МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л.П. Рунова, Л.В. Рунов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по теме:

«Измеримые функции»

для студентов экономического факультета

г. Ростов – на – Дону
2001 г.

Печатается по решению заседаний кафедр ТФФА и экономической кибернетики РГУ

Протоколы №№ 1,2 от 3 и 17 сентября 2001 г.

Ответственные за выпуск:

профессор В.П. Кондаков,

профессор Л..В. Дуканич.

Учебное пособие предназначено для студентов II курса экономического факультета, обучающихся по специальности «Математические методы в экономике» и студентам мехмата. В пособии содержится изложение теории измеримых функций, приводятся примеры и большое количество задач.

Официально признано, что широкое применение математики в экономике начинается со времен работ великого французского математика Антуана Августино (Огюстен) Курно. Понятия функции, непрерывности, дифференцируемости, возможность отыскания экстремумов породили не только Математическую школу в экономике, но и целый ряд споров, проблем и яростной борьбы.

По мере развития экономического знания, глубокого изучения экономических категорий стали отчетливо выступать количественные связи и зависимости между отдельными категориями. Эту объективную сторону жизни трудно было игнорировать. К тому же, к этому времени был создан соответствующий математический аппарат – математический анализ, изучающий функциональные зависимости.

Встал вопрос о правомерности его применения в экономике: процессы в экономике дискретные, а функциональные зависимости в математическом анализе непрерывные и, более того, дифференцируемые.

Как можно использовать соответствующий математический аппарат? В какой мере?

Эти вопросы в явном или неявном виде сразу возникли перед создателями Математической школы в экономике. Возник и другой вопрос. Готово ли общество к восприятию математических идей в экономике? Пожалуй, на первом этапе это был главный вопрос. Как встретили современники–экономисты основной труд Курно «Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses» (Математические основы теории богатства), который вышел в 1838 году? Да никак! Господство классической английской школы в экономике было абсолютным и труд остался незамеченным читающей публикой. Почти через 20 лет, а точнее, в 1863 году, Курно выпустил новую работу, посвященную экономике: «Principes de la theorie des richess» (Принципы теории богатства). В работе была изложена первоначальная теория без математических доказательств. Книга нашла широкий отклик в кругах экономистов и пробудила некоторый интерес к работе 1838 года.

В 1875 г. появился ее итальянский перевод, в 1897 г. – английский, в 1924 г. – немецкий. Что касается России, то только в конце двадцатых годов «Вестник Коммунистической Академии» опубликовал ряд статей, а в 1928 г. издательство Коммунистической Академии выпустило двухтомник «Субъективная школа в политической экономии» И.Г. Блюмина. В работах значительное место отводилось подробному изложению (с доказательствами) и исследованию идей Курно. Впоследствии работы были изъяты из широкого обращения. Фактически российский читатель не знаком с работами Курно и вокруг его работ масса неточностей. Мало известно современным экономистам, что в 1843 г. вышло одно из основных сочинений Курно «Exposition de la thtorie des chances et des probabilites» (Основы теории шансов и вероятностей). Книга на столетие опередила время и, помимо других вопросов, говорила «о продажной стоимости шансов и вероятностей», «о рынке шансов и об играх вообще», «о страховании», «о применении теории вероятностей к вопросам демографии и исчислении продолжительности жизни» (перечислены заголовки оглавления). Л.Вальрис писал в 1883 году, что со времени появления первого экономического труда Курно, т.е. за 45 лет, не было высказано ни одного суждения об этой книге. То же случилось и с монографией по теории вероятностей. В 1970 году издательство «Наука» выпустило ее русский перевод с предисловием А.Л.Вайнштена и Н.С.Четверикова.

В 1877 году, незадолго до смерти, Курно пишет свое последнее экономическое сочинение «Краткое изложение экономических учений».

До середины шестидесятых годов 20-го столетия среди экономистов бытует мнение, что применение математических методов в экономике должно быть ограничено тем, что экономические положения облекаются в математическую форму и выражаются в виде отдельных уравнений (пусть и дифференциальных) и формул. Математика служит только целям иллюстрации и выступает, как метод изложения, но не как метод исследования.

Причин такому печальному развитию событий, на наш взгляд, несколько.

Основная - это плохое знание экономистами математики и математиками – экономики. В качестве примера приведем К.Маркса. «Все основные зависимости, которые Маркс установил между отдельными категориями, носят, по большей части, весьма элементарный характер и могут быть выражены в виде уравнений I степени». Это слова ярого марксиста. Это несмотря на то, что математикой Маркс «занимался» с 1846 г. (в это время появляются в рукописях первые алгебраические выкладки) по 1881 г. (к этому времени относятся последние две «математические» работы Маркса «О понятии производной функции» и «О дифференциале») - 35 лет. Это несмотря на то, что «Единственное занятие, которым я поддерживаю необходимое душевное равновесие, это – математика». (Маркс. Соч. т. 30, с. 88).

(Справка: «Математические рукописи» К.Маркса изданы в 1968 г. в виде тома объемом в 639 стр.)

Вторая причина, это недостаточное обоснование математического анализа, размытость и нечеткость многих матаматических понятий. Со времени Даламбера математики, не слишком заботясь об обосновании своих исследований, руководствовались его лозунгом: «Шагайте вперед и вера к вам придет». Понятия производной, дифференциала, функции были настолько туманными, неопределенными, что философ – реакционер, епископ Беркли обвинил в мистике создателей анализа.

Только в 1821 году появляется «Cours d`analyse» (Курс анализа), в 1823 - «Resume des lecons donnees a l`ecole royale polytechnique» (Резюме лекций, прочитанных в Королевской политехнической школе), в которых Коши дал такое обоснование анализа, которое позволило снять обвинения Беркли. Реформы Коши и Гаусса стимулировали математическую деятельность Вейерштрасса, Дедениндa, Кантора и других. В шестидесятых и последующих годах девятнадцатого века неожиданно для математиков выяснилось, что в математике нет четкого понятия (вначале) иррационального, (затем) рационального,(далее) целого и, наконец, натурального числа. Исследования в этом направлении затянулись до двадцатого века. Процесс внедрения полученного знания шел очень медленно. С достижениями европейской континентальной математики англичане познакомились после 1917 г.

Аналогичная обстановка имела место и в теории вероятностей.

Не удивительно, что труд Курно 1838 года был полностью забыт современниками и был переоткрыт через четверть века Леоном Вальрасом (его отец - Ог. Вальрас – был коллегой Курно по Высшей нормальной школе) и Уильямом Джевоксом (подробно изложил содержание книги Курно).

Третья причина заключается в следующем: «Математический аппарат становится самодавлеющим; математические операции над экономическими величинами производятся без ясного представления об экономических процессах; математический метод начинает диктовать новые формы содержания; математический метод здесь из формального превращается в материальный; под маской математических действий происходит трансформация экономического материала; экономист незаметно для себя вносит новые предпосылки и условия проблемы; экономист оказывается в плену у математических формул, попадает в сети, им же расставленные», - это точка зрения экономиста.

Экономические процессы являются дискретными. С большой натяжкой их можно мыслить как непрерывные. Приходится представлять бесконечную делимость тех величин, которые связаны данной функциональной зависимостью. «Таким образом, столь невинная операция, как дифференцирование функций, привносит в экономический анализ совершенно новые условия, приводит к подмене одних категорий другими, приводит к трансформации понятий».

Обвинения серьезные и отчасти справедливые. Надо рассматривать только соответствующие, отвечающие требованиям математическим моделям, экономические процессы. Курно в своих исследованиях отмечает, что функция спроса в зависимости от цены может для всего общества рассматриваться, как непрерывная. «Как бы мало ни было изменение *p,* - пишет Курно, - найдутся потребители, поставленные в такие условия, что даже легкое вздорожание или удешевление того или иного товара повлияет на их потребление, заставит их подвергнуть себя некоторым лишениям или ограничить их промышленную деятельность, либо заменить вздорожавший товар другим товаром».

Абстрактная математическая модель должна быть в определенном смысле адекватна реальности. Условности модели должны быть четко сформулированны. И этому Курно уделяет большое внимание, интуитивно понимая значение этого фактора.

Но здесь возникает важный математический вопрос: при каких условиях и как ступенчатые функции (даже, если их очень много) могут заменяться непрерывной функцией и, тем более, дифференцируемой?

Ответы на эти вопросы математикам еще предстояло получить. Необходимо было создать теорию множеств, теорию меры, изучить свойства измеримых функций и еще многое, многое другое.

Всего этого ко времени возникновения Математической школы экономики не было.

Частично вопрос обоснования замены дискретных простых функций, характерных для экономических процессов и систем, непрерывными, решает предлагаемая ниже теория измеримых функций. Именно простые функции, принимающие конечное число значений, характерны для производства и экономики вообще. Если рынок состоит из достаточно большого количества представителей (а нам известно, что в теории экономики рассматриваются иногда рынки с континуальным числом участников), то можно считать, что возникает некая последовательность простых функций, которая, согласно закону больших чисел, должна выражать характерные закономерности для рассматриваемого явления и определять некоторую функцию. С какими свойстами возникает эта функция?

Можно ли условно считать, что она непрерывна?

И существует еще много других вопросов, о которых не задумываются экономисты, и которые требуют своего обоснования.

Измеримые функции

Пусть задано множество χ, σ – алгебра $\zeta \subset P(\chi)$ и заданная на ζ σ – аддитивная полная мера μ.

Определение 1. Вещественная функция f называется ζ – измеримой (μ–измеримой), если для любого $c \in R$ множество

$$\chi_c = \{x \in \chi : f(x) < c\}$$

(так называемое лебеговское множество функций f, в случае когда μ – мера Лебега) принадлежит ζ, т.е. измеримо.

Определение 2. Комплекснозначная функция $f(x) = u(x) + iV(x)$ называется ζ - измеримой, если таковыми являются функции $u(x)$ и $V(x)$.

Определение 3. Вектор функция $f(x)=f_1(x)e_1+f_2(x)e_2+\ldots+f_n(x)e_n$ со значениями в конечномерном вещественном линейном пространстве R^n называется ζ – измеримой, если все координатные функции $f_i(x)$, $i=1,n$, являются ζ–измеримыми функциями.

Справедливо утверждение, что, если функция f измерима в некотором базисе e_1, e_2, ... , e_n, то она будет измеримой и в любом другом, т.е. определение не зависит от выбора базиса в R^n.

Примеры.

1. На R_1 с мерой Лебега любая непрерывная функция измерима, так как множество $\chi_c = \{x \mid f(x) < c\}$ для непрерывной функции открыто (прообраз открытого множества при непрерывном отображении есть открытое множество).

2. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, x - \textit{иррационально} \\ 1, x - \textit{рационально} \end{cases}$$ измерима.

Действительно, $\chi_c = R$, если $c>1$, $\chi_c = R \setminus Q$, если $0 \le c \le 1$,

и $\chi_c = O$, если $c \le 0$.

3. Пусть χ_A - характеристическая функция множества A, т.е.

$\chi_{\text{A}} = \begin{cases} 1, \chi \in \text{A} \\ 0, \chi \notin \text{A} \end{cases}$. Функция χ_A очевидно измерима тогда и только тогда, когда

A – измеримое множество.

Примеры измеримых функций можно продолжить, если учесть что:

4. Всякая функция, заданная на множестве меры ноль, измерима.

5. Сужение измеримой функции на измеримое подмножество есть измеримая функция.

6. Пусть f задана на измеримом множестве $\chi = \bigcup\limits_{i \in I} \chi_i$, где I – конечное или счетное множество, χ_i – измеримые множества и функция f измерима на каждом χ_i, тогда f измерима на χ.

Утверждение очевидно, т.к. $\chi_c = \bigcup\limits_{i \in I} \chi_{ic}$.

7. Если одна из эквивалентных функций f и q измерима, то и вторая функция является измеримой.

Действительно. Пусть $A = \chi\ (f \neq q)$, где $f \sim q$, $B = \chi \setminus A$.

мера $\mu A = 0$. Следовательно, B – измеримое множество. Значит функции f и q измеримы на множестве B, так как одна из них измерима, а другая неотличима от первой. Но обе функции измеримы на A, т.к. $\mu A = 0$. Следовательно, функции f и q измеримы на χ.

8. Если для всех точек измеримого множества χ будет $f(x)=c$, то функция $f(x)$ измерима (c может быть и бесконечным).

Утверждение очевидно, т.к.

$$\chi_a = \chi\,(f<a) = \{x \in \chi : f(x)<a\} = \chi \begin{cases} \theta, & a < c \\ \chi, & a \geq c \end{cases}.$$

Определение 4. Функция f, заданная на измеримом множестве $E = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$, где E_i – измеримые множества, I – конечное или счетное множество, $f(x)=c_i$ для всех x из E_i, называется ступенчатой.

8. Ступенчатая функция измерима.

Легко заметить, что если функция f измерима, то вместе с множеством $\chi_c = \{x \in \chi : f(x) < c\}$ измеримы и следующие множества:

1. $\chi\,\{f(x) \geq c\} = \chi - \chi_c$

2. $\chi\,\{f(x) = c\} = \bigcap\limits_{n \in N} \chi\,\{c - \frac{1}{n} < f(x) \leq c + \frac{1}{n}\}$

3. $\chi\,\{f(x) \leq c\} = \chi_c\,\{f(x) < c\} \cup \chi\,\{f(x) = c\}$

4. $\chi\,\{f(x) > c\} = \chi\,\{f(x) \geq c\} \setminus \chi\,\{f(x) = c\}$

5. $\chi\{c < f(x) \le a\} = \chi\{c < f(x)\} \cap \chi\{f(x) \le a\}$

6. $\chi\{c \le f(x) < b\} = \chi\{c \le f(x)\} \cap \chi_b\{f(x) < b\}$

7. $\chi\{c < f(x) < b\} = \chi_b \cap \chi\{f(x) > c\}$

8. $\chi\{c \le f(x) \le b\} = \chi\{c \le f(x)\} \cap \chi\{f(x) \le b\}$,

где c, a, b – произвольные вещественные числа.

Справедливо и обратное утверждение: если для произвольных чисел c, a, b измеримы множества одного из видов 1–8, то функция $f(x)$ измерима на χ. ***Доказать утверждение самостоятельно.***

Основные свойства измеримых функций описывает:

Теорема 1. Множество измеримых функций образует алгебру, замкнутую относительно сходимости почти всюду.

Напомним определение сходимости почти всюду.

Опрделение 5. Последовательность функций f_n, заданных на пространстве с мерой μ сходятся к функции f почти всюду, если $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in \chi$, за исключением множества меры ноль.

Для доказательства теоремы удобно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 1. Пусть f – измеримая, а g – непрерывная функции. Тогда композиция $g(f(x))$ измерима.

Доказательство леммы проведем для случая, когда функции f и g определены и действуют в рамках пространств R^1.

Очевидно, что множество $\{t : g(t) < c\}$ открыто и его можно представить в виде счетного объединения открытых интервалов (a_i , b_i). Прообраз $(g_o f)^{-1}(Y)$ открытого множества Y равен $f^{-1}(g^{-1}(Y))$ и является прообразом при отображении измеримой функции f открытого множества $g^{-1}(Y)$. Следовательно, является измеримым множеством.

Доказательство теоремы. Если функция f измерима, то функции λf, $|f|$ и f^2 измеримы в силу леммы. Пусть функции f_1 и f_2 измеримы. Тогда, в силу равенства

$$\chi_c(f_1 + f_2) = \bigcup_{r\in Q} \left(\chi_r(f_1) \cap \chi_{c-r}(f_2)\right),$$ где $\chi_r(f_1)$ и $\chi_{c-r}(f_2)$

измеримые множества, функция $f_1 + f_2$ измерима.

Так как

$f_1 f_2 = ¼[(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2]$, то и произведение измеримых функций есть функция измеримая. Тождество $\max(f_1, f_2) = ½[(f_1 + f_2) + |f_1 - f_2|]$ показывает, что максимум двух, а значит, и любого конечного числа измеримых функций измерим.

Пусть $\{f_n\}$ – невозрастающая последовательность измеримых функций: $f = \lim f_n$. Тогда множество $\chi_c(f) = \cup \chi_c(f_n)$ и, следовательно, измеримо. Получили: алгебра измеримых функций замкнута относительно монотонных предельных переходов. Но любой предельный переход можно заменить двумя монотонными

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x)\}$$

Откуда получаем, что если последовательность измеримых функций f_n сходятся поточечно к функции f, то f измерима. Так как всякая функция, заданная на множестве меры ноль, измерима, и эквивалентные функции измеримы, то если последовательность измеримых функций f_n сходится почти всюду к функции f, то f измерима.

Следствие 1. Если последовательность измеримых функций f_n сходится равномерно к f, то f измерима.

Следствие 2. Существует разрывная на $[0,1]$ функция, которая не является пределом почти всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.

В качестве такой функции можно взять характеристическую функцию неизмеримого множества.

Замечание к теореме 1.

Внимание !!!

Существуют примеры измеримой функции $f(x)$ и непрерывной функции $g(x)$ таких, что композиция $f(g(x))$ неизмерима.

Приведем пример таких функций.

Пусть φ – канторова функция. Определим на $[0,1]$ функцию ψ следующим образом: $\psi(x) = x + \varphi(x),\ 0 \le x \le 1.$

Множество значений этой фукции есть интервал $[0,2]$

Так как φ возрастает и непрерывна на $[0,1]$, то отображение ψ строго возрастает, непрерывно, взаимно однозначно и имеет непрерывное обратное отображение, определенное на множестве значений функции ψ.

Поскольку всякий открытый интервал, удаленный из $[0,1]$ при построении канторового множества C, отображается функцией ψ на некоторый интервал такой же длины из $[0,2]$, то $\mu(\psi(I \setminus C)) = \mu(I \setminus C) = 1$, откуда $\mu(\psi(C)) = 1$. Пусть теперь $Д$ – неизмеримое подмножество множества $\psi(C)$. Тогда $\psi^{-1}(Д) = E$ – подмножество множества C меры ноль. Характеристическая функция $f = \chi_e$ множества E измерима, а функция $g \equiv \psi^{-1}$ непрерывна. Композиция этих функций $f(g(x))$ неизмерима, поскольку является характеристической функцией χ_∂ неизмеримого множества $Д$.

Лемма 2. Если на множестве χ заданы две измеримые функции f и g, то множество $\chi(f > g)$ измеримо.

Доказательство. Пронумеруем все рациональные числа: $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Тогда справедливо равенство

Откуда и следует лемма 2.

Определение 6. Функция $f\colon \chi \to R$ называется простой, если она измерима и принимает конечное или счетное множество значений.

$$\chi(f > g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \chi(f > r_n) \bigcap \chi(g < r_n)$$

Теорема 2. Функция f является простой тогда и только тогда, когда

$\chi = \bigcup\limits_{\kappa}^{'} \chi_\kappa$, где множества χ_κ измеримы и $f(x)$ принимает постоянное значение y_k на множестве χ_κ .

Доказательство. Пусть f – простая функция, $\{y_k\}$ – множество ее значений и пусть $\chi_\kappa = \{x\colon f(x) = y_k\}$.

Тогда $\chi_\kappa = \{x\colon f(x) \le y_k\} \setminus \{x\colon f(x) < y_k\}$ и измеримо, как разность двух измеримых множеств.

$$\chi = \bigcup_{\kappa}{}' \chi_{\kappa}$$

Обратно, пусть $\chi = \bigcup_{\kappa}{}' \chi_{\kappa}$. Тогда

$$\chi_c = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_{y_\kappa < c} \chi_{\kappa}.$$

Таким образом, множества ступенчатых и простых функций совпадают, а термины ступенчатая функция и простая функция – синонимы.

Примеры: 1) Константа – простая функция.

2) Функция Дирихле – простая функция.

3) Характеристическая функция множества – простая функция.

Каждая простая функция представляет собой конечную или счетную линейную комбинацию характеристических функций (непосредственное следствие теоремы 2).

Теорема 3. Для любой измеримой функции f существует равномерно

сходящаяся к ней последовательность простых функций.

Доказательство. Положим $f_n(x) = \frac{m}{n}$, если $\frac{m}{n} \le f(x) < (m+1)/n$, $m \in Z$.

Множество $\chi_{m,\ n}$, на котором функция f_n принимает постоянное значение $m\ /\ n$, измеримо. По построению $|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \to 0$, т.е. последовательность f_n сходится к f равномерно.

Теорема 4. Множество простых функций замкнуто относительно алгебраических операций.

Доказать самостоятельно. Задача №30.

Для измеримых функций можно определить несколько разных типов сходимости. Наиболее употребительны следующие три типа:

1) Равномерная сходимость на множестве χ обозначается $f_n \rightrightarrows f$ и означает, что $sup\ |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty,\ \ x \in \chi$

2) Сходимость почти всюду обозначается $f_n \xrightarrow{n.b.} f$ и означает, что $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всех точек $x \in \chi \setminus A$, где $\mu A = 0$.

3) Сходимость по мере обозначается $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ мера множества $A_n(\varepsilon) = \{x \in \chi, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Вышеназванные типы сходимости связаны между собой. Их равномерной сходимости вытекает сходимость почти всюду и сходимость по мере.

Теорема 5. Если последовательность f_n сходится к f почти всюду на χ и $\mu(\chi) < \infty$, то $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Доказательство. Пусть $A_n(\varepsilon) = \{x \in \chi: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Положим $B_n(\varepsilon) = \bigcup_{\kappa \geq n} A_k(\varepsilon)$. Очевидно $B_1(\varepsilon) \supset B_2(\varepsilon) \supset \ldots \supset B_n(\varepsilon) \supset \ldots$ Пусть $B(\varepsilon) = \bigcap B_n(\varepsilon)$. Если $x \in B(\varepsilon)$, то x принадлежит $A_n(\varepsilon)$ для сколь угодно больших n. Следовательно, $f_n(x) \to f(x)$. Значит, множество $B(\mathcal{E})$ имеет меру 0. Но $\mu(B(\mathcal{E})) = \lim \mu(B_n(\mathcal{E}))$. Так как $\mu(A_n(\mathcal{E})) \le \mu(B_n(\mathcal{E}))$, то $\mu(A_n(\mathcal{E})) \to 0$, т.е. $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Замечание. Ограничение $\mu(\chi) < \infty$ существенно. Приведем пример, подтверждающий сказанное.

Пусть $f(x) \equiv 0$ для всех $x \in R$ и

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1, если\, n \le x \le n+1 \\ 0, x \in R \end{cases}$$

Очевидно, $f_n(x) \to f(x)$, но $f_n \xrightarrow{\mu} f(x)$, т.к.

$\mu\{x|\ |f_n(x) - f(x)| \ge \mathcal{E} > 0\} = 1 \quad \forall n \in N.$

Итак, равномерная сходимость влечет сходимость поточечную. Поточечная – почти всюду. А из сходимости почти всюду на множестве конечной меры следует сходимость по мере. Обратные утверждения неверны.

Следующий пример показывает, что из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду.

Пример. Определим на множестве $[0,1)$ для каждого натурального k группу из k функций $f_1^k, f_2^k, \ldots, f_k^k$, равенством

$$f_i^k(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right) \\ 0, x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right) \end{cases}$$

Пронумеруем все построенные функции получим последовательность:

$\varphi_1 = f_1^1,\ \varphi_2 = f_1^2,\ \varphi_3 = f_2^2,\ \varphi_4 = f_1^3,\ \varphi_5 = f_2^3, \ldots$

Последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится по мере к нулю:

$$\mu\chi(\left|\varphi_n\right| \geq \varepsilon) = \mu(\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right) = \frac{1}{k} \to 0$$

Но $\varphi_n(x)$ *не* $\to 0$ ни в одной точке $x_0 \in [0,1)$, т.к. $\forall k\ \exists i$ /

$x_0 \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$ и $f_i^k(x_0) = 1$.

Обратные утверждения становятся верными, если «подправить» последовательность $\{f_n\}$ или множество χ.

Теорема Егорова 6. Если $f_n \xrightarrow{n.b.} f$ на χ и $\mu(\chi) < \infty$, то для любого $\delta > 0$ существует такое множество $E_\delta \subset \chi$, что $\mu E_\delta < \delta$ и $f_n \Rightarrow f$ вне E_δ, т.е. на

$$\chi \setminus E_\delta = \chi_\delta.$$

Доказательство. Пусть $f_n \to f$ поточечно на подмножестве $\chi_0 \subset \chi$. Тогда $\forall x \in \chi_0$ и $\forall m \in N\ \exists n | \left|f_k(x) - f(x)\right| < \frac{1}{m}\quad \forall k > m$. Обозначим

$\chi_n^m = \left\{x \middle| \left| f_i(x) - f(x)\right| < \frac{1}{m} \forall i > n\right\}$. Следовательно, $\chi_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \chi_n^m$. Так как $X_1^m \subset X_2^m \subset \ldots \subset X_n^n \subset \ldots$ и множества χ_n^m измеримы благодаря измеримости f_i и f, то $\lim_{n\to\infty} \mu(\chi_n^m) = \mu(\chi_0)$ и значит $\mu(\chi_0 \setminus \chi_n^m) \to 0$ при $n \to \infty$. Возьмем номер $n(m)$ такой, чтобы $\mu(\chi_0 \setminus \chi_{n(m)}^m) < \delta/2^m$. Тогда для множества $\chi_\delta = \bigcap\limits_m \chi^m_{n(m)}$ имеем $E_\delta = \chi_0 \setminus \chi_\delta = \bigcup\limits_m (\chi \setminus \chi^m_{n(m)})$.

$$\mu(\chi_0 \setminus \chi_\delta) \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\chi \setminus \chi^m_{n(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta .$$

По условию $\mu\ (\chi \setminus \chi_0) = 0$ и, значит, $\mu\ (\chi \setminus \chi_\delta) \ \le \mu\ (\chi \setminus \chi_0) +$ $+\mu\ (\chi_0 \setminus \chi_\delta) < \delta$. На построенном множестве χ_δ последовательность f_n сходится равномерно к f. Действительно. По $\varepsilon > 0$ выберем m так, чтобы $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Тогда $\forall\ k > n(m)$ $\chi_\delta \subset \chi^m_{n(m)}$, т.е. $\forall\ \chi \in \chi_\delta$ $\left|f_k(\chi) - f(\chi)\right| < \frac{1}{m} < \varepsilon$.

Замечание. Если множество χ имеет бесконечную меру, то утверждение теоремы Егорова не выполняется. Примером сказанному может служить пример из замечания к теореме 5.

Теорема Ф. Рисса 7. Если $f_n \xrightarrow{n.b.} f$ на χ, то существует такая подпоследовательность $\{n_k\}$, что

$$f_{n_k} \xrightarrow{n.b.} f \text{ на } \chi.$$

Доказательство. В тех же обозначениях, что и в теореме 5, для каждого k выберем такой номер n_k , что $\mu(B_{n_k}(1/k)) < \frac{1}{2^n}$. Последовательность n_k – искомая. Действительно. Множество тех точек x, в которых $f_{nk}(x) \ \to f\ (x)$, содержится в $\lim\limits_{k\to\infty} B_{n_k}(1/k)$ и поэтому имеет меру ноль.

Рассмотрим теперь различные теоремы о приближении измеримых функций непрерывными.

Теорема 8. Пусть на множестве χ задана измеримая, почти всюду конечная функция f. Для любого $\varepsilon > 0$, существует измеримая ограниченная функция g, такая, что $\mu\, \chi(f \# g) < \varepsilon$.

Доказательство. Положим $A_k = \chi\,(|f| > k)$ $\quad B = \chi\,(|f| = \infty)$.

По условию $\mu B = 0$. Очевидно, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots . \supset A_n \supset \ldots .$ и

$B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Поэтому $\mu A_k \to 0$. Следовательно, существует такое k_0, что $\mu A_{k0} < \varepsilon$ и $|f(x)| < k$ для всех $x \in A_{k0}$.

Определим $g(x) = \begin{cases} f(x), x \in \chi \setminus A_{k_0} \\ 0, x \in A_{k_0} \end{cases}$

Очевидно g – искомая функция.

Теорема Бореля 9. Пусть на $[a,b] = \chi$ задана измеримая и почти везде конечная функция f. Для любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует непрерывная на $[a,b] = \chi$ функция ψ, для которой

$$\mu\, \chi\,(|f - \psi| \geq \delta) < \varepsilon.$$

Если при этом $|f(x)| \leq K$, то и $\psi(x)$ можно выбрать так, что $|\psi(x)| \leq K$. Зафиксируем $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ и найдем натуральное m такое, что $k / m < \delta$.

Построим множества $\chi_i = \chi\left\{\frac{i-1}{m}k \le f \le \frac{i}{m}k\right\}$, $i = 1 - m, 2 - m, ..., m-1$

$$\chi_m = \chi\left\{\frac{m-1}{m}K \le f \le K\right\},$$

Эти множества измеримы, попарно не пересекаются и

$$[a,b] = \bigcup_{i=1-m}^{m} \chi_i$$

Для каждого i построим замкнутое множество $F_i \subset \chi_i$ с мерой

$\mu F_i > \mu\chi_i - \frac{\varepsilon}{2^m}{}_i$ и положим $F = \bigcup_{i=1-m}^{m} F_i$

Очевидно, $[a,b] \setminus F = \bigcup_i (\chi_i \setminus F_i)$. Следовательно, $\mu\,[a,b] - \mu\, F < \varepsilon$.

Определим на множестве F функцию φ равенством

$$\varphi(x) = \frac{i}{m}k, x \in F_i.$$

Так как φ постоянна на каждом замкнутом множестве F_i, то она непрерывна на F и $|\ \varphi(x)\ | \le k$. Для любого x из F справедливо неравенство

$$|\ f(x) - \varphi(x)\ | < \delta.$$

Расширяя функцию φ на весь сегмент $[a,b]$ с сохранением непрерывности по закону линейности на всех дополнительных интервалах, получим функцию ψ, для которой $|\ \psi\,(x)| \le k_n$

$$\mu\,\chi\,(|\,f - \psi\,| \ge \delta) < \varepsilon.$$

В случае, когда f не ограничено, надо применить теорему 8.

Следствие. Для всякой измеримой и почти везде конечной функции f, заданной на сегменте $[a,b]$, существует последовательность непрерывных функций ψ_n, сходящаяся по мере к функции f.

Доказательство. Берем две стремящиеся к 0 монотонные последовательности

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots > \delta_n \downarrow 0$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots > \varepsilon_n \downarrow 0$$

Для каждого n существует непрерывная функция ψ_n такая, что

$\mu \chi (| f - \psi_n | \geq \delta_n) < \varepsilon_n$.

Очевидно, $\psi_n \Rightarrow f$, т.к. $\forall \delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0$:

$\delta n_0 < \delta$, $\varepsilon n_0 < \varepsilon$, $\mu \chi (|f - \psi_n | \geq \delta) < \mu\chi (|f - \psi_n | \geq \delta n_0) < \varepsilon n_0$.

Теорема Фреше 10. Для всякой измеримой и почти везде конечной функции f , заданной на сегменте $[a,b]$, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к f почти всюду.

Теорема вытекает из следствия к теореме 9 и теоремы Рисса 7.

Теорема Лузина 11. Пусть f измерима и почти всюду конечная функция, заданная на $[a,b] = \chi$. Каково бы ни было $\delta > 0$, существует такая непрерывная функция φ, что $\mu \chi (f \# \varphi) < \delta$.

Если $| f | \leq k$, то и $| \varphi | \leq k$

Доказательство. Пусть φ_i – последовательность из теоремы Фреше: $\varphi_i \xrightarrow{n.b.} f$. Существует (см.Т.6) множество $\chi_\delta : \mu\chi_\delta > b - a - \dfrac{\delta}{2}$ и $\varphi_n \Rightarrow f$ $\forall x \in \chi_\delta$.

Следовательно, функция f непрерывна на χ_δ. Найдем замкнутое подмножество F множества χ_δ с мерой $\mu F > m\chi_\delta - \frac{\delta}{2}$.

Функция f непрерывна на F, тогда ее можно расширить на $[a,b]$ по закону линейности на всех дополнительных интервалах. Получим функцию φ, которая удовлетворяет условиям теоремы.

задачи

1. Доказать, что если $f(x)$ измерима на χ, то и функция $(f(x))^3$ измерима на χ.
2. Доказать, что если $(f(x))^3$ измерима на χ, то и функция $f(x)$ измерима на χ.
3. Показать, что из того, что $(f(x))^2$ измерима на χ, еще не следует, что $f(x)$ измерима на χ.
4. Доказать, что если $f(x)$ измерима на χ, то и $(f(x))^2$ измерима на χ.
5. Показать, что из того, что $| f(x) |$ измерима на χ, еще не следует, что f(x) измерима на χ.
6. Доказать, что если функция $f(x)$ измерима на всяком отрезке $[\alpha,\beta]$, где $a < \alpha < \beta < b$, то она измерима и на $[a,b]$.
7. Показать, что всякая монотонная на измеримом множестве χ, измерима.

8. Если во всех точках сегмента $[a,b]$ существует $f'(x)$, то $f'(x)$ измерима.

9. Сумма сходящегося на сегменте $[a,b]$ ряда измеримых функций есть измеримая функция.

10. Доказать, что функция f, определенная на $[a,b]$ и действующая в R, измерима тогда и только тогда, когда прообраз при отображении f каждой открытой части R есть измеримое множество $[a,b]$.

11. Пусть функция f измерима и не обращается в нуль. Доказать, что функция $1/f$ измерима.

12. Пусть χ – пространство мерой, f – вещественнозначная функция, определенная на χ. Доказать, что f измерима, если для любого борелевского множества $B \subset R$ множество $f^{-1}(B)$ измеримо.

13. Пусть $f(x)$ – вещественная функция. Описать те числа n, при которых из измеримости функций $(f(x))^n$ следует измеримость $f(x)$. (Функция $(f(x))^n$ имеет смысл для произвольной функции $f(x)$, только если n представимо в виде $n = k/l$, *где* $k = 0, 1, 2\dots$ $l = 1, 3, 5, 7, \dots$).

14. Точная верхняя граница счетного множества измеримых функций есть измеримая функция. Доказать.

15. Для того, чтобы последовательность измеримых и почти всюду конечных функций $\{f_n\}$ сходилась по мере, необходимо и достаточно, чтобы для любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ существовало такое n_0, что при $n > n_0$ и $m > n_0$ справедливо неравенство

$$\chi(|f_n - f_m| \geq \delta) < \varepsilon.$$

Пусть $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ – последовательности измеримых функций, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $g_n \xrightarrow{\mu} g$. Доказать следующие утверждения.

16. Последовательность $\{\alpha f_n\}$ сходится по мере к αf.

17. $(f_n + g_n) \xrightarrow{\mu} f + g$.

18. $|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$.

19. Если $f(x) = 0$ почти всюду, то $f_n^2 \xrightarrow{\mu} 0$.

20. $f_n g \xrightarrow{\mu} fg$.

21. Верны ли утверждения 16 – 20 для сходимости почти всюду ?

22. Будет ли прообраз измеримого множества измеримым множеством? (Указание. Рассмотреть функции: $\tau(x)$, (Кантора), $\Phi(x) = x + \tau(x)$, $\Phi^{-1}(x)$ – обратная к $\Phi(x)$. Использовать тот факт, что всякое множество положительной меры содержит неизмеримое подмножество.

23. Доказать, что если функции f и g измеримы на χ, то и функции

$m(x) = min \{f(x), g(x)\}$, $M(x) = max \{f(x), g(x)\}$ измеримы на χ.

24. Пусть $\chi(x)$ – характеристическая функция множества рациональных чисел. Доказать, что ее производная на любую функцию $f: \chi \subset R \to R$, есть функция измеримая.

25. Доказать, что всякая функция ограниченной вариации на $[a,b]$ измерима на $[a,b]$.

26. Пусть $f_n \xrightarrow{n.b.} f$, $f_n(x) \leq a$, тогда $f(x) \leq a$ почти всюду. Доказать.

27. Будет ли верна теорема Егорова, если отказаться от условия, что $\mu(x) < \infty$? (Рассмотреть последовательность $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x^2}{n}\right\}$ на множестве $\chi = (-\infty, \infty)$).

28. Если f представима в виде предела всюду сходящейся последовательности непрерывных функций, то f непрерывна всюду, кроме множества точек первой категории, т.е. множества, которое можно представить на более чем счетного объединения нигде не плотных множеств.

29. Любая монотонная функция дифференцируема всюду, кроме, быть может, некоторого множества меры ноль.

30. Множество простых функций замкнуто относительно алгебраических операций.

Литература.

1. Кирилов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979.

2. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск.: Университетское, 1984.

3. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1955.

4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.

5. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.

6. Окстоби Дж. Мера и категория. – М.: Мир, 1974.

7. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. –М.: Мир, 1967.

8. Шварц Л. Анализ. т. I. – М.: Мир, 1972.

9. Рунова Л.П., Рунов Л.В. Методические указания. Элементы теории множеств. ч. I, II. – Ростов – на – Дону.: УПЛ, 1997.

10. Рунова Л.П., Рунов Л.В. Методические указания. Элементы теории мер.– Ростов – на – Дону.: УПЛ, 1999.

11. Блюмин И.Г. Субъективная школа в политической экономии. Т.II. –М.: Коммунистическая академия, 1928.

12. Маркс К. Математические рукописи. –М.: Наука, 1968.

13. Курно Ог. Основы теории шансов и верочтностей.– М.: Наука, 1970.

14. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу.– М.: Прсвещение, 1973.

15. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976.