формул* (1).

Пример. Построим график функции $\frac{3x+10}{x+2}$.

Решение. Выделяя целую часть, получаем, что

$$\frac{3x+10}{x+2} = 3 + \frac{4}{x+2}.$$

Значит, $k = 4$, $\alpha = -2$, $\beta = 3$. Проводим через точку $O'(-2;\ 3)$ вспомогательные оси координат, строим в этих осях сначала график функции $\frac{1}{x}$, а потом график функции $\frac{4}{x}$. Относительно исходной системы координат полученная линия и будет графиком функции $\frac{3x + 10}{x + 2}$ (рис. 57).

Упражнения

228. Постройте графики следующих функций:

1) $\frac{3x + 6}{2x + 5}$; 2) $\frac{-2x + 4}{3x - 12}$; 3) $\frac{-5x - 1}{x + 8}$; 4) $\frac{x + 8}{-5x - 1}$.

229. Постройте график функции $\frac{ax + b}{cx + d}$, проходящий через точки A, B и C, если:

1) $A(0;\ -1)$, $B(2;\ 3)$, $C(-1;\ 0)$;

2) $A(-1;\ -5)$, $B(1;\ -3)$, $C(-5;\ 1)$.

6. Построение графиков функций, выражение которых содержит знак модуля. Если известен график функции f, то не составляет труда построить график функции $|f|$. Мы знаем, что

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Поэтому достаточно построить график функции f, после чего часть полученного графика, лежащую ниже оси абсцисс, симметрично отразить относительно этой оси. На рисунке 58 построен указанным способом график функции $|x^2 - 4x|$.

Построим теперь по заданному графику функции f график функции $f(|x|)$. Для этого заметим, что $f(|x|) = f(x)$ при $x \geqslant 0$ и $f(|x|) = f(-x)$ при $x < 0$. Поэтому график функции $f(|x|)$ строится следующим образом: строим график функции f при $x \geqslant 0$ и отражаем его относительно оси ординат. На рисунке 59 показано построение графика функции $(|x| - 2)^2$ с помощью графика функции $(x - 2)^2$.

Равенство $|y| = f(x)$ не задает функцию, поскольку при $f(x) > 0$ имеем два значения y, соответствующие данному значению x: $y = f(x)$ и $y = -f(x)$, а при $f(x) < 0$ — ни одного такого значения. Линия, имеющая уравнение $|y| = f(x)$, строится следующим образом: строим график функции f, отбрасываем его часть, находящуюся ниже оси абсцисс, и дополняем оставшуюся линию ее образом при осевой симметрии относительно оси абсцисс.

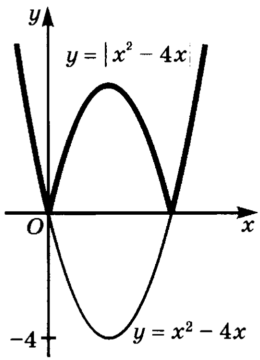


Рис. 58

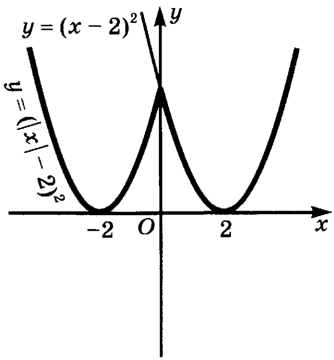


Рис. 59

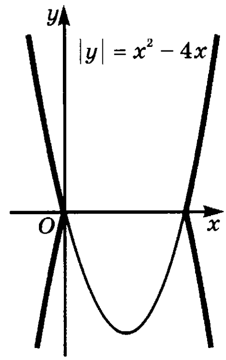


Рис. 60

На рисунке 60 показано построение *графика уравнения* $|y| = x^2 - 4x$ по заданному графику функции $x^2 - 4x$.

Предоставляем читателю сформулировать правила, по которым строятся графики для $|y| = |f(x)|$ и для $|y| = f(|x|)$.

Упражнения

230. Постройте график функции:

1) $|x^2 - 4x + 3|$;
2) $x^2 - 4|x| + 3$;
3) $|x^2 + 2x| + 1$;
4) $||x - 1| - 2x|$;
5) $|x + 2| + |x - 4|$;
6) $\left|\dfrac{x + 3}{x - 1}\right|$;
7) $\dfrac{|x| + 2}{|x| + 1}$;
8) $\dfrac{|x| - 3}{|x| - 2}$;
9) $\dfrac{|x| + 2}{x + 1}$;
10) $\dfrac{x - 3}{|x| - 2}$;
11) $\dfrac{1}{|2x + 1| + |x|}$;
12) $\dfrac{1}{|x - 1| + |x| - 2}$.

231. Постройте множество точек $M(x;\ y)$, для которых:

1) $x + |x| = y + |y|$;
2) $x - |x| = y - |y|$;
3) $x + |x| = y - |y|$;
4) $x - |x| = y + |y|$;
5) $x - [x] = y - [y]$;
6) $[x] = [y]$.

232. Найдите множество таких точек $M(x;\ y)$, что:

1) $|y| = x^2 - 4x + 3$;
2) $|y| = \dfrac{x - 3}{x - 2}$;
3) $|y| = \dfrac{|x| - 3}{|x| - 2}$;
4) $|y| = \left|\dfrac{x - 3}{x - 2}\right|$.

233. Решите неравенство $x + 2 \geqslant |x^2 + 2x - 3|$, построив графики левой и правой частей.

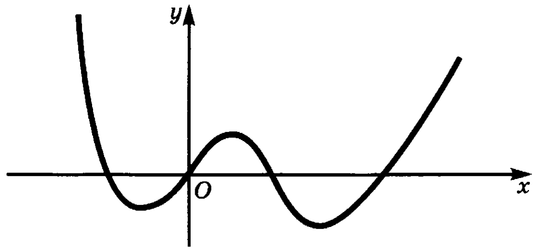


Рис. 61

234. Тем же способом (см. упр. 233) решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x^2 + x| \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ |x^2 - x| \leqslant \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

235. На рисунке 61 изображен график функции $f(x)$. Постройте графики функций:

1) $|f(x)|$; 3) $|f(|x|)|$; 5) $f(-|x|)$; 7) $|f(-|x|)|$;
2) $f(|x|)$; 4) $-|f(x)|$; 6) $-f(-|x|)$; 8) $-|f(-|x|)|$.

236. На рисунке 61 изображен график функции $f(x)$. Изобразите множество таких точек $M(x;\ y)$, что:

1) $|y| = f(x)$; 3) $|y| = |f(x)|$; 5) $|y| = |f(|x|)|$.
2) $|y| = -f(x)$; 4) $|y| = f(|x|)$;

Задают ли равенства этого упражнения функции?

§ 3. Элементарное исследование функций

1. Четные и нечетные функции. Из равенства $(-x)^2 = x^2$ следует, что на графике функции x^2 вместе с каждой точкой $M(x;\ x^2)$ лежит точка $N(-x;\ x^2)$, симметричная M относительно оси ординат. А из равенства $(-x)^3 = -x^3$ следует, что на графике функции x^3 вместе с каждой точкой $M(x;\ x^3)$ лежит точка $N(-x;\ -x^3)$, симметричная M относительно начала координат. Значит, график функции x^2 симметричен относительно оси ординат, а график функции x^3 — относительно начала координат.

Введем следующее определение.

Определение 1. Функцию f называют *четной*, если ее график симметричен относительно оси ординат. Функцию f называют *нечетной*, если ее график симметричен относительно начала координат.

Вспоминая, что график функции f состоит из точек $M(x;\ f(x))$, где $x \in D(f)$, можем сформулировать определение 1 следующим образом.

Определение 1′. Функцию f называют *четной* (соответственно *нечетной*), если для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$).

Как равенство $f(-x) = f(x)$, так и равенство $f(-x) = -f(x)$ могут выполняться для всех $x \in D(f)$ лишь в случае, когда из $x \in D(f)$ следует $-x \in D(f)$, т. е. когда множество $D(f)$ симметрично относительно начала координат O. Отсюда вытекает, что для четности или нечетности функции f необходимо, чтобы $D(f)$ было симметрично относительно точки O.

Из определения 1′ вытекает, что функции вида x^{2n}, $n \in \boldsymbol{N}$, четны, а функции вида x^{2n-1}, $n \in \boldsymbol{N}$, нечетны. Этим и объясняются названия соответствующих классов функций.

Пример 1. Исследуем на четность функцию x^2, $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

Решение. Эта функция не является четной, так как отрезок $[-3; 5]$ не симметричен относительно начала координат.

Бывают функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными. Например, функция $x^3 + x^2$ не является ни четной, ни нечетной, потому что $(-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$, и не выполняется ни тождество $(-x)^3 + (-x)^2 = x^3 + x^2$, ни тождество $(-x)^3 + (-x)^2 = -(x^3 + x^2)$.

Исследование функций на четность и нечетность облегчается следующими утверждениями.

а) *Сумма двух четных функций четна, а сумма двух нечетных функций нечетна.*

В самом деле, пусть функции f и g четны и $x \in D(f) \cap D(g)$. Тогда $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$, и потому

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

Значит, функция $f + g$ четна. Аналогично доказывается нечетность функций $f + g$ в случае, когда f и g нечетны.

б) *Произведение двух четных функций является четной функцией, равно как и произведение двух нечетных функций. Произведение четной и нечетной функций — нечетная функция.*

В самом деле, пусть функции f и g четны, а $x \in D(f) \cap D(g)$.

Тогда имеем

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x).$$

Значит, fg — четная функция. Аналогично разбираются остальные случаи.

Поскольку постоянная — четная функция, то из б) следует, что функция af, где $a \in \boldsymbol{R}$, четна, если f четна, и нечетна, если f нечетна. Отсюда следует, что вместе с функциями f и g четна (соответственно нечетна) любая функция вида $af + bg$, где $a, b \in \boldsymbol{R}$.

Пример 2. Функция $2x^4 - 3x^2 + 6$ четна, а функция $8x^3 - 7x$ нечетна.

в) *Если функция f четна* (соответственно *нечетна*), *то и функция $\frac{1}{f}$ четна* (соответственно *нечетна*).

В самом деле, если функция f четна и $f(x) \neq 0$, то

$$\frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)}.$$

Если же $f(x) = 0$, то и $f(-x) = 0$, а потому ни x, ни $-x$ не принадлежат области определения функции $\frac{1}{f}$. Этим доказано, что $\frac{1}{f}$ — четная функция.

Пример 3. Функция $\frac{x^2 + 4}{3x^6 + x^4 + 7}$ четна, поскольку четны функции $x^2 + 4$ и $3x^6 + x^4 + 7$ и выполняется равенство

$$\frac{x^2 + 4}{3x^6 + x^4 + 7} = (x^2 + 4) \cdot \frac{1}{3x^6 + x^4 + 7}.$$

В заключение отметим, что *если X симметрично относительно начала координат, то любая заданная на X функция f является суммой четной и нечетной функций.* Это разложение имеет вид $f = \varphi + \psi$, где

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

В самом деле, из равенств

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \varphi(x),$$

$$\psi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\psi(x)$$

следует, что функция φ четна, а функция ψ нечетна. При этом

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \varphi(x) + \psi(x).$$

Упражнения

237. Выясните, какие из следующих функций являются четными, какие нечетными, а какие не принадлежат ни одному из этих классов:

1) $\frac{1}{1 + x + x^2} - \frac{1}{1 - x + x^2}$;
2) $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$;
3) $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$;
4) $(x + 1)^4 + (x - 1)^4$;
5) $x^4 - 4x + 5$;
6) $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$;
7) $\frac{x + 4}{x - 4} + \frac{x - 4}{x + 4}$.

238. Представьте в виде суммы четной и нечетной функций следующие функции:

1) $3x^2 - x + 7$; 3) $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 4}$;

2) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$; 4) $\frac{x^2 + 4}{x^3 + 1}$.

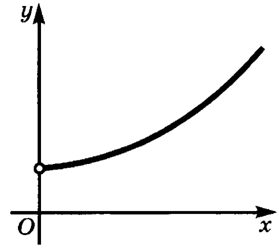


Рис. 62

239. На рисунке 62 изображен график функции f, заданной на луче $(0; +\infty)$. Нарисуйте график четной функции, совпадающей с f при $0 < x < +\infty$. Нарисуйте график нечетной функции, совпадающей с f при $0 < x < +\infty$.

240. Чему равно $f(0)$, если f — нечетная функция и $0 \in D(f)$?

241. Функция f равна x^2 при $0 \leqslant x < +\infty$. Продолжите ее четным образом на всю ось.

242. Функция f равна x^2 при $0 \leqslant x < +\infty$. Продолжите ее нечетным образом на всю ось.

243. Может ли линейная функция $ax + b$ быть четной? А нечетной?

244. Приведите пример функции, которая не является ни четной, ни нечетной.

245. Найдите условие, при котором график функции f будет симметричен относительно прямой $x = a$.

246. Найдите условия, при выполнении которых график функции f будет симметричен относительно точки $M(a; b)$.

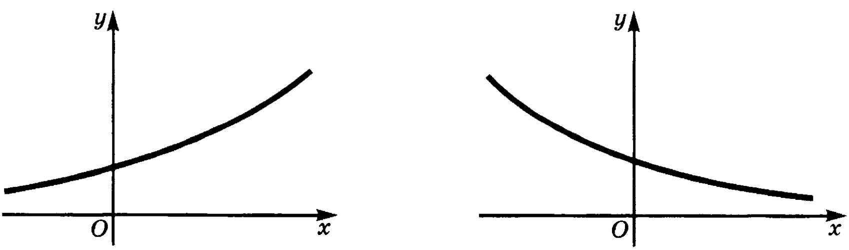
247. Найдите ось симметрии для графиков функций:

1) $(x - 3)^4 + 2(x - 3)^2 + 5$; 2) $x^2 - 3x + 5$.

248. Найдите центр симметрии для графиков функций:

1) $(x - 2)^3 + 3(x - 2) - 6$; 2) $(x + 4)^5 + (x + 4)^3 - 1$.

2. Возрастание и убывание функций. Функция, график которой изображен на рисунке 63, *а*, обладает тем свойством, что при увеличении значения аргумента x значения функции увеличиваются. Про такие функции говорят, что они возрастают. А значения функции, график которой изображен на рисунке 63, *б*, уменьшаются при увеличении x. Эта функция убывает. Функция f,



а *б*

Рис. 63

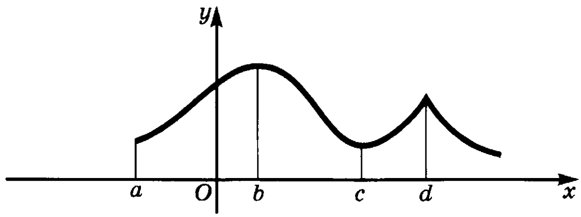


Рис. 64

график которой изображен на рисунке 64, возрастает на отрезках $[a; b]$ и $[c; d]$ и убывает на отрезке $[b; c]$ и луче $[d; +\infty)$.

Определение 1. Функцию f называют *возрастающей* (соответственно *убывающей*) на множестве X, если на этом множестве при увеличении аргумента увеличиваются (соответственно уменьшаются) значения функции.

Иными словами, функция f возрастает на множестве X, если из $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Она убывает на этом множестве, если из $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 65, *а*, *б*).

Наряду с возрастанием и убыванием функций рассматривают нестрогие возрастание и убывание.

Определение 2. Функцию f называют *нестрого возрастающей* (соответственно *нестрого убывающей*) на X, если из $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Графики таких функций изображены на рисунке 66, *а*, *б*. Они могут содержать как участки возрастания (соответственно убывания) , так и горизонтальные участки.

Функции, возрастающие или убывающие на X, называют *монотонными* на X, а функции, нестрого возрастающие или нестрого убывающие на X, называют *нестрого монотонными* на X.

Исследование функций на возрастание и убывание выполняется с помощью свойств неравенств. Приведем примеры.

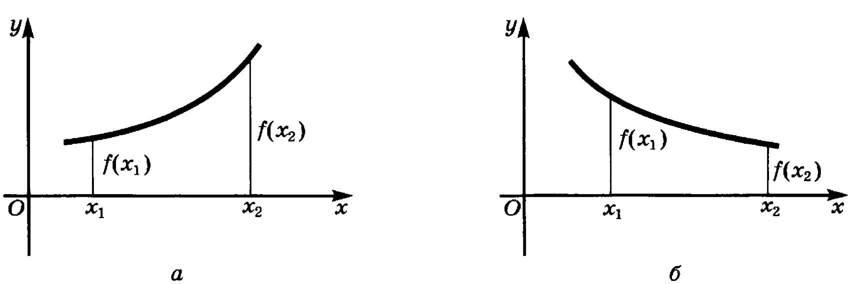


Рис. 65

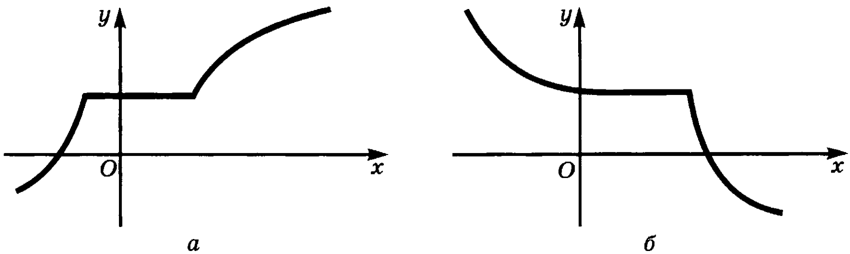


Рис. 66

Пример 1. Функция x^n, где $n \in N$, возрастает на луче $[0; +\infty)$.

В самом деле, в силу свойства 7) неравенств (см. п. 7 § 1 главы 1) из $0 \leqslant x_1 < x_2$ следует, что $x_1^n < x_2^n$.

Для доказательства монотонности функций полезны следующие общие утверждения.

1) *Если функция f возрастает на множестве X, то для любого числа c функция $f + c$ тоже возрастает на X.*

2) *Если функция f возрастает на множестве X и $c > 0$, то функция cf тоже возрастает на X.*

3) *Если функция f возрастает на множестве X, то функция $-f$ убывает на этом множестве.*

4) *Если функция f возрастает и сохраняет знак на множестве X, то функция $\frac{1}{f}$ убывает на этом множестве.*

5) *Если функции f и g возрастают на множестве X, то их сумма $f + g$ тоже возрастает на этом множестве.*

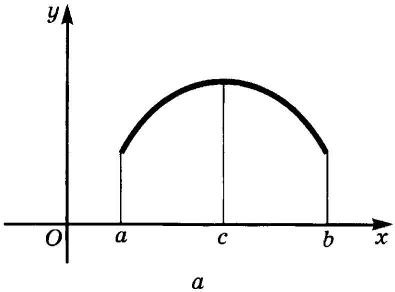
6) *Если функции f и g возрастают и неотрицательны на множестве X, то их произведение fg тоже возрастает на X.*

7) *Если функция f возрастает и неотрицательна на множестве X и n — натуральное число, то функция f^n тоже возрастает на X.*

8) *Если функция f возрастает на множестве X, а функция g возрастает на множестве значений $E(f)$ функции f, то композиция $g \circ f$ этих функций возрастает на X.*

Все эти утверждения непосредственно вытекают из свойств неравенств и определения возрастания и убывания функций. Например, утверждение 6) доказывается следующим образом. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$. Тогда, в силу того что функции f и g неотрицательны и возрастают, имеют место неравенства $f(x_1) < f(x_2)$ и $g(x_1) < g(x_2)$. Но тогда по свойству ж) неравенств из п. 5 § 1 главы 1 имеем $f(x_1) \cdot g(x_1) < f(x_2) \cdot g(x_2)$. Это и значит, что функция $f \cdot g$ возрастает на X.

Предоставляем читателю доказать остальные утверждения, а также сформулировать и доказать соответствующие утверждения про убывающие функции.



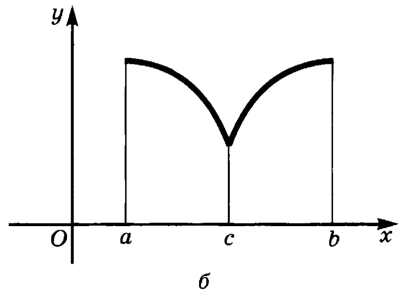
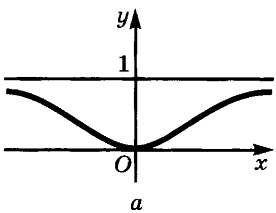


Рис. 67

Пример 2. Докажем, что функция $\frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}$ убывает на положительной полуоси $[0; +\infty)$.

Решение. Так как функция x неотрицательна и возрастает на полуоси $[0; +\infty)$, то по утверждениям 7) и 2) теми же свойствами обладают функции x^4 и $3x^2$. Но тогда по утверждениям 1) и 5) функция $x^4 + 3x^2 + 2$ тоже возрастает на $[0; +\infty)$, а потому по утверждению 4) функция $\frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}$ убывает на этом множестве.



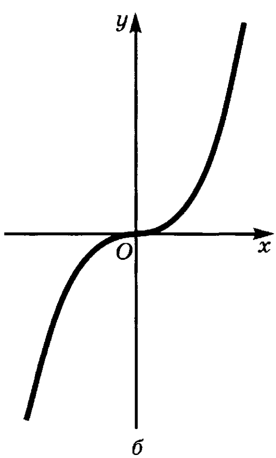


Рис. 68

Если функция f возрастает на отрезке $[a; c]$ и убывает на отрезке $[c; b]$, то ее значения в точке c больше значений в остальных точках отрезка $[a; b]$ (рис. 67, *а*).

Аналогично если функция f убывает на отрезке $[a; c]$ и возрастает на отрезке $[c; b]$, то ее значение в точке c меньше всех остальных ее значений на отрезке $[a; b]$ (рис. 67, *б*).

На рисунке 68, *а* изображен график функции $\frac{x^2}{x^2 + 1}$. Из рисунка видно, что этот график целиком лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$ и $y = 1$. Это вытекает из того, что для всех x имеем $0 \leqslant \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1$. График же функции $\frac{x^3}{2}$ (рис. 68, *б*) имеет точки со сколь угодно большими значениями ординат и потому ни в какую полосу, параллельную оси абсцисс, поместиться не может. Однако если взять часть этого графика, лежащую над отрезком $[-2; 2]$, то она целиком лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = -4$ и $y = 4$.

Введем следующее определение.

Определение 3. Функцию f называют *ограниченной снизу* (соответственно *сверху*) на множестве X, если существует такое число M, что на X выполняется неравенство $f(x) \geqslant M$ (соответственно $f(x) \leqslant M$). Функцию, ограниченную на X и снизу и сверху, называют *ограниченной* на этом множестве.

Если функция f не является ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу) на X, то ее называют *неограниченной* (*неограниченной сверху*, *неограниченной снизу*) на X. В этом случае для любого M найдется такое $x \in X$, что $|f(x)| > M$ (соответственно $f(x) > M$; $f(x) < M$).

Пример 3. а) Функция $\frac{x^2}{x^2+1}$ ограничена на всем множестве $\boldsymbol{R}$; б) функция $x^2 + 1$ ограничена снизу на $\boldsymbol{R}$ (так как $x^2 + 1 \geqslant 1$), но не ограничена сверху на $\boldsymbol{R}$; на любом отрезке $[a; b]$ эта функция ограничена; в) функция $\frac{1}{x}$ не является ограниченной на промежутке $(0; 1)$, так как при x, достаточно близких к нулю, она принимает сколь угодно большие значения; на любом отрезке вида $[\varepsilon; 1]$, где $\varepsilon > 0$, эта функция ограничена.

Упражнения

249. Докажите утверждения 1 — 8.

Исследуйте на возрастание и убывание функцию (упр. 250—252).

250. 1) $(x-2)^2 + 1$; 2) $\frac{1}{x^2 - 4x + 5}$; 3) $\frac{1}{x^2+4}$; 4) $\frac{-1}{x^2 - 6x + 8}$.

251. 1) $\frac{1}{(x^2 - 6x + 8)^2}$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2+4}$; 3) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 8x + 17}$.

252. 1) $x^8 + 6x^4 + 5x^2 + 7$; 2) $3(x-2)^4 + 2(x-2)^2 + 5$.

253. Найдите наименьшее значение функции из упражнений 250 (1, 2, 3), 252 (1).

254. Найдите наибольшее значение функции из упражнений 250 (2, 3), 251 (1).

255. Среди следующих функций найдите: а) ограниченные снизу; б) ограниченные сверху; в) ограниченные:

1) $\frac{x^4}{x^4+1}$; 3) $-\frac{1}{x^4+4}$; 5) $x^3 + 6$;

2) $\frac{1}{x^2+10}$; 4) $x^2 + 6$; 6) $-2x^4 + 2x^2 + 1$.

256. Докажите, что функция $f(x) = x^3 - 3x$ убывает на отрезке $[-1; 1]$ и возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$.

257*. Докажите, что функция $f(x) = x^3 - 3x^2$ убывает на отрезке $[0; 2]$ и возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$.

ГЛАВА 4

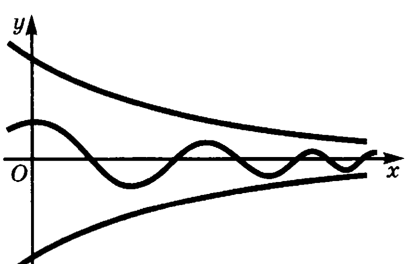
Предел и непрерывность

§ 1. Предел функции на бесконечности

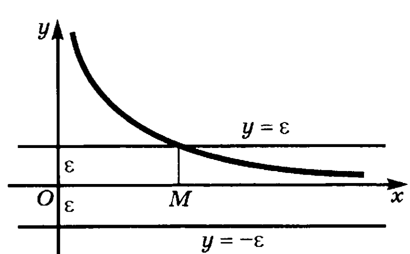
1. Бесконечно малые функции. Существует много примеров величин, связанных друг с другом так, что при безграничном увеличении одной из них другая безгранично приближается к нулю. Например, сила F, с которой Земля притягивает удаляющуюся от нее ракету, приближается к нулю по мере увеличения расстояния r ракеты до Земли; масса m куска радиоактивного вещества приближается к нулю с течением времени; длина a стороны прямоугольника данной площади S приближается к нулю, когда длина b другой стороны безгранично увеличивается.

Для описания величин, связанных друг с другом указанным выше образом, введем понятие функции, бесконечно малой при $x \to +\infty$. Так называют функции, график которых при больших положительных значениях x «почти сливается» с осью абсцисс. На рисунке 69, *а* приведены графики трех бесконечно малых функций. Видим, что бесконечно малая функция может приближаться к нулю и возрастая, и убывая, и даже колеблясь около нулевого значения.

Чтобы уточнить слова «график функции почти сливается с осью абсцисс при больших положительных значениях аргумента», выберем какое-нибудь положительное число ε и проведем полоску, ограниченную прямыми $y = -\varepsilon$ и $y = \varepsilon$ (рис. 69, *б*). Прибли-



а



б

Рис. 69

жаясь к оси абсцисс, график бесконечно малой функции α рано или поздно попадет в эту полосу и останется в ней (этому могут предшествовать попадания графика в полосу, после которых он выходит из нее, — такие попадания нас не интересуют).

Если график функции α попал в полосу, ограниченную прямыми $y = -\varepsilon$ и $y = \varepsilon$, то выполняются неравенства $-\varepsilon < \alpha(x) < \varepsilon$, или, что то же самое, неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Поэтому понятие функции, бесконечно малой при $x \to +\infty$, определим следующим образом.

Определение. Функцию α называют *бесконечно малой* при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется луч $[M; +\infty)$, на котором выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Пример 1. Докажем, что функция $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Решение. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Положим $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда при $x > M$ имеем $\frac{1}{x} < \frac{1}{M} = \varepsilon$, и потому $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Значит, функция $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Пример 2. Докажем, что функция $10^{-[x]}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Решение. Зададим любое $\varepsilon > 0$. Найдется такое $n \in N$, что $10^{-n} < \varepsilon$. Поэтому при $x > n$ имеем $10^{-[x]} \leqslant 10^{-n} < \varepsilon$. Например, если $\varepsilon = 0{,}00024$, то надо взять $n = 4$.

Этим доказано, что функция $10^{-[x]}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Функция, принимающая для всех x значение 0, бесконечно мала при $x \to +\infty$. Других постоянных бесконечно малых функций не существует.

Теорема. *Если функция α постоянна и бесконечно мала при $x \to +\infty$, то она равна нулю при всех значениях x.*

Доказательство. Пусть для всех x имеем $\alpha(x) = b$, причем $b \neq 0$. Тогда ни при каком значении x не может выполняться неравенство $|\alpha(x)| < |b|$, а потому функция α не может быть бесконечно малой при $x \to +\infty$.

Упражнения

258. Дана функция $\alpha(x) = \frac{1000}{x}$.

1) Укажите область определения функции α.
2) Выясните, при каких значениях x функция принимает положительные значения, отрицательные значения.

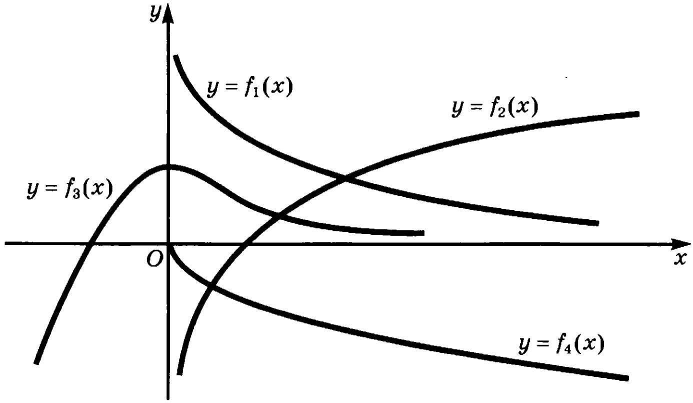


Рис. 70

3) Укажите промежутки, на которых функция возрастает, убывает.

4) При каких значениях x выполняются неравенства: $|\alpha(x)| < 0{,}01$; $|\alpha(x)| < 0{,}0001$; $|\alpha(x)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$?

5) Как ведет себя график функции $\alpha(x)$ при $x \to +\infty$? Постройте этот график.

259. На рисунке 70 изображено поведение графиков нескольких функций. Какие из этих функций бесконечно малы при $x \to +\infty$?

260. Для функции $\alpha(x) = \dfrac{15}{x^2}$ составьте таблицу значений при $x = 1, 2, 3, 10, 30, 100, 300, 1000$.

Начиная с какого значения x выполняется неравенство:

1) $|\alpha(x)| < 0{,}0015$; 2) $|\alpha(x)| < 0{,}000015$; 3) $|\alpha(x)| < 15 \cdot 10^{-12}$?

261. Дана функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

1) Найдите ее значения при $x = 100$, $10\,000$, $1\,000\,000$.

2) При каких значениях x выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$, если $\varepsilon = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}0005$?

3) Постройте график этой функции. Как ведет себя график при $x \to +\infty$?

4) Можно ли сказать, что функция бесконечно мала при $x \to +\infty$?

262. Докажите, что функция $\dfrac{10^4}{\sqrt[5]{x}}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

263. Найдите значение M, после которого выполняется неравенство:

1) $\dfrac{10^4}{\sqrt[5]{x}} < 0{,}1$; 2) $\dfrac{10^4}{\sqrt[5]{x}} < 10^{-7}$.

264. Докажите, что функция $\dfrac{1}{(x+2)^3}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

265. Найдите значение M, после которого выполняется неравенство:

1) $\dfrac{1}{(x+2)^3} < 0{,}001$; 2) $\dfrac{1}{(x+2)^3} < 10^{-6}$.

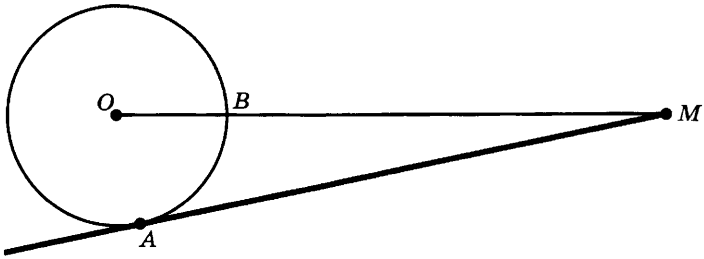


Рис. 71

266. Объясните, почему функции $\dfrac{0{,}001x}{x+10}$ и $\dfrac{10-x}{2x-3}$ не являются бесконечно малыми при $x \to +\infty$.

267. Будет ли бесконечно малой при $x \to +\infty$ функция:

1) $3^{|x|}$; 2) $5^{-|x|}$; 3) $\dfrac{10^8}{3^{[x]}}$; 4) $\dfrac{2x+5}{2x+1}$?

268. Будет ли бесконечно малой при $x \to +\infty$ функция $\dfrac{1}{1+x(1+(-1)^{[x]})}$?

269. Ракета безгранично удаляется от Земли (рис. 71). Является ли бесконечно малой разность расстояний MO и MA? MO и MB? Докажите, что угол OMA бесконечно мал.

270. Можно ли считать бесконечно малой добавку 0,001 г вещества в колбу, где идет химическая реакция, если объем колбы равен 100 см^3? Как называют вещества, добавка малого количества которых ускоряет ход реакции?

2. Операции над бесконечно малыми функциями. Часто бывает необходимо убедиться, что данная функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$. С этой целью ее сравнивают с другими функциями, о которых заведомо известно, что они бесконечно малы при $x \to +\infty$. Такое сравнение основано на теоремах, которые будут доказаны в этом пункте. Предварительно сделаем следующее замечание.

Общей частью лучей $(M_1; +\infty)$ и $(M_2; +\infty)$ *является луч* $(M; +\infty)$, где M — большее из чисел M_1 и M_2 (если $M_1 = M_2$, то $M = M_1 = M_2$). Пишут: $M = \max(M_1; M_2)$.

Теорема 1. *Пусть функция β бесконечно мала при $x \to +\infty$, и пусть существует луч $(M; +\infty)$, на котором выполняется неравенство $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$. Тогда функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Так как функция β бесконечно мала при $x \to +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется луч $(N; +\infty)$, на котором $|\beta(x)| < \varepsilon$. На общей части лучей $(M; +\infty)$ и $(N; +\infty)$ верны оба неравенства $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$ и $|\beta(x)| < \varepsilon$, а потому и неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется луч, на котором $|\alpha(x)| < \varepsilon$, и потому функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Пример 1. Докажем, что функция $\frac{x^3}{x^4+1}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Решение. Так как $x^4 + 1 > x^4$, то при $x > 0$ имеем $\frac{x^3}{x^4+1} < \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$. Поскольку функция $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, это же верно и для функции $\frac{x^3}{x^4+1}$.

Если неограниченно уменьшать длины обеих сторон прямоугольника, то его площадь тоже будет приближаться к нулю. Это замечание является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 2. *Если функции α и β бесконечно малы при $x \to +\infty$, то их произведение $\alpha\beta$ тоже бесконечно мало при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Поскольку функция β бесконечно мала при $x \to +\infty$, найдется луч $(M; +\infty)$, на котором $|\beta(x)| < 1$. На этом луче имеем

$$|\alpha(x)\beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < |\alpha(x)|. \tag{1}$$

Поскольку функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$, то из (1) в силу теоремы 1 вытекает, что функция $\alpha\beta$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Пример 2. Докажем, что функция $\frac{1}{x^2}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Решение. Имеем $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$. Значит, $\frac{1}{x^2}$ — произведение функций $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x}$, бесконечно малых при $x \to +\infty$. Поэтому она тоже бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Таким же образом доказывается, что бесконечно малы при $x \to +\infty$ функции $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x}$. С помощью метода математической индукции доказываем, что *для любого $n \in N$ функция $\frac{1}{x^n}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.*

Если взять два куска радиоактивного вещества, то с течением времени масса каждого куска будет приближаться к нулю, а тогда будет приближаться к нулю и общая масса обоих кусков. Это замечание является наглядной иллюстрацией теоремы 3.

Теорема 3. *Если функции* α *и* β *бесконечно малы при* $x \to +\infty$, *то их сумма* $\alpha + \beta$ *тоже бесконечно мала при* $x \to +\infty$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как функции α и β бесконечно малы при $x \to +\infty$, то найдутся лучи $(M; +\infty)$ и $(N; +\infty)$, на которых соответственно выполняются неравенства $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. На общей части этих лучей выполняются оба неравенства, а потому и неравенство

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует луч, на котором $|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$, и потому функция $\alpha + \beta$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Пример 3. Докажем, что функция $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Решение. Эта функция является суммой двух бесконечно малых функций $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{1}{x}$.

Пример 4. Докажем, что если функции α и β бесконечно малы при $x \to +\infty$, то тем же свойством обладает функция $|\alpha| + |\beta|$.

Решение. Функции $|\alpha|$ и $|\beta|$ бесконечно малы при $x \to +\infty$ в силу теоремы 1, а тогда функция $|\alpha| + |\beta|$ бесконечно мала при $x \to +\infty$ в силу теоремы 3.

Следствие 1. *Если функции* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *бесконечно малы при* $x \to +\infty$, *то тем же свойством обладают функции* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$.

Вытекает это из теорем 2 и 3 с помощью метода математической индукции.

Следствие 2. *Если функция* α *бесконечно мала при* $x \to +\infty$, *то для любого числа* A *функция* $A\alpha$ *бесконечно мала при* $x \to +\infty$.

Доказательство. Из того, что функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$, вытекает бесконечная малость при $x \to +\infty$ функций $2\alpha = \alpha + \alpha$, $3\alpha = 2\alpha + \alpha$, $4\alpha = 3\alpha + \alpha$. С помощью метода математической индукции убеждаемся, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$ функция $n\alpha$ бесконечно мала при $x \to +\infty$. Поскольку для любого $A \in \boldsymbol{R}$ найдется такое $n \in \boldsymbol{N}$, что $|A| \leqslant n$, то функция $A\alpha$ бесконечно мала при $x \to +\infty$ (так как $|A\alpha(x)| \leqslant |n\alpha(x)|$).

Пример 5. Докажем, что функция $\frac{8}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Решение. Функции $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ бесконечно малы при $x \to +\infty$. По следствию из теоремы 3 тем же свойством обладают функции $\frac{8}{x^3}$, $-\frac{4}{x^2}$, $\frac{3}{x}$, а значит, и их сумма $\frac{8}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x}$.

Упражнения

271. Докажите, что следующие функции бесконечно малы при $x \to +\infty$:

1) $\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{7}{x}$; 4) $\frac{1}{(x+4)^5}$; 7) $\frac{2^{[x]} + 3^{[x]}}{6^{[x]}}$;

2) $10^{-[x]} + \frac{7}{x^2}$; 5) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^6}$; 8) $\frac{5x+9}{x(x+2)}$.

3) $\frac{10^9}{x} + \frac{10^{20}}{x^2}$; 6) $7^{-[x]} + \frac{1}{3^{[x]}}$;

272. Найдите такое M, что при всех $x \geqslant M$ выполнено неравенство:

1) $\frac{10^9}{x} + \frac{10^{20}}{x^2} < 10^{-10}$; 2) $7^{-[x]} + \frac{1}{3^{[x]}} < \frac{1}{1000}$.

273. Какие из следующих функций бесконечно малы при $x \to +\infty$ и почему:

1) $\frac{x}{10^{300}}$; 2) $\frac{10^{500}}{x}$; 3) $\frac{x}{10^{300}} + \frac{2}{x}$; 4) $\frac{10^7}{x+3} + \frac{10^{20}}{x+5}$; 5) $\frac{1}{x(x^6+2)}$?

274. Постройте график функции $\frac{5}{x+2} - 1$. Как ведет себя график при $x \to +\infty$?

275. Для функции $\frac{3x+5}{x+2}$ составьте таблицу значений при $x = 3, 8, 98, 998, 9998$.

Является ли данная функция бесконечно малой при $x \to +\infty$? Чему приблизительно равно значение функции при $x = 378\,241$?

276. Приведите пример двух функций, бесконечно малых при $x \to +\infty$, отношение которых: 1) бесконечно мало; 2) не является бесконечно малым.

277. Следует ли из того, что произведение двух функций бесконечно мало при $x \to +\infty$, бесконечная малость множителей?

278. Следует ли из того, что сумма двух функций бесконечно мала при $x \to +\infty$, бесконечная малость слагаемых? Можно ли сделать этот вывод, если дополнительно известно, что слагаемые положительны?

3. Предел функции на бесконечности. Температура T снятого с огня кипящего чайника с течением времени t уменьшается и приближается к температуре T_0 окружающего воздуха. Разность $T - T_0$ при этом приближается с течением времени к нулю, она бесконечно мала при $t \to +\infty$. При этом $T = T_0 + (T - T_0)$, т. е. температура T является суммой числа T_0 и бесконечно малой функции $T - T_0$. Говорят, что T_0 — предел T при безграничном увеличении t (при $t \to +\infty$), и пишут $\lim\limits_{t \to +\infty} T = T_0$. Здесь буквы lim —

сокращение латинского слова limes, означающего «предел» (сравните со словом «лимит»).

Отметим, что с точки зрения физики выравнивание температуры чайника произойдет за конечное время, так как начиная с некоторого момента времени t_0 разность $T - T_0$ станет меньше, чем чувствительность измеряющих температуру приборов. Но математическая модель этого процесса такова, что разность $T - T_0$ никогда не обращается в нуль.

В общем случае предел функции f при $x \to +\infty$ определяется так.

Определение 1. Число b называют *пределом функции f при $x \to +\infty$*, если $f(x) = b + \alpha(x)$, где функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Из определения 1 вытекает, что если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, то функция $f - b$ бесконечно мала при $x \to +\infty$. Используя определение бесконечно малой функции, получаем следующую формулировку.

Определение 1′. Число b называют *пределом функции f при $x \to +\infty$*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется луч $(M;\ +\infty)$, на котором выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

При удалении точки $M(x)$ от начала отсчета влево симметричная с ней точка $N(-x)$ удаляется по той же оси вправо. Поэтому слова «x стремится к $-\infty$» означают, что $-x$ стремится к $+\infty$. Исходя из этого, введем следующее определение.

Определение 2. Число b называют *пределом функции f при $x \to -\infty$*, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = b$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

На рисунке 72 изображены графики функций, имеющих предел b при $x \to +\infty$. Если и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то число b называют *пределом функции f при $x \to \infty$* и пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Функция, график которой изображен на рисунке 73, имеет предел b

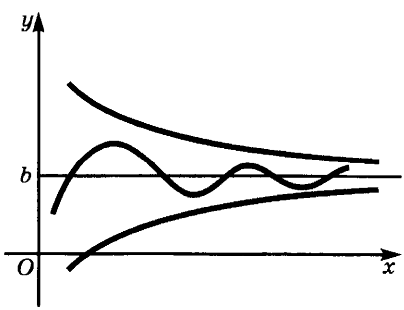


Рис. 72

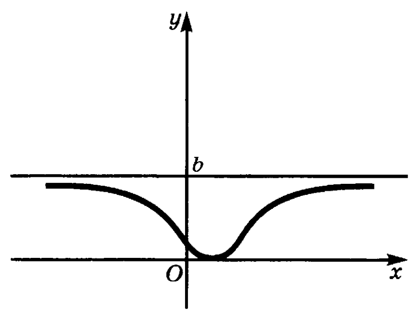


Рис. 73

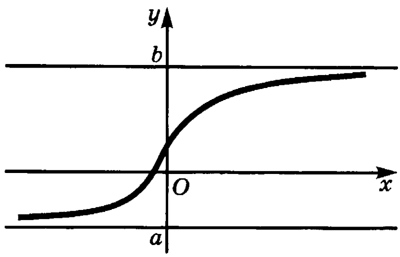


Рис. 74

при $x \to \infty$. Для функции же, график которой изображен на рисунке 74, имеем $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$, а предел $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ не существует, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq$ $\neq \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Поскольку бесконечная малость функции α при $x \to +\infty$ равносильна тому, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$, будем говорить, что функция α бесконечно мала при $x \to -\infty$ (соответственно при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0$ (соответственно $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

Предоставляем читателю доказать, что *функция* α *бесконечно мала при* $x \to \infty$ *в том и только в том случае, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* M, *что на множестве* $\{x \mid |x| > M\}$ (т. е. на объединении лучей $(M; +\infty)$ и $(-\infty; -M)$) *выполняется неравенство* $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Чтобы проверить, является ли число b пределом функции f при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$), достаточно показать, что разность $f - b$ бесконечно мала при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$).

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2$.

Решение. Имеем $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 = \dfrac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Но $\dfrac{1}{x^2 + 1} < \dfrac{1}{x^2}$, а функция $\dfrac{1}{x^2}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$. Поэтому функция $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ тоже бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Значит, 2 — предел функции $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ при $x \to +\infty$.

Так как функция $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ четна, то ее предел при $x \to -\infty$ равен ее пределу при $x \to +\infty$ и потому $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2$.

Пример 2. Найдем значение функции $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ при $x =$ $= 1\ 563\ 408$ с точностью до 10^{-12}.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2$, а заданное значение аргумента весьма велико, можно ожидать, что значение функции при этом значении аргумента почти не отличается от числа 2. Надо лишь проверить, что разность между $\frac{2x^2+3}{x^2+1}$ и числом 2 при этом значении аргумента не превосходит 10^{-12}. Но эта разность равна $\frac{1}{x^2+1}$ и потому меньше, чем $\frac{1}{x^2}$. Поскольку из условия следует, что $x > 10^6$, то $x^2 > 10^{12}$, а $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{10^{12}} = 10^{-12}$. Тогда тем более $\frac{1}{x^2+1} < 10^{-12}$. Значит, с точностью до 10^{-12} значение функции $\frac{2x^2+3}{x^2+1}$ при $x = 1\,563\,408$ равно числу 2.

В п. 2 § 2 главы 3 было показано, что график функции $\alpha + b$ получается из графика функции α с помощью параллельного переноса, при котором начало координат переходит в точку $A(0;\ b)$. При этом переносе ось абсцисс переходит в прямую линию $y = b$. Если функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$, то ее график при больших значениях x почти сливается с осью абсцисс. Отсюда следует, что график функции $\alpha + b$ почти сливается с прямой $y = b$. При этом $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Итак, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, то график функции f при больших значениях x почти сливается с прямой $y = b$. Говорят, что прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции f. Если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ также является горизонтальной асимптотой для графика функции f, однако в этом случае график приближается к асимптоте при удалении влево от оси ординат. Если же $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то при удалении и вправо, и влево график функции приближается к прямой $y = b$ (рис. 75).

Упражнения

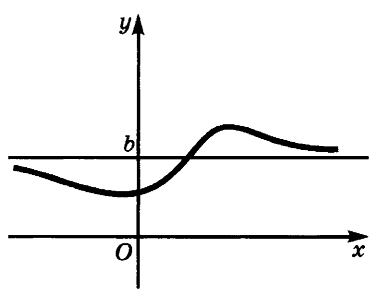


Рис. 75

279. Какие из следующих величин имеют пределы:

1) угол отклонения маятника от положения равновесия при возрастании времени, если колебания происходят без сопротивления среды;

2) та же величина в случае, когда колебания происходят в сопротивляющейся среде;

3) напряжение переменного тока при возрастании времени;

4) периметр, площадь и углы треугольника ABC с постоянным основанием AB и вершиной C, неограниченно удаляющейся вправо по прямой, параллельной основанию?

280. Докажите, что:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5}{3x} = \dfrac{2}{3}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+6}{x^2} = 3$; 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+14}{x+2} = 5$.

281. Чему равен предел функции f при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, если:

1) $f(x) = a$, a — постоянная; 2) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$?

282. Укажите функции, график которых неограниченно приближается к прямой $y = 3$ при $x \to +\infty$:

1) $\dfrac{3x-2}{x+2}$; 2) $\dfrac{6x^2-5}{3+2x^2}$; 3) $\dfrac{12}{1+4x}$; 4) $\dfrac{12x}{1+4x}$; 5) $0{,}7^{[x]} + 3$.

283. Приведите примеры трех функций, для которых прямая $y = 2$ есть горизонтальная асимптота.

284. Приведите примеры функций, не имеющих предела при $x \to +\infty$.

285. Сосуд содержит a граммов радиоактивного газа и b граммов нерадиоактивного газа. К какому пределу стремится масса газа в сосуде, если продукты радиоактивного распада удаляются?

286. В пробирку с поваренной солью влито небольшое количество воды. К какому пределу стремится с течением времени концентрация раствора?

287. В электрическую цепь с сопротивлением 10 Ом включен источник постоянного тока с напряжением 120 В. К какому значению стремится с течением времени сила тока в цепи?

4. Свойства предела функции при $x \to +\infty$. Имеют место следующие утверждения о пределах функций при $x \to +\infty$.

Теорема 1. *Функция f не может иметь двух различных пределов при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$. Тогда $f = b + \beta$ и $f = c + \gamma$, где функции β и γ бесконечно малы при $x \to +\infty$. Но тогда $b + \beta = c + \gamma$, т. е. $b - c = \gamma - \beta$. Значит, функция $\gamma - \beta$ бесконечно мала и постоянна (равна $b - c$). Это может быть лишь в случае, когда она тождественно равна нулю. Поэтому $b - c = 0$, т. е. $b = c$.

Теорема 2. *Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, причем $b \neq 0$, то найдется луч, на котором знак функции f совпадает со знаком числа b.*

Доказательство. По условию имеем $f = b + \beta$, где функция β бесконечно мала при $x \to +\infty$. Найдется луч, на котором выполняется неравенство $|\beta| < |b|$. На этом луче сумма $b + \beta$ имеет тот же знак, что и слагаемое b, большее по модулю. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ *и существует луч* $(M; +\infty)$, *на котором* $f(x) \geqslant 0$, *то* $b \geqslant 0$.

Доказательство. Если бы мы имели $b < 0$, то по теореме 2 нашелся бы луч, на котором функция f была бы отрицательна. На пересечении этого луча с лучом $(M; +\infty)$ выполнялись бы одновременно неравенства $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) < 0$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает следствие.

Теорема 3. *Если существует луч* $(M; +\infty)$, *на котором выполняются неравенства* $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant b$ *или* $b \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, *причем* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = b$, *то и* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что на луче $(M; +\infty)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| \leqslant |\varphi(x) - b|$. Но разность $\varphi(x) - b$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = b$. По теореме 1 п. 2 разность $f(x) - b$ тоже бесконечно мала при $x \to +\infty$, а потому $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Предоставляем читателю сформулировать и доказать аналогичные утверждения для случаев $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.

5. Вычисление пределов. При достаточно малом изменении чисел b и c мало меняются их сумма $b + c$ и произведение bc, а если $c \neq 0$, то и их частное $\frac{b}{c}$. Это очевидное замечание делает естественным следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = c$. *Тогда*:

а) *предел суммы функций f и g при $x \to +\infty$ равен сумме их пределов:*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x) = b + c; \tag{1}$$

б) *предел произведения функций f и g при $x \to +\infty$ равен произведению их пределов:*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} g(x) = bc; \tag{2}$$

в) *если $c \neq 0$, то предел частного функций f и g равен частному их пределов:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)} = \frac{b}{c}. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение а). Так как по условию $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = c$, то $f = b + \beta$, $g = c + \gamma$, где функции β и γ бесконечно малы при $x \to +\infty$. Тогда

$$f + g = (b + \beta) + (c + \gamma) = (b + c) + (\beta + \gamma).$$

Но по теореме 3 п. 2 функция $\beta + \gamma$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, и потому функция $f + g$ является суммой числа $b + c$ и бесконечно малой функции $\beta + \gamma$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = b + c$.

Доказательство утверждения б) проводится аналогично. Оно основано на равенстве $f \cdot g = (b + \beta) \cdot (c + \gamma) = bc + (b\gamma + c\beta + \beta\gamma)$ и на том, что функция $b\gamma + c\beta + \beta\gamma$ бесконечно мала при $x \to +\infty$ как сумма бесконечно малых функций $b\gamma$, $c\beta$, $\beta\gamma$ (см. теоремы 2, 3 и следствие к теореме 3 п. 2).

Перейдем к доказательству утверждения в). Сначала рассмотрим случай, когда $f(x) = 1$. Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = c$, то $g = c + \gamma$, где функция γ бесконечно мала при $x \to +\infty$. Но тогда найдется луч $(M; +\infty)$, на котором выполняется неравенство $|\gamma(x)| < \dfrac{|c|}{2}$ и, следовательно, неравенство $|g(x)| = |c + \gamma(x)| \geqslant |c| - |\gamma(x)| > |c| - \dfrac{|c|}{2} = \dfrac{|c|}{2}$. На этом луче имеем

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c - g(x)}{cg(x)}\right| = \left|\frac{-\gamma(x)}{cg(x)}\right| < \frac{2|\gamma(x)|}{c^2}.$$

Так как функция γ бесконечно мала, то по следствию теоремы 3 п. 2 и функция $\dfrac{2|\gamma|}{c^2}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, а значит, и функция $\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{c}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, и потому $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{c}$. Чтобы доказать утверждение в) в общем случае, заметим, что при $c \neq 0$ имеем:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty}\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{g(x)} = b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}.$$

Легко убедиться в справедливости аналогов равенств (1) — (3) при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$.

Поскольку функция, тождественно равная нулю, бесконечно мала, а $c = c + 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$. Иными словами, *предел постоянной функции равен этой постоянной*. Отсюда вытекает, что *постоянный множитель можно вынести за знак предела*:

$$\lim_{x \to +\infty} cf(x) = c \lim_{x \to +\infty} f(x). \qquad (4)$$

В самом деле,

$$\lim_{x \to +\infty} cf(x) = \lim_{x \to +\infty} c \lim_{x \to +\infty} f(x) = c \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Пример 1. Вычислим предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 6x^2 - 7}$.

Решение. При безграничном возрастании x и числитель $4x^3 - 3x + 1$, и знаменатель $5x^3 + 6x^2 - 7$ тоже безгранично возрастают. Поэтому предел дроби нельзя вычислить как отношение пределов числителя и знаменателя. Но значение дроби (при $x \neq 0$) не изменится, если разделить числитель и знаменатель на x^3, и тогда получатся выражения, имеющие пределы при $x \to +\infty$. Итак,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 6x^2 - 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{4x^3}{x^3} - \dfrac{3x}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{5x^3}{x^3} + \dfrac{6x^2}{x^3} - \dfrac{7}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}}{5 + \dfrac{6}{x} - \dfrac{7}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(4 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(5 + \dfrac{6}{x} - \dfrac{7}{x^3}\right)}.$$

Но $-\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ и $\dfrac{6}{x} - \dfrac{7}{x^3}$ бесконечно малые при $x \to +\infty$, и потому

$$\lim_{x \to +\infty}\left(4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 4, \quad \lim_{x \to +\infty}\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{7}{x^3}\right) = 5.$$

Значит, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 6x^2 - 7} = \dfrac{4}{5}$.

Пример 2. Вычислим предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 6x - 7}{3x^4 + x^2 - 1}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, разделим числитель и знаменатель на наибольшую из имеющихся степеней x, а именно на x^4. Получим

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 6x - 7}{3x^4 + x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{7}{x^4}}{3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}.$$

Так как функция $\dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{7}{x^4}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{7}{x^4}\right) = 0$. Так как функция $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}$ бесконечно мала при $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}\right) = 3$. Итак, предел числителя равен 0, а предел знаменателя 3, тогда предел дроби равен $\dfrac{0}{3} = 0$.

Значит, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 6x - 7}{3x^4 + x^2 - 1} = 0$.

Рассуждая так же, как при решении примеров 1 и 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Если функция f является частным двух многочленов одинаковой степени, то ее предел при $x \to \infty$ равен частному коэффициентов при старших степенях x:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = \frac{a_n}{b_n},\ a_n \neq 0,\ b_n \neq 0.$$

Если же степень числителя меньше степени знаменателя, то предел функции при $x \to \infty$ равен нулю:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = 0,\ m < n,\ a_m \neq 0,\ b_n \neq 0.$$

Случай, когда степень числителя больше степени знаменателя, будет рассмотрен в следующем пункте.

Упражнения

288. Сформулируйте теоремы о пределе суммы и о пределе произведения двух функций при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$.

289. Можно ли распространить эти теоремы на случай любого конечного числа слагаемых (сомножителей)?

290. Чему равен предел разности и предел частного двух функций при $x \to +\infty$? Какие ограничения накладываются на функции в последнем случае? Почему?

291. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x + 2}$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 10^7}{3x}$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x + 7}{x + 2}$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 1}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3}x^2 + x - 4}$;

6) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)}$;

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x - 11}{8x^2 + 6}$;

8) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 1}{2x^3 + x + 8}$;

9) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(1 + x^2)^{10}}{(1 + 2x^{10})^2}$;

10) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(1 + 3x^{11})^3}{(1 + 8x^5)^7}$.

292. Вычислите предел функции f при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, если:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 3} & \text{при } x > 1, \\ \frac{2x}{4x - 15} & \text{при } x \leqslant 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x + 2}{x^2 + 3} & \text{при } x > 0, \\ \frac{2x}{5x - 3} & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$

293. В упражнениях 1) — 6) вместо букв p, q поставьте такие числа, чтобы равенства стали истинными:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{px + 3}{qx + 8} = \frac{2}{5}$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{px^2 + 6}{qx^2 - 17x + 20} = \frac{7}{4}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x + 1}{2x^p + 9} = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{8x^p - 1}{x^2 + 1} = 0$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5 - 2x^p}{3 + 7x^q} = 0$;

6) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{px + 7}{qx + 7} = 20\,000$.

294. Придумайте функции, пределы которых при $x \to \infty$ были бы равны 1; 3; $\frac{3}{4}$; $\sqrt{7}$.

6. Бесконечно большие функции. Пусть функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$, и существует луч, на котором ее значения отличны от нуля. Тогда при возрастании x значения функции $\frac{1}{\alpha}$ становятся и остаются впредь по модулю больше любого заранее выбранного числа (по мере приближения знаменателя дроби $\frac{1}{\alpha}$ к нулю значения дроби становятся сколь угодно большими). Мы будем говорить, что функция $\frac{1}{\alpha}$ бесконечно велика при $x \to +\infty$. Поскольку равенства $f = \frac{1}{\alpha}$ и $\alpha = \frac{1}{f}$ равносильны, определение бесконечно большой функции можно сформулировать так.

Определение. Функцию f называют *бесконечно большой при* $x \to +\infty$, если функция $\frac{1}{f}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$.

Например, функция x^2 бесконечно велика при $x \to +\infty$, так как функция $\frac{1}{x^2}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$; функция 10^x бесконечно велика при $x \to +\infty$, так как функция $\frac{1}{10^x} = 10^{-x}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Подобно тому как различают стремление x к $+\infty$ и к $-\infty$, различают функции, стремящиеся к $+\infty$ и к $-\infty$. Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ и функция f положительна на некотором луче $(M; +\infty)$, то говорят, что эта функция *стремится к* $+\infty$ *при* $x \to +\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Если же $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ и существует луч $(M; +\infty)$, на котором функция f отрицательна, то говорят, что эта функция *стремится к* $-\infty$ *при* $x \to +\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Например, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$.

Из сказанного выше вытекает справедливость следующего утверждения.

Если функция α бесконечно мала при $x \to +\infty$, причем существует луч $(M;\ +\infty)$, на котором она отлична от нуля, то функция $\frac{1}{\alpha}$ бесконечно велика при $x \to +\infty$.

Для установления того, что данная функция бесконечно велика при $x \to +\infty$, полезны следующие утверждения.

а) *Если функция f бесконечно велика при $x \to +\infty$ и существует луч $(M;\ +\infty)$, на котором $|f(x)| \leqslant |g(x)|$, то функция g бесконечно велика при $x \to +\infty$.*

В самом деле, из $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ следует, что $\left|\frac{1}{g(x)}\right| \leqslant \left|\frac{1}{f(x)}\right|$. Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, то функция $\frac{1}{f}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, а тогда по теореме 1 п. 2 функция $\frac{1}{g}$ тоже бесконечно мала при $x \to +\infty$. Следовательно, функция $g(x)$ бесконечно велика при $x \to +\infty$.

б) *Произведение fg двух функций f и g, бесконечно больших при $x \to +\infty$, бесконечно велико при $x \to +\infty$.*

В самом деле, функции $\frac{1}{f}$ и $\frac{1}{g}$ бесконечно малы при $x \to +\infty$, а потому по теореме 2 п. 2 функция $\frac{1}{fg}$ тоже бесконечно мала при $x \to +\infty$. Но тогда fg бесконечно велика при $x \to +\infty$.

в) *Произведение функции, бесконечно большой при $x \to +\infty$, на число $c \neq 0$ бесконечно велико при $x \to +\infty$.*

В самом деле, функция $\frac{1}{cf}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, поскольку бесконечно мала функция $\frac{1}{f}$ (см. следствие теоремы 3 п. 2). Значит, функция cf бесконечно велика при $x \to +\infty$.

г) *Если функции f и g бесконечно велики при $x \to +\infty$ и знаки этих функций совпадают на некотором луче $(M;\ +\infty)$, то функция $f + g$ бесконечно велика при $x \to +\infty$.*

В самом деле, $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ на луче $(M;\ +\infty)$ и потому $|f(x)| \leqslant |f(x) + g(x)|$. Значит, по утверждению а) функция $|f(x) + g(x)|$ бесконечно велика при $x \to +\infty$.

д) *Если функция f бесконечно велика при $x \to +\infty$, а функция g имеет отличный от нуля предел c при $x \to +\infty$, то функция fg бесконечно велика при $x \to +\infty$.*

В самом деле, найдется луч $(M; +\infty)$, на котором $|g(x) - c| < \left|\frac{c}{2}\right|$ и потому $|g(x)| = |c + g(x) - c| \geqslant |c| - |g(x) - c| \geqslant \left|\frac{c}{2}\right|$. На этом луче имеем $|f(x)g(x)| > \left|\frac{c}{2}\right| \cdot |f(x)|$, а потому функция fg бесконечно велика.

П р и м е р 1. Докажем, что функция $x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ бесконечно велика при $x \to +\infty$.

Р е ш е н и е. Запишем данную функцию в виде

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right).$$

Функция x^3 бесконечно велика при $x \to +\infty$. Так как функция $-\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, то

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right) = 1,$$

и потому функция $x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ бесконечно велика при $x \to +\infty$.

Теорема. *Если $n > m$, то*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \infty \ (a_n \neq 0,\ b_m \neq 0). \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 п. 5 имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0} = 0.$$

Поэтому функция (1) бесконечно велика при $x \to \infty$.

П р и м е р 2. Имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^6 - 1}{20x^5 + x - 9} = \infty.$$

Упражнения

295. Какие из приведенных функций бесконечно велики при $x \to +\infty$:

1) $x^3 - 1000x^2$; 2) $\frac{2x + x^5}{4 - x^3}$; 3) $\frac{7 + x + x^4}{5 + x^3 + x^4}$; 4) $\frac{1 + x^2 + x^4}{5 - 2x + x^5}$?

296. Найдите луч $(M; +\infty)$, на котором выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^4 + 4x + 1}{x^2 - 3x - 6}\right| > 1\,000\,000.$$

297. Ракета безгранично удаляется от Земли. Являются ли бесконечно большими: 1) ее расстояние до Луны; 2) ее расстояние до Солнца; 3) скорость ракеты; 4) масса ракеты?

298. Является ли бесконечно большим отношение массы Солнца к массе атома водорода?

7. Наклонные асимптоты. Функция $\frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$ бесконечно велика при $x \to \infty$ (см. теорему 1 п. 6). Ее можно записать в виде

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2x + 5 + \frac{-2x - 4}{x^2 + 1},$$

т. е. в виде суммы линейной функции $2x + 5$ и функции $\frac{-2x - 4}{x^2 + 1}$, бесконечно малой при $x \to \infty$. Отсюда следует, что при больших значениях $|x|$ график функции $\frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$ почти сливается с наклонной прямой $y = 2x + 5$ (рис. 76). Говорят, что эта прямая является наклонной асимптотой для графика данной функции. В общем случае понятие наклонной асимптоты определяется следующим образом.

Определение. Прямая $y = kx + b$, $k \neq 0$, называется *наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$*, если разность $y_{\text{кр}} - y_{\text{ас}} = f(x) - (kx + b)$ бесконечно мала при $x \to +\infty$.

Аналогично определяют наклонную асимптоту при $x \to -\infty$. Рассмотренный выше пример показывает, как искать наклонные асимптоты для графиков рациональных функций: надо представить, если это возможно, данную функцию в виде суммы линейной функции и функции, бесконечно малой при $x \to \infty$. Тогда график линейной функции и будет искомой асимптотой. Из разобранного в начале пункта примера видно, что наклонная асимптота к графику рациональной функции существует, если степень числителя на единицу больше степени знаменателя.

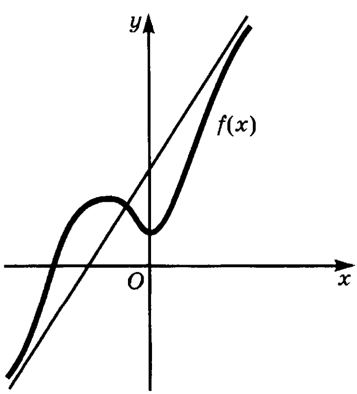


Рис. 76

Предоставляем читателю доказать, что если существуют пределы

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx),$$

то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой для графика функции f при $x \to +\infty$.

Аналогично ищутся наклонные асимптоты при $x \to -\infty$.

Упражнения

299. Графики каких из указанных ниже функций имеют горизонтальные или наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$:

1) $\dfrac{3x^3 + 6}{2x^3 + 4x + 5}$; 3) $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 6}$; 5) $\dfrac{x^4 - 1}{x^3 + 6}$;

2) $\dfrac{4x^3 - x^2 + 1}{x^2 + x + 8}$; 4) $\dfrac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$; 6) $\dfrac{x^5 - 4x - 3}{x^4 - 3x^3 + 4}$?

Найдите эти асимптоты.

300. Найдите параболу, к которой неограниченно приближаются при $x \to \infty$ графики следующих функций:

1) $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 8}$; 2) $\dfrac{x^3 + x - 6}{x - 4}$; 3) $\dfrac{x^5 + 6x^2 + 1}{x^3 + 9x^2 + 8}$; 4) $\dfrac{x^{10} + 5}{x^8 + 1}$.

301. Может ли функция иметь одновременно горизонтальную и наклонную асимптоты при $x \to +\infty$? Может ли она иметь горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$ и наклонную асимптоту при $x \to -\infty$? Приведите примеры.

8. Необходимое и достаточное условие существования предела монотонной функции. В некоторых случаях нет необходимости в вычислении предела, а нужно лишь знать, что этот предел существует. Следующая теорема дает необходимый и достаточный признак существования предела при $x \to +\infty$ для монотонных функций.

Теорема. *Пусть функция f возрастает (соответственно убывает) на луче $[a; +\infty)$. Для существования предела этой функции при $x \to +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое число M, что на луче $[a; +\infty)$ имеем $f(x) \leqslant M$ (соответственно $f(x) \geqslant M$).*

Иными словами, возрастающая функция имеет предел в том и только в том случае, когда ее возрастание не является безграничным (аналогично для убывающей функции).

Представим доказательство этой теоремы в виде серии задач.

а) Докажите необходимость условия этой теоремы.

б) Обозначим через X множество значений функции f на луче $[a; +\infty)$ и через Y множество чисел M таких, что $f(x) \leqslant M$ на луче $[a; +\infty)$. Докажите, что для множеств X и Y существует разделяющее число, и что это число является пределом функции f при $x \to +\infty$.

9. Предел последовательности. По мере возрастания n разность $\dfrac{n}{n+1} - 1 = -\dfrac{1}{n}$ приближается к нулю, а потому члены последовательности $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$ приближаются к числу 1. Говорят, что предел последовательности $\dfrac{n}{n+1}$ равен 1 и пишут $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Определение 1. Последовательность (α_n) называют *бесконечно малой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой луч $[N; +\infty)$, что для всех содержащихся в нем натуральных чисел n выполнено неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Определение 2. Число a называют *пределом последовательности* (a_n), если последовательность $a_n - a$ бесконечно мала. Пишут $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Определение 3. Последовательность (a_n) называют *бесконечно большой*, если последовательность $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ бесконечно мала. Пишут $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

Если последовательность (a_n) состоит из значений функции $f(x)$ при натуральных значениях аргумента (т. е. если $a_n = f(n)$), причем существует предел этой функции при $x \to +\infty$, то последовательность имеет тот же предел. Это утверждение непосредственно вытекает из того, что выполнение неравенства $|f(x) - a| < \varepsilon$ для всех $x > M$ влечет за собой выполнение того же неравенства при натуральных значениях x, которые больше, чем M.

Пример 1. Найдем $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 4n - 1}{7n^2 + 5}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{7x^2 + 5} = \frac{3}{7},$$

то и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 4n - 1}{7n^2 + 5} = \frac{3}{7}.$$

Упражнения

302. С помощью микрокалькулятора вычислите значения выражений при $n = 1$; 10; 100; 1000. Сделайте предположение о значении предела при $n \to \infty$ и докажите его справедливость:

1) $\frac{3n}{n + 5}$;
2) $\frac{2n + 4}{7 - 3n}$;
3) $\frac{2}{n + 3}$;
4) $\frac{2n^3 - n^2}{5 + n - n^3}$;
5) $\frac{4n - n^2}{3 + 2n^2 + n^3}$;
6) $\left(\frac{8}{2n - 5} - \frac{1 - 3n^2}{n^2 + 7n}\right)$;
7) $\left(\frac{3n^2}{9n - 1 + n^3} + \frac{1 + n + n^4}{2 + 3n - n^4}\right)$;
8) $\left(\frac{n^3}{n^2 + 4n - 1} - \frac{n^4}{n^3 + 6n^2 + 1}\right)$.

303. Укажите такое M_ε, чтобы при $n > M_\varepsilon$ выполнялось неравенство $\frac{1}{n^2+3} < \varepsilon$ для $\varepsilon = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}001;\ 10^{-5}$.

304. Укажите такое M_ε, чтобы при $n > M_\varepsilon$ выполнялось неравенство $|a_n| < \varepsilon$ для $\varepsilon = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}001;\ 10^{-5}$, если:

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $a_n = \frac{5}{(-2)^n}$; 3) $a_n = \frac{n}{4^n}$.

305. Найдите пределы последовательностей:

1) $\frac{1-(-1)^n}{n}$;

2) $\frac{1+(-1)^n}{n^2}$;

3) $\frac{n^2+(-1)^n n+1}{n^2+1}$;

4) $\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+(-1)^{n+1}}$;

5) $\frac{(1+2+3+\ldots+n)^2}{1+2^3+3^3+\ldots+n^3}$.

306. Имеет ли предел последовательность

$$\frac{(-1)^n n^3+1}{n^3+1}?$$

307. Чем отличается определение предела функции при $x \to +\infty$ от определения предела последовательности?

308. Сформулируйте теоремы о пределе суммы, произведения и частного для последовательностей. Какое условие надо указывать в теореме о пределе частного?

309. Для последовательности (a_n), где $a_n = \frac{2n+7}{5n-1}$,

1) вычислите a_{20}, a_{100}, a_{2000};

2) оцените разности:

$$\left|a_{20}-\frac{2}{5}\right|,\ \left|a_{100}-\frac{2}{5}\right|,\ \left|a_{2000}-\frac{2}{5}\right|;$$

3) укажите такое M_ε, чтобы для $n > M_\varepsilon$ выполнялось неравенство $\left|a_n-\frac{2}{5}\right| < \varepsilon$ для $\varepsilon = 0{,}01;\ 0{,}0001$.

310. Укажите такое M, чтобы при $n > M$ выполнялось указанное неравенство:

а) $\left|a_n-\frac{1}{3}\right| < 0{,}005$, где $a_n = \frac{n+4}{3n-2}$;

б) $\left|a_n-\frac{5}{7}\right| < 0{,}003$, где $a_n = \frac{1+5n}{7n+2}$.

311. Обозначим через a_n длину стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R; через p_n — периметр этого многоугольника, через s_n — его площадь; через α_n — дугу, стягиваемую стороной этого многоугольника; через l_n — стрелку сегмента, ограниченного этой дугой и хордой; через σ_n — его площадь; через h_n — апофему многоугольника. Через b_n обозначим длину стороны правильного описанного n-угольника для той же окружности; через P_n — периметр этого многоугольника; через S_n — его площадь. Для каждой из последовательностей (a_n), (p_n), (s_n), (l_n), (α_n), (h_n), (b_n), (P_n), (σ_n), (S_n) найдите предел. Существуют ли пределы последовательностей (nb_n), (nh_n), (na_n)? А последовательностей (nl_n), (np_n), (ns_n)?

312. Верно ли утверждение, что сумма бесконечно малых слагаемых бесконечно мала, если число слагаемых неограниченно возрастает?

313. Каждые сутки в полдень измеряется масса куска радиоактивного вещества (продукты распада удаляются). Имеет ли предел получившаяся последовательность? Чему он равен?

314. Имеет ли предел последовательность, образованная значениями температуры воздуха в полдень в данной точке?

315. Из сосуда с помощью насоса выкачивают газ. После каждого хода поршня количество газа в сосуде уменьшается вдвое. К какому числу стремится масса газа в сосуде?

316. Последовательность (a_n) имеет предел, последовательность (b_n) не имеет предела. Имеют ли предел последовательности $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, (a_nb_n), $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$?

317. Докажите, что последовательность $(-1)^n$ не имеет предела.

10*. Вычисление пределов рекуррентно заданных последовательностей. Если последовательность (a_n) задана рекуррентно, то для вычисления ее предела часто оказывается полезным следующий прием. Предполагают, что существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, и переходят в рекуррентном соотношении к пределу, заменяя в нем a_n, a_{n-1} и т. д. на a. Тогда рекуррентное отношение превращается в уравнение, из которого и находят значение a искомого предела. Однако чтобы этот прием был обоснован, нужно предварительно доказать, что искомый предел a существует. Во многих случаях существование предела вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы п. 8.

Пример 1. Докажем, что последовательность (a_n), где $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ и $a_1 = \sqrt{2}$, имеет предел, и вычислим его.

Решение. Докажем с помощью метода математической индукции, что последовательность (a_n) ограничена и возрастает. При $n = 1$ имеем $a_1 = \sqrt{2} < 2$, причем $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$. Пусть уже доказано, что $a_k < 2$ и $a_{k+1} > a_k$. Тогда имеем $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$ и $a_{k+2} = \sqrt{2 + a_{k+1}} > \sqrt{2 + a_k} = a_{k+1}$. Из доказанного следует, что при всех n имеем $a_n < 2$ и $a_n < a_{n+1}$.

По теореме 1 отсюда вытекает, что последовательность (a_n) имеет предел. Обозначим его через a. Поскольку все $a_n > 0$, то $a \geqslant 0$.

Чтобы вычислить предел $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, возведем обе части равенства $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ в квадрат: $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$. Переходя к пределу и учитывая теоремы о пределе произведения и суммы, выводим отсюда, что $a^2 = 2 + a$, т. е. $a^2 - a - 2 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни 2 и -1, причем лишь первый из них неотрицателен. Значит, $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

Так как $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, то полученный ответ можно записать следующим образом:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = 2.$$

Пример 2. Докажем, что при $0 < q < 1$ выполняется равенство $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Решение. Так как $0 < q < 1$, то $q^{n+1} = q \cdot q^n < q^n$, и потому последовательность (q^n) убывает. Она ограничена, так как $0 < q^n < 1$. Значит, она имеет предел $b = \lim\limits_{n \to \infty} q^n$. Но $\lim\limits_{n \to \infty} q^{n+1}$ тоже равен b, $\lim\limits_{x \to \infty} q^{n+1} = b$. С другой стороны,

$$\lim_{n \to \infty} q^{n+1} = \lim_{n \to \infty} q \cdot q^n = q \lim_{n \to \infty} q^n = qb,$$

а потому $b = bq$. Поскольку $q \neq 1$, отсюда следует, что $b = 0$. Так как $|q|^n = |q^n|$, то из разобранного примера вытекает, что при $|q| < 1$ имеем $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Пример 3. Положим $s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ и докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$.

Решение. По формуле для суммы геометрической прогрессии имеем

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Значит,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q} \right) =$$

$$= \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} \lim_{n \to \infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Полученный ответ записывают в виде

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1 - q}.$$

Таким же образом доказывается равенство

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1 - q}, \qquad (1)$$

левая часть которого означает предел последовательности (s_n), где $s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$. Левую часть (1) обычно называют *геометрическим рядом*, а число $\frac{a}{1-q}$ — *его суммой*.

Упражнения

318. Для следующих рекуррентно заданных последовательностей с помощью микрокалькулятора найдите значение первых десяти членов, сделайте предположение о значении предела при $n \to \infty$ и докажите его справедливость:

1) $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $a_1 = 1$; 3) $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{27}{a_n^2}\right)$, $a_1 = 1$.

2) $a_{n+1} = \frac{4 + a_n^2}{2a_n}$, $a_1 = 1$;

319. Вычислите[1]:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{100}{101}\right)^n$.

320. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна 4, а знаменатель равен $\frac{1}{3}$.

321. Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна 6, а первый член равен 8.

322. Дан квадрат со стороной a. Середины его сторон соединены отрезками. С получившимся квадратом сделано то же самое и так далее до бесконечности (рис. 77). Найдите сумму площадей всех получившихся квадратов.

323. Докажите, что если $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q < 1$ для всех n, то $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

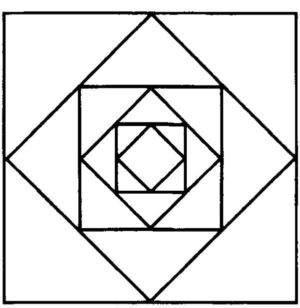


Рис. 77

324. Докажите, что следующие последовательности бесконечно малы:

1) $\left(\frac{n}{2^n}\right)$; 2) $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$; 3) $\left(\frac{n^2}{5^n}\right)$; 4) $\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$.

325. Последовательность определена рекуррентным соотношением. Докажите, что она имеет предел, и найдите его:

1) $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$, $a_1 = \sqrt{3}$;

2) $x_n = \frac{a + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$, $x_1 = \frac{a}{2} > 0$.

[1] Здесь через $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ обозначена сумма бесконечной геометрической прогрессии $a + aq + \ldots + aq^n + \ldots$.

326. Вычислите пределы (отдельно разобрав случаи $|a| > 1$ и $0 < |a| < 1$):

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + 1}{a^n - 1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$.

327. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, если $|x| < 1$ и

$$a_n = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \cdot \ldots \cdot (1 + x^{2^n}).$$

328. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_1 = \dfrac{a}{2}$, где $0 < a < 1$ и $x_{n+1} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{x_n^2}{2}$.

329. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_1 = \dfrac{a}{2}$, где $0 < a < 1$ и $x_{n+1} = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x_n^2}{2}$.

330. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_1 = 1$ и

1) $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$; 2) $x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^3 + 2a)}{2x_n^3 + a}$, где $a > 0$.

331. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$.

§ 2. Предел функции в точке. Непрерывные и разрывные функции

1. Окрестность точки. Перейдем к изучению свойств функций вблизи некоторой точки. На рисунке 78 изображен график функции f. По этому рисунку можно сказать, что вблизи точки 4 эта функция принимает положительные значения, причем эти значения мало отличаются от числа 3, а также что они меньше, чем ее значение в точке 4. Отметим, что вдалеке от точки 4 эти свойства функции уже не имеют места — там найдутся и точки, где эта функция отрицательна, и точки, в которых ее значение больше, чем в точке 4.

Чтобы уточнить слова «вблизи точки a», введем понятия окрестности и проколотой окрестности точки.

Определение 1. *h-окрестностью точки a* называют интервал $(a - h; a + h)$, число h называют *радиусом* этой окрестности (рис. 79, a).

Есть более общее понятие *окрестности точки*, но нам будет достаточно в качестве окрестностей рассматривать h-окрестности точек.

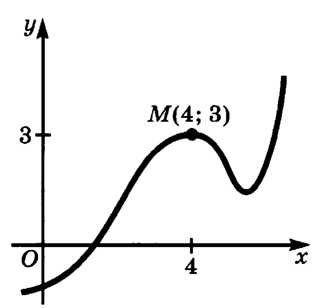


Рис. 78

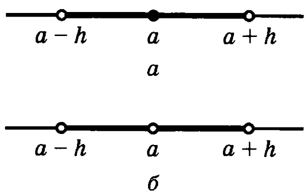


Рис. 79

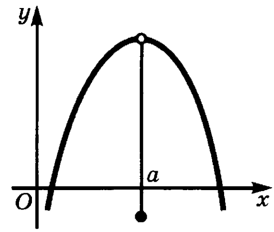


Рис. 80

У каждой точки бесконечно много окрестностей. Пересечение двух окрестностей точки a тоже является ее окрестностью. Например,

$$(3 - 0{,}1;\ 3 + 0{,}1) \cap (3 - 0{,}001;\ \ 3 + 0{,}001) = \\ = (3 - 0{,}001;\ 3 + 0{,}001).$$

Определение 2. *Проколотой h-окрестностью точки a* называют ее h-окрестность, из которой удалена сама точка a.

Таким образом, проколотая окрестность точки является объединением двух промежутков $(a - h;\ a)$ и $(a;\ a + h)$ (рис. 79, *б*).

Определение 3. *Некоторое свойство функции выполняется вблизи точки a*, если есть хоть одна проколотая окрестность этой точки, во всех точках которой выполняется это свойство.

Теперь можно придать точный смысл словам «функция положительна вблизи точки a». Это значит, что у точки a есть проколотая окрестность, в которой эта функция положительна. В самой точке a она может принимать и отрицательные значения или равняться нулю (рис. 80). Получили точный смысл и слова: «вблизи точки a значения функции f меньше, чем в этой точке». Они означают, что у точки a есть проколотая окрестность, в которой выполняется неравенство $f(x) < f(a)$ (в самой точке a это неравенство не выполняется, так как $f(a) = f(a)$).

Слова «вблизи точки a значения функции f мало отличаются от числа 3» не получили еще точного смысла, так как неизвестно, какие отличия малы, а какие велики — число 0,1 мало по сравнению с числом 1 000 000 и велико по сравнению с числом 0,000 000 001. Мы уточним эти слова в следующем пункте.

Упражнения

332. 1) Запишите две какие-либо окрестности числа 5 двумя способами (в виде промежутков и в виде неравенств);

2) найдите пересечение окрестностей из упражнения 1);

3) назовите окрестности точки 3 радиуса 0,7 и точки 4 радиуса 0,9.

333. Найдите пересечение 0,2-окрестности точки 5 с 0,2-окрестностью точки 4.

334. Укажите непересекающиеся окрестности точек 3 и 2,9.

335. В упражнениях 1) — 3) задайте неравенствами указанные окрестности:

1) 0,2-окрестность точки 2,5;
2) проколотую 0,2-окрестность точки 2,5;
3) проколотую 0,03-окрестность точки −3,7.

336. Запишите в виде неравенства две окрестности точек 1,9 и 2, имеющие пустое пересечение и имеющие непустое пересечение.

337. Найдите пересечение всех окрестностей точки 2 и пересечение всех проколотых окрестностей этой точки.

338. Найдите окрестность точки 1,9, целиком лежащую в интервале (1; 2).

339. В окрестности точки a радиуса 0,2 взята точка b на расстоянии 0,05 от точки a. Найдите окрестность точки b, целиком лежащую в указанной окрестности точки a. Изобразите эти окрестности на координатной прямой.

340. Укажите знак функции f в проколотой 0,1-окрестности точки 2, если:

1) $f(x) = x^2$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$;

2) $f(x) = \dfrac{x}{5 - x}$; 4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{при } x \neq 2, \\ -7 & \text{при } x = 2. \end{cases}$

2. Предел функции в точке. Функция $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ не имеет значения при $x = 3$. В нижеследующей таблице приведены значения этой функции при значениях x, мало отличающихся от 3:

x	1	2	2,9	2,99	2,999	4	3,1	3,01	3,001
$\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$	4	5	5,9	5,99	5,999	7	6,1	6,01	6,001

Видим, что по мере приближения x к числу 3 значения функции $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ приближаются к числу 6. Говорят, что предел функции $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, когда x стремится к 3, равен 6, и пишут

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Мы дадим сейчас определение предела функции при $x \to a$.

Определение 1. Функцию α называют *бесконечно малой при* $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ вблизи точки a выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ (это значит, что существует проколотая окрестность точки a, в которой выполняется указанное неравенство).

Определение 2. Число b называют *пределом функции f при $x \to a$*, если эта функция является суммой числа b и функции α, бесконечно малой при $x \to a$, $f = b + \alpha$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

П р и м е р. Докажем, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Р е ш е н и е. В проколотой окрестности радиуса ε точки a имеем $|x - a| < \varepsilon$. Значит, функция $x - a$ бесконечно мала при $x \to a$. Поскольку $x = a + (x - a)$, то $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Определение предела функции в точке можно сформулировать непосредственно, не опираясь на понятие бесконечно малой функции.

Определение 2′. Число b является *пределом функции f при $x \to a$*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется проколотая окрестность точки a, в которой выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Подобно тому как рассматривают пределы функций при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, можно рассматривать односторонние пределы функции при $x \to a$. Разница с введенным выше понятием предела состоит лишь в том, что вместо всей проколотой окрестности точки a берут левую или правую половину этой окрестности. Пишут $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Ради краткости применяют для этих пределов обозначения $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$. Предел функции f при $x \to a$ существует и равен b в том и только в том случае, когда существуют $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$, причем $f(a - 0) = f(a + 0) = b$.

У п р а ж н е н и я

341. С помощью микрокалькулятора найдите значения функции в указанных точках и сделайте предположение о значении предела при $x \to a$. Докажите сделанное предположение.

1) $\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ в точках 3; 2,1; 2,01; 2,001; 1,9; 1,999 при $a = 2$;

2) $\dfrac{x^3 - 6x + 5}{x^2 + x - 2}$ в точках 2; 1,1; 1,01; 1,001; 0,9; 0,99; 0,999 при $a = 1$.

342. Пользуясь данным выше определением предела функции в точке, докажите, что:

1) $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$;

2) $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - 6x + 8) = 8$;

3) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6}$;

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$;

5) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{24}$;

6) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$.

3. Свойства предела функции в точке и вычисление пределов. Определение предела функции в точке весьма напоминает определение предела функции на бесконечности. Свойства этих понятий весьма похожи. Именно, справедливы следующие утверждения:

а) *функция f не может иметь двух различных пределов при $x \to a$*;

б) *если функция f имеет предел при $x \to a$, то существует проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена*;

в) *если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *причем* $b \neq 0$, *то найдется проколотая окрестность точки a, на которой знак функции совпадает со знаком числа b*;

г) *если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *и существует проколотая окрестность точки a, в которой* $f(x) \geqslant 0$, *то* $b \geqslant 0$;

д) *если существует проколотая окрестность точки a, в которой выполняется неравенство* $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant b$ (*или* $b \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$) *и* $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

е) *если функции f и g имеют пределы при $x \to a$, то предел их суммы* (соответственно *произведения*) *при $x \to a$ равен сумме* (соответственно *произведению*) *пределов этих функций*:

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

В частности, $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

ж) *если функции f и g имеют пределы при $x \to a$, причем предел функции g отличен от нуля, то имеет место равенство*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

Эти свойства доказываются аналогично соответствующим свойствам пределов функций при $x \to \infty$. Надо только в доказательствах заменить лучи проколотыми окрестностями и воспользоваться тем, что пересечение двух проколотых окрестностей точки a является проколотой окрестностью той же точки.

С помощью сформулированных выше утверждений вычисляют предел функции в точке.

Пример 1. Вычислим $\lim\limits_{x \to 4}(x^2 - 3x + 8)$.

Решение. По свойству е) имеем

$$\lim_{x \to 4}(x^2 - 3x + 8) = \lim_{x \to 4} x^2 + \lim_{x \to 4}(-3x) + \lim_{x \to 4} 8 =$$

$$= \lim_{x \to 4} x \lim_{x \to 4} x + (-3) \lim_{x \to 4} x + 8.$$

Но $\lim\limits_{x \to 4} x = 4$, и потому

$$\lim_{x \to 4}(x^2 - 3x + 8) = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 8 = 12.$$

Таким образом, чтобы найти предел многочлена $x^2 - 3x + 8$ при $x \to 4$, оказалось достаточно подставить в этот многочлен вместо x значение 4. Это имеет место для любого многочлена.

Теорема 2. *Предел многочлена $P(x)$ при $x \to a$ равен значению этого многочлена при $x = a$, т. е.* $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.

В самом деле, если $P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$, то по свойствам пределов имеем

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0) =$$
$$= b_n(\lim_{x \to a} x)^n + b_{n-1}(\lim_{x \to a} x)^{n-1} + \ldots + \lim_{x \to a} b_0 =$$
$$= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b_0 = P(a).$$

Используя теорему о пределе дроби, получаем более общее утверждение.

Теорема 3. *Если $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(a) \neq 0$, то предел дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при $x \to a$ равен ее значению при $x = a$:*

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \text{ если } Q(a) \neq 0.$$

Доказательство. По теореме 1 имеем $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$ и $\lim\limits_{x \to a} Q(x) = Q(a)$. Так как $Q(a) \neq 0$, то по свойству ж) получаем

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} P(x)}{\lim\limits_{x \to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Пример 2. Вычислим предел $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 + x + 8}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 + x + 8} = \frac{3^2 - 6 \cdot 3 + 7}{3^2 + 3 + 8} = \frac{-2}{20} = -0{,}1.$$

Сформулированные теоремы позволяют вычислять пределы рациональных функций, т. е. функций, заданных рациональными выражениями от x. Для этого достаточно подставить в выражение функции вместо x значение a, к которому стремится x. Единственным исключением является случай, когда после такой подстановки получится выражение, не имеющее числового значения, так как один из знаменателей обращается в нуль. Рассмотрим примеры.

Пример 3. Вычислим $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$.

Решение. В этом случае нельзя просто подставить вместо x значение 5, так как при этом значении и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Но квадратный трехчлен, имеющий корень a, раскладывается на множители, одним из которых является $x - a$. В нашем случае получаем

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x + 5)(x - 5)}.$$

При $x \neq 5$ эту дробь можно сократить на $x - 5$, в результате получится дробь $\frac{x - 1}{x + 5}$. Поскольку в определении предела функции при $x \to 5$ участвуют лишь проколотые окрестности этой точки, указанное сокращение законно, и мы получаем

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x + 5)(x - 5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x - 1}{x + 5} = \frac{5 - 1}{5 + 5} = 0{,}4.$$

Упражнения

343. Докажите, что бесконечно мала функция:

1) $x - 3$ при $x \to 3$;

2) $(x + 1)^3$ при $x \to -1$;

3) $4x - 3$ при $x \to \frac{3}{4}$;

4) $(3x + 2)^4$ при $x \to -\frac{2}{3}$;

5) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ при $x \to 2$;

6) $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x + 1}$ при $x \to -1$.

7) Приведите два примера бесконечно малых функций при $x \to 3$.

344. Докажите утверждения а) — ж) данного пункта.

345. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + x - 3)$;

2) $\lim\limits_{x \to -3}(x^3 + 4x^2 + x - 2)$;

3) $\lim\limits_{x \to -2}(x^4 + 5x - 7)$;

4) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 7x + 2}{x^2 + x - 2}$;

5) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 5x + 3}$;

6) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{5 + 2x + x^2}{x^3 + 3x^2 + 1}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$;

8) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x - 1)^2}$;

9) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$;

10) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{3x^2 + x}{(x - 2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x - 2}\right)$;

11) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ $(m, n \in N)$;

12) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$;

13) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$;

14) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x - 1}$.

Почему в этих упражнениях можно сокращать на общий множитель?

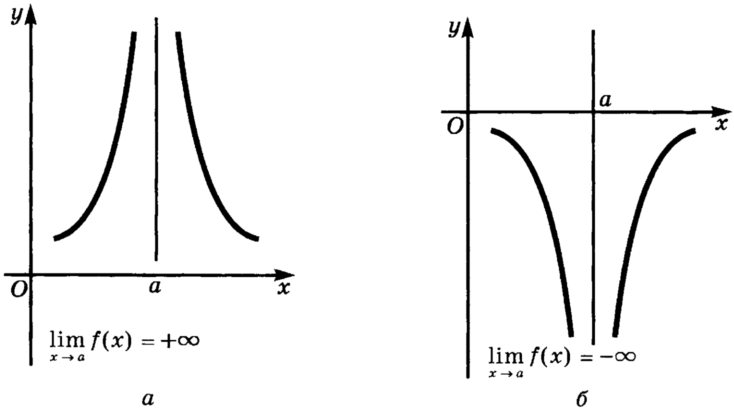


Рис. 81

4. Функции, бесконечно большие при $x \to a$; вертикальные асимптоты. Как в случае, когда $x \to +\infty$, назовем функцию f *бесконечно большой при $x \to a$*, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. Например, функция $(x-3)^{-4}$ бесконечно велика при $x \to 3$, так как

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^{-4}} = \lim_{x \to 3} (x-3)^4 = 0.$$

Утверждение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$) означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, причем функция f положительна (соответственно отрицательна) вблизи точки a (рис. 81, *а*, *б*).

Если функция f задана на $[b; a)$ и $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$, то по мере приближения x к точке a слева значения функции f становятся и остаются больше любого заранее заданного числа, причем при движении точки по графику функции ее расстояние до вертикальной прямой $x = a$ стремится к нулю. Эту прямую называют *вертикальной асимптотой* для графика функции. Аналогично эта прямая является вертикальной асимптотой для графика функции f, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$.

Следующая теорема указывает, как искать точки, при приближении к которым функция стремится к бесконечности, т. е. как искать вертикальные асимптоты графика функции.

Теорема. *Если* $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *и существует отличный от нуля предел* $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$, *но* $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = 0$, *причем функция* ψ *отлична от нуля вблизи точки* a, *то* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Доказательство. Если $f = \frac{\varphi}{\psi}$, то $\frac{1}{f} = \frac{\psi}{\varphi}$, и потому $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} =$

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{b} = 0$. Это и означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Пример. Докажем, что

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 6x + 8} = \infty.$$

Решение. Имеем $\lim\limits_{x \to 4}(x^2 + 4) = 20$ и $\lim\limits_{x \to 4}(x^2 - 6x + 8) = 0$.

Поскольку выполнены условия теоремы, то $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 6x + 8} = \infty$.

Свойства функций, бесконечно больших при $x \to a$, аналогичны свойствам функций, бесконечно больших при $x \to +\infty$.

Упражнения

346. Докажите, что указанные функции бесконечно большие (при $x \to a$, a задано):

1) $\frac{1}{x - 2}$ при $x \to 2$;

2) $\frac{x + 3}{x - 2}$ при $x \to 2$;

3) $\frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$ при $x \to 1$;

4) $\frac{x^3 - 3x - 2}{(x - 2)^3}$ при $x \to 2$.

5. Непрерывные функции. Чтобы найти объем куба, достаточно измерить длину его ребра. При этом объем получается со сколь угодно высокой точностью, лишь бы ребро куба было измерено достаточно точно. Говорят, что объем куба непрерывно зависит от длины его ребра.

Иной тип зависимости дает объем 1 кг воды, рассматриваемый как функция температуры, при 0 °С. При сколь угодно малом понижении температуры вода замерзает и ее объем скачкообразно увеличивается. График этой зависимости схематически изображен на рисунке 82. Видим разрыв функции при $t = 0$.

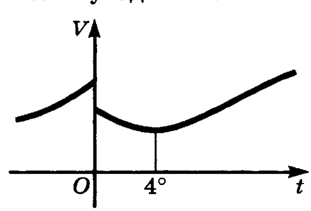


Рис. 82

Дадим теперь общее определение непрерывности функции и точек разрыва.

Определение 1. Функцию f называют *непрерывной в точке a*, если она определена в этой точке и разность $f(x) - f(a)$ бесконечно мала при $x \to a$.

Это определение означает, что функция f непрерывна в точке a в том и только в том случае, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Наряду с непрерывностью функции рассматривают *одностороннюю непрерывность* (справа или слева), определяя ее равенствами $f(a + 0) = f(a)$ или $f(a - 0) = f(a)$.

В п. 3 было отмечено, что если рациональная функция имеет значение при $x = a$ (т. е. если подстановка a вместо x не приводит к делению на нуль), то предел этой функции равен ее значению в точке a. Отсюда получаем важный вывод.

Теорема 1. *Рациональная функция непрерывна при всех значениях x, для которых она имеет числовое значение.*

Например, функция $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ непрерывна при всех значениях x, кроме -2 и 2 (эти числа являются корнями многочлена $x^2 - 4$ и при замене x на любое из них получится дробь, знаменатель которой равен нулю).

Из утверждений о пределах суммы, произведения и частного вытекают соответствующие утверждения о непрерывных функциях.

Теорема 2. *Если функции f и g непрерывны в точке a, то и их сумма и произведение непрерывны в этой точке. Если, кроме того, $g(a) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ тоже непрерывна в точке a.*

Докажем, например, утверждение о непрерывности суммы. Так как f и g непрерывны в точке a, то выполняются равенства

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ и } \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Но тогда

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a),$$

а это и значит, что функция $f + g$ непрерывна в точке a.

Смысл этой теоремы заключается в следующем: при малом изменении аргумента непрерывные функции f и g мало изменяются, а потому мало меняются их сумма $f + g$, произведение fg, а если $g(a) \neq 0$, то и частное $\frac{f}{g}$.

В дальнейшем мы будем использовать следующее утверждение, непосредственно вытекающее из свойства в) предела функции в точке (см. п. 3).

Если функция f непрерывна в точке a и отлична от нуля в этой точке, то вблизи a знак этой функции совпадает с ее знаком в точке a.

Чтобы свести данное утверждение к свойству в) предела, достаточно вспомнить, что для непрерывной функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Пример. При $x = 1$ функция $8 + 2x - x^2$ принимает положительное значение 9. Поэтому она положительна вблизи этой точки (а точнее говоря, в окрестности этой точки радиуса 3, в окрестностях большего радиуса найдутся и точки, где эта функция отрицательна).

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называют *точками разрыва*. Чаще всего разрыв возникает по следующим двум причинам.

а) Функция задана различными выражениями на разных участках, и при приближении к «точке стыка» с разных сторон эти выражения имеют различные пределы.

Пусть, например, $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ если } x < -2, \\ x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -x + 6, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

Здесь точками стыка являются 2 и −2. Так как $f(-2 - 0) = \lim\limits_{x \to -2} (x + 3) = 1$, а $f(-2 + 0) = \lim\limits_{x \to -2} x^2 = 4$, то при переходе через точку −2 функция делает «скачок» вверх на $4 - 1 = 3$ единицы и ее график разрывается (такие точки разрыва называют *точками скачка*). В точке же $x = 2$ функция непрерывна, так как $f(2) = 2^2 = 4$, причем $f(2 - 0) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ и $f(2 + 0) = \lim\limits_{x \to 2} (-x + 6) = 4$ (рис. 83).

б) Функция задана выражением, знаменатель которого в точке a обращается в нуль, в то время как числитель отличен от нуля. В этом случае $\lim\limits_{x \to a} = \infty$. Поэтому не может выполняться равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, и функция имеет разрыв в точке a.

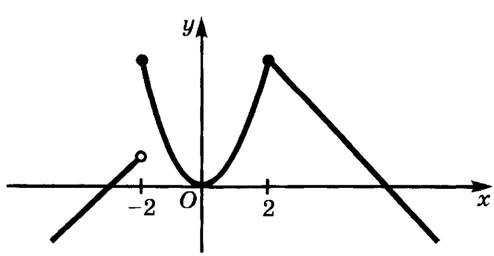


Рис. 83

Упражнения

347. Приведите примеры непрерывных и разрывных физических или химических процессов.

348. Будет ли непрерывной функция f в точках 1; 2; –1; 1,01, если:

1) $f(x) = x^2 - 1$; 3) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; 4) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$?

349. Приведите примеры функций, непрерывных:

1) в любой точке числовой прямой;

2) при всех значениях x, кроме $x = 2$;

3) при всех значениях x, кроме $x = 2$, 3 и 7.

350. Какой знак принимает функция f вблизи точки a, если:

1) $f(x) = x^2 + 1$, $a = 2$; 2) $f(x) = 1 - x^2$, $a = 3$?

351. Найдите область определения функции $\dfrac{x+3}{x^3 - 2x^2 - 8x}$.

В каких точках эта функция непрерывна, а в каких не является непрерывной?

352. В каких точках имеются разрывы у следующих функций:

1) $\dfrac{1}{5x+7}$; 5) $\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$;

2) $\dfrac{1}{x^2-4}$; 6) $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ при } x < -1, \\ x^2 \text{ при } -1 \leqslant x < 2, \\ 5 - x \text{ при } x \geqslant 2; \end{cases}$

3) $\dfrac{x^2}{x^2-4x+4}$; 7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} \text{ при } x \leqslant 2, \\ x - 1 \text{ при } -2 < x < 1, \\ \dfrac{1}{x+1} \text{ при } x \geqslant 1? \end{cases}$

4) $\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$;

353. На рисунке 84 приведены графики функций. Укажите точки разрыва и точки непрерывности. Определена ли функция в точке разрыва? Чему равно значение функции в точке разрыва (если она определена в этой точке)?

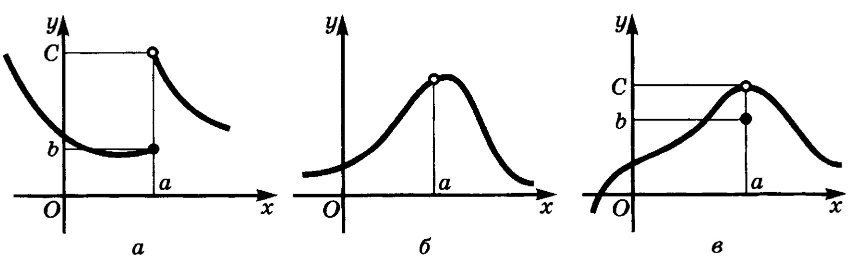


Рис. 84

354. Постройте эскиз графика функции, проведя следующие исследования: а) найдите область определения функции и ее точки разрыва; б) найдите точки пересечения графика с осями координат; в) вычислите предел функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$; г) постройте асимптоты (если они есть); д) изучите поведение функции при $x \to a - 0$ и при $x \to a + 0$, где a — точка разрыва функции; е) для контроля найдите несколько промежуточных точек графика:

1) $\frac{x}{x-2}$; 3) $\frac{x^2+1}{x^2-4}$; 5) $\frac{3x}{x^2-9}$;

2) $\frac{2x-3}{5x-3}$; 4) $\frac{x^2-1}{x^2-4}$; 6) $\frac{3x+9}{x^2-9}$.

355. Докажите непрерывность следующих функций и определите для них промежутки знакопостоянства:

1) $(x-1)(x+2)(x+3)$; 3) $(x^2+1)(x-1)$;

2) $x(x^2-1)(x+2)$; 4) $\frac{x^2-1}{x^2+4}$.

6. Теоремы о промежуточных значениях функций, непрерывных на отрезке. Назовем функцию f *непрерывной на промежутке* X, если она непрерывна во всех точках этого промежутка (на концах промежутка, если они ему принадлежат, речь идет лишь об односторонней непрерывности). Мы изучим в этом пункте некоторые свойства функций, непрерывных на отрезке.

Пусть значения функции f в точках a и b имеют различные знаки. Тогда точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика этой функции лежат по разные стороны от оси абсцисс. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то геометрически очевидно, что ее график на этом отрезке является сплошной линией и потому должен в какой-то точке пересечь ось абсцисс (рис. 85).

Теорема. *Пусть функция f непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и принимает на его концах значения различных знаков. Тогда она обращается в нуль хотя бы в одной точке c этого отрезка.*

При этом если функция f монотонна на $[a; b]$, *то она принимает значение* 0 *лишь один раз.*

Доказательство теоремы дадим в виде серии задач.

а) Пусть $f(a) < 0$. Обозначим через X множество точек отрезка $[a; b]$, справа от которых есть точки того же отрезка, где функция f отрицательна. Через Y обозначим множество остальных точек

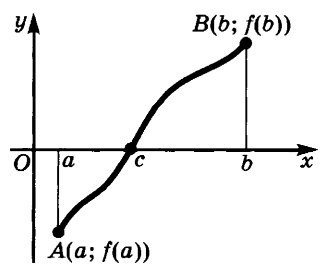


Рис. 85

отрезка $[a; b]$. Докажите, что множество Y расположено справа от множества X.

б) Докажите, что в точке c, разделяющей множества X и Y, функция f равна нулю.

в) Проведите доказательство теоремы для случая, когда $f(a) > 0$.

Следствие 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она принимает на этом отрезке любое значение μ, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. Мы имеем $f(a) < \mu < f(b)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $F = f - \mu$. Так как функция f непрерывна на $[a; b]$, то тем же свойством обладает на $[a; b]$ и функция F как разность двух непрерывных функций. При этом $F(a) = f(a) - \mu < 0$ и $F(b) = f(b) - \mu > 0$. По теореме 1 найдется такая точка c, что $F(c) = 0$. Но тогда $f(c) - \mu = 0$, и потому $f(c) = \mu$.

Например, функция x^2 непрерывна на отрезке $[1; 4]$ и принимает на этом отрезке все значения, заключенные между $1^2 = 1$ и $4^2 = 16$. Множеством значений этой функции на отрезке $[1; 4]$ является отрезок $[1; 16]$.

Следствие 2. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и не обращается в нуль внутри этого отрезка* (т. е. на интервале $(a; b)$), *то она имеет один и тот же знак во всех его внутренних точках.*

Доказательство. Если бы функция имела различные знаки в точках x_1 и x_2 из $(a; b)$, то по теореме 1 она обратилась бы в нуль хоть в одной внутренней точке отрезка $[x_1; x_2]$. Но эта точка внутренняя и для отрезка $[a; b]$, а внутри $[a; b]$ функция по условию не обращается в нуль. Значит, функция f не может иметь на $[a; b]$ значений различных знаков.

Теорема 1 и ее следствие применяются при решении уравнений и неравенств.

Пример. Докажем, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[0; 1]$, и найдем его с точностью до 0,1.

Решение. Функция f, где $f(x) = x^3 - 3x + 1$, непрерывна на всей числовой прямой, причем $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. По теореме 1 она обращается в нуль хоть в одной точке отрезка $[0; 1]$. Можно доказать, что функция f убывает на этом отрезке и потому ее график пересекает его лишь в одной точке (т. е. уравнение $x^3 - 3x + 1$ имеет лишь один корень на этом отрезке).

Чтобы найти корень с точностью до 0,05, разделим отрезок $[0; 1]$ пополам и вычислим значение функции в точке 0,5. Имеем $f(0{,}5) = -0{,}375$. Так как $f(0) > 0$, $f(0{,}5) < 0$, то делим пополам отрезок [0; 0,5]. Так как $f(0,25) = \frac{17}{64} > 0$, то делим отрезок [0,25; 0,5] пополам. Деление продолжаем до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше, чем 0,1. Тогда середина этого отрезка будет значением корня с точностью до 0,05. В нашем случае этим значением является 0,34.

Описанный метод приближенного решения уравнений называют заимствованным у артиллеристов названием «метод вилки».

При решении неравенств вида $f(x) > 0$, где функция f непрерывна на всей числовой оси, сначала решают уравнение $f(x) = 0$ и находят интервалы, на которые корни этого уравнения разбивают числовую ось. Из следствия 2 вытекает, что на таких интервалах функция f сохраняет постоянный знак. Поэтому достаточно определить знак функции в какой-либо «пробной точке» взятого интервала, чтобы знать его на всем интервале. Если же функция f имеет точки разрыва, то числовую ось нужно делить на части не только точками, где $f(x) = 0$, но и точками разрыва функции f. Мы не приводим соответствующего примера, так как из иных соображений пришли к тому же методу решения рациональных неравенств в п. 4 § 4 главы 2. Позднее описанный метод интервалов будет применяться к решению неравенств более сложного вида (тригонометрических, показательных, логарифмических и т. д.).

Упражнения

356. Найдите интервалы непрерывности функции:

1) $\frac{1}{(x-2)(x-5)}$;

2) $\frac{x}{x^2 - x - 2}$;

3) $\frac{x^2 + x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$;

4) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}$;

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x < -1, \\ x - 1 \text{ при } x \geqslant 1; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ при } x \leqslant 1,\ x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ 2x \text{ при } x > 1. \end{cases}$

357. Для функции $f(x) = x^3 - 5x + 2$ вычислите $f(0)$, $f(-3)$, $f(1)$, $f(2)$. На каких интервалах функция имеет нули[1]? На каких интервалах функция сохраняет знак?

358. Для функции $2 + 7x - x^3$ вычислите $f(-1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(3)$. На каких интервалах функция имеет нули? На каких интервалах функция сохраняет знак?

359. Докажите, что уравнение $x^3 + 4x + 3 = 0$ имеет корень на отрезке $[-1; 0]$. Найдите этот корень с точностью до 0,1.

---

[1] То есть точки, где $f(x)$ обращается в нуль.

360. Докажите, что уравнение $x^5 + x - \frac{1}{x} = 0$ имеет корень на интервале $[0{,}5;\ 1]$. Найдите этот корень с точностью до 0,1.

361. Решите неравенства:

1) $(x + 2)(x - 3) > 0$;
2) $(x + 3)(x - 4) \leqslant 0$;
3) $(x + 1)(x + 2)(x + 4) \leqslant 0$;
4) $(x^2 - 4)(x + 5) > 0$;
5) $x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0$;
6) $\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + 3x} \leqslant 0$;
7) $\dfrac{x^3 + 8}{(x^4 - 1)(x^2 - 9)} > 0$.

7. Обратная функция. Если известна длина x стороны квадрата, то его площадь S можно вычислить по формуле $S = x^2$. Обратно, если известна площадь S квадрата, то длина его стороны однозначно определена. Эти две зависимости (площади квадрата от длины его стороны и длины стороны от площади квадрата) называются *взаимно обратными.*

Высота h подброшенного вверх камня в момент времени t выражается формулой $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. По этой формуле нельзя, зная h, однозначно определить значение t. Например, $h = 0$ и при $t = 0$, и при $t = \frac{2v_0}{g}$. Отсюда видно, что не всегда для данной функциональной зависимости величин существует обратная зависимость. Чтобы сформулировать соответствующее условие, введем понятие обратимой функции.

Определение 1. Функцию f называют *обратимой* на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Если функция f монотонна на X, то она обратима. В самом деле, из $x_1 \neq x_2$ следует, что либо $x_1 < x_2$, либо $x_1 > x_2$. Если функция f возрастает на X, то отсюда следует, что либо $f(x_1) < f(x_2)$, либо $f(x_1) > f(x_2)$ и потому $f(x_1) \neq f(x_2)$. Аналогично обстоит дело, если функция f убывает на X.

Обозначим через $f(X)$ множество значений $f(x)$ при $x \in X$.

Определение 2. Пусть функция f обратима на X. Обратной к ней называют функцию f^{-1}, которая каждому $y \in f(X)$ ставит в соответствие такое x, что $f(x) = y$.

Отметим, что требуемое значение x существует, так как $y \in f(X)$, и однозначно определено, так как при $x_1 \neq x$ имеем $f(x_1) \neq f(x)$ в силу обратимости f.

Из определения 2 вытекает, что соотношения $y = f(x)$, $x \in X$, и $x = f^{-1}(y)$, $y \in f(X)$, равносильны. Из них получаем следующие тождества:

$$x = f^{-1}(f(x)),\ x \in X; \quad y = f(f^{-1}(y)),\ y \in f(X). \tag{1}$$

Пример 1. Пусть функция f ставит в соответствие числу x число $3x-5$. Найдем функцию, обратную f.

Решение. Обозначим $f(x)$ через y. Тогда $y=3x-5$ и потому $x=\frac{y+5}{3}$. Значит, $f^{-1}(y)=\frac{y+5}{3}$.

Если функция f^{-1} обратна функции f и $y=f(x)$, то $x=f^{-1}(y)$. Значит, если точка $M(x;\ y)$ лежит на графике функции f, то точка $N(y;\ x)$ лежит на графике функции f^{-1}. Но эти две точки симметричны относительно прямой $y=x$. Отсюда получаем:

графики функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y=x$.

Пример 2. На рисунке 86 изображен график функции f. Построим график обратной к ней функции f^{-1}.

Решение. Так как функция f монотонна, то она имеет обратную функцию f^{-1}. График функции f^{-1} получается из графика функции f с помощью осевой симметрии относительно прямой $y=x$.

Из монотонности функции f на отрезке $[a;\ b]$ вытекает ее обратимость и потому существование обратной функции f^{-1}. Это утверждение можно уточнить, если, кроме того, известно, что функция f непрерывна на $[a;\ b]$. В этом случае по следствию теоремы 1 п. 6 областью значений функции f является отрезок $[f(a);\ f(b)]$ (или $[f(b);\ f(a)]$, если f убывает). Значит, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функция f возрастает* (соответственно *убывает*) *и непрерывна на отрезке* $[a;\ b]$, *то существует функция f^{-1}, обратная функции f и определенная на отрезке* $[f(a);\ f(b)]$ (соответственно *на отрезке* $[f(b);\ f(a)]$).

Докажем, что в предположениях теоремы 1 справедливы еще два утверждения:

а) *функция f^{-1} возрастает* (соответственно *убывает*);

б) *функция f^{-1} непрерывна.*

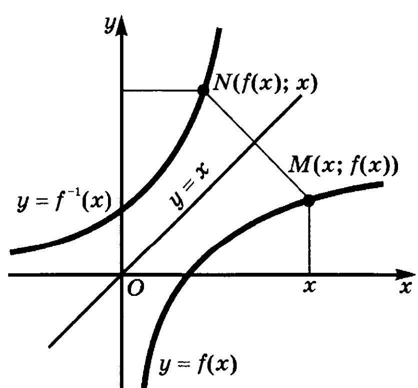


Рис. 86

Чтобы доказать утверждение а), возьмем числа y_1 и y_2 из отрезка $[f(a);\ f(b)]$ такие, что $y_1<y_2$, и положим $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$. Если бы выполнялось неравенство $x_1\geqslant x_2$, то мы имели бы в силу возрастания f неравенство $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, т. е. $y_1\geqslant y_2$, что противоречит условию $y_1<y_2$. Значит, $x_1<x_2$, т. е. $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. Итак, из $y_1<y_2$

следует, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, и потому функция f^{-1} возрастает. Случай, когда функция f убывает, рассматривается аналогично.

Перейдем к доказательству утверждения б). Пусть $f(a) < y_0 < f(b)$ и $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Выберем любое $\varepsilon > 0$. Не теряя общности, можно считать, что точки $x_0 - \varepsilon$ и $x_0 + \varepsilon$ принадлежат отрезку $[a; b]$. Тогда в силу возрастания f имеем $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$. Поэтому найдется δ-окрестность точки y_0, лежащая на промежутке $(f(x_0 - \varepsilon); f(x_0 + \varepsilon))$. Если y принадлежит этой окрестности точки y_0, то $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$ и потому $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, т. е. $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. Этим доказана непрерывность функции f^{-1} в любой точке $y_0 \in (f(a); f(b))$. Случай, когда $y_0 = f(a)$ или $y_0 = f(b)$, разбирается аналогично.

Теорема, аналогичная теореме 1, остается справедливой при замене отрезка $[a; b]$ любым числовым промежутком (только в этом случае областью определения функции f тоже будет не отрезок, а соответствующий промежуток).

Упражнения

362. Найдите функции, обратные функциям:

1) $3x + 6$;
2) $x^2 - 4x + 5,\ x \geqslant 2$;
3) $x^2 - 4x + 5,\ x \leqslant 2$;
4) $x^4 + 2x^2,\ x \geqslant 0$;
5) $x + [x]$.

363. На рисунке 87 приведен график функции f. Имеет ли она обратную? Укажите промежутки, на которых эта функция (сужение функции f на этот промежуток) имеет обратную. Постройте графики этих обратных функций.

8. Корни. Применим теорему о существовании обратной функции к степенной функции x^n с натуральным показателем n. Эта функция возрастает на луче $[0; +\infty)$ и непрерывна на нем (см. п. 2 § 3 главы 3 и п. 5 § 2 главы 4). При этом $0^n = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

Отсюда в силу теоремы 1 п. 7 следует, что существует функция, обратная функции x^n на луче $[0; +\infty)$, причем эта функция задана в том же луче и принимает значения на нем же. Это значит, что для любого неотрицательного числа b существует одно и только одно неотрицательное число a, n-я степень которого равна b, $a^n = b$. Введем следующее определение.

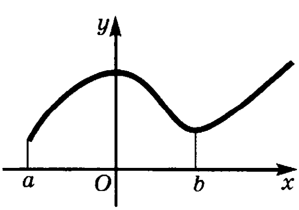


Рис. 87

Определение. *Корнем n-й степени* из неотрицательного числа b называется такое неотрицательное число a, что $a^n = b$.

Проведенные выше рассуждения показывают, что для любого неотрицательного числа b и любого натурального числа n такое число существует, и притом только одно. Корень n-й степени из неотрицательного числа b обозначают $\sqrt[n]{b}$. В этой записи n называют *показателем корня*, b — *подкоренным числом*, знак $\sqrt{\ }$ — *знаком радикала* (от латинского «радикс» — корень). Черта над числом b заменяет скобку. Например, $\sqrt[3]{3+5}$ равно $\sqrt[3]{8}$.

Так как $a^1 = a$, то $\sqrt[1]{a} = a$ и потому корней с показателем 1 не применяют. Условились не писать показатель 2 в записи квадратного корня. Поэтому $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. Наконец отметим, что из равенств $0^n = 0$ и $1^n = 1$ вытекают равенства $\sqrt[n]{0} = 0$ и $\sqrt[n]{1} = 1$.

Пример. Докажем, что $\sqrt[3]{64} = 4$.

Решение. Числа 64 и 4 неотрицательны, причем $4^3 = 64$.

Из определения корня вытекает, что для любого неотрицательного числа b и любого натурального числа n выполняется равенство

$$(\sqrt[n]{b})^n = b.$$

Обратно, если $x^n = b$, где числа b и x неотрицательны, то $x = \sqrt[n]{b}$. Поэтому для неотрицательного x имеем

$$\sqrt[n]{x^n} = x.$$

Понятие корня позволяет обобщить понятие показателя степени, введя степени с любыми рациональными показателями. Это обобщение будет изучено в дальнейшем, а сейчас мы лишь формально введем соответствующие определения и отметим без доказательства, что для степеней с рациональными показателями остаются истинными изученные в п. 7 § 1 главы 1 свойства степеней с натуральными показателями (исключая свойство 7).

Именно, положим для любого $a \neq 0$

$$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Далее, если $a > 0$, m — целое число и n — натуральное число, то положим

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Замечание. Мы определили выше понятие корня лишь для неотрицательных чисел. Если показатель степени n нечетен, то определяют корень n-й степени из отрицательного числа a равенством

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}.$$

Например, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$ сохраняет силу и в случае, когда $a < 0$, n нечетно. В самом деле, при $a < 0$ и нечетном n имеем $-a > 0$ и

$$(\sqrt[n]{a})^n = (-\sqrt[n]{-a})^n = -(\sqrt[n]{-a})^n = -(-a) = a.$$

Нам потребуются в дальнейшем следующие свойства корней:
а) при $a > 0$, $b > 0$ имеют место равенства:

1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; 2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; 3) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$; 4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$;

5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

б) если $a > 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$. Кроме того, $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = 0$.

Доказательства этих свойств будут даны позднее.

Упражнения

364. Запишите без отрицательных показателей выражения:

1) $a^{-3}b^{-6}c^2$; 4) $\dfrac{(a^2+b^3)^{-4}}{(a^3+b^2)^{-3}}$;

2) $\dfrac{a^{-4}b^{-2}}{c^{-3}d^{-5}}$; 5) $(a+3b)^4(a-3b)^{-4}$.

3) $\dfrac{(a+b)^{-7}}{(a-b)^{-6}}$;

365. Запишите без дробной черты выражения:

1) $\dfrac{(a+b)^2}{(c+d)^3}$; 2) $\dfrac{(a^2-5b)^4}{(8a^3+b)^5}$; 3) $\dfrac{1}{(a+b)^3(a-b)^8}$; 4) $\dfrac{(a^2+b^2)^4}{(a^2-ab+b^2)^5}$.

366. Какое из чисел больше:

1) $\sqrt[3]{5}$ или $\sqrt[4]{6}$; 3) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$;

2) $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}$ или $\sqrt{3+\sqrt[3]{2}}$?

367. Верно ли равенство:

1) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})^3} = \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$?

368. Запишите с помощью степеней с рациональными показателями выражения:

1) $\dfrac{\sqrt[7]{a^3}\sqrt[3]{c^4}}{\sqrt[5]{d^4}\sqrt[8]{b^3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[5]{(a+b)^3}\sqrt[7]{(a-b)^5}}{\sqrt[8]{(a^2+b^2)^4}}$.

369. Запишите с помощью радикалов следующие выражения:

1) $\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}}{c^{-\frac{5}{6}}d^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{(a^3 + b^3)^{-\frac{5}{6}}(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}}{(a^2 + 3ab + b^2)^{-\frac{11}{8}}}$.

370. Упростите выражения: 1) $\sqrt{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5})^2}$; 2) $\sqrt[7]{(\sqrt{5} - \sqrt{19})^{14}}$.

371. Найдите области существования выражений:

1) $\sqrt{x^2 - x - 12}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 9}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$.

372. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x + 2}$;

2)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{x}$, пользуясь равенством $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$;

3)* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$, пользуясь равенством $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$.

ГЛАВА 5

Производная и ее приложения

§ 1. Производная

1. Приращение функции. Многие вопросы практики приводят к отысканию разности значений функции в двух точках. Например, если обозначить через $q(t)$ количество электричества, протекшее через данное сечение проводника к моменту времени t, то количество электричества, протекшее через это сечение за промежуток времени $[a; b]$, выражается формулой $q(b) - q(a)$. Если $f(t)$ — координата прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то разность $f(b) - f(a)$ показывает, в какую сторону и на сколько переместилась эта точка за промежуток времени $[a; b]$. Расстояние, на которое переместилась точка, равно $|f(b) - f(a)|$, при этом если $f(b) - f(a) > 0$, то перемещение совершается в положительном направлении, а если $f(b) - f(a) < 0$, — то в отрицательном.

Введем следующее определение.

Определение. Разность $x - a$ называют *приращением аргумента* при переходе от a к x, а разность $f(x) - f(a)$ — *приращением функции* f при этом переходе.

Заметим, что как приращение аргумента, так и приращение функции могут быть не только положительными, но и отрицательными и даже равными нулю. В дальнейшем мы будем обозначать приращение аргумента буквой h, т. е. положим $x - a = h$. Тогда $x = a + h$. Соответствующее приращение функции равно $f(a + h) - f(a)$.

Итак, *чтобы найти приращение функции f при переходе от a к $a + h$, надо:*

а) *найти значение функции f в точке a;*

б) *найти значение f в точке $a + h$;*

в) *из второго значения вычесть первое.*

Пример 1. Найдем приращение функции x^3, если начальное значение аргумента равно 4, а приращение аргумента равно 0,1.

Решение. Имеем $4^3 = 64$. Если аргумент 4 увеличится на 0,1, он станет равен 4,1. Соответствующее значение функции x^3 равно $4{,}1^3 = 68{,}921$. Значит, приращение функции x^3 при переходе от 4 к 4,1 равно $68{,}921 - 64 = 4{,}921$.

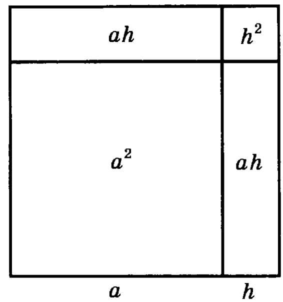


Рис. 88

Пример 2. Найдем приращение площади квадрата, если длину a его стороны увеличить на h.

Решение. Длина стороны квадрата равна a, значит площадь его равна a^2. Если длину a увеличить на h, получится квадрат, площадь которого равна $(a + h)^2$. Приращение площади квадрата произошло за счет присоединения Г-образной фигуры (рис. 88). Найдем площадь этой фигуры, т. е. приращение площади квадрата:

$$(a + h)^2 - a^2 = 2ah + h^2.$$

Пример 3. Найдем приращение функции x^3 при переходе от a к $a + h$.

Решение. Так как $f(x) = x^3$, то $f(a) = a^3$ и $f(a + h) = (a + h)^3$. Значит, $f(a + h) - f(a) = (a + h)^3 - a^3$. Но

$$(a + h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3.$$

Поэтому искомое приращение равно

$$(a + h)^3 - a^3 = (a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3) - a^3 = \\ = 3a^2h + 3ah^2 + h^3 = (3a^2 + 3ah + h^2)h.$$

Очень простой вид имеет приращение линейной функции.

Теорема. *Приращение линейной функции $kx + b$ пропорционально приращению h аргумента, причем коэффициент пропорциональности равен k.*

Доказательство. Пусть $f(x) = kx + b$. Тогда

$$f(a) = ka + b \text{ и } f(a + h) = k(a + h) + b.$$

Значит,

$$f(a + h) - f(a) = k(a + h) + b - (ka + b) = kh.$$

Это равенство показывает, что приращение линейной функции при переходе от a к $a + h$ пропорционально приращению аргумента h с коэффициентом пропорциональности k.

Упражнения

373. Масса части стержня от его левого конца до точки, находящейся от этого конца на расстоянии x, равна $f(x)$. Каков физический смысл приращения функции f при переходе от точки a к точке $a + h$?

374. Угол поворота вращающегося диска за первые t секунд после начала вращения равен $f(t)$. Каков физический смысл приращения функции f при переходе от a к $a + h$?

375. Масса химического вещества, растворившегося за первые t секунд после начала процесса растворения, равна $f(t)$. Каков физический смысл приращения функции f при переходе от a к $a + h$?

376. Число жителей страны в момент времени t равно $f(t)$. Каков смысл приращения этой функции при переходе от a к $a + h$?

377. Масса чугуна, полученного за первые t дней после пуска доменной печи, равна $f(t)$. Каков смысл приращения функции f при переходе от a к $a + h$?

378. Температура стержня в точке, находящейся на расстоянии x от его левого конца, равна $f(x)$. Какой физический смысл имеет приращение функции f при переходе от a к $a + h$?

379. Возрастает или убывает функция f на отрезке $[a; b]$, если на этом отрезке знак приращения функции совпадает со знаком приращения аргумента? Разберите случай, когда знаки этих приращений противоположны.

380. Запишите приращение функции f в точке a:

1) $f(x) = x^2 + x,\ \ a = 3,\ \ h = 0{,}1;$

2) $f(x) = 7 + 2x - x^2,\ \ a = -1,\ \ h = 0{,}001;$

3) $f(x) = 3x - x^3,\ \ a = 2,\ \ h = -0{,}1.$

381. Для функции $2x + 3$ найдите приращение аргумента и функции на отрезке: 1) $[2; 2{,}3]$; 2) $[-2{,}2; -2]$.

382. Аргумент функции получил приращение h и принял значение x_1. Найдите приращение функции, если:

1) $f(x) = \sqrt{x - 1},\ h = 0{,}37,\ x_1 = 4{,}61;$

2) $f(x) = \sqrt{x + 1},\ h = 0{,}17,\ x_1 = -0{,}19.$

383. Найдите приращение функции $\dfrac{1}{2x - 1}$, если $a = 0{,}8,\ h = -0{,}2.$

384. Выведите формулу для приращения функции f при переходе от a к $a + h$: 1) $f(x) = 3x^2$; 2) $f(x) = -5x^3$.

385. Найдите приращение площади круга, когда радиус $R = 4$ см получил приращение h. Изобразите это приращение графически при: 1) $h = 0{,}2$ см; 2) $h = -0{,}2$ см.

386. Найдите приращение площади поверхности и объема куба, когда:

1) ребро, равное 5 см, получает приращение 0,1 см;

2) ребро, равное 5 см, получает приращение −0,2 см.

387. Точка движется по координатной прямой, причем ее координата в момент времени t равна $\dfrac{1}{2}t^2 - 5t + 1$. На сколько переместится точка: 1) за промежуток времени $[3; 8]$; 2) за промежуток времени $[a; a + h]$?

388. Масса части AC стержня AB равна $4x^2 + 5x$, где x — длина отрезка AC. Найдите массу части DE этого стержня, если:

1) $AD = 5,\ AE = 2$; 2) $AD = a,\ AE = a + h$.

2. Дифференцируемые функции. На одних участках пути поезд идет быстрее, на других — медленнее, иногда он останавливается. При этом замедление и ускорение движения происходят постепенно, так что в течение малого промежутка времени скорость поезда почти не изменяется. Иными словами, можно сказать, что при малых значениях h скорость поезда в течение промежутка времени $[a; a + h]$ почти постоянна, а само движение почти равномерно. Поэтому малые участки графика движения поезда почти неотличимы от прямой линии.

Тем же свойством обладает график функции x^2. Рассмотрим рисунок 89, где изображены участки параболы $y = x^2$, расположенные возле точки $M(1; 1)$. Эти «кадры» сделаны в разном масштабе, из-за чего на них показаны участки параболы, имеющие различную величину. Так, на рисунке 89, *а* показана часть параболы, лежащая над отрезком $[0; 2]$, на рисунке 89, *б* — над отрезком $[0{,}9; 1{,}1]$, а на рисунке 89, *в* — над отрезком $[0{,}99; 1{,}01]$.

Видим, что по мере уменьшения радиуса изображенной окрестности искривленность графика становится все менее заметной, график становится все более похож на график линейной функции (или, что то же самое, на график равномерного движения). Можно сказать, что парабола вблизи точки $M(1; 1)$ «линейна в малом». Тем же свойством «линейности в малом» обладает парабола и вблизи других точек. С точки зрения физики свойство «линейности в малом» означает, что соответствующий физический процесс в течение короткого промежутка времени протекает с почти постоянной скоростью или, иначе, почти равномерно.

Перейдем теперь от наглядных рассмотрений к точным математическим формулировкам. В математике вместо «линейная в малом функция» говорят «дифференцируемая функция».

Определение. Функция f называется *дифференцируемой в точке a*, если ее приращение при переходе от a к $a + h$ можно представить в виде

$$f(a + h) - f(a) = (k + \alpha)h, \qquad (1)$$

где k — число, а функция α бесконечно мала при $h \to 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$.

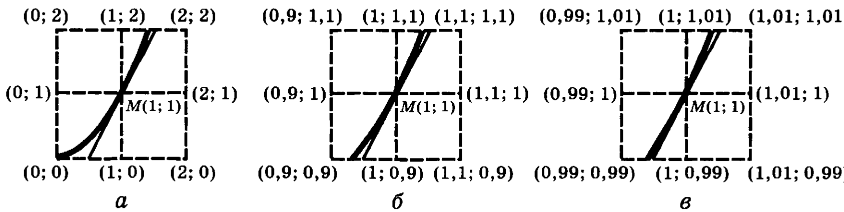


Рис. 89

Напомним, что для линейной функции $kx + b$ приращение равно kh, т. е. для нее бесконечно малая функция α равна нулю. *Линейная функция дифференцируема при всех значениях x.* Для других дифференцируемых функций имеет место лишь приближенная пропорциональность приращений функции и аргумента (стоящее в скобках в формуле (1) слагаемое α и указывает на отклонение от точной пропорциональности).

Пример 1. Докажем, что функция x^2 дифференцируема при любых значениях x.

Решение. В примере 2 п. 1 было показано, что приращение функции x^2 записывается следующим образом:

$$(x + h)^2 - x^2 = (2x + h)h.$$

Если положить $2x = k$, $h = \alpha$, правая часть примет вид $(k + \alpha)h$, причем $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$. Тем самым доказано, что функция x^2 дифференцируема при всех x.

Пример 2. Докажем, что функция x^3 дифференцируема при любом значении x.

Решение. В примере 3 п. 1 было показано, что приращение функции x^3 записывается так:

$$(x + h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 = (3x^2 + 3xh + h^2)h.$$

Полагая $3x^2 = k$, $3xh + h^2 = \alpha$, убеждаемся в дифференцируемости данной функции, поскольку $\lim\limits_{h \to 0} (3xh + h^2) = 0$.

Упражнения

389. Рассмотрите упражнения 373—375 и 377, 378 и поясните для каждого из этих примеров смысл утверждения о дифференцируемости соответствующей функции.

390. Докажите дифференцируемость следующих функций:

1) $\sqrt{x}$ при $x > 0$; 3) $\dfrac{1}{x + 3}$ при $x \neq -3$; 5) $\dfrac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$;

2) $\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x > 0$; 6) x^4.

3. Производная. Если точка M совершает прямолинейное движение по оси с постоянной скоростью k, то ее координата в момент времени t выражается формулой $x = kt + x_0$, где x_0 — начальная координата точки. Построим график этого движения, выбрав масштаб, при котором единичный отрезок на оси абсцисс соответствует единице измерения времени, а на оси ординат — единице измерения длины. Тогда получим прямую линию с угловым коэффициентом k. Таким образом, число k выражает как скорость движения, так и угловой коэффициент графика этого движения. При этом приращение функции $kt + x_0$ равно kh.

Естественно предположить, что аналогичную роль должно играть число k в равенстве

$$f(x + h) - f(x) = (k + \alpha)h, \qquad (1)$$

характеризующем дифференцируемость функции f. Мы увидим ниже, что оно является, с одной стороны, мгновенной скоростью движения, а с другой стороны, угловым коэффициентом касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x.

Ввиду важности указанного коэффициента выясним, как вычислить его. Для этого перепишем равенство (1) в виде

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = k + \alpha,$$

где, напомним, функция α бесконечно мала при $h \to 0$. Из определения предела следует, что в этом случае имеем

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = k. \qquad (2)$$

Обратно, если выполнено равенство (2), то разность $\alpha = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - k$ бесконечно мала при $h \to 0$ и потому $f(x + h) - f(x) = (k + \alpha)h$, где $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Функция f дифференцируема в точке x в том и только в том случае, когда существует предел*

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

В этом случае $f(x + h) - f(x) = (k + \alpha)h$, где $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$.

Значение k, даваемое формулой (2), зависит от выбора x. Поэтому если функция f дифференцируема во всех точках промежутка X, то каждому значению аргумента из X соответствует свое значение k. Этим определяется новая функция на X, которую называют *производной от функции f* и обозначают f'.

Итак, введем следующее определение.

Определение. *Производной* функции f называется функция f', значение которой в точке x выражается формулой

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \qquad (3)$$

Так как h — приращение аргумента при переходе от точки x к точке $x + h$, а $f(x + h) - f(x)$ — соответствующее приращение функции f, то можно сказать:

значение производной от функции f в точке x равно пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, *для того чтобы найти значение производной функции f в точке x, надо:*

1) *найти выражение для приращения $f(x + h) - f(x)$ функции f;*

2) *разделить это выражение на приращение аргумента h;*

3) *найти предел полученного отношения $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \to 0$.*

В тех случаях, когда приращение функции f уже представлено в виде $f(x + h) - f(x) = (k + \alpha)h$, значение коэффициента k для данного значения x и дает значение производной. Поэтому, пользуясь результатами примеров 1 и 2 п. 2, получаем следующие формулы для отыскания производных:

$$(kx + b)' = k, \quad (x^2)' = 2x, \; (x^3)' = 3x^2.$$

Проверьте, что тот же результат получается по формуле (3). Отметим, в частности, что $b' = 0$, т. е. *производная постоянной равна нулю.*

Пример 1. Найдем производную функции $\dfrac{1}{x}$.

Решение. Для этой функции имеем

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = -\frac{h}{x(x+h)}$$

и потому

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

Значит,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h \to 0}\left(-\frac{1}{x(x+h)}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Пример 2. Найдем производную функции $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Решение. Имеем

$$f(x + h) - f(x) = a(x + h)^2 + b(x + h) + c - (ax^2 + bx + c) =$$
$$= 2ahx + ah^2 + bh.$$

Значит,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + ah + b$$

и потому

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b,$$

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$$

Замечание. Если функция задана на отрезке $[a;\ b]$, то в точках a и b под словом «дифференцируемость» будем понимать одностороннюю дифференцируемость, т. е. существование пределов

$$f'(a+0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

и

$$f'(b-0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(b-h) - f(b)}{-h}.$$

Упражнения

391. Для каждого из упражнений 373—375, 377, 378 выясните смысл производной указанной в нем функции.

392. Найдите производную функции:

1) $\frac{3}{5}x$; 2) $4 - 5x$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $x + \sqrt{2}$; 5) $3x^2$; 6) $-\frac{x^2}{5}$; 7) $x^2 + 8$;

8) $x^3 - 1$; 9) $\sqrt{x}$ (см. упр. 372, 3); 10) $\sqrt[3]{x}$ (см. упр. 372, 2).

393. Найдите значение производной функции f в точке a, если:

1) $f(x) = 7 - 3x^2$, $a = 2$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{7 + \sqrt{5}}$, $a = 100$;

3) $f(x) = x^2$, $a = -1$, $a = 2$, $a = -\frac{2}{5}$.

394. Сравните производные функций x, x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$.

Наблюдаете ли вы какую-либо закономерность?

395. 1) Найдите производную функции $|x|$ при $x > 0$ и при $x < 0$.

2) Существует ли у функции $|x|$ производная в нуле?

4. Дифференциал функции. Мы знаем теперь, что значение коэффициента k в формуле

$$f(a+h) - f(a) = (k + \alpha)h$$

равно $f'(a)$, а потому эту формулу можно переписать так:

$$f(a+h) - f(a) = (f'(a) + \alpha)h, \tag{1}$$

где, напомним, $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$. Отсюда следует, что

$$f(a+h) = f(a) + (f'(a) + \alpha)h. \tag{2}$$

Равенство (2) применяется для приближенного вычисления значений функции f вблизи точки a, в которой легко найти как значение функции, так и значение ее производной. Для этого отбрасывают бесконечно малое слагаемое α и пишут

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h. \qquad (3)$$

Пример 1. Найдем значение функции x^3 при $x = 2{,}014$ с точностью до 0,003.

Решение. При $x = 2$ значение функции x^3 равно 8. Производная этой функции равна $3x^2$, и ее значение при $x = 2$ равно 12. Итак, если $a = 2$, то $f(a) = 8$, $f'(a) = 12$. И потому при $h = 0{,}014$ имеем

$$f(a + h) = (2 + 0{,}014)^3 \approx 8 + 12 \cdot 0{,}014 = 8{,}168.$$

Погрешность полученного значения равна $3ah^2 + h^3$, т. е. $3 \cdot 2 \cdot 0{,}014^2 + 0{,}014^3$. Так как $0{,}014 < 0{,}02$, то эта погрешность меньше, чем $6 \cdot 0{,}02^2 + 0{,}02^3 < 0{,}003$.

Из равенства (1) следует, что приращение дифференцируемой функции f состоит из двух слагаемых: слагаемого $f'(a)h$, которое пропорционально приращению аргумента, и слагаемого αh, которое стремится к нулю быстрее, чем h (когда h стремится к нулю, то и множитель α стремится к нулю, а потому произведение αh стремится к нулю быстрее, чем h). Слагаемое $f'(a)h$ называют *дифференциалом функции* f и обозначают df. Таким образом, $df = f'(a)h$.

Для функции x производная равна 1, и потому ее дифференциал равен h, $dx = h$. Поэтому принято вместо h писать dx. Вместо a пишут x. При этом формула дифференциала функции принимает вид

$$df = f'(x)dx. \qquad (4)$$

Например, из того, что $(x^2)' = 2x$, вытекает равенство $d(x^2) = 2xdx$, а из того, что $(x^3)' = 3x^2$, — равенство $d(x^3) = 3x^2dx$.

Проведенное в начале пункта вычисление приближенного значения функции можно теперь кратко сформулировать следующим образом.

Приближенное значение функции вблизи точки а равно сумме ее значения в этой точке и дифференциала в той же точке.

Упражнения

396. Пользуясь производными, найденными в п. 3, найдите:

1) $d\left(\frac{1}{x}\right)$; 2) $d(\sqrt{x})$; 3) $d(kx + b)$; 4) $d(\sqrt[3]{x})$.

397. С помощью микрокалькулятора, пользуясь формулой (3), вычислите приближенно:

1) $\sqrt{9{,}3}$; 2) $\sqrt{26}$; 3) $\sqrt[3]{28}$; 4) $\sqrt{15{,}6}$.

5. Производная и скорость. Пусть точка движется по координатной прямой и закон ее движения задается функцией f. В момент $t = t_0$ она находится в точке с координатой $f(t_0)$, а в момент времени $t = t_0 + h$ — в точке с координатой $f(t_0 + h)$. Значит, ее перемещение за промежуток времени[1] $[t_0; t_0 + h)$ равно $f(t_0 + h) - f(t_0)$. Разделив его на величину h промежутка времени, получим число, называемое *средней скоростью* движения точки за промежуток времени $[t_0; t_0 + h]$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Предел средней скорости при $h \to 0$ называют *мгновенной скоростью* движения в момент времени t_0. Значит,

$$v_{\text{мгн}}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Предел, написанный справа, является значением производной функции f в точке t_0, т. е. равен $f'(t_0)$. Мы доказали, что

$$v_{\text{мгн}}(t_0) = f'(t_0).$$

Итак, *мгновенная скорость в момент времени t_0 прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = f(t)$, равна значению производной функции f при $t = t_0$.*

Таким же образом определяют мгновенную скорость других физических процессов: углового вращения, радиоактивного распада и т. д.

Рассмотрим, например, процесс радиоактивного распада. Масса m радиоактивного вещества изменяется с течением времени. Пусть закон этого изменения имеет вид $m = f(t)$. Мгновенная скорость распада вещества в момент времени t_0 равна $f'(t_0)$. Это значит, что изменение массы вещества за короткий промежуток времени $[t_0; t_0 + h]$ приблизительно равно $f'(t_0)h$ (в точности оно равно $(f'(t_0) + \alpha)h$, где α — бесконечно малая при $h \to 0$).

Точно так же устанавливается, что если масса вещества, растворившегося в воде за время t, равна $f(t)$, то мгновенная скорость растворения при $t = t_0$ равна $f'(t_0)$.

Вообще если какая-нибудь величина y изменяется по закону $y = f(t)$, то мгновенная скорость изменения этой величины при $t = t_0$ равна $f'(t_0)$. Кратко говоря, *производная есть мгновенная скорость изменения функции.*

Понятие производной применяют и при изучении величин, меняющихся не с течением времени, а в зависимости от изменения иных величин.

---

[1] Мы пишем t_0 вместо a, потому что в физике буква a обозначает ускорение.

Пусть, например, дан стержень AB. Обозначим через $f(x)$ массу части AC этого стержня, имеющей длину x. Если стержень однороден, то $f(x) = kx$. Число k называют *линейной плотностью* стержня. В этом случае масса любого участка стержня равна kh, где h — длина этого участка.

Если стержень неоднороден, то масса участка DE длины h равна $f(x_0 + h) - f(x_0)$, где x_0 — абсцисса точки D. Разделив эту массу на h, получим *среднюю линейную плотность участка DE:*

$$k_{\text{ср}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha.$$

А *линейная плотность в точке* x_0 равна пределу средней плотности, когда длина участка стремится к нулю, т. е. числу

$$k(x_0) = \lim_{h \to 0} k_{\text{ср}} = f'(x_0).$$

По той же схеме определяют, что такое теплопроводность неоднородного стержня в данной точке, его теплоемкость в этой точке и т. д. Таким образом, с помощью понятия производной можно изучать самые разнообразные неоднородные объекты и процессы.

Упражнения

398. Определите понятие мгновенной угловой скорости вращения и выразите эту скорость через производную.

399. Определите понятие силы переменного тока в данный момент времени и выразите ее через производную.

400. Определите понятие линейной теплоемкости неоднородного стержня в данной точке и выразите ее через производную.

401. 1) Определите понятие перепада температуры в данной точке неравномерно нагретого стержня и выразите его через производную.
2) Придумайте еще два-три примера физических величин, выражающихся с помощью производной.

402. Количество электричества, протекшее через проводник начиная с момента $t = 0$, выражается формулой $q(t) = 3t^2 - 2t$. Выведите формулу для вычисления силы тока в любой момент времени t и вычислите силу тока в конце шестой секунды.

403. Тело, брошенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью v_0, движется по закону $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Найдите высоту тела в момент времени, когда скорость тела в 2 раза меньше первоначальной, если $h_0 = 4$ м, $v_0 = 3$ м/с и $g \approx 10$ м/с^2.

6. Касательная прямая к графику функции и ее уравнение. Возьмем дугу AB, выберем на ней точку M и проведем луч AM (рис. 90). Будем приближать точку M по дуге к точке A. Тогда луч AM будет поворачиваться вокруг точки A. Для большинства встречающихся на практике линий луч AM по мере приближения точки M к точке A стремится к некоторому предельному положению, т. е. существует такой луч AT, что величина угла TAM стремится к нулю, когда AM стремится к нулю, $\lim\limits_{AM \to 0} \angle TAM = 0$.

Луч AT называют *касательным лучом* к дуге AB в точке A.

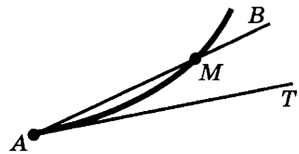


Рис. 90

Как правило, через точку кривой проходят два касательных луча, образующих развернутый угол (рис. 91). Такие точки A кривой будем называть *обыкновенными*, а прямую, составленную из двух взаимно противоположных касательных лучей в такой точке, — касательной к кривой в точке A. Иными словами, *касательной прямой к кривой* Г *в точке* A называют предельное положение секущей AM, когда точка M приближается по кривой к точке A.

Через точку K на рисунке 92, *а* проходят четыре касательных луча, через точку Z на рисунке 92, *б* — два касательных луча, образующих угол, меньший 180°, а для точки S на рисунке 92, *в* оба касательных луча сливаются. Эти случаи являются особыми.

Пусть AT — прямая на координатной плоскости, не параллельная оси ординат, и MA — другая прямая (рис. 90). Очевидно[1], что если угол MAT стремится к нулю, то угловой коэффициент прямой AM стремится к угловому коэффициенту прямой AT, и, обратно, если угловой коэффициент прямой AM стремится к угловому коэффициенту прямой AT, то угол MAT стремится к нулю. Отсюда следует, что *если существует невертикальная касательная к кривой* Г *в точке A, то ее угловой коэффициент является пределом углового коэффициента секущей, когда вторая точка пересечения M приближается к точке A:*

$$k_{\text{кас}} = \lim_{AM \to 0} k_{\text{сек}}. \qquad (1)$$

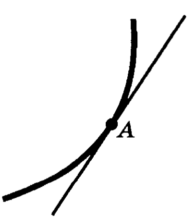
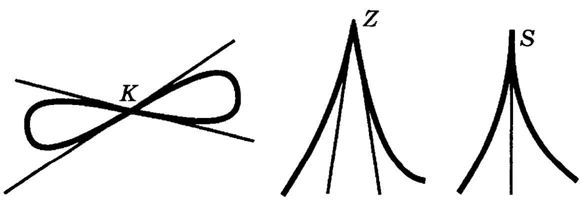


Рис. 91



а *б* *в*

Рис. 92

[1] Строгое доказательство этого утверждения опирается на непрерывность функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arctg} x$, которая будет доказана в главе 6.

Рассмотрим случай, когда кривая Г является графиком функции f. Возьмем на этой кривой точки $A(a;\ f(a))$ и $M(a+h;\ f(a+h))$. По формуле для углового коэффициента прямой, проходящей через две точки, угловой коэффициент секущей равен $k_{\text{сек}} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Кроме того, ясно, что условия $MA \to 0$ и $h \to 0$ равносильны. Поэтому из (1) получаем

$$k_{\text{сек}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1'}$$

Но выражение в правой части этого равенства является значением производной функции f в точке a, т. е. равно $f'(a)$. Поэтому

$$k_{\text{кас}} = f'(a).$$

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Если в точке $A(a;\ f(a))$ графика функции f можно провести невертикальную касательную, то функция f дифференцируема при $x = a$ и угловой коэффициент касательной в точке A равен значению производной функции f в точке a,* т. е. $k_{\text{кас}} = f'(a)$.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в точке a, то к ее графику можно провести касательную в точке $A(a;\ f(a))$, причем угловой коэффициент этой касательной равен $f'(a)$.*

Доказательство. Из того, что функция f дифференцируема в точке a, следует существование предела

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Но мы знаем, что $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = k_{\text{сек}}$. Значит, существует предел $\lim\limits_{h \to 0} k_{\text{сек}}$, а это и значит, что существует касательная к графику в точке A, причем ее угловой коэффициент равен $f'(a)$.

Содержание теорем 1 и 2 кратко формулируют так: *значение производной равно угловому коэффициенту касательной к графику функции.* В этом заключается геометрический смысл производной.

Напишем теперь уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0. Мы знаем, что уравнение прямой, проходящей через точку $A(a;\ b)$ и имеющей угловой коэффициент k, таково:

$$y = b + k(x - a). \tag{3}$$

Но в точке с абсциссой x_0 значение функции равно $f(x_0)$, а угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$. Поэтому в формуле (3) надо

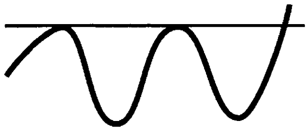


Рис. 93

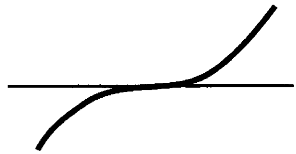


Рис. 94

положить $a = x_0$ и $b = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$. Получаем уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (4)$$

Пример. Напишем уравнение касательной к графику функции $x^2 - 3x + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение. Значение функции при $x = 2$ равно $2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$. Производная от $x^2 - 3x + 1$ равна $2x - 3$; $(x^2 - 3x + 1)' = 2x - 3$. При $x = 2$ она принимает значение $2 \cdot 2 - 3 = 1$. Итак, $x_0 = 2$, $f(x_0) = -1$, $f'(x_0) = 1$, и потому уравнение касательной имеет вид

$$y = -1 + 1(x - 2).$$

Упрощая это уравнение, получаем $y = x - 3$.

Замечание. Касательная к графику функции может иметь с ним несколько и даже бесконечно много общих точек (рис. 93). Кроме того, может случиться, что в точке касания кривая переходит с одной стороны касательной на другую (рис. 94).

Упражнения

404. 1) Напишите уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.
2) Напишите уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 4x$ в точке с ординатой $y_0 = -3$.

405. Напишите уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$, проходящей параллельно прямой $y = -2x + 8$.

406. Напишите уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$, $y = x^2 - 3x + 5$, проведенных через точки пересечения этих кривых.

407. Напишите уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M(2; -5)$.

408. К параболе $y = x^2$ в точке $M(x_0; y_0)$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Опираясь на полученный результат, сформулируйте геометрическое правило построения касательной к параболе $y = x^2$.

7. Непрерывность и дифференцируемость. Так как линейная функция непрерывна при всех значениях аргумента, то естественно предположить, что «почти линейная» функция также непрерывна. Иными словами, естественно предположить, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. В силу дифференцируемости функции f имеет место равенство $f(a + h) - f(a) = (k + \alpha)h$. Но

$$\lim_{h \to 0} (k + \alpha)h = (k + 0) \cdot 0 = 0,$$

и потому $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) - f(a) = 0$, т. е.

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a).$$

Это и значит, что функция f непрерывна в точке a.

Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно — функция может не быть дифференцируемой в точке, где она непрерывна.

Пример. Докажем, что функция $|x|$ непрерывна во всех точках, но не является дифференцируемой при $x = 0$.

Решение. Функция $|x|$ задается так:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Она могла бы иметь точку разрыва при $x = 0$, но, поскольку $\lim\limits_{x \to +0} |x| = \lim\limits_{x \to +0} x = 0$ и $\lim\limits_{x \to -0} |x| = \lim\limits_{x \to -0} (-x) = 0$, она непрерывна и в этой точке. Покажем теперь, что она не является дифференцируемой при $x = 0$.

В самом деле, поскольку при $x = 0$ имеем $|x| = 0$, а при $x = h$ имеем $|x| = |h|$, то производная функции $|x|$ в точке $x = 0$ (если бы она существовала) должна была бы равняться значению предела $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$. Но этот предел не существует, так как $\lim\limits_{h \to +0} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to +0} \frac{h}{h} = 1$, а $\lim\limits_{h \to -0} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to -0} \frac{-h}{h} = -1$. Этим и доказано, что функция $|x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, т. е. что она не является дифференцируемой в этой точке.

Отметим, что в точке $x = 0$ график функции $|x|$ имеет излом. Это не случайно, поскольку дифференцируемость функции в некоторой точке означает гладкость ее графика в этой точке. Математики построили удивительные непрерывные функции, которые не являются дифференцируемыми ни в одной точке. Графики этих функций, образно говоря, имеют излом в каждой точке.

Упражнения

409. Докажите, что функция f не дифференцируема в точке a (но непрерывна в точке a):

1) $f(x) = |x - 2|$, $a = 2$; 2) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$; 3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $a = 0$.

410. Дифференцируемы ли функции f в точке $x = 0$:

1) $f(x) = \frac{|x|}{2x}$;

2) $f(x) = 3|x|$;

3) $f(x) = \frac{1}{2}x$;

4) $f(x) = \frac{x^2}{2}$;

5) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geqslant 0? \end{cases}$

411. Какие из следующих функций всюду непрерывны:

1) $f(x) = |x^2 - 1|$;

2) $f(x) = \frac{|x|}{x}$;

3) $s(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant 0, \\ x^2 - 1, & x < 0; \end{cases}$

4) $u(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant 0, \\ x^2, & x < 0? \end{cases}$

Какие из этих функций дифференцируемы в точке $x = 0$? Какие функции дифференцируемы в точке $x = 1$?

412. В каких точках нельзя провести касательную к графику функции $|x - 1| + |x - 2|$? Непрерывна ли функция в этих точках?

§ 2. Техника дифференцирования

1. Дифференцирование линейной комбинации функций. Нахождение производной функции f называют *дифференцированием* этой функции. В этом пункте мы докажем две теоремы: теорему о дифференцировании суммы функций и теорему о дифференцировании функции Cf, где C — число.

Теорема 1. *В тех точках, где функции f и g дифференцируемы, их сумма $f + g$ тоже дифференцируема, причем*

$$(f + g)' = f' + g'. \tag{1}$$

Кратко говорят: *производная суммы двух функций равна сумме их производных.*

Доказательство. Обозначим функцию $f + g$ через F. Тогда $F(x) = f(x) + g(x)$, а $F(x + h) = f(x + h) + g(x + h)$. Значит, приращение функции F на отрезке $[x;\ x + h]$ имеет вид

$$F(x + h) - F(x) = (f(x + h) + g(x + h)) - (f(x) + g(x)) =$$
$$= (f(x + h) - f(x)) + (g(x + h) - g(x)).$$

Отсюда следует

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

Перейдем к пределу при $h \to 0$. Так как предел суммы равен сумме пределов, то получаем

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} +$$
$$+ \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Итак, доказано, что для любого x имеем $F'(x) = f'(x) + g'(x)$. Иными словами, $F' = f' + g'$, т. е. $(f + g)' = f' + g'$.

Теорема 2. *В тех точках, где функция f дифференцируема, функция Cf, где C — число, тоже дифференцируема, причем*

$$(Cf)' = Cf'. \tag{2}$$

Кратко говорят: *постоянный множитель можно вынести за знак производной.*

Доказательство. Положим $F = Cf$. Тогда имеем

$$F(x) = Cf(x), \; F(x + h) = Cf(x + h)$$

и потому

$$F(x + h) - F(x) = Cf(x + h) - Cf(x) = C(f(x + h) - f(x)).$$

Значит,

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = C \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Перейдем к пределу при $h \to 0$ и примем во внимание, что постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(C \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right) =$$
$$= C \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = Cf'(x).$$

Итак, для любого x имеем $F'(x) = Cf'(x)$, т. е. $(Cf)' = Cf'$.

С помощью теорем 1 и 2 можно, зная производные функций f и g, найти производную любой линейной комбинации этих функций, т. е. любой функции вида $C_1 f + C_2 g$, где $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. В частности, с помощью доказанных ранее формул дифференцирования линейной функции и функций x^2 и x^3 можно продифференцировать любой многочлен третьей степени.

Пример 1. Найдем производную функции $2x^3 - 4x^2 + 5x + 8$.

Решение. По теоремам 1 и 2 имеем

$$(2x^3 - 4x^2 + 5x + 8)' = (2x^3)' + (-4x^2)' + (5x + 8)' =$$
$$= 2(x^3)' - 4(x^2)' + (5x + 8)'.$$

Но $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$ и $(5x + 8)' = 5$, а потому

$$(2x^3 - 4x^2 + 5x + 8)' = 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 5 = 6x^2 - 8x + 5.$$

П р и м е р 2. Напишем уравнение касательной к графику функции $x^2 - 5x$ в точке с абсциссой 2.

Р е ш е н и е. Пусть $f(x) = x^2 - 5x$. Тогда $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6$. Далее, $(x^2 - 5x)' = 2x - 5$ и потому $f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1$.

Уравнение касательной имеет вид $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, т. е. $y = -(x - 2) - 6$, или $y = -x - 4$.

П р и м е р 3. Путь, пройденный за время t при свободном падении, выражается формулой $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. Найдем мгновенную скорость этого падения.

Р е ш е н и е. Так как мгновенная скорость — производная координаты по времени, то

$$v_{\text{мгн}} = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Упражнения

413. Найдите значения выражений $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ и $\frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$ для функции f с помощью микрокалькулятора и сделайте предположение о значении $f'(a)$. Проверьте, что это предположение справедливо.
1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6$, $a = 2$, $h = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$;
2) $f(x) = 6\sqrt{x} - 8x^3$, $a = 4$, $h = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$.

Проверьте, что среднее арифметическое указанных выше выражений, т. е. $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$, дает для $f'(a)$ приближение лучше, чем указанные выше.

414. Найдите производные (пользуясь производными, найденными в п. 3 § 1 и упр. 392):
1) $5x^3 - 3x^2 + x - 1$;
2) $6\sqrt{x} - 3x^3 + 7x + 2$;
3) $x^2 + 3\sqrt[3]{x} - 1$;
4) $\frac{5}{x} + \sqrt{x}$.

415. Проведите касательную к кривой:
1) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$;
2) $y = x^3 - 3x + 1$ в точке с ординатой $y_0 = -1$.

416. Продифференцируйте функцию $\frac{2x^3 - 3x^2 - 3x - 5}{2x - 5}$.

417. Найдите угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 4$ в точке $x_0 = 3$.

418. Найдите угловые коэффициенты касательных к параболе $y = x^2 - 4$ в точках пересечения параболы с осью абсцисс.

419. Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 0{,}2$. Найдите угловую скорость вращения тела в момент времени $t = 20$ с.

420. В тонком однородном стержне AB длиной 45 см масса m (в граммах) распределена по закону $m = 3x^2 + 5x$, где x — длина части стержня (в см), отсчитываемая от точки A. Найдите линейную плотность стержня: 1) в точке, отстоящей от A на расстоянии 20 см; 2) в точке B.

421. Напишите уравнения касательных к графику функции $x^3 - 10x^2 + 1$ в точках с абсциссами $x_0 = 1$ и $x_1 = -2$.

422. Напишите уравнение касательной к параболе $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ в точке пересечения ее с осью ординат.

423. Закон движения точки по координатной прямой выражен уравнением $x = 4 + 12t - 0{,}25t^2$. Найдите скорость точки в момент времени $t_0 = 8$. В какой момент времени скорость точки равна 0?

424. Закон движения точки по координатной прямой имеет вид $x = t^3 - 3t^2 + 1$. Найдите моменты времени, в которые скорость равнялась нулю.

2. Дифференцирование степени функции и произведения функций. Покажем, как, зная производную функции f, найти производную степени f^n этой функции.

Теорема 1. *В точках, где функция f дифференцируема, ее степень f^n, $n \in N$, тоже дифференцируема, причем*

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим функцию f^n через F. Приращение функции F имеет вид

$$F(x + h) - F(x) = f^n(x + h) - f^n(x).$$

В силу формулы

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \dots + a^{k-1}b^{n-k} + \dots + a^{n-1})$$

(см. (6) п. 2 § 2 главы 2) получаем

$$F(x + h) - F(x) = (f(x + h) - f(x))(f^{n-1}(x + h) + f^{n-2}(x + h)f(x) + \dots + f^{n-k}(x + h)f^{k-1}(x) + \dots + f^{n-1}(x))$$

(в последней сумме n слагаемых). Значит,

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}\,(f^{n-1}(x + h) + \dots + f^{n-k}(x + h)f^{k-1}(x) + \dots + f^{n-1}(x)). \qquad (2)$$

Перейдем в равенстве (2) к пределу при $h \to 0$. Так как функция f дифференцируема, то она непрерывна и потому $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$. Поэтому в последней сумме после перехода к пределу получим n слагаемых, каждое из которых равно $f^{n-1}(x)$. Сумма этих слагаемых равна $nf^{n-1}(x)$.

Далее, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$. Значит, получаем

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Таким образом, $F' = nf^{n-1}f'$, т. е.

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'.$$

Пример 1. Найдем производную функции $(2x^2 + 4x - 1)^3$.

Решение. Здесь $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$, $f'(x) = 4x + 4$, $n = 3$ и

$$((2x^2 + 4x - 1)^3)' = 3(2x^2 + 4x - 1)^2(4x + 4).$$

Применим формулу (1) к функции $f(x) = x^n$. Так как $x' = 1$, то из (1) получаем

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (3)$$

Например,

$$(x^{20})' = 20x^{19}, \quad (x^{145})' = 145x^{144}.$$

Мы докажем позднее, что формулы (1) и (3) верны не только для натуральных значений n, при которых они доказаны сейчас, но и для любых значений показателя в области, где основание степени положительно. Если n — целое число, то последнее ограничение излишне, нужно лишь, чтобы основание степени было отлично от нуля.

Пример 2. Найдем производную функции $\frac{1}{x^n}$, $n \in N$.

Решение. По формуле (1), используя пример 1 п. 3 § 1, получаем

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)' = n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{n}{x^{n-1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Пример 3. Найдем производную функции $\sqrt[3]{x^2}$, $x > 0$.

Решение. Запишем $\sqrt[3]{x^2}$ в виде $x^{\frac{2}{3}}$. Тогда

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Эта формула верна и при $x < 0$.

Пример 4. Найдем производную функции $\frac{1}{(6x^2 - 5)^4}$.

Решение. Так как $\frac{1}{(6x^2 - 5)^4} = (6x^2 - 5)^{-4}$, то $f(x) = 6x^2 - 5$, $f'(x) = 12x$, $n = -4$. Поэтому

$$\left(\frac{1}{(6x^2 - 5)^4}\right)' = -4(6x^2 - 5)^{-5} \cdot 12x = -\frac{48x}{(6x^2 - 5)^5}.$$

П р и м е р 5. Найдем производную функции $\sqrt{x^2+4}$.

Р е ш е н и е. Так как $\sqrt{x^2+4} = (x^2+4)^{\frac{1}{2}}$, то

$$f(x) = x^2 + 4,\ f'(x) = 2x,\ n = \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\left(\sqrt{x^2+4}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}.$$

С помощью формулы (1) получим формулу для производной от произведения двух функций.

Теорема 2. *В точках, где функции f и g дифференцируемы, их произведение fg тоже дифференцируемо. Производная от произведения вычисляется по формуле*

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию fg можно записать следующим образом:

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

Поэтому

$$(fg)' = \frac{1}{4}((f+g)^2)' - \frac{1}{4}((f-g)^2)'.$$

По формуле (1) получаем[1] $((f \pm g)^2)' = 2(f \pm g)(f' \pm g')$ и потому

$$(fg)' = \frac{1}{4} \cdot 2(f+g)(f'+g') - \frac{1}{4} \cdot 2(f-g)(f'-g').$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

П р и м е р 6. Найдем производную функции

$$(x^3 + 5x - 1)(x^2 + 2x + 8).$$

Р е ш е н и е. По формуле (4) получаем

$$\begin{gathered}((x^3+5x-1)(x^2+2x+8))' = \\ = (x^3+5x-1)'(x^2+2x+8) + (x^3+5x-1)(x^2+2x+8)' = \\ = (3x^2+5)(x^2+2x+8) + (x^3+5x-1)(2x+2) = \\ = 5x^4 + 8x^3 + 39x^2 + 18x + 38.\end{gathered}$$

Тот же ответ получится, если сначала раскрыть скобки, а потом продифференцировать.

---

[1] Либо всюду берем знак «плюс», либо всюду знак «минус».

Упражнения

425. Вычислите производные функций:

1) $(x^2 - 3x + 1)(x^4 - 3x + 1)$;
2) $(x^5 - x + 2)(x^3 - 3x^2 + 4)$;
3) $(\sqrt[3]{x} + 5)(\sqrt{x} - 4)$;
4) $\sqrt{x}(x^4 - 3x + 6)$;
5) $(x^2 + 3x + 5)^3$;
6) $(7x - 4)^{15}$;
7) $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^{20}$.

426. Выведите формулы для $(uvw)'$, $(uvwz)'$.

427. В какой точке линии $y = \sqrt[3]{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 60°?

428. Лестница длиной l вертикально прислонена к стене. В момент $t = 0$ нижний конец начинает равномерно отодвигаться от стены со скоростью v.

1) Найдите высоту верхнего конца лестницы в момент времени t;
2) найдите скорость, с которой этот конец опускается в момент времени t.

429. Балку длиной 13 м опускают на землю так, что верхний конец удерживается канатом, намотанным на ворот, а нижний конец балки прикреплен к вагонетке. Канат разматывается со скоростью 2 м/мин. С какой скоростью откатывается вагонетка в момент, когда она находится на расстоянии 5 м от вертикального каната?

430. Для функции $x^3 - 4x + 1$ запишите приближенную формулу для $f(a + h)$ и сосчитайте $f(a + h)$ в случае: 1) $a = 2$, $h = 0{,}001$; 2) $a = 4$, $h = -0{,}01$. Оцените погрешность вычисления.

3) Вычислите значение этой функции при $x = 3{,}012$ с точностью до 0,0009.

3. Дифференцирование дроби. Перейдем к дифференцированию отношения двух функций. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Функция* $F = \frac{1}{f}$ *дифференцируема в точках, где функция* f *дифференцируема и отлична от нуля. В этих точках*

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}. \tag{1}$$

Доказательство. Найдем приращение функции F при переходе от x к $x + h$:

$$F(x + h) - F(x) = \frac{1}{f(x + h)} - \frac{1}{f(x)} = -\frac{f(x + h) - f(x)}{f(x)f(x + h)}.$$

Разделив найденное приращение на h, получаем

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = -\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x)f(x + h)}.$$

Осталось найти предел полученного выражения при $h \to 0$:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{f(x)f(x + h)} =$$

$$= -f'(x) \cdot \frac{1}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Этим доказано, что $F' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.

Теорема 2. В *точках, где функции f и g дифференцируемы и g отлична от нуля, функция $\frac{f}{g}$ тоже дифференцируема, причем имеет место равенство*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}. \tag{2}$$

Доказательство. Дифференцируемость функции $\frac{f}{g}$ вытекает из того, что она является произведением дифференцируемых функций f и $\frac{1}{g}$ (см. теоремы 1 и 2 п. 2). Формула (2) доказывается так:

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Пример 1. Найдем производную функции $\frac{x^2 + 4}{x^3 + 9}$.

Решение. Здесь $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = x^3 + 9$, $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 3x^2$ и потому

$$\left(\frac{x^2 + 4}{x^3 + 9}\right)' = \frac{(x^3 + 9)(x^2 + 4)' - (x^2 + 4)(x^3 + 9)'}{(x^3 + 9)^2} =$$

$$= \frac{(x^3 + 9) \cdot 2x - (x^2 + 4) \cdot 3x^2}{(x^3 + 9)^2} = \frac{-x^4 - 12x^2 + 18x}{(x^3 + 9)^2}.$$

Упражнения

431. Продифференцируйте функции:

1) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 4}$; 2) $\frac{x^4 - x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$; 3) $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 4}$.

432. Проведите касательную к кривой $y = \frac{3x - 4}{\sqrt[3]{x} + 4}$ в точке с абсциссой 1.

4. Вторая производная. Пусть функция f имеет производную f' во всех точках промежутка X. Эта производная в свою очередь является функцией от x. Если функция f' дифференцируема, то ее производную называют *второй производной* от f и обозначают f''.

Таким образом, $f'' = (f')'$. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$, а потому $f''(x) = (3x^2)' = 6x$.

Вторая производная выражает скорость изменения первой производной, или, как говорят, *ускорение* изменения данной функции. Если $x = f(t)$ — координата прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то $x'' = f''(t)$ равно ускорению этой точки в этот же момент времени:

$$a = v' = (x')' = x''.$$

По второму закону Ньютона сила, действующая на движущуюся точку постоянной массы m, равна произведению массы этой точки на ускорение: $F = ma$. Так как $a = x''$, то этот закон записывается следующим образом: $F = mx''$.

По аналогии со второй производной определяют производные высшего порядка: *производной n-го порядка функции f* называют производную от производной $(n-1)$-го порядка. Производные n-го порядка обозначают $y^{(n)}$, $f^{(n)}$. Таким образом, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

С помощью метода математической индукции доказывается, что производная n-го порядка от функции x^m имеет вид

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)x^{m-n}, \quad m \geqslant n. \qquad (2)$$

Если m — натуральное число, то при $n > m$ имеем $(x^m)^{(n)} = 0$, а при $n = m$ получаем формулу $(x^m)^{(m)} = m!$.

Пример. Найдем производную 20-го порядка от функции

$$(x^2+6)^7(x^3-4)^2.$$

Решение. Если раскрыть скобки, то получится многочлен 20-й степени, старший член которого равен x^{20}. При вычислении производной 20-го порядка все одночлены, степень которых меньше чем 20, обратятся в нуль, а производная 20-го порядка от x^{20} равна $20!$. Значит, $((x^2+6)^7(x^3-4)^2)^{(20)} = 20!$.

Упражнения

433. Вычислите производные:

1) $(x^3 + 4x^2 - 7)''$;
2) $(x^5 - 3x^3 + x + 8)''$;
3) $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)''$;
4) $\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)''$;
5) $\left(\frac{x^3}{x-1}\right)''$;
6) $\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+4}\right)''$;
7) $(7x^5 - 6x^2 + 4)^{(3)}$;
8) $(2x^6 - 6x^4 + 1)^{(4)}$;
9) $((x^2-1)^6(x^3+5)^{10})^{(50)}$;
10) $((x^2-1)^6(x^3+5)^{10})^{(42)}$.

434. Выведите формулу для $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}$.

435*. Найдите $\left(\frac{1}{x^2+7x+12}\right)^{(48)}$.

§ 3. Приложения производной

1. Производная и экстремумы. С помощью производных можно исследовать, где функции возрастают, где они убывают, где достигают наибольших или наименьших значений и т. д. Докажем сначала теорему о знаке приращения функции, полезную при таких исследованиях.

Теорема 1. *Если в точке a производная функции f положительна, $f'(a) > 0$, то вблизи этой точки знаки приращения аргумента и приращения функции $f(x) - f(a)$ совпадают. Если же $f'(a) < 0$, то вблизи точки a знаки приращения аргумента и приращения функции противоположны.*

Доказательство. По условию функция f имеет производную в точке a, и потому ее приращение при переходе от аргумента a к аргументу $a + h$ записывается в виде

$$f(a+h) - f(a) = (f'(a) + \alpha)h,$$

где функция α бесконечно мала при $h \to 0$. Если $f'(a) > 0$, то по утверждению в) п. 3 § 2 главы 4 при малых значениях $|h|$ сумма $f'(a) + \alpha$ положительна вблизи точки a, а потому $f(a+h) - f(a)$ и h отличаются лишь положительным множителем. Значит, они имеют одинаковые знаки. Этим доказано, что вблизи точки a (т. е. при малых $|h|$) знаки приращения аргумента и функции одинаковы.

Если $f'(a) < 0$, то при малых значениях $|h|$ сумма $f'(a) + \alpha$ отрицательна, а потому знаки $f(a+h) - f(a)$ и h противоположны (от умножения числа на отрицательное число его знак меняется).

Покажем теперь применение производной к исследованию функций на максимум и минимум. Уточним сначала соответствующие понятия.

Определение. Функция f имеет в точке a *максимум* (соответственно *минимум*), если ее значение в точке a не меньше (соответственно не больше) значений вблизи[1] этой точки[2].

---

[1] Это значит, что существует проколотая окрестность точки a, в которой выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(a)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(a)$).

[2] Такие максимумы и минимумы называют нестрогими. При замене «не меньше» (соответственно «не больше») на «больше» (соответственно «меньше») получаем определения строгих максимума и минимума.

Точки максимума и минимума называются точками *экстремума* функции (от латинского слова extremum — крайний). Из данного определения видно, что свойство функции иметь экстремум в точке a зависит от значений этой функции в самой этой точке и вблизи нее. Такие свойства функции называют *локальными* (от латинского слова locus — место) в отличие от глобальных свойств, определяемых значениями функции на целом промежутке (например, свойства возрастать на отрезке $[a; b]$). Вдали от точки максимума функция может принимать значения, превосходящие ее значения в этой точке (рис. 95).

Превратить точку a в точку экстремума функции f можно путем изменения значения функции лишь в этой точке. Например, функция, равная нулю всюду, кроме точки a, в которой ее значение равно 1, имеет максимум в этой точке. Чтобы избежать рассмотрения таких «искусственных» экстремумов, будем предполагать, что в точке экстремума функция f непрерывна.

На рисунке 96 изображен график функции f, которая имеет максимум в точке a и минимум в точке b. Видим, что в точке a касательная к графику функции горизонтальна, а потому производная функции f обращается в этой точке в нуль: $f'(a) = 0$. В точке же b график функции f заострен, и потому функция f не имеет в этой точке производной (она недифференцируема в точке b). Иных точек экстремума не бывает. Иными словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *В точке экстремума a производная функции f либо равна нулю, либо не существует.*

Доказательство. Возможны четыре случая:

а) $f'(a) > 0$; в) $f'(a) = 0$;

б) $f'(a) < 0$; г) $f'(a)$ не существует.

Покажем, что в точках экстремума не может иметь места ни первый, ни второй случай. Если, например, $f'(a) > 0$, то по теореме о знаке приращения вблизи точки a знаки $f(a + h) - f(a)$ и h совпадают, а потому слева от a (т. е. при $h < 0$) имеем $f(a + h) - f(a) < 0$, а справа от a (т. е. при $h > 0$) имеем $f(a + h) - f(a) > 0$.

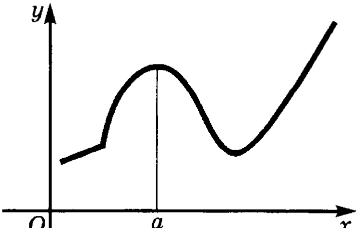


Рис. 95

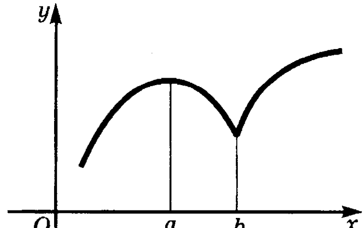


Рис. 96

Но тогда слева от a выполняется неравенство $f(a + h) < f(a)$, а справа от a — неравенство $f(a + h) > f(a)$. Эти неравенства показывают, что значение функции f в точке a не является ни наименьшим, ни наибольшим по сравнению со значениями этой функции вблизи от a. Значит, a не является точкой экстремума.

Точно так же доказывается, что не может быть точкой экстремума и точка, в которой $f'(a) < 0$. Поэтому точками экстремума могут быть либо точки, в которых $f'(a) = 0$, либо точки, в которых $f'(a)$ не существует.

Найденное условие является лишь необходимым для того, чтобы a была точкой экстремума для f, — оно позволяет отобрать точки, «подозрительные» на экстремум, но не дает оснований утверждать, что в этих точках функция действительно имеет экстремум, — нужна еще дополнительная проверка. Например, производная функции $(x - 1)^3$ равна $3(x - 1)^2$. Она обращается в нуль при $x = 1$. Однако точка 1 не является точкой экстремума для $(x - 1)^3$, так как функция $(x - 1)^3$ при $x = 1$ равна нулю, слева от точки $x = 1$ отрицательна, а справа от этой точки положительна (рис. 97).

П р и м е р 1. Найдем точки, в которых функция $x^3 - 3x + 1$ может иметь экстремумы.

Р е ш е́ н и е. Производная данной функции f имеет вид

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3.$$

Так как она существует при всех значениях аргумента, то точками экстремума могут быть лишь корни -1 и 1 многочлена $3x^2 - 3$. Можно доказать, что в точке -1 функция имеет максимум, а в точке 1 — минимум (рис. 98).

П р и м е р 2. Найдем точки, в которых может иметь экстремум функция $\sqrt[3]{x^2}$.

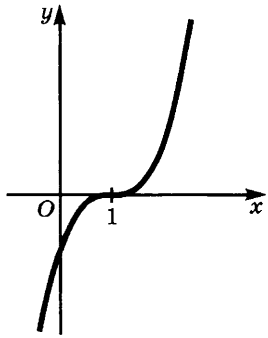


Рис. 97

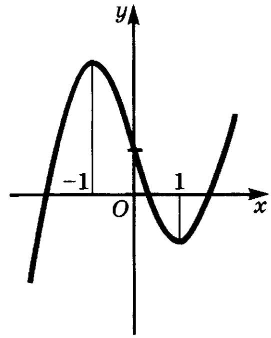


Рис. 98

Решение. При $x \neq 0$ имеем $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ (см. пример 3 в п. 2 § 2). Отсюда следует, что производная функции $\sqrt[3]{x^2}$ существует и отлична от нуля при $x \neq 0$. В точке же $x = 0$ данная функция не имеет производной. В этом можно убедиться непосредственно, вычислив производную по определению:

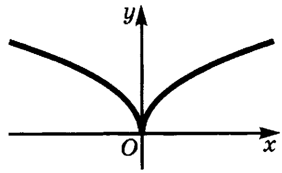


Рис. 99

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \infty.$$

Значит, $\sqrt[3]{x^2}$ может иметь экстремум лишь при $x = 0$ (рис. 99).

Упражнения

436. В каких точках функция может иметь экстремум:

1) $x^3 - 6x^2 + 9x + 5$;
2) $x^4 - 2x^2 + 3$;
3) $(x - 1)^2(x - 6)^3$;
4) $\dfrac{x}{1 + x^2}$;
5) $\dfrac{x - 1}{x^2 + 3}$;
6) $\sqrt[3]{x^2}(x - 5)$;
7) $\dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$;
8) $\sqrt[3]{(x - 1)^2} + \sqrt[3]{(x + 1)^2}$?

2. Отыскание наибольших и наименьших значений функции на отрезке. Решение многих задач практики приводит к отысканию наибольших или наименьших значений некоторой функции на некотором отрезке. Пусть, например, надо огородить проволокой данной длины $2p$ прямоугольный участок земли наибольшей площади. Если обозначить длину одной из сторон этого участка через x, то длина другой стороны будет равна $p - x$, а потому площадь участка равна $x(p - x)$. При этом x изменяется от 0 до p (при $x = 0$ и при $x = p$ получаем «вырожденные» прямоугольники, одна из сторон которых имеет нулевую длину). Итак, надо найти значение x, при котором функция $S(x) = x(p - x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[0; p]$. Эту задачу можно решить элементарно, записав выражение функции в виде $S(x) = \dfrac{p^2}{4} - \left(\dfrac{p}{2} - x\right)^2$.

Видим, что значение будет наибольшим, если $x = \dfrac{p}{2}$. Выражение в этом случае равно $\frac{p^2}{4}$. При $x = \frac{p}{2}$ длина второй стороны тоже равна $\frac{p}{2}$. Таким образом, наибольшую площадь среди прямоугольников данного периметра имеет квадрат.

Элементарные методы отыскания наибольших и наименьших значений функций применимы лишь для весьма узкого круга задач. Общий метод отыскания таких значений дает дифференциальное исчисление. Начнем с формулировки теоремы, гарантирующей существование таких значений.

Теорема. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то среди ее значений на этом отрезке есть наибольшее и наименьшее.*

Доказательство теоремы представим в виде серии задач.

а) Пусть ни $f(a)$, ни $f(b)$ не является наибольшим значением данной функции. Обозначим через X множество точек x отрезка $[a; b]$, справа от которых есть точки, где значение функции больше всех ее значений на отрезке $[a; x]$. Через Y обозначим множество остальных точек отрезка $[a; b]$. Докажите, что множества X и Y не пусты, причем Y лежит справа от X.

б) Докажите, что в точке c, разделяющей множества X и Y, функция f принимает наибольшее значение на $[a; b]$.

в) Проведите аналогичным образом доказательство существования наименьшего значения функции на отрезке $[a; b]$.

Из этой теоремы и следствия 1 в п. 6 § 2 главы 4 вытекает, что множество значений, принимаемых непрерывной функцией f на отрезке $[a; b]$, является отрезком $[m; M]$, где m — наименьшее, а M — наибольшее из значений функции f на $[a; b]$ (рис. 100).

Сформулированная теорема дает лишь уверенность в существовании наибольших и наименьших значений непрерывной функции, но не указывает, как находить эти значения. Для наибольшего значения функции возможны два случая:

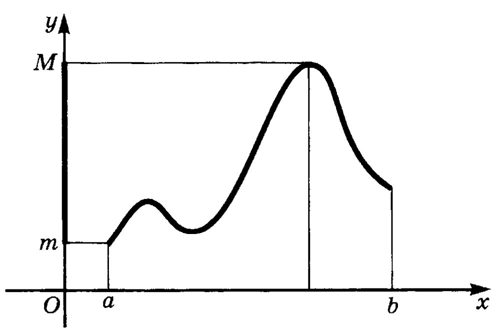


Рис. 100

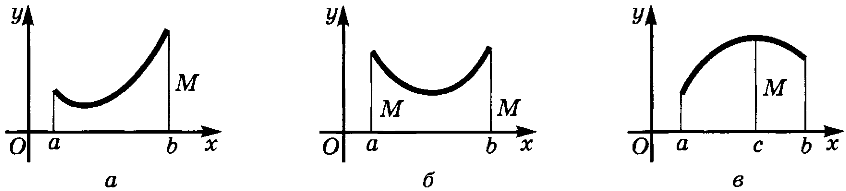


Рис. 101

а) оно достигается на одном из концов отрезка $[a; b]$ (рис. 101, *а*) или на обоих концах сразу (рис. 101, *б*);

б) оно достигается в некоторой внутренней точке c этого отрезка (рис. 101, *в*).

Во втором случае значение функции в точке c не меньше ее значений вблизи точки c, и поэтому c — точка максимума (быть может, нестрогого) для f. Но тогда в c либо функция f недифференцируема, либо ее производная равна нулю. Аналогично обстоит дело с наименьшим значением функции на отрезке $[a; b]$.

Отсюда вытекает следующее правило отыскания наименьших и наибольших значений функции на отрезке.

Чтобы найти наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции f на отрезке $[a; b]$, надо:

а) *найти ее значения на концах этого отрезка* (т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$);

б) *найти ее значения в точках, где производная функции равна нулю*;

в) *найти ее значения в точках, где функция f не имеет производной*;

г) *из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.*

Пример 1. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Данная функция непрерывна на $[-2; 2]$. Ее производная равна $\frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$ (теорема 2 п. 3 § 2). Приравнивая производную к нулю, получаем уравнение $2x^2 - 2 = 0$, имеющее корни -1 и 1. Так как знаменатель $(x^2 + x + 1)^2$ нигде не обращается в нуль, то производная определена при всех значениях x. Теперь нужно найти значение функции на концах отрезка и в точках, где производная равна нулю, т. е. в точках -1, 1, и выбрать из полученных значений наименьшее и наибольшее:

$$f(-2) = \frac{7}{3},\ f(-1) = 3,\ f(1) = \frac{1}{3},\ f(2) = \frac{3}{7}.$$

Значит, наименьшее значение функции на данном отрезке равно $\frac{1}{3}$, а наибольшее — числу 3.

Решим с помощью дифференциального исчисления разобранную выше задачу об ограждении прямоугольного участка земли.

Пример 2. Какова наибольшая площадь прямоугольного участка земли, который можно огородить куском проволоки, имеющим длину $2p$?

Мы уже видели (см. с. 195), что для решения задачи надо найти наибольшее значение функции $S(x) = x(p - x)$ на отрезке $[0; p]$. Производная этой функции имеет вид

$$S'(x) = (x(p - x))' = (xp - x^2)' = p - 2x.$$

Она обращается в нуль при $x = \frac{p}{2}$. Итак, надо найти наибольшее из значений функции $S(x) = x(p - x)$ в точках 0, $\frac{p}{2}$ и p. Но при $x = 0$ и $x = p$ функция обращается в нуль, а при $x = \frac{p}{2}$ имеем

$$S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2}\left(p - \frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}.$$

Это и будет наибольшим значением площади прямоугольника.

Пример 3. В сопротивлении материалов доказывают, что сопротивление изгибу балки прямоугольного сечения пропорционально ее ширине x и квадрату ее высоты y: $P = kxy^2$ (рис. 102). Какое сечение должна иметь балка наибольшего сопротивления изгибу, вырезанная из цилиндрического бревна радиусом R?

Решение. Из рисунка 102 видим, что x и y связаны соотношением $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Поэтому $P = kxy^2 = kx(4R^2 - x^2)$. Значит, надо найти наибольшее значение функции $kx(4R^2 - x^2)$ на отрезке $[0; 2R]$. Производная этой функции имеет вид

$$(kx(4R^2 - x^2))' = (4kR^2x - kx^3)' = 4kR^2 - 3kx^2.$$

Приравнивая ее к нулю, получаем уравнение $k(4R^2 - 3x^2) = 0$, корнями которого являются числа $-\frac{2R}{\sqrt{3}}$ и $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. На отрезке $[0; 2R]$ лежит лишь корень $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Значит,

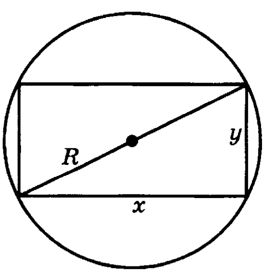


Рис. 102

надо сравнить значения функции $kx(4R^2 - x^2)$ при $x = 0,\ \frac{2R}{\sqrt{3}},\ 2R.$

В точках 0 и $2R$ эта функция обращается в нуль. Наибольшее значение она имеет при $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. При этом значении имеем

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}$, то на практике принимают, что должно выполняться условие $\frac{y}{x} = \frac{7}{5}$.

Отыскание наибольших и наименьших значений функций применяется при решении многих задач физики. Например, в положении равновесия потенциальная энергия системы достигает экстремального значения, причем в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия минимальна.

Рассмотрим еще пример.

Пример 4. Найдем на AB такую точку C, что сумма длин отрезков MC и NC (рис. 103) минимальна.

Решение. Примем точку A за начало координат на прямой и обозначим координату точки C через x. Из рисунка 103 найдем, что $MC = \sqrt{a^2 + x^2}$ и $NC = \sqrt{b^2 + (l - x)^2}$, а потому

$$f(x) = MC + NC = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l - x)^2}.$$

Чтобы найти наименьшее значение функции, вычислим ее производную и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} = 0. \qquad (1)$$

Мы не будем решать полученного уравнения, а заметим лишь, что

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha,$$

$$\frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} = \sin\beta.$$

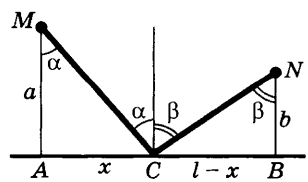


Рис. 103

Поэтому равенство (1) означает, что $\sin\alpha = \sin\beta$, откуда[1] $\alpha = \beta$. Итак, сумма длин отрезков MC и NC будет экстремальной, если угол падения равен углу

[1] Острые углы равны, если равны их синусы.

отражения. Из курса физики известно, что это равенство выполняется при отражении луча света. Значит, луч света «выбирает» при отражении путь экстремальной длины. Заметим, что полученное экстремальное значение является минимальным, так как при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ функция f стремится к $+\infty$, а иных точек экстремума у нее нет.

Подводя итог всему сказанному в этом пункте, замечаем, что задачи на наибольшие и наименьшие значения решаются по следующему плану.

1. *Выбирают одну из переменных* (*независимую переменную*) *и выражают через нее ту переменную, для которой ищется наибольшее или наименьшее значение.*

2. *Находят промежуток изменения независимой переменной.*

3. *Находят производную полученной в п. 1 функции.*

4. *Приравнивают производную нулю и находят корни получившегося уравнения.*

5. *Находят точки, в которых функция не имеет производной.*

6. *Вычисляют значения функции на концах промежутка изменения независимой переменной и в точках, найденных в п. 4 и 5, а потом выбирают из них наибольшее* (соответственно *наименьшее*).

При этом для облегчения вычислений полезно иметь в виду следующие замечания.

1. *Точка, в которой функция принимает наибольшее или наименьшее значение, не изменяется при следующих преобразованиях выражения, задающего функцию*:

а) *прибавлении постоянного слагаемого*;

б) *умножении на отличное от нуля число* (только при умножении на отрицательное число наибольшее значение переходит в наименьшее и обратно);

в) *возведении в степень с натуральным показателем, если функция неотрицательна.*

Например, функция $\frac{1}{3}x\sqrt{49 - x^2} + 8$ имеет на отрезке $[0;\ 7]$ наибольшее значение в той же точке, что и функция $x^2(49 - x^2)$ (отброшено постоянное слагаемое 8, функция умножена на положительное число 3, после чего возведена в квадрат).

2. *Если положительная функция f принимает в точке a наибольшее* (соответственно *наименьшее*) *значение, то функции $-f$ и $\frac{1}{f}$ принимают в той же точке наименьшее* (соответственно *наибольшее*) *значение.*

Например, функция $(x-2)^2+5$ принимает наименьшее значение при $x=2$, а потому функция $\frac{1}{(x-2)^2+5}$ имеет при $x=2$ наибольшее значение.

Пример 5. Найдем прямоугольник наибольшей площади, вписанный в окружность радиуса R.

Решение. Обозначим длины сторон прямоугольника через x и y. Тогда $y=\sqrt{4R^2-x^2}$ (см. рис. 102), и потому площадь S выражается через x так: $S=x\sqrt{4R^2-x^2}$. Поскольку значения этой функции неотрицательны, она принимает наибольшее значение в той же точке, что и функция $S^2=x^2(4R^2-x^2)$.

Производная функции $4R^2x^2-x^4$ равна $8R^2x-4x^3$. Приравнивая ее нулю, получаем уравнение $4x(2R^2-x^2)=0$, корнями которого являются числа 0, $R\sqrt{2}$ и $-R\sqrt{2}$. Из них отрезку $[0;\ 2R]$ принадлежат 0 и $R\sqrt{2}$. Итак, надо сравнить значения функции $x^2(4R^2-x^2)$ в точках 0, $R\sqrt{2}$ и $2R$. При $x=0$ и $x=2R$ функция обращается в нуль. Значит, она принимает наибольшее значение при $x=R\sqrt{2}$. В этом случае $y=\sqrt{4R^2-\left(R\sqrt{2}\right)^2}=R\sqrt{2}$, а потому $y=x$.

Итак, *прямоугольником наибольшей площади, вписанным в окружность радиуса R, является квадрат.*

Упражнения

437. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $x=2\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 4]$;
2) $x^5-5x^4+5x^3+1$ на отрезке $[-2;\ 2]$;
3) x^3-3x^2+6x-2 на отрезке $[-1;\ 1]$;
4) $\sqrt{100-x^2}$ на отрезке $[-6;\ 8]$;
5) $\frac{x-1}{x+1}$ на отрезке $[0;\ 4]$.

438. Для функций из упражнений к п. 2 § 1 главы 3 найдите наибольшие и наименьшие значения.

439. В круг радиуса R впишите равнобедренный треугольник наибольшей площади.

440. Требуется огородить участок земли, примыкающий одной стороной к морю, с помощью a метров проволоки. Какую форму должен иметь участок, чтобы площадь его была наибольшей?

441. При каких размерах открытая прямоугольная коробка с квадратным основанием и полной поверхностью S имеет наибольший объем?

442. Из проволоки длиной 24 см надо сделать модель прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. При каких размерах сторон объем параллелепипеда будет наибольшим?

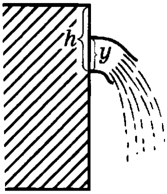


Рис. 104

443. Найдите прямоугольник наибольшей площади, если длина его диагонали l.

444. Заданы периметр $2p$ треугольника и длина a одной из его сторон. Какие длины должны иметь две другие стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

445. Опишите вокруг полушара радиуса R конус наименьшего объема.

446. Впишите в конус с высотой H и радиусом основания R цилиндр наибольшего объема.

447. Секундный расход воды, вытекающей через отверстие в толстой стене (рис. 104), определяется по формуле

$$Q = cy\sqrt{h - \frac{y}{2}},$$

где y — диаметр отверстия, h — глубина его нижней точки, c — некоторая постоянная. При каком y получается наибольшее значение для Q?

448. Стоимость плавания корабля в течение часа определяется формулой $a + bv^3$, где a и b — постоянные, а v — скорость корабля (первое слагаемое связано с расходами на амортизацию и содержание команды, а второе — с расходом топлива). При какой скорости судно пройдет расстояние l с наименьшими затратами?

449. Найдите наибольший прогиб балки для случаев, описанных в задачах 174, 184, 186.

450. Если левый конец балки оперт, а правый заделан, уравнение прогиба балки таково:

$$y = \frac{Q}{48EJl}(2x^4 - 3lx^3 + l^3x).$$

Найдите наибольший прогиб этой балки.

451. Если батарея с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r замкнута проводником с сопротивлением R, то мощность тока W выражается формулой

$$W = \frac{E^2R}{(R + r)^2}.$$

При каком значении R мощность будет наибольшей?

452. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого направлена перпендикулярно плоскости круга и проходит через его центр, выражается формулой

$$F = \frac{cx}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

где a — радиус круга, x — расстояние от центра круга до магнита и c — постоянная. При каком значении x эта сила будет наибольшей?

453. Потенциал в точке M электрического поля, образованного зарядом e, равен $\frac{e}{r}$, где r — расстояние от точки M до заряда. В точках O_1 и O_2, удаленных друг от друга на a, помещены заряды e_1 и e_2 одинакового знака. В какой точке отрезка O_1O_2 потенциал суммарного электрического поля будет наименьшим?

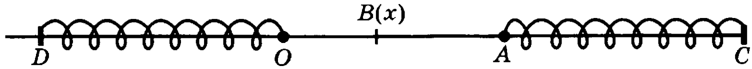


Рис. 105

454. Освещенность в данной точке пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до этого источника. В точках O_1 и O_2, удаленных друг от друга на расстояние a, помещены источники, имеющие соответственно силу света I_1 и I_2. Найдите наименее освещенную точку отрезка O_1O_2.

455. Потенциальная энергия растянутой пружины выражается формулой $U = \frac{kx^2}{2}$, где k — постоянная, называемая жесткостью пружины, и x — удлинение пружины. Две пружины расположены на прямой линии так, как показано на рисунке 105, где расстояние OA равно a. Пружины растянули и соединили в точке B. При каком положении этой точки суммарная потенциальная энергия пружин будет наименьшей, если жесткости этих пружин равны k_1 и k_2?

3. Теорема Лагранжа и ее следствия. До сих пор мы исследовали свойства функции вблизи некоторой точки (например, точки максимума или минимума). Перейдем к изучению свойств функции на целом промежутке, в частности вопроса о возрастании и убывании функции на промежутке. Для этого нам понадобится теорема, устанавливающая связь между приращением функции на отрезке и ее производной.

Теорема 1 (Лагранжа). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого отрезка. Тогда существует внутренняя точка c этого отрезка такая, что касательная к графику функции, проведенная в точке C с абсциссой c, параллельна хорде AB, где $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$* (рис. 106).

Кратко: *на гладкой дуге AB всегда есть точка C, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы дуги.*

Докажите самостоятельно эту теорему. Для этого докажите, что: а) функция $F(x) = (f(x) - kx - d)^2$, где $y = kx + d$ — уравнение хорды AB, либо тождественно равна нулю на отрезке $[a; b]$, либо имеет на этом отрезке положительный максимум; б) в точке c максимума функции F выполняется равенство $f'(c) = k$.

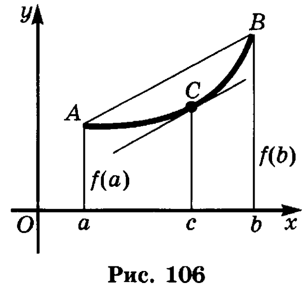


Рис. 106

Заметим теперь, что угловой коэффициент хорды AB, где $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$, равен $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, а угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой c

равен $f'(c)$. У параллельных прямых угловые коэффициенты равны. Учитывая это, получаем аналитическую формулировку теоремы Лагранжа.

Теорема 1′ (Лагранжа). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого отрезка. Тогда существует внутренняя точка c этого отрезка такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \qquad (1)$$

Равенство (1) записывают также в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1')$$

Отметим некоторые следствия теоремы Лагранжа.

Следствие 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а ее производная равна нулю внутри этого отрезка, то функция f постоянна на $[a; b]$.*

Доказательство. Для любого $x \in (a; b]$ имеем:

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a).$$

По условию $f'(c) = 0$ и потому $f(x) - f(a) = 0$, т. е. $f(x) = f(a)$. Это и значит, что функция f постоянна на $[a; b]$.

Следствие 2. *Если функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и имеют одинаковые производные внутри этого отрезка, то они отличаются лишь постоянным слагаемым.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $f = \varphi - \psi$. Она непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема внутри него как разность двух функций, обладающих этими свойствами. При этом $f'(x) = 0$ внутри $[a; b]$, так как $f' = \varphi' - \psi'$ и $\varphi'(x) = \psi'(x)$ внутри $[a; b]$. По следствию 1 получаем, что функция f постоянна на $[a; b]$. Таким образом, $\varphi - \psi = c$ и $\varphi = \psi + c$.

Замечание. Следствие 1 имеет простое физическое истолкование. Оно означает, что если скорость точки равна нулю в течение промежутка времени $[a; b]$, то координата этой точки не изменяется в течение этого промежутка времени.

Упражнения

456. Найдите значение c для следующих функций и отрезков:
1) $x^3 - 3x + 4$, $[1; 3]$;
2) $x^4 - 6x + 1$, $[-1; 2]$;
3) $(x + 1)(x^2 + 4)$, $[-3; 3]$;
4) $(x^2 + 1)(x^2 + 4)$, $[-5; 5]$.

457. Можно ли применить теорему Лагранжа к функции $\frac{1}{x}$ на отрезке $[-2; 1]$?

458. Докажите, что для функции $x^2 + px + q$ и любого отрезка $[a; b]$ выполняется равенство $c = \frac{a + b}{2}$.

4. Исследование функций на возрастание и убывание. Достаточное условие экстремума. Наглядное представление о связи между монотонностью функции на отрезке и знаком ее производной на этом отрезке дает разбор следующего примера.

Пусть точка движется по оси и ее координата в момент времени t равна $f(t)$, $x = f(t)$. Если в течение некоторого промежутка времени $[a; b]$ скорость точки положительна (соответственно отрицательна), то точка все время движется вправо (соответственно влево), и потому ее координата x возрастает (соответственно убывает). Поскольку скорость является производной от координаты по времени, т. е. равна $f'(t)$, то приходим к выводу, что при положительности производной на отрезке $[a; b]$ функция f возрастает, а при отрицательности производной функция убывает.

К тому же выводу приходим из геометрических соображений. Рисунок 107 показывает, что если производная функции f положительна на отрезке $[a; b]$ (т. е. если во всех точках этого отрезка касательная образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс), то функция f возрастает на $[a; b]$. В случае же, когда производная отрицательна, касательная образует во всех точках тупой угол с положительным направлением оси абсцисс и функция убывает (рис. 108). Однако ни физические, ни геометрические рассуждения не дают строгого математического доказательства сформулированных утверждений. Такое доказательство основано на теореме Лагранжа.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на промежутке I и ее производная положительна* (соответственно *отрицательна*) *во внутренних точках этого промежутка, то функция f возрастает* (соответственно *убывает*) *на I.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — точки промежутка I, причем $x_1 < x_2$, и пусть $f'(x) > 0$ внутри I. По теореме Лагранжа имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, так как $x_2 - x_1 > 0$, а $f'(c) > 0$, поскольку $c \in (x_1; x_2)$ и потому c внутри I.

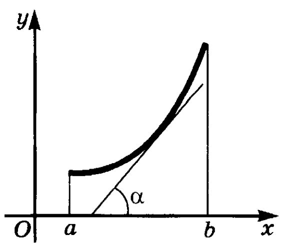


Рис. 107

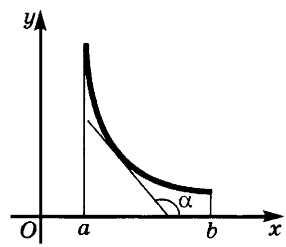


Рис. 108

Итак, если производная положительна, то из $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. функция f возрастает на I.

Случай, когда $f'(x) < 0$ внутри I, рассматривается аналогично.

Иногда оказывается полезным следующее усиление теоремы 1.

Теорема 1'. *Если функция f непрерывна на промежутке I, а ее производная неотрицательна* (соответственно *неположительна*) *внутри I и равна нулю лишь в конечном множестве точек, то функция f возрастает* (соответственно *убывает*) *на I.*

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, показываем, что при $f'(x) > 0$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Но в случае $f(x_1) = f(x_2)$ из $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ следовало бы, что $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$, т. е. функция f была бы постоянна на всем отрезке $[x_1; x_2]$. Тогда и ее производная равнялась бы нулю на этом отрезке, что противоречит условию. Значит, $f(x_1) < f(x_2)$ и функция f возрастает на I.

Пример 1. Найдем промежутки возрастания и убывания функции $x^3 - 12x + 20$.

Решение. Производная данной функции равна $3x^2 - 12$. Чтобы найти промежутки возрастания функции, надо найти, где ее производная положительна, т. е. решить неравенство $3x^2 - 12 > 0$. Имеем $3(x - 2)(x + 2) > 0$. С помощью метода интервалов находим множество решений неравенства $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Отсюда делаем вывод: функция f возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$ и убывает на отрезке $[-2; 2]$. Это значит, что в точке $x = -2$ функция f имеет максимум, а в точке $x = 2$ — минимум. При этом $f(-2) = 36$, $f(2) = 4$.

Из теоремы 1 вытекают следующие достаточные условия экстремума.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна в точке a, причем вблизи этой точки слева от a производная функции f положительна, а справа от a она отрицательна, то a — точка максимума функции f.*

Доказательство. Из условия следует, что существует такой отрезок $[a - h; a + h]$, что на $[a - h; a)$ производная положительна, а на $(a; a + h]$ она отрицательна. Тогда функция f возрастает на $[a - h; a]$ и убывает на $[a; a + h]$ (рис. 109). Значит, в самой точке a она принимает значения большие, чем ее значения слева или справа от a (вблизи a). Иными словами, a — точка максимума функции.

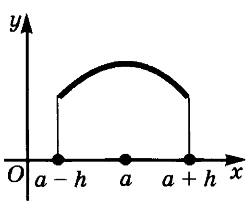


Рис. 109

Аналогично доказывается теорема 3.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна в точке a, причем вблизи этой точки слева от a производная функции f отрицательна, а справа от a она положительна, то a — точка минимума функции f.*

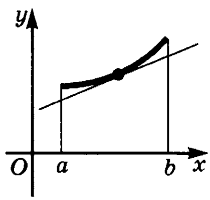
Упражнения

459. Исследуйте функции на возрастание (убывание) и экстремум:

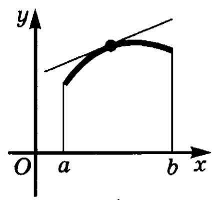
1) $x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;
2) $x^2(x - 12)^2$;
3) $\dfrac{x^3}{x^2 + 3}$;
4) $\dfrac{16}{x(4 - x^2)}$;
5) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$;
6) $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$;
7) $(x - 1)^4(x + 2)^3$;
8) $x^3\sqrt[3]{(x - 1)^2}$;
9) $\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}$;
10) $\sqrt[3]{(x - 1)^2(x + 1)}$.

460. Исследуйте на возрастание (убывание) и экстремум функции из упражнений к п. 1.

5. Исследование графиков на выпуклость. На рисунке 110, *а* изображен график функции f, заданной на отрезке $[a; b]$. Этот график расположен выше любой проведенной к нему касательной и имеет с ней лишь одну общую точку. А график на рисунке 110, *б* лежит ниже любой проведенной к нему касательной. В первом случае говорят, что график функции обращен на отрезке $[a; b]$ *выпуклостью вниз*, а во втором — что он обращен *выпуклостью вверх*.



а



б

Рис. 110

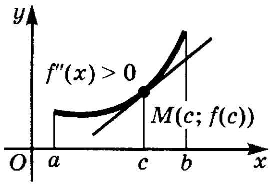
Теорема 1. *Пусть на отрезке* $[a; b]$ *функция* f *непрерывна и внутри этого отрезка* $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$). *Тогда график функции* f *обращен на этом отрезке выпуклостью вниз* (соответственно *вверх*).

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f''(x) > 0$ на $(a; b)$. Выберем любую точку $c \in (a; b)$ и проведем касательную к графику в точке $M(c; f(c))$. Ее уравнение имеет вид

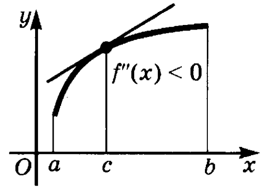
$$y_{\text{кас}} = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Докажем, что при любом x из $[a; b]$, отличном от c, выполняется неравенство $y_{\text{кр}} > y_{\text{кас}}$, т. е.

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) > 0.$$



а



б

Рис. 111

Пусть $x > c$ (случай $x < c$ рассматривается аналогично). Применим к отрезку $[c; x]$ теорему Лагранжа (рис. 111, *а*). Получаем, что $f(x) - f(c) = f'(c_1)(x - c)$, где $c < c_1 < x$ и потому

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} = f'(c_1)(x - c) - f'(c)(x - c) = (f'(c_1) - f'(c))(x - c).$$

Вторично применяем теорему Лагранжа к функции f' и отрезку $[c; c_1]$. Получаем

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} = f''(c_2)(c_1 - c)(x - c),$$

где $c < c_2 < c_1$. Но по условию имеем $f''(c_2) > 0$, а точки c_1 и x лежат по одну сторону от точки c и потому $(c_1 - c)(x - c) > 0$. Значит, $y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} > 0$.

Случай, когда $f''(x) < 0$ внутри отрезка $[a; b]$ (рис. 111, *б*), рассматривается аналогично.

Если точка движется по прямой в течение отрезка времени $[a; b]$, причем ее ускорение положительно (соответственно отрицательно), то график ее движения обращен выпуклостью вниз (соответственно вверх).

Сравним теперь взаимное расположение выпуклого вверх или вниз графика функции и хорды.

Теорема 2. *Если график функции f обращен на отрезке* $[a; b]$ *выпуклостью вниз* (соответственно *вверх*), *то внутри отрезка* $[a; b]$ *этот график расположен под* (соответственно *над*) *хордой AB, где* $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ (рис. 112, *а*, *б*).

Доказательство. Пусть график функции обращен выпуклостью вниз. Это значит, что он лежит над любой проведенной к нему касательной и имеет с ней лишь одну общую точку. Но тогда (рис. 113) точка A лежит над точкой A', точка B — над точкой B', и потому вся хорда AB лежит над касательной. В частности, точка касания C лежит ниже хорды. Поскольку это верно для всех точек C дуги AB, то вся дуга расположена под хордой AB. Случай, когда график обращен выпуклостью вверх, рассматривается аналогично.

Пример 1. Исследуем направление выпуклости графика функции x^4.

Решение. Так как $(x^4)'' = 12x^2$, а $12x^2 \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь при $x = 0$, то график функции x^4 во всех точках обращен выпуклостью вниз.

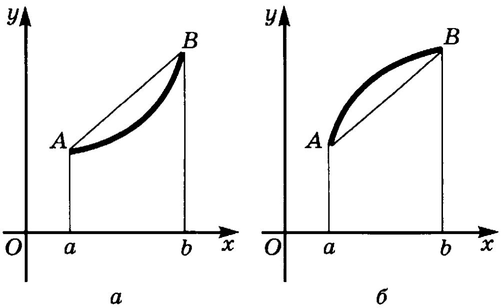


Рис. 112

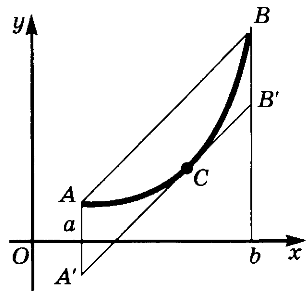


Рис. 113

Пример 2. Найдем участки, где график функции $x^4 - 6x^2 + 4$ обращен выпуклостью вверх.

Решение. Имеем $(x^4 - 6x^2 + 4)' = 4x^3 - 12x$, $(4x^3 - 12x)' = 12x^2 - 12$. Неравенство $12x^2 - 12 > 0$ выполняется на лучах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$. Значит, на лучах $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ график функции $x^4 - 6x^2 + 4$ обращен выпуклостью вниз, а на отрезке $[-1; 1]$ он обращен выпуклостью вверх.

Упражнения

461. Найдите для функций промежутки, на которых график обращен выпуклостью вверх:

1) $x^3 - 6x^2 + 12x + 4$;
2) $(x + 1)^4$;
3) $\dfrac{x^3}{x^2 + 12}$;
4) $\sqrt{4x^3 - 12x}$.

6. Точки перегиба. Обычно кривая расположена около точки касания по одну сторону от касательной. Но может случиться, что в точке касания кривая переходит с одной стороны касательной на другую (рис. 114). Такие точки называют точками перегиба данной кривой.

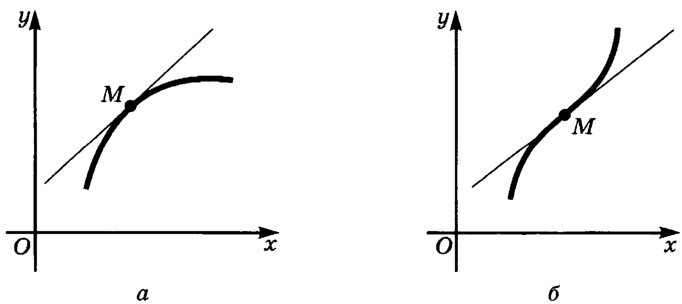


Рис. 114

Определение. Точка M кривой Г называется *точкой перегиба,* если в этой точке кривая переходит с одной стороны касательной (проведенной к кривой Г в точке M) на другую ее сторону.

Теорема 1. *Если в точке c вторая производная функции f непрерывна и отлична от нуля, то $M(c;\ f(c))$ не является точкой перегиба для графика функции f.*

Доказательство. Если $f''(c) > 0$, то в силу непрерывности функции f'' в точке c неравенство $f''(x) > 0$ выполняется в некоторой окрестности точки c, а тогда в силу теоремы 1 п. 5 в этой окрестности график функции f обращен выпуклостью вниз. Поэтому вблизи точки c этот график лежит выше касательной, проведенной в точке M, и не имеет перегиба в этой точке. Случай $f''(c) < 0$ рассматривается аналогично.

Из теоремы 1 вытекает необходимое условие для того, чтобы график функции имел перегиб в точке M.

Следствие. *Для того чтобы график функции f имел перегиб в точке $M(c;\ f(c))$, необходимо, чтобы либо вторая производная этой функции обращалась в нуль в точке c, либо чтобы c была для f'' точкой разрыва, либо, наконец, чтобы вторая производная от f не существовала в точке c.*

Замечание. Можно доказать, что точки, где f'' имеет разрыв, но существует и отлична от нуля, не могут быть абсциссами точек перегиба для графика функции f. Поэтому достаточно рассматривать значения c, при которых f'' равна нулю или не существует.

Пример 1. Найдем точки, где может иметь перегиб график функции $x^4 - 6x^2 + 4$.

Решение. Находим, что $(x^4 - 6x^2 + 4)'' = (4x^3 - 12x)' = -12x^2 - 12$. Корнями уравнения $12x^2 - 12 = 0$ являются числа -1 и 1. Ординаты графика при $x = -1$ и при $x = 1$ равны -1. Значит, точками перегиба могут быть $M(-1;\ -1)$ и $N(1;\ -1)$.

Так же как и в случае экстремума, найденное необходимое условие не является достаточным. Например, вторая производная функции x^4 равна $12x^2$ и обращается в нуль при $x = 0$, но график функции x^4 не имеет точек перегиба (рис. 115).

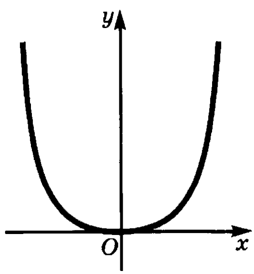


Рис. 115

Достаточное условие для точки перегиба формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть функция f имеет вторую производную в проколотой h-окрестности точки c и дифференцируема в этой точке. Если при переходе через точку c вторая производная функции f меняет* *знак, то $M(c;\ f(c))$ является точкой перегиба для графика функции f.*

Доказательство. Предположим, что слева от точки c имеем $f''(x) < 0$, а справа от c имеем $f''(x) > 0$. Тогда на отрезке $[c - h;\ c]$ график функции f обращен выпуклостью вверх и потому лежит ниже касательной, проведенной в точке M (см. теорему 1 п. 5). На отрезке же $[c;\ c + h]$ этот график обращен выпуклостью вниз и потому лежит выше той же касательной. Значит, в точке M кривая переходит с одной стороны касательной на другую, т. е. точка M является точкой перегиба.

Пример 2. Докажем, что точки M и N, найденные в примере 1, действительно являются точками перегиба для графика функции $x^4 - 6x^2 + 4$.

Решение. Вблизи точки -1 имеем $12x^2 - 12 > 0$ при $x < -1$, $12x^2 - 12 < 0$ при $x > -1$. Значит, вторая производная меняет знак при переходе через точку -1 и потому M является точкой перегиба графика. Точка N исследуется точно так же.

Отметим, что точки перегиба обычно отделяют друг от друга участки, где график функции обращен выпуклостью вверх, от участков, где он обращен выпуклостью вниз.

Упражнение

462. Найдите точки перегиба в упражнениях к п. 5.

7. Построение графиков функций. График функции f часто строят «по точкам». Однако при таком способе построения можно пропустить важные особенности графика функции. Пусть, например, дана функция $\frac{1}{4x^2 - 12x + 9}$. Составим таблицу некоторых ее значений:

x	0	1	2	3	4	5	-1	-2
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	1	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{49}$

Если отметить эти точки на координатной плоскости и соединить их плавной кривой, то получится линия, изображенная на рисунке 116, *а*. На самом деле график функции $\frac{1}{4x^2 - 12x + 9} = \frac{1}{(2x - 3)^3}$ имеет разрыв в точке $x = \frac{3}{2}$ и выглядит так, как показано на рисунке 116, *б*. Мы же, пытаясь построить график по значениям функции в точках с целыми координатами, «прозевали» этот разрыв.

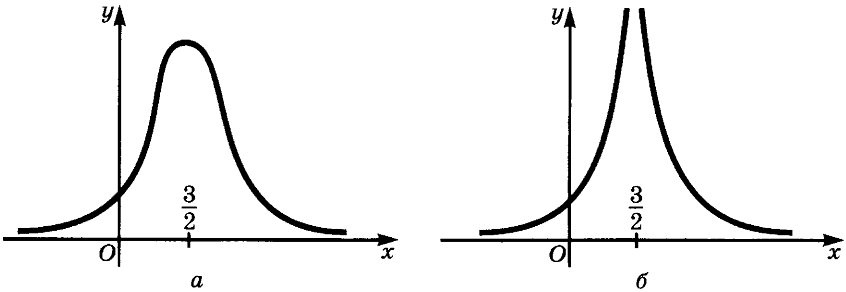


Рис. 116

Чтобы избежать подобных ошибок, нужно, прежде чем строить график функции по точкам, исследовать поведение функции, выявить особенности ее графика. Примерный план исследования таков:

1. *Находят область определения функции f.*

2. *Исследуют функцию на четность или нечетность.*

3. *Находят точки пересечения графика функции с осью абсцисс* (для этого решают уравнение $f(x) = 0$).

4. *Находят точки разрыва функции.*

5. *Точки, найденные в п. 3 и 4, разбивают ось абсцисс на несколько промежутков — это промежутки знакопостоянства функции f, находят знак функции на каждом из этих промежутков.*

6. *Изучают поведение функции около точек разрыва и на бесконечности и находят асимптоты графика функции.*

7. *Исследуют функцию на возрастание и убывание.*

8. *Находят точки максимума и минимума функции.*

9. *Исследуют график на выпуклость и находят точки перегиба.*

10. *Составляют таблицу значений функции и ее производных* (в нее включают точки, найденные на предыдущих этапах исследования, и некоторые дополнительные контрольные точки, в частности точку пересечения графика с осью ординат, т. е. точку с абсциссой, равной нулю).

11. *Учитывая проведенное исследование, строят эскиз графика функции.*

Пример 1. Построим график функции $x^3 - 4x^2 + 3x$.

Решение.

1) Функция определена при всех значениях x, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) Так как $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 3(-x) = -x^3 - 4x^2 - 3x$, то $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, и потому функция f не является ни четной, ни нечетной.

3) Корнями уравнения $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$ являются 0, 1, 3. Мы нашли три точки пересечения графика с осью абсцисс:

$$A(0;\ 0),\ B(1;\ 0),\ C(3;\ 0).$$

4) f — всюду непрерывная функция. Найденные в п. 2 точки разбивают ось абсцисс на три промежутка знакопостоянства функции, причем знаки функции на этих промежутках меняются так, как показано на рисунке 117, *а*. На рисунке 117, *б* схематически изображены те сведения, которыми мы располагаем после этапов 1—4. Отмечены три найденные точки графика и заштрихованы те куски координатной плоскости, где графика заведомо нет. Из этого рисунка видно, что на промежутке (0; 1) должна быть точка максимума, а на (1; 3) — точка минимума.

5) Предел функции f при $x \to +\infty$ равен $+\infty$. В самом деле, $x^3 - 4x^2 + 3x = x^3\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$, причем $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ и

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1.$$

Аналогично устанавливаем, что $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 3x) = -\infty$.

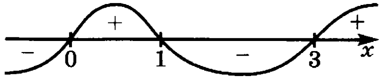
6) — 7) Исследование функции на возрастание и убывание проведем одновременно с отысканием точек экстремума. Имеем

$$f'(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x)' = 3x^2 - 8x + 3.$$

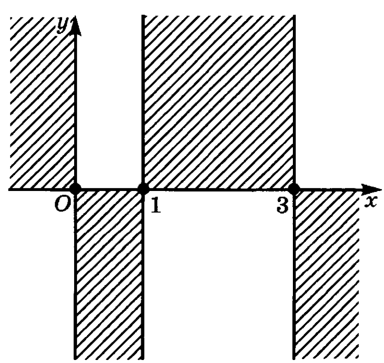
Уравнение $3x^2 - 8x + 3 = 0$ имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Их приближенные значения таковы: $x_1 \approx 0{,}45$, $x_2 \approx 2{,}21$. Из сказанного выше следует, что в точке x_1 функция имеет максимум,



а



б

Рис. 117

а в точке x_2 минимум ($x_1 \in (0;\ 1)$, а $x_2 \in (1;\ 3)$). Вычисляя значения функции в этих точках, получаем, что $f(x_1) \approx 0{,}63$ и $f(x_2) \approx -2{,}11$.

На луче $(-\infty;\ x_1]$ имеем $f'(x) \geqslant 0$, и потому функция f возрастает; на отрезке $[x_1;\ x_2]$ имеем $f'(x) \leqslant 0$, а потому функция f убывает; наконец, на $[x_2;\ +\infty)$ имеем $f'(x) \geqslant 0$, и потому f возрастает.

8) Имеем $f''(x) = (3x^2 - 8x + 3)' = 6x - 8$. Решая уравнение $6x - 8 = 0$, получаем точку $x = \frac{4}{3}$, «подозрительную на перегиб». При $x < \frac{4}{3}$ выполняется неравенство $6x - 8 < 0$, а при $x > \frac{4}{3}$ — неравенство $6x - 8 > 0$. Значит, при переходе через точку $\frac{4}{3}$ вторая производная меняет знак, и потому найденное значение дает точку перегиба. При этом слева от этой точки график функции обращен выпуклостью вверх, а справа от нее — выпуклостью вниз.

Значение $f'(x)$ при $x = \frac{4}{3}$ равно $-\frac{7}{3}$. Значит, в точке с абсциссой $\frac{4}{3}$ касательная имеет угловой коэффициент $-\frac{7}{3}$. При этом

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{20}{27} \approx -0{,}74.$$

9) Составляем следующую таблицу:

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ x_1)$	$x_1 \approx 0{,}45$	$(x_1;\ 1)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\approx 0{,}63$	$+$
$f'(x)$	$+$	3	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
Вывод	Отрицат., возраст., выпукл. вверх	Проходит через начало координат	Положит., возраст., выпукл. вверх	Максимум	Положит., убыв., выпукл. вверх

Продолжение табл.

x	1	$\left(1;\ \frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3};\ x_2\right)$	$x_2 \approx 2{,}21$
$f(x)$	0	$-$	$\approx -0{,}74$	$-$	$-2{,}11$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-\frac{7}{3}$	$-$	0
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
Вывод	Пересекает ось абсцисс	Отрицат., убыв., выпукл. вверх	Точка перегиба	Отрицат., убыв., выпукл. вверх	Минимум

Окончание табл.

x	$(x_2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
Вывод	Отрицат., возраст., выпукл. вниз	Пересекает ось абсцисс	Положит., возраст., выпукл. вниз

10) Учитывая проведенное исследование, строим график функции (рис. 118).

Пример 2. Построим график функции $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3}$.

Решение.

1) Функция определена всюду, кроме точки $x = 0$. В этой точке функция имеет разрыв, причем

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^4 - 1}{x^3} = -\infty, \quad \lim_{x \to -0} \frac{x^4 - 1}{x^3} = +\infty.$$

2) Так как $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 1}{(-x)^3} = -\dfrac{x^4 - 1}{x^3} = -f(x)$, то функция f нечетна. Достаточно построить ее график на луче $(0; +\infty)$ и отразить его симметрично относительно начала координат.

3) Решая уравнение $\dfrac{x^4 - 1}{x^3} = 0$, находим корни 1 и -1. На луче $(0; +\infty)$ лежит корень 1.

4) Точка 1 разбивает луч $(0; +\infty)$ на промежутки $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$, функция f положительна при $x > 1$ и отрицательнапри $0 < x < 1$.

5) Функцию f можно записать в виде $f(x) = x - \dfrac{1}{x^3}$. Из этой записи видно, что при $x \to +\infty$ график функции f почти сливается с прямой $y = x$ и лежит ниже нее. Это наклонная асимптота данного графика.

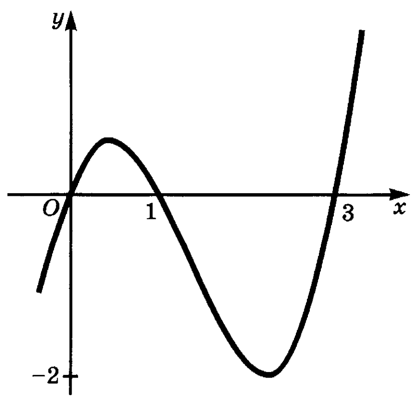


Рис. 118

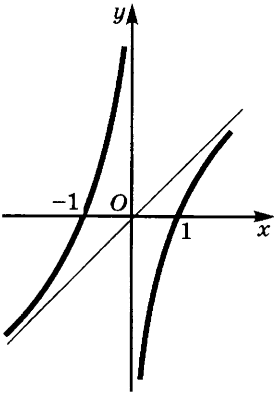


Рис. 119

6) Имеем $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)' = \frac{3}{x^4}$. Так как при $x > 0$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$, то функция возрастает на луче $(0; +\infty)$. Максимумов и минимумов нет.

7) Имеем $f''(x) = -\frac{12}{x^5}$. Так как при $x > 0$ $f''(x) < 0$, то график функции f обращен выпуклостью вверх на луче $(0; +\infty)$.

8) Учитывая проведенное исследование (см. таблицу ниже), строим график функции (рис. 119), его левая часть симметрична правой относительно начала координат.

x	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
Вывод	Отрицат., возраст., выпукл. вверх	Пересекает ось абсцисс	Положит., возраст., выпукл. вверх

Упражнения

463. Постройте графики функций:

1) $(x - 2)^2(x + 2)$;

2) $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;

3) $\frac{x^4 - 3}{x^3}$;

4) $\frac{16}{x^2(x - 4)}$;

5) $\sqrt[3]{1 - x^2}$;

6) $\sqrt[3]{1 - x^3}$;

7) $\sqrt[3]{(x + 2)^2} - \sqrt[3]{(x - 2)^2}$;

8) $\frac{8}{x\sqrt{x^2 - 4}}$.

464. Постройте графики функций в упражнениях к п. 1, 3, 4.

465. Исследуйте графики функций $\frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2}$, $\frac{x^2 + a^2}{x^2 - b^2}$, $\frac{x^2 - a^2}{x^2 + b^2}$ и $\frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2}$ при $a = b$, $a < b$ и при $a > b$.

8. Производные и доказательство неравенств. Если $f(a) = 0$ и $f'(x) > 0$ на луче $(a; +\infty)$, причем f непрерывна в точке a, то функция f положительна на этом луче. В самом деле, она возрастает на $[a; +\infty)$, и потому при $x > a$ имеем $f(x) > f(a) = 0$. Аналогично, если $f(a) = 0$ и $f'(x) < 0$ на луче $(a; +\infty)$, то и $f(x) < 0$ на $[a; +\infty)$. С помощью этого замечания можно доказывать различные неравенства.

Пример 1. Докажем, что при $x > 0$ и $\alpha > 1$ выполняется неравенство

$$(1 + x)^{\alpha} > 1 + \alpha x.$$

Решение. Положим $f(x) = (1 + x)^{\alpha} - 1 - \alpha x$. Тогда $f(0) = 0$ и $f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha - 1} - \alpha$. Поскольку $\alpha > 1$, функция $(1 + x)^{\alpha - 1}$ возрастает на $(0; +\infty)$, и потому на этом луче $(1 + x)^{\alpha - 1} > 1$, а тогда на нем $f'(x) > 0$.

По сделанному выше замечанию получаем, что $f(x) > 0$ на $(0; +\infty)$, т. е. $(1 + x)^{\alpha} > 1 + \alpha x$ при $x > 0$.

Пример 2. Докажем, что при $x > 0$ и $\alpha > 2$ выполняется неравенство

$$(1 + x)^{\alpha} > 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} x^2.$$

Решение. Положим $f(x) = (1 + x)^{\alpha} - 1 - \alpha x - \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} x^2$.

Тогда $f(0) = 0$ и

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1 + x)^{\alpha - 1} - \alpha - \alpha(\alpha - 1)x = \\ &= \alpha((1 + x)^{\alpha - 1} - 1 - (\alpha - 1)x). \end{aligned}$$

В силу примера 1 имеем $f'(x) > 0$ при $x > 0$ и $\alpha > 2$. Поэтому, согласно сказанному выше, $f(x) > 0$ при $x > 0$, т. е.

$$(1 + x)^{\alpha} > 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} x^2.$$

Покажем теперь, как применяется к доказательству неравенств вторая производная. Мы доказали в п. 5, что если $f''(x) > 0$ на отрезке $[a; b]$, то график функции f на $[a; b]$ лежит не выше хорды, соединяющей точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$. Выберем на отрезке $[a; b]$ любую точку c и найдем ординату соответствующей точки хорды. Так как уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

то при $x = c$ получаем

$$y_{\text{хорды}} = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a).$$

Поэтому неравенство $y_{\text{кр}} \leqslant y_{\text{хорды}}$ имеет вид

$$f(c) \leqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a). \tag{1}$$

Если положить $\frac{c - a}{b - a} = \lambda$, то будем иметь

$$c = a + \lambda(b - a) = \lambda b + (1 - \lambda)a,$$

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) = f(a) + \lambda(f(b) - f(a)) =$$
$$= \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a).$$

Это позволяет переписать неравенство (1) в виде

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \leqslant \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a), \tag{2}$$

где $\lambda = \frac{c - a}{b - a} \in [0;\ 1]$.

В частности, при $\lambda = \frac{1}{2}$ имеем

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{3}$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Если на отрезке* $[a;\ b]$ *выполняется неравенство* $f''(x) \geqslant 0$, *то для любого* $\lambda \in [0;\ 1]$ *имеем*

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \leqslant \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a).$$

Аналогично доказывается, что *если* $f''(x) \leqslant 0$ *на* $[a;\ b]$, *то*

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \geqslant \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a). \tag{2'}$$

Пример 3. Докажем неравенство

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^4 \leqslant \frac{a^4 + b^4}{2}. \tag{4}$$

Решение. Так как $(x^4)'' = 12x^2 \geqslant 0$, то при $f(x) = x^4$ и $\lambda = \frac{1}{2}$ выводим из (3) неравенство (4).

Упражнения

466. Докажите неравенства:

1) $\left(\frac{a + b}{2}\right)^3 \leqslant \frac{a^3 + b^3}{2}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;

2) $\left(\frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}\right)^4 \leqslant \frac{a^4 + \lambda b^4}{1 + \lambda}$ при любом $\lambda \in [0;\ 1]$;

3) $\sqrt{\dfrac{a + \lambda b}{1 + \lambda}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a} + \lambda\sqrt{b}}{1 + \lambda}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\lambda \in [0;\ 1]$;

4) $\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^p \leqslant \dfrac{a^p + b^p}{2}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p > 1$;

5) $\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^p \geqslant \dfrac{a^p + b^p}{2}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $0 < p < 1$.

9. Бином Ньютона. В 7-м классе было доказано, что

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2;$$
$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Эти формулы являются частными случаями общей формулы, которая будет выведена в этом пункте.

Если раскрыть скобки в выражении $(a + x)^n$, т. е. умножить двучлен (или, как говорят, *бином*) $(a + x)$ сам на себя n раз, то получится многочлен n-й степени относительно x. Поскольку мы пока что не знаем его коэффициентов, запишем ответ в виде

$$(a + x)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n. \qquad (1)$$

Нам надо найти выражения для коэффициентов $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Чтобы найти A_0, подставим в обе части равенства (1) вместо x значение 0. Получим

$$A_0 = a^n. \qquad (2)$$

Чтобы найти A_1, продифференцируем обе части равенства (1) и положим $x = 0$. По формуле дифференцирования степени получаем

$$((a + x)^n)' = n(a + x)^{n-1}(a + x)' = n(a + x)^{n-1}.$$

С другой стороны,

$$(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n)' =$$
$$= A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots + nA_nx^{n-1}.$$

Значит,

$$n(a + x)^{n-1} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots + nA_nx^{n-1}. \qquad (3)$$

Подставляя $x = 0$, находим: $na^{n-1} = A_1$. Итак,

$$A_1 = \frac{na^{n-1}}{1}. \qquad (4)$$

Для нахождения A_2 продифференцируем обе части равенства (3) и положим $x = 0$. Имеем

$$n(n - 1)(a + x)^{n-2} = 2A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3x + \ldots + n(n - 1)\,A_nx^{n-2},$$

откуда $n(n - 1)a^{n-2} = 2A_2$. Значит,

$$A_2 = \frac{n(n - 1)}{2}a^{n-2} = \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}. \qquad (5)$$

Остальные коэффициенты находят таким же образом. Если продифференцировать k раз равенство (1), то получим, что

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(a+x)^{n-k}=$$
$$=k(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot A_k+(k+1)k\cdot\ldots\cdot2A_{k+1}x+$$
$$+\ldots+n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)A_nx^{n-k}.$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$, находим, что

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a^{n-k}=1\cdot2\cdot\ldots\cdot k\cdot A_k$$

и потому

$$A_k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}. \qquad (6)$$

Числа $\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}$ называют *биномиальными коэффициентами* и обозначают C_n^k. Таким образом, $A_k = C_n^k a^{n-k}$, где

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}. \qquad (7)$$

Поэтому

$$(a+x)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}x+\ldots+C_n^ka^{n-k}x^k+\ldots+C_n^nx^n. \qquad (8)$$

Формулу (8) называют *формулой бинома Ньютона.* Правая часть этого равенства называется разложением степени бинома $(a + x)^n$.

Формулу для биномиальных коэффициентов можно записать в ином виде, используя обозначение $n!$ (n-факториал) для произведения $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Именно, умножим числитель и знаменатель дроби в формуле (7) на $(n - k)!$. Получим

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Итак,

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (9)$$

Полезно иметь в виду, что $n! = (n - 1)!n$.

Заметим, что коэффициент при a^n в формуле (8) равен 1. Поэтому считают, что $C_n^0 = 1$. Коэффициент при x^n тоже равен 1. Поэтому полагают, что и $C_n^n = 1$. Эти равенства получаются из формулы (9), если условиться, что $0! = 1$.

Пример 1. Найдем разложение степени бинома $(a + x)^5$.

Решение. В нашем случае $n = 5$. Вычислим биномиальные коэффициенты C_5^k:

$$C_5^0=1,\ C_5^1=\frac{5}{1}=5,\ C_5^2=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=10,$$
$$C_5^3=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10,\ C_5^4=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=5,\ C_5^5=1.$$

Значит, по формуле (8) находим

$$(a + x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5.$$

Пример 2. Найдем разложение степени бинома $\left(\frac{1}{b} + \sqrt{x}\right)^6$.

Решение. В этом случае $n = 6$, a заменено на $\frac{1}{b}$, x — на $\sqrt{x}$. Так как

$$C_6^0 = 1,\ C_6^1 = \frac{6}{1} = 6,\ C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15,\ C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20,$$

$$C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15,\ C_6^5 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6,\ C_6^6 = 1,$$

то

$$\left(\frac{1}{b} + \sqrt{x}\right)^6 = \left(\frac{1}{b}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{b}\right)^5 \sqrt{x} + 15\left(\frac{1}{b}\right)^4 (\sqrt{x})^2 +$$

$$+ 20\left(\frac{1}{b}\right)^3 (\sqrt{x})^3 + 15\left(\frac{1}{b}\right)^2 (\sqrt{x})^4 + 6\left(\frac{1}{b}\right)(\sqrt{x})^5 + (\sqrt{x})^6 =$$

$$= \frac{1}{b^6} + \frac{6\sqrt{x}}{b^5} + \frac{15x}{b^4} + \frac{20x\sqrt{x}}{b^3} + \frac{15x^2}{b^2} + \frac{6x^2\sqrt{x}}{b} + x^3.$$

Упражнения

467. Вычислите по формуле (7):
$C_4^1,\ C_4^2,\ C_4^3;\ C_5^1,\ C_5^2,\ C_5^3,\ C_5^4;\ C_6^1,\ C_6^2,\ C_6^3,\ C_6^4,\ C_6^5;\ C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^{n-3}$.

468. Вычислите по формуле (7):
$C_{1000}^1,\ C_{1000}^2,\ C_{1000}^3,\ C_{1000}^{999},\ C_{1000}^{998},\ C_{1000}^{997}$.

469. Покажите, что $C_{1000}^4 = C_{1000}^{996}$.

470. По формуле (8) запишите разложение бинома:

1) $(a - x)^4$; 4) $(x - 1)^5$; 7) $\left(\sqrt{x} - 1\right)^5$; 10) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^{10}$;

2) $(2 + h)^5$; 5) $(x - 2y)^6$; 8) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^4$; 11) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^8$;

3) $(x + 1)^5$; 6) $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^7$; 9) $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}})^6$; 12) $\left(\sqrt{5} - 1\right)^6$.

471. Сколько членов содержится в разложении биномов:
1) $(a + x)^{10}$; 2) $(a + x)^{15}$; 3) $(a + x)^n$?

472. Докажите формулу (8) методом математической индукции.

10. Некоторые свойства биномиальных коэффициентов. Мы доказали, что

$$(a + x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n x^n, \qquad (1)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$. Полагая в этой формуле $a = x = 1$, получаем

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n. \qquad (2)$$

Таким образом, *сумма биномиальных коэффициентов при данном значении n равна 2^n.*

Точно так же, полагая $a = 1$, $x = -1$, убеждаемся, что

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что *сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.*

Из формулы для C_n^k получаем

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k!)} = C_n^k. \qquad (4)$$

Значит, *биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны друг другу.*

Далее,

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Таким образом,

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k. \qquad (5)$$

Эта формула позволяет вычислять биномиальные коэффициенты C_n^k, зная биномиальные коэффициенты C_{n-1}^s.

Вычисления удобно располагать в виде следующего треугольника, где каждый элемент равен сумме элементов предыдущей строки, стоящих слева и справа от вычисляемого:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Его называют *арифметическим треугольником* или *треугольником Паскаля.*

Упражнения

473. Вычислите:

1) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$;

2) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$;

3) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \dots + (n-1)C_n^n$;

4) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (2n+1)C_n^n$.

474. Докажите, что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

11*. Приложения бинома Ньютона для приближенных вычислений. Формулу бинома Ньютона применяют для приближенного вычисления степеней.

Пример 1. Вычислим $1{,}0015^8$ с точностью до 0,0001.

Решение. По формуле бинома Ньютона имеем

$$1{,}0015^8 = (1 + 0{,}0015)^8 =$$
$$= 1 + 8 \cdot 0{,}0015 + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}0015^2 + \dots + 0{,}0015^8.$$

Но

$$\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}0015^2 = 28 \cdot 0{,}00000225 < 30 \cdot 0{,}000003 = 0{,}00009,$$

а следующие семь слагаемых еще по крайней мере в 100 раз меньше. Поэтому все слагаемые, начиная с третьего, можно отбросить. Получаем

$$1{,}0015^8 \approx 1 + 8 \cdot 0{,}0015 = 1{,}012.$$

Пример 2. Вычислим $5{,}01^4$ с точностью до 0,02.

Решение. Запишем $5{,}01^4$ в виде

$$5{,}01^4 = (5 + 0{,}01)^4 = 5^4\left(1 + \frac{0{,}01}{5}\right)^4 = 5^4(1 + 0{,}002)^4.$$

Применяя к $(1 + 0{,}002)^4$ формулу бинома Ньютона, получаем

$$5^4(1 + 0{,}002)^4 =$$
$$= 5^4\left(1 + 4 \cdot 0{,}002 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}002^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}002^3 + 0{,}002^4\right).$$

Но $5^4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}002^2 = 5^4 \cdot 2^2 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 15 \cdot 10^{-3} = 0{,}015$; следующие два члена еще по крайней мере в 100 раз меньше. Значит, их можно отбросить. Получаем

$$5{,}01^4 \approx 5^4(1 + 4 \cdot 0{,}002) = 625 \cdot 1{,}008 = 630.$$

Мы установили формулу бинома Ньютона для натуральных значений показателя n. Можно доказать, что аналогичная формула верна и при любых значениях показателя, если $|x| < |a|$. Только получится ряд, состоящий из бесконечного множества слагаемых. На практике бывает достаточно взять несколько членов этой суммы, чтобы получить ответ с заданной точностью.

Пример 3. Вычислим $\sqrt[3]{1{,}06}$ с точностью до 0,001.

Решение. Здесь $n = \frac{1}{3}$, $a = 1$, $x = 0{,}06$. Поэтому имеем

$$\sqrt[3]{1{,}06} = (1 + 0{,}06)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}06 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{1 \cdot 2}0{,}06^2 + \ldots =$$

$$= 1 + 0{,}02 - 0{,}0004 + \ldots .$$

Видно, что достаточно сохранить первые два слагаемых. Значит,

$$\sqrt[3]{1{,}06} \approx 1{,}02.$$

Упражнения

475. Запишите разложение бинома $(1 + x)^n$.

476. Покажите, что для малых x справедлива приближенная формула $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

477. Вычислите с точностью соответственно до 0,01; 0,0002; 0,0001:

1) $(1 + 0{,}03)^5$; 2) $1{,}005^4$; 3) $0{,}998^8$; 4) $\sqrt[5]{1{,}015}$.

12*. Приближенное решение уравнений методом хорд и касательных. Многие задачи математики (в том числе отыскание экстремумов функций) сводятся к отысканию корней функций, т. е. к решению уравнений вида $f(x) = 0$. Однако лишь весьма редко существуют формулы для «точного» решения таких уравнений (мы ставим слово «точного» в кавычки, так как в большинстве случаев такие формулы содержат извлечение корней, отыскание логарифмов и другие операции, которые над данными числами можно выполнять лишь приближенно). Поэтому возникает задача о приближенном решении уравнений. Мы рассмотрим сейчас два способа приближенного решения уравнений, называемые *методом хорд и методом касательных.*

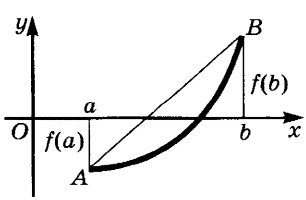


Рис. 120

Пусть функция f непрерывна и монотонна на отрезке $[a; b]$. Если ее значения на концах этого отрезка имеют разные знаки, то по теореме 1 п. 6 § 2 главы 4 на отрезке $[a; b]$ лежит один и только один корень уравнения $f(x) = 0$. Чтобы найти приближенное значение корня, проведем хорду (рис. 120), соединяющую точки $A(a;\ f(a))$ и $B(b;\ f(b))$, и найдем точку ее пересечения с осью абсцисс. Уравнение хорды AB приведено в п. 8. Полагая в нем $y = 0$, получаем уравнение

$$0 = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Решая получившееся линейное уравнение относительно x, находим приближенное значение корня:

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a). \tag{1}$$

Это выражение можно представить и в виде

$$x_1 = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(b). \tag{1'}$$

Чтобы получить более точное значение корня уравнения $f(x) = 0$, надо вычислить значение $f(x_1)$ и в зависимости от его знака применить формулу вида (1) или к отрезку $[a_1;\ x_1]$, или к отрезку $[x_1;\ b]$. Процесс приближений ведется до тех пор, пока не получатся два значения абсциссы, совпадающие в пределах заданной точности.

Пример 1. Найдем методом хорд с точностью до 0,01 приближенное значение корня уравнения $x^3 + 3x - 1 = 0$, расположенного на отрезке [0; 1].

Решение. Так как $f(0) = -1$, $f(1) = 3$, то по формуле (1) имеем

$$x_1 = 0 - \frac{1 - 0}{3 - (-1)}(-1) = 0{,}25.$$

Так как $f(0{,}25) = 0{,}25^3 + 3 \cdot 0{,}25 - 1 \approx -0{,}23$, то используем формулу (1):

$$x_2 = 0{,}25 - \frac{1 - 0{,}25}{3 - (-0{,}23)}(-0{,}23) \approx 0{,}31.$$

Продолжая этот процесс, получаем:

$$x_3 = 0{,}31 - \frac{1 - 0{,}31}{3 - (-0{,}04)}(-0{,}04) \approx 0{,}315,$$

$$x_4 = 0{,}315 - \frac{1 - 0{,}315}{3 - (-0{,}01)}(-0{,}01) \approx 0{,}32,$$

x_5 также приближенно равно 0,32. С точностью до 0,01 значения x_4 и x_5 совпадают, и потому $x \approx 0{,}32$[1]. Продолжая вычисления, можно найти значение корня с большей точностью. Например, с точностью до 0,0001 имеем $x \approx 0{,}3222$.

[1] Строгое доказательство того, что $x \approx 0{,}32$, немедленно следует из неравенств $f(0{,}32) < 0$, $f(0{,}325) > 0$.

Замечание. Более быстрое приближение к искомому корню дает усовершенствованный метод хорд, в котором хорды проводятся не через точки с абсциссами a и x_n или x_n и b, а через точки с абсциссами x_{n-1} и x_n.

Если функция f не только непрерывна, но и дифференцируема на отрезке $[a; b]$, то можно приближенно заменять кривую не хордой, а касательной, проведенной в одном из концов отрезка $[a; b]$. Уравнение касательной, проведенной в точке $A(a; f(a))$ к графику функции f, имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Чтобы найти точку пересечения касательной с осью абсцисс, положим $y = 0$ и найдем x из уравнения $0 = f(a) + f'(a)(x - a)$. Имеем

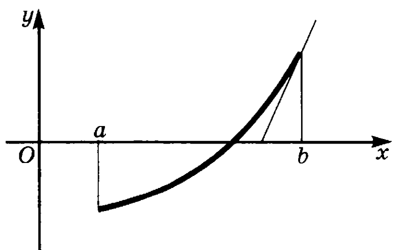
$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \qquad (2)$$

Если же касательная проводится в точке $B(b; f(b))$, то абсцисса точки пересечения равна

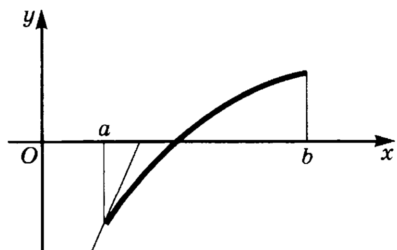
$$x = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \qquad (2')$$

Как видно из рисунка 121 касательную надо проводить в конце, где функция положительна, если график обращен выпуклостью вниз, и в конце, где функция отрицательна, если график обращен выпуклостью вверх. Учитывая связь направления выпуклости графика и знака второй производной, получаем, что *касательную надо проводить в том конце, где знак функции совпадает со знаком второй производной на отрезке* $[a; b]$ (предполагается, что этот знак постоянен на отрезке $[a; b]$).

Найдя приближенное значение x по формуле (2) или (2′), надо вновь применить эту формулу к полученной точке. И в этом случае процесс ведется до тех пор, пока полученные значения x не совпадут в пределах заданной точности.



а



б

Рис. 121

Иными словами, надо выбрать начальное приближение $x_0 = a$ или $x_0 = b$ и построить последовательность (x_n) по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3}$$

Член этой последовательности, имеющий достаточно большой номер, и даст искомый корень с нужной точностью.

Пример 2. Решим уравнение $x^3 + 3x - 1 = 0$ на отрезке $[0; 1]$ с точностью до 0,01 методом касательных.

Решение. Имеем $f(x) = x^3 + 3x - 1$, $f'(x) = 3x^2 + 3$, $f''(x) = 6x$. Так как на отрезке $[0; 1]$ выполняется неравенство $f''(x) \geqslant 0$, то касательную надо проводить в точке, где функция положительна, т. е. при $x = 1$. Поскольку $f(1) = 3$, $f'(1) = 6$, имеем

$$x_1 = 1 - \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Далее, $f(0{,}5) = 0{,}625$, $f'(0{,}5) = 3{,}75$ и потому

$$x_2 = 0{,}5 - \frac{0{,}625}{3{,}75} \approx 0{,}33.$$

Далее находим

$$x_3 = 0{,}33 - \frac{0{,}03}{3{,}33} \approx 0{,}32.$$

Так как x_4 тоже равно 0,32, то с точностью до 0,01 корень данного уравнения равен 0,32.

Применим метод касательных к решению уравнения $x^2 - a = 0$, где $a > 0$. Мы имеем $f(x) = x^2 - a$ и потому $f'(x) = 2x$. Значит, формула (3) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}. \tag{4}$$

Заметим теперь, что положительным корнем уравнения $x^2 - a = 0$ является число $\sqrt{a}$.

Таким образом, чтобы получить приближенное значение для $\sqrt{a}$, надо взять любое положительное начальное приближение x_0 и построить последовательность чисел (x_n) по рекуррентной формуле (4). Тогда пределом этой последовательности будет $\sqrt{a}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sqrt{a}$. Значит, взяв член последовательности (x_n), имеющий достаточно большой номер, мы получим значение $\sqrt{a}$ с требуемой точностью.

Замечания: 1. Выражение $\dfrac{x_n^2 + a}{2x_n}$ можно записать в виде $\dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$. Оно является средним арифметическим чисел x_n и $\dfrac{a}{x_n}$, средним геометрическим которых является число $\sqrt{a}$. Таким образом, смысл описанного метода извлечения квадратного корня состоит в том, что на каждом шаге искомое среднее геометрическое чисел x_n и $\frac{a}{x_n}$ заменяется их средним арифметическим.

2. Так как

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + (\sqrt{a})^2}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}, \qquad (5)$$

то имеем $x_{n+1} - \sqrt{a} > 0$, т. е. числа $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ дают приближения для $\sqrt{a}$ с избытком.

3. Из неравенства $x_n > \sqrt{a}$ следует, что $0 < x_n - \sqrt{a} < x_n$ и потому $x_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{x_n - \sqrt{a}}{2}$ (см. (5)). Отсюда с помощью метода математической индукции вытекает, что при любом n имеем

$$0 < x_n - \sqrt{a} < \left|\frac{x_0 - \sqrt{a}}{2^n}\right|.$$

Но $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{x_0 - \sqrt{a}}{2^n}\right| = 0$ и потому $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - \sqrt{a}) = 0$.

Этим доказано, что описанный выше метод при любом выборе $x_0 > 0$ действительно дает значение $\sqrt{a}$ с любой заданной точностью.

Упражнения

478. Найдите с точностью до 0,01 корни уравнения (сделав эскиз графика функции, стоящей в левой части):
1) $x^3 - 5x + 3 = 0$; 3) $x^3 + 4x + 3 = 0$;
2) $2 + 7x - x^3 = 0$; 4) $x^6 + x^2 - 1 = 0$.

479. Вычислите с точностью до 0,0001 квадратные корни:
1) $\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{127}$; 3) $\sqrt{154}$; 4) $\sqrt{38,1}$.

480. Докажите, что для вычисления корня k-й степени из числа $a > 0$ применима рекуррентная формула

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n^k + a}{kx_n^k}.$$

481. С помощью формулы из упражнения 480 найдите с точностью до 0,0001 значения корней:
1) $\sqrt[3]{100}$; 2) $\sqrt[4]{19}$; 3) $\sqrt[5]{36}$; 4) $\sqrt[6]{740}$.

ГЛАВА 6 Тригонометрические функции

§ 1. Координатная окружность

1. Длина дуги окружности. В девятилетней школе было введено понятие длины дуги окружности, однако оно не получило там точного определения. В этом пункте будет дано такое определение.

Выберем на дуге окружности AB точки $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, $A_n = B$ (идущие по порядку от A_0 к A_n) и построим ломаную $A_0A_1 \dots A_{n-1}A_n$, состоящую из n звеньев (рис. 122). Эту ломаную называют *вписанной в дугу AB*.

Если все дуги, на которые точки A_1, ..., A_{n-1} разбивают дугу AB, меньше полуокружности, то существует другая ломаная $AB_1 \dots B_nB$, звенья которой касаются окружности в точках A, A_1, ..., A_{n-1}, B. Ее называют *описанной вокруг дуги AB*.

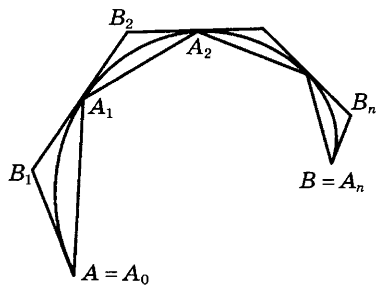


Рис. 122

Лемма 1. *Пусть на дуге AB окружности выбраны точки $A = A_0$, A_1, ..., A_{n-1}, $A_n = B$, причем все дуги, на которые разбита дуга AB, меньше полуокружности. Тогда длина вписанной ломаной, соответствующей этому разбиению, меньше длины соответствующей описанной ломаной.*

Доказательство. Из рисунка 123 видно, что каждое звено вписанной ломаной является стороной треугольника, две другие стороны которого — части звеньев описанной ломаной. Тогда $A_kA_{k+1} < A_kB_{k+1} + B_{k+1}A_{k+1}$. Написав такие неравенства треугольника для всех

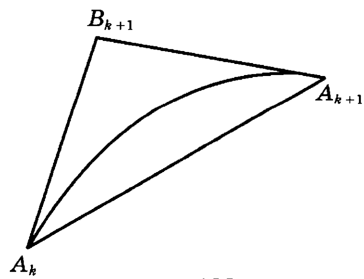


Рис. 123

звеньев вписанной ломаной и сложив их, убеждаемся, что длина вписанной ломаной меньше длины описанной ломаной.

Лемма 2. *От добавления новых точек деления длина описанной ломаной уменьшается, а длина вписанной ломаной увеличивается.*

Доказательство. Поскольку новые точки деления можно добавлять по одной, лемму достаточно доказать для случая, когда добавляется лишь одна точка деления. Из рисунка 124 видно, что при добавлении такой точки A' один из углов описанной ломаной «срезается». При этом длина срезаемой части ломаной больше длины срезающего отрезка, и потому длина описанной ломаной уменьшается.

Звено же вписанной ломаной при добавлении точки на стягиваемой им дуге заменяется двумя звеньями, сумма длин которых больше длины этого звена. Поэтому длина вписанной ломаной увеличивается.

Из лемм 1 и 2 вытекает, что множество Y длин описанных ломаных лежит справа от множества X длин вписанных ломаных. Поэтому существует хотя бы одно число, разделяющее эти множества, т. е. число, которое не меньше, чем длина любой вписанной ломаной, но не больше длины любой описанной ломаной.

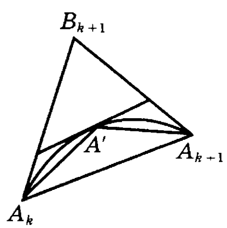


Рис. 124

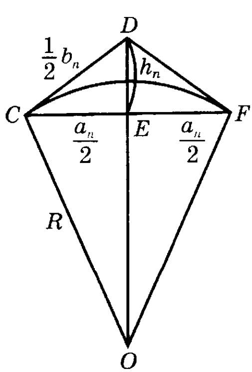


Рис. 125

Теорема 1. *Число, разделяющее множество X длин вписанных ламаных и множество Y длин описанных ломаных, однозначно определено.*

Доказательство. Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют вписанная и описанная ломаные, такие, что $l_{оп} - l_{вп} < \varepsilon$. Для этого разобьем дугу AB на n равных частей и построим вписанную и описанную ломаные (при $n = 2^k$ это построение делается циркулем и линейкой).

Обозначим через a_n длину звена вписанной ломаной, через b_n — длину звена описанной ломаной, а через h_n — длину высоты треугольника, образованного двумя половинами звеньев описанной ломаной и звеном вписанной ломаной (рис. 125). Зададим $\varepsilon > 0$. Так как $h_n > \frac{b_n}{2} - \frac{a_n}{2}$, то

$$l_{оп} - l_{вп} = n(b_n - a_n) = 2n\left(\frac{b_n}{2} - \frac{a_n}{2}\right) < 2nh_n.$$

Но из подобия треугольников OCD и DCE на рисунке 125 имеем $\dfrac{h_n}{\frac{a_n}{2}} = \dfrac{\frac{b_n}{2}}{R}$ и потому $h_n = \dfrac{a_n b_n}{4R}$. Значит, $l_{\text{оп}} - l_{\text{вп}} < \dfrac{2na_n b_n}{4R} < l_{\text{вп}} \dfrac{b_n}{2R}$.

При достаточно большом n отношение $\dfrac{b_n}{2R}$ становится сколь угодно малым, а $l_{\text{вп}}$ не превосходит периметра квадрата, описанного вокруг целой окружности. Поэтому при достаточно большом n выполняется неравенство $l_{\text{оп}} - l_{\text{вп}} < \varepsilon$. Значит, X и Y разделяются лишь одним числом. Теорема доказана.

Определение. *Длиной дуги AB* называется число l, разделяющее множество X длин вписанных в эту дугу ломаных и множество Y длин описанных вокруг нее ломаных.

Из теоремы 1 вытекает однозначная определенность длины дуги. Заметим, что таким же образом определяется длина любой выпуклой гладкой дуги, т. е. гладкой дуги, которую каждая прямая пересекает не более чем в двух точках.

2. Свойства длины дуги. Докажем следующие свойства, которыми обладают длины дуг окружностей.

а) *Длины равных дуг равны.*

В самом деле, если дуги AB и CD равны, то их длины разделяют одни и те же множества, а потому совпадают.

Лишь несколько сложнее доказывается более общее утверждение.

б) *Если дуги AB и CD подобны с коэффициентом подобия k, то отношение длин этих дуг равно k.*

Для доказательства следует лишь учесть, что отношение длин подобных ломаных равно коэффициенту подобия, а также что при умножении всех чисел множеств X и Y на одно и то же число k разделяющее эти множества число тоже умножается на k.

в) *Если точка C лежит на дуге AB, то сумма длин дуг AC и CB равна длине всей дуги.*

Обозначим через l_1 длину дуги AC,через l_2 — длину дуги CB и возьмем ломаные Γ и Γ', соответственно вписанную и описанную для дуги AB. Обозначим их длины через $|\Gamma|$ и $|\Gamma'|$ соответственно. Нам надо доказать, что $|\Gamma| \leqslant l_1 + l_2 \leqslant |\Gamma'|$, т. е. что число $l_1 + l_2$ разделяет множества X и Y для дуги AB. В силу единственности разделяющего числа отсюда и будет следовать, что $l_1 + l_2$ — длина дуги AB.

Не теряя общности, можно считать, что точка C является вершиной как для Γ, так и для Γ'. В противном случае присоединим эту точку к вершинам ломаных, что повлечет за собой увеличение $|\Gamma|$ и уменьшение $|\Gamma'|$. Поэтому если мы докажем неравенство после присоединения вершины, то оно было верно и до него.

Но если C — вершина обеих ломаных, то она делит их на части Γ_1 и Γ_2, а также Γ_1' и Γ_2' соответственно. При этом

$$|\Gamma| = |\Gamma_1| + |\Gamma_2|,\ |\Gamma'| = |\Gamma_1'| + |\Gamma_2'|,\quad |\Gamma_1| \leqslant l_1 \leqslant |\Gamma_1'|,\ |\Gamma_2| \leqslant l_2 \leqslant |\Gamma_2'|.$$

Отсюда следует, что $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| \leqslant l_1 + l_2 \leqslant |\Gamma_1'| + |\Gamma_2'|$, т. е. $|\Gamma| \leqslant l_1 + l_2 \leqslant |\Gamma'|$. Тем самым утверждение в) доказано.

Обозначим через 2π длину окружности единичного радиуса. Из свойства б) вытекает, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Из свойства в) следует, что если окружность радиуса R разделена на n равных частей, то длина каждой из этих частей равна $\frac{2\pi R}{n}$. В частности, при делении окружности на 360 равных частей получаем *дуговые градусы*, длина каждого из которых равна $\frac{2\pi R}{360}$. Отсюда вытекает, что если дуга окружности радиуса R содержит k градусов, где $k \in N$, $0 < k < 360$, то ее длина равна $\frac{2\pi kR}{360}$. Обычные рассуждения, аналогичные применяемым при измерении отрезков, показывают, что справедливо следующее утверждение: *если радиус окружности равен R, а дуга AB этой окружности содержит $\alpha°$, где $0 < \alpha < 360$, то длина дуги AB равна* $\frac{2\pi R\alpha}{360}$.

3. Радианное измерение дуг и углов. Назовем *радианом* дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности. Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то радиан составляет $\frac{1}{2\pi}$-ю часть окружности. Сокращенное обозначение радиана — «рад». Поскольку во всей окружности 360°, то в радиане[1] $\frac{360°}{2\pi}$, т. е. $\frac{180°}{\pi}$. Итак,

$$1 \text{ радиан} = \frac{180°}{\pi},\ 1° = \frac{\pi}{180} \text{ радиан}. \tag{1}$$

Из определения радиана вытекает, что длина дуги, содержащей x радиан, равна Rx:

$$l_{\text{дуги}} = Rx. \tag{2}$$

Из формулы (1) вытекают равенства:

$$x \text{ рад} = \frac{180°x}{\pi},\ \alpha° = \frac{\pi\alpha}{180} \text{ рад}. \tag{3}$$

[1] Это число приближенно равно 57°17′44,8″.

Пример 1. Найдем длину дуги AB окружности радиуса 8, если эта дуга содержит 2,5 рад.

Решение. По формуле (2) имеем

$$\smile AB = 2{,}5 \cdot 8 = 20.$$

Пример 2. Сколько градусов содержит дуга, если ее длина равна 6 см, а длина радиуса равна 10 см?

Решение. По формуле (2) имеем $6 = 10x$. Значит, дуга содержит 0,6 рад. Из формулы (3) следует, что тогда эта дуга содержит $\frac{180^\circ \cdot 0{,}6}{\pi} = \frac{108^\circ}{\pi} \approx 34^\circ 22' 39''$.

Поскольку углы измеряются дугами окружностей с центром в вершине угла, их тоже можно измерять в радианах. Таким образом, угол в 1 рад — это центральный угол дуги в 1 рад.

Пример 3. Построим угол в $\frac{\pi}{6}$ рад.

Решение. Из формулы (3) следует, что этот угол содержит $\frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30^\circ$. Чтобы построить угол в 30°, строим равносторонний треугольник и проводим его высоту.

В следующей таблице приведены радианные меры для некоторых часто встречающихся углов:

Градусы	0	15	30	45	60	75	90	120	135	150	180	225	270	315
Радианы	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$

Из того, что площадь круга равна πR^2, вытекает формула площади сектора, центральный угол которого равен x радиан:

$$S_{\text{сект}} = \frac{R^2 x}{2}. \tag{4}$$

Пример 4. Найдем площадь сектора радиуса 5, если дуга сектора содержит 1,5 рад.

Решение. По формуле (4) имеем

$$S = \frac{5^2 \cdot 1{,}5}{2} = 18{,}75.$$

Упражнения

482. Найдите радианную меру дуг: 15°; 22°30′; 30°; 45°; 60°; 67°30′; 90°; 180°; 225°; 270°; 330°.

483. Найдите градусную меру дуг:

$$\frac{\pi}{18}; \ \frac{\pi}{12}; \ \frac{\pi}{6}; \ \frac{\pi}{4}; \ \frac{\pi}{3}; \ \frac{\pi}{2}; \ \frac{5\pi}{2}; \ \frac{7\pi}{12}; \ \frac{25\pi}{18}.$$

484. Найдите длину дуг окружности радиуса $R = 12$, соответствующих центральным углам, содержащим α рад, если $\alpha = \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}$. Найдите также площади соответствующих секторов.

4. Координатная окружность. Чтобы задать систему координат на прямой линии, выбирают на ней начало отсчета, направление и единицу измерения длин. На окружности есть естественная единица измерения длин — радиус этой окружности. Поэтому для задания на ней системы координат достаточно выбрать начало отсчета и направление обхода (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

Определение. *Координатной окружностью* называют окружность единичного радиуса, на которой выбраны начало отсчета A и направление обхода (рис. 126).

Обычно в качестве положительного выбирают направление обхода против часовой стрелки.

Определим отображение множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел на координатную окружность. Наглядно это отображение состоит в том, что сначала множество $\boldsymbol{R}$ отображают на координатную прямую, а потом эту прямую «наматывают» на координатную окружность так, что начало координат на прямой переходит в начало отсчета на окружности, положительный луч наматывается в положительном направлении, а отрицательный луч — в отрицательном направлении. Поскольку после полного оборота точка возвращается в исходное положение, числам t и $t + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, соответствует одна и та же точка координатной окружности.

Более формально это отображение определяется следующим образом: множество $\boldsymbol{R}$ разбивают на промежутки вида $[2n\pi; 2(n + 1)\pi)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Если $t \in [2n\pi; 2(n + 1)\pi)$, то числу t ставят в соответствие такую точку $M(t)$ окружности, что дуга AM, «пробегаемая» в положительном направлении, имеет длину $t - 2n\pi$.

Пример 1. Найдем на координатной окружности точки $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $D\left(\frac{3}{2}\pi\right)$.

Решение. Точка B такова, что дуга AB, «пробегаемая» в положительном направлении, составляет четверть окружности (так как $\frac{\pi}{2}$ — четверть от 2π). Таким же образом находим остальные точки (рис. 127).

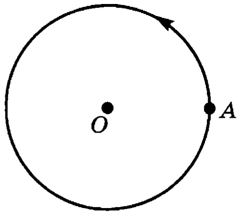


Рис. 126

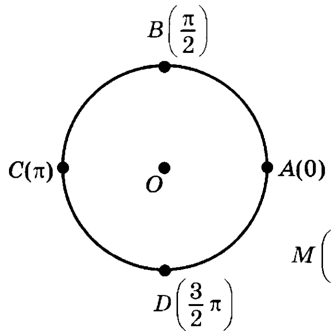


Рис. 127

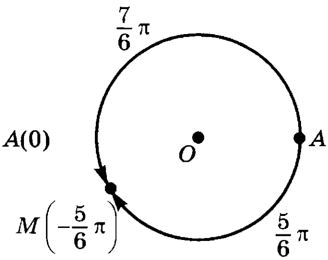


Рис. 128

Пример 2. Найдем на координатной окружности точку $M\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

Решение. Точку M можно построить двумя способами. Во-первых, можно заметить, что $-2\pi \leqslant -\frac{5\pi}{6} < 0$, причем $-\frac{5\pi}{6} - (-2\pi) = \frac{7\pi}{6}$. Поэтому отложим на координатной окружности в положительном направлении дугу в $\frac{7\pi}{6}$ рад. Эта дуга содержит $\frac{360° \cdot \frac{7\pi}{6}}{\pi} = 210°$. Соответствующая точка M изображена на рисунке 128.

Другой способ построения точки M состоит в том, что на окружности откладывается в отрицательном направлении дуга в $\frac{5\pi}{6}$ рад, т. е. в 150°.

Пример 3. Найдем на координатной окружности точки $M\left(4\frac{1}{4}\pi\right)$, $N(-5)$.

Решение. Так как $4\pi \leqslant 4\frac{1}{4}\pi < 6\pi$, то для отыскания точки M откладываем от точки $A(0)$ в положительном направлении дугу в $4\frac{1}{4}\pi - 4\pi = \frac{1}{4}\pi$ радиан, т. е. в 45°. Далее, так как $2\pi \leqslant -5 < 0$, то для построения точки $N(-5)$ откладываем от точки $A(0)$ в положительном направлении дугу в $-5 + 2\pi \approx 1{,}283$ рад, т. е. приблизительно в 73,5°. Иным образом можно получить ту же точку, отложив от точки A в отрицательном направлении дугу в 5 рад, т. е. в $\frac{900°}{\pi} \approx 286{,}5°$.

Отметим некоторые **с в о й с т в а** построенного выше отображения.

а) *Числам t и s соответствует одна и та же точка M координатной окружности в том и только в том случае, когда разность $t - s$ кратна 2π, т. е. $t - s = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.*

Геометрический смысл этого утверждения был указан выше — при наматывании прямой на окружность в одну и ту же точку окружности переходят точки прямой, расстояние между которыми кратно длине окружности, т. е. числу 2π. Мы опускаем формальное доказательство утверждения а).

б) *Точки $M(t)$ и $N(-t)$ симметричны относительно прямой OA, где A — начало отсчета на окружности, а O — ее центр.*

В самом деле, чтобы попасть из точки A в точки M и N, надо пройти дуги одной и той же длины $|t|$, отложенные в противоположные стороны. Поэтому указанные дуги, а следовательно и их концы, совпадают при симметрии относительно прямой OA (рис. 129).

в) *Точки $M(t)$ и $N(t + \pi)$ диаметрально противоположны, т. е. симметричны относительно центра окружности.*

В самом деле, число π равно длине полуокружности. Значит, точки $M(t)$ и $N(t + \pi)$ диаметрально противоположны (рис. 130).

г) *Если $|t - s| = |p - q|$, то дуги TS и PQ, где $T = T(t)$, $S = S(s)$, $P = P(p)$, $Q = Q(q)$, равны.*

В самом деле, при «наматывании» координатной прямой на координатную окружность равные отрезки прямой переходят в равные дуги окружности. Но если на прямой $F = F(t)$, $C = C(s)$, $H = H(p)$, $K = K(q)$, то $FC = |t - s|$, $HK = |p - q|$. Поэтому из равенства $|t - s| = |p - q|$ следует равенство отрезков FC и HK, а тем самым и дуг TS и PQ. Например, дуги TS и PQ, где $T = T\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $S = S\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $P = P\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $S = S\left(\frac{\pi}{4}\right)$, равны, так как $\left|\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right| = \left|-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right| = \frac{5\pi}{12}$.

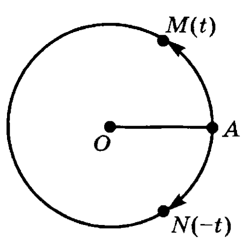


Рис. 129

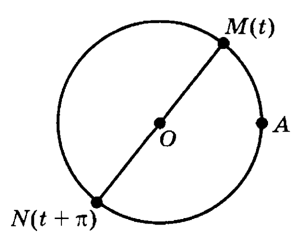


Рис. 130

З а м е ч а н и е. При определении отображения множества $\boldsymbol{R}$ на координатную окружность мы неявно предположили, что от любой точки окружности можно в обоих направлениях отложить дугу заданной длины. Мы опускаем строгое доказательство этого утверждения.

Упражнения

485. Колесо вращается с угловой скоростью $\frac{\pi}{6}$ рад/с. На какой угол оно повернется за 15 с? за 1 мин?

486. Колесо вращается с угловой скоростью 4π рад/с. На какой угол оно повернется за 20 с? за 1 мин 40 с? за 3 мин 50 с?

487. При полном обороте зубчатого колеса другое колесо совершает два оборота в противоположном направлении. На какой угол повернется второе колесо, если первое повернется на 320°? на 700°? на 1800°?

488. Отметьте на координатной окружности точки, соответствующие числам: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{7}{6}\pi$, 3π, $-\frac{9}{2}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{11}{4}\pi$, $-\frac{17}{4}\pi$.

489. На координатной окружности отметьте приблизительно точку, соответствующую числу 22.

§ 2. Тригонометрические функции числового аргумента, их свойства и графики

1. Функции синус и косинус числового аргумента. Положение точки на координатной окружности можно задавать ее декартовыми координатами. Выберем систему декартовых координат на плоскости так, чтобы начало этой системы координат находилось в центре O координатной окружности, положительный луч оси абсцисс проходил через начало отсчета $A(0)$ на этой окружности, а положительный луч оси ординат — через точку $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ той же окружности (рис. 131). Назовем декартовы координаты точки $M(t)$ координатной окружности косинусом и синусом числа t. Тем самым каждому действительному числу t поставлены в соответствие два числа: $\cos t$ (косинус t) и $\sin t$ (синус t), т. е. определены две числовые функции числового аргумента.

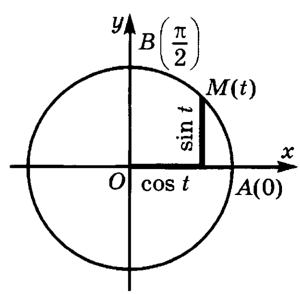


Рис. 131

Определение. Функция *косинус* ставит в соответствие каждому числу t абсциссу точки $M(t)$ координатной окружности, а функция *синус* ставит в соответствие числу t ординату той же точки.

Мы будем поэтому писать, что $M(t) = M(\cos t;\ \sin t)$, где запись $M(t)$ показывает положение точки M на координатной окружности, а запись $M(\cos t;\ \sin t)$ — положение той же точки на координатной плоскости.

Функции $\cos t$ и $\sin t$ определены на всем множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. Поскольку координаты точек окружности единичного радиуса не превосходят по модулю числа 1, выполняются неравенства $|\cos t| \leqslant 1$ и $|\sin t| \leqslant 1$. Отсюда вытекает, что областью значений для функций $\cos t$ и $\sin t$ является отрезок $[-1;\ 1]$ (очевидно, что любое число этого отрезка может быть значением как первой, так и второй из этих функций).

Для некоторых значений аргумента t значения $\cos t$ и $\sin t$ определяются из геометрических соображений. Нам известны декартовы координаты точек $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $D\left(\frac{3}{2}\pi\right)$, а именно: $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(-1;\ 0)$, $D(0;\ -1)$.

Отсюда получаем:

$$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0,\ \cos \frac{\pi}{2} = 0,\ \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\cos \pi = -1,\ \sin \pi = 0,\ \cos \frac{3}{2}\pi = 0,\ \sin \frac{3}{2}\pi = -1.$$

Вычислим далее $\cos \frac{\pi}{4}$ и $\sin \frac{\pi}{4}$. Для этого заметим, что если $\angle MOP = \frac{\pi}{4}$, то прямоугольный треугольник MPO равнобедренный (рис. 132). Но тогда, поскольку $OM = 1$, имеем по теореме Пифагора $2MP^2 = 1$, откуда $MP = OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как обе координаты точки M положительны, то $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

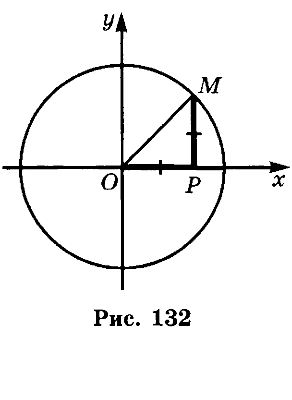


Рис. 132

Теперь найдем $\cos \frac{\pi}{6}$ и $\sin \frac{\pi}{6}$. Для этого вспомним, что длина катета, лежащего против угла в 30°, равна половине длины гипотенузы. Поэтому если $\angle MOP = \frac{\pi}{6}$, то $MP = \frac{1}{2}MO = \frac{1}{2}$ и по теореме Пифагора получаем

$$OP^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},\ \text{т. е. } OP = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как координаты точки M положительны, находим $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Таким же образом доказывается, что $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Сведем полученные результаты в следующую таблицу:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Упражнения

490. Может ли косинус быть равным:

1) $0{,}471$; 4) $\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$; 7) $\frac{\sqrt{10}}{\pi}$; 10) $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

2) $\frac{8}{7}$; 5) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{b}{\sqrt[4]{b^4 + 1}}$; 11) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$;

3) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 6) $\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $a > 1$; 9) $\frac{\sqrt{10}}{4}$; 12) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$?

491. Найдите $\sin\alpha + \cos\alpha$, если: а) $\alpha = 0°$; б) $\alpha = 90°$; в) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; г) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

492. Обруч катится без скольжения по прямой линии, причем за единицу времени центр обруча перемещается на расстояние, равное его радиусу R. Найдите положение точки M в момент времени t, если в начальный момент времени $t = 0$ она была точкой касания окружности и прямой. Оси координат расположите как на рисунке 133.

493. Радиус OA окружности имеет длину R и образует с осью абсцисс угол α (рис. 134). Точка A является центром второй окружности, радиус которой имеет длину r. Определите положение точки M второй окружности, если радиус AM образует с радиусом OA первой окружности угол β.

494. Обруч радиуса r катится без скольжения по обручу радиуса $R \geqslant r$, причем луч OO_1, соединяющий центры этих окружностей, описывает за единицу времени угол в 1 радиан. Определите положение точки M в момент времени t, если в начальный момент времени $t = 0$ она была точкой касания обеих окружностей и находилась на оси абсцисс. Разберите случаи, когда вторая окружность находится вне первой и когда она находится внутри нее. Отдельно рассмотрите случаи, когда $r = R$, $r = \frac{R}{2}$, $r = \frac{R}{4}$.

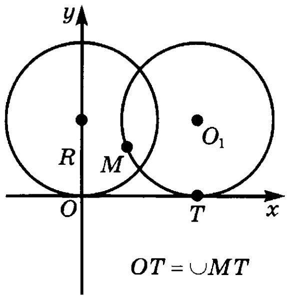


Рис. 133

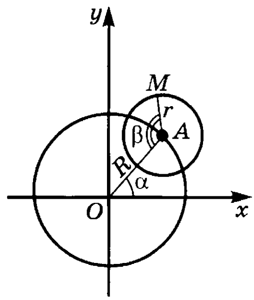


Рис. 134

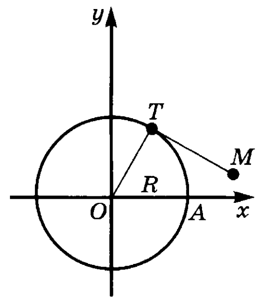


Рис. 135

495. На обруч намотана нить, конец которой находится в точке A. Эта нить разматывается так, что она все время касается обруча, причем за единицу времени точка касания пробегает по обручу дугу в 1 рад. Определите положение конца нити в момент времени t, если радиус обруча равен R (рис. 135).

496. На параллели, имеющей широту θ, взяты точки, разность долгот которых равна φ. Найдите длину дуги параллели между этими точками, если радиус сферы равен R.

497. На рисунке 136 изображено сечение моста, где ACB — дуга окружности; $AB = 20$ м, $CH = 1{,}2$ м и $CT = 1$ м. Определите площадь этого сечения.

498. Найдите направление и величину равнодействующей двух сил, приложенных к точке A, если одна из них равна 8Н, вторая — 5Н и угол между ними равен 75°.

499. Найдите направление и величину равнодействующей трех сил, приложенных к точке A, если их величины 14Н, 21Н и 35Н, а углы с положительным направлением оси абсцисс равны 25°, 48°15′ и 107°20′.

500*. Маяки A и B находятся на расстоянии 4,54 км друг от друга. Направление от корабля к первому маяку образует с направлением на север угол 42,3° к востоку, а ко второму маяку — угол 4,4° к западу. После того как корабль прошел некоторое расстояние по курсу, образующему угол 81,8° с северным направлением к востоку, направления на маяки A и B образуют с направлением на север углы 6,8° и 56° (к западу). Определите расстояние, пройденное кораблем.

501. Маяк был виден с корабля в направлении, образующем угол 26° с направлением на юг (к западу). После того как корабль проплыл 3,8 км в направлении, образующем с направлением на юг 85° (к западу), направление на маяк образует с направлением на юг угол 28° (к востоку). Определите расстояние от корабля до маяка в начале и в конце его пути.

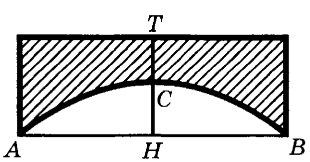


Рис. 136

502. С вершины холма, находящегося на левом берегу реки, этот берег виден под углом 32,1° к горизонтальному направлению, а правый берег — под углом $25,4°$. Определите высоту холма и расстояние от вершины холма до берега реки, если ширина реки равна 121 м.

503. В северном полушарии взята точка M, имеющая долготу φ и широту θ. Найдите:

1) расстояние этой точки до плоскости экватора;

2) координаты проекции точки на плоскость экватора, если ось абсцисс проходит через точку пересечения экватора с нулевым меридианом.

Проведите расчеты при $\varphi = 25°15'$, $\theta = 63°18'$, приняв радиус Земли $R = 6367$ км.

504. Выведите формулу для угла между радиусами, направленными в точки A и B на сфере, если географические координаты точек равны (φ_1, θ_1) и (φ_2, θ_2).

2. Периодические процессы и функции. В природе и технике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются по истечении некоторого промежутка времени. Например, если маятник делает одно полное колебание за T секунд, то его отклонение от положения равновесия в моменты времени t, $t + T$, $t + 2T$ и т. д. будет одним и тем же. Периодически с периодом в 1 год меняется расстояние Земли от Солнца, а с периодом в 1 лунный месяц меняются фазы Луны. Периодически изменяющиеся величины описывают с помощью периодических функций.

Определение 1. Число T называют *периодом функции* f, если для любого t, при котором эта функция определена, выполняются равенства

$$f(t - T) = f(t) = f(t + T). \tag{1}$$

Из этого определения вытекает, что если T — период функции f и она определена при некотором значении аргумента t, то она должна быть определена и при значениях аргумента $t - T$ и $t + T$ (иначе не могло бы выполняться равенство (1)).

Заметим, что число 0 является периодом любой функции.

Теорема 1. *Если T — период функции f, то $-T$ тоже является периодом этой функции. Если T_1 и T_2 — периоды f, то и $T_1 + T_2$ — период той же функции.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что в равенство (1) числа T и $-T$ входят равноправно. Второе же утверждение следует из того, что

$$f(t + T_1 + T_2) = f(t + T_1) = f(t)$$

и аналогично

$$f(t - (T_1 + T_2)) = f(t - T_1 - T_2) = f(t - T_1) = f(t).$$

Следствие. *Если T — период функции f, то при любом целом значении n число nT также является периодом этой функции.*

Доказательство. В силу первого утверждения теоремы 1 достаточно рассмотреть случай, когда n — натуральное число. При $n = 1$ истинность следствия вытекает из того, что T — период функции f. Если kT — период этой функции, то по второму утверждению той же теоремы и $kT + T = (k + 1)T$ является ее периодом. С помощью математической индукции убеждаемся в справедливости следствия для всех натуральных, а следовательно и для всех целых значений n.

Определение 2. Функцию f называют *периодической*, если она имеет хотя бы один отличный от нуля период.

Если T — положительный период функции f и известен график этой функции на каком-либо промежутке $[a; a + T)$, то можно получить ее график на всей числовой оси с помощью параллельных переносов вдоль оси абсцисс на kT, где $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 137). Обычно выбирают $a = 0$ или $a = -\frac{T}{2}$.

Если функция f постоянна, то любое число является ее периодом. Можно доказать, что если функция f отлична от постоянной, непрерывна и периодична, то среди ее положительных периодов есть наименьший.

Определение 3. Наименьший положительный период функции называется *основным периодом* этой функции.

Пример 1. Докажем, что функция $\{x\}$ (дробная часть x) периодична, и найдем ее основной период.

Решение. От прибавления к x целого числа дробная часть x не меняется. Поэтому любое отличное от нуля целое число является периодом функции $\{x\}$. Наименьшим из положительных целых чисел является 1. Докажем, что число 1 — основной период функции $\{x\}$. Для этого достаточно показать, что ни одно положительное число T, меньшее 1, не может быть периодом функции $\{x\}$. Но при $x = 0$ имеем $\{x\} = 0$, а $\{x + T\} = \{T\} = T \neq 0$ (поскольку $0 < T < 1$). Значит, равенство $\{x\} = \{x + T\}$ не выполняется при $x = 0$, и потому T не является периодом функции $\{x\}$. Это и значит, что основной период функции $\{x\}$ равен 1.

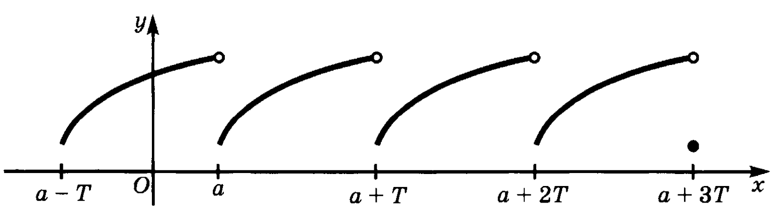


Рис. 137

Теорема 2. *Если T — основной период функции f, то все остальные периоды той же функции кратны T.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно провести доказательство для положительных периодов функции f. Если T_1 — такой период, то он не может быть меньше T, так как T — наименьший из положительных периодов функции f. Но если $T_1 \geqslant T$, то найдется такое натуральное число n, что $nT \leqslant T_1 < (n+1)T$. Из теоремы 1 и ее следствия вытекает, что $-nT$, а потому и $T_1 - nT$ — период функции f. Но $0 \leqslant T_1 - nT < T$, а из сказанного выше следует, что период $T_1 - nT$ не может быть положительным и меньшим, чем T. Значит, $T_1 - nT = 0$, т. е. $T_1 = nT$.

Упражнения

505. Докажите, что сумма, произведение и частное двух функций, имеющих период T, обладают тем же периодом.

506. 1) Докажите, что если функция f имеет период T и $D(g) \supset E(f)$, то функция $g \circ f$ имеет тот же период.

2) Докажите, что если числа $\frac{7}{3}$ и $\frac{4}{5}$ являются периодами функции f, то и $\frac{1}{15}$ является ее периодом.

507. Докажите, что если функции f и g имеют период T, а m кратно k и l, то функция F, где $F(t) = f\left(\frac{t}{k}\right) + g\left(\frac{t}{l}\right)$, имеет период mT.

508. Найдите основной период функции:

1) $\left\{\frac{x}{3}\right\} + 3\left\{\frac{x}{5}\right\}$;

2) $\{3x\} + 8\{5x\}$;

3) $\sqrt{1 + \{4x\}}$;

4) $\frac{2\{6x\} - \{4x\}}{3\{6x\} + \{4x\}}$;

5) $\{x\} + 3\{7{,}1x\}$;

6) $\sqrt{\{8x\} - \{5x\} + 3}$;

7) $\left\{2x - \frac{1}{2}\right\} + \left\{5x + \frac{1}{4}\right\}$;

8) $\sqrt{\{5{,}3x\} - \left\{11x + \frac{4}{5}\right\} + 4}$.

509. Докажите, что не являются периодическими функции:

1) $\left\{\sqrt{|x|}\right\}$; 2) $\{x^2\}$; 3) $\{x\} + \left\{x\sqrt{2}\right\}$.

3. Некоторые свойства синуса и косинуса. Поскольку функции $\sin t$ и $\cos t$ определены геометрически, их свойства будут выводиться на основании геометрических соображений.

а) *Функция* $\sin t$ *обращается в нуль лишь при значениях* t, *имеющих вид* πn, $n \in \mathbf{Z}$, *а функция* $\cos t$ *обращается в нуль лишь при значениях* t, *имеющих вид* $\pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

В самом деле, на координатной окружности есть лишь две точки, ординаты которых равны нулю, — точки $A(0) = A(1;\ 0)$ и $C(\pi) = C(-1;\ 0)$. Эти точки соответствуют числам вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $\pi + 2\pi n = \pi(2n + 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Объединяя полученные два множества чисел, получаем множество $\{\pi n | n \in \boldsymbol{Z}\}$ чисел, для которых $\sin t = 0$.

Точно так же на координатной окружности есть лишь две точки, абсциссы которых равны нулю: точки $B\left(\frac{\pi}{2}\right) = B(0;\ 1)$ и $D\left(\frac{3\pi}{2}\right) = D(0;\ -1)$. Они соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Объединяя эти два множества чисел, получаем множество $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n \middle| n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ чисел, для которых $\cos t = 0$.

б) *Функции* $\cos t$ *и* $\sin t$ *периодичны. Их основной период равен* 2π.

В самом деле, точки $M(t)$, $N(t + 2\pi)$ и $P(t - 2\pi)$ совпадают, а потому имеют одни и те же координаты. Так как декартовы координаты точки $M(t)$ равны $\cos t$ и $\sin t$ и аналогично для двух других точек, то имеем:

$$\cos(t - 2\pi) = \cos t = \cos(t + 2\pi), \tag{1}$$

$$\sin(t - 2\pi) = \sin t = \sin(t + 2\pi). \tag{2}$$

Равенства (1), (2) доказывают, что 2π — один из положительных периодов функций $\cos t$ и $\sin t$. Докажем, что у этих функций нет положительных периодов, меньших, чем 2π. В самом деле, если бы T, где $0 < T < 2\pi$, было бы периодом для функции $\cos t$, то при $t = 0$ должно было бы выполняться равенство $\cos T = \cos 0 = 1$. Но на координатной окружности есть лишь одна точка с абсциссой 1, а именно начало отсчета $A(0) = A(1;\ 0)$. Она соответствует числам вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Поскольку $0 < T < 2\pi$, то T не имеет такого вида, и потому равенство $\cos T = 1$ ложно. Этим доказано, что функция $\cos t$ не имеет положительных периодов, меньших, чем 2π, а потому 2π является основным периодом этой функции. Доказательство для функции $\sin t$ проводится аналогично (надо рассмотреть точку $B(0;\ 1)$).

в) *Функция* $\cos t$ *четна, а функция* $\sin t$ *нечетна.*

В самом деле, в п. 4 § 1 было отмечено, что точки $M(t)$ и $N(-t)$ симметричны относительно оси абсцисс. Поэтому абсциссы этих точек равны, а их ординаты отличаются друг от друга лишь знаком. Это означает, что

$$\cos(-t) = \cos t, \tag{3}$$

$$\sin(-t) = -\sin t. \tag{4}$$

г) *При сдвиге на* π *функции* $\cos t$ *и* $\sin t$ *меняют знаки*:

$$\cos(t + \pi) = -\cos t, \tag{5}$$
$$\sin(t + \pi) = -\sin t. \tag{6}$$

В самом деле, в п. 4 § 1 было доказано, что точки $M(t)$ и $N(t + \pi)$ симметричны относительно начала координат O. Поэтому их координаты противоположны по знаку. Это и выражено равенствами (5), (6).

Из утверждений в) и г) получаем:

$$\cos(\pi - t) = -\cos t, \tag{7}$$
$$\sin(\pi - t) = \sin t. \tag{8}$$

В самом деле,

$$\cos(\pi - t) = \cos(\pi + (-t)) = -\cos(-t) = -\cos t,$$
$$\sin(\pi - t) = \sin(\pi + (-t)) = -\sin(-t) = \sin t.$$

д) *Для любого значения* t *выполняется равенство*

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1. \tag{9}$$

В самом деле, возьмем на координатной окружности любую точку $M(t) = M(\cos t; \sin t)$. По теореме Пифагора имеем $MP^2 + OP^2 = OM^2$. Так как $MP^2 = \sin^2 t$, $OP^2 = \cos^2 t$, $OM^2 = 1$, то получаем отсюда равенство (9).

Упражнения

510. Могут ли синус и косинус одного и того же аргумента быть равными соответственно:

1) $\frac{5}{13}$ и $\frac{12}{13}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$?

511. Докажите тождества:

1) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ при $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$;

2) $\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}$ при $\cos x \neq 0$;

3) $\frac{2\sin x \cos x - \cos x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ при $\sin x \neq \frac{1}{2}$, $\sin x \neq 0$;

4) $\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = 7 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

при $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$;

5) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$;

6) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$;

7) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x - 1 = \sin^2 x - \cos^2 x$;

8) $\dfrac{1}{1-\sin x}+\dfrac{1}{1+\sin x}=\dfrac{2}{\cos^2 x}$ при $\sin x \neq 1$ и $\sin x \neq -1$;

9) $\sin^2 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=1$;

10) $\sin^2 x\cos^2 y+\sin^2 x\sin^2 y+\cos^2 x\sin^2 y+\cos^2 x\cos^2 y=1$;

11) $\sin^2 x+\cos^2 x\sin^2 y+\cos^2 x\cos^2 y=1$;

12) $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}=1-\sin x\cos x$ при $\sin x \neq -\cos x$.

13) $3(\sin^4 x+\cos^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x)=1$.

512. Замените выражение $\sin^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$ тождественным ему выражением, не содержащим $\sin x$.

513. Пусть $\sin x+\cos x=m$. Не вычисляя отдельно $\sin x$ и $\cos x$, найдите:
1) $\sin^3 x+\cos^3 x$; 2) $\sin^4 x+\cos^4 x$.

514. Решите уравнения:

1) $\cos 5x=0$; 5) $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$;

2) $\sin 4x=0$; 6) $\cos\left(8x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$;

3) $\sin\dfrac{x}{2}=0$; 7) $\sin\left(\dfrac{x}{7}+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$;

4) $\cos\dfrac{x}{3}=0$; 8) $\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

515. Упростите выражения:
1) $3\sin(\pi-x)+2\sin(-x)-\sin(\pi+x)$;
2) $4\cos(\pi-x)-3\cos(-x)+7\cos(\pi+x)$;
3) $5\sin(\pi-x)+3\cos(-x)-6\cos(\pi+x)-4\sin(-x)$;
4) $9\cos(\pi-2x)+5\cos(\pi+2x)+12\cos(-x)$.

516. Какие из следующих функций являются четными или нечетными:
1) $\sin^7 x$; 2) $\cos^3 x$; 3) $\sin^4 x$; 4) $3\cos^3 x+5\sin^6 x$;
5) $\cos^3 x+\sin^5 x$; 6) $2\cos^2 x+3\sin^5 x$; 7) $\dfrac{2\sin^2 x+\cos^7 x+1}{\sin^3 x}$?

517. Найдите период функции:

1) $\sin 3x+2\cos 5x$; 2) $\sin\dfrac{4}{5}x+3\cos\dfrac{7}{8}x+\cos 5x$;

3) $\sqrt{1+\cos 4x}$; 4) $\dfrac{2\sin 6x-\cos 4x}{3\sin 6x+\cos 4x}$;

5) $\sin x-3\cos 7{,}1x$; 6) $\sqrt{\sin 8x-\cos 5x+3}$;

7) $2\sin 4x-3\sin 5x-7\cos\left(\dfrac{x}{3}+3\right)$;

8) $\sqrt{\cos 5{,}3x-\cos 11x+4}$.

518. Докажите, что следующие функции не являются периодическими:
1) $\cos\sqrt{|x|}$; 2) $\sin x^2$; 3) $\cos x + \sin\left(x\sqrt{2}\right)$; 4) $\cos x^3$.

519. Вычислите значения:

1) $\sin 150°$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

2) $\cos 210°$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$;

3) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 6) $\cos^2\left(-\frac{7\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$.

520. Докажите, что $\sqrt{1 + 2\sin x\cos x} = |\sin x + \cos x|$.

521. Пусть $\sin x\cos x = \frac{2}{5}$. Вычислите $\left|\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right|$.

522. Докажите, что при $\cos x \neq -1$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{|\sin x|}{1 + \cos x}.$$

4. Знаки синуса и косинуса и промежутки монотонности. Точки $A(0) = A(1;\ 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right) = B(0;\ 1)$, $C(\pi) = C(-1;\ 0)$, $D\left(\frac{3}{2}\pi\right) = D(0;\ -1)$ разбивают координатную окружность на 4 дуги, называемые *четвертями* этой окружности (рис. 138). При перемещении точки $M(t)$ от точки A до точки B ее абсцисса уменьшается от 1 до 0, а ордината возрастает от 0 до 1. Отсюда вытекает, что на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ неотрицательна и возрастает от 0 до 1, а функция $\cos t$ неотрицательна и убывает от 1 до 0.

Аналогичным образом убеждаемся, что на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ функция $\sin t$ неотрицательна и убывает от 1 до 0, а функция $\cos t$ неположительна и убывает от 0 до -1.

На отрезке $\left[\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right]$ обе функции неположительны, причем функция $\sin t$ убывает от 0 до -1, а функция $\cos t$ возрастает от -1 до 0. Наконец, на отрезке $\left[\frac{3}{2}\pi;\ 2\pi\right]$ функция $\sin t$ неположительна, а функция $\cos t$ неотрицательна, причем функция $\sin t$ возрастает от -1 до 0, а функция $\cos t$ возрастает от 0 до 1.

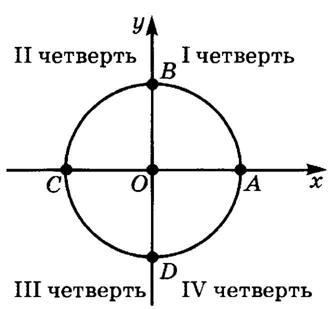


Рис. 138

Полученная информация о знаках функций $\sin t$ и $\cos t$ и об их промежутках монотонности дана в таблице:

Четверть / Функция	I $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$	III $\pi \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}\pi$	IV $\frac{3}{2}\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$
$\sin t$	Возрастает от 0 до 1, неотрицат.	Убывает от 1 до 0, неотрицат.	Убывает от 0 до −1, неположит.	Возрастает от −1 до 0, неположит.
$\cos t$	Убывает от 1 до 0, неотрицат.	Убывает от 0 до −1, неположит.	Возрастает от −1 до 0, неположит.	Возрастает от 0 до 1, неотрицат.

Пример 1. Найдем значение $\cos t$, если $\sin t = -\frac{5}{13}$, причем $\pi \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}\pi$.

Решение. Так как $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, то имеем $\left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 t = 1$, откуда $\cos^2 t = \frac{144}{169}$, т. е. $|\cos t| = \frac{12}{13}$. Поскольку $\pi \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}\pi$, то $\cos t \leqslant 0$ и потому $\cos t = -\frac{12}{13}$.

Пример 2. Найдем знак функции $5\sin^3 t \cos t + 4\sin t \cos^2 t$ при $\frac{3}{2}\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение. Если $\frac{3}{2}\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$, то $\sin t \leqslant 0$, $\cos t \geqslant 0$. Но тогда имеем $\sin^3 t \cos t \leqslant 0$, $\sin t \cos^2 t \leqslant 0$, и потому

$$5\sin^3 t \cos t + 4\sin t \cos^2 t \leqslant 0.$$

Пример 3. Докажем, что функция $4\sin^3 t + \frac{8}{\cos t} + \frac{7\sin t}{\cos^3 t}$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\sin t$ положительна и возрастает, а функция $\cos t$ положительна и убывает. Отсюда следует, что функции $4\sin^3 t$, $\frac{8}{\cos t}$ и $\frac{7\sin t}{\cos^3 t}$ положительны и возрастают (см. п. 2 § 3 главы 3). Поэтому возрастает и сумма указанных функций, т. е. функция

$$4\sin^3 t + \frac{8}{\cos t} + \frac{7\sin t}{\cos^3 t}.$$

Упражнения

523. В какой четверти лежат точки $M(t)$ и каковы знаки $\sin t$ и $\cos t$, если t равно:

1) $\frac{7}{6}\pi$; 2) $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{5}{3}\pi$; 4) $\frac{\pi}{8}$; 5) 2; 6) 4,5; 7) $1{,}2\pi$; 8) $0{,}674\pi$?

524. В каких четвертях находятся углы:

1) $215°$;	6) 1,3;	11) $-47°43'$;
2) $172°18'2''$;	7) 2,345;	12) $-99°19'35''$;
3) $164°33'$;	8) 4;	13) $-310°$;
4) $297°91'$;	9) 1,592;	14) $-170°$?
5) $13\,100°$;	10) 6,5;	

525. В каких четвертях лежат точки $M(t)$, для которых t равно:

1) $-1{,}4\pi$; 2) $-0{,}674\pi$; 3) -2; 4) $-1{,}415$?

526. Найдите знаки выражений:

1) $\sin \frac{7}{6}\pi \cos \frac{3}{4}\pi$;

2) $\sin \frac{5}{3}\pi \cos \frac{2}{5}\pi \cos \frac{7}{4}\pi$;

3) $\sin 1{,}3 \cos(-1{,}5) \sin(-1{,}9)$.

527. В каких четвертях синус и косинус имеют одинаковые знаки?

528. Какой четверти принадлежит угол t, если:

1) $\sin t = 4 \cos t$; 3) $\cos t = 3 \sin^3 t$;

2) $\sin t = \cos^2 t$; 4) $\sin t = \cos^4 t$?

529. Вычислите $\cos t$, если $\sin t = -\frac{7}{25}$ и t лежит в четвертой четверти.

530. Вычислите $\sin t$, если $\cos t = \frac{5}{13}$ и t лежит в первой четверти.

531. Что больше:

1) $\sin 30°$ или $\sin \frac{\pi}{4}$; 3) $\cos 18°$ или $\cos \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos \frac{\pi}{6}$ или $\cos \frac{\pi}{8}$; 4) $\sin 40°$ или $\cos 40°$?

532. Определите величину выражений:

1) $\cos 0° \cos 270° - \dfrac{2\cos(-180°)}{\cos 0°}$;

2) $\dfrac{3\sin 0°}{\cos 180°} - \dfrac{2}{\sin(-90°)} - \cos 360°$;

3) $\sin \pi \cos \frac{3}{2}\pi + \dfrac{1}{\cos 2\pi} + \dfrac{1}{\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}$;

4) $\dfrac{\sin^2 45°}{\cos^2 30°} + \dfrac{\sin^2 30°}{\cos^2 45°}$.

533. Для функции $f(x) = 4\cos 3x - 2\sin 3x$ вычислите $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f(\pi)$.

534. Определите знак разности:

1) $\sin 23° - \sin 36°$;
2) $\cos 37° - \cos 18°$;
3) $\cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{2\pi}{9}$;
4) $\cos 212° - \cos 213°$;
5) $\sin 310° - \sin 347°$;
6) $\cos \frac{5}{6}\pi - \cos \frac{5}{7}\pi$;
7) $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{18}$;
8) $\cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{11}$;
9) $\cos \frac{\pi}{11} - \sin \frac{\pi}{11}$;
10) $\sin \frac{2}{3}\pi - \cos \frac{3}{4}\pi$;
11) $\sin 16° - \cos 375°$.

535. Укажите промежутки возрастания и убывания функций:

1) $\sin \frac{x}{2}$;
2) $\cos \frac{x}{2}$;
3) $\sin 3x$;
4) $\cos 4x$;
5) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
6) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
7) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
8) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right)$;
9) $\sin^2 x$;
10) $2\cos^2 \frac{x}{2}$;
11) $-2\sin^4 \frac{x}{2}$;
12) $\frac{1}{2\sin x}$;
13) $\frac{1}{\sin(3x + 5)}$;
14) $\sqrt{|\cos x|}$;
15) $\sqrt{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$;
16) $\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$.

536. Постройте графики функций:

1) $\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$;

2) $\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$;

3) $\left(\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} - \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}\right)$.

5. Непрерывность синуса и косинуса. Ясно, что при малом изменении значения t точка $M(t)$ мало перемещается по координатной окружности, а потому ее координаты (т. е. $\cos t$ и $\sin t$) мало изменяются. Это показывает, что функции $\cos t$ и $\sin t$ непрерывны при всех значениях t. Хотя проведенное рассуждение и не является строгим математическим доказательством непрерывности функций $\cos t$ и $\sin t$, оно дает указание, как построить такое доказательство[1].

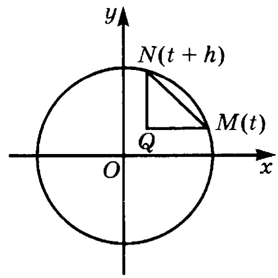


Рис. 139

Теорема 1. *Функции* $\cos t$ *и* $\sin t$ *непрерывны при всех значениях* t.

Доказательство. Сначала докажем непрерывность функции $\cos t$. Нам надо доказать, что при любом значении t выполняется равенство $\lim\limits_{h \to 0} \cos(t + h) = \cos t$, т. е. что функция $\cos(t + h) - \cos t$ бесконечно мала, когда h стремится к нулю. Из рисунка 139 видно, что $|\cos(t + h) - \cos t|$ — длина катета QM прямоугольного треугольника QMN. Поэтому

$$|\cos(t + h) - \cos t| = QM \leqslant MN \leqslant \smile MN = |h|. \qquad (1)$$

В силу теоремы 1 п. 3 § 2 главы 4 из (1) следует, что функция $|\cos(t + h) - \cos t|$ бесконечно мала при $h \to 0$. Тем самым доказана непрерывность функции $\cos t$ при любом значении t. Непрерывность функции $\sin t$ доказывается аналогично.

Из теоремы 1 вытекает, что $\lim\limits_{t \to a} \cos t = \cos a$ и $\lim\limits_{t \to a} \sin t = \sin a$ при любом значении a. В частности, $\lim\limits_{t \to 0} \cos t = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{t \to 0} \sin t = \sin 0 = 0$.

Упражнения

537. Вычислите следующие пределы:

1) $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{3}} (\cos^3 t + \sin^3 t)$;

2) $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{4}} (\cos^4 t + 2\sin^4 t)$;

3) $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos t \sin t + 1}{\cos^4 t + \sin^4 t}$;

4) $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3 t + 5}{\cos^8 t + \sin^8 t}$.

[1] Вообще при доказательстве математических утверждений обычно сначала проводят наглядное рассуждение (как говорят, доказывают утверждение «на пальцах») и лишь потом уточняют это рассуждение.

538. Найдите точки разрыва и промежутки непрерывности функций:

1) $\frac{\cos 2x}{\sin 3x}$; 3) $\frac{x^2}{\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}$; 5) $\frac{1}{x^2 - 8} + \frac{1}{\sin x}$;

2) $\frac{\cos x + \sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$; 4) $x^2 + \frac{\sin 7x}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$; 6) $\frac{1}{\sin 5x} + \frac{1}{\cos 5x}$.

6. Синусоида и косинусоида. Мы исследовали свойства тригонометрических функций. Построим на основании этого исследования графики синуса и косинуса.

В силу периодичности синуса достаточно построить график функции $\sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$, а потом продолжить его по периодичности на всю ось. Далее, так как функция $\sin x$ нечетна, достаточно построить ее график на отрезке $[0; \pi]$. Тогда на отрезке $[-\pi; 0]$ ее график получится из построенного с помощью симметрии относительно начала координат. Наконец, соотношение $\sin(\pi - x) = \sin x$ показывает, что в точках x и $\pi - x$ ординаты графика функции $\sin x$ одинаковы. Но точки x и $\pi - x$ симметричны относительно точки $\frac{\pi}{2}$, а потому точки $M(x; \sin x)$ и $N(\pi - x; \sin(\pi - x))$ симметричны относительно вертикальной прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Иными словами, график функции $\sin x$ симметричен относительно указанной прямой. Это позволяет ограничиться построением графика на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция $\sin x$ непрерывна на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и возрастает на нем от 0 до 1. Для более точного построения графика этой функции разделим дугу AB на 4 части, одновременно деля на столько же частей отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 140). Проведем через точки деле-

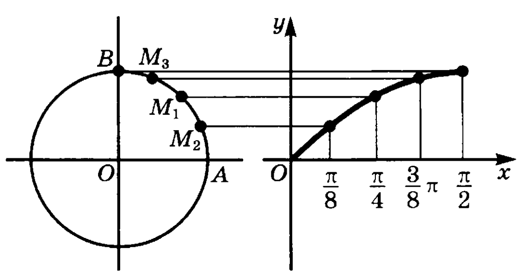


Рис. 140

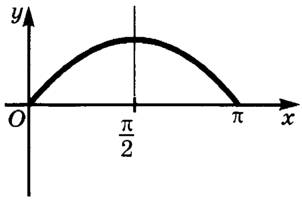


Рис. 141

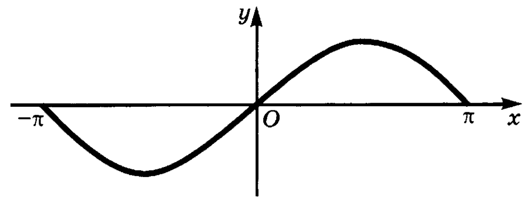


Рис. 142

ния дуги прямые, параллельные оси абсцисс, а через соответствующие точки деления отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ прямые, параллельные оси ординат. Точки пересечения соответствующих друг другу прямых лежат на искомом графике. Непрерывная линия, проходящая через полученные точки, и даст эскиз графика функции $\sin x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. В п. 2 § 4 будет показано, что полученная кривая образует в точке $O(0; 0)$ угол $\frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси абсцисс.

Применим к полученной линии сначала осевую симметрию относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, потом центральную симметрию относительно начала координат (рис. 141, 142) и, наконец, продолжим получившийся график с периодом 2π на всю ось. Мы получим график функции $\sin x$; его называют *синусоидой* (рис. 143).

График функции $\cos x$ строится аналогично. В силу периодичности этой функции достаточно построить график на отрезке $[-\pi; \pi]$, а в силу четности данной функции достаточно построить график на отрезке $[0; \pi]$, а потом симметрично отразить полученный график относительно оси ординат. Наконец, в силу соотношения $\cos(\pi - x) = -\cos x$ достаточно построить график на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и отразить его относительно точки $K\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

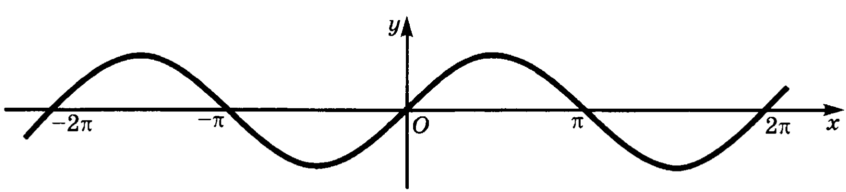


Рис. 143

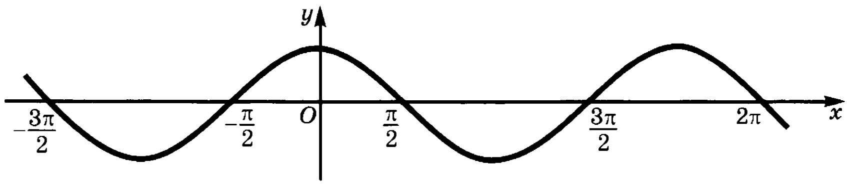


Рис. 144

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ график строится аналогично тому, как это было сделано при построении синусоиды, с той лишь разницей, что при заданном значении x ордината точки графика равна абсциссе соответствующей точки координатной окружности. Этот график (косинусоида) показан на рисунке 144. Ниже будет показано, что косинусоида получается из синусоиды с помощью параллельного переноса на $\frac{\pi}{2}$ влево.

Упражнения

539. Начертите графики функций:

1) $4 \sin x$; 4) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 7) $[\sin x]$;

2) $|\sin x|$; 5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 8) $\{\sin x\}$;

3) $\cos|x|$; 6) $\sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$; 9) $5 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

540. Изобразите множество таких точек $M(x; y)$, что:

1) $|y| = \sin x$; 3) $|y| = |\cos x|$;

2) $|y| = \sin|x|$; 4) $|y| = \left|\sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|\right|$.

7. Гармонические колебания и их графики. Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Простейшими из них являются так называемые гармонические колебания. Пусть по окружности радиуса A движется точка, имеющая постоянную угловую скорость ω. Это значит, что за единицу времени точка описывает дугу в ω радиан. Тогда за t единиц эта точка опишет дугу в ωt радиан.

Будем считать, что центр окружности, по которой движется точка, находится в начале координат, причем в момент времени $t = 0$ точка находилась в положении $M_0(\alpha)$ и движется в положительном направлении. Тогда к моменту времени t точка перейдет в положение $M(\omega t + \alpha)$.

Обозначим через N и P проекции точки M на оси абсцисс и ординат соответственно. При движении точки M по окружности эти точки колеблются по отрезкам длиной $2A$ с серединой в точке O. Законы движения точек N и P имеют соответственно вид

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{1}$$

и

$$y = A\sin(\omega t + \alpha). \tag{2}$$

В самом деле, обозначим через T точку пересечения луча OM с окружностью единичного радиуса, концентрической данной окружности (рис. 145). Координаты точки T в момент времени t равны $\cos(\omega t + \alpha)$ и $\sin(\omega t + \alpha)$, а потому координаты точки M задаются формулами (1), (2). Это и значит, что точки N и P совершают колебания по законам (1) и (2). Колебания, подобные движению точек N и P, называют *гармоническими колебаниями*. Для определенности сохраним это название за колебаниями по закону $A\sin(\omega t + \alpha)$ (их называют также *синусоидальными колебаниями*). Ниже (см. п. 3 § 3) будет доказано, что (1) получается из (2) заменой α на $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Число A, задающее размах гармонических колебаний, называют *амплитудой*, число ω — *угловой частотой* (оно показывает, сколько полных колебаний совершает точка за 2π единиц времени), а число α, показывающее начальное положение точки на окружности, — *начальной фазой*.

По синусоидальному закону (2) меняются многие величины — отклонение от положения равновесия качающегося вверх-вниз шарика на пружине, сила и напряжение переменного тока и т. д.

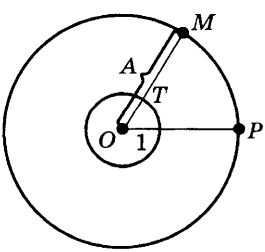


Рис. 145

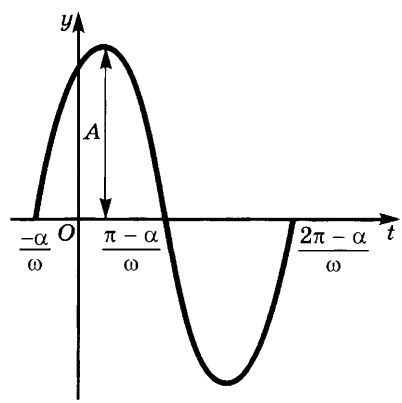


Рис. 146

График гармонического колебания (2) получается из синусоиды (графика $\sin t$) следующим образом. Запишем функцию (2) в виде $A \sin \omega \left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right)$. Теперь ясно, что нужно выполнить над синусоидой следующие преобразования:

а) растяжение от оси абсцисс с коэффициентом A;

б) сжатие к оси ординат с коэффициентом ω;

в) параллельный перенос, отображающий начало координат в точку $L\left(0; -\frac{\alpha}{\omega}\right)$ (рис. 146).

Пример 1. Построим график функции $5 \sin \left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Выполняем последовательно растяжение от оси абсцисс с коэффициентом 5, сжатие к оси ординат с коэффициентом 2 и параллельный перенос на $\frac{\pi}{6}$ влево.

Для построения графика гармонического колебания обычно отыскивают значения, при которых $\sin(\omega t + \alpha)$ обращается в нуль (точки пересечения графика с осью абсцисс). Деля пополам полученные отрезки, находят точки экстремума функции $A \sin(\omega t + \alpha)$. В этих точках значения функции равны соответственно A или $-A$ в зависимости от знака функции.

Пример 2. Построим график функции $5 \sin \left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Функция $\sin \left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ обращается в нуль, если $2t + \frac{\pi}{3} = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, т. е. если $t = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$. При $n = 0$ имеем $t = -\frac{\pi}{6}$, при $n = 1$ $t = \frac{\pi}{3}$, а при $n = 2$ $t = \frac{5\pi}{6}$. В точке $\frac{\pi}{12}$ — середине отрезка $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ — эта функция принимает значение 1; в точке $\frac{7\pi}{12}$ — середине отрезка $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ — значение -1 и т. д. Умножив все ординаты на 5, получим график заданной функции.

Упражнения

541. Найдите амплитуду, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой, и постройте график:

1) $s = 5\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $s = 0{,}3\sin\left(0{,}2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $s = \frac{3}{4}\sin\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)$; 5) $s = \pi\sin 3t$;

3) $s = 2{,}8\sin\frac{t+2}{2}$; 6) $s = 4\sin(2t - 3)$.

8. Тангенс и котангенс числового аргумента. Определим еще две функции числового аргумента.

Определение. Частное от деления функции $\sin t$ на функцию $\cos t$ называют функцией $\operatorname{tg} t$ (*тангенсом*); частное от деления функции $\cos t$ на функцию $\sin t$ называют функцией $\operatorname{ctg} t$ (*котангенсом*).

Таким образом,

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Поскольку деление на нуль невозможно, функции $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ определены не для всех значений аргумента. Тангенс определен лишь для значений аргумента, при которых $\cos t \neq 0$, т. е. для значений t, отличных от $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Котангенс определен для значений аргумента, при которых $\sin t \neq 0$, т. е. отличных от πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пользуясь таблицей из п. 1, получаем следующую таблицу значений функций $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не определена	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} t$	Не определена	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Например, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Докажем следующие свойства функций $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$.

а) *Тангенс и котангенс являются периодическими функциями. Их основной период равен* π.

В самом деле, если $\cos t \neq 0$, то имеем

$$\operatorname{tg}(t+\pi)=\frac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)}=\frac{-\sin t}{-\cos t}=\operatorname{tg} t \tag{1}$$

и аналогично $\operatorname{tg}(t-\pi)=\operatorname{tg} t$. Значит, π является одним из периодов функции $\operatorname{tg} t$. Докажем, что π — основной период этой функции. Для этого заметим, что корнями уравнения $\operatorname{tg} t = 0$ являются значения t, при которых $\sin t = 0$, т. е. значения вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. Если $0 < T < \pi$, то равенство $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} 0$ не может иметь места и потому T не является периодом для $\operatorname{tg} t$. Значит, π — основной период для $\operatorname{tg} t$. Таким же путем доказывается, что π — основной период для $\operatorname{ctg} t$.

б) *Функции* $\operatorname{tg} t$ *и* $\operatorname{ctg} t$ *нечетны.* Если $\cos t \neq 0$, то имеем

$$\operatorname{tg}(-t)=\frac{\sin(-t)}{\cos(-t)}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\operatorname{tg} t. \tag{2}$$

Значит, функция $\operatorname{tg} t$ нечетна. Нечетность $\operatorname{ctg} t$ доказывается аналогично.

Из свойств а) и б) следует:

$$\operatorname{tg}(\pi - t) = -\operatorname{tg} t, \tag{3}$$
$$\operatorname{ctg}(\pi - t) = -\operatorname{ctg} t. \tag{4}$$

В самом деле,

$$\operatorname{tg}(\pi - t) = \operatorname{tg}(\pi + (-t)) = \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t.$$

Равенство (4) доказывается аналогично.

в) *Функции* $\operatorname{tg} t$ *и* $\operatorname{ctg} t$ *непрерывны для всех значений аргумента, при которых они определены.* Иными словами, $\operatorname{tg} t$ имеет разрывы в точках вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а $\operatorname{ctg} t$ — в точках вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

В самом деле, $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, а функции $\sin t$ и $\cos t$ непрерывны для всех значений t. Поэтому (см. теорему 2 п. 5 § 2 главы 4) функция $\operatorname{tg} t$ непрерывна для всех значений t, при которых $\cos t \neq 0$. Непрерывность функции $\operatorname{ctg} t$ для всех значений t, при которых $\sin t \neq 0$, доказывается аналогично.

г) *На промежутке* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *функция* $\operatorname{tg} t$ *возрастает от нуля до* $+\infty$, *а функция* $\operatorname{ctg} t$ *убывает от* $+\infty$ *до нуля.*

В самом деле, на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\sin t$ возрастает, а функция $\cos t$ убывает, причем обе эти функции неотрицательны.

Поэтому функция $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ возрастает на этом промежутке. При этом $\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$, а $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} t = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\sin t}{\cos t} = +\infty$, так как

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \sin t = 1, \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \cos t = +0.$$

Утверждение, касающееся функции $\operatorname{ctg} t$, доказывается аналогично.

Из нечетности функций $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ следует, что на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ обе эти функции отрицательны, причем функция $\operatorname{tg} t$ возрастает от $-\infty$ до нуля, а функция $\operatorname{ctg} t$ убывает от нуля до $-\infty$. Поведение этих функций на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ следует из их периодичности.

д) Установим некоторые тождества, связывающие функции $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$. В тех случаях, когда входящие в тождество функции определены не для всех значений t, будем считать, что тождество имеет место для всех значений t, при которых определены обе его части.

Первое тождество следует из равенств

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ и } \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Перемножая их, получаем

$$\operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t = 1. \tag{5}$$

Это тождество имеет место, если определены и $\operatorname{tg} t$, и $\operatorname{ctg} t$, т. е. если t не имеет вида $\frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Другое тождество получается, если разделить обе части равенства

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \tag{6}$$

на $\cos^2 t$ и принять во внимание, что $\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg}^2 t$:

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}. \tag{7}$$

Оно имеет место, если $\cos t \neq 0$, т. е. если

$$t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Деля обе части равенства (6) на $\sin^2 t$, получаем

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}. \qquad (8)$$

Это равенство имеет место, если $\sin t \neq 0$, т. е. если $t \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

С помощью соотношений (5), (6), (7), (8) можно, зная значение одной из функций $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$, находить значения остальных трех функций, если, кроме того, известны знаки искомых значений.

Пример. Найдем значения $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, если $\operatorname{ctg} t = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

Решение. Поскольку $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то $\sin t > 0$, $\cos t < 0$. Из формулы (5) получаем $\operatorname{tg} t = \dfrac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$. По формулам (7) и (8), учитывая, что $\cos t < 0$, $\sin t > 0$ при $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, находим:

$$\cos t = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}} = -\frac{3}{5}; \quad \sin t = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5}.$$

Упражнения

542. Определите величину выражений:

1) $a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} + b^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3}$;

2) $a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} + b^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3}$;

3) $a^2 \operatorname{tg}^2 0 + b^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + c^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}$;

4) $a \cos \pi + b \cos \frac{3}{2}\pi - c \sin \pi \operatorname{ctg} \frac{3}{2}\pi + d \sin \pi \operatorname{tg} 1{,}3\pi$;

5) $\sin^2 \pi - \cos^2 (-26{,}7\pi) \operatorname{tg} \pi$;

6) $a^2 \operatorname{ctg}^4 \frac{\pi}{3} + b^2 \operatorname{tg}^2 \pi$.

543. Какие тригонометрические функции могут принимать значения:

1) $\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, где $a > 0$;

2) $\frac{1}{4}\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right)$, где $a > 0$;

3) $\frac{a + b}{2\sqrt{ab}}$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$;

4) $\frac{2\sqrt{ab}}{a + b}$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$?

544. Докажите тождества:

1) $\sin x \operatorname{ctg} x = \cos x$;

2) $\cos x \operatorname{tg} x = \sin x$;

3) $\operatorname{ctg}^2 x\,(1 - \cos^2 x) = \cos^2 x$;

4) $\operatorname{tg}^2 x\,(1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$;

5) $(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg}^2 x$;

6) $\sin^2 x \operatorname{ctg}^2 x + \sin^2 x = 1$;

7) $(1 + \operatorname{tg}^2 t)(1 - \sin^2 t) = 1$;

8) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 t}{\cos^2 t} - \operatorname{ctg}^2 t = 1$;

9) $\dfrac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x = \cos x$;

10) $(\operatorname{ctg} x - 1)^2 + (\operatorname{ctg} x + 1)^2 = \dfrac{2}{\sin^2 x}$;

11) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{ctg}^2 a}{\operatorname{ctg}^2 a} = \operatorname{tg}^2 a$;

12) $(1 - \sin A + \cos A)^2 = 2(1 - \sin A)(1 + \cos A)$;

13) $\sin A\,(1 + \operatorname{tg} A) + \cos A\,(1 + \operatorname{ctg} A) = \dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\cos A}$;

14) $(\sin a \cos b + \cos a \sin b)^2 + (\cos a \cos b - \sin a \sin b)^2 = 1$;

15) $\dfrac{1}{\cos^2 a \cos^2 b} - \dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{\cos^2 b} - \operatorname{tg}^2 b = 1$;

16) $\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 a + \dfrac{1}{\cos^2 b} = \dfrac{1}{\cos^2 a \cos^2 b}$.

545. Чему равны $\cos x$ и $\sin x$, если

$$\operatorname{tg} x = \frac{2pq}{p^2 - q^2},\ p > 0,\ q > 0 \text{ и } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}?$$

546. Чему равно $\dfrac{5 \sin x + 7 \cos x}{6 \cos x - 3 \sin x}$, если $\operatorname{tg} x = \dfrac{4}{15}$?

547. Вычислите $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, если

$$\operatorname{ctg} x = -2 \text{ и } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

548. Вычислите $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, если

$$\cos x = -\frac{3}{5} \text{ и } \pi < x < \frac{3}{2}\pi.$$

549. Вычислите $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, если

$$\sin x = -\frac{7}{25} \text{ и } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi.$$

550. Упростите выражения:

1) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sin^2 x$;

2) $\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x \cos^2 x$;

3) $\operatorname{tg} \alpha + \dfrac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$;

4) $\operatorname{ctg} \alpha + \dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

551. Выведите формулы, выражающие все тригонометрические функции через:

а) $\sin x$; б) $\cos x$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $\operatorname{ctg} x$.

552. Покажите, что постоянна функция

$$(a \sin x + b \cos x)^2 + (b \sin x - a \cos x)^2.$$

553. Докажите, что:

1) $|\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a| \geqslant 2$;

2) $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a \geqslant 2$;

3) $\dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\left(\dfrac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x\right)^2} = \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}{\dfrac{1}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x}$;

4) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\operatorname{ctg} x - \sin x \cos x} = 2 \operatorname{tg}^2 x$;

5) $\sin^3 x\,(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x\,(1 + \operatorname{tg} x) = \sin x + \cos x$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin x \cos x} + \dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$;

7) $\left(\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \sin\alpha\, \operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

554. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$. Найдите:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$.

555. Пусть $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. Вычислите выражения:

1) $\sin^4 x + \cos^4 x$;

2) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x + 3\sin x}{5\sin x - 2\cos x}$;

3) $\dfrac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x}$;

4) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

556. Определите знак разности:

1) $\operatorname{ctg} 153^\circ - \operatorname{ctg} 154^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 319^\circ - \operatorname{tg} 327^\circ$;

3) $\operatorname{tg}\left(4\frac{1}{8}\pi\right) - \operatorname{tg}\left(4\frac{1}{9}\pi\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(7\frac{3}{14}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(9\frac{8}{27}\pi\right)$;

5) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

557. Разбейте промежуток $(0; \pi)$ на промежутки монотонного возрастания и монотонного убывания функций:

1) $\operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{ctg} x$; 3) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$; 4) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$.

558. Укажите промежутки монотонного возрастания и монотонного убывания функции $\operatorname{tg}^4 x$.

559. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} (2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} 2x)$;

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(4 \sin x - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^4 x}$;

4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{1 + \operatorname{ctg}^4 x}$.

560. Найдите точки разрыва функций:

1) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x$;

2) $\frac{\operatorname{tg} 3x}{1 + \sin^2 x}$;

3) $\frac{\operatorname{ctg} 5x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;

4) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x$;

5) $2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{3}$;

6) $3 \operatorname{ctg} \frac{x}{4} + 4 \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$.

9. Тангенсоида и котангенсоида. Поскольку функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π и нечетна, достаточно построить ее график на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. После этого симметрично отражаем этот график относительно начала координат, а потом сдвигаем его на πn, $n \in \boldsymbol{Z}$, вдоль оси абсцисс.

Для построения графика функции $\operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ проведем касательную к координатной окружности в точке $A(0)$. Тогда для любого $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ значение $\operatorname{tg} x$ равно длине отрезка AT, где T — точка пересечения этой касательной с лучом OM, $M = M(x)$. В самом деле, обозначим через P основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось абсцисс. Тогда в силу подобия треугольников MOP и TOA имеем

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{MP}{OP} = \frac{AT}{OA} = AT.$$

Разделим на 4 части дугу AB и отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 147, *а*) и проведем через точки деления дуги лучи, исходящие из центра окружности, а через точки пересечения этих лучей с касательной AT — прямые, параллельные оси абсцисс. После этого из точек деления отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ проведем прямые, параллельные оси ординат.

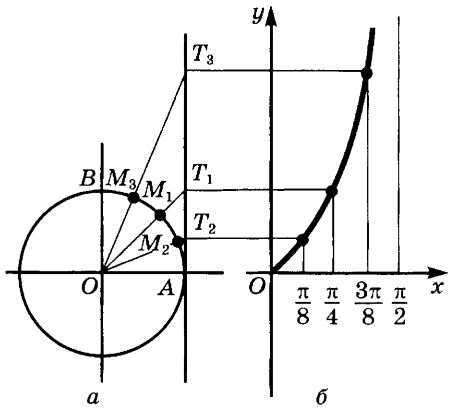


Рис. 147

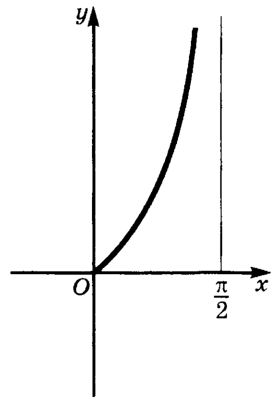


Рис. 148

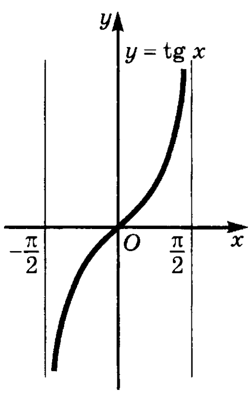


Рис. 149

Точки пересечения соответствующих прямых и будут лежать на графике функции tg x (рис. 147, *б*). Проведем через найденные точки линию, безгранично поднимающуюся вверх по мере приближения к вертикальной прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 148).

После этого сделаем центральную симметрию относительно начала координат (рис. 149) и параллельные переносы вдоль оси абсцисс на πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. Получим график функции tg x (*тангенсоиду*) (рис. 150, *а*).

График функции ctg x (*котангенсоида*) строится аналогично. Он изображен на рисунке 150, *б*.

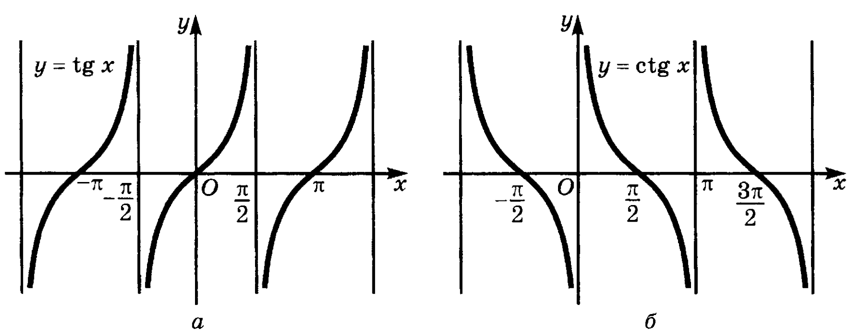


Рис. 150

Упражнения

561. Начертите график функции:

1) $\operatorname{tg} 2x$;
2) $\operatorname{ctg} 3x$;
3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
4) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$;
5) $2 \operatorname{ctg} 3x$;
6) $\frac{1}{3} \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
7) $|\operatorname{tg} x|$;
8) $\operatorname{tg} |x|$;
9) $|\operatorname{tg} |x||$;
10) $\operatorname{ctg} \left|x - \frac{\pi}{3}\right|$;
11) $\frac{1}{4} \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;
12) $[\operatorname{tg} x]$;
13) $\{\operatorname{tg} x\}$;
14) $\{\operatorname{tg} 2x\}$.

562. Изобразите множество точек $M(x;\ y)$ таких, что:
1) $|y| = \operatorname{tg} x$; 2) $|y| = \operatorname{tg} |x|$; 3) $|y| = |\operatorname{tg} x|$; 4) $|y| = |\operatorname{tg} |x||$.
Объясните, почему в пунктах 2) — 4) получились одинаковые графики. Всегда ли множества, где $|y| = f(|x|)$, $|y| = |f(x)|$ и $|y| = |f(|x|)|$, совпадают?

§ 3. Формулы сложения и их следствия

1. Косинус и синус разности и суммы двух чисел. В этом пункте мы выведем формулы, выражающие косинусы и синусы чисел $t - s$ и $t + s$ через косинусы и синусы чисел t и s. Для этого возьмем на координатной окружности точки $A(0)$, $M(t)$, $N(s)$ и $P(t - s)$. Так как $|(t - s) - 0| = |t - s|$, то дуги AP и MN равны (см. п. 4 § 1), а потому $MN = AP$. Но

$$A = A(1;\ 0),\ M = M(\cos t;\ \sin t),\ N = N(\cos s;\ \sin s),$$
$$P = P(\cos (t - s);\ \sin (t - s)).$$

Применяя формулу для длины отрезка на координатной плоскости, получаем

$$AP^2 = (\cos (t - s) - 1)^2 + \sin^2 (t - s) =$$
$$= \cos^2 (t - s) - 2 \cos (t - s) + 1 + \sin^2 (t - s) = 2 - 2 \cos (t - s)$$

и

$$MN^2 = (\cos t - \cos s)^2 + (\sin t - \sin s)^2 =$$
$$= \cos^2 t - 2 \cos t \cos s + \cos^2 s + \sin^2 t - 2 \sin t \sin s + \sin^2 s =$$
$$= (\cos^2 t + \sin^2 t) + (\cos^2 s + \sin^2 s) - 2 (\cos t \cos s + \sin t \sin s) =$$
$$= 2 - 2 (\cos t \cos s + \sin t \sin s).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$2 - 2 \cos (t - s) = 2 - 2 (\cos t \cos s + \sin t \sin s).$$

Из него следует

$$\cos(t - s) = \cos t \cos s + \sin t \sin s. \qquad (1)$$

Итак, мы доказали, что для любых t и s верно равенство (1). Если заменить в равенстве (1) s на $-s$ и принять во внимание четность косинуса и нечетность синуса, то получим

$$\cos(t - (-s)) = \cos t \cos(-s) + \sin t \sin(-s) =$$
$$= \cos t \cos s - \sin t \sin s.$$

Итак,

$$\cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s. \qquad (2)$$

Отметим частные случаи полученных формул. Полагая в (1) $t = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos s + \sin\frac{\pi}{2}\sin s = \sin s.$$

Значит,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \sin s. \qquad (3)$$

Заменяя в формуле (3) s на $\frac{\pi}{2} - s$, выводим, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \cos s. \qquad (4)$$

Таким же образом из формулы (2) получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + s\right) = -\sin s. \qquad (5)$$

Далее,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + s\right) = -\cos(\pi + s) = \cos s,$$

т. е.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right) = \cos s. \qquad (6)$$

Выведем теперь формулы, выражающие синусы чисел $t + s$ и $t - s$. Имеем

$$\sin(t + s) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t - s\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos s + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\sin s = \sin t \cos s + \cos t \sin s.$$

Итак,

$$\sin(t+s) = \sin t\cos s + \cos t\sin s. \qquad (7)$$

Заменяя в этой формуле s на $-s$, получаем

$$\sin(t-s) = \sin t\cos s - \cos t\sin s. \qquad (8)$$

Пример. Вычислим $\cos\frac{5}{12}\pi$ и $\sin\frac{5}{12}\pi$.

Решение. Так как $\frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

Упражнения

563. Вычислите:

1) $\cos\frac{\pi}{12}$; 2) $\sin\frac{\pi}{12}$; 3) $\sin\frac{7}{6}\pi$; 4) $\cos\frac{7}{6}\pi$.

564. Дано: $\sin x = \frac{7}{25}$, $\sin t = \frac{11}{61}$, причем $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите:

1) $\sin(x+t)$; 2) $\sin(x-t)$; 3) $\cos(x+t)$; 4) $\cos(x-t)$.

565. Дано: $\cos x = -\frac{8}{17}$, $\sin y = \frac{20}{29}$, $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2} < y < \pi$. Вычислите:

1) $\sin(x+y)$; 2) $\sin(x-y)$; 3) $\cos(x+y)$; 4) $\cos(x-y)$.

566. Дано: $\sin x = \frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\sin u = \frac{7}{25}$, причем $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$, $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$. Вычислите $\sin(x - t + u)$.

567. Упростите выражения:

1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

2) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

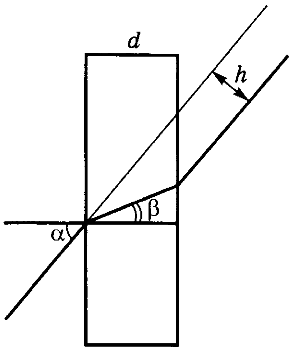


Рис. 151

4) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta}$;

5) $\dfrac{2\sin\alpha \cos\beta + \sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha \sin\beta}$;

6) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin\beta}{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha \cos\beta}$;

7) $\dfrac{\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha \cos\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta}$.

568. Докажите тождества:

1) $\sin(\alpha + 45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + \sin\alpha)$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$;

3) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$;

4) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta - \sin\beta)$;

5) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \cos x$;

6) $\dfrac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos\beta \cos\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos\gamma \cos\alpha} + \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = 0$;

7) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \operatorname{tg} x$;

8) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 1$.

569. Луч света проходит через стеклянную пластинку толщиной d. Определите, каково параллельное смещение h этого луча, если угол падения равен α, а показатель преломления стекла $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ равен n (рис. 151).

2. Тангенс и котангенс суммы и разности. Из полученных в п. 1 формул следует, что при $\cos(t + s) \neq 0$ (т. е. при $t + s \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$)

$$\operatorname{tg}(t + s) = \frac{\sin(t + s)}{\cos(t + s)} = \frac{\sin t \cos s + \cos t \sin s}{\cos t \cos s - \sin t \sin s}. \qquad (1)$$

Предположим, что, кроме того, $\cos t \neq 0$ и $\cos s \neq 0$ (т. е. что ни t, ни s не имеют вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$). Тогда числитель и знаменатель дроби в (1) можно разделить на $\cos t \cos s$. Получаем

$$\operatorname{tg}(t + s) = \frac{\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{\sin s}{\cos s}}{1 - \frac{\sin t}{\cos t}\,\frac{\sin s}{\cos s}} = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} s}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg} s}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}(t + s) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} s}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg} s}. \qquad (2)$$

Заменяя в формуле (2) s на $-s$ и учитывая нечетность тангенса, получаем

$$\operatorname{tg}(t-s)=\frac{\operatorname{tg} t-\operatorname{tg} s}{1+\operatorname{tg} t \operatorname{tg} s}. \qquad (3)$$

Аналогично устанавливаются формулы:

$$\operatorname{ctg}(t+s)=\frac{\operatorname{ctg} t \operatorname{ctg} s-1}{\operatorname{ctg} t+\operatorname{ctg} s}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{ctg}(t-s)=\frac{\operatorname{ctg} t \operatorname{ctg} s+1}{\operatorname{ctg} s-\operatorname{ctg} t}. \qquad (5)$$

Пример. Вычислим $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

Решение. По формуле (2) имеем

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Упражнения

570. Вычислите:

1) $\operatorname{tg} 15^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 15^\circ$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{7}{12}\pi$; 5) $\operatorname{ctg}\frac{7}{12}\pi$.

571. Дано: $\operatorname{tg} x = 1{,}2$, $\operatorname{tg} y = 0{,}7$. Вычислите:
1) $\operatorname{tg}(x+y)$; 2) $\operatorname{tg}(x-y)$; 3) $\operatorname{ctg}(x+y)$; 4) $\operatorname{ctg}(x-y)$.

572. Дано: $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{7}$, $\operatorname{ctg} y = \frac{5}{9}$. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}(x+y)$; 2) $\operatorname{tg}(x-y)$; 3) $\operatorname{ctg}(x+y)$; 4) $\operatorname{ctg}(x-y)$.

573. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{7}$, $\operatorname{ctg}\gamma = 1$. Вычислите $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)$.

574. Вычислите:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 24^\circ + \operatorname{tg} 21^\circ}{1-\operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{tg} 21^\circ}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}+\operatorname{tg}\frac{4}{15}\pi}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}$.

575. Докажите тождества:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{\operatorname{ctg} x+1}{\operatorname{ctg} x-1}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=2\sin\alpha\cos\alpha;$

4) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1;$

5) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

576. Упростите выражения:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta};$

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)};$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}3x}{1+\operatorname{tg}4x\operatorname{tg}3x};$

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}6x\operatorname{ctg}9x+1}{\operatorname{ctg}6x-\operatorname{ctg}9x}.$

577. Найдите тангенс угла[1], под которым пересекаются графики функций:

1) x^2 и $\sqrt{x}$;

2) $\dfrac{3}{4(1+x^2)}$ и x^2;

3) $2x^2-5x+6$ и x^2-x+3;

4) x^2 и $\dfrac{1}{x}$.

3. Формулы приведения. Мы вывели выше формулы для

$$\sin(\pi-t),\ \cos(\pi-t),\ \operatorname{tg}(\pi-t),\ \operatorname{ctg}(\pi-t),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right).$$

Сейчас будут доказаны другие аналогичные формулы.

Если в формуле (2) п. 1 положить $s=\frac{3}{2}\pi$, то получим

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+t\right)=\cos\frac{3}{2}\pi\cos t-\sin\frac{3}{2}\pi\sin t=$$

$$=0\cdot\cos t-(-1)\sin t=\sin t,$$

т. е.

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+t\right)=\sin t. \qquad (1)$$

Таким же образом выводится

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+t\right)=-\cos t, \qquad (2)$$

[1] Углом между кривыми называют угол между касательными к ним, проведенными в точке пересечения кривых.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + t\right) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + t\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + t\right)} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t. \qquad (4)$$

Эти и аналогичные им формулы называют *формулами приведения,* так как они позволяют свести вычисление значений тригонометрических функций к вычислению значений этих функций на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. В самом деле, из периодичности тригонометрических функций вытекает, что достаточно ограничиться знанием значений $\sin t$ и $\cos t$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. Далее, в силу нечетности $\sin t$ и четности $\cos t$ достаточно знать значение этих функций на отрезке $[0; \pi]$. Наконец, из того, что $\sin(\pi - t) = \sin t$ и $\cos(\pi - t) = -\cos t$, следует возможность ограничиться знанием этих функций на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Заметим еще, что значения синуса и косинуса связаны соотношением $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$. Поэтому, имея таблицу обеих функций на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, можно найти их значения на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а потом, как было показано выше, на всей числовой прямой. Аналогично по значениям функций $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ и равенству $\operatorname{tg} 0 = 0$ можно найти значения этих функций для всех значений t.

Обилие формул приведения затрудняет их запоминание. Поэтому полезно следующее мнемоническое правило.

а) *Если аргумент t прибавляется к* 0 *или* π *или вычитается из этих чисел* (откладывается от горизонтального диаметра), *то название тригонометрической функции не меняется.*

б) *Если аргумент t прибавляется к* $\frac{\pi}{2}$ *или* $\frac{3}{2}\pi$ *или вычитается из этих чисел* (откладывается от вертикального диаметра), *то название функции меняется* (синус на косинус и обратно, тангенс на котангенс и обратно).

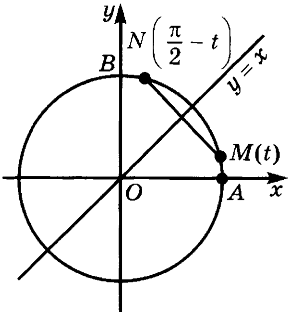


Рис. 152

в) *Считая, что* $0 < t < \frac{\pi}{2}$, *определяем, в какой четверти находится аргумент, и в соответствии с этим берем знак перед тригонометрической функцией от* t.

Пример 1. Преобразовать выражения:

а) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - t\right)$; б) $\cos(\pi + t)$.

Решение. а) Так как t откладывается от вертикального диаметра, меняем название функции sin на cos. Если $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{3}{2}\pi - t$ лежит в третьей четверти, а в этой четверти синус отрицателен. Поэтому $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - t\right) = -\cos t$.

б) Так как t откладывается от горизонтального диаметра, название функции сохраняется. Если $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\pi + t$ лежит в третьей четверти, где косинус отрицателен. Поэтому $\cos(\pi + t) = -\cos t$.

Заметим, что в п. 3 § 2 некоторые из формул приведения были выведены с помощью геометрических рассуждений, основанных на симметрии. Таким же путем можно получить все формулы приведения. Например, равенства $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ вытекают из того, что точки $M(t)$ и $N\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ симметричны относительно прямой $y = x$, а при симметрии относительно этой прямой точка $M(x; y)$ переходит в точку $N(y; x)$ (рис. 152).

Упражнения

578. Докажите геометрически все формулы приведения.

579. Вычислите значения:

1) $\cos 810°$; 3) $\operatorname{tg}(-765°)$; 5) $\sin\left(6\frac{5}{6}\pi\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{27}{4}\pi\right)$;

2) $\sin 840°$; 4) $\operatorname{ctg} 1140°$; 6) $\cos\left(\frac{43}{6}\pi\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{38}{3}\pi\right)$.

580. Упростите выражения:

1) $\sin\left(-\frac{47}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{25}{4}\pi\right) - \sin\left(\frac{23}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{49}{4}\pi\right)$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(-\frac{29}{3}\pi\right)\operatorname{tg}\left(\frac{37}{4}\pi\right)}{1 - \operatorname{ctg}\frac{13}{6}\pi \operatorname{ctg}\frac{25}{4}\pi}$.

581. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{7}{2}\pi\right)\right)} = \frac{1}{8}$;

2) $\dfrac{2\cos\left(\frac{1}{6}\pi - 2\alpha\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{(1 + \sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)} = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $\dfrac{4\cos^2(\alpha - \pi) - 4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + 3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)} = 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

4. Тригонометрические функции двойного и тройного аргумента. Если положить $s = t$ в формулах (2) и (7) п. 1, а также (2) и (4) п. 2, то получим формулы, выражающие тригонометрические функции аргумента $2t$ через тригонометрические функции аргумента t:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t, \qquad (1)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg} 2t = \frac{\operatorname{ctg}^2 t - 1}{2\operatorname{ctg} t}. \qquad (4)$$

Формулу для $\cos 2t$ можно записать иначе, принимая во внимание тождество $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$:

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t. \qquad (5)$$

Из этих формул следует:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}. \qquad (6)$$

Тригонометрические функции от аргумента $2t$ можно выразить через $\operatorname{tg} t$. Для этого заметим, что

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = \frac{2 \sin t \cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}.$$

Если $\cos t \neq 0$, то можно разделить на $\cos^2 t$ числитель и знаменатель. Учитывая, что $\frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$, получаем

$$\sin 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}. \tag{7}$$

Таким же образом из равенства $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ выводим

$$\cos 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \tag{8}$$

(и эта формула верна лишь при условии, что $\cos t \neq 0$, т. е. что $t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$).

Наконец, отметим, что $\operatorname{ctg} 2t = \frac{1}{\operatorname{tg} 2t}$ и потому

$$\operatorname{ctg} 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{2 \operatorname{tg} t} \tag{9}$$

при $t \neq \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Выведем теперь формулы для $\cos 3t$ и $\sin 3t$. Мы имеем:

$$\sin 3t = \sin (2t + t) = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t =$$
$$= 2 \sin t \cos^2 t + (1 - 2 \sin^2 t) \sin t = \sin t (2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t + 1).$$

Но $2 \cos^2 t = 2 - 2 \sin^2 t$, и потому

$$\sin 3t = \sin t (3 - 4 \sin^2 t). \tag{10}$$

Таким же образом устанавливается формула

$$\cos 3t = \cos t (4 \cos^2 t - 3). \tag{11}$$

Упражнения

582. Дано: $\sin x = 0{,}96$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Вычислите $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$.

583. Дано: $\cos x = -\frac{5}{13}$ и $\sin x > 0$. Вычислите $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$.

584. Дано: $\operatorname{tg} x = -2$. Вычислите $\operatorname{tg} 2x$.

585. Докажите, что $\sin 2x < 2 \sin x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

586. Найдите $\sin 4x$, $\cos 4x$ и $\operatorname{tg} 4x$, если $\operatorname{ctg} x = 2$.

587. Найдите $\operatorname{tg}(4x - y)$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{239}$.

588. Докажите тождества:

1) $1 + \sin 2x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

2) $1 - \sin 2x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

3) $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$;

4) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{4}$;

5) $\frac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

6) $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2\operatorname{tg} 20^\circ$;

7) $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$;

8) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$;

9) $\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + 1} = \sin 2\alpha$;

10) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$.

589. Выразите функцию $a\sin x + b\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Для всех ли x годится это выражение?

590. Выразите функцию $\frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Для каких значений x годится это выражение?

591. Упростите выражения:

1) $\frac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$;

2) $1 - 2\sin^2\frac{x}{8}$;

3) $2\cos^2\frac{x}{6} - 1$;

4) $1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

5) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$;

6) $\frac{2\sin y - \sin 2y}{2\sin y + \sin 2y}$;

7) $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$;

8) $\frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1}$.

592. Докажите тождества:

1) $\dfrac{2}{\sin 4x} - \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 2x;$

2) $\dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\sin^3 x + \sin 3x} = \operatorname{tg} x;$

3) $\dfrac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot \dfrac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x;$

4) $\cos 4x + 4 \cos 2x = 8 \cos^4 x - 3;$

5) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2;$

6) $\sin 3x = 4 \sin x \sin \left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) \sin \left(\dfrac{\pi}{3} - x\right).$

7) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}.$

593. Представьте в виде произведения тригонометрических функций:

1) $\sin x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 4x;$
2) $\cos x + \sin 2x + \cos 3x + \sin 4x;$
3) $\sin 3x - \sin 2x \cos x;$
4) $\cos x - \sin x \sin 2x;$
5) $1 + \cos x + \sin x + \operatorname{tg} x;$
6) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x;$
7) $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}$, если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}.$

5. Тригонометрические функции половинного аргумента. Положим $t = \frac{s}{2}$ в формулах (6) п. 4. Получаем

$$\cos^2 \frac{s}{2} = \frac{1 + \cos s}{2}, \quad \sin^2 \frac{s}{2} = \frac{1 - \cos s}{2}.$$

Отсюда следуют равенства

$$\left|\cos \frac{s}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos s}{2}}, \tag{1}$$

$$\left|\sin \frac{s}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos s}{2}}. \tag{2}$$

Почленно деля равенство (2) на (1), выводим

$$\left|\operatorname{tg} \frac{s}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos s}{1 + \cos s}}. \tag{3}$$

Поэтому

$$\left|\operatorname{ctg} \frac{s}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos s}{1 - \cos s}}. \tag{4}$$

Из формул (1) — (4) можно найти только модули тригонометрических функций аргумента $\frac{s}{2}$. Чтобы найти сами функции, надо знать их знаки. Для этого, например, достаточно знать четверть, в которой лежит $\frac{s}{2}$.

Пример. Вычислим $\sin \frac{s}{2}$, $\cos \frac{s}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{s}{2}$, если $\cos s = \frac{4}{5}$ и $\pi \leqslant s \leqslant 2\pi$.

Решение. Так как $\pi \leqslant s \leqslant 2\pi$, то $\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{s}{2} \leqslant \pi$ и потому $\frac{s}{2}$ лежит во второй четверти. Но тогда $\sin \frac{s}{2} \geqslant 0$, $\cos \frac{s}{2} \leqslant 0$, $\operatorname{tg} \frac{s}{2} \leqslant 0$. Из формул (1), (2), (3) находим

$$\cos \frac{s}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = -\sqrt{0{,}9},$$

$$\sin \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = -\sqrt{0{,}1},$$

$$\operatorname{tg} \frac{s}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = -\frac{1}{3}.$$

Выведем выражения для $\operatorname{tg} \frac{s}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{s}{2}$ через $\sin s$ и $\cos s$, не требующие извлечения корней. Для этого умножим числитель и знаменатель правой части формулы $\operatorname{tg} \frac{s}{2} = \frac{\sin \frac{s}{2}}{\cos \frac{s}{2}}$ на $2 \cos \frac{s}{2}$: $\operatorname{tg} \frac{s}{2} = \frac{2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{2 \cos^2 \frac{s}{2}}$. Так как $2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2} = \sin s$ и $2 \cos^2 \frac{s}{2} = 1 + \cos s$, то получаем

$$\operatorname{tg} \frac{s}{2} = \frac{\sin s}{1 + \cos s}. \qquad (5)$$

Таким же образом, умножая числитель и знаменатель того же равенства на $2 \sin \frac{s}{2}$, выводим

$$\operatorname{tg} \frac{s}{2} = \frac{1 - \cos s}{\sin s}. \qquad (6)$$

Отсюда вытекают равенства

$$\operatorname{ctg}\frac{s}{2}=\frac{1+\cos s}{\sin s}=\frac{\sin s}{1-\cos s}. \tag{7}$$

Предоставляем читателю определить, при каких значениях s эти равенства теряют силу.

Упражнения

594. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:

1) $\alpha = 30°$;

2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

3) $\cos\alpha = 0{,}6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{3}{7}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

5) $\sin\alpha = \frac{336}{625}$ и $450° < \alpha < 540°$.

595. Найдите $\sin 18°$, $\cos 18°$, $\sin 12°$, $\cos 12°$, $\sin 6°$ и $\cos 6°$.

596. Упростите выражения:

1) $\sqrt{\frac{1+\cos 4\alpha}{2}}$;

2) $\sqrt{1+\cos 8x}$;

3) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$;

4) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

5) $\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$.

597. Докажите тождества:

1) $1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{ctg}\alpha$.

6. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения этих функций в сумму. Складывая почленно формулы

$$\sin(t+s)=\sin t\cos s+\cos t\sin s \tag{1}$$

и

$$\sin(t-s)=\sin t\cos s-\cos t\sin s, \tag{2}$$

получаем

$$\sin(t+s)+\sin(t-s)=2\sin t\cos s$$

и потому

$$\sin t \cos s = \frac{1}{2}(\sin(t+s) + \sin(t-s)). \qquad (3)$$

С помощью этой формулы можно заменить произведение $\sin t \cos t$ полусуммой тригонометрических функций от $t + s$ и $t - s$. В таком виде формула удобна при $t > s$. Если $t < s$, удобнее записать ее в виде

$$\sin t \cos s = \frac{1}{2}(\sin(t+s) - \sin(s-t)). \qquad (4)$$

Предоставляем читателю получить из формул

$$\cos(t+s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s$$

и

$$\cos(t-s) = \cos t \cos s + \sin t \sin s$$

равенства

$$\cos t \cos s = \frac{1}{2}(\cos(t+s) + \cos(s-t)) \qquad (5)$$

и

$$\sin t \sin s = \frac{1}{2}(\cos(t-s) - \cos(t+s)). \qquad (6)$$

Полученные выше формулы (3), (4), (5), (6) годятся не только для того, чтобы преобразовать произведения синусов и косинусов в сумму или разность функций от $t + s$ и $t - s$, но и для обратной операции — преобразования суммы или разности двух тригонометрических функций в произведение функций иных аргументов.

Для этого удобно положить $t + s = u$, $t - s = v$. Тогда имеем $t = \frac{u+v}{2}$, $s = \frac{u-v}{2}$, и потому из формулы (3) следует

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}. \qquad (7)$$

Аналогично из формул (4), (5), (6) выводим равенства:

$$\sin u - \sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}, \qquad (8)$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}, \qquad (9)$$

$$\cos u - \cos v = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v-u}{2}. \qquad (10)$$

Пример 1. Вычислим значение $\cos 75° + \cos 15°$.

Решение. По формуле (9) имеем

$$\cos 75° + \cos 15° = 2\cos\frac{75° + 15°}{2}\cos\frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= 2\cos 45° \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

К приведенным выше формулам примыкает формула для $\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v$. Мы имеем

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v}.$$

Но числитель полученной дроби равен $\sin (u + v)$. Значит,

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = \frac{\sin (u + v)}{\cos u \cos v}. \qquad (11)$$

Эта формула справедлива, если определены функции $\cos u$ и $\cos v$, т. е. если ни u, ни v не имеют вида $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Аналогично выводятся формулы

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \frac{\sin (u - v)}{\cos u \cos v}, \qquad (12)$$

$$\operatorname{ctg} u + \operatorname{ctg} v = \frac{\sin (u + v)}{\sin u \sin v}, \qquad (13)$$

$$\operatorname{ctg} u - \operatorname{ctg} v = \frac{\sin (v - u)}{\sin u \sin v}. \qquad (14)$$

Пример 2. Докажем, что если $u + v + w = \pi$, то

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} (\pi - (u + v)) =$$

$$= \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v - \operatorname{tg} (u + v) = \frac{\sin (u + v)}{\cos u \cos v} - \frac{\sin (u + v)}{\cos (u + v)} =$$

$$= \frac{\sin (u + v)(\cos (u + v) - \cos u \cos v)}{\cos u \cos v \cos (u + v)} = -\frac{\sin (u + v) \sin u \sin v}{\cos (u + v) \cos u \cos v} =$$

$$= -\operatorname{tg} (u + v) \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w.$$

Упражнения

598. Представьте в виде суммы тригонометрических функций:

1) $2 \sin 15^\circ \cos 10^\circ$;
2) $\cos x \cos (x + 1)$;
3) $4 \sin 25^\circ \cos 15^\circ \sin 5^\circ$;
4) $8 \cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$.

599. Вычислите $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

600. Докажите, что значение выражения

$$\cos^2 y + \cos^2 (x + y) - 2 \cos x \cos y \cos (x + y)$$

не зависит от y.

601. Представьте в виде произведения или отношения произведений:

1) $\cos 46° + \cos 34°$;
2) $\cos 16° - \cos 12°$;
3) $\sin 71° - \sin 38°$;
4) $\sin 41° + \sin 49°$;
5) $\cos 40° - \sin 45°$;
6) $\sin 41° - \cos 62°$;
7) $\sin \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{12}$;
8) $\sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{12}$;
9) $\sin 6x + \sin 2x$;
10) $\cos 2x - \cos 8x$;
11) $\sin^2 x - \sin^2 y$;
12) $\sin x - \cos y$;
13) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y$;
14) $\dfrac{\sin 65° + \sin 15°}{\sin 65° - \sin 15°}$;
15) $\dfrac{\sin 9\alpha - \sin 3\alpha}{\sin 9\alpha + \sin 3\alpha}$;
16) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$;
17) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$;
18) $\sin 24° + \sin 16° + \sin 40°$;
19) $\sin 23° + \sin 57° + \sin 40°$;
20) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$;
21) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$;
22) $\cos 2x - \sin x - \sin 5x$;
23) $\sin \left(\frac{\pi}{18} + x\right) + \sin \left(\frac{\pi}{18} - x\right) - \cos x$;
24) $\sin \frac{x}{2} - \sin \frac{3}{2}x + \cos x$;
25) $\sin (5x + y) + \sin (3x + y) + \sin 2x$;
26) $\cos (x + y) + \cos (x - y) + \cos x$;
27) $\sin x + \cos 2x - \sin 3x$;
28) $\cos \left(7x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin 4x$.

602. Представьте в виде произведений или отношений произведений:

1) $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $2 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

3) $1 + \cos 2\alpha$; 4) $1 - \cos 2\alpha$; 5) $1 + \cos \frac{3}{2}\alpha$; 6) $1 - \cos \frac{3}{2}\alpha$;

7) $1 + \sin 5\alpha$; 8) $1 - \sin 5\alpha$; 9) $1 + \cos 80°$; 10) $1 - \sin 80°$;
11) $1 + \operatorname{tg} \alpha$; 12) $1 - \operatorname{tg} \alpha$; 13) $1 + \operatorname{ctg} \alpha$; 14) $1 - \operatorname{ctg} \alpha$;

15) $\dfrac{1 + \cos (\alpha - \beta)}{1 - \cos (\alpha - \beta)}$; 16) $\dfrac{1 + \sin (\alpha + \beta)}{1 - \sin (\alpha + \beta)}$; 17) $1 + \sin x + \cos x$;

18) $1 - \cos x + \sin x$; 19) $1 - \sin x + \cos x$; 20) $\sin x + \cos x - 1$;
21) $1 - \sin x - \cos x$; 22) $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x$;
23) $1 - \sin x + \cos x - \operatorname{tg} x$; 24) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$;
25) $\sin (7\alpha + \beta) + \sin (\alpha + \beta) + \cos 3\alpha$;
26) $\sin 17° + \sin 27° + \sin 10°$; 27) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha$.

603. Докажите тождества:

1) $\dfrac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;

2) $\dfrac{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;

3) $\dfrac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} (45° + \alpha)$;

4) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = 4\cos^2\alpha$;

6) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

7) $\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)$;

8) $\left(\cos x + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\sin x + \sin\frac{x}{2}\right)^2 = 2\sin\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$;

9) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

10) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha} = \operatorname{tg} n\alpha$;

11) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$;

12) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$;

13) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$;

14) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3}{5}\pi = \frac{1}{2}$;

15) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

16) $8\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ$;

17) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ = \frac{3}{16}$;

18) $\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} 80^\circ = 3$;

19) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha = \dfrac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}$;

20) $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = 2\cos\frac{x}{2}$, если $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

21) $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = 2\sin\frac{x}{2}$, если $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

604. Докажите, что если $x + y + z = \pi$, то:

1) $\sin x + \sin y + \sin z = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$;

2) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 - 2\cos x\cos y\cos z$.

605. Вычислите суммы:

1) $\cos^2 2\alpha + \cos^2 4\alpha + \ldots + \cos^2 2n\alpha$;

2) $\sin^2 2\alpha + \sin^2 4\alpha + \ldots + \sin^2 2n\alpha$;

3) $1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \ldots + (-1)^n \cos n\alpha$;

4) $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \ldots + (-1)^{n-1} \sin n\alpha$;

5) $\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + 3\cos 3\alpha + \ldots + n\cos n\alpha$;

6) $\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + \ldots + n\sin n\alpha$;

7) $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg} 2\alpha + 4\operatorname{tg} 4\alpha + \ldots + 2^{n-1}\operatorname{tg} 2^{n-1}\alpha + 2^n \operatorname{ctg} 2^n\alpha$.

606. Преобразуйте в произведение или отношение произведений с помощью введения вспомогательного угла $\left(\text{типа } \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\right)$:

1) $1 + 2\cos 2\alpha$;

2) $1 - 2\sin 2\alpha$;

3) $1 - \sqrt{2}\cos\alpha$;

4) $1 - \sqrt{2}\sin 3\alpha$;

5) $\sqrt{3} + 2\cos 6\beta$;

6) $\sqrt{2}\sin 2\alpha - 1$;

7) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha - 1$;

8) $3 - \operatorname{tg}^2\alpha$;

9) $1 - 4\sin^2\alpha$;

10) $3 - 4\cos^2\alpha$;

11) $4\sin^2\alpha - 3$.

7. Сложение гармонических колебаний. В силу формулы для синуса суммы гармоническое колебание $y = A\sin(\omega t + \alpha)$ можно представить в виде $y = A\cos\alpha\,\sin\omega t + A\sin\alpha\,\cos\omega t$. Если обозначить $A\cos\alpha$ через C_1, а $A\sin\alpha$ через C_2, получим

$$y = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t. \qquad (1)$$

Обратно, функцию $C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t$ всегда можно представить в виде $A\sin(\omega t + \alpha)$. Для этого обозначим $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ через A и запишем

$$C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t = A\left(\frac{C_1}{A}\sin\omega t + \frac{C_2}{A}\cos\omega t\right).$$

Так как

$$\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{A}\right)^2 = \frac{C_1^2 + C_2^2}{A^2} = \frac{C_1^2 + C_2^2}{C_1^2 + C_2^2} = 1,$$

то найдется одно и только одно $\alpha \in [0;\ 2\pi)$ такое, что $\frac{C_1}{A} = \cos\alpha$ и $\frac{C_2}{A} = \sin\alpha$. Но тогда имеем

$$C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t = A(\cos\alpha\,\sin\omega t + \sin\alpha\,\cos\omega t) =$$
$$= A\sin(\omega t + \alpha).$$

В физике встречаются примеры, когда движущаяся точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях. Если эти колебания имеют одинаковые частоты, то их можно представить в виде $C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t$ и $D_1\sin\omega t + D_2\cos\omega t$, а их сумму в виде $(C_1 + D_1)\sin\omega t + (C_2 + D_2)\cos\omega t$. Из сказанного выше следует, что эта сумма является гармоническим колебанием той же частоты ω. Амплитуда этого колебания равна $\sqrt{(C_1 + D_1)^2 + (C_2 + D_2)^2}$.

Выведем формулу, выражающую амплитуду A суммы двух гармонических колебаний через амплитуды и начальные фазы этих колебаний. Если

$$C_1 = A_1 \cos\alpha_1,\ C_2 = A_1 \sin\alpha_1,\ D_1 = A_2 \cos\alpha_2,\ D_2 = A_2 \sin\alpha_2,$$

то

$$\begin{aligned} A^2 &= (C_1 + D_1)^2 + (C_2 + D_2)^2 = (A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2)^2 + \\ &+ (A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2)^2 = A_1^2 \cos^2\alpha_1 + 2A_1A_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \\ &+ A_2^2 \cos^2\alpha_2 + A_1^2 \sin^2\alpha_1 + 2A_1A_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + A_2^2 \sin^2\alpha_2 = \\ &= A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + A_2^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Начальная фаза суммарного колебания определяется равенствами

$$\cos\alpha = \frac{C_1 + D_1}{A} = \frac{1}{A}(A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2), \tag{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{C_2 + D_2}{A} = \frac{1}{A}(A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2). \tag{4}$$

Из них следует

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}. \tag{5}$$

При сложении гармонических колебаний, имеющих различные частоты, возникают более сложные функции. Любую встречающуюся на практике функцию с периодом T можно представить в виде бесконечной суммы, состоящей из постоянной и гармонических колебаний, частоты которых кратны числу $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Из вопроса о представлении функций в виде сумм гармонических колебаний возник важный раздел современной математики — *гармонический анализ функций*. Он тесно связан с разделом оптики, изучающим спектры.

Упражнения

607. Приведите к виду $A \sin(\omega t + \alpha)$ выражения:

1) $5 \sin 3t - 12 \cos 3t$;

2) $7 \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + 24 \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $11 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 60 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

608. Найдите наибольшее и наименьшее значения и точки экстремума функций, а также постройте их графики:

1) $3 \sin 4x - 4 \cos 4x$;

2) $-5 \sin 2x + 12 \cos 2x$;

3) $\sin 6x - \sqrt{3} \cos 6x$;

4) $8 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 15 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

609. Найдите суммы гармонических колебаний:

1) $y = 3\sin 2t$ и $y = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y = 2\sin 3t$ и $y = 2\sin\left(3t - \frac{2\pi}{3}\right)$;

3) $y = \sqrt{2}\sin 5t$ и $y = \sqrt{2}\cos 5t$;

4) $y = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ и $y = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.

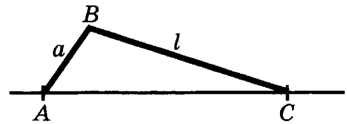


Рис. 153

610. Кривошип AB длиной 15 см (рис. 153) вращается в вертикальной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью 120 оборотов в минуту. В начальный момент времени он направлен под углом 55° к оси абсцисс. Определите закон движения проекций Q и S точки B на вертикальное и горизонтальное направления соответственно. Решите задачу для случая, когда кривошип вращается по часовой стрелке.

611. В цепи переменного тока между силой тока I (А) и временем t (с) имеется зависимость $I = 3{,}5\sin(800t + 1{,}26)$. Определите максимальное значение силы тока, число периодов в секунду и начальную фазу. Начертите график зависимости силы тока от времени.

612. На рисунке 153 изображен кривошипный механизм, где кривошип AB длиной a связан с ползуном C при помощи шатуна BC длиной l. Найдите закон движения точки C по прямой AC, если кривошип равномерно вращается вокруг точки A против часовой стрелки с угловой скоростью ω и при $t = 0$ наклонен к оси абсцисс под углом $\alpha°$.

§ 4. Дифференцирование тригонометрических функций

1. Предел отношения длины хорды к длине стягиваемой ею дуги. Если выбрать на окружности две близко расположенные друг к другу точки M и N, то видно, что длина ограниченной ими дуги почти равна длине соединяющего их отрезка, и потому выполняется приближенное равенство $\smile MN \approx MN$, т. е. $\frac{MN}{\smile MN} \approx 1$. Это равенство становится тем точнее, чем меньше длина дуги MN, и потому очевидно, что

$$\lim_{\smile MN \to 0} \frac{MN}{\smile MN} = 1.$$

Но если радианная мера дуги MN равна $2x$, то $\smile MN = 2Rx$, $MN = 2R\sin x$. Поэтому $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2R\sin x}{2Rx} = 1$, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Численным подтверждением проведенных «рассуждений» может служить следующая т а б л и ц а, из которой видно, как приближаются к единице значения дроби $\frac{\sin x}{x}$, когда x приближается к нулю:

x	1	0,1	0,01
$\sin x$	0,841471	0,0998334	0,00999983
$\frac{\sin x}{x}$	0,841471	0,998334	0,999983

Равенство $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ получено нами пока что лишь на наглядном уровне — проведенные выше рассуждения опираются на наглядность. Сейчас будет дано строгое доказательство этого равенства.

Теорема. *Имеет место равенство*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Доказательство. Так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, то достаточно доказать, что $\frac{\sin x}{x}$ стремится к 1, когда x приближается к нулю, принимая положительные значения. Рассмотрим окружность единичного радиуса и дугу MN этой окружности, содержащую $2x$ рад. Тогда (рис. 154) имеем $\smile MN = 2x$ и $MN = 2\sin x$, поскольку ордината точки M равна $\sin x$. Наконец, $MK \perp MO$ и тогда $2MK = 2\operatorname{tg} x$, поскольку $MK = \operatorname{tg} x$.

Заметим теперь, что $MN < \smile MN$. Кроме того, $\smile MN < 2MK$, так как длина ломаной, описанной вокруг дуги окружности, больше длины этой дуги. Итак, $2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x$, т. е. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Разделив обе части этого неравенства на $\sin x$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ и потому } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

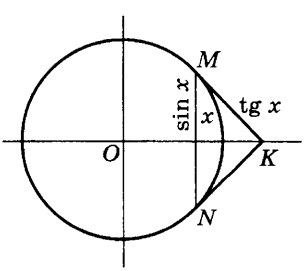


Рис. 154

Так как косинус — непрерывная функция, то $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. А тогда в силу д) п. 3 § 2 главы 4 имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Пример 1. Вычислим предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5x}.$$

Решение. Из (1) следует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{5x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Пример 2. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{\dfrac{\sin 3x}{x}}{\dfrac{\sin 5x}{x}} = \frac{3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}}{5\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x} = 1$, то предел числителя равен 3, предел знаменателя равен 5, предел дроби равен $\dfrac{3}{5}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}.$$

Упражнения

613. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 11x}$. Указание: положите $x = \pi + y$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 7x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$; 9) $\lim\limits_{x\to \infty} 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^n x}{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. Указание: положите $x = \dfrac{\pi}{3} + y$;

16) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x - 1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; 19) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\sqrt{x} - \sin\sqrt{x-1}\right)$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin 4x}$.

2. Производные тригонометрических функций. Вычислим производную функции $\sin x$. Для этого найдем сначала приращение этой функции:

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $h \to 0$. В силу непрерывности косинуса имеем $\lim\limits_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$. Кроме того, в п. 1 было доказано, что $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$. Значит,

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{1}$$

Аналогичные рассуждения, опирающиеся на формулу

$$\cos(x+h) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

показывают, что

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{2}$$

Чтобы вывести производную функции $\operatorname{tg} x$, заметим, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Поэтому

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\,\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{3}$$

Таким же образом доказывается, что

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{4}$$

Из формул (1) — (4) вытекают следующие формулы для вычисления дифференциалов тригонометрических функций:

$$d(\sin x) = \cos x\,dx,\quad d(\cos x) = -\sin x\,dx,$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x},\quad d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Пример 1. Найдем угол α, под которым синусоида пересекает в начале координат ось абсцисс.

Решение. Так как $(\sin x)' = \cos x$, а $\cos 0 = 1$, то $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Это значит, что искомый угол равен $\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Напишем уравнение касательной к синусоиде в точке с абсциссой $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Имеем $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, и потому уравнение касательной имеет вид $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Пример 3. Найдем приближенное значение для

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}01\right).$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

В нашем случае

$$f(x) = \operatorname{tg} x,\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ a = \frac{\pi}{4},\ h = 0{,}01.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}01\right) \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot 0{,}01 = 1 + \frac{0{,}01}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1{,}02.$$

Если угол выражен в градусах, надо переходить к радианной мере, например:

$$\sin 32^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{90}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{90} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{90} \approx 0{,}5 + 0{,}8660\cdot 0{,}0349 \approx 0{,}530.$$

Упражнения

614. Найдите производные от:

1) $\sin^3 x$;
2) $\dfrac{1}{\sin x}$;
3) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;
4) $\sin^3 x + \cos^3 x$;
5) $\dfrac{1}{\sin^4 x}$;
6) $(x^2 + 1)\sin^3 x$;
7) $2x \sin x - (x^2 - 4)\cos x$;
8) $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;
9) $\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$;
10) $8 \sin^4 x - 5 \operatorname{tg}^3 x$;
11) $\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

615. Исходя из определения производной, докажите, что:

1) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
2) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
3) $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$;
4) $(\cos 3x)' = -3\sin 3x$.

616. Найдите приближенные значения для:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + 0{,}015\right)$;
2) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2\pi}{3} + 0{,}02\right)$;
3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 0{,}01\right)$;
4) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - 0{,}012\right)$;
5) $\sin 61°$;
6) $\cos 29°30'$;
7) $\operatorname{tg} 44°30'$;
8) $\operatorname{ctg} 28°30'$.

617. Докажите, что тангенсоида пересекает ось абсцисс в начале координат под углом 45°.

618. Напишите уравнение касательной к функции f в точке a:

1) $f(x) = \sin^4 x,\ a = \dfrac{2\pi}{3}$;
2) $f(x) = \cos^5 x,\ a = \pi$;
3) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x,\ a = \dfrac{\pi}{6}$;
4) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x},\ a = \dfrac{\pi}{4}$.

619. Исследуйте на возрастание и убывание следующие функции, найдите их точки экстремума и точки перегиба, а также их периоды и постройте графики:

1) $\sin x + \cos x$;
2) $3\sin x - 4\cos x$;
3) $\sin^3 x + \cos^3 x$;
4) $\sin^4 x + \cos^4 x$;
5) $x \sin x$;
6) $x + 2\sin x$.

620. Докажите, что функция $x + \cos x$ возрастает на всей числовой оси.

621. Докажите, что функция $\operatorname{tg} x - x$ возрастает на промежутке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Дифференцирование композиции функций. Функцию $\sin(x^3)$ можно записать в виде $\sin t$, где $t = x^3$, т. е. в виде композиции синуса и функции x^3. Хотя мы уже умеем дифференцировать обе функции, из которых составлена функция $\sin(x^3)$, саму ее мы еще дифференцировать не умеем. Правило дифференцирования композиции функций дает следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция f дифференцируема в точке x, а функция g — в точке $t = f(x)$. Тогда композиция $g \circ f$ этих функций дифференцируема в точке x, причем*

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x). \tag{1}$$

Формулу (1) обычно записывают так:

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{1'}$$

Доказательство. Положим $g \circ f = F$, $f(x) = t$, $f(x + h) = t + k$. Приращение функции F имеет вид

$$F(x + h) - F(x) = g(f(x + h)) - g(f(x)) = g(t + k) - g(t).$$

Так как функция g дифференцируема в точке t, то

$$F(x + h) - F(x) = (g'(t) + \alpha)k = (g'(t) + \alpha)(f(x + h) - f(x)), \tag{2}$$

где α бесконечно мала при $k \to 0$, причем мы считаем, что $\alpha = 0$, если $k = 0$. Разделим обе части равенства (2) на h и перейдем к пределу при $h \to 0$. Тогда $k \to 0$, а потому $\alpha \to 0$ и, следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(g'(t) + \alpha) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$$

$$= g'(t) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Иными словами,

$$(g \circ f)'(x) = F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x).$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема имеет простой наглядный смысл. Число $f'(x)$ показывает, во сколько раз быстрее изменяется $t = f(x)$, чем x, а $g'(t)$ показывает, во сколько раз быстрее изменяется $g(t)$, чем t. Но тогда $g(f(x))$ меняется быстрее, чем x, как раз в $g'(t)f'(x)$ раз.

Частным случаем формулы (1) является выведенная в п. 2 § 2 главы 5 формула дифференцирования степени функции. В этом случае $g(t) = t^n$ и потому $g'(t) = nt^{n-1}$. Значит,

$$((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1} f'(x).$$

Отметим еще один важный частный случай формулы (1). Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда $f'(x) = (ax + b)' = a$, и потому формула (1) принимает вид

$$(g(ax + b))' = ag'(ax + b). \tag{2}$$

Например, $(\sin x)' = \cos x$ и потому

$$(\sin(\omega x + \alpha))' = \omega \cos(\omega x + \alpha).$$

Пример. Найдем производную функции $\sin(x^3 + x^2 + 1)$.

Решение. Здесь $g(t) = \sin t$, а $t = x^3 + x^2 + 1$. Так как $g'(t) = \cos t$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, то

$$(\sin(x^3 + x^2 + 1))' = \cos(x^3 + x^2 + 1)(3x^2 + 2x).$$

Упражнения

622. Найдите производные функций:

1) $\sin 8x$;
2) $\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$;
3) $\sin^4\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)$;
4) $\frac{1}{\cos^3 8x}$;
5) $\sin^4 6x + \cos^4 6x$;
6) $\sin\sqrt{x}$;
7) $\cos(x^4 + 1)$;
8) $\operatorname{tg}(x^2 - 3x + 5)$;
9) $\operatorname{tg}(\sin x)$;
10) $\sin(\cos x)$;
11) $\sin^2(\sqrt{x})$;
12) $\sqrt{\sin(x^2)}$;
13) $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;
14) $\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 3x$;
15) $\sqrt{\sin x + \cos 2x}$;
16) $\sqrt{\sin^3 5x + \cos^3 5x}$.

623. Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке a:

1) $f(x) = \sin(x^4)$, $a = \sqrt[4]{\frac{\pi}{3}}$;
2) $f(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{x})$, $a = \pi^2$;
3) $f(x) = \cos\left(x^2 + x + \frac{\pi}{4}\right)$, $a = 0$;
4) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x^3 + \frac{\pi}{3}\right)$, $a = 0$.

624. Найдите приближенные значения функций (с точностью до 0,001):

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0{,}001\right)$;
2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0{,}002\right)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}004\right)$;
4) $\sin 31°$;
5) $\cos 44°30'$;
6) $\operatorname{tg} 60°18'$.

625. Исследуйте функцию f и постройте ее график, если:

1) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;
2) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

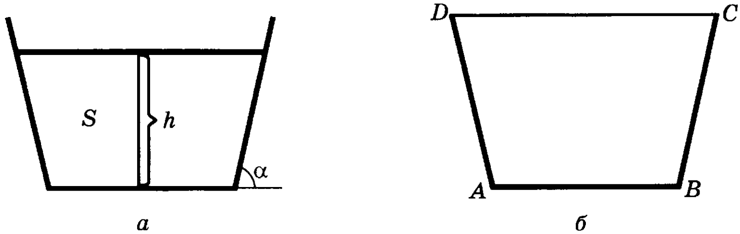


Рис. 155

626. Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобочную трапецию (рис. 155, *а*), площадь сечения потока воды равна S, глубина потока равна h. Найдите, при каком наклоне боковых стенок канала к горизонту (угол α) смоченная часть периметра канала окажется наименьшей (такая форма является наивыгоднейшей с точки зрения гидродинамики).

627. Из полосы жести шириной a требуется согнуть открытый желоб, имеющий в сечении равнобочную трапецию $ABCD$, такую, что $AB = AD = BC$ (рис. 155, *б*). Найдите угол при основании трапеции, при котором вместимость желоба будет наибольшей.

628. Докажите, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

629. Найдите треугольник наибольшей площади, имеющий данное основание a и данный угол при вершине φ. Поясните геометрический смысл полученного ответа.

630. Найдите прямоугольный треугольник периметра $2p$, имеющий наибольшую площадь. Решите задачу двумя способами, выбирая в качестве аргумента:

а) величину острого угла; б) длину гипотенузы.

631. Картина висит на стене так, что ее нижний край находится выше глаза зрителя на a м, а верхний — на b м. На каком расстоянии должен находиться зритель от картины, чтобы угол зрения был наибольшим?

632. Груз массы m, лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут с места приложенной к нему силой $\vec{F}$ (рис. 156). Под каким углом α к горизонтальной плоскости следует приложить при наличии трения эту силу, чтобы модуль ее был наименьшим (коэффициент трения равен μ, $0 < \mu < 1$)?

633. Электрическая лампочка B может перемещаться (например, на блоке) по вертикальной прямой OB (рис. 157). На каком расстоянии

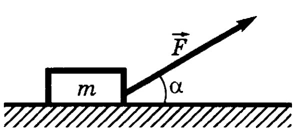


Рис. 156

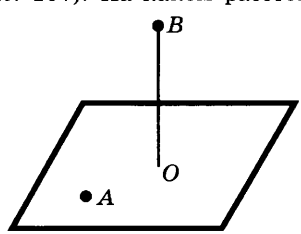


Рис. 157

от горизонтальной плоскости ее следует повесить, чтобы освещенность в точке A этой плоскости была наибольшей, если расстояние OA равно a?

Указание. Освещенность E в точке A выражается формулой

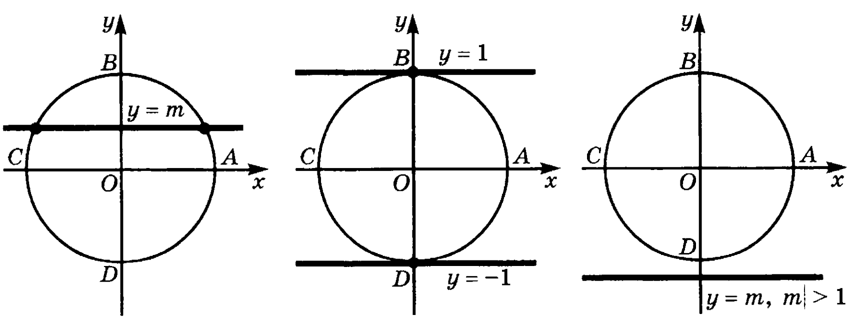
$$E = C\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где r — расстояние от точки A до источника света, а φ — угол между лучом света и горизонтальной плоскостью; в качестве аргумента выберите угол φ.

§ 5. Тригонометрические уравнения и неравенства

В этом параграфе мы изучим уравнения и неравенства, содержащие тригонометрические функции (*тригонометрические уравнения и неравенства*). Решение таких уравнений и неравенств заканчивается отысканием значений аргумента по заданному значению тригонометрической функции. Поэтому мы и займемся сначала этой задачей.

1. Решение уравнений вида $\sin t = m$. Арксинус. Так как $\sin t$ является ординатой точки $M(t)$ координатной окружности, то для решения уравнения $\sin t = m$ надо сначала найти на этой окружности точки, имеющие ординату m, т. е. точки пересечения этой окружности с прямой $y = m$. Если $|m| < 1$, то таких точек на окружности две, если $|m| = 1$ — одна, а если $|m| > 1$, то таких точек не существует (рис. 158). После отыскания этих точек остается найти множества чисел, которым они соответствуют, и объединить эти множества. Полученное объединение и будет решением уравнения $\sin t = m$.



а *б* *в*

Рис. 158

Пример 1. Решим уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает координатную окружность в двух точках: $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ и $N\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ (рис. 159). Точка M соответствует всем числам вида $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а точка N — всем числам вида $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Объединяя множества чисел указанных двух видов, получим решение уравнения

$$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \boldsymbol{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \,\middle|\, k \in \boldsymbol{Z}\right\}.$$

Ответ можно записать также в виде

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \ k \in \boldsymbol{Z},\ t = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 2. Решим уравнение $\sin t = 1$.

Решение. Ординату, равную 1, имеет только одна точка координатной окружности — точка $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ — верхний конец вертикального диаметра (рис. 160). Она соответствует числам вида $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Значит, множество корней уравнения таково: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,|\, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Ответ можно записать также в виде $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Аналогично выглядит решение уравнения $\sin t = -1$:

$$\left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \,|\, k \in \boldsymbol{Z}\right\},\ \text{или, иначе,}\ \ t = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

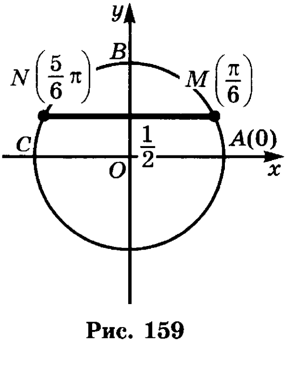


Рис. 159

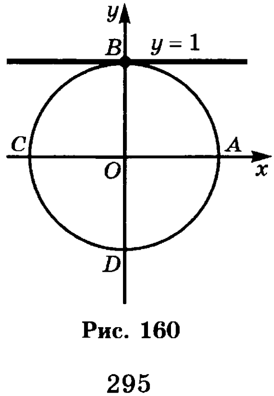


Рис. 160

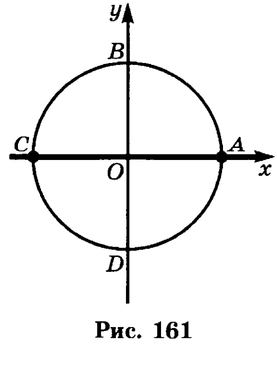


Рис. 161

П р и м е р 3. Решим уравнение $\sin t = 0$.

Р е ш е н и е. Ординату, равную нулю, имеют две точки координатной окружности — концы горизонтального диаметра $A(0)$ и $C(\pi)$ (рис. 161). Точка A соответствует числам вида $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, а точка C — числам вида $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Итак,

$$t = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z};\quad t = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Вместо двух формул можно написать одну формулу $t = m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$. В самом деле, если m — четное число, т. е. $m = 2n$, то получаем первую формулу, а если m — нечетное число, т. е. $m = 2k + 1$, то получаем вторую формулу.

Для записи решений уравнения $\sin t = m$, где $|m| \leqslant 1$, введем понятие арксинуса числа m. Для этого заметим, что при $|m| \leqslant 1$ одна и только одна из точек пересечения координатной окружности с прямой $y = m$ принадлежит правой полуокружности DAB (рис. 162). Иными словами, если $|m| \leqslant 1$, то существует единственное число t_0 такое, что $\sin t_0 = m$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant t_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Это число называют арксинусом[1] числа m.

Определение. Если $|m| \leqslant 1$, то *арксинусом* m называют такое число t_0, что $\sin t_0 = m$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant t_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Арксинус числа m обозначают $\arcsin m$.

Из данного определения следует, что если $|m| \leqslant 1$, то

$$\sin(\arcsin m) = m \qquad (1)$$

и

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin m \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Обратно, если $\sin t = m$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $t = \arcsin m$.

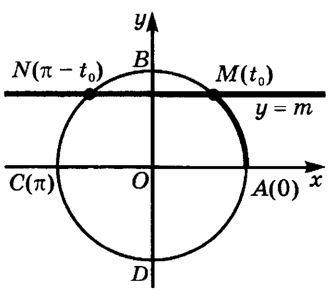


Рис. 162

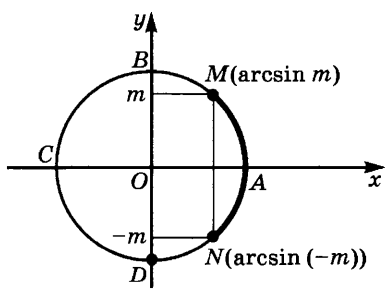


Рис. 163

---

[1] От латинского arcus — дуга, $\arcsin m$ — дуга, синус которой равен m (имеется в виду дуга AM).

Пример 4. Вычислим: а) $\arcsin \frac{1}{2}$; б) $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. а) Так как $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Так как $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

На рисунке 163 показано, как связаны друг с другом числа m и $\arcsin m$. Из этого рисунка видно, что

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m. \quad (3)$$

Докажем это равенство без опоры на рисунок. Если $\arcsin m = t_0$, то $\sin t_0 = m$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant t_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Но тогда $\sin(-t_0) = -\sin t_0 = -m$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant -t_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, а это значит, что $\arcsin(-m) = -t_0 = -\arcsin m$.

Запишем с помощью обозначения $\arcsin m$ решение уравнения $\sin t = m$. Одним из корней этого уравнения при $|m| \leqslant 1$ является число $\arcsin m$. Так как $\sin(\pi - t) = \sin t$, то число $\pi - \arcsin m$ тоже является решением уравнения $\sin t = m$ (совпадающим с $\arcsin m$, если $|m| = 1$). Других корней на отрезке $[0; 2\pi]$ уравнение $\sin t = m$ не имеет. Учитывая периодичность функции $\sin t$, получаем, что *решением уравнения* $\sin t = m$ *при* $|m| \leqslant 1$ *является объединение множеств* $\{\arcsin m + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ и $\{\pi - \arcsin m + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$.

Пишут также

$$t = \arcsin m + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}; \quad (4)$$

$$t = \pi - \arcsin m + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}. \quad (5)$$

Заметим, что формулы (4) и (5) можно объединить в одну:

$$t = (-1)^n \arcsin m + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}. \quad (6)$$

Действительно, при n четном ($n = 2k$) из формулы (6) получаем формулу (4), а при n нечетном ($n = 2k + 1$) — формулу (5).

Пример 5. Решим уравнения: а) $\sin t = \frac{1}{5}$, б) $\sin t = -\frac{1}{7}$.

Решение. а) Решение уравнения $\sin t = \frac{1}{5}$ имеет вид

$$\left\{\arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}.$$

Его можно также записать в виде

$$t = (-1)^n \arcsin \frac{1}{5} + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Так как $\arcsin\left(-\frac{1}{7}\right) = -\arcsin\frac{1}{7}$, то искомое решение является объединением множеств

$$\left\{-\arcsin\frac{1}{7} + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\} \text{ и } \left\{\pi + \arcsin\frac{1}{7} + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}.$$

Решение можно также записать в виде

$$t = (-1)^{n-1} \arcsin\frac{1}{7} + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Упражнения

634. Напишите общий вид таких чисел x, что:

1) $\sin x = -1$; 2) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

635. Найдите значения:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

636. Вычислите $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

637. Найдите значение (устно)

$$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin(-1)\right).$$

638. Решите уравнения: $\sin t = \frac{1}{4}$; $\sin x = -\frac{3}{11}$.

639. Может ли $\arcsin t$ принимать значения:

1) $\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 7) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) -2π; 4) $\frac{\pi}{2}$; 6) $\sqrt{2}$; 8) $5\sqrt{7}$?

640. Найдите значения:

1) $\arcsin(\sin 15°)$; 3) $\arcsin(\sin 3)$;

2) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\arcsin(\sin 10)$.

2. Решение уравнений вида $\cos t = m$. Арккосинус. Так как $\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$ координатной окружности, то для решения уравнения $\cos t = m$ надо сначала найти на этой окружности точки, имеющие абсциссу m, т. е. точки пересечения окружности с прямой $x = m$. Если $|m| < 1$, то получаются две точки пересечения, если $|m| = 1$, то одна, а при $|m| > 1$ точек пересечения не существует (рис. 164). После отыскания указанных точек находят множество чисел, которым они соответствуют, и объединяют эти множества.

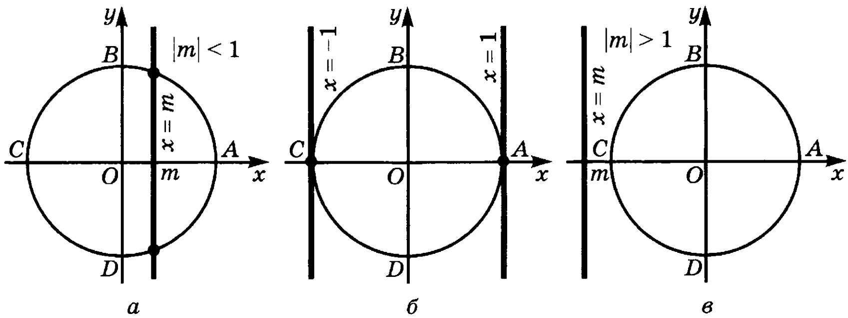


Рис. 164

Пример 1. Решим уравнение $\cos t = \frac{1}{2}$.

Решение. Прямая $x = \frac{1}{2}$ пересекает координатную окружность в двух точках M и N, симметричных относительно оси абсцисс (рис. 165). Так как $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то $M = M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ и потому $N = N\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Точка M соответствует числам вида $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а точка N — числам вида $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Объединяя эти два множества чисел, получаем решение уравнения $\cos t = \frac{1}{2}$:

$$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \boldsymbol{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \boldsymbol{Z}\right\}.$$

Это решение можно также записать в виде $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим уравнение $\cos t = 1$.

Решение. Абсциссу, равную 1, имеет только одна точка координатной окружности — точка $A(0)$ (рис. 166). Она соответствует

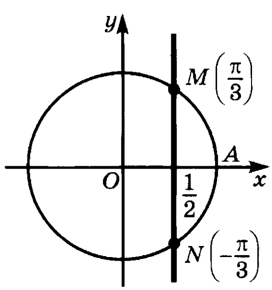


Рис. 165

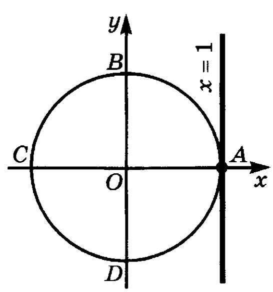


Рис. 166

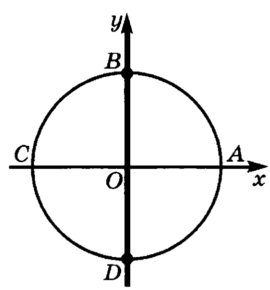


Рис. 167

числам вида $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Значит, решением уравнения $\cos t = 1$ является множество чисел вида $\{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Пишут

$$t = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Аналогично находят решение уравнения $\cos t = -1$. Им является множество чисел вида $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, т. е. вида $(2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решим уравнение $\cos t = 0$.

Решение. Нулевую абсциссу имеют две точки координатной окружности — концы вертикального диаметра (рис. 167). Точка B соответствует числам вида $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, а точка D — числам вида $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Решение уравнения является объединением этих двух числовых множеств. Оно состоит из чисел вида $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Для записи решений уравнений вида $\cos t = m$, где $|m| \leqslant 1$, введем понятие арккосинуса числа m. Для этого заметим, что при $|m| \leqslant 1$ одна и только одна из точек пересечения прямой $x = m$ с координатной окружностью принадлежит верхней полуокружности ABC (рис. 168). Иными словами, если $|m| \leqslant 1$, то существует единственное число t_0 такое, что $\cos t_0 = m$, причем $0 \leqslant t_0 \leqslant \pi$. Это число называют арккосинусом числа m.

Определение. Если $|m| \leqslant 1$, то *арккосинусом* m называют такое число t_0, что $\cos t_0 = m$ и $0 \leqslant t_0 \leqslant \pi$.

Арккосинус числа m обозначают $\arccos m$.

Из данного определения следует, что при $|m| \leqslant 1$ имеем

$$\cos(\arccos m) = m \tag{1}$$

и

$$0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi. \tag{2}$$

Обратно, если $\cos t = m$ и $0 \leqslant t \leqslant \pi$, то $t = \arccos m$.

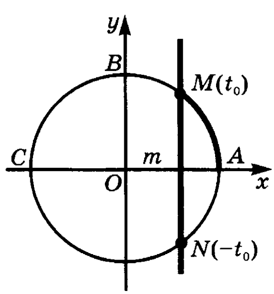


Рис. 168

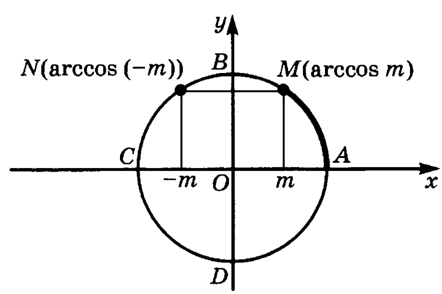


Рис. 169

Пример 4. Вычислим $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Так как $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \pi$, то

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

На рисунке 169 показано, как связаны друг с другом числа m и $\arccos m$. Из этого рисунка видно, что

$$\arccos(-m) = \pi - \arccos m. \qquad (3)$$

Чтобы доказать это равенство без опоры на рисунок, заметим, что если $\arccos m = t$, то имеем $\cos t = m$ и $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Поскольку $\cos(\pi - t) = -\cos t = -m$, причем $0 \leqslant \pi - t \leqslant \pi$, то получаем, что $\arccos(-m) = \pi - \arccos m$.

Запишем с помощью обозначения $\arccos m$ решение уравнения $\cos t = m$. Одним из корней этого уравнения является число $t_0 = \arccos m$. Так как $\cos(-t_0) = \cos t_0 = m$, то $-\arccos m$ также является корнем данного уравнения.

Других решений на отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнение $\cos t = m$ не имеет. Учитывая периодичность функции $\cos t$, получаем, что решение уравнения $\cos t = m$ является объединением множеств чисел вида $\{\arccos m + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ и $\{-\arccos m + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$. Пишут так:

$$\{\pm\arccos m + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\} \qquad (4)$$

или

$$t = \pm\arccos m + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (5)$$

Пример 5. Решим уравнение $\cos t = -\frac{3}{8}$.

Решение. Так как $\arccos\left(-\frac{3}{8}\right) = \pi - \arccos \frac{3}{8}$, то по формуле (4) получаем, что $t = \pm\left(\pi - \arccos \frac{3}{8}\right) + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или, иначе, $t = (2k + 1)\pi \pm \arccos \frac{3}{8}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

641. Запишите в общем виде такие числа x, что $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

642. Найдите значения $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos 0$.

643. Вычислите $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$.

644. Проверьте равенство $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

645. Найдите значения:

1) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

646. Может ли $\arccos m$ принимать значения:

1) $-\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{9\pi}{3}$; 5) $\sqrt{3}$;

6) $-\sqrt{3}$; 7) 4; 8) -1?

647. Найдите значения:

1) $\arccos(\cos 20°)$; 3) $\arccos(\sin 37°)$; 5) $\arccos(\sin 2)$;
2) $\arccos(\cos(-80°))$; 4) $\arccos(\cos 2)$; 6) $\arccos(\cos 10)$.

3. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} t = m$. Арктангенс. Так как $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, то $\operatorname{tg} t$ является отношением ординаты и абсциссы точки $M(t)$ координатной окружности. Поэтому для решения уравнения $\operatorname{tg} t = m$ надо сначала найти точки пересечения этой окружности с прямой $\frac{y}{x} = m$, а потом найти множества чисел, которым соответствуют эти точки. При любом значении m прямая $\frac{y}{x} = m$, или, что то же самое, $y = mx$, пересекает координатную окружность в двух диаметрально противоположных точках M и N (рис. 170). Одна и только одна из этих точек лежит на правой полуокружности DAB — в нашем случае точка M. Итак, для любого m существует единственное число t_0 такое, что $\operatorname{tg} t_0 = m$, причем $-\frac{\pi}{2} < t_0 < \frac{\pi}{2}$. Второй точке пересечения N соответствует число $t_0 + \pi$. Отсюда видно, что решение уравнения $\operatorname{tg} t = m$ является объединением множеств $t_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, и $t_0 + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, т. е. множеством, состоящим из чисел вида $t_0 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

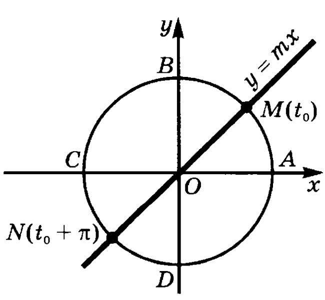


Рис. 170

Для записи решений уравнения $\operatorname{tg} t = m$ введем понятие арктангенса числа m.

Определение 1. *Арктангенсом* m называется такое число t_0, что $\operatorname{tg} t_0 = m$ и $-\frac{\pi}{2} < t_0 < \frac{\pi}{2}$.

Мы видели выше, что для любого m существует единственное число, удовлетворяющее этим условиям. Его обозначают arctg m. Из данного выше определения следует, что

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m) = m \qquad (1)$$

и

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} m < \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Обратно, если $\operatorname{tg} t = m$ и $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, то $t = \operatorname{arctg} m$.

П р и м е р 1. Найдем: а) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; б) $\operatorname{arctg}(-1)$.

Р е ш е н и е. а) Так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, причем $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

б) Так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, причем $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

П р и м е р 2. Решим уравнение $\operatorname{tg} t = \frac{8}{3}$.

Р е ш е н и е. Имеем $t = \operatorname{arctg} \frac{8}{3} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что если $\operatorname{arctg} m = t_0$, то $\operatorname{tg} t_0 = m$ и $-\frac{\pi}{2} < t_0 < \frac{\pi}{2}$. Но тогда $\operatorname{tg}(-t_0) = -\operatorname{tg} t_0 = -m$, причем $-\frac{\pi}{2} < -t_0 < \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\operatorname{arctg}(-m) = -t_0 = -\operatorname{arctg} m$. Итак,

$$\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m. \qquad (3)$$

Аналогично вводится arcctg m (арккотангенс m).

***Определение 2. Арккотангенсом** m* называют такое число t_0, что $\operatorname{ctg} t_0 = m$, причем $0 < t_0 < \pi$.

П р и м е р 3. Найдем $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Р е ш е н и е. Так как $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, причем $0 < \frac{\pi}{3} < \pi$, то $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Предоставляем читателю доказать, что

$$\operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m. \qquad (4)$$

Поэтому $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Упражнения

648. Найдите общий вид таких чисел x, что:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

649. Найдите значения:

1) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; 2) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; 3) $\operatorname{arctg} 1$; 4) $\operatorname{arcctg} 0$.

650. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$;

2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-1))$; 6) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}(\sqrt{3})\right)$; 7) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{5}\right)\right)$.

4) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right)$;

651. Проверьте равенство $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$.

652. Найдите значения (устно):

1) $\cos(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

653. Может ли $\operatorname{arctg} x$ принимать значения:

1) 0; 3) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\sqrt{3}$; 7) $\frac{2\pi}{3}$;

2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) -1?

654. Может ли $\operatorname{arcctg} x$ принимать значения:

1) 0; 3) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\sqrt{2}$; 7) 4;

2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) π; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $-0{,}1$?

4. Основные методы решения тригонометрических уравнений. Решение произвольных тригонометрических уравнений сводится в конечном счете к решению простейших тригонометрических уравнений разобранных выше видов. Чтобы выполнить такое сведение, применяют те же основные приемы, которые были описаны ранее для решения алгебраических уравнений, — введение нового неизвестного (подстановка) и разложение на множители левой части уравнения вида $F(t) = 0$.

Разберем некоторые частные случаи этих общих приемов. Ради краткости будем иногда применять букву T как общее обозначение для тригонометрических функций: синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

а) Уравнение вида $T(f(t)) = 0$. В уравнениях такого вида под знаком тригонометрической функции стоит выражение, зависящее от t. Для решения такого уравнения надо обозначить $f(t)$ через x, решить получившееся простейшее тригонометрическое уравнение $T(x) = 0$ и, найдя его корни, решить уравнения $f(t) = a$, где a пробегает множество этих корней.

Пример 1. Решим уравнение $\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Положим $5t - \frac{\pi}{6} = x$. Мы получили для x уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, из которого находим, что $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Так как $x = 5t - \frac{\pi}{6}$, то для отыскания t получаем уравнения

$$5t - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

из которых находим

$$t = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Можно записать так:

$$t_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}, \text{ или } t_2 = -\frac{\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Замечание. Учащиеся часто делают ошибку при решении уравнений указанного вида — находят частные значения t и подставляют их в формулу общего решения. Например, решая уравнение $\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, пишут $5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{12}$ и потом по формуле общего решения «выводят», что $t = \pm\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Этот ответ отличается от полученного выше правильного ответа.

Пример 2. Решим уравнение $\operatorname{tg}\left(x^2 + 4x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Решение. Полагая $x^2 + 4x + \frac{\pi}{4} = z$, сводим это уравнение к простейшему уравнению $\operatorname{tg} z = 1$ и получаем из него, что $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда получаем, что

$$x^2 + 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

и потому

$$x^2 + 4x - k\pi = 0,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно,

$$x = -2 \pm \sqrt{4 + k\pi},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Для того чтобы значения t были действительными, должно выполняться неравенство $4 + k\pi \geqslant 0$. Из него находим, что

$$k \geqslant -\frac{4}{\pi},\ \text{т. е. } k = -1,\ 0,\ 1,\ \ldots .$$

Итак, решение данного уравнения имеет вид

$$x = -2 \pm \sqrt{4 + k\pi},\ k \in \boldsymbol{Z},\ k \geqslant -1.$$

б) Уравнение вида $T(\varphi(t)) = T(\psi(t))$. Результаты пп. 1—3 можно сформулировать следующим образом: если $\sin t = \sin\alpha$, то $t = (-1)^k\alpha + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $\cos t = \cos\alpha$, то $t = \pm\alpha + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; и, наконец, если $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}\alpha$, то $t = \alpha + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Пользуясь этим, будем решать уравнения вида $T(\varphi(t)) = T(\psi(t))$, в которых слева и справа стоит одна и та же тригонометрическая функция T, под знаком которой стоят некоторые выражения от t.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sin\left(6t - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (1)$$

Решение. Из сказанного выше выводим, что уравнение (1) выполняется в том и только в том случае, когда выполняется равенство $6t - \frac{\pi}{3} = (-1)^k\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Решая это уравнение, находим $t = \dfrac{\frac{\pi}{3} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi}{6 - (-1)^k \cdot 2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Имеем две серии решений:

$$t_1 = \frac{7}{48}\pi + \frac{\pi k}{2},\quad k \in \boldsymbol{Z};\quad t_2 = \frac{13}{96}\pi + \frac{\pi k}{4},\quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 4. Решим уравнение

$$\cos x^2 = \cos(4x - 3).$$

Р е ш е н и е. Из данного уравнения выводим, что $x^2 = \pm(4x - 3) + 2k\pi$. Решая эти квадратные уравнения, получаем:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1 + 2k\pi}, \; k \in \boldsymbol{Z}, \; k \geqslant 0;$$

$$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{7 + 2k\pi}, \; k \in \boldsymbol{Z}, \; k \geqslant -1.$$

П р и м е р 5. Решим уравнение $\operatorname{tg} x^2 = \operatorname{tg}(4x - 3)$.

Р е ш е н и е. Из данного уравнения выводим, что $x^2 = 4x - 3 + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (если $\operatorname{tg} x^2$ определен). Решая эти квадратные уравнения, находим $x = 2 \pm \sqrt{1 + k\pi}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \geqslant 0$ (можно доказать, что при этом $x^2 \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$).

в) Уравнение вида $f(T(t)) = 0$. В этих уравнениях тригонометрическая функция стоит под знаком другой функции. Для решения уравнения надо ввести новую неизвестную, положив $T(t) = z$, и решить уравнение $f(z) = 0$. Если корнями являются числа $z_1, \ldots, z_n$, то задача сводится к отысканию решений для уравнений $T(t) = z_1, \ldots, T(t) = z_n$ и объединению этих решений.

П р и м е р 6. Решим уравнение $6 \sin^2 t - 5 \sin t + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Полагая $\sin t = z$, получаем квадратное уравнение $6z^2 - 5z + 1 = 0$. Его корнями являются числа $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{3}$. Поэтому данное уравнение сводится к простейшим тригонометрическим уравнениям $\sin t = \frac{1}{2}$ и $\sin t = \frac{1}{3}$. Решая их, находим, что

$$t_1 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, \; t_2 = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{1}{3}, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

П р и м е р 7. Решим уравнение $2 \cos^4 t - 7 \cos^2 t - 4 = 0$.

Р е ш е н и е. Подстановка $\cos^2 t = z$ сводит данное уравнение к квадратному уравнению $2z^2 - 7z - 4 = 0$. Его корнями являются числа $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = 4$. Так как $0 \leqslant \cos^2 t \leqslant 1$, то заданное уравнение не имеет корней.

г) При решении тригонометрических уравнений часто применяется *способ разложения на множители:* уравнение записывают в виде $f(t) = 0$ и представляют функцию f в виде произведения. При этом используются формулы из п. 6 § 3.

П р и м е р 8. Решим уравнение $\sin t + \sin 2t + \sin 3t = 0$.

Р е ш е н и е. Так как $\sin t + \sin 3t = 2 \sin 2t \cos t$, то записываем данное уравнение в виде $2 \sin 2t \cos t + \sin 2t = 0$. Теперь выносим множитель $\sin 2t$ за скобки: $\sin 2t(2\cos t + 1) = 0$. Нам осталось решить уравнения $\sin 2t = 0$ и $2\cos t + 1 = 0$ и объединить их решения. Из $\sin 2t = 0$ получаем $2t = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и потому $t = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а из $2\cos t = -1$ получаем $\cos t = -\frac{1}{2}$, $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Ответ записывается так:

$$t_1 = \frac{k\pi}{2},\ t_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Упражнения

655. Укажите общий вид чисел, удовлетворяющих уравнениям:

1) $\sin 9x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 6x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} 5x = 1$; 4) $\operatorname{ctg} 12x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) $\operatorname{tg} 7x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\sin\left(8x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$;

8) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 9) $\sin^2\frac{5}{x} = \frac{1}{4}$; 10) $\cos^2(3x - 60^\circ) = \frac{3}{4}$;

11) $\operatorname{tg}^2\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$; 12) $\operatorname{tg}^2\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 13) $\cos^2\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) = 2$;

14) $\sin 3x = \frac{2}{5}$; 15) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{9}$; 16) $\sin(2x^2) = \frac{1}{2}$;

17) $\cos^2 3x^2 = \frac{3}{4}$; 18) $\operatorname{tg}\frac{7}{x} = 1$; 19) $\operatorname{ctg}\frac{x^2}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

656. Решите уравнения:

1) $\sin 3x \cos 2x \operatorname{tg} 7x = 0$; 2) $\sin 4x = -\cos 5x$; 3) $\operatorname{tg} 4x = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

4) $\sin 17x = -\sin 13x$; 5) $\cos 6x = -\cos a$; 6) $\operatorname{tg} 5x = -\operatorname{ctg} 7x$;

7) $\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{3}$; 8) $\operatorname{tg}(7\pi + x) = -\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

9) $\sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos(x + 6\pi)$; 10) $\sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x^3$;

11) $\cos\frac{x}{5} = -\cos\frac{2}{x}$; 12) $\cos x^2 = -\cos 5x^2$; 13) $\operatorname{ctg} 6x = -\operatorname{ctg}\frac{2}{x}$;

14) $\cos(3x^2 - 2x) = \cos 5x$; 15) $\operatorname{tg}\sqrt{x} = \operatorname{ctg} 3x$;

16) $\sin^2 2x - 3\sin 2x + 2 = 0$; 17) $\operatorname{tg}^2 4x + 3\operatorname{tg} 4x - 4 = 0$;

18) $\cos^2 3x - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$; 19) $\sin^2 2x + 2\cos^2 2x = \frac{7}{4}$;

20) $\frac{\sin 3x - 4\cos 3x}{2\sin 3x + \cos 3x} = -1$.

5. Частные способы решения тригонометрических уравнений. При решении тригонометрических уравнений, содержащих несколько тригонометрических функций, полезно выразить все входящие в них функции через одну, после чего сделать соответствующую подстановку.

Пример 1. Решим уравнение $5\sin^2 t + 3\sin t + 4\cos^2 t = 5\frac{3}{4}$.

Решение. С помощью формулы $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ данное уравнение приводится к виду $\sin^2 t + 3\sin t - 1\frac{3}{4} = 0$. Подстановка $\sin t = z$ сводит его к квадратному уравнению $z^2 + 3z - 1\frac{3}{4} = 0$, из которого находим $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = -3\frac{1}{2}$.

Уравнение $\sin t = -3\frac{1}{2}$ решений не имеет, а решением уравнения $\sin t = \frac{1}{2}$ является $t = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Укажем некоторые правила, облегчающие выбор подстановки при решении тригонометрических уравнений. Будем обозначать через $R(z, w)$ рациональную функцию[1] от z и w. Если заменить в такой функции z на $\sin t$, а w на $\cos t$, то получим функцию $R(\sin t, \cos t)$, которую будем называть *рациональной функцией* от $\sin t$ и $\cos t$.

Примерами таких функций являются $\sin^2 t + \cos^2 t$, $2\sin^3 t$, $\frac{2\sin^2 t - \cos t + 1}{3\cos^2 t \sin t + 5}$ и т. д.

Для решения уравнений вида

$$R(\sin t, \cos t) = 0$$

дадим следующие указания:

а) если $\sin t$ (соответственно $\cos t$) входит в уравнение лишь с четными показателями, то делают подстановку $\cos t = z$ (соответственно $\sin t = z$);

б) если при одновременной замене $\sin t$ на $-\sin t$ и $\cos t$ на $-\cos t$ функция $R(\sin t, \cos t)$ не изменяется (т. е. если $R(-\sin t, -\cos t) = R(\sin t, \cos t)$), то делают подстановку $\operatorname{tg} t = z$.

---

[1] Напомним (см. п. 1 § 1 главы 2), что рациональной функцией от z и w называют функцию, значения которой получаются из чисел и значений z и w с помощью действий сложения, умножения и деления.

Пример 2. Решим уравнение

$$\sin^4 t + 3\cos t - \cos^4 t - 2 = 0.$$

Решение. В это уравнение $\sin t$ входит лишь в четвертой степени. В соответствии с правилом а) выразим всю левую часть через $\cos t$. Так как $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, то $\sin^4 t = (1 - \cos^2 t)^2$, и потому имеем уравнение

$$(1 - \cos^2 t)^2 + 3\cos t - \cos^4 t - 2 = 0,$$

т. е.

$$2\cos^2 t - 3\cos t + 1 = 0.$$

Обозначая $z = \cos t$, получаем уравнение $2z^2 - 3z + 1 = 0$ с корнями $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = 1$. Задача свелась к решению двух простейших тригонометрических уравнений: $\cos t = \frac{1}{2}$ и $\cos t = 1$. Из них находим, что $t = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$ или $t = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sin^2 t + 3\sin t\cos t + 6\cos^2 t - 5 = 0. \qquad (1)$$

Решение. При одновременной замене $\sin t$ на $-\sin t$ и $\cos t$ на $-\cos t$ левая часть этого уравнения не изменяется. Поэтому делаем по правилу б) подстановку $\operatorname{tg} t = z$. Чтобы перейти к новому неизвестному, заметим, что при $\cos t = 0$ уравнение принимает вид $\sin^2 t - 5 = 0$, в то время как при этих значениях t должно быть $\sin^2 t = 1$. Поэтому значения t, обращающие $\cos t$ в нуль, не являются корнями уравнения (1), и, следовательно, обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 t$. Получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 t + 3\operatorname{tg} t + 6 - \frac{5}{\cos^2 t} = 0$, т. е. $\operatorname{tg}^2 t + 3\operatorname{tg} t + 6 - 5(1 + \operatorname{tg}^2 t) = 0$, или $4\operatorname{tg}^2 t - 3\operatorname{tg} t - 1 = 0$. Делаем подстановку $\operatorname{tg} t = z$ и получаем квадратное уравнение $4z^2 - 3z - 1 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа $z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{1}{4}$. Решая уравнения $\operatorname{tg} t = 1$ и $\operatorname{tg} t = -\frac{1}{4}$, получаем ответ: $t = \pi n + \frac{\pi}{4}$ или $t = n\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Подстановка $\operatorname{tg} t = z$ полезна и в случае, когда левая часть уравнения $R(\sin t, \cos t)$ является однородной функцией от $\sin t$ и $\cos t$, т. е. умножается на множитель вида λ^n при одновременной замене $\sin t$ на $\lambda\sin t$ и $\cos t$ на $\lambda\cos t$:

$$R(\lambda\sin t, \lambda\cos t) = \lambda^n R(\sin t, \cos t).$$

В этом случае надо разделить обе части уравнения на $\cos^n t$ и положить $\operatorname{tg} t = z$ (если все члены уравнения делятся на $\cos^m t$, то надо сначала вынести $\cos^m t$ за скобки и разбить данное уравнение на два).

Пример 4. Решим уравнение

$$4\sin^2 t\cos^2 t - 9\cos^4 t = 0.$$

Решение. Левая часть этого уравнения однородна относительно $\sin t$ и $\cos t$. При этом все члены уравнения делятся на $\cos^2 t$. Поэтому выносим $\cos^2 t$ за скобки:

$$\cos^2 t\,(9\cos^2 t - 4\sin^2 t) = 0.$$

Теперь надо решить уравнения $\cos t = 0$ и $9\cos^2 t - 4\sin^2 t = 0$. Решением первого из них является множество чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Чтобы решить второе уравнение, разделим обе части этого уравнения на $\cos^2 t$ (очевидно, что числа, при которых $\cos t = 0$, не являются корнями этого уравнения). Получаем уравнение $9 - 4\operatorname{tg}^2 t = 0$, откуда находим, что $\operatorname{tg} t = \pm\frac{3}{2}$. Значит, $t = \pi n \pm$ $\pm \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Итак, $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $t = \pi n \pm \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Часто уравнение приводится к однородному простым преобразованием. Например, чтобы привести уравнение

$$\sin^2 t - 4\sin t\cos t + 2\cos^2 t = 3$$

к однородному, достаточно умножить его правую часть на «тригонометрическую единицу» $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Получаем однородное уравнение

$$\sin^2 t - 4\sin t\cos t + 2\cos^2 t = 3(\sin^2 t + \cos^2 t),$$

которое решается как описано выше.

Упражнения

657. Решите однородные или приводящиеся к однородным уравнения:

1) $a\sin x + b\cos x = 0$, $a \neq b$;
2) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;
3) $5\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$;
4) $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$;
5) $6\cos^2 x - 2\sin^2 x = 5$;
6) $\sin^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$;
7) $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 8\cos 5x\sin 5x$;
8) $\sin^6 x + \sin^4 x\cos^2 x = \sin^3 x\cos^3 x + \sin x\cos^2 x$;
9) $\sin^2 x\cos^2 x - 10\sin x\cos^3 x + 21\cos^4 x = 0$;

10) $8 \sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin x - 4 = 0$;

11) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x$;

12) $1 - 3 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$.

658. Решите методом подстановки уравнения:

1) $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin x$;

2) $2 \sin^2 x \cos x + 1 = 2 \sin^2 x + \cos x$;

3) $4 \sin^3 x + 4 \cos^2 x - \sin x - 3 = 0$;

4) $4 \cos^3 x - 4 \sin^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$;

5) $-6 \sin x \cos^2 x - 13 \sin^2 x + 7 \sin x + 2 = 0$;

6) $2 + \cos^2 2x = (2 - \sin^2 x)^2$.

659. Решите уравнения:

1) $\sin 2x + \sin x = 0$;

2) $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$;

3) $\sin (p + x) + \sin x = 2 \cos \frac{p}{2}$;

4) $\operatorname{tg} px + \operatorname{tg} qx = 0$;

5) $\sin x + \sin 5x + \sin 9x = 0$;

6) $\cos 4x + \cos 2x + \cos x = 0$;

7) $a \sin x + b \cos x = a \sin 2x - b \cos 2x$;

8) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$;

9) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$;

10) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$;

11) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$;

12) $\cos 6x \cos 3x - \cos 7x \cos 4x = 0$;

13) $\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2} \cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2} \cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

6. Универсальная подстановка. Подстановки, которые мы до сих пор рассматривали, годились лишь для специальных видов уравнений. Существует подстановка, позволяющая превратить в рациональное алгебраическое любое уравнение вида $R(\sin t, \cos t) = 0$, где, как и выше, $R(z, w)$ — рациональная функция от z и w.

По формулам (7) и (8) п. 4 § 3 имеем при $t \neq (2k + 1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$:

$$\sin t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}; \qquad (1)$$

$$\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}. \qquad (2)$$

Значит, если положить $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = z$, то уравнение $R(\sin t, \cos t) = 0$ принимает вид

$$R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) = 0.$$

Левая часть этого уравнения является рациональной функцией от z, т. е. наша подстановка привела уравнение к рациональному виду.

Замечание. Формулы (1), (2) верны лишь при условии, что $t \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому после решения уравнения с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = z$ надо еще проверить, не являются ли числа вида $t = \pi + 2\pi n$ решением этого уравнения.

Пример. Решим уравнение

$$3\sin t - 4\cos t = \frac{5}{2}. \qquad (3)$$

Решение. Заменим $\sin t$ и $\cos t$ по формулам (1), (2) и положим $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = z$. Получаем рациональное уравнение

$$\frac{6z}{1+z^2} - \frac{4(1-z^2)}{1+z^2} = \frac{5}{2},$$

которое преобразуется в квадратное уравнение $3z^2 + 12z - 13 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа $z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$. Поэтому задача свелась к решению двух уравнений $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$. Находим, что $t = 2n\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Значение вида $t = \pi + 2\pi n$ уравнению (3) не удовлетворяет.

Замечание. Уравнение (3) можно решить иным способом. Разделим обе части этого уравнения на 5 (т. е. на $\sqrt{3^2 + (-4)^2}$):

$$\frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t = \frac{1}{2}.$$

Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует такое число α, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Поэтому уравнение принимает вид $\cos\alpha\sin t - \sin\alpha\cos t = \frac{1}{2}$, или $\sin(t - \alpha) = \sin\frac{\pi}{6}$. Отсюда находим, что $t = \alpha + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

660. Решите уравнение $a \sin x + b \cos x = c$ с помощью универсальной подстановки. Выведите условие, связывающее параметры a, b и c, при котором существуют действительные решения уравнения.

661. Решите уравнения:

1) $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$;

2) $2 \sin x - 9 \cos x = 7$;

3) $\dfrac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2}$;

4) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

5) $\sqrt{3} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

7. Использование формул для кратных углов при решении тригонометрических уравнений. Если в тригонометрическое уравнение входят тригонометрические функции не только от t, но и от кратных ему значений аргумента $2t$, $3t$ и т. д., то применяют формулы, позволяющие выразить эти тригонометрические функции через тригонометрические функции от t. После этого можно применять методы, описанные в предыдущих пунктах.

Пример 1. Решим уравнение

$$\cos 3t \cos t + \sin^2 2t - \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{8} = 0.$$

Решение. Так как $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$, $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, то имеем уравнение

$$(4 \cos^3 t - 3 \cos t) \cos t + 4 \sin^2 t \cos^2 t - \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{8} = 0.$$

Заменим в нем $\sin^2 t$ на $1 - \cos^2 t$ и упростим получающееся выражение. Мы получим уравнение

$$\cos^2 t - \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{8} = 0,$$

которое после подстановки $\cos t = z$ преобразуется в квадратное уравнение $z^2 - \dfrac{1}{4} z - \dfrac{1}{8} = 0$. Его корнями являются числа $z_1 = \dfrac{1}{2}$, $z_2 = -\dfrac{1}{4}$. Отсюда имеем, что $\cos t = \dfrac{1}{2}$ или $\cos t = -\dfrac{1}{4}$, а потому $t = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ или $t = \pm\arccos \dfrac{1}{4} + (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решим уравнение $\cos 5t \cos 2t - \cos 7t \cos 4t = 0$.

Решение. Здесь замена тригонометрических функций кратных значений аргумента тригонометрическими функциями от t привела бы к очень громоздкому алгебраическому уравнению. В данном случае целесообразнее заменить произведения косинусов суммами. Получаем $\frac{1}{2}(\cos 7t + \cos 3t) - \frac{1}{2}(\cos 11t + \cos 3t) = 0$, т. е. $\cos 7t - \cos 11t = 0$. А теперь преобразуем разность косинусов снова в произведение:

$$2 \sin 9t \sin 2t = 0.$$

Задача свелась к решению уравнений $\sin 9t = 0$ и $\sin 2t = 0$, из которых находим, что $t_1 = \frac{n\pi}{9}$, $t_2 = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Упражнения

662. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$;

2) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$;

3) $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$;

4) $\cos x = \cos 2x - \cos 3x$.

8. Доказательство тригонометрических неравенств. Задачи на доказательство тригонометрических неравенств с помощью соответствующих подстановок сводятся к задачам на доказательство алгебраических неравенств.

Пример 1. Докажем неравенство

$$3 \cos t - 4 \sin t \leqslant 5. \qquad (1)$$

Решение. Применяя универсальную подстановку $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = z$, $t \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, заменим данное неравенство на

$$\frac{3(1 - z^2)}{1 + z^2} - \frac{8z}{1 + z^2} \leqslant 5.$$

Оно равносильно неравенству $8z^2 + 8z + 2 \geqslant 0$, которое выполняется тождественно для всех z, так как $8z^2 + 8z + 2 = 2(2z + 1)^2$. Неравенство верно и при $t = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Это неравенство можно доказать иначе. В замечании к примеру 1 п. 6 было показано, что существует число α, для которого $\frac{3}{5} = \sin \alpha$, $\frac{4}{5} = \cos \alpha$. Поэтому, вынося в левой части неравенства (1) за скобки число $5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$, получаем $\sin \alpha \cos t - \cos \alpha \sin t \leqslant 1$, т. е. $\sin(-t + \alpha) \leqslant 1$. Оно очевидным образом выполняется для всех значений t.

П р и м е р 2. Докажем неравенство

$$\left(\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)^2 + \left(\cos t + \frac{1}{\cos t}\right)^2 \geqslant 9. \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. Раскроем в левой части неравенства скобки, применим формулу $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ и приведем дроби к одному знаменателю. Получим неравенство

$$5 + \frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} \geqslant 9, \qquad (3)$$

равносильное заданному. Так как $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 2t$, то (3) принимает вид $\frac{1}{\sin^2 2t} \geqslant 1$.

Это неравенство выполняется для всех значений t, кроме $t = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, так как $\sin^2 2t \leqslant 1$. При этом ясно, что равенство достигается лишь в точках, где $\sin^2 2t = 1$, т. е.

$$t = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Упражнения

663. Докажите неравенства:

1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha$, $0 < \alpha < \pi$;
2) $(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x) \geqslant 0$ для любых x из области определения функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{tg} 3x$;
3) $\cos(\sin x) > 0$ для всех действительных x;
4) $\sin^8 x + \cos^{14} x \leqslant 1$ для всех x;
5) $4\sin 3\alpha + 5 \geqslant 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha$ при любом α;
6) $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| \geqslant 2$ для любого x из области определения;
7) $|5\sin x + 2\cos x| < 6$ для всех x;
8) $|3\sin x + 12\cos x| \leqslant 13$ для всех x;
9) $|\cos x + 3\sin x| \leqslant \sqrt{10}$ для всех x;
10) $|3\cos x - 2\sin x| < 4$ для всех x;
11) $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geqslant 1$ для всех α;
12) $\sin\alpha\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ для всех α;
13) $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$ для всех α;
14) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 \geqslant 4$ для всех α, для которых одновременно определены обе функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$;
15) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha \geqslant 2$ для всех α из области определения;
16) $\sqrt{\cos\alpha} < \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ для всех α, при которых $\cos\alpha \geqslant 0$ и $\cos\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$.

664. Докажите неравенство

$$8 \sin x - \sin 2x \leqslant 2\left(8 \sin \frac{x}{2} - \sin x\right).$$

Пользуясь этим неравенством, докажите, что $4P_{2n} - P_n > 4P_{4n} - P_{2n}$, где P_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность.

665. Докажите, что $-\sqrt{7} \leqslant 2 \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{7}$.

9. Решение простейших тригонометрических неравенств. Решение тригонометрических неравенств вида $\sin t > m$, $\cos t > m$, $\operatorname{tg} t > m$ и т. д. проводится или с помощью координатной окружности, или с помощью графиков тригонометрических функций.

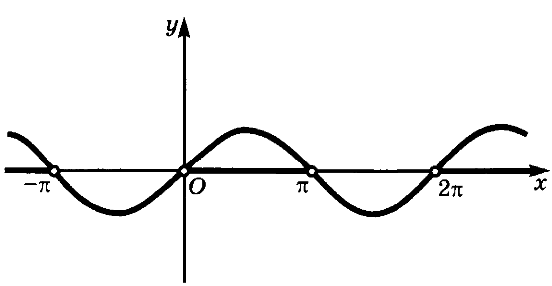
Пример 1. Решим неравенство $\sin t > 0$.

Решение. Построим график функции $\sin t$ и выберем на оси те промежутки, на которых график лежит выше оси абсцисс. Одним из таких промежутков является $(0; \pi)$ (он выделен на рис. 171, *а*), а остальные промежутки получаются из него сдвигом на $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, решение неравенства $\sin t > 0$ является объединением бесконечного множества промежутков вида $(2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Это решение можно записать так:

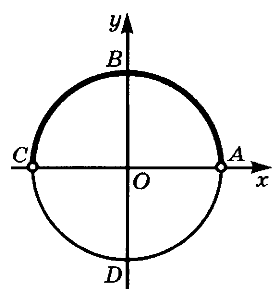
$$2k\pi < t < (2k + 1)\pi, \ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Решим это же неравенство с помощью координатной окружности. Условие $\sin t > 0$ означает, что ордината точки $M(t)$ положительна. Из рисунка 171, *б* видно, что точки с положительными ординатами заполняют дугу ABC (за исключением точек A и C), откуда сразу находим, что t удовлетворяет одному из двойных неравенств вида $2k\pi < t < (2k + 1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, что и дает (1).

Решим теперь неравенство $\sin t > m$. Если $m \geqslant 1$, то это неравенство не выполняется ни при каком t, а если $m < -1$, то выполняется при всех t.



а



б

Рис. 171

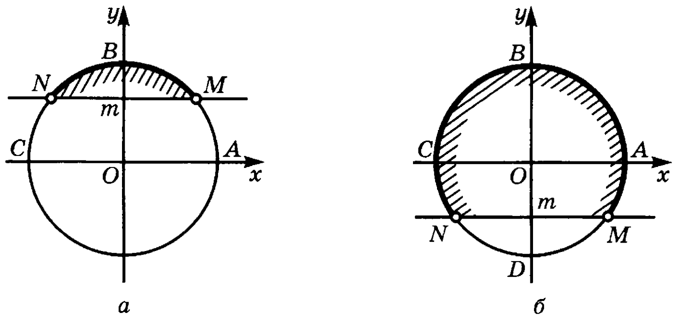


Рис. 172

Пусть теперь $-1 \leqslant m < 1$. Из рисунка 172 видим, что если $\arcsin m = \alpha$, то точки окружности, ордината которых больше, чем m, лежат на дуге MBN, где $M = M(\alpha)$ и $N = N(\pi - \alpha)$, точки M и N исключаются. Иными словами, на отрезке $[0; 2\pi]$ решением неравенства $\sin t > m$ служит интервал $(\alpha; \pi - \alpha)$, т. е. интервал $(\arcsin m; \pi - \arcsin m)$. Учитывая периодичность $\sin t$, получаем ответ в виде

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (\arcsin m + 2\pi k; \pi - \arcsin m + 2\pi k) \qquad (2)$$

или, иначе, в виде

$$\arcsin m + 2\pi k < t < \pi - \arcsin m + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}. \qquad (2')$$

Неравенство $\sin t < m$ сводится к разобранному выше подстановкой $t = -z$. Имеем $\sin(-z) < m$, откуда $-\sin z < m$, т. е. $\sin z > -m$. По (2′) получаем

$$\arcsin(-m) + 2\pi k < z < \pi - \arcsin(-m) + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z};$$

учитывая, что $\arcsin(-m) = -\arcsin m$ и $z = -t$, получаем

$$-\pi - \arcsin m + 2\pi n < t < \arcsin m + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решим неравенство $\cos t > \frac{1}{2}$.

Решение. Так как $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, то решение данного неравенства сводится к решению неравенства $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) > \frac{1}{2}$. Поскольку $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то в соответствии с формулой (2′) получаем ответ в виде $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \frac{\pi}{2} - t < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Откуда выводим, что $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < -t < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, т. е., меняя знаки чисел и знаки неравенств,

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(если k — целое число, то и $-k$ — целое). Поскольку $\frac{\pi}{3} = \arccos\frac{1}{2}$, можем записать ответ в виде[1]

$$-\arccos\frac{1}{2} + 2k\pi < t < \arccos\frac{1}{2} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Аналогично решается любое неравенство вида $\cos t > m$, где $-1 \leqslant m < 1$. Как и в примере 2, получаем ответ:

$$-\arccos m + 2k\pi < t < \arccos m + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad (3)$$

т. е. в виде

$$\bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} (-\arccos m + 2k\pi;\ \arccos m + 2k\pi). \qquad (3')$$

При $m \geqslant 1$ неравенство не имеет решений, а при $m < -1$ ему удовлетворяют все значения t.

Неравенство $\cos t < m$ сводится к разобранному подстановкой $t = \pi - z$; $\cos(\pi - z) < m$, значит, $-\cos z < m$ и $\cos z > -m$, откуда $-\arccos(-m) + 2k\pi < z < \arccos(-m) + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и поскольку $z = \pi - t$, $\arccos(-m) = \pi - \arccos m$, имеем

$$\arccos m + 2k\pi < t < 2(k + 1)\pi - \arccos m,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (4)$$

Найдем теперь решение неравенств $\operatorname{tg} t < m$ и $\operatorname{tg} t > m$. Точка $M(\operatorname{arctg} m)$ делит дугу DAB (рис. 173) на две части: на дуге DM (без концов D и M) выполняется неравенство $\operatorname{tg} t < m$, на дуге MB — неравенство $\operatorname{tg} t > m$. Значит, решение неравенства $\operatorname{tg} t < m$ имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < t < \operatorname{arctg} m + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

а решение неравенства $\operatorname{tg} t > m$ — вид

$$\operatorname{arctg} m + k\pi < t < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

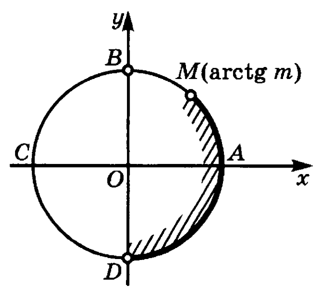


Рис. 173

Разбор неравенства $\operatorname{ctg} t < m$ (соответственно $\operatorname{ctg} t > m$) предоставляем читателю: $\operatorname{arcctg} m + k\pi < t < \pi + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (соответственно $k\pi < t < \operatorname{arcctg} m + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$).

[1] Этот результат может быть получен и с помощью графика функции $\cos t$.

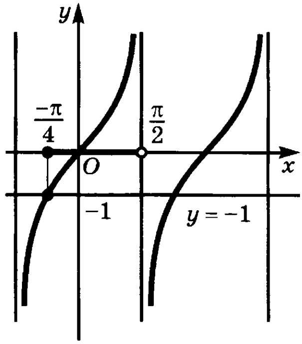


Рис. 174

Пример 3. Решим неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

Решение. Построим график функции $\operatorname{tg} x$ и проведем прямую $y = -1$. Нам надо найти те промежутки оси абсцисс, на которых график лежит не ниже этой прямой. Одним из них является промежуток $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ (он выделен на рис. 174). Другие отрезки находим, используя периодичность функции $\operatorname{tg} t$ (напомним, что ее основной период равен π). Получаем $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant t < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

666. Решите неравенства:

1) $\sin x < 0$; 3) $\operatorname{tg} x > 0$; 5) $\operatorname{tg} 2x < 1$;

2) $\cos x > 0$; 4) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} x > -1$.

10. Решение тригонометрических неравенств. В более общих случаях, чем рассмотренные в п. 9, тригонометрические неравенства, как и алгебраические, решаются методом интервалов. Чтобы решить неравенство $f(t) > 0$ (или $f(t) < 0$), находят основной период l функции f, после чего ищут корни уравнения $f(t) = 0$, лежащие на промежутке $[0; l)$, а также точки разрыва функции f на этом промежутке. Найденные точки делят промежуток $[0; l)$ на такие части, что на каждой из них функция f имеет постоянный знак. Определив этот знак, например, методом пробных точек, отбираем те части, где он имеет требуемое по условию значение. В решении данного неравенства каждому такому промежутку соответствует бесчисленное множество промежутков, получаемых из него сдвигами на кратные l. Иными словами, если неравенство $f(t) > 0$ выполняется на интервале $(t_k; t_{k+1})$, то в решении ему соответствует множество интервалов вида

$$(t_k + nl;\ t_{k+1} + nl),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 1. Решим неравенство

$$\sin 2t - \sin 3t > 0. \tag{1}$$

Решение. Период функции $\sin 2t$ равен π, а период функции $\sin 3t$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Наименьшее общее кратное этих периодов равно 2π. Поэтому 2π — период функции $\sin 2t - \sin 3t$. Так как функция $\sin 2t - \sin 3t$ непрерывна на всей числовой оси, надо найти лишь корни тригонометрического уравнения $\sin 2t - \sin 3t = 0$, лежащие на промежутке $[0; 2\pi)$. Перепишем это уравнение в виде $\sin 3t = \sin 2t$, откуда получаем, что $3t = (-1)^n \cdot 2t + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. На $[0; 2\pi)$ лежат корни, соответствующие значениям $n = 0, 1, 3, 5, 7, 9$, а именно $0, \frac{\pi}{5}, \frac{3}{5}\pi, \pi, \frac{7}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi$. Они разбивают отрезок $[0; 2\pi]$ на части:

$$\left[0; \frac{\pi}{5}\right], \left[\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}\right], \left[\frac{3\pi}{5}; \pi\right], \left[\pi; \frac{7}{5}\pi\right], \left[\frac{7}{5}\pi; \frac{9}{5}\pi\right], \left[\frac{9}{5}\pi; 2\pi\right].$$

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{5}\right]$ выберем пробную точку $\frac{\pi}{6}$. Так как

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \sin 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{2} < 0,$$

то на всем отрезке $\left[0; \frac{\pi}{5}\right]$ выполняется неравенство $\sin 2t - \sin 3t \leqslant 0$. С помощью пробных точек устанавливаем, что требуемое неравенство (1) выполняется на промежутках $\left(\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}\right)$, $\left(\pi; \frac{7}{5}\pi\right)$, $\left(\frac{9}{5}\pi; 2\pi\right)$. Поэтому решение данного неравенства является объединением всех промежутков вида

$$\left(\frac{\pi}{5} + 2n\pi; \frac{3}{5}\pi + 2n\pi\right),$$

$$\left(\pi + 2n\pi; \frac{7}{5}\pi + 2n\pi\right), \left(\frac{9}{5}\pi + 2n\pi; 2\pi(n + 1)\right), \text{ где } n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 2. Решим неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} - \operatorname{tg} \frac{t}{3} > 0. \qquad (2)$$

Решение. Основной период функции $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$ равен 2π, а основной период функции $\operatorname{tg} \frac{t}{3}$ равен 3π. Наименьшим общим кратным чисел 2π и 3π является 6π. Это число является периодом для функции $\operatorname{tg} \frac{t}{2} - \operatorname{tg} \frac{t}{3}$. Итак, будем решать неравенство (2) на отрезке $[0; 6\pi]$. Найдем корни уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} - \operatorname{tg} \frac{t}{3} = 0, \qquad (3)$$

лежащие на этом отрезке. Из (3) имеем $\frac{t}{2} = \frac{t}{3} + n\pi$, откуда $t = 6n\pi$.

На отрезке $[0;\ 6\pi]$ лежат корни 0 и 6π. В точках, где $\cos\frac{t}{2} = 0$ или $\cos\frac{t}{3} = 0$, функция $\operatorname{tg}\frac{t}{2} - \operatorname{tg}\frac{t}{3}$ разрывна. На отрезке $[0;\ 6\pi]$ лежат точки разрыва π, $\frac{3}{2}\pi$, 3π, $\frac{9}{2}\pi$, 5π.

Найденные точки разбивают отрезок $[0;\ 6\pi]$ на части:

$$[0;\ \pi],\ \left[\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right],\ \left[\frac{3}{2}\pi;\ 3\pi\right],\ \left[3\pi;\ \frac{9}{2}\pi\right],\ \left[\frac{9}{2}\pi;\ 5\pi\right],\ [5\pi;\ 6\pi].$$

Методом пробных точек убеждаемся, что решение неравенства (2) состоит из всех интервалов вида

$$(6n\pi;\ \pi + 6n\pi),\ \left(\frac{3}{2}\pi + 6n\pi;\ 3\pi + 6n\pi\right),\ \left(\frac{9}{2}\pi + 6n\pi;\ 5\pi + 6n\pi\right),\ n \in \mathbf{Z}.$$

Решение тригонометрических неравенств облегчается использованием четности или нечетности функции f. Если f — четная функция и она положительна внутри промежутка $[x_k;\ x_{k+1}]$, то и внутри промежутка $[-x_{k+1};\ -x_k]$ она положительна. Аналогично, если функция f нечетна и положительна внутри промежутка $[x_k;\ x_{k+1}]$, то внутри промежутка $[-x_{k+1};\ -x_k]$ она отрицательна.

В разобранном выше примере функция была нечетной. Поэтому было бы удобнее рассматривать ее не на отрезке $[0;\ 6\pi]$, а на отрезке $[-3\pi;\ 3\pi]$, убедиться методом пробных точек, что она положительна на промежутках $(0;\ \pi)$ и $\left(\frac{3}{2}\pi;\ 3\pi\right)$ и отрицательна на промежутке $\left(\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right)$, после чего заключить, что она положительна еще на промежутке $\left(-\frac{3}{2}\pi;\ -\pi\right)$. Это сразу дает ответ в виде $(6n\pi;\ \pi + 6n\pi)$, $\left(-\frac{3}{2}\pi + 6n\pi;\ -\pi + 6n\pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi + 6n\pi;\ 3\pi + 6n\pi\right)$, который лишь по форме отличается от полученного выше.

Упражнения

667. Решите неравенства:

1) $\sin 2x > -\cos 2x$;
2) $\sin 2x < \cos 2x$;
3) $\sin x \cos x < 0$;
4) $\sin x \operatorname{ctg} x > 0$;
5) $\operatorname{tg} x \cos x < 0$;
6) $\operatorname{ctg} 5x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;
7) $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1$;
8) $\sin x \sin 2x > \sin 3x \sin 4x$;
9) $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{5}{8}$;
10) $\cos^2 x (\operatorname{tg} x + 1) > 1$;
11) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin x + 2\cos x}$;
12) $\sin x + \cos x > 1$;
13) $\sin^2 x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) < \sin^2 x$.

11*. Некоторые неравенства для тригонометрических функций. Мы знаем, что при $\frac{\pi}{2} > x > 0$ выполняются неравенства $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ (см. п. 1 § 4) и потому $x \cos x < \sin x < x$. Из неравенства $\sin x < x$ вытекает, что $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} > 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$, а потому для $\sin x$ имеем неравенства

$$x - \frac{x^3}{2} < \sin x < x. \tag{1}$$

Они позволяют приближенно находить значения $\sin x$ при положительных малых значениях x.

Пример 1. Найдем значение $\sin 0{,}1$ с точностью до $0{,}001$.

Решение. Из (1) следует, что $0{,}1 - \frac{0{,}001}{2} < \sin 0{,}1 < 0{,}1$, т. е.

$$0{,}0995 < \sin 0{,}1 < 0{,}1.$$

Значит, с точностью до $0{,}001$ имеем $\sin 0{,}1 = 0{,}1$.

Мы выведем сейчас неравенства, позволяющие находить значения $\sin x$ с большей точностью. Покажем сначала, что $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$. Для этого образуем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}.$$

Эта функция обращается в нуль при $x = 0$, а ее производная $\varphi'(x)$ равна $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Но мы уже доказали, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, и потому $\varphi'(x) \geqslant 0$. Значит, функция φ возрастает на луче $[0; +\infty)$ и, поскольку $\varphi(0) = 0$, принимает на этом луче неотрицательные значения. Это и значит, что $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$.

Последовательно применяя это рассуждение к функциям $\sin x$ и $\cos x$, получаем следующее утверждение.

Теорема. *На луче* $[0; +\infty)$ *выполняются неравенства*:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} \leqslant \sin x \leqslant \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \qquad (2)$$

и

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} \leqslant \cos x \leqslant \leqslant 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!}. \qquad (3)$$

Разность правой и левой частей в неравенствах (3) равна $u_n = \frac{x^{4n}}{(4n)!}$. Покажем, что для любого x эта разность стремится к нулю при $n \to \infty$. Для этого найдем отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{4(n+1)}}{(4n+4)!} : \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{x^4}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}.$$

Таким образом, если $4n + 1 > 2x$, то это отношение меньше, чем $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$. Значит, начиная с такого значения n, разности на каждом шагу уменьшаются по крайней мере в 16 раз, а потому стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Отсюда видно, что с возрастанием n как в (2), так и в (3) левые и правые части приближаются соответственно к значениям $\sin x$ и $\cos x$. Это выражают записывая, что $\sin x$ и $\cos x$ являются суммами бесконечных рядов

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \text{и} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots .$$

Пример 2. Найдем значения $\sin 0{,}12$ и $\cos 0{,}21$ с точностью до 0,0001.

Решение. Так как $\frac{0{,}12^5}{5!} < 0{,}0001$, то имеем

$$0{,}12 - \frac{0{,}12^3}{3!} < \sin 0{,}12 < 0{,}12 - \frac{0{,}12^3}{3!} + \frac{0{,}12^5}{5!}.$$

Вычисления показывают, что $0{,}1197... \leqslant \sin x \leqslant 0{,}1197...$. Значит, с точностью до 0,0001 имеем $\sin 0{,}12 = 0{,}1197$.

Далее, $\frac{0{,}21^4}{4!} < 0{,}0001$, значит,

$$1 - \frac{0{,}21^2}{2!} < \cos 0{,}21 < 1 - \frac{0{,}21^2}{2!} + \frac{0{,}21^4}{4!}.$$

Вычисления показывают, что $0{,}9780... \leqslant \cos 0{,}21 \leqslant 0{,}9780...$ Значит, с точностью до 0,0001 имеем $\cos 0{,}21 = 0{,}9780$.

Упражнения

668. Постройте на одном чертеже графики функций:

1) $\sin x,\ x,\ x - \frac{x^3}{3!}$ и $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$; 2) $\cos x,\ 1,\ 1 - \frac{x^2}{2!}$ и $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

669. Вычислите с точностью до 0,0001 значения:

1) $\sin 0{,}35$; 2) $\cos 0{,}42$; 3) $\operatorname{tg} 0{,}15$; 4) $\sin 32°$; 5) $\cos 25°$; 6) $\operatorname{tg} 17°$.

§ 6. *Обратные тригонометрические функции*

1. Определение, свойства и графики обратных тригонометрических функций. Мы доказали в п. 1 § 5, что каждому числу x из отрезка $[-1;\ 1]$ соответствует единственное число t_0, принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и такое, что $\sin t_0 = x$. Это число t_0 было обозначено $\arcsin m$. Тем самым определена функция $\arcsin x$, заданная на отрезке $[-1;\ 1]$ и принимающая значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Так как отношения

$$y = \arcsin x,\ \ -1 \leqslant x \leqslant 1, \text{ и } x = \sin y,\ \ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

следуют одно из другого, то функция $\arcsin x$ обратна функции $\sin x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

По теореме об обратной функции выводим, что функция $\arcsin x$ непрерывна и возрастает (поскольку этими свойствами обладает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$). График функции $\arcsin x$ получается из графика функции $\sin x$ с помощью осевой симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 175).

Аналогично определяется функция $\arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Она обратна функции $\cos x$, рассматриваемой на отрезке $[0;\ \pi]$. Поэтому равенства

$$y = \arccos x,\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \text{ и } x = \cos y,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,$$

следуют одно из другого.

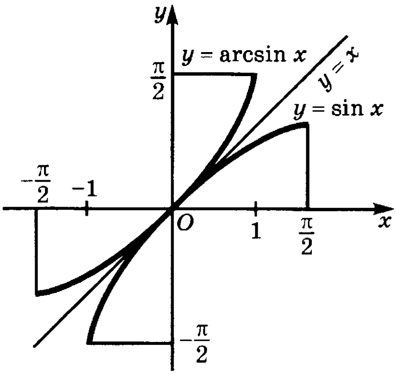


Рис. 175

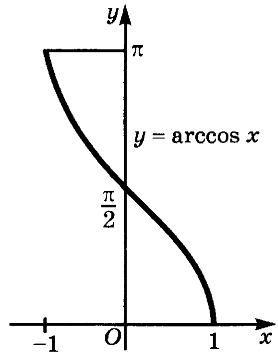


Рис. 176

Функция $\arccos x$ непрерывна на отрезке $[-1;\ 1]$ и монотонно убывает на нем от π до 0. График этой функции получается с помощью осевой симметрии относительно прямой $y = x$ из графика функции $\cos x$. Он изображен на рисунке 176.

Функция $\operatorname{arctg} x$ обратна функции $\operatorname{tg} x$, взятой на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому равенства

$$y = \operatorname{arctg} x,\ -\infty < x < +\infty, \text{ и } x = \operatorname{tg} y,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

следуют одно из другого.

Функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна на всей числовой оси и монотонно возрастает на ней от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (самих значений $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ она не принимает). График этой функции получается из графика функции $\operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, с помощью осевой симметрии относительно прямой $y = x$. Он изображен на рисунке 177.

Наконец, функция $\operatorname{arcctg} x$ обратна функции $\operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$, поэтому равенства

$$y = \operatorname{arcctg} x,\ -\infty < x < +\infty, \text{ и } x = \operatorname{ctg} y,\ 0 < y < \pi,$$

следуют одно из другого.

Функция $\operatorname{arcctg} x$ непрерывна на всей числовой оси и монотонно убывает на ней от π до 0 (не принимая значений π и 0). Ее график (рис. 178) получается с помощью осевой симметрии относительно прямой $y = x$ из графика функции $\operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$.

Упражнения

670. Найдите область определения следующих функций:

1) $y = \arcsin (x - 2)$; 2) $y = \arccos \frac{1 - 2x}{4}$; 3) $y = \arcsin \frac{x - 3}{2}$.

671. Ограничена ли на всей числовой оси функция $y = \operatorname{arctg}^2 x + 1$?

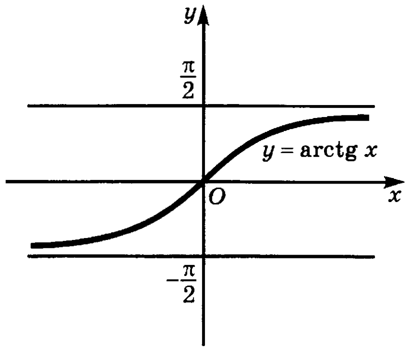


Рис. 177

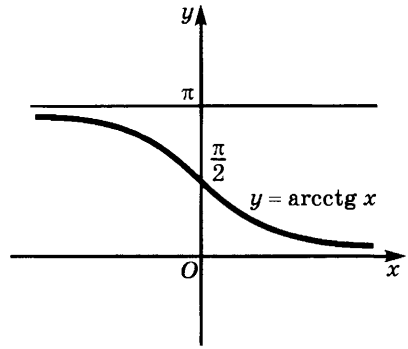


Рис. 178

2. Вычисление пределов, связанных с обратными тригонометрическими функциями. Мы знаем (см. п. 1 § 4), что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Положим в этом равенстве $\sin x = t$. Тогда имеем $x = \arcsin t$, причем $t \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно, равенство $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ принимает вид $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\arcsin t} = 1$.

Аналогично из равенства $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (см. п. 1 § 4) выводим, что $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\operatorname{arctg} t} = 1$.

Пример 1. Вычислим предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 7x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\arcsin 3x}{3x} \cdot \frac{7x}{\sin 7x} \cdot \frac{3x}{7x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{7x}{\sin 7x} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}.$$

Пример 2. Вычислим предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\arcsin 9x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\arcsin 9x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} 4x}{4x} \cdot \frac{9x}{\arcsin 9x} \cdot \frac{4x}{9x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{4x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{9x}{\arcsin 9x} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

Пример 3. Найдем точки разрыва функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Решение. Так как функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна, то точками разрыва могут быть лишь точки разрыва функции $\operatorname{tg} x$, т. е. точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

672. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 9x}{\arcsin 6x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 5x}$.

3. Дифференцирование обратных тригонометрических функций. Поскольку графики взаимно обратных функций φ и ψ симметричны относительно прямой $y = x$, то из дифференцируемости функции φ в точке x_0 следует дифференцируемость функции ψ в точке $y_0 = \varphi(x_0)$. В самом деле, дифференцируемость φ в точке x_0 означает существование касательной к графику этой функции в точке $M_1(x_0;\ y_0)$. Но прямая, симметричная с этой касательной относительно прямой $y = x$, касается графика обратной к φ функции в точке $N_1(y_0;\ x_0)$ (рис. 179). А это и значит, что функция φ дифференцируема в точке y_0 (в более подробных курсах анализа это утверждение доказывается без ссылки на геометрическую очевидность).

Применим доказанное утверждение к выводу формул дифференцирования обратных тригонометрических функций. Мы знаем, что если $y = \arcsin x$, то $\sin y = x$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Продифференцируем обе части равенства $\sin y = x$ по x, считая y промежуточным аргументом (см. п. 3 § 4). Получаем, что $\cos y \cdot y' = 1$, т. е. $y' = \dfrac{1}{\cos y}$.

Но $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos y \geqslant 0$. Поэтому $y' = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (1)$$

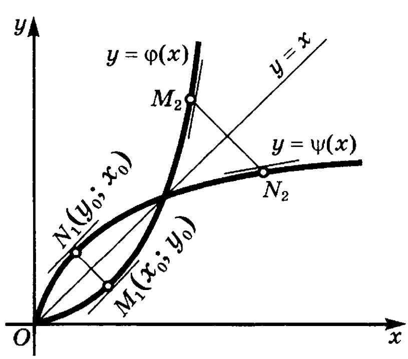


Рис. 179

Аналогично выводится формула

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (2)$$

Теперь найдем производную от функции $\operatorname{arctg} x$.

Если $y = \operatorname{arctg} x$, то $\operatorname{tg} y = x$ и потому $\dfrac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$, т. е. $y' = \cos^2 y$.

Но $\cos^2 y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Итак,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{3}$$

Аналогично устанавливается формула

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{4}$$

Из полученных формул вытекает, что $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, $d(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{dx}{1 + x^2}$, $d(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{dx}{1 + x^2}$.

Пример 1. Найдем производную функции:

а) $\operatorname{arctg}^2 3x$; б) $x^5 \arcsin 4x$; в) $\dfrac{1}{\arccos 2x}$; г) $\arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x$.

Решение. а) По формуле (3) имеем

$$(\operatorname{arctg}^2 3x)' = 2 \operatorname{arctg} 3x \cdot \frac{1}{1 + (3x)^2} \cdot 3 = \frac{6 \operatorname{arctg} 3x}{1 + 9x^2}.$$

б) По формуле (1) имеем

$$(x^5 \arcsin 4x)' = 5x^4 \cdot \arcsin 4x + \frac{4x^5}{\sqrt{1 - 16x^2}}.$$

в) По формуле (2) имеем

$$\left(\frac{1}{\arccos 2x}\right)' = -\frac{1}{\arccos^2 2x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}\right) \cdot 2.$$

г) По формулам (1), (3) имеем

$$(\arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x)' = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\arcsin x}{1 + x^2}.$$

Пример 2. Напишем уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{arctg} 4x$ в точке с абсциссой $\dfrac{1}{4}$.

Решение. Имеем $x_0 = \dfrac{1}{4}$, $y_0 = \operatorname{arctg}\left(4 \cdot \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$,

$$y' = \frac{4}{1 + (4x)^2} = \frac{4}{1 + 16x^2}, \quad y_0' = \frac{4}{1 + 16\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 2.$$

Значит, уравнение касательной имеет вид $y = \dfrac{\pi}{4} + 2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$.

Пример 3. Вычислим с точностью до 0,001 значения $\arcsin 0{,}52$ и $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

Решение. Если положить $f(x) = \arcsin x$; $x = 0{,}5$; $h = 0{,}02$, то $\arcsin 0{,}52 = f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$. Поскольку $f(0{,}5) = \arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$,

$f'(0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, то $\arcsin 0{,}52 \approx \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}02 \approx 0{,}5467$.

Более точное значение равно 0,5469.

Аналогично при $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $x = 1$; $h = -0{,}03$ имеем

$$\operatorname{arctg} 0{,}97 = f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h.$$

Поскольку $f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2}$, то

$$\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}03 \approx 0{,}770.$$

Для более точного вычисления $\operatorname{arctg} x$ при $|x| \leqslant 1$ применяют неравенства

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{x^{4n-1}}{4n - 1} < \operatorname{arctg} x <$$
$$< x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{x^{4n-1}}{4n - 1} + \frac{x^{4n+1}}{4n + 1}.$$

Эти неравенства доказываются аналогично неравенствам из п. 11 § 5. Соответствующие неравенства для $\arcsin x$ более сложны.

Пример 4. Найдем с точностью до 0,0001 значение $\operatorname{arctg} 0{,}5$.

Решение. Сначала ищем такое n, что $\frac{0{,}5^{2n-1}}{2n - 1} < 0{,}0001$. Находим, что достаточно взять $n = 6$. Отсюда следует, что

$$0{,}5 - \frac{0{,}5^3}{3} + \frac{0{,}5^5}{5} - \frac{0{,}5^7}{7} + \frac{0{,}5^9}{9} - \frac{0{,}5^{11}}{11} <$$
$$< \operatorname{arctg} 0{,}5 < 0{,}5 - \frac{0{,}5^3}{3} + \frac{0{,}5^5}{5} - \frac{0{,}5^7}{7} + \frac{0{,}5^9}{9}.$$

Вычисляя, находим

$$0{,}46364\ldots < \operatorname{arctg} 0{,}5 < 0{,}46368\ldots .$$

Значит, с точностью до 0,0001 имеем

$$\operatorname{arctg} 0{,}5 = 0{,}4636.$$

Упражнения

673. Найдите производные следующих функций:

1) $y = \arcsin^3 2x$; 2) $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$; 3) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^4}$;

4) $y = x \operatorname{arctg} x$; 5) $y = \arcsin x + \arccos x$; 6) $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$;

7) $y = \arcsin (\sin x)$; 8) $y = \arcsin x^2 + \arccos x^2$; 9) $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

674. Постройте графики функций:

1) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x}{1 + x}$; 3) $y = 2x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$;

2) $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$; 4) $y = x \operatorname{arctg} x$.

4. Некоторые тождества для обратных тригонометрических функций. Из определения обратных тригонометрических функций вытекает, что записи $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $x = \arcsin y$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, означают одно и то же. Заменяя в равенстве $y = \sin x$ переменную x на $\arcsin y$, получаем тождество

$$\sin(\arcsin y) = y, \ -1 \leqslant y \leqslant 1. \qquad (1)$$

Аналогично выводятся тождества:

$$\cos(\arccos y) = y, \ -1 \leqslant y \leqslant 1, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y, \ -\infty < y < +\infty, \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y) = y, \ -\infty < y < +\infty. \qquad (4)$$

Далее, заменяя в равенстве $x = \arcsin y$ переменную y на $\sin x$ и учитывая ограничения на x, получаем тождество

$$\arcsin(\sin x) = x, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (5)$$

Аналогично устанавливаются тождества:

$$\arccos(\cos x) = x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \qquad (6)$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \ 0 < x < \pi. \qquad (8)$$

При выводе некоторых тождеств можно использовать следствие 2 теоремы 1 из п. 3 § 3 главы V — проверять совпадение производных двух функций и равенство значений функций в одной точке.

Пример 1. Докажем тождество

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x. \qquad (9)$$

Решение. Так как $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, то производные левой и правой частей в (9) одинаковы. При этом $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$. Значит, функции совпадают при всех x из $[-1; 1]$.

Пример 2. Докажем тождество

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi n, \text{ если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \pi - x - 2\pi n, \text{ если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi n. \end{cases} \qquad (10)$$

Р е ш е н и е. Функция $\arcsin(\sin x)$ непрерывна, поскольку непрерывны функции $\arcsin x$ и $\sin x$. Ее производная имеет вид

$$y' = \frac{(\sin x)'}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

Так как

$$\cos x > 0, \text{ если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

и

$$\cos x < 0, \text{ если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, \text{ то}$$

$$y' = 1 \text{ при } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

и

$$y' = -1 \text{ при } \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi n.$$

Это значит, что график функции $\arcsin(\sin x)$ является ломаной, звенья которой поочередно наклонены под углами $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ к оси абсцисс. Поскольку $\arcsin(\sin k\pi) = \arcsin 0 = 0$, легко получаем формулу (10).

Упражнения

675. Докажите следующие тождества:

1) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arccos\sqrt{1 - x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \end{cases}$

3) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \ -1 < x < 1;$

4) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \ -\infty < x < \infty;$

5) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arcctg} x, \ x > 0;$

6) $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1), \ 0 \leqslant x \leqslant 1;$

7) $2 \arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right), \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2};$

8) $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2}, \ 0 \leqslant x < 1;$

9) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - k\pi, \ k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2};$

10) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - k\pi, \ k\pi < x < (k + 1)\pi.$

5. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции. Уравнения вида $f(\arcsin x) = 0$, $f(\arccos x) = 0$ и т. п. решаются методом подстановки.

Пример 1. Решим уравнение $2\arcsin^2 x - 7\arcsin x + 3 = 0$.

Решение. Подстановка $\arcsin x = z$ приводит данное уравнение к квадратному уравнению $2z^2 - 7z + 3 = 0$. Его корнями являются числа $z_1 = 3$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Но корень 3 не удовлетворяет условию $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и потому мы берем лишь корень $\frac{1}{2}$. Решением уравнения $\arcsin x = \frac{1}{2}$ является $x = \sin\frac{1}{2}$, откуда с помощью микрокалькулятора находим $x \approx 0{,}4794$.

Неравенства вида $f(\arcsin x) > 0$ и т. д. также сводятся к алгебраическим неравенствам подстановкой $\arcsin x = z$.

В заключение рассмотрим уравнения вида $A(\varphi(x)) = 0$, где A — обозначение одной из обратных тригонометрических функций. Для их решения надо положить $\varphi(x) = z$, решить уравнение $A(z) = 0$ и найти корни уравнения $\varphi(x) = z_i$, где z_i — корни уравнения $A(z) = 0$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\arcsin(x^2 - 4x + 3) = 0.$$

Решение. Подстановка $x^2 - 4x + 3 = z$ приводит данное уравнение к виду $\arcsin z = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $z = 0$. Решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, находим два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Упражнения

676. Решите уравнения:

1) $\arcsin^2 x - \frac{\pi}{2}\arcsin x + \frac{\pi^2}{18} = 0$;

2) $\arccos^2 x - \frac{3\pi}{4}\arccos x + \frac{\pi^2}{8} = 0$;

3) $\arcsin^2 x - \frac{3\pi}{4}\arcsin x + \frac{\pi^2}{4} = 0$;

4) $\operatorname{arctg}^2 x - \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi^2}{4} = 0$.

677. Решите уравнения:

1) $\arcsin\left(x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(x^2 - 4x + 2) = -\frac{\pi}{2}$.

678. Решите неравенства:

1) $-\frac{\pi}{3}\arcsin(x^2 - 3x) \leqslant \frac{\pi}{6}$; 2) $-5 \leqslant \operatorname{arctg}^2 2x - 6\operatorname{arctg} 2x \leqslant 7$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Для облегчения работы с книгой предлагаем примерные варианты контрольных работ, согласованные с примерным планированием учебного материала (материал взят из пособия М. Л. Галицкого, М. М. Мошковича, С. И. Шварцбурда «Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа, методические рекомендации и дидактические материалы»).

Контрольная работа № 1

1. Даны точки $A(-2; 5)$, $B(2; 2)$, $C(10; 0)$.
   а) Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.
   б) Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Найдите координаты точки D.
2. Исходя из определения модуля действительного числа, решите неравенство $|x - 3| + |2 + x| \leqslant 2x + 3$.
3. Докажите, что число $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{5}$ не является рациональным числом.

Контрольная работа № 2

1. Докажите методом математической индукции, что
$$2 + 18 + 60 + \ldots + n(n + 1)(2n - 1) =$$
$$= \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)(3n - 1).$$
2. Докажите, что $7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$ делится на 17 при любом натуральном значении n.
3. При каких значениях b сумма квадратов корней трехчлена $bx^2 + (b + 2)x - 4b$ равна $10\frac{7}{9}$?
4. Докажите, что при $n \in N$, $n \geqslant 5$, справедливо неравенство $2^n \geqslant n^2 + n + 2$.

Контрольная работа № 3

1. При каких значениях a и b многочлен $2x^4 + 3x^3 - ax^2 + bx - 3$ делится без остатка на $x + 3$, а при делении на $x - 2$ дает остаток, равный 5?
2. Найдите целые корни многочлена $x^4 - 27x^2 - 14x + 120$.
3. Докажите, что нечетная степень числа 48, увеличенная на 1, кратна 7.
4. Разложите на множители методом неопределенных коэффициентов многочлен $x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2$.
5. Разложите на множители многочлен $x^{12} - 3x^6 + 1$.

Контрольная работа № 4

1. Докажите, что если $A(x) > 0$ для всех x, при которых определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то неравенства $f(x) < \varphi(x)$ и $f(x)A(x) < \varphi(x)A(x)$ равносильны.
2. Докажите, что при $a > 0$ имеет место неравенство $(a+3)(a+6)(a+2)(a+1) > 96a^2$.
3. Решите неравенство $\dfrac{(x^2+3x-18)(4x^2-4x+1)}{(x^2-5x+6)(3x^2-8x+14)} < 0$.
4. Решите уравнение $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3x}{2-2x} = \dfrac{3}{x^2-1}$.
5. Докажите, что при любых действительных значениях x и y имеет место неравенство $x^2 + 10y^2 - 6xy + 10x - 26y + 30 > 0$.

Контрольная работа № 5

1. Докажите, что произведение двух нечетных функций есть функция четная на их общей области определения.
2. Дана функция $y = \dfrac{8}{x^2-6x+13}$.

   а) Найдите наибольшее значение функции.

   б) Докажите, что на промежутке $[3; +\infty)$ функция убывает.
3. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$f(x) = |x-2| + 3|x| + \sqrt{x^2+4x+4}.$$
4. Даны функции $f(x) = 2x^2 - 1$ и $\varphi(x) = \sqrt{3x-1}$. Найдите $f(\varphi(x))$; $\varphi(f(x))$.
5. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 2x - \sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{4x^2+20x+25}.$$

Контрольная работа № 6

1. Дана функция
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2|x|-1}{x-3} & \text{при } x < 2, \\ \dfrac{3x+5}{1+2x} & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$$
   Найдите пределы этой функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.
2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+(-1)^n}{6n-(-1)^n} - \dfrac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}\right)$.
3. Найдите четвертый член бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна 8, сумма второго и третьего членов равна 3, а знаменатель прогрессии является числом рациональным.
4. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{2n+1} - \dfrac{3n+1}{4}\right)$.

Контрольная работа № 7

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right)$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+4x^2+6x+3}{2x^2+3x+1}$.

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} \text{ при } x < -1, \\ 2 - x^2 \text{ при } -1 \leqslant x < 2, \\ -3x \text{ при } x \geqslant 2. \end{cases}$$

а) Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график.

б) Найдите $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

3. Докажите, что уравнение $x^3 - 5x + 3 = 0$ на промежутке $[-3; -2]$ имеет корень. Найдите значение этого корня с точностью до 0,1 (используйте микрокалькулятор).
4. Докажите, что функция $g(x) = x^2 - 6x + 10$ необратима. Найдите функцию, обратную $g(x)$ на промежутке $[3; +\infty)$, и постройте ее график.
5. Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (2n-1)^2 - (2n)^2}{4n^2 - 3}$.
6. Найдите значения параметров a и b из условия

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4bx^2+5}{2x-1} + ax\right) = 1{,}5.$$

Контрольная работа № 8

1. Материальная точка движется по прямой согласно уравнению

$$s(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + 2t - 1 \text{ (см)}.$$

а) Найдите ее скорость в момент времени $t = 3$ с.

б) В какой момент времени ускорение будет равно $9\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$?

2. Найдите $f'(1)$, если $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}+2}{x}$.
3. Дана функция $\varphi(x) = \frac{x+2}{3-x}$. К ее графику в точке $x_0 = 2$ проведена касательная l.

а) Напишите уравнение касательной l.

б) Существует ли касательная к графику функции φ, отличная от l и параллельная l? Если существует, найдите ее уравнение.

4. Дана функция $g(x) = 3x(2x-1)^5$. Найдите все значения x, при которых: а) $g'(x) = 0$; б) $g'(x) > 0$; в) $g'(x) \leqslant 0$.

5. Дифференцируема ли функция $y = \left|\frac{x^2 - 1}{1 - x}\right|$ в области ее определения?
6. Известно, что $(x - 2)^{50} = a_0x^{50} + a_1x^{49} + \dots + a_{49}x + a_{50}$. Найдите сумму $50a_0 + 49a_1 + \dots + 2a_{48} + a_{49}$.

Контрольная работа № 9

1. Дайте определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Докажите теоремы о непрерывности суммы и произведения двух непрерывных в точке функций.
2. Исследуйте функцию $y = \frac{x^2}{x + 1}$ и постройте ее график.
3. В арифметической прогрессии шестой член равен 3, разность прогрессии $d \geqslant 0{,}5$. При каком значении d произведение первого, четвертого и пятого членов будет наибольшим?
4. Докажите, что функция $y = 0{,}2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Контрольная работа № 10

1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{24}{7}$ и $\frac{2\pi}{3} < \alpha < 2\pi$.

   Найдите значения $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.
2. Упростите выражение $\frac{1 + \cos\alpha}{\sin^2\alpha} : \left(1 + \left(\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right)$.
3. Дана функция $f(x) = \sin\frac{3}{2}x + 5\cos\frac{3}{4}x$.

   а) Найдите $f(0)$, $f(7\pi)$, $f(-12\pi)$.

   б) Покажите, что число 8π является периодом этой функции.

   в) Найдите основной период функции f.
4. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$\varphi(x) = x^3 + 2\sin x + \operatorname{ctg} x.$$
5. Решите уравнение $2\sin^3 x + 3\sin^2 x - 2\sin x = 0$.
6. Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

   Постройте график этой функции.
7. Докажите, что $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) < \frac{m^4 + 1}{m^2}$.

Контрольная работа № 11

1. Докажите тождество $\frac{(1 + \operatorname{tg}\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.
2. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2} + 1$.

3. Решите уравнение $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.
4. Проверьте равенство $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ = 2$.
5. Найдите угол между асимптотой графика функции $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = 1$.
6. Докажите тождество $1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha = \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha}$.

Контрольная работа № 12

1. Решите уравнение $2\sin(5x + 3) + 3\cos^2(5x + 3) = 3{,}25$.
2. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin(4x - 2)$ и $y = -\cos(3x + 5)$.
3. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$.
4. Докажите, что при $a > 0$, $b > 0$ уравнение $a\sin 5x + 2\sqrt{ab + b^2}\cos 5x + 2a = -4b$ не имеет решений.
5. Найдите $\alpha + \beta$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}75$, $\operatorname{tg}\beta = 7$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$.
6. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 1\frac{3}{4}$.

Контрольная работа № 13

1. Найдите $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.
2. Вычислите: а) $\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$; б) $\arcsin(\sin 5)$.
3. Решите неравенство $\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Решите неравенство $\arcsin x < \arccos x$.
5. Решите неравенство $\sin 3x > \sin 5x$.

Контрольная работа № 14

1. Решите неравенство $\frac{9 - x^2}{3x + 1} \geqslant \frac{2}{x}$.
2. Установите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$. Найдите асимптоты и постройте график этой функции.
3. Разложите на множители многочлен $x^3 + 8x + 24$.
4. Докажите, что при всяком $n \in N$ число $10^n + 45n - 1$ кратно 27.
5. Найдите все решения уравнения $\sin 2x + \cos x + 2\sin x = -1$, удовлетворяющие условию $0 < x < 5$.

Примерные темы для исследовательской и проектной деятельности

1. Элементы математической логики.
2. Прогрессии, суммирование, понятие о бесконечных рядах.
3. Возвратные последовательности.
4. Цепные дроби.
5. Тригонометрические формулы и их геометрическая интерпретация.
6. Гиперболическая тригонометрия и геометрия Лобачевского.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА I

5. $b^2 - 4ac$ — точный квадрат. **7.** 2) -4; 0,85840... . **12.** Нет. **13.** 0,888... . **20.** 1) $[0; 8]$; 2) $(-4; 11]$; 3) $(-4; 0) \cup [9; 11)$; 4) $(-4; -2) \cup [0; 11)$. **21.** 1) $\{15n + 2 \mid n \in N\}$; 2) $\{6n + 5 \mid n \in N\}$; 3) $\{30n + 17 \mid n \in N\}$; 4) $\{30n + 2 \mid n \in N\} \cup C$. **23.** Разделяющие числа: 2) $[\sqrt{3}; \sqrt{5}]$; 3) $2\pi R$; 5) 2. **24.** 3) $|x + 1| < 4$; 4) $|x + 1| < 4$. **25.** 1) $(-1; 9)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$; 3) $(-0,5; +\infty)$; 4) $(-1; 0)$; 5) $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$; 6) $(-1; 3)$; 7) $(0; 12)$; 8) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; 9) $[-5; 5]$; 10) $\boldsymbol{R}$. **26.** 1) $\{-1; 3\}$; 2) $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$; 4) $[5; +\infty)$. **34.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{23}{99}$; 3) $1\frac{7}{9}$; 4) $3\frac{63}{110}$. **35.** 3) 0,(249886); 4) 7; 5) 4; 6) 3. **40.** $C(14)$ и $D(5)$. **41.** $M(8,25)$. **43.** 1) $C(0)$. **44.** $A(0; -4 - \sqrt{21})$ и $B(0; -4 + \sqrt{21})$. **45.** 2,5. **46.** $6\sqrt{2}$. **48.** $O(2,5; 0,5)$; $D(3; 4)$; $S = 25$. **49.** $(2; -2)$. **50.** $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

ГЛАВА II

58. 1) 2; 2) 16. **59.** 1) $\frac{61}{19}$; 2) 0,5; 3) 0,25; 4) -1. **61.** 1) $x^8 + x^4 + 1$; 2) $24abc$. **70.** $\frac{n(n + 1)^2}{2}$. **94.** 11. **96.** $a = -30$; $b = 28$. **102.** 5) $(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$; 8) $(x^2 - 6x + 18)(x^2 + 6x + 18)$; 12) $(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$. **104.** 2) $x^3 - 14x^2 + 49x - 36$. **105.** 3. **106.** 3. **107.** $a = 32,25$; $b = 49$. **113.** 1) $\frac{16x^{15}}{1 - x^{16}}$; 2) $\frac{a + 1}{ax}$; 3) 0,25. **117.** $x_1 = -2$; $x_2 = -3$. **119.** 1) $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; 3) $x = \frac{12}{13}$; 4) $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}$ (при $m \leqslant 0,25$); 10) 5; 11) $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \pm 2$; указания: 6) $x_1 = 0$; 8) $x_1 = 0$; 12) $x_1 = a$; 13) $x_1 = -m$; 14) $x_{1,2} = -1,5$; 15) $x_1 = a$; 16) $x_1 = \frac{1}{1 - p}$; 17) подстановка $y = x + a$; 18) подстановка $y = x - 0,5$. **120.** 1) Подстановка $y = x + \frac{2}{x}$; 2) $6 \pm \sqrt{24}$; 3) подстановка $y = x + \frac{c}{ax}$; 4) подстановка $y = x(1 - x)$; 5) приведите к виду $x^2(x + 2a)^2 = a^2(a - 2x)^2$; 10) $x_{1,2} = \pm 2a$; 11) $x_{1,2} = \pm a\sqrt{3}$; 13) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; 14) $\left\{2; 0,5; -3; -\frac{1}{3}\right\}$; 15) $x_1 = -1$; $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$; 16) $\left\{-1; 3; \frac{1}{3}\right\}$;

17) подстановка $y = x + \frac{1}{x}$; 18) $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$; $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

122. 9) $(-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$; 10) $(-\infty; -1) \cup (3; 4)$.

ГЛАВА III

145. $-4x^2 + 8x + 3$. **146.** $S(a) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **155.** $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$; $D(S) = (0; 2R)$.

158. $S(H) = \frac{2V}{H} + 2\sqrt{\pi VH}$. **159.** $V(H) = \frac{\pi H^3 + HS - H^2\sqrt{\pi^2 H^2 + 2\pi S}}{2}$.

166. $p(x) = 2x + 4\sqrt{(2R - h + x)(h - x)}$; $S(x) = 2x\sqrt{(2R - h + x)(h - x)}$.

168. $r(z) = \frac{zp + q}{z + 1}$. **169.** $p\left(1 - \frac{x}{V}\right)^3$. **170.** $h(t) = \frac{v^2}{g} + vt - v\sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2vt}{g}}$.

179. $\begin{cases} H - \dfrac{gt^2}{2} \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\dfrac{2H}{g}}, \\ \sqrt{2Hg}\left(t - (2n-1)\sqrt{\dfrac{2H}{g}}\right) - \dfrac{g}{2}\left(t - (2n-1)\sqrt{\dfrac{2H}{g}}\right)^2 \text{ при } (2n-1) \times \\ \times \sqrt{\dfrac{2H}{g}} \leqslant t \leqslant (2n+1)\sqrt{\dfrac{2H}{g}},\ n \in N. \end{cases}$

188. 1) $x^4 - 3x^2 - 2$; 2) $x((x^2 - 5x + 2)^2 + 1)$; 3) $\frac{2(x^2 + 1)}{(x + 1)^2}$; 4) $\frac{x^2}{x^2 + 2}$.

189. $x^4 + (x^3 + 1)^2$; 2) $x^8(x^6 + 1)$; 3) $x^8(x^3 + 1)^2$; 4) $(x^3 + 1)^2$; 5) $x^6 + 1$; 6) $(x + 1)^2 + (x + 1)^3 + 1$. **190.** 1) $(-1; 1]$; 2) $[0; 1]$; 3) $[-0{,}5; 0]$; 4) $(-\infty; 0)$; 5) $(-\infty; 0]$; 6) $(-1; +\infty)$. **194.** 1) $a_6 = 36$; 2) $a_5 = a_6 = 30$; 3) $a_{10} = 0{,}5$; 4) a_7; 5) a_{30}. **198.** См. № 84. **204.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. **205.** $M'(3; 2)$; $N'(6; -10)$; $P_1(-7; 7)$; $Q_1(4; -3)$. **206.** $M'(-8; 12)$; $N'(0; 5)$; $P_1(6; -3)$; $Q_1(13; -10)$. **211.** 1) Гомотетия с коэффициентом 2 и центром $O(3; 1)$; 2) гомотетия с коэффициентом 2 и центром $O(4; -3)$. **214.** 1) -4; 2) 2; 3) не существует; 4) 0. **218.** $y = 4x + 23$. **219.** $k = -0{,}5$; $y = -0{,}5x + 1{,}5$; $y = -0{,}5x + 4$. **226.** $x_1 = \frac{k}{a} - x_0$; $k = 2ax$. **229.** 1) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$; 2) $y = \frac{-7x - 47}{5x + 13}$.

223. $\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\right)$. **234.** $\left[0{,}5 - \sqrt{0{,}5}; -0{,}5 + \sqrt{0{,}5}\right]$. **237.** Четные 3, 4 и 7; нечетные 1 и 2. **238.** 1) $(3x^2 + 7) + (-x)$; 2) $\frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 + x^2 + 1} + \left(-\frac{x^3 + x}{x^4 + x^2 + 1}\right)$; 3) $\frac{1}{x^2 + 4} + \frac{x^3}{x^2 + 4}$; 4) $\frac{x^2 + 4}{1 - x^6} + \frac{x^5 + 4x^3}{x^6 - 1}$. **240.** 0. **245.** Функция $y = f(x + a)$

четна. **246.** Функция $y = f(x + a) - b$ нечетна. **247.** 1) $x = 3$; 2) $x = 1{,}5$. **248.** 1) (2; −6); 2) $O(-4; -1)$. **250.** 1) Возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2]$; 2) возрастает на $(-\infty; 2]$; убывает на $[2; +\infty)$; 3) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$; 4) возрастает на $[3; 4)$ и $(4; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2)$ и $(2; 3]$. **251.** 1) Возрастает на $(-\infty; 2)$ и $[3; 4)$, убывает на $(2; 3]$ и $(4; +\infty)$; 2) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$; 3) возрастает на $[4; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 4]$. **252.** 1) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$; 2) возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2]$. **253.** В 250: 1) 1; в 251: 2) $\frac{1}{4}$; 3) −1; в 252: 1) 7. **254.** В 250: 2) 1; 3) $\frac{1}{4}$; в 251: 1) нет.

ГЛАВА IV

268. Нет; при $2n - 1 \leqslant x < 2n$, $n \in N$ функция равна 1. **272.** Например, 1) $M = 10^{20}$; 2) $M = 7$. **277.** Нет. **282.** 1, 2, 4 и 5. **289.** Да. **291.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 3; 4) 1; 5) $\sqrt{3}$; 6) −1; 7) 0; 8) 0; 9) 0,25; 10) 0. **292.** 1) 0; 0,5; 2) 0; 0,4. **293.** 1) $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$; 2) $\frac{p}{q} = \frac{7}{4}$; 3) $p > 1$; 4) $p < 2$; 5) $p < q$; 6) $\frac{p}{q} = 20\,000$. **296.** Например, $(10^3; +\infty)$. **299.** 1) $y = 1{,}5$; 2) $y = 4x - 5$; 3) не имеет; 4) $y = 1$; 5) $y = x$; 6) $y = x + 3$. **300.** 1) $y = x^2 - 8$; 2) $y = x^2 + 4x + 17$; 3) $y = x^2 - 9x + 81$; 4) $y = x^2$. **302.** 1) 3; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) 0; 4) −2; 5) 0; 6) 3; 7) −1; 8) 2; 9) 1. **305.** 1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) 1; 5) 1. **306.** Нет. **318.** 1) 3; 2) 2; 3) 3. **319.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 1,4; 3) $\frac{4}{7}$; 4) 101. **322.** $2a^2$. **325.** 1) $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$; 2) $\sqrt{a}$. **327.** $\frac{1}{1 - x}$. **328.** $1 - \sqrt{1 - a}$. **329.** $-1 + \sqrt{1 + a}$. **330.** 1) $\sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt[3]{a}$. **331.** $\frac{2}{3}$. **337.** $\{2\}$ и $\varnothing$. **345.** 1) 3; 2) 4; 3) −1; 4) 0,8; 5) 0; 6) 1; 7) 1,5; 8) 6; 9) −1; 10) $\frac{3}{7}$; 11) $\frac{m}{n}$; 12) $\frac{2}{3}$; 13) −4; 14) −4. **362.** 1) $y = \frac{x - 6}{3}$; 2) $y = 2 + \sqrt{x - 1}$; 3) $y = 2 - \sqrt{x - 1}$; 4) $y = \sqrt{-1 + \sqrt{x + 1}}$; 5) $y = \frac{2x - [x]}{2}\sqrt{(-1)^{[x]}}$. **367.** 1) Нет; 2) да. **370.** 1) $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}$; 2) $24 - 2\sqrt{95}$. **371.** 1) $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (4; +\infty)$. **372.** 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0.

ГЛАВА V

403. 4,3375 м. **404.** 1) $y = 3x - 2$; 2) $y = -2x - 1$ (в точке $A(1; -3)$) и $y = 2x - 9$ (в точке $B(3; -3)$). **415.** 1) $y = 19x - 11$; 2) $y = -1$ и $y = 9x + 17$. **416.** $2x + 1$ при $x \neq 2{,}5$. **417.** 2. **431.** 1) $\frac{-x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^3 + 4)^2}$; 2) $\frac{4x^5 - 4x}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$;

3) $\dfrac{3\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)-2\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt[3]{x}}{6x\left(\sqrt[3]{x}+4\right)^2}$. **432.** $y=\dfrac{46}{75}x-\dfrac{61}{75}$. **433.** 1) $6x+8$; 2) $20x^3-18x$; 3) $\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$; 4) $\dfrac{-18x^2+24}{(x^2+4)^3}$; 5) $2+\dfrac{2}{(x-1)^3}$; 6) $\dfrac{15x^4-72x^2-16}{4x\sqrt{x}(x^2+4)^3}$; 7) $420x^2$; 8) $720x^2-144$; 9) 0; 10) 42!. **434.** $(-1)^n\dfrac{n!}{(x+a)^{n+1}}$. **435.** $48!\left(\dfrac{1}{(x+3)^{49}}-\dfrac{1}{(x+4)^{49}}\right)$. **436.** 1) 1 и 3; 2) −1; 0 и 1; 3) 1; 6 и 3; 4) −1 и 1; 5) −1 и 3; 6) 0 и 2; 7) 1; 8) −1; 0 и 1. **440.** $\dfrac{a}{4}\times\dfrac{a}{2}$. **441.** Сторона основания равна $\dfrac{h}{2}$. **456.** 1) $\sqrt{\dfrac{13}{3}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}$; 3) $\dfrac{-1\pm\sqrt{28}}{3}$; 4) 0. **457.** Нет. **461.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) нет; 3) $[-6; 0]$ и $[6; +\infty)$; 4) $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ и $\left[\sqrt{3}; \sqrt{3+2\sqrt{3}}\right]$. **462.** 1) 2; 2) не имеет; 3) −6; 0 и 6; 4) $\sqrt{3+2\sqrt{3}}$. **473.** 1) $n\cdot 2^{n-1}$; 2) $(n+2)\cdot 2^{n-1}$; 3) $(n-2)\cdot 2^{n-1}+1$; 4) $(n+1)\cdot 2^n$. **478.** 1) −2,49; 0,66 и 1,83; 2) −2,49; −0,29 и 2,78; 3) −0,674; 4) ±0,826.

ГЛАВА VI

492. $y=R(1-\cos t)$; $x=R(t-\sin t)$. **493.** $x=R\cos\alpha+r\cos(\pi+\alpha+\beta)$; $y=R\sin\alpha+r\sin(\pi+\alpha+\beta)$. **494.** Вне: $x=(R+r)\cos t-r\cos\dfrac{R+r}{r}t$; $y=(R+r)\sin t-r\sin\dfrac{R+r}{r}t$, внутри: $x=(R-r)\cos t-r\cos\dfrac{R-r}{r}t$; $y=(R-r)\sin t-r\sin\dfrac{R-r}{r}t$; $R>r$. **496.** $R\varphi\cos\theta$ и $R(2\pi-\varphi)\cos\theta$. **497.** $S=44-\dfrac{R^2\alpha}{2}+\dfrac{R^2\sin\alpha}{2}\approx 27{,}95$ м², $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{75}{317}$. **498.** $|F|\approx 10{,}5$, $\alpha\approx 27{,}5°$ (угол с силой 8 Н). **499.** $|F|\approx 57{,}3$; $\operatorname{tg}\alpha\approx 3{,}4$. **500.** 4,71 км. **501.** 4,32 км; 4,03 км. **502.** 236,4 м; 444,9 м. **504.** $\cos\gamma=\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$. **508.** 1) 15; 2) 1; 3) 0,25; 4) 0,5; 5) 10; 6) 1; 7) 1; 8) 10. **512.** $\cos^4 x$. **513.** 1) $\dfrac{3m-m^3}{2}$; 2) $-\dfrac{(m^2-1)^2}{2}+1$. **515.** 1) $2\sin x$; 2) $-14\cos x$; 3) $9(\sin x+\cos x)$; 4) $-14\cos 2x+12\cos x$. **516.** Четные 2, 3 и 4; нечетные 1 и 7. **517.** 1) 2π; 2) 80π; 3) $\dfrac{\pi}{2}$; 4) π; 5) 20π; 6) 2π; 7) 6π; 8) 20π. **521.** 3.**529.** $\dfrac{24}{25}$. **530.** $\dfrac{12}{13}$. **532.** 1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) $\dfrac{7}{6}$. **537.** 1) $\dfrac{3\sqrt{3}+1}{8}$; 2) 0,75; 3) $\dfrac{2\sqrt{3}+8}{5}$; 4) 6. **542.** 1) $a^2+\dfrac{b^2}{3}$; 2) $3a^2+\dfrac{b^2}{3}$; 3) $3b^2+c^2$; 4) $-a$;

5) 0; 6) $\frac{a^2}{9}$. **545.** $\sin x = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$; $\cos x = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$. **550.** 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 4) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **554.** 1) $m^2 - 2$; 2) $m^3 - 3m$; 3) $(m^2 - 2)^2 - 2$. **555.** 1) $\frac{17}{25}$; 2) 4,8; 3) $\frac{25}{13}$; 4) $\frac{17}{13}$. **559.** 1) $-\frac{7\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; 3) 0,5; 4) 0,5. **563.** 1) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; 3) $-0,5$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **567.** 1) $\cos 2\beta$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) 0,5; 4) $\operatorname{tg}\alpha$; 5) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; 6) $-\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$; 7) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. **569.** $\Delta h = d \sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)$.

574. 1) 1; 2) $\sqrt{3}$. **576.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\beta$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} 3x$. **577.** 1) 0,75; 2) $4\sqrt{2}$; 3) не определен (90°) и $\frac{1}{18}$; 4) 3. **580.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$. **587.** 1. **591.** 1) 1; 2) $\cos\frac{x}{4}$; 3) $\cos\frac{x}{3}$; 4) $\cos 4\alpha$; 5) 1; 6) $\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}$ $(y \neq \pi k;\ k \in Z)$; 7) $\operatorname{tg} x$ $(\operatorname{tg} x \neq -1)$; 8) $\operatorname{tg}^4\alpha$. **593.** 1) $4\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$;
2) $4\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$; 3) $\sin x \cos 2x$; 4) $\cos x \cos 2x$; 5) $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{x}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$; 6) $-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$; 7) $2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

595. $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. **596.** 1) $|\cos 2\alpha|$; 2) $\sqrt{2}\,|\cos 4x|$; 3) 1; 4) $\operatorname{tg}\alpha$; 5) $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$.

599. 0,125. **605.** 1) $\frac{n}{2} + \frac{\sin 2nx \cos 2(n+1)x}{\sin 2x}$; 2) $\frac{n}{2} - \frac{\sin 2nx \cos 2(n+1)x}{\sin 2x}$; 3) $\frac{(-1)^n \cos\left(n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{(-1)^n \sin\left(n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; 5) $\frac{\cos n\alpha - 1 + 2n\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; 6) $\frac{\sin n\alpha - 2n\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; 7) $\operatorname{ctg}\alpha$. **607.** 1) $13\sin(3t + \alpha)$, $\alpha = -\arccos\frac{5}{13}$; 2) $25\sin(3t + \alpha)$, $\alpha = \arccos\frac{7}{25} - \frac{\pi}{4}$; 3) $61\sin(2t + \alpha)$, $\alpha = \arccos\frac{11}{61} + \frac{\pi}{3}$. **613.** 1) 1; 2) 1,25;

3) 1; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{2}{11}$; 6) $\frac{5}{7}$; 7) 3; 8) 0,5; 9) x; 10) $\frac{n}{2}$; 11) 0,5; 12) $\frac{n^2-m^2}{2}$;

13) $\frac{2}{\pi}$; 14) $-\sin a$; 15) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 16) 0,25; 17) $-0,25$; 18) $-\frac{1}{3}$; 19) 0; 20) 0,25.

614. 1) $3\sin^2 x\cos x$; 2) $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 3) $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 4) $3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$;

5) $-\frac{4\cos x}{\sin^5 x}$; 6) $2x\sin^3 x+3(x^2+1)\sin^2 x\cos x$; 7) $(x^2-2)\sin x$; 8) $\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$;

9) $-\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$; 10) $32\sin^3 x\cos x-\frac{15\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$; 11) $\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}}$.

622. 1) $8\cos 8x$; 2) $-5\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $24\sin^3\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $\frac{24\sin 8x}{\cos^4 8x}$; 5) $24\sin 6x\cos 6x(\sin^2 6x-\cos^2 6x)$; 6) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$;

7) $-4x^3\sin(x^4+1)$; 8) $\frac{2x-3}{\cos^2(x^2-3x+5)}$; 9) $\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$; 10) $-\cos(\cos x)\sin x$;

11) $\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; 12) $\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$; 13) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x$; 14) $\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}+$

$+\frac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}+\frac{3\operatorname{tg}^2 3x}{\cos^2 3x}$; 15) $\frac{\cos x-2\sin 2x}{2\sqrt{\sin x+\cos 2x}}$;

16) $\frac{15\sin 5x\cos 5x(\sin 5x-\cos 5x)}{2\sqrt{\sin^3 5x+\cos^3 5x}}$. **627.** $\frac{\pi}{3}$. **631.** $\sqrt{ab}$. **632.** $\alpha=\operatorname{arctg}\mu$.

633. $\frac{\sqrt{a}}{2}$. **640.** 4) $3\pi-10$. **647.** 5) $2-\frac{\pi}{2}$; 6) $4\pi-10$. **650.** 1) $\sqrt{3}$; 2) -1;

3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{3}{5}$; 5) $\frac{12}{5}$; 6) $-\frac{4}{3}$; 7) $\frac{12}{13}$. **655.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{54}+\frac{\pi k}{9}$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

4) $-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{12}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 7) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 10) $20°\pm 10°+120°\cdot k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

13) $\varnothing$; 16) $\pm\sqrt{(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}}$, $k\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$. **656.** Указания: 1) $\cos 7x\neq 0$;

2) $-\cos 5x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+5x\right)$; 3) $4x=-\frac{x}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 5) $6x=\pm(\pi+\alpha)+2\pi k$,

$k\in \boldsymbol{Z}$; 6) $5x=\frac{\pi}{2}+7x+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 8) $\operatorname{tg}(7\pi+x)=\operatorname{tg}x$, $-\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=$

$= \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 12) $x^2 = \pm(\pi + 5x^2) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 15) $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} - 3x + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 16) $\sin 2x = 1$; 17) $\operatorname{tg} 4x = 1$ или $\operatorname{tg} 4x = -4$; 18) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 19) $\cos^2 2x = 0{,}75$; 20) разделите числитель и знаменатель на $\cos 3x$. **657.** Указания: 2) $\sin x + \cos x = 0$; 4) $\operatorname{tg} x = 3$ или $\operatorname{tg} x = 7$; 6) $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = -2$; 9) $\cos x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 3$ или $\operatorname{tg} x = 7$; 11) $\cos x = 0$. **658.** 1) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 5) $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = \pm\arcsin \sqrt[4]{\frac{1}{3}} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **659.** 2) $x_1 = \frac{2\pi k}{3}$, $x_2 = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $\cos \frac{p}{2} = 0$ (т. е. при $p = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$) x — любое, при остальных p $x = \frac{\pi}{2} - \frac{p}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi k}{p + q}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq \frac{(1 + 2l)(p + q)}{2p}$, где $l \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\sin 5x = 0$ или $\cos 4x = -0{,}5$; 7) $\cos \frac{3x}{2} = 0$ или $a \sin \frac{x}{2} = b \cos \frac{x}{2}$ (в частности, при $a \neq 0$ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{b}{a}$); 8) $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \pm\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 9) $\sin 3x = 0$ или $\cos 2x = -0{,}5$; 10) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 11) $\sin \frac{3x}{2} = 0$ или $\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{3x}{2}$; 12) $\cos 9x = \cos 11x$; 13) $0{,}25 \leqslant \cos^2 x \leqslant 0{,}75$. **667.** Указания: 1) — 7) свести к простейшему неравенству тождественным преобразованием; 8) приведите к виду $\cos 3x < \cos 7x$; 10) приведите к виду $\operatorname{tg} x\,(1 - \operatorname{tg} x) > 0$; 12) приведите к виду $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. **669.** 1) 0,3429; 2) 0,9131; 3) 0,1511; 4) 0,5299; 5) 0,9063; 6) 0,3057. **672.** 1) 1,5; 2) 1,6. **676.** 1) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\varnothing$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **677.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. **678.** 1) Указание: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x^2 - 3x \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{\operatorname{tg} 5}{2}; \frac{\operatorname{tg} 7}{2}\right]$.

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

К—1. **1.** а) Используйте теорему косинусов; б) $D\left(4\frac{2}{9};\ 1\frac{4}{9}\right)$. **2.** $x \geqslant 1$.

К—2. **3.** $b_1 = 3$; $b_2 = -\frac{3}{4}$.

К—3. **1.** $a = 10$; $b = -4$. **2.** $x_1 = 2$; $x_2 = -3$; $x_3 = -4$; $x_4 = 5$. **4.** $(x^2 - 4x + 1) \cdot (x^2 - 6x + 2)$. **5.** $(x^6 + x^3 - 1)(x^6 - x^3 - 1)$.

К—4. **3.** $-6 < x < \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2} < x < 2$. **4.** $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{7}{3}$.

К—5. **2.** а) 2. **3.** Четная. **4.** $f(\varphi(x)) = 6x - 3$, где $x \geqslant \frac{1}{3}$; $\varphi(f(x)) = \sqrt{6x^2 - 4}$. **5.** -5.

К—6. **1.** -2; 1,5. **2.** $-\frac{2}{3}$. **3.** 0,5. **4.** $-\frac{7}{8}$.

К—7. **1.** а) $\frac{1}{2}$; б) -1. **2.** б) 1,5; 2; $-$ 3. **3.** $x \approx -2{,}4$. **4.** $3 + \sqrt{x - 1}$. **5.** $-0{,}5$. **6.** $a = -3$; $b = 1{,}5$.

К—8. **1.** а) 20 м/с; б) 2 с. **2.** 2. **3.** а) $y = 5x - 6$; б) $y = 5x - 26$. **4.** а) $x = \frac{1}{12}$ или $x = \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{12} < x < \frac{1}{2}$ или $x > \frac{1}{2}$; в) $x \leqslant \frac{1}{12}$ или $x = \frac{1}{2}$. **5.** Не существует $y'(-1)$. **6.** -50.

К—9. **3.** 2,4.

К—10. **1.** $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{7}{24}$. **2.** $\frac{1}{2}$. **4.** Нечетная. **5.** $x = \pi n$ или $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

К—11. **2.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1. **3.** $\frac{2\pi}{3}n$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** $\operatorname{tg}\varphi = 5$.

К—12. **1.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{30} - \frac{3}{5} + \frac{\pi n}{5}$; $x = (-1)^n \cdot \frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{6} - \frac{3}{5} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $7 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{14} - \frac{3}{7} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** $\frac{7\pi}{4}$. **6.** $\frac{\pi n}{9}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 9k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

К—13. **1.** 2. **2.** а) $\frac{120}{169}$; б) $5 - 2\pi$. **3.** $\frac{\pi}{24} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{24} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $-1 \leqslant x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.** $\frac{\pi}{8} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{8} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{8} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{8} + 2\pi n$; $2\pi n - \frac{\pi}{8} < x < 2\pi n$; $2\pi n - \frac{5\pi}{8} < x < 2\pi n - \frac{3\pi}{8}$; $2\pi n - \pi < x < 2\pi n - \frac{7\pi}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

К—14. **1.** $x \leqslant -2$; $-\frac{1}{3} < x < 0$; $x = 1$. **3.** $(x + 2)(x^2 - 2x + 12)$. **5.** π, $\frac{7\pi}{6}$.

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 4. **Предел и непрерывность**

Глава 5. **Производная и ее приложения**

Глава 6. **Тригонометрические функции**